Testowanie hipotez

Ekonometria WNE UW
Sebastian Zalas
s.zalas@uw.edu.pl

Zadanie 1. Korzystając z danych CPS09, oszacowano modele (ze stałą) objaśniające logarytm płacy godzinowej (log($hwage$)):

	(1) log($hwage$)	(2) log($hwage$)	(3) $reszty_1^2$
female	-0.259	-0.256	-0.100
	(0.00524)	(0.00516)	(0.0131)
nonwhite	-0.0808	-0.0780	0.0109
	(0.00665)	(0.00654)	(0.0166)
education	0.108	0.0344	0.0117
	(0.000944)	(0.00504)	(0.00236)
age	0.00950	0.0665	0.00344
	(0.000225)	(0.00145)	(0.000563)
education^2		0.00262	
		(0.000182)	
age^2		-0.000667	
		(0.0000167)	
N	50742	50742	50742
R^2	0.258	0.283	0.002

W () podano zwykłe błędy standardowe.

(i) Przetestuj istotność parametrów w modelu (1). Załóż poziom istotności równy 0.05. Sformułuj odpowiednią hipotezę, oblicz statystykę testową. Podaj liczbę stopni swobody rozkładu statystyki testowej.

(ii) Podaj przedziały ufności dla modelu (1), zakładając że $\alpha = 0.01$. Czy wnioski dotyczące istotności oszacowań z podpunktu (i) zmieniły się?

(iii) Przetestuj łączną istotność modelu (1). Zapisz odpowiednie hipotezy. Podaj liczbę stopni swobody rozkładu statystyki testowej.

(iv) W modelu (2) dodano dwie zmienne podniesione do kwadratu. Czy te dodane zmienne są **łącznie** istotne statystycznie? Zapisz hipotezę w formie macierzowej; podaj liczbę stopni swobody statystyki testowej.

(v) Sprawdź, czy w modelu (1) jest heteroskedastyczność. Zastosuj test Breusha-Pagana, korzystając z oszacowań W kolumnie (3) (zmienna zależna to kwadrat reszt z modelu (1)). Co należałoby zrobić, gdyby hipoteza zerowa testu BP została odrzucona?

(vi) Przypuśćmy że chcesz sprawdzić, czy β_{female} jest równa $\beta_{education}$ i jednocześnie $\beta_{age} = 0$. Zapisz odpowiednie warunki w korzystając z zapisu macierzowego.

Rozwiązanie zadania 1.

(i) Należy przeprowadzić test istotności parametrów na podstawie oszacowań w modelu (1). Przeprowadzimy test dla parametru β_{female}, ale procedura jest taka sama dla każdego parametru. Należy powtórzyć ją dla pozostałych parametrów przy zmiennych *nonwhite*, *education* oraz *age*.

1. Formułujemy hipotezy zerową i alternatywną:

$$H_0 : \beta_{female} = 0$$
$$H_1 : \beta_{female} \neq 0$$

Zmienna jest będzie istotna statystycznie, jeśli odpowiadający jej parametr będzie różny od zera.

2. Budujemy statystykę testową. W przypadku testowania hipotezy prostej, będzie to statystyka t:

$$t = \frac{\hat{\beta}_{female}}{se(\hat{\beta}_{female})} = \frac{-0.259}{0.00524} = -49.427$$

W przypadku testowania istotności, statystyka t to po prostu stosunek oszacowania parametry i jego błędu standardowego.

3. Szukamy wartości krytycznych. Statystyka t ma rozkład $t - studenta$ z $n - k - 1$ stopniami swobody (n to liczba obserwacji, k - to liczba zmiennych w modelu). W naszym przypadku liczba stopni swobody wynosi $50742 - 4 - 1 = 50737$. Ponadto przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Zatem wartości krytyczne to $t^*_{1-\frac{\alpha}{2},n-k-1} = t^*_{0.975,50737}$ oraz $t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1} = t^*_{0.025,50737}$. Zauważmy że wartości te są równe co do wartości bezwzględnej. Z Tabeli 1 wybieramy odpowiednią wartość; będzie to $t^* = 1.96$.

