Reconstrucción de Superficies por Nube de Puntos

Sebastián Sánchez

2023

Tabla de Contenidos

Introducción

Complejos Simpliciales
- Complejo de Delaunay
- Complejo de Čech
- Complejo de Rips

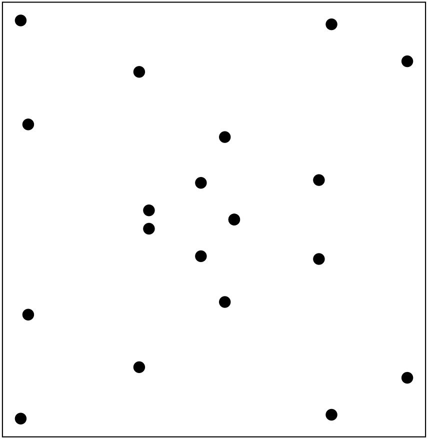
Algoritmos
- Complejo de Čech
- Complejo de Rips

Introducción

Dada una muestra finita de puntos P en $\mathbb{R}^N$ que viven sobre una superficie $M \subset \mathbb{R}^N$:

- ¿Es posible reconstruir la superficie?
- ¿Qué entendemos por reconstruir?
- ¿Qué tipo de superficies y bajo qué condiciones?

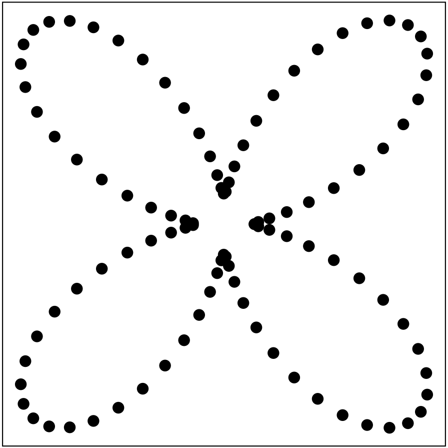
Ambigüedades



Definición (Muestra Densa y Ruidosa)

P es ϵ-densa si $M \subset P^{\oplus\epsilon}$ y δ-ruidosa si $P \subset M^{\oplus\delta}$.

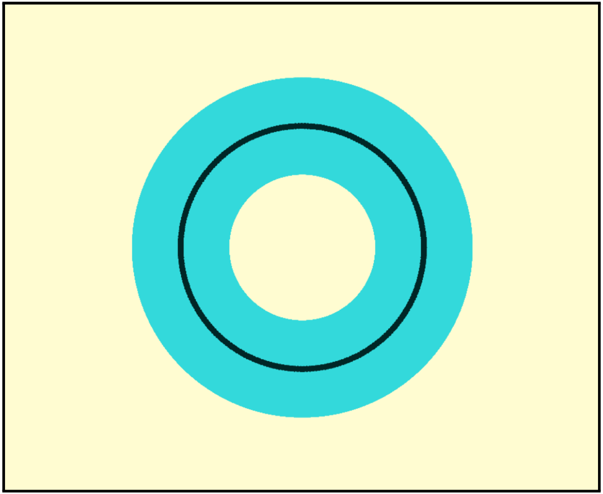
Ambigüedades



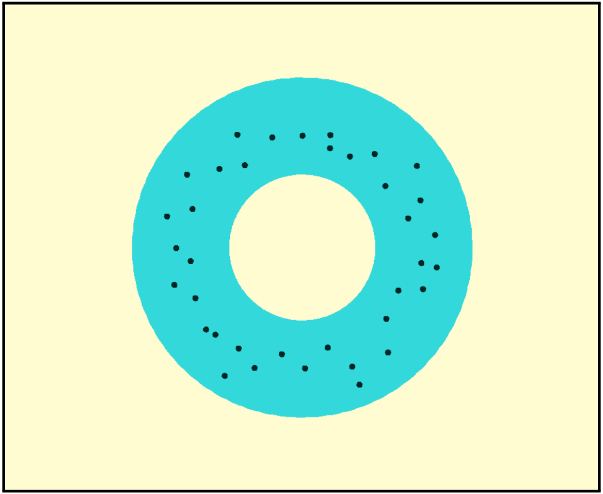
Definición (Muestra Densa y Ruidosa)

P es ϵ-densa si $M \subset P^{\oplus \epsilon}$ y δ-ruidosa si $P \subset M^{\oplus \delta}$.

