

Reconstrucción de Superficies por Nube de Puntos

Sebastián Sánchez

2023

Tabla de Contenidos

Introducción

Complejos Simpliciales

- Complejo de Delaunay

- Complejo de Čech

- Complejo de Rips

Algoritmos

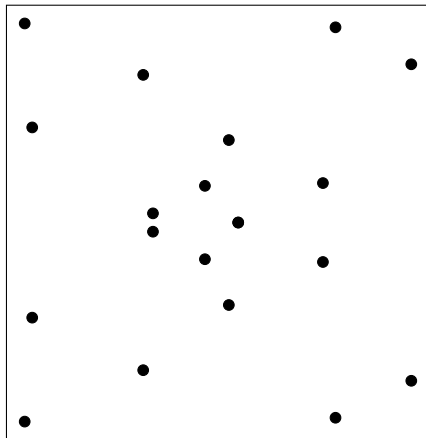
- Complejo de Čech

- Complejo de Rips

Dada una muestra finita de puntos P en \mathbb{R}^N que viven sobre una superficie $M \subset \mathbb{R}^N$:

- ¿Es posible reconstruir la superficie?
- ¿Qué entendemos por reconstruir?
- ¿Qué tipo de superficies y bajo qué condiciones?

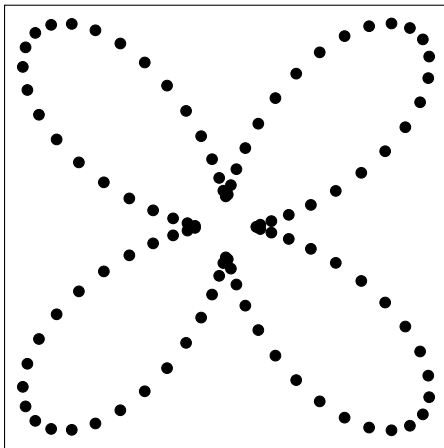
Ambigüedades



Definición (Muestra Densa y Ruidosa)

P es ϵ -densa si $M \subset P^{\oplus \epsilon}$ y δ -ruidosa si $P \subset M^{\oplus \delta}$.

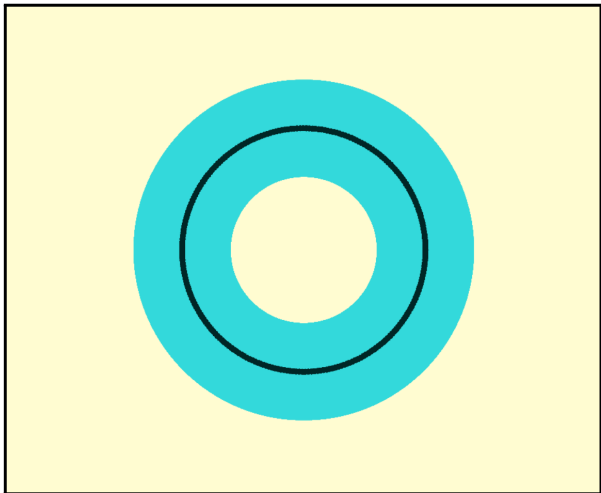
Ambigüedades



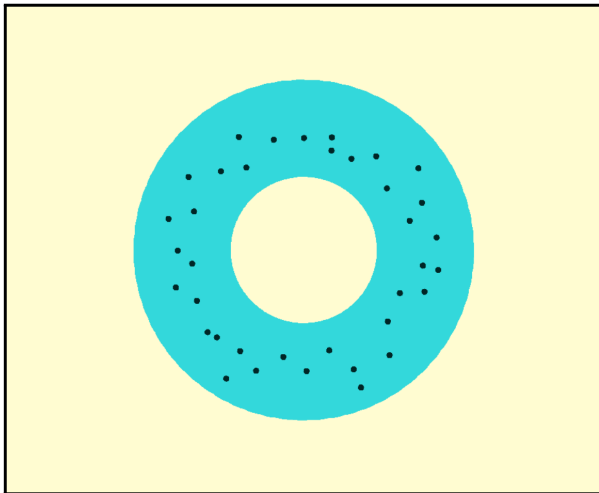
Definición (Muestra Densa y Ruidosa)

P es ϵ -densa si $M \subset P^{\oplus \epsilon}$ y δ -ruidosa si $P \subset M^{\oplus \delta}$.