4. Weryfikujemy hipotezę zerową. Obszar krytyczny to przedział $(-\infty, \ -1.96) \wedge (-1.96, \ \infty)$. Statystyka testowa $t = -49.427$ znajduje się w obszarze krytycznym, zatem mamy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o nieistotności parametru przy zmiennej *female*. Jako prawdziwą przyjmujemy hipotezę alternatywną, więc zmienna *female* jest istotna statystycznie.

(ii) Mamy zbudować przedziały ufności i na ich podstawie przetestować istotność, tym razem dla $\alpha = 0.01$

1. Przedział ufności dla danego parametru β budujemy korzystając ze wzoru:

$$\hat{\beta} - se(\hat{\beta}) \times t^*_{1-\frac{\alpha}{2},n-k-1} \leq \beta \leq \hat{\beta} + se(\hat{\beta}) \times t^*_{1-\frac{\alpha}{2},n-k-1}$$

Aby zbudować przedział ufności, musimy znać oszacowanie parametru ($\hat{\beta}$), błąd standardowy oszacowania ($se(\hat{\beta})$) oraz wartość krytyczną $t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}$ dla założonego poziomu ufności α. Dla β_{female}: $\hat{\beta}_{female} = -0.259$; $se(\hat{\beta}_{female}) = -0.005249$. Wyznaczmy jeszcze wartość krytyczną z rozkładu $t - studenta$, dla $\alpha = 0.01$: $t^*_{1-\frac{0.01}{2},50742-4-1} = t^*_{0.995,50737} = t^*_{0.995,\infty} = 2.57$. Teraz możemy sformułować 99% przedział ufności dla parametru przy zmiennej *female*:

$$-0.259 - (-0.005249 \times 2.57) \leq \beta_{female} \leq -0.259 + (-0.005249 \times 2.57)$$
$$-0.2455101 \leq \beta_{female} \leq -0.2724899$$

Analogicznie należy postąpić z pozostałymi zmiennymi.

2. Czy wnioski dotyczące istotności oszacowań z podpunktu (i) zmieniły się? Na podstawie przedziału ufności można przetestować hipotezę o istotności danego parametru. Wystarczy sprawdzić, czy przedział ufności dla danego poziomu istotności α zawiera 0. W przypadku przedziału ufności dla β_{female}, nie zawiera on 0, więc przy $\alpha = 0.01$ zmienna $female$ jest istotna statystycznie.

(iii) Mamy przeprowadzić test łącznej istotności modelu (1):

1. Formułujemy hipotezy zerową i alternatywną:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_{female} = 0 \\ \beta_{nonwhite} = 0 \\ \beta_{age} = 0 \\ \beta_{education} = 0 \end{cases}$$

$$H_1 : \beta_{female} \neq 0 \vee \beta_{nonwhite} \neq 0 \vee \beta_{age} \neq 0 \vee \beta_{education} \neq 0$$

Testując istotność modelu sprawdzamy hipotezę zerową, która oznacza że wszystkie parametry w modelu są jednocześnie równe zero. Jest to hipoteza złożona, ponieważ składa się z kilku warunków (ograniczeń).

2. Budujemy statystykę testową. Przy testowaniu hipotezy złożonej skorzystamy ze statystyki F. W przypadku testu łącznej istotności, przyjmie ona następującą postać[1]:

$$F = \frac{\frac{R^2}{q}}{\frac{1-R^2}{n-k-1}} \sim F(1-\alpha, q, n-k-1)$$

gdzie q oznacza liczbę testowanych warunków w hipotezie złożonej. Warto pamiętać, że statystykę testu F można również obliczyć za pomocą sumy kwadratów reszt. Obliczmy wartość statystyki testowej dla modelu (1):

$$F = \frac{\frac{0.258}{4}}{\frac{1-0.258}{50742-4-1}} = 4410.427$$

3. Szukamy wartości krytycznej. Statystyka F ma rozkład $F-Snedecora$ z $q, n-k-1$ stopniami swobody (n to liczba obserwacji, k - to liczba zmiennych w modelu, q to liczba testowanych restrykcji). W naszym przypadku liczba stopni swobody wynosi $50742-4-1 = 50737$ oraz $q = 4$ (mamy cztery warunki w hipotezie zerowej). Ponadto przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Zatem wartość krytyczna to $F^*_{1-\alpha,q,n-k-1} = F^*_{0.95,4,50737}$. Zauważmy, że test F jest testem jednostronnym, dlatego szukamy wartości krytycznej tylko z lewej strony rozkładu. Z Tabeli 1 wybieramy odpowiednią wartość; będzie to $F^*_{0.95,4,\infty} = 2.37$.

