# Algebra

EKONOMETRIA WNE UW

Sebastian Zalas

s.zalas@uw.edu.pl



W trakcie kursu ekonometrii będziemy często korzystali z notacji macierzowej. Dlatego warto przypomnieć sobie podstawowe pojęcia algebry oraz powtórzyć najprostsze operacje macierzowe. Poniżej zamieszczam notatki które mają na celu usystematyzowanie podstawowych wiadomości o algebrze.

Podczas przygotowywania tych notatek bazowałem na dodatku matematycznym z podręcznika Bruce'a Hansen'a *Econometrics*.

Zadania przygotowane do powtórzenia.

## Spis treści

# I. Użyteczne informacje o algebrze

## *I.A. Notacja*

- **Skalar** $a$ to pojedyńcza liczba

- **Wektor** $\boldsymbol{a}$ to lista $k \times 1$ liczb ułożonych w kolumnie:

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$$

  Wektor jest elementem $k$-wymiarowej przestrzeni, $a \in \mathbb{R}^k$. Jeżeli $k = 1$ to wtedy $\boldsymbol{a}$ jest skalarem.

- **Macierz** to prostokątna tablica $k \times r$ liczb:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} \end{bmatrix}$$

  Umownie $a_{ij}$ oznacza element macierzy $\boldsymbol{A}$ w $i$-tym rzędzie oraz $j$-tej kolumnie. Jeżeli $r = 1$ to $\boldsymbol{A}$ jest wektorem kolumnowym. Jeżeli $k = 1$ to $\boldsymbol{A}$ jest wektorem wierszowym.

  W moich notatkach i slajdach będę starał się trzymać następującej konwencji, zapisując skalary jako $a$, wektory jako $\boldsymbol{a}$ oraz macierze jako $\boldsymbol{A}$. Czasami macierz $\boldsymbol{A}$ będzie oznaczona jako $(a_{i,j})$. Macierz może być zapisana jako zbiór wektorów kolumnowych lub wektorów wierszowych:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots & \boldsymbol{a_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} \\ \boldsymbol{\alpha_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_k} \end{bmatrix}$$

  gdzie

$$\boldsymbol{a_i} = \begin{bmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{k,i} \end{bmatrix}$$

są wektorami kolumnowymi oraz

$$\boldsymbol{a_i} = \begin{bmatrix} \alpha_{j,1} & \alpha_{j,2} & \cdots & \alpha_{j,r} \end{bmatrix}$$

są wektorami wierszowymi.

- **Macierz transponowaną** macierzy $\boldsymbol{A}$ oznaczamy jako $\boldsymbol{A}^\top$, $\boldsymbol{A}^t$, $\boldsymbol{A}'$. Otrzymujemy ją przez przewrócenia macierzy przez jej przekątną:

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & a_{2r} & \cdots & a_{kr} \end{bmatrix}$$

- Macierz jest **kwadratowa** gdy $k = r$. Macierz kwadratowa jest **symetryczna** gdy $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$. Macierz kwadratowa jest **diagonalna** gdy elementy spoza przekątnej są równe zero, a więc gdy $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Macierz kwadratowa jest macierzą **trójkątną górną** (**dolną**) gdy elementy poniżej (ponad) przekątną są róne zero. Szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej jest **macierz jednostkowa** w której elementy na przekątnej są równe jeden:

$$\boldsymbol{I}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

## I.B. *Dodawanie macierzy*

- Jeśli macierze $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ oraz $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ są tego samego rozmiaru, definiujemy sumę jako

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

czyli dodajemy elementy macierzy z tych samych pozycji.

Dodawanie macierzy jest **przemienne** i **łączne**:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$$

## I.C. *Mnożenie macierzy*

- Jeśli $\boldsymbol{A}$ jest macierzą $k \times r$ oraz $c$ jest (rzeczywistym) skalarem, wtedy iloczyn definiujemy jako

$$\boldsymbol{A}c = c\boldsymbol{A} = (a_{ij})c$$

Jeśli $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są wymiaru $k \times 1$ wtedy ich iloczyn:

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_j$$

Zauważmy że $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}'\boldsymbol{a}$. Mówimy że dwa wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są **ortogonalne** jeśli $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = 0$.