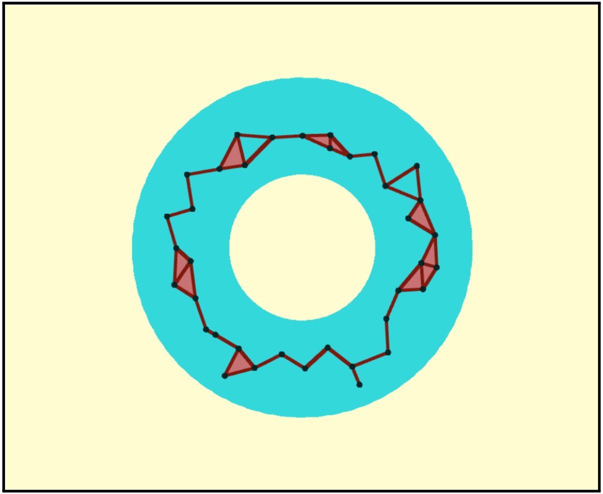
¿Qué entendemos por reconstruir?



¿Qué entendemos por reconstruir?

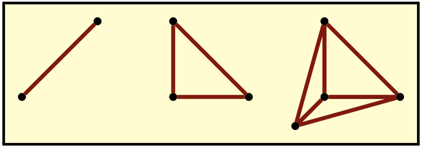


¿Qué entendemos por reconstruir?

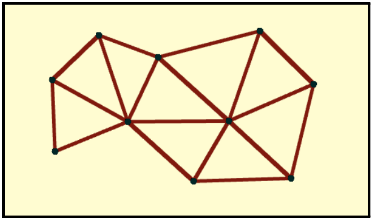


Complejos Simpliciales

Un símplice es la generalización de un triángulo.



Y un complejo simplicial es la generalización de una triangulación.



¿Qué entendemos por reconstruir?

Definición (Reconstrucción Fidedigna)

Un complejo simplicial K con conjunto de vértices en $P \subset \mathbb{R}^N$ reconstruye a un espacio $X \subset \mathbb{R}^N$ de manera fidedigna si

1. K es geometricamente realizable.
2. $\bigcup K := \bigcup_{\sigma \in K} \operatorname{conv} \sigma$ está contenido en una región tubular de X.
3. La proyección de $\bigcup K$ a X es un homeomorfismo.

De ahora en adelante M es una d-subvariedad compacta, orientable, suave incrustada en $\mathbb{R}^N$ (con o sin borde) y P es una muestra ϵ-densa δ-ruidosa de M.

¿Qué entendemos por reconstruir?

Definición (Reconstrucción Fidedigna)

Un complejo simplicial K con conjunto de vértices en $P \subset \mathbb{R}^N$ reconstruye a un espacio $X \subset \mathbb{R}^N$ de manera fidedigna si

1. K es geometricamente realizable.
2. $\bigcup K := \bigcup_{\sigma \in K} \operatorname{conv} \sigma$ está contenido en una región tubular de X.
3. La proyección de $\bigcup K$ a X es un homeomorfismo.

De ahora en adelante M es una d-subvariedad compacta, orientable, suave incrustada en $\mathbb{R}^N$ (con o sin borde) y P es una muestra ϵ-densa δ-ruidosa de M.

¿Qué entendemos por reconstruir?

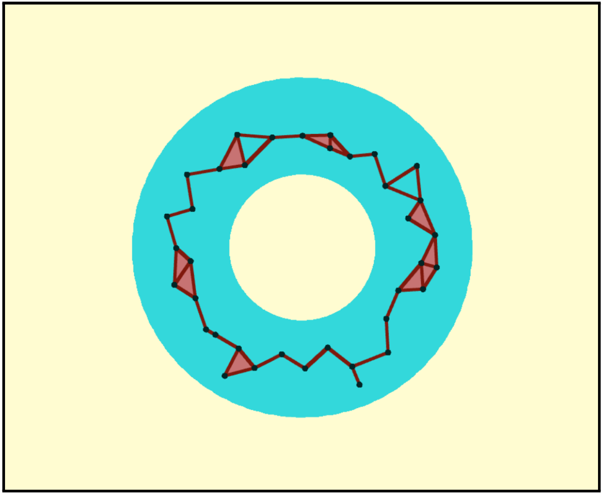


Figura: No es una reconstrucción fidedigna.