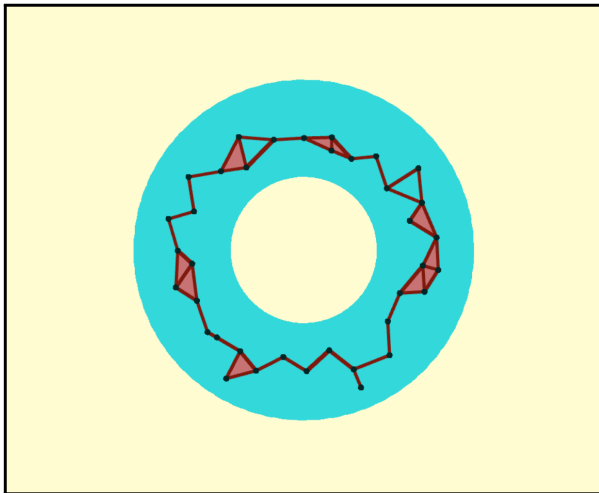
¿Qué entendemos por reconstruir?



¿Qué entendemos por reconstruir?

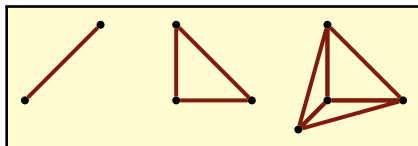


¿Qué entendemos por reconstruir?

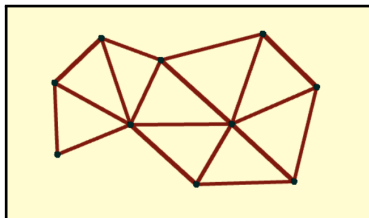


Complejos Simpliciales

Un símlice es la generalización de un triángulo.



Y un complejo simplicial es la generalización de una triangulación.



¿Qué entendemos por reconstruir?

Definición (Reconstrucción Fidedigna)

Un complejo simplicial K con conjunto de vértices en $P \subset \mathbb{R}^N$ reconstruye a un espacio $X \subset \mathbb{R}^N$ de manera fidedigna si

1. K es geoméricamente realizable.
2. $\bigcup K := \bigcup_{\sigma \in K} \text{conv } \sigma$ está contenido en una región tubular de X .
3. La proyección de $\bigcup K$ a X es un homeomorfismo.

De ahora en adelante M es una d -subvariedad compacta, orientable, suave incrustada en \mathbb{R}^N (con o sin borde) y P es una muestra ϵ -densa δ -ruidosa de M .

¿Qué entendemos por reconstruir?

Definición (Reconstrucción Fidedigna)

Un complejo simplicial K con conjunto de vértices en $P \subset \mathbb{R}^N$ reconstruye a un espacio $X \subset \mathbb{R}^N$ de manera fidedigna si

1. K es geoméricamente realizable.
2. $\bigcup K := \bigcup_{\sigma \in K} \text{conv } \sigma$ está contenido en una región tubular de X .
3. La proyección de $\bigcup K$ a X es un homeomorfismo.

De ahora en adelante M es una d -subvariedad compacta, orientable, suave incrustada en \mathbb{R}^N (con o sin borde) y P es una muestra ϵ -densa δ -ruidosa de M .

¿Qué entendemos por reconstruir?

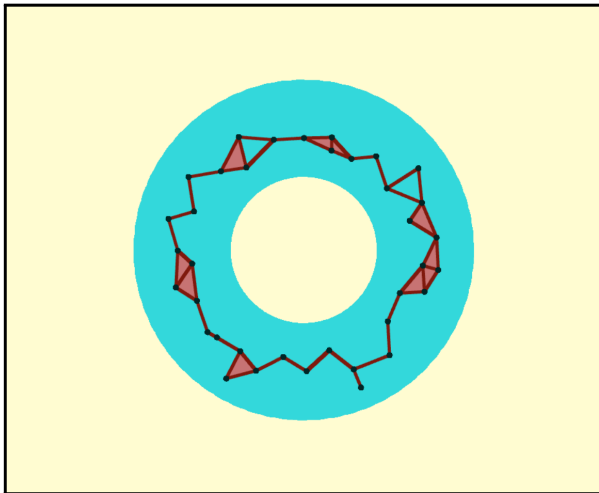


Figura: No es una reconstrucción fidedigna.