4. Weryfikujemy hipotezę zerową. Obszar krytyczny to przedział $(2.37, \infty)$. Statystyka testowa $F = 4410.427$[2] znajduje się w obszarze krytycznym, zatem mamy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o łącznej nieistotności parametrów w modelu (1). Jako prawdziwą przyjmujemy hipotezę alternatywną, więc model (1) jest istotny statystycznie.

(iv) Znów mamy przetestować łączną istotność, ale tylko dwóch zmiennych: age^2 oraz $education^2$.

1. Formułujemy hipotezy zerową i alternatywną:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_{education^2} = 0 \\ \beta_{age^2} = 0 \end{cases}$$

$$H_1 : \beta_{education^2} \neq 0 \vee \beta_{age^2} \neq 0$$

[1] Można również sformułować statystykę F w oparciu o sumę kwadratów reszt.

[2] Jeśli statystyka F przyjmuje wartości liczone w setkach lub tysiącach to możemy spodziewać się że będą podstawy do odrzucenia H_0

Zapiszmy jeszcze hipotezę zerową w formie macierzowej:

$$\boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{h}$$

gdzie $\boldsymbol{H}$ to macierz $(q \times (k+1))$ opisująca warunki z hipotezy zerowej, q to liczba restrykcji, $\boldsymbol{h}$ to wektor stałych z każdego warunku. W przypadku powyższej hipotezy zerowej, mamy $q = 2$ (dwa warunki)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{female} \\ \beta_{nonwhite} \\ \beta_{education} \\ \beta_{age} \\ \beta_{education^2} \\ \beta_{age^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Budujemy statystykę testową[3]:

$$F = \frac{(R_U^2 - R_R^2)\,\frac{1}{q}}{(1 - R_U^2)\frac{1}{n-k-1}} \sim F(1-\alpha, q, n-k-1)$$

gdzie R_U^2 to współczynnik determinacji modelu bez ograniczeń, a R_R^2 to współczynnik determinacji modelu z ograniczeniami. O co tu chodzi? Przeprowadzając test np. łącznej istotności kilku zmiennych, *de facto* porównujemy dwa modele. Pierwszy model to model bez ograniczeń (oznaczam go literą U). W tym przypadku ma on postać:

$$\log(hwage) = \beta_0 + \beta_{female} female + \beta_{nonwhite} nonwhite + \beta_{education} education$$
$$+\beta_{age} age + \beta_{education^2} education^2 + \beta_{age^2} age^2 + \varepsilon$$

Drugi model to model z ograniczeniami (oznaczam go literą R), czyli z $\beta_{education^2} = 0$ i $\beta_{age^2} = 0$. Zatem przyjmuje on postać:

$$\log(hwage) = \beta_0 + \beta_{female} female + \beta_{nonwhite} nonwhite + \beta_{education} education + \beta_{age} age + \varepsilon$$

Statystyka F bazuje na różnicy między współczynnikami determinacji tych dwóch modeli $R_U^2 - R_R^2$. Oszacowanie modelu bez ograniczeń znajduje się w kolumnie (2), a oszacowanie modelu z ograniczeniami znajduje się kolumnie (1); więc $R_U^2 = 0.283$ oraz $R_R^2 = 0.258$. Możemy już obliczyć statystykę testową:

$$F = \frac{(0.283 - 0.258)\,\frac{1}{2}}{(1 - 0.283)\frac{1}{50742-6-1}} = 884.5014$$

3. Szukamy wartości krytycznej. Statystyka F ma rozkład $F - Snedecora$ z q i $n-k-1$ stopniami swobody (n to liczba obserwacji, k - to liczba zmiennych w modelu bez ograniczeń, q to liczba testowanych warunków). W naszym przypadku liczba stopni swobody wynosi $50742 - 6 - 1 = 50735$ oraz $q = 2$ (mamy dwa warunki w hipotezie zerowej). Ponadto przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Zatem wartość krytyczna to $F^*_{1-\alpha,q,n-k-1} = F^*_{0.95,2,50735} = F^*_{0.95,2,\infty} \approx 3$.