- Jeżeli $\boldsymbol{A}$ ma wymiar $k \times r$ oraz $\boldsymbol{B}$ ma wymiar $k \times s$, a więc liczba kolumn macierzy $\boldsymbol{A}$ równa się liczbie rzędów macierzy $\boldsymbol{B}$, możemy zdefiniować iloczyn $\boldsymbol{AB}$. Jeśli zapiszemy $\boldsymbol{A}$ jako zbiór wektorów wierszowych oraz $\boldsymbol{B}$ jako zbiór wektorów kolumnowych (każdy o długości $r$), wtedy iloczyn $\boldsymbol{AB}$ równa się:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1' \\ \boldsymbol{a}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_k' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_s \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k'\boldsymbol{b}_k & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_k'\boldsymbol{b}_s \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne ale jest łączne oraz rozdzielne:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$$

- Ważną własnością macierzy jednostkowej jest to, że jeżeli $\boldsymbol{A}$ ma wymiar $k \times r$, wtedy $\boldsymbol{AI}_r = \boldsymbol{A}$ oraz $\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. Mówimy że macierz jednostkowa $\boldsymbol{I}$ jest elementem neutralnym mnożenia macierzowego.

- Mówimy że dwie macierze $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ są **ortogonalne** gdy $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} = 0$. Oznacza to że wszystkie kolumny $\boldsymbol{A}$ sa ortogonalne do wszystkich kolumn $\boldsymbol{B}$.

## *I.D. Ślad*

- **Śladem** macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ o wymiarze $k \times k$ nazywamy sumę elementów z przekątnej:

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{k} a_{ii}$$

- Własności śladu. Mamy macierze kwadratowe $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ oraz rzeczywisty skalar $c$. Wtedy:

$$tr(c\boldsymbol{A}) = c\, tr(\boldsymbol{A})$$

$$tr(\boldsymbol{A}') = tr(\boldsymbol{A})$$

$$tr(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$$

$$tr(\boldsymbol{I}_k) = k$$

Ponadto, dla macierzy $\boldsymbol{A}$ o wymiarze $k \times r$ oraz $\boldsymbol{B}$ o wymiarze $r \times k$ mamy:

$$tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA})$$

Dowód:

$$\begin{aligned} tr(\boldsymbol{AB}) &= tr \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{b}_k \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{b}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_k'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_k'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_k'\boldsymbol{b}_k \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{a}_i'\boldsymbol{b}_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{b}_i'\boldsymbol{a}_i \\ &= tr(\boldsymbol{BA}) \end{aligned}$$

## I.E. *Rząd i macierz odwrotna*

- **Rząd** macierzy $\boldsymbol{A}$ o wymiarze $k \times r$ $(r \leq k)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r \end{bmatrix}$$

  to liczba kolumn liniowo niezależnych $\boldsymbol{a}_j$ i jest zapisywany jako $rz(\boldsymbol{A})$ lub $rank(\boldsymbol{A})$. Mówimy że macierz ma **pełen rząd** gdy $rz(\boldsymbol{A}) = r$.

- Macierz kwadratowa $\boldsymbol{A}$ o wymiarze $k \times k$ jest **nieosobliwa** jeśli ma pełen rząd (czyli $rz(\boldsymbol{A}) = k$). Oznacza to że nie istnieje taki wektor $\boldsymbol{c}$ o wymiarze $k \times 1$ taki że $\boldsymbol{Ac} = 0$.

- Jeżeli kwadratowa macierz $\boldsymbol{A}$ o wymiarze $k \times k$ jest nieosobliwa, wtedy istnieje macierz kwadratowa $\boldsymbol{A}^{-1}$ o wymiarze $k \times k$ nazywana **macierzą odwrotną** macierzy $\boldsymbol{A}$ dla której zachodzi:

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_k$$

- Własności macierzy odwrotnej. Dla dwóch macierzy nieosobliwych $\boldsymbol{A}$ oraz $\boldsymbol{C}$ zachodzą następujące własności:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{AA}^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_k \\ (\boldsymbol{A}^{-1})' &= (\boldsymbol{A}')^{-1} \\ (\boldsymbol{AC})^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}^{-1} \\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C})^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1})^{-1}\boldsymbol{C}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} - (\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1})^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{C}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \end{aligned}$$

## I.F. Wyznacznik

- **Wyznacznik** to wartość będąca funkcją elementów macierzy kwadratowej. Zwykle wyznacznik macierzy $\boldsymbol{A}$ oznaczamy jako $det(\boldsymbol{A})$ lub $\mid \boldsymbol{A} \mid$. Niech $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ będzie macierzą wymiaru $k \times k$. Niech $\pi = (j_1, \ldots, j_k)$ oznacza permutację $(1, \ldots, k)$. Istnieje $k!$ takich permutacji. Istnieje jednoznaczna liczna inwersji indeksów permutacji (w stosunku do naturalnego porządku $(1, \ldots, k)$, niech $\varepsilon_\pi = +1$ dla parzystych oraz $\varepsilon_\pi = -1$ dla nieparzystych). Wtedy wyznacznik $\boldsymbol{A}$ jest zdefiniowany w następujący sposób:

