

# Monografía de Pregado

## “Reconstrucción de Superficies por Nubes de Puntos.”

Sebastián Sánchez

### Resumen

Dada una muestra finita  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  de una superficie, nos gustaría desarrollar herramientas que nos permitan reconstruir esta mediante un complejo simplicial (una triangulación). La principal aplicación de interés es el modelaje 3D, no obstante, las herramientas se extienden a otras aplicaciones tales como reducción de dimensionalidad.

### Índice

<b>1. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. Topología . . . . .	2
1.2. Complejos Simpliciales . . . . .	2
1.3. Geometría Diferencial . . . . .	2
<b>2. Complejos Fundamentales</b>	<b>3</b>
2.1. Complejo de Delaunay . . . . .	3
2.2. Complejo de Čech y Rips . . . . .	4
<b>A. Más sobre Delaunay</b>	<b>6</b>
<b>B. Bola de Cobertura Mínima</b>	<b>6</b>

# 1. Preliminares

## 1.1. Topología

Un espacio topológico es una tupa  $(X, \tau)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\tau$  es una colección de subconjuntos de  $X$  cuyos elementos se dicen abiertos y satisfacen que:  $\emptyset$  y  $X$  son abiertos, la unión (arbitraria) de abiertos es un abierto y la intersección finita de abiertos es un abierto.

Aquí lidiaremos con espacios métricos. Un espacio métrico es una tupa  $(X, d)$  donde  $X$  es un conjunto y  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es una función llamada métrica que satisface:  $d(x, y) = 0$  solo cuando  $y = x$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$  y  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo trío  $x, y, z \in X$ .

Se dice que una colección de conjuntos  $B$  es base de una topología  $\tau$  si todo abierto se puede escribir como unión de elementos de  $B$ , alternativamente, decimos que  $\tau$  es la topología generada por  $B$ . Dado un espacio métrico  $(X, d)$ ,  $X$  es un espacio topológico con la topología generada por las bolas  $B(x, r) := \{y \in X: d(x, y) < r\}$ .

Una función entre espacios topológicos se dice continua si preimágenes de abiertos son abiertos. Una función continua biyectiva que tiene inversa continua y biyectiva se dice homeomorfismo (o función bicontinua). Cuando existe un homeomorfismo entre espacios topológicos  $X$  y  $Y$  denotamos  $X \approx Y$ . Equivalentemente, dos espacios  $X$  y  $Y$  son homeomorfos si existen mapas  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  continuos tal que  $f \circ g = Id_X$  y  $g \circ f = Id_Y$ .

Una homotopía entre funciones  $f, g: X \rightarrow Y$  es una función  $H: [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $H$  es continua y  $H(0, \cdot) = f(\cdot)$  y  $H(1, \cdot) = g(\cdot)$ . Si existe una homotopía entre  $f$  y  $g$  denotamos  $f \sim g$ . Decimos que dos espacios  $X$  y  $Y$  son homotópicamente equivalentes si existen mapas  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $f \circ g \sim Id_X$  y  $g \circ f \sim Id_Y$ .

## 1.2. Complejos Simpliciales

Un complejo simplicial (geométrico) es una colección de símlices que contiene todas las caras e intersecciones de sus elementos. Un  $d$ -símplice se define como la cáscara convexa  $\text{conv}\{v_0, \dots, v_d\}$  de  $d+1$  puntos llamados vértices que son afinmente independientes. La cáscara convexa de un conjunto  $C \subset \mathbb{R}^n$  es el subespacio convexo más chico (en el sentido de subconjunto) que contiene a  $C$ . Se dice que  $v_0, \dots, v_d \in \mathbb{R}^n$  son afinmente independientes si los vectores relativos  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_d - v_0$  son linealmente independientes. Se dice que  $\tau$  es una cara de un  $d$ -símplice  $\sigma$  si es un  $k$ -símplice ( $k < d$ ) cuyos vértices son todos vértices de  $\sigma$ .

El espacio subyacente de un complejo simplicial  $\mathcal{K}$  es la unión de todos sus símlices, denotado  $\bigcup \mathcal{K} := \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma$ .