Tabla de Contenidos

Introducción

Complejos Simpliciales

- Complejo de Delaunay

- Complejo de Čech

- Complejo de Rips

Algoritmos

- Complejo de Čech

- Complejo de Rips

¿Cómo construir complejos?

- Queremos unir los puntos considerando su cercanía
- Idea natural: considerar bolas centradas en los puntos de muestra

¿Cómo construir complejos?

- Queremos unir los puntos considerando su cercanía
- Idea natural: considerar bolas centradas en los puntos de muestra

Voronoi

Una celda Voronoi V_p consiste en los puntos que están más cercanos a p que a cualquier otro punto q de P .

$$V_p := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |xp| \leq |xq| \quad \forall q \neq p \right\}.$$

El diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos, V_P , es la colección de celdas de Voronoi de sus elementos.

$$V_P := \{V_p : p \in P\}.$$

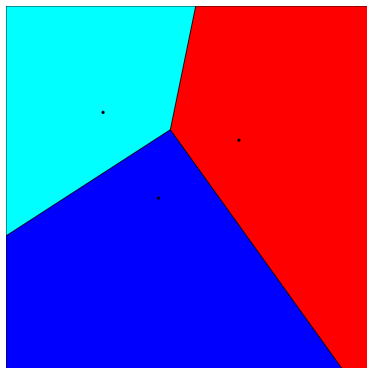


Figura: Diagrama de Voronoi de 3 puntos en el plano.

Voronoi

Una celda Voronoi V_p consiste en los puntos que están más cercanos a p que a cualquier otro punto q de P .

$$V_p := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |xp| \leq |xq| \quad \forall q \neq p \right\}.$$

El diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos, V_P , es la colección de celdas de Voronoi de sus elementos.

$$V_P := \{V_p : p \in P\}.$$

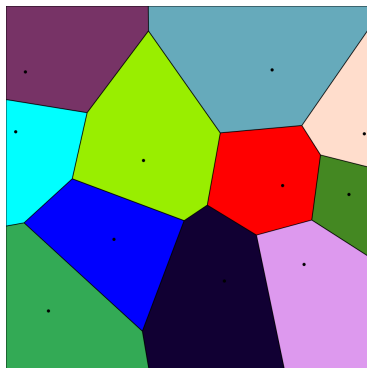


Figura: Diagrama de Voronoi de 10 puntos en el plano.

Complejo de Delaunay

Definición (Complejo de Delaunay)

$$\text{Del}(P) = \{Q \subset P: \bigcap_{p \in Q} V_p \neq \emptyset\}$$

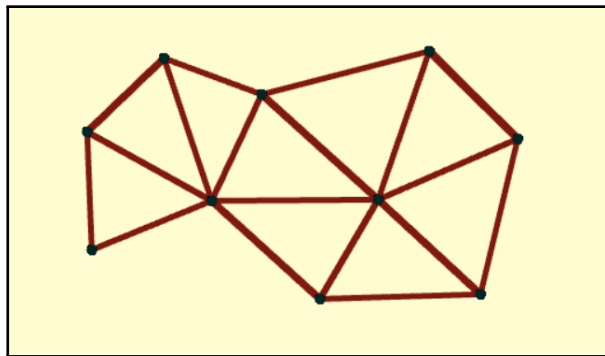


Figura: No es un complejo de Delaunay.

¿Cómo reconstruye $\text{Del}(P)$?

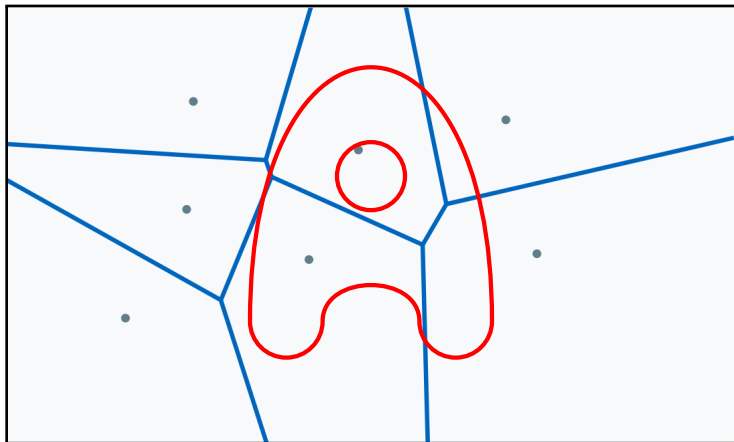
Teorema (Edelsbrunner, H., Shah, N. R. (1994, June))