Tabla de Contenidos

Introducción

Complejos Simpliciales
- Complejo de Delaunay
- Complejo de Čech
- Complejo de Rips

Algoritmos
- Complejo de Čech
- Complejo de Rips

¿Cómo construir complejos?

- Queremos unir los puntos considerando su cercanía
- Idea natural: considerar bolas centradas en los puntos de muestra

¿Cómo construir complejos?

- Queremos unir los puntos considerando su cercanía
- Idea natural: considerar bolas centradas en los puntos de muestra

Voronoi

- Una celda Voronoi V_p consiste en los puntos que están más cercanos a p que a cualquier otro punto q de P.

$$V_p := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \colon |xp| \leq |xq| \quad \forall q \neq p \right\}.$$

- El diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos, V_P, es la colección de celdas de Voronoi de sus elementos.

$$V_P := \{ V_p \colon p \in P \}.$$

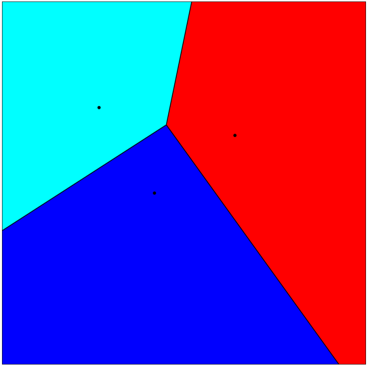


Figura: Diagrama de Voronoi de 3 puntos en el plano.

Voronoi

- Una celda Voronoi V_p consiste en los puntos que están más cercanos a p que a cualquier otro punto q de P.

$$V_p := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \colon |xp| \leq |xq| \quad \forall q \neq p \right\}.$$

- El diagrama de Voronoi de un conjunto de puntos, V_P, es la colección de celdas de Voronoi de sus elementos.

$$V_P := \{ V_p \colon p \in P \}.$$

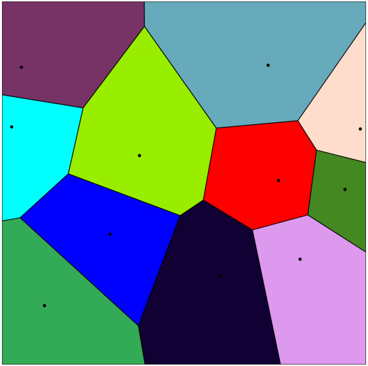


Figura: Diagrama de Voronoi de 10 puntos en el plano.

Complejo de Delaunay

Definición (Complejo de Delaunay)

$$\mathrm{Del}(P) = \{Q \subset P \colon \bigcap_{p \in Q} V_p \neq \varnothing\}$$

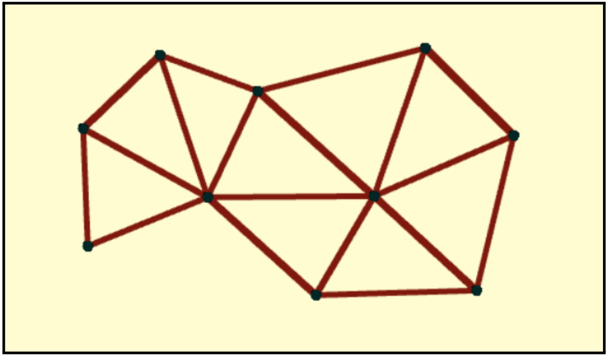


Figura: No es un complejo de Delaunay.

¿Cómo reconstruye Del(P)?

Teorema (Edelsbrunner, H., Shah, N. R. (1994, June))

Si P es tal que V_P satisface:

1. M no intersecta solamente a la frontera de V_Q y
2. $V_{Q,M}$ es una bola dimensión $d - \dim Q$ o una semibola de dimensión $d - \dim Q - 1$

para todo $Q \subset P$, entonces $\bigcup \mathrm{Del}_M(P)$ es homeomorfo[1] M.

[1] X y Y son homemorfos si existe funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$.