Un complejo simplicial (abstracto)  $\mathcal{K}$  es una colección finita de conjuntos tal que para todo  $\sigma \in \mathcal{K}$  se tiene que  $\tau \in \mathcal{K}$  para todo  $\tau \subset \sigma$ . Los elementos de un complejo simplicial se dicen símlices. La dimensión de un símplice corresponde a su cantidad de elementos menos uno i.e.  $\dim \sigma = \text{card } \sigma - 1$ . La dimensión de  $\emptyset$  es  $-1$ . Usualmente vamos a tratar con complejos simpliciales abstractos cuyos vértices están en  $\mathbb{R}^n$ .

Una triangulación de un espacio topológico  $X$  es una tupa  $(\mathcal{K}, \iota)$  donde  $\mathcal{K}$  es un complejo simplicial y  $\iota: \bigcup \mathcal{K} \rightarrow X$  es un homeomorfismo.

## 1.3. Geometría Diferencial

Una  $d$ -variedad es un espacio topológico hausdorff (que separa puntos) y paracompacto (que todo cubrimiento tiene un subcubrimiento localmente finito) que localmente se asemeja a  $\mathbb{R}^d$ . Vale decir, para todo punto  $x \in X$  existe un  $U \in X$  abierto vecindad de  $x$  tal que  $U \approx V$  donde  $V$  es un abierto en  $\mathbb{R}^d$ .

Una  $d$ -variedad  $M$  tiene una estructura diferencial si existen homeomorfismos  $\phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  tal que  $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$  y los mapas de transición  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  son diferenciables. A la colección de homeomorfismos  $\{\phi_\alpha\}_\alpha$  se le llama atlas. La misma variedad puede tener distintos atlas, por ello, una  $d$ -variedad diferenciable es una tupa  $(M, A)$  donde  $A$  es un atlas diferenciable.

Una  $d$ -variedad riemanniana es una tupa  $(M, g)$  donde  $M$  es una  $d$ -variedad topológica y  $g = \{g_p\}_{p \in M}$  es una colección de productos internos definidos positivos actuando sobre el espacio tangente de un punto  $p \in M$ .

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

A  $g$  se le dice métrica riemanniana o tensor de riemann.

## 2. Complejos Fundamentales

### 2.1. Complejo de Delaunay

Sea  $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_k\} \in \mathbb{R}^n$  un conjunto de puntos en posición general. Definamos para cada  $x_i \in \mathbb{X}$  el conjunto

$$V_i(\mathbb{X}) := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_i) \leq \text{dist}(x, x_j) \quad \forall i \neq j\}.$$

de los puntos más cercanos a  $x_i$  que a cualquier otro punto de  $\mathbb{X}$ . Si no enumeramos los puntos simplemente escribimos  $V_x(\mathbb{X})$  y omitimos  $\mathbb{X}$  si es claro del contexto. Denotamos por  $\bigcap V_{\mathbb{Y}} := \bigcap_{y \in \mathbb{Y}} V_y$  a la región asociada a  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ . Las regiones  $\bigcap V_{\mathbb{Y}}$  se conocen como objetos de Voronoi.

#### Definición 1: Complejo de Delaunay

Decimos que  $V = \{v_0, \dots, v_d\} \subset \mathbb{X}$  es un símplice de Delaunay si

$$V_{v_0}(\mathbb{X}) \cap V_{v_1}(\mathbb{X}) \cap \dots \cap V_{v_d}(\mathbb{X}) \neq \emptyset.$$

El complejo de Delaunay se compone de todos los símplices de Delaunay y se denota  $\text{Del}(\mathbb{X})$ .

Una caracterización útil de los símplices de Delaunay, es que la bola que los circumscribe no contiene en su interior otros puntos de la muestra.

#### Proposición 1.

$\mathbb{Y} \in \text{Del}(\mathbb{X})$  si y solo si existe una  $n$ -bola cerrada  $B$  tal que  $\mathbb{Y} \subset \partial B$  y  $\mathbb{X} \cap B^\circ = \emptyset$ .