Si P es tal que V_P satisface:

1. M no intersecta solamente a la frontera de V_Q y
2. $V_{Q,M}$ es una bola dimensión $d - \dim Q$ o una semibola de dimensión $d - \dim Q - 1$

para todo $Q \subset P$, entonces $\bigcup \text{Del}_M(P)$ es homeomorfo¹ M .

¹ X y Y son homomorfos si existe funciones continuas $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g = \text{id}_Y$ y $g \circ f = \text{id}_X$.



¿Y si en vez de hacer crecer las bolas les damos un tamaño fijo?

Complejo de Čech

Definición (Complejo de Čech)

El complejo de Čech a escala ϵ se define por:

$$Q \in \check{C}(P, \epsilon) \text{ si y solo si } \bigcap_{q \in Q} B(q, \epsilon) \neq \emptyset.$$

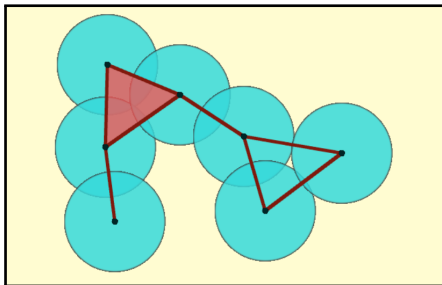


Figura: Complejo de Čech de 7 puntos en el plano.

¿Cómo reconstruye Čech?

Teorema (Nervio)

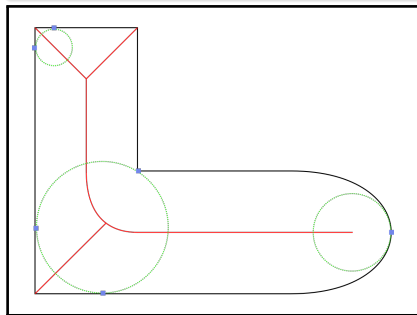
$\check{C}(P, \epsilon)$ es homotópicamente equivalente² a $\bigcup_{p \in P} B(p, \epsilon) = P^{\oplus \epsilon}$.

² X y Y son homotópicamente equivalentes si existen funciones continuas $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g \sim id_Y$ y $g \circ f \sim id_X$

¿Cómo reconstruye Čech?

Teorema (Niyogi, P., Smale, S., Weinberger, S. (2008))

Si P es una muestra $\epsilon/2$ -densa 0-ruidosa de M y $\epsilon < \sqrt{3/5} \mathcal{R}$ entonces $P^{\oplus \epsilon}$ y M son homotópicamente equivalentes.



El alcance de un conjunto X es

$$\mathcal{R} := \inf_{x \in X} d(x, \text{medialAxis}(X))$$

donde $\text{medialAxis}(X)$ son los $y \in \mathbb{R}^N$ que tienen al menos 2 puntos más cercanos a X .

Complejo de Rips

Definición (Complejo de Rips)

El complejo de Vietoris-Rips a escala ϵ se define por:

$$Q \in \text{VR}(P, \epsilon) \text{ si y solo si } \text{diam } Q \leq \epsilon.$$

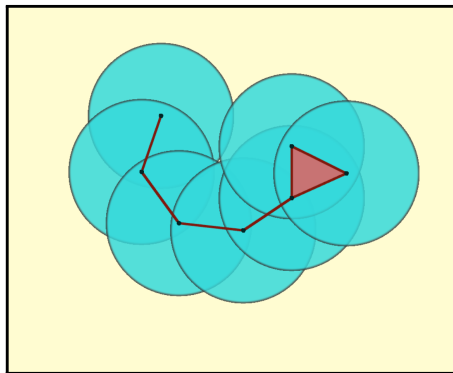


Figura: El complejo de Rips de 7 puntos en el plano.