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_\pi \varepsilon_\pi a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{k,j_k}$$

  Na przykład, dla macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ $2\times2$, dwie permutacje $(1,2)$ to $(1,2)$ oraz $(2,1)$ dla których $\varepsilon_{(1,2)} = 1$ oraz $\varepsilon_{(2,1)} = -1$. Wtedy:

$$det(\boldsymbol{A}) = \varepsilon_{(1,2)} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{(2,1)} a_{12} a_{21}$$

  Dla macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$, **minorem** $M_{ij}$ elementu $a_{ij}$ nazywamy wyznacznik macierzy otrzymanej po wykreśleniu $i$-tego rzędu oraz $j$-tej kolumny z macierzy $\boldsymbol{A}$. Wtedy stosując **rozwinięcie Laplace'a** możemy obliczyć wyznacznik:

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+i} M_{ij} a_{ij}$$

  dla każdego $j \in 1, \ldots, k$

- Własności wyznacznika:

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A}) &= det(\boldsymbol{A}') \\ det(c\boldsymbol{A}) &= c^k det(\boldsymbol{A}), \quad k\text{-wymiar macierzy} \\ det(\boldsymbol{AB}) &= det(\boldsymbol{BA}) = det(\boldsymbol{A}) det(\boldsymbol{B}) \\ det(\boldsymbol{A}^{-1}) &= (det(\boldsymbol{A}))^{-1} \\ det(\boldsymbol{A}) \neq 0 &\iff \boldsymbol{A} \ \text{ jest nieosobliwa} \end{aligned}$$

## I.G. Macierz dodatnio określona

- Mówimy że rzeczywista macierz $\boldsymbol{A}$ o wymiarze $k \times k$ jest **półdodatnio określona** jeżeli dla każdego $\boldsymbol{c} \neq 0$ zachodzi $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} \geq 0$. Półdodatnio określoną $\boldsymbol{A}$ zapisujemy jako $\boldsymbol{A} \geq 0$.

- Mówimy że macierz $\boldsymbol{A}$ jest **dodatnio określona** jeżeli dla każdego $\boldsymbol{c} \neq 0$ zachodzi $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} > 0$. Dodatnio określoną macierz $\boldsymbol{A}$ zapisujemy jako $\boldsymbol{A} > 0$.

- Własności półdodatnio określonych macierzy:
  - Jeżeli $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}$, gdzie $\boldsymbol{B} \neq 0$, wtedy $\boldsymbol{A}$ jest półdodatio określona. Jeżeli $\boldsymbol{G}$ ma pełen rząd oraz $\boldsymbol{B} > 0$, wtedy $\boldsymbol{A}$ jest półdodatio określona.
  - Jeżeli $\boldsymbol{A}$ jest dodatnio określona wtedy $\boldsymbol{A}$ jest nieosobliwa oraz istnieje $\boldsymbol{A}^{-1}$. Co więcej $\boldsymbol{A}^{-1} > 0$.

## I.H. *Macierz idempotentna*

- Macierz kwadratowa $\boldsymbol{A}$ o wymiarze $k \times k$ jest **idempotentna** jeżeli $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. Dla $k = 1$ jedynymi idempotentnymi liczbami są 0 oraz 1. Dla $k > 1$ jest wiele możliwości. Na przykład poniższa macierz jest idempotentna:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

  Jeśli macierz $\boldsymbol{A}$ jest idempotentna i symetryczna oraz ma rząd równy $r$, wtedy ma $r$ wartości własnych równych 1 oraz $k - r$ wartości własnych równych 0.

## I.I. *Rachunek różniczkowy macierzy*

- Niech $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k)'$ oraz $g(\boldsymbol{x}) = g(x_1, \ldots, x_k) : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$. Wtedy wektor pochodnych zapisujemy w następujący sposób:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_k} g(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

  oraz

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}'} g(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} g(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

- Własności pochodnych macierzowych:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \text{ oraz } \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}')\boldsymbol{x}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x} \partial \boldsymbol{x}'}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}'$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}} tr(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}'$$