4. Weryfikujemy hipotezę zerową. Obszar krytyczny to przedział $(3,\ \infty)$. Statystyka testowa $F = 884.5014$ znajduje się w obszarze krytycznym, zatem mamy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o łącznej nieistotności parametrów przy zmiennych age^2 oraz $education^2$. Jako prawdziwą przyjmujemy hipotezę alternatywną, więc zmienne podniesione do kwadratu są łącznie istotny statystycznie.

[3]Jest ona oparta o R^2, ale może być oparta o sumę kwadratów reszt.

(v) Mamy przeprowadzić test Breusha - Pagana na heteroskedastyczność składnika losowego w modelu (1):

1. Formułujemy hipotezy zerową i alternatywną:

$$H_0 : \text{składnik losowy jest homoskedastyczny}$$
$$H_1 : \text{składnik losowy jest heteroskedastyczny}$$

2. Budujemy statystykę testową. Aby zrozumieć skąd bierze się statystyka testowa testu BP, warto przypomnieć sobie procedurę tego testu. Mając oszacowany model (1), który chcemy przetestować na heteroskedastyczność, należy skonstruować regresję pomocniczą:

$$e^2 = \delta_0 + \delta_1 female + \delta_2 nonwhite + \delta_3 education + \delta_4 age + u$$

Zmienną zależną są kwadraty reszt z wcześniej oszacowanego modelu (1), zmienne objaśniające pozostają te same co w modelu (1). Po oszacowaniu regresji pomocniczej, możemy skonstruować statystykę F bazując na współczynniku determinacji z regresji pomocniczej

$$F = \frac{R^2_{pomoc.} \frac{1}{k}}{(1 - R^2_{pomoc.}) \frac{1}{n-k-1}} \sim F_{k,n-k-1}$$

Możemy zauważyć, że w istocie sprawdzamy czy zmienne z naszego modelu (1) w sposób statystycznie istotny objaśniają kwadraty reszt z modelu (1). Oszacowania regresji pomocniczej są podane w kolumnie (3), włącznie ze współczynnikiem determinacji. Możemy więc obliczyć wartość statystyki testowej:

$$F = \frac{0.002 \frac{1}{4}}{(1 - 0.002) \frac{1}{50742-4-1}} = 25.41934$$

3. Szukamy wartości krytycznej. Przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Zatem wartość krytyczna to $F^*_{1-\alpha,q,n-k-1} = F^*_{0.95,4,50742-4-1} = F^*_{0.95,4,\infty} = 2.37$.

4. Weryfikujemy hipotezę zerową. Obszar krytyczny to przedział $(2.37, \ \infty)$. Statystyka testowa $F = 25.419344$ znajduje się w obszarze krytycznym, zatem mamy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o homoskedastyczności składnika losowego w modelu (1). Jako prawdziwą przyjmujemy hipotezę alternatywną - możemu uznać że składnik losowy w modelu (1) jest heteroskedastyczny.

Co należy zrobić, gdy test wskazuje na obecność heteroskedastyczności? Skorzystać z odpornych błędów standardowych!

(vi) Mamy zapisać macierzowo hipotezę zerową testu, którym można przetestować opisany w zadaniu warunek. Zapiszmy najpierw hipotezę zerową w zwykły sposób:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_{female} = \beta_{education} \\ \beta_{age} = 0 \end{cases}$$

Możemy przepisać tę hipotezę w taki sposób, aby parametry były po lewej stronie, a stałe po prawej:

$$H_0 : \begin{cases} \beta_{female} - \beta_{education} = 0 \\ \beta_{age} = 0 \end{cases}$$

Teraz zapiszmy ją korzystając z zapisu macierzowego:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{female} \\ \beta_{nonwhite} \\ \beta_{education} \\ \beta_{age} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Praktyczna wskazówka: wektor parametrów zawsze zawiera wszystkie parametry, które szacujemy. Macierz restrykcji zawsze ma tyle rzędów, ile jest warunków - wystarczy przenieść parametry na lewo, a stałe na prawo; następnie dobrać postać macierzy w taki sposób, żeby otrzymać z mnożenia macierzowego hipotezę zerową, zapisaną w zwykły sposób.