- El complejo está determinado por sus aristas.



- Solo se requiere información espacial para computar las aristas el resto es combinatorial.

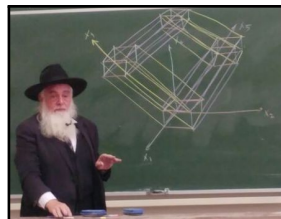


Figura: Eliyahu Rips.
Matemático Israelí.

- El complejo está determinado por sus aristas.



- Solo se requiere información espacial para computar las aristas el resto es combinatorial.



Figura: Leopold Vietoris. Matemático Austro-Húngaro.

¿Qué tanto se parece Čech y Rips?

Relación entre Čech y Rips.

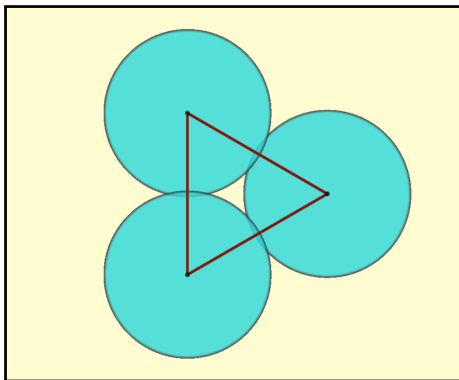


Figura: $\check{C}(P, 0.45)$

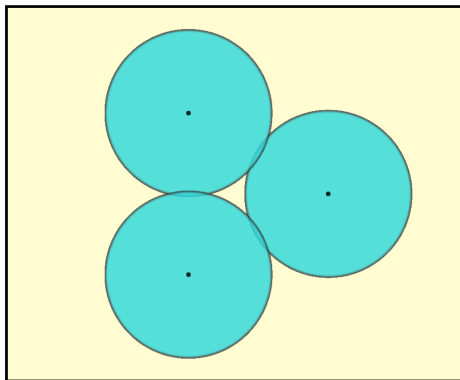


Figura: $VR(P, 0.45)$

Relación entre Čech y Rips.

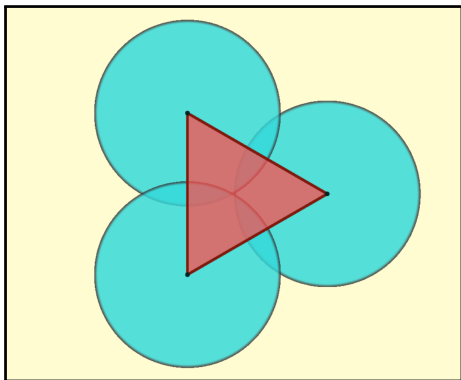


Figura: $\check{C}(P, 0.5)$

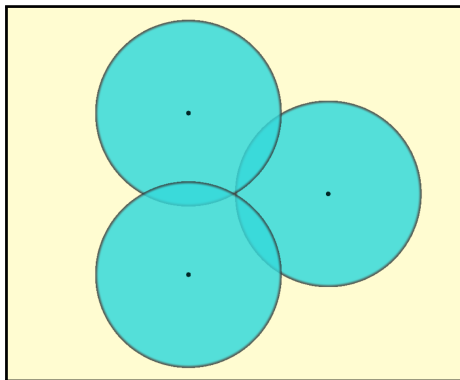


Figura: $VR(P, 0.5)$

Relación entre Čech y Rips.

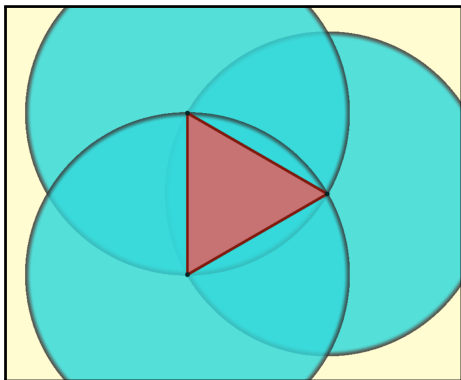


Figura: $\check{C}(P, 0.87)$

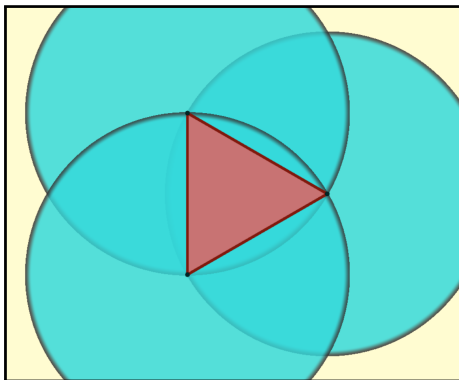


Figura: $VR(P, 0.87)$

Proposición (a veces, Rips se parece a Čech)