**DEMOSTRACIÓN**  $\Rightarrow$ : Sea  $\mathbb{Y} = \{y_0, \dots, y_d\}$ . Luego, existe  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $r := \text{dist}(y, y_j) = \text{dist}(y, y_i)$  para todo  $0 \leq i, j \leq d$ . Luego,  $B = B(y, r)$  por construcción satisface que  $\mathbb{Y} \subset \partial B$ . Supongamos que  $x \in \mathbb{X} \cap B^\circ \neq \emptyset$ . Luego,  $\text{dist}(x, y) < r$  y por lo tanto  $y \notin \bigcap V_{\mathbb{Y}}$ . Contradicción.

$\Leftarrow$ : El centro de la bola está a la misma distancia de  $\mathbb{Y}$ , por lo tanto  $\bigcap V_{\mathbb{Y}} \neq \emptyset$ . ■

Con esta caracterización podemos probar el siguiente resultado bien conocido.

#### Teorema 1.

$\text{Del}(\mathbb{X})$  es una triangulación de  $\text{conv } \mathbb{X}$ .

**DEMOSTRACIÓN** Pongamos  $\mathbf{t} = Id_{\mathbb{R}^n}$ .

$\Rightarrow$ : Sea  $x \in \bigcup \text{Del}(\mathbb{X})$ . Luego, existe  $\mathbb{Y} \in \text{Del}(\mathbb{X})$  tal que  $x \in \text{conv } \mathbb{Y}$  y por lo tanto  $x \in \text{conv } \mathbb{X}$ .

$\Leftarrow$ : Sea  $x \in \text{conv } \mathbb{X}$ . Separamos dos casos:

- Caso 1:  $\text{card } \mathbb{X} \leq N + 1$ : Entonces existe un única bola que circumscribe a  $\mathbb{X}$  y por lo tanto  $\mathbb{X} \in \text{Del}(\mathbb{X})$ .
- Caso 2:  $\text{card } \mathbb{X} > N + 1$ : Tomar  $\mathbb{Y} = \{y_1, \dots, y_d\}$  los  $d$  puntos más cercanos a  $x$  ordenados por distancias crecientes. Notar  $B(y_d, \text{dist}(x, y_d)) \cap \mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$ . Sea  $y_{d+1}$  el siguiente punto más lejano a  $x$ . Luego,  $x \in \text{conv}(y_1, \dots, y_{N+1})$  y existe una única esfera que circumscribe a  $y_1, \dots, y_{N+1}$  porque los puntos están en posición general.

Dado  $M \subset \mathbb{R}^n$  una superficie (con o sin frontera), denotamos por  $\text{Del}_M(\mathbb{X})$  al complejo formado por aquellos símplices cuyos objetos de Voronoi asociados que intersectan a  $M$ . En símbolos:

$$\text{Del}_M(\mathbb{X}) := \left\{ V \subset \mathbb{X} : \bigcap_{v \in V} V_v \cap M \neq \emptyset \right\}.$$

Decimos que  $\mathbb{X}$  tiene la propiedad de la intersección genérica para una  $d$ -variedad sin borde  $X$  si para todo  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$  el polihedro convexo  $P = \bigcap V_{\mathbb{Y}}$  satisface:

1.  $X \cap P$  es vacío ó
2.  $X \cap P$  tiene dimensión  $d + \dim P - n$  y  $X \cap P^\circ = (X \cap P)^\circ$ .

$\mathbb{X}$  tiene la propiedad de intersección genérica para  $M$  si se cumple lo anterior con  $X = M$  y  $X = \partial M$  si  $M$  tiene borde.

Decimos que  $\mathbb{X}$  tiene la propiedad de la bola cerrada con  $M$  si para cualquier  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$  se satisface que:

1.  $\bigcap V_{\mathbb{Y}} \cap M$  es vacía o (homeomorfo) una  $(d - \dim \mathbb{Y})$ -bola cerrada y
2.  $\bigcap V_{\mathbb{Y}} \cap \partial M$  es vacía o (homeomorfo) a una  $(d - \dim \mathbb{Y} - 1)$ -bola cerrada.