Zadanie 2. Korzystając z danych o firmach oszacowano parametry funkcji produkcji Cobba-Douglasa (ze stałą):

	(1)	(2)
	$\log(y)$	$reszty^2$
$\log(l)$	0.374	-0.0602
$\log(k)$	0.544	-0.201
$\log(l)^2$		0.0481
$\log(k)^2$		0.0411
$\log(l) \times \log(k)$		-0.0697
N	11784	11784
R^2	0.684	0.036

(i) W kolumnie (2) podano oszacowania modelu w którym zmienną objaśnianą jest kwadrat reszt z modelu (1). Korzystając z tych wyników, sprawdź czy w modelu (1) jest obecna heteroskedastyczność. Jaki test zastosujesz?

(ii) Poniżej podano dwie macierze wariancji-kowariancji dla modelu (1). Wykorzystaj odpowiednią macierz wariancji-kowariancji do przetestowania istności zmiennych objaśniających. Załóż $\alpha = 0.05$.

– zwykła macierz wariancji-kowariancji $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

$$\mathbb{V}\begin{bmatrix} \beta_l \\ \beta_k \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00003406 & & \\ -0.00001583 & 0.00003141 & \\ -0.00003085 & -0.00018852 & 0.00178235 \end{bmatrix}$$

– Macierz wariancji-kowariancji $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ White'a

$$\mathbb{V}\begin{bmatrix} \beta_l \\ \beta_k \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00005949 & & \\ -0.00003347 & 0.00005191 & \\ -0.00002433 & -0.00025899 & 0.00229377 \end{bmatrix}$$

(iii) Na podstawie modelu (1) i właściwej macierzy wariancji kowariancji, zweryfikuj hipotezę o stałych korzyściach skali. Zapisz tę hipotezę w formie macierzowej.

Rozwiązanie zadania 2.

(i) Na podstawie podanych wyników można przeprowadzić test White'a na heteroskedastyczność składnika losowego w modelu (1):

1. Formułujemy hipotezy zerową i alternatywną:

$$H_0 : \text{składnik losowy jest homoskedastyczny}$$
$$H_1 : \text{składnik losowy jest heteroskedastyczny}$$

2. Budujemy statystykę testową. Podobnie jak w teście Breuscha-Pagana, należy skonstruować regresję pomocniczą. W przypadku testu White'a jest ona bardziej rozbudowana, gdyż zawiera ona również interakcje między zmiennymi oraz zmienne podniesione do kwadratu.

$$e^2 = \delta_0 + \delta_1 \log(l) + \delta_2 \log(k) + \delta_3 \log(l) \times \log(k) + \delta_4 \log(l)^2 + \delta_5 \log(k)^2 + u$$

Zmienną zależną są kwadraty reszt z wcześniej oszacowanego modelu (1), zmienne objaśniające pozostają te same co w modelu (1). Po oszacowaniu regresji pomocniczej, możemy skonstruować statystykę F bazując na współczynniku determinacji z regresji pomocniczej:

$$F = \frac{R^2_{pomoc.} \frac{1}{k}}{(1 - R^2_{pomoc.}) \frac{1}{n-k-1}} \sim F_{k,n-k-1}$$

Oszacowania regresji pomocniczej są podane w kolumnie (2), włącznie ze współczynnikiem determinacji. Możemy więc obliczyć wartość statystyki testowej:

$$F = \frac{0.036 \, \frac{1}{5}}{(1 - 0.036) \frac{1}{11784-5-1}} = 87.96846$$

3. Szukamy wartości krytycznej. Przyjmujemy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Zatem wartość krytyczna to $F^*_{1-\alpha,q,n-k-1} = F^*_{0.95,5,11784-5-1} = F^*_{0.95,5,\infty} = 2.21$.