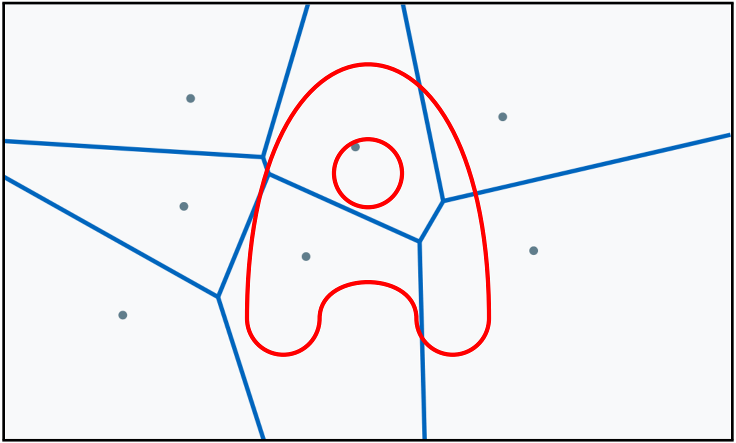


Figura: No satisface ninguna hipótesis del teorema.

¿Y si en vez de hacer crecer las bolas les damos un tamaño fijo?

Complejo de Čech

Definición (Complejo de Čech)

El complejo de Čech a escala ϵ se define por:

$$Q \in \check{C}(P, \epsilon) \text{ si y solo si } \bigcap_{q \in Q} B(q, \epsilon) \neq \varnothing.$$

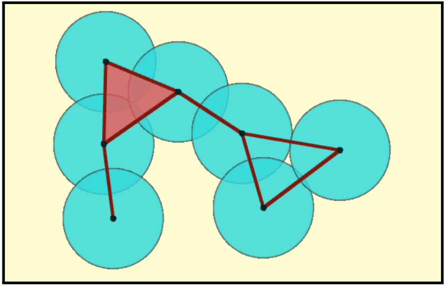


Figura: Complejo de Čech de 7 puntos en el plano.

¿Cómo reconstruye Čech?

Teorema (Nervio)

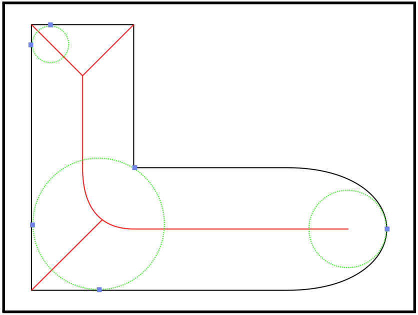
$\check{C}(P, \epsilon)$ es homotópicamente equivalente[2] a $\bigcup_{p \in P} B(p, \epsilon) = P^{\oplus \epsilon}$.

[2] X y Y son homotópicamente equivalentes si existen funciones continuas $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to X$ tales que $f \circ g \sim id_Y$ y $g \circ f \sim id_X$

¿Cómo reconstruye Čech?

Teorema (Niyogi, P., Smale, S., Weinberger, S. (2008))

Si P es una muestra $\epsilon/2$-densa 0-ruidosa de M y $\epsilon < \sqrt{3/5}\,\mathcal{R}$ entonces $P^{\oplus\epsilon}$ y M son homotópicamente equivalentes.



El alcance de un conjunto X es

$$\mathcal{R} := \inf_{x \in X} d(x, \mathrm{medialAxis}(X))$$

donde medialAxis(X) son los $y \in \mathbb{R}^N$ que tienen al menos 2 puntos más cercanos a X.

¿Podemos relajar las condiciones?

Complejo de Rips

Definición (Complejo de Rips)

El complejo de Vietoris-Rips a escala ϵ se define por:

$$Q \in \mathsf{VR}(P, \epsilon) \text{ si y solo si } \operatorname{diam} Q \leq \epsilon.$$

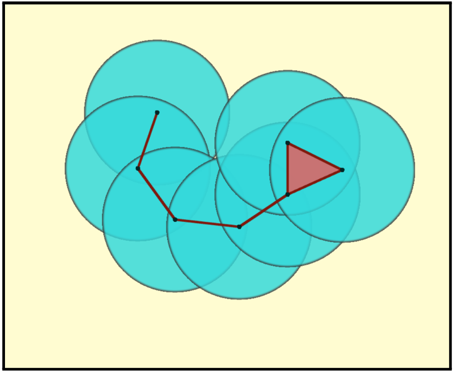
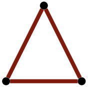


Figura: El complejo de Rips de 7 puntos en el plano.