**Teorema 2: Teorema 4.3 de [2]**

Sea  $M$  una  $d$ -variedad compacta en  $\mathbb{R}^n$  con o sin borde y  $\mathbb{X}$  una muestra que tiene la propiedad de la intersección genérica y la propiedad de la bola cerrada con  $M$ . Entonces  $\bigcup \text{Del}_M(\mathbb{X}) \approx M$ .

**DEMOSTRACIÓN** La demostración va por inducción. En cada paso establecemos un homeomorfismo y luego lo extendemos.

Definamos los conjuntos  $B_i := \{\bigcap V_{\mathbb{Y}} \cap M : \dim \mathbb{Y} = d - i\}$ . Por la propiedad de la bola cerrada, todo elemento de  $B_i$  es (homeomorfo a) una  $(d - \dim \mathbb{Y} = i)$ -bola.

Sea  $N = 2^{\text{card} \mathbb{X}}$  e identifiquemos cada  $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$  con un vector canónico  $e_{\mathbb{Y}} \in \mathbb{R}^N$ .

Caso Base: Definamos  $\mathcal{K}_0 := \{e_{\mathbb{Y}} : \mathbb{Y} \subset \mathbb{X}, \dim \mathbb{Y} = d, \bigcap V_{\mathbb{Y}} \cap M \neq \emptyset\}$  y consideremos el mapa  $f_0 : B_0 \rightarrow \mathcal{K}_0$  dado por  $\bigcap V_{\mathbb{Y}} \cap M \mapsto e_{\mathbb{Y}}$ .

Paso Inductivo: Sea  $1 \leq j \leq d - 1$ .

■

## 2.2. Complejo de Cech y Rips

**Definición 2: Complejo de Cech**

Sea  $\varepsilon > 0$ .  $V = \{v_0, \dots, v_d\} \subset \mathbb{X}$  es un  $d$ -símplice de Cech a escala  $\varepsilon$  si

$$B_{\varepsilon}(v_0) \cap \dots \cap B_{\varepsilon}(v_d) \neq \emptyset.$$

El complejo de Cech se compone de los símlices de Cech y se denota por  $\check{C}_{\varepsilon}(\mathbb{X})$ .

Otras caracterizaciones útiles son:

1. Un símplex está en el complejo de Cech a escala  $\varepsilon$  si y solo si la bola de cobertura mínima de sus vértices tiene radio menor que  $\varepsilon$ .
2. El complejo de Cech se corresponde con el nervio de  $\mathbb{X}^{\oplus \varepsilon}$ .

La última de las caracterizaciones nos permite aplicar el teorema del nervio y nos da que  $\check{C}_{\varepsilon} \simeq \bigcup_{x \in \mathbb{X}} B_{\varepsilon}(x) = \mathbb{X}^{\oplus \varepsilon}$ , así que queda ver si  $\mathbb{X}^{\oplus \varepsilon} \simeq M$ .

**Teorema 3: Proposición 3.2 de [3]**

Sea  $M$  es una  $d$ -variedad riemanniana compacta y suave. Sea  $\mathbb{X}$  una muestra  $\varepsilon$ -densa y  $\varepsilon$ -ruidosa de  $M$  con  $\varepsilon < \sqrt{3/5} \text{reach } M$ . Entonces  $M$  es un retracts por deformación de  $\mathbb{X}^{\oplus \varepsilon}$ . En particular,  $\mathbb{X}^{\oplus \varepsilon} \simeq M$ .

**DEMOSTRACIÓN** Notar que para  $\varepsilon < \text{reach } M$  la proyección  $\pi : \mathbb{X}^{\oplus \varepsilon} \rightarrow M$  está bien definida. Mostraremos que el retracts viene dado por

$$H : [0, 1] \times \mathbb{X}^{\oplus \varepsilon} \rightarrow M$$

$$(t, x) \mapsto t\pi(x) + (1 - t)x$$

para  $\varepsilon < \sqrt{3/5} \text{reach } M$ .

Para esto debemos probar que para todo  $x \in \mathbb{X}^{\oplus \varepsilon}$ , el segmento dado por  $H(\cdot, x)$  está completamente contenido en  $\mathbb{X}^{\oplus \varepsilon}$ .