$$\check{C}(P, \epsilon) \subset \text{VR}(P, 2\epsilon) \subset \check{C}(P, 2\epsilon\rho_N)$$

donde $\rho_N := \sqrt{\frac{2N}{N+1}}$.

Tabla de Contenidos

Introducción

Complejos Simpliciales

Complejo de Delaunay

Complejo de Čech

Complejo de Rips

Algoritmos

Complejo de Čech

Complejo de Rips

Antes de crear un algoritmo debemos establecer la interfaz:

- La entrada son puntos en posición general y un parámetro de escala.
- La salida son los símplexes maximales.

Computar el Complejo de Čech

Observación

$Q \in \check{C}(P, \epsilon)$ si y solo si la bola de cobertura mínima de Q tiene radio menor a ϵ .

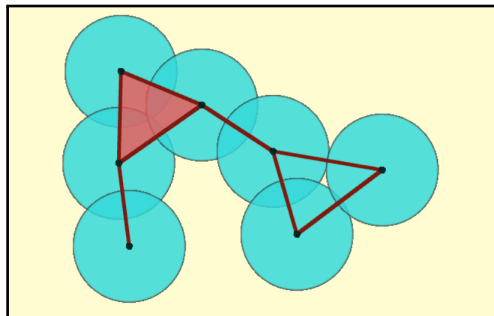


Figura: Eduard Čech. Matemático Austro-Húngaro.

Computar el Complejo de Čech

Idea

Buscar todas las posibles bolas de cobertura mínimas de radio menor a ϵ .

¿Complejidad? hay que buscar la bola de cobertura mínima en cada dimensión:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{O}(n^k) \leq \mathcal{O}((N+1) n^{N+1})$$

¿Cuánto toma computar la bola de cobertura mínima?

Computar el Complejo de Čech

Idea

Buscar todas las posibles bolas de cobertura mínimas de radio menor a ϵ .

¿Complejidad? hay que buscar la bola de cobertura mínima en cada dimensión:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{O}(n^k) \leq \mathcal{O}((N+1) n^{N+1})$$

¿Cuánto toma computar la bola de cobertura mínima?

Computar el Complejo de Čech

Idea

Buscar todas las posibles bolas de cobertura mínimas de radio menor a ϵ .

¿Complejidad? hay que buscar la bola de cobertura mínima en cada dimensión:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{O}(n^k) \leq \mathcal{O}((N+1) n^{N+1})$$

¿Cuánto toma computar la bola de cobertura mínima?

Bola de Cobertura Mínima

Definición (Bola de Cobertura Mínima)

La bola de cobertura mínima, $MB(P)$, es la bola de menor radio tal que $P \subset MB(P)$.

Observaciones:

- $MB(P)$ existe y es única.
- $MB(P)$ está determinada por a lo más $N + 1$ puntos de P .

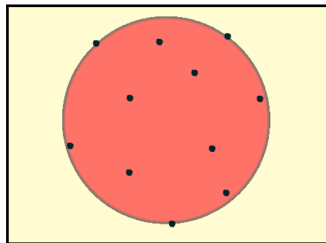


Figura: Bola de Cobertura Mínima de 11 puntos en el plano.

Algoritmo de Welzl

```
1: function MinBall( $P, S$ )
2:   if  $P = \emptyset$  or  $\text{card } S = N + 1$  then
3:     return SphereThrough( $S$ )
4:   pick  $p \in P$ 
5:    $B \leftarrow \text{MinBall}(P - p, S)$ 
6:   if  $p \in B$  then
7:     return  $B$ 
8:   return MinBall( $P - p, S + p$ )
```

¿Complejidad? Caso esperado de $\mathcal{O}(n)$, pero peor caso de $\mathcal{O}(n^3)$.