Observaciones

- El complejo está determinado por sus aristas.



- Solo se requiere información espacial para computar las aristas el resto es combinatorial.

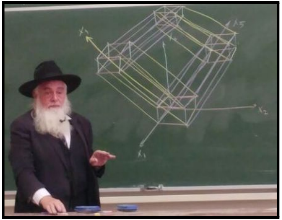
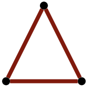


Figura: Eliyahu Rips. Matemático Israelí.

Observaciones

- El complejo está determinado por sus aristas.



- Solo se requiere información espacial para computar las aristas el resto es combinatorial.

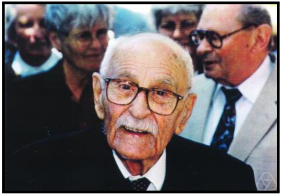


Figura: Leopold Vietoris. Matemático Austro-Húngaro.

¿Qué tanto se parece Čech y Rips?

Relación entre Čech y Rips.

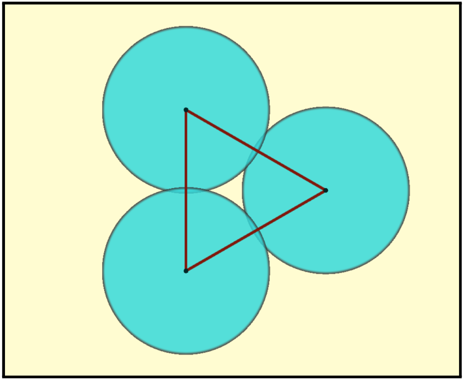


Figura: $\check{C}(P, 0.45)$

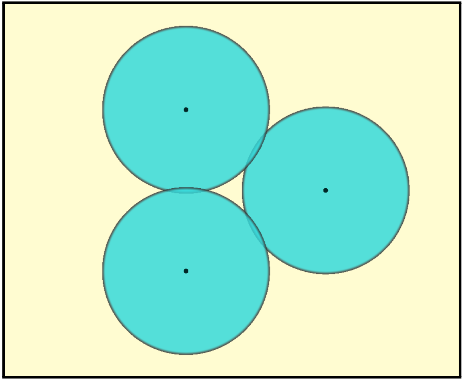


Figura: $VR(P, 0.45)$

Relación entre Čech y Rips.

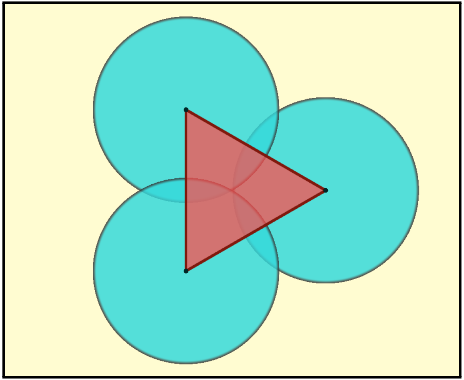


Figura: $\check{C}(P, 0.5)$

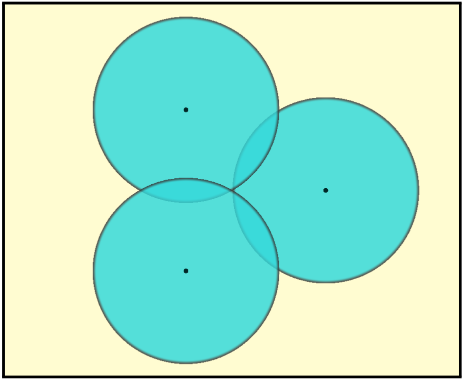


Figura: $\mathrm{VR}(P, 0.5)$

Relación entre Čech y Rips.