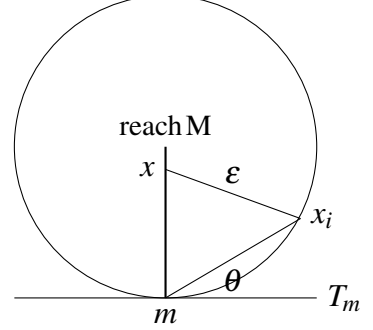
Notése que si  $m \in M$ , entonces  $\pi^{-1}(m) = (T_m M)^{\perp} \cap \mathbb{X}^{\oplus \varepsilon} \cap B_{\text{reach } M}(m)$ . Por lo tanto, basta revisar los  $x \in \pi^{-1}(m)$ . Distinguimos dos casos:

- $x \in B_{\varepsilon}(x_i) \cap \pi^{-1}(m)$  para algún  $x_i \in \mathbb{X} \cap B_{\varepsilon}(m)$ . Entonces el segmento de  $x$  a  $m$  está completamente contenido en  $B_{\varepsilon}(x_i)$  y tenemos el resultado.

•  $x \in B_\varepsilon(x_i) \cap \pi^{-1}(m)$  para algún  $x_i \in \mathbb{X} \cap B_\varepsilon(m)^c$ . Notar que  $x_i \in (T_m^\perp)^{\oplus \varepsilon} \cap B_\varepsilon(m)^c \cap B_{\text{reachM}}(m)$ . Considere las bolas tangentes a  $m$  de radio  $\text{reachM}$  a cada lado del plano tangente  $T_m$ . Llamémoslas  $B_+$  y  $B_-$ . Luego, la vecindades de  $m$  en la superficie viven en  $B_+^c \cap B_-^c$  (de lo contrario el  $\text{reachM}$  podría haber sido menor, lo cual es una contradicción). De esta forma,  $x_i$  debe estar en el borde de  $B_+$  (o  $B_-$ , el argumento es simétrico) para que la distancia entre  $x$  y  $m$  se maximice.

En resumen, la distancia entre  $x$  y  $m$  se maximiza cuando  $x_i$  vive en la intersección entre el borde de  $(T_m^\perp)^{\oplus \varepsilon}$  y el borde de  $B_+$ . Queda ver cuál es el máximo valor de  $\varepsilon$  que garantiza que  $H(\cdot, x) \in \mathbb{X}^{\oplus \varepsilon}$ .

Sea  $A$  la distancia entre  $x$  y  $m$ ,  $b$  la distancia entre  $m$  y  $x_i$  y  $\theta$  el ángulo entre  $T_m$  y  $x_i$ . Notar que  $m$  y  $x_i$  está a distancia  $\text{reachM}$  del centro  $c_+$  de  $B_+$ . Luego, el triángulo  $(c_+, m, x_i)$  es isósceles y por lo tanto  $b = 2\text{reachM}\sin(\alpha)$  donde  $\alpha$  es la mitad del ángulo  $(m, c_+, x_i)$ . Como el ángulo  $(x_i, m, c_+)$  es  $\pi/2 - \theta$ , se sigue que  $\alpha = \theta$  puesto que el ángulo desde  $m$  al punto medio de  $b$  y  $c_+$  es  $\pi/2$ . Por lo tanto,  $b = 2\text{reachM}\sin(\theta)$ . Se sigue que



$$\begin{aligned} A &= b\sin(\theta) + \sqrt{\varepsilon^2 - b^2\cos^2(\theta)} \\ &= 2\text{reachM}\sin^2(\theta) + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\text{reachM}^2\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)} \end{aligned}$$

Podemos ver  $A$  como una función de  $\theta$  y optimizarla. Esto nos deja con

■

El complejo de Cech es caro de computar, por ello, se suele usar el complejo de Rips, que relaja las condiciones.

#### Definición 3: Complejo de Rips

Sea  $\varepsilon > 0$ .  $V = \{v_0, \dots, v_d\} \subset \mathbb{X}$  es un  $d$ -símplice de Rips a escala  $\varepsilon$  si

$$\text{dist}(u, v) \leq \varepsilon \quad \forall u, v \in V.$$

El complejo de Rips se compone de los símlices de Rips y se denota por  $R_\varepsilon(\mathbb{X})$ .