Figura: Emo Welzl.
Científico
Computacional
Austriaco.

Computar el Complejo de Čech

Computar todo el complejo de Čech debería tomar $\mathcal{O}((N + 1) n^{N+4})$

Recordar debemos retornar sólo los símlices maximales.

- Podemos verificar que los símlices más chicos no estén en símlices más grandes (Top-Down).
- Podemos construir los símlices más grandes a partir de los símlices más chicos (Bottom-up).

Computar el Complejo de Čech

Computar todo el complejo de Čech debería tomar $\mathcal{O}((N + 1) n^{N+4})$

Recordar debemos retornar sólo los símlices maximales.

- Podemos verificar que los símlices más chicos no estén en símlices más grandes (Top-Down).
- **Podemos construir los símlices más grandes a partir de los símlices más chicos (Bottom-up).**

Computar el Complejo de Čech

```
1: function computeCechSkeleton( $P, \epsilon, \text{dim}$ )
2:    $L \leftarrow P$ 
3:   for  $d \leftarrow 1, \dots, \text{dim}$  do
4:      $H \leftarrow \emptyset$ 
5:     for each simplex  $\sigma \in L$  of  $\dim \sigma = d - 1$  do
6:       for each  $p \in P$  not in  $\sigma$  do
7:         if radius of  $MB(\sigma \cup \{p\}) < \epsilon$  then
8:            $H \leftarrow H \cup \{\sigma \cup \{p\}\}$ 
9:        $H \leftarrow H \cup$  simplices in  $L$  that weren't previously merged
10:     $L \leftarrow H$ 
11: return  $L$ 
```

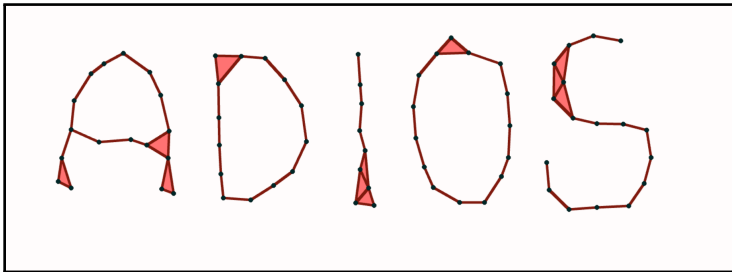
¿Complejidad? Peor caso de $\mathcal{O}(\text{dim} \cdot n^{\text{dim}+4})$.

Computar el Complejo de Rips






```
1: function computeRipsSkeleton( $P, \epsilon, \text{dim}$ )
2:    $L \leftarrow P$ 
3:   for  $d \leftarrow 1, \dots, \text{dim}$  do
4:      $H \leftarrow \emptyset$ 
5:     for each simplex  $\sigma \in L$  of  $\dim \sigma = d - 1$  do
6:       for each  $p \in P$  not in  $\sigma$  do
7:         if  $\text{diam}(\sigma \cup \{p\}) < \epsilon$  then
8:            $H \leftarrow H \cup \{\sigma \cup \{p\}\}$ 
9:        $H \leftarrow H \cup$  simplices in  $L$  that weren't previously merged
10:     $L \leftarrow H$ 
11: return  $L$ 
```

¿Complejidad? Peor caso de $\mathcal{O}(\text{dim}^2 \cdot n^{\text{dim}+1})$.

Fin



Referencias

-  De Silva, V., & Ghrist, R. (2007). Coverage in sensor networks via persistent homology. *Algebraic & Geometric Topology*, 7(1), 339-358.
-  Edelsbrunner, H., & Shah, N. R. (1994, June). Triangulating topological spaces. In *Proceedings of the tenth annual symposium on Computational geometry* (pp. 285-292).
-  Niyogi, P., Smale, S., Weinberger, S. (2008). Finding the homology of submanifolds with high confidence from random samples. *Discrete & Computational Geometry*, 39, 419-441.
-  Welzl, E. (2005, June). Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). In *New Results and New Trends in Computer Science: Graz, Austria, June 20–21, 1991 Proceedings* (pp. 359-370). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
-  Dantchev, S., & Ivrissimtzis, I. (2012). Efficient construction of the Čech complex. *Computers & graphics*, 36(6), 708-713.