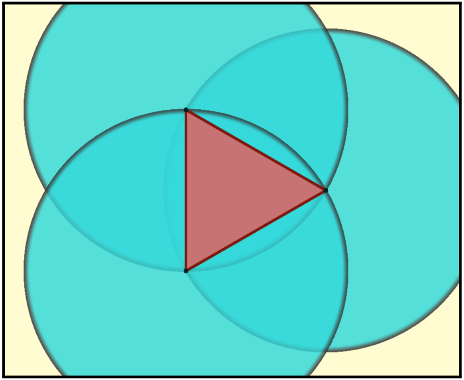


Figura: $\check{C}(P, 0.87)$

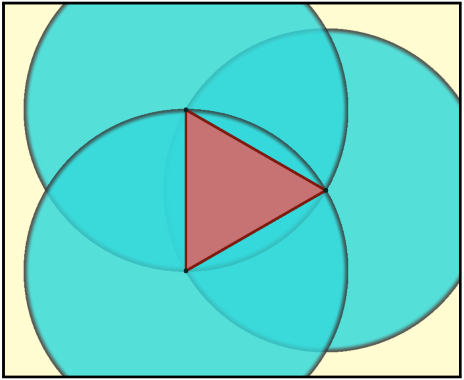


Figura: $VR(P, 0.87)$

Relación entre Čech y Rips.

Proposición (a veces, Rips se parece a Čech)

$$\check{\mathrm{C}}(P,\epsilon) \subset \mathrm{VR}(P,2\epsilon) \subset \check{\mathrm{C}}(P,2\epsilon\rho_N)$$

donde $\rho_N := \sqrt{\frac{2N}{N+1}}$.

Tabla de Contenidos

Introducción

Complejos Simpliciales
- Complejo de Delaunay
- Complejo de Čech
- Complejo de Rips

Algoritmos
- Complejo de Čech
- Complejo de Rips

Observaciones

Antes de crear un algoritmo debemos establecer la interfaz:

- La entrada son puntos en posición general y un parámetro de escala.
- La salida son los símplices maximales.

Computar el Complejo de Čech

Observación

$Q \in \check{C}(P, \epsilon)$ si y solo sí la bola de cobertura mínima de Q tiene radio menor a ϵ.

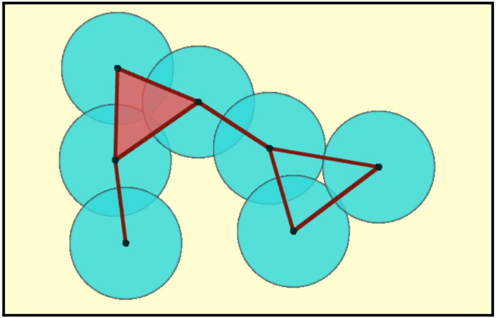


Figura: Eduard Čech. Matemático Austro-Húngaro.

Computar el Complejo de Čech

Idea

Buscar todas las posibles bolas de cobertura mínima de radio menor a ϵ.

¿Complejidad? hay que buscar la bola de cobertura mínima en cada dimensión:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{O}(n^k) \leq \mathcal{O}((N+1)\, n^{N+1})$$

¿Cuánto toma computar la bola de cobertura mínima?

Computar el Complejo de Čech

Idea

Buscar todas las posibles bolas de cobertura mínima de radio menor a ϵ.

¿Complejidad? hay que buscar la bola de cobertura mínima en cada dimensión:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{O}(n^k) \leq \mathcal{O}((N+1)\, n^{N+1})$$

¿Cuánto toma computar la bola de cobertura mínima?

Computar el Complejo de Čech

Idea

Buscar todas las posibles bolas de cobertura mínima de radio menor a ϵ.

¿Complejidad? hay que buscar la bola de cobertura mínima en cada dimensión:

$$\sum_{k=1}^{N+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{N+1} \mathcal{O}(n^k) \leq \mathcal{O}((N+1)\, n^{N+1})$$

¿Cuánto toma computar la bola de cobertura mínima?

Bola de Cobertura Mínima

Definición (Bola de Cobertura Mínima)

La bola de cobertura mínima, $MB(P)$, es la bola de menor radio tal que $P \subset MB(P)$.

Observaciones:

- $MB(P)$ existe y es única.
- $MB(P)$ está determinada por a lo más $N+1$ puntos de P.

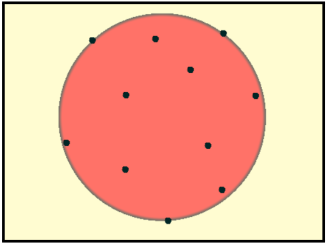


Figura: Bola de Cobertura Mínima de 11 puntos en el plano.