Bajo algunas condiciones, el complejo de Rips se parece al complejo de Cech.

#### Proposición 2: Teorema 2.5 de [1]

Sea  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  finito y  $\varepsilon > 0$ . Sea  $\rho_n := \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ . Luego,

$$\check{C}_\varepsilon(\mathbb{X}) \subset R_{2\varepsilon}(\mathbb{X}) \subset \check{C}_{2\varepsilon\rho_n}(\mathbb{X})$$

**DEMOSTRACIÓN** Para la inclusión de la izquierda: Sea  $\{v_0, \dots, v_d\}$  un símplex de Cech. Sea  $x \in \bigcap B_\varepsilon(v_i) \neq \emptyset$ . Luego,  $\text{dist}(v_i, v_j) \leq \text{dist}(v_i, x) + \text{dist}(x, v_j) \leq 2\varepsilon$ .

Para la inclusión de la derecha: Sea  $V = \{v_0, \dots, v_d\}$  un símplex de Rips. Supongamos el peor caso en que  $\text{dist}(v_i, v_j) = 2\varepsilon$  para todo  $i \neq j$ . Luego,  $V$  se puede identificar el símplex en  $\mathbb{R}^{d+1}$  formado por los vectores  $\{2\varepsilon \cdot e_1, \dots, 2\varepsilon \cdot e_{d+1}\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ . La bola que circumscribe a  $V$  tiene como centro  $c = \frac{2\varepsilon}{d+1}(e_1 + \dots + e_{d+1}) = \frac{2\varepsilon}{d+1}(1, \dots, 1)$ . Aplicando pitágoras

$$r_d := \sqrt{\|2\varepsilon \cdot e_i\|^2 - \|c\|^2} = \sqrt{(2\varepsilon)^2 - \frac{(2\varepsilon)^2}{d+1}} = 2\varepsilon \sqrt{\frac{d}{d+1}} = 2\varepsilon\rho_d$$

vemos que la bola de cobertura mínima tiene radio  $r_d$  y por lo tanto  $V$  es un símplex de Cech a escala  $r_d$ . Notando que  $\rho_d \leq \rho_n$  para  $d+1 \leq n$  y que no hay  $n+1$  símlices en  $\mathbb{R}^n$  se sigue el resultado.

■

## Referencias

- [1] De Silva, V., & Ghrist, R. (2007). Coverage in sensor networks via persistent homology. *Algebraic & Geometric Topology*, 7(1), 339-358.

- [2] Edelsbrunner, H., & Shah, N. R. (1994, June). Triangulating topological spaces. In Proceedings of the tenth annual symposium on Computational geometry (pp. 285-292).
- [3] Niyogi, P., Smale, S., Weinberger, S. (2008). Finding the homology of submanifolds with high confidence from random samples. Discrete & Computational Geometry, 39, 419-441.
- [4] Welzl, E. (2005, June). Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids). In New Results and New Trends in Computer Science: Graz, Austria, June 20–21, 1991 Proceedings (pp. 359-370). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

## A. Más sobre Delaunay

El complejo de Delaunay se puede ver como un caso particular de un problema de optimización. Sea  $U$  un dominio (abierto conexo y acotado) en  $\mathbb{R}^n$  triangulable. Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. El error de interpolación lineal en norma  $p \in [1, \infty]$  de una triangulación  $T$  de  $U$  se define como:

$$E_p(U, T, f) := \|f - L_f\|_p$$

donde  $L_f$  es una interpolación lineal de  $f$  en  $T$ .

### Teorema 4.

Sea  $\mathbb{X}$  un conjunto finito de  $\mathbb{R}^n$ . El complejo de Delaunay definido en (Definición 1) es el que minimiza el error de interpolación de la función  $\|\cdot\|^2: \text{conv } \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  entre todos los complejos simpliciales con conjunto de vértices en  $\mathbb{X}$ .

$$E_p(\text{conv } \mathbb{X}, \text{Del}(\mathbb{X}), \|\cdot\|^2) = \arg \min_T E_p(\text{conv } \mathbb{X}, T, \|\cdot\|^2).$$

## B. Bola de Cobertura Mínima