4. Weryfikujemy hipotezę zerową. Obszar krytyczny to przedział $(2.21,\ \infty)$. Statystyka testowa $F = 87.96846$ znajduje się w obszarze krytycznym, zatem mamy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o homoskedastyczności składnika losowego w modelu (1). Jako prawdziwą przyjmujemy hipotezę alternatywną - możemy uznać że składnik losowy w modelu (1) jest heteroskedastyczny.

(ii) Przeprowadzony w podpunkcie (i) test, wskazuje że składnik losowy w modelu (1) jest heteroskedastyczny. W takiej sytuacji, należy skorzystać z macierzy wariancji-kowariancji White'a. Na jej diagonali znajdują się wariancje kolejnych oszacowań, które posłużą do przeprowadzenia testu istotności. Sformułujmy statystykę testową dla logarytmu nakładu pracy, l:

$$t = \frac{\hat{\beta}_{\log(l)}}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\beta}_{\log(l)}]}} = \frac{\hat{\beta}_{\log(l)}}{se(\hat{\beta}_{\log(l)})} = \frac{0.374}{\sqrt{0.00005949}} = 48.48971$$

Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.05$, wartość krytyczna jest równa $t^*_{1-\frac{0.05}{2},11784-2-1} = t^*_{0.975,11781} = t^*_{0.975,\infty} = 1.96$ Wartość krytyczna znajduje się w obszarze krytycznym $(-\infty, -1.96) \wedge (1.96, \infty)$, zatem istnieją podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o niestotności. Zatem zmienna $\log(l)$ jest istotna statystycznie.

(iii) Funkcja produkcji będzie cechowała się stałymi korzyściami skali gdy $\beta_l + \beta_k = 1$. Możemy to potraktować jako hipotezę i przeprowadzić test:

1. Formułujemy hipotezy zerową i alternatywną:

$$H_0 : \beta_l + \beta_k = 1$$
$$H_1 : \beta_l + \beta_k \neq 1$$

2. Budujemy statystykę testową - będzie to statystyka t:

$$t = \frac{\hat{\beta}_l + \hat{\beta}_l - 1}{se(\hat{\beta}_l + \hat{\beta}_k)}$$

Testujemy hipotezę o sumie parametrów, więc musimy wyznaczyć błąd standardowy oszacowania sumy parametrów:

$$t = \frac{\hat{\beta}_l + \hat{\beta}_l - 1}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\beta}_l + \hat{\beta}_l]}} = \frac{\hat{\beta}_l + \hat{\beta}_l - 1}{\sqrt{\mathbb{V}[\hat{\beta}_l] + \mathbb{V}[\hat{\beta}_k] + 2\,\mathrm{Cov}[\hat{\beta}_l, \hat{\beta}_k]}}$$

Z macierzy wariancji-kowariancji: $\mathbb{V}[\hat{\beta}_l] = 0.00005949$, $\mathbb{V}[\hat{\beta}_k] = 0.00005191$, $\mathrm{Cov}[\hat{\beta}_l, \hat{\beta}_k] = -0.00003347$

$$t = \frac{0.374 + 0.544 - 1}{\sqrt{0.0000594 + 0.00005191] - 2 \times 0.00003347}} = -12.31031$$

3. Szukamy wartości krytycznych: $t^*_{1-\frac{\alpha}{2},n-k-1} = t^*_{0.975,\infty} = 1.96$.

4. Weryfikujemy hipotezę zerową. Obszar krytyczny to przedział $(-\infty,\ -1.96) \wedge (-1.96,\ \infty)$. Statystyka testowa $t = -12.31031$ znajduje się w obszarze krytycznym, zatem mamy podstawy do odrzucenia hipotezy zerowej o stałych korzyściach skali.

Hipoteza zerowa w formie macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_l \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Wybrane wartości z rozkładów t i F.

Tabela 1: Wybrane wartości rozkładu t

$t(0.95, \infty)$	1.64
$t(0.975, \infty)$	1.96
$t(0.99, \infty)$	2.32
$t(0.995, \infty)$	2.57

Tabela 2: Wybrane wartości rozkładu F

$F(0.95, 2, \infty)$	2.99
$F(0.95, 4, \infty)$	2.37
$F(0.95, 5, \infty)$	2.21
$F(0.975, 4, \infty)$	2.78
$F(0.975, 5, \infty)$	2.57