Algoritmo de Welzl

function MinBall(P,S)
    if $P = \varnothing$ or card $S = N + 1$ **then**
        return SphereThrough(S)
    pick $p \in P$
    $B \leftarrow \text{MinBall}(P - p, S)$
    if $p \in B$ **then**
        return B
    return $\text{MinBall}(P - p, S + p)$

¿Complejidad? Caso esperado de $\mathcal{O}(n)$, pero peor caso de $\mathcal{O}(n^3)$.

Figura: Emo Welzl. Científico Computacional Austriaco.

Computar el Complejo de Čech

Computar todo el complejo de Čech debería tomar $\mathcal{O}((N+1)\, n^{N+4})$

Recordar debemos retornar sólo los símplices maximales.

- Podemos verificar que los símplices más chicos no estén en símplices más grandes (Top-Down).
- **Podemos construir los símplices más grandes a partir de los símplices más chicos (Bottom-up).**

Computar el Complejo de Čech

Computar todo el complejo de Čech debería tomar $\mathcal{O}((N+1)\,n^{N+4})$
Recordar debemos retornar sólo los símplices maximales.

- Podemos verificar que los símplices más chicos no estén en símplices más grandes (Top-Down).
- **Podemos construir los símplices más grandes a partir de los símplices más chicos (Bottom-up).**

Computar el Complejo de Čech

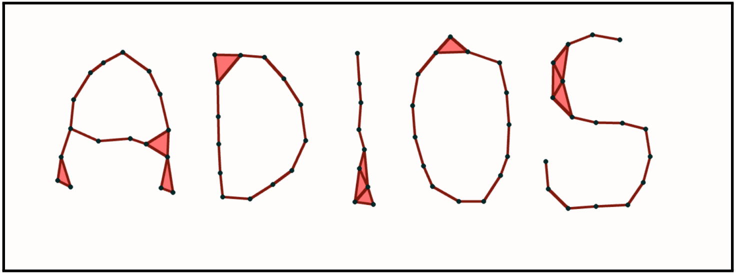
function computeCechSkeleton(P,ϵ,dim)
    $L \leftarrow P$
    for $d \leftarrow 1, \ldots, dim$ **do**
        $H \leftarrow \emptyset$
        for each simplex $\sigma \in L$ of $\dim \sigma = d - 1$ **do**
            for each $p \in P$ not in σ **do**
                if radius of $MB(\sigma \cup \{p\}) < \epsilon$ **then**
                    $H \leftarrow H \cup \{\sigma \cup \{p\}\}$
        $H \leftarrow H \cup$ simplices in L that weren't previously merged
        $L \leftarrow H$
    return L

¿Complejidad? Peor caso de $\mathcal{O}(dim \cdot n^{dim+4})$.

```
function computeRipsSkeleton(P,ϵ,dim)
    L ← P
    for d ← 1, ..., dim do
        H ← ∅
        for each simplex σ ∈ L of dim σ = d − 1 do
            for each p ∈ P not in σ do
                if diam(σ ∪ {p}) < ϵ then
                    H ← H ∪ {σ ∪ {p}}
        H ← H ∪ simplices in L that weren't previously merged
        L ← H
    return L
```

¿Complejidad? Peor caso de $\mathcal{O}(dim^2 \cdot n^{dim+1})$.

Fin



Referencias

- De Silva, V., & Ghrist, R. (2007). Coverage in sensor networks via persistent homology. Algebraic & Geometric Topology, 7(1), 339-358.
- Edelsbrunner, H., & Shah, N. R. (1994, June). Triangulating topological spaces. In Proceedings of the tenth annual symposium on Computational geometry (pp. 285-292).
- Niyogi, P., Smale, S., Weinberger, S. (2008). Finding the homology of submanifolds with high confidence from random samples. Discrete & Computational Geometry, 39, 419-441.
- Welzl, E. (2005, June). Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). In New Results and New Trends in Computer Science: Graz, Austria, June 20–21, 1991 Proceedings (pp. 359-370). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Dantchev, S., & Ivrissimtzis, I. (2012). Efficient construction of the Čech complex. Computers & graphics, 36(6), 708-713.