

WŁASNOŚCI ESTYMATORA MNK.

I. Nieobciążoność

1. Mamy estymator $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ gdzie λ jest skalarzem.
 - (i) Czy estymator ten jest liniowy?
 - (ii) Udowodnij że dla każdego $\lambda > 0$ estymator ten przy spełnieniu założeń KMRL jest obciążony.
2. Mamy prosty model liniowy:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$$

Pokazaliśmy, że estymator parametru β_1 ma następującą postać:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Pokaż, że ten estymator jest nieobciążony.

3. Dany jest model regresji liniowej, spełniający założenia KMRL:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

Jesteśmy zainteresowani szacowaniem sumy parametrów przy x_1 oraz x_2 , niech $\theta = \beta_1 + \beta_2$. Pokaż, że estymator $\hat{\theta} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$ jest nieobciążony

II. Założenia KMRL.

1. Które z poniższych przyczyn mogą spowodować, że estymator MNK będzie obciążony?
 - (i) Heteroskedastyczność
 - (ii) Pominięcie istotnej zmiennej
 - (iii) Korelacja z próby wynosząca 0.95 między dwoma zmiennymi objaśniającymi, uwzględnionymi w modelu
2. Które z poniższych warunków są niezbędne, aby pokazać że estymator MNK jest nieobciążony i efektywny?
 - (i) $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$
 - (ii) $\text{Var}[\varepsilon] = \sigma^2$
 - (iii) $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall j \neq i$
 - (iv) $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
3. Jaki jest znaczenie terminu *heteroskedastyczność*?
 - (i) Wariancja błędów nie jest stała.
 - (ii) Wariancja zmiennej zależnej nie jest stała.
 - (iii) Błędy nie są od siebie liniowo niezależne.
 - (iv) Błędy mają średnią niezerową.
4. Które z poniższych sytuacji mogą być konsekwencją naruszenia jednego lub większej liczby założeń KMRL?
 - (i) Oszacowania współczynników nie są optymalne.
 - (ii) Oszacowania błędu standardowego nie są optymalne.
 - (iii) Rozkłady przyjęte dla statystyk testowych są niewłaściwe.
 - (iv) Wnioski dotyczące siły relacji pomiędzy osobą zależną a zmienne niezależne mogą być nieprawidłowe.
5. Jakie byłyby konsekwencje dla estymatora MNK, gdyby heteroskedastyczność była obecna w modelu regresji, ale została zignorowana?
 - (i) Estymator będzie obciążony.
 - (ii) Estymator nie będzie zgodny.
 - (iii) Estymator będzie nieefektywny.
 - (iv) Wszystkie powyższe punkty będą prawdziwe.
6. Dany jest model z 5 zmiennymi objaśniającymi szacowany na 100 obserwacjach
 - (i) Jaki jest rozmiar macierzy wariancji estymatora modelu?
 - (ii) Zapisz postać macierzy z poprzedniego podpunktu w KMRL.
 - (iii) Jaki jest rozmiar macierzy wariancji składnika losowego?
 - (iv) Zapisz postać macierzy z poprzedniego podpunktu w KMRL.