Testowanie hipotez

Ekonometria WNE

Sebastian Zalas

University of Warsaw
s.zalas@uw.edu.pl

Wprowadzenie

- Nauczymy się jak testować hipotezy na podstawie oszacowanego modelu ekonometrycznego
  - przykład: czy oszacowana elastyczność z danych jest równa wartości przewidywanej przez teorię ekonomii?
  - przykład: czy oszacowany związek zmiennych y i x nie jest jednorazowy?

Rozkład estymatora MNK

- Rozkład estymatora jest kluczowy dla testowania hipotez. W KMRL mamy następujące założenie

$$\boldsymbol{e} \mid \boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{I}\sigma^2)$$

własność MNK

$$\hat{\beta} - \beta = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{e}$$

ponieważ $\hat{\beta} - \beta$ jest liniową funkcją $\boldsymbol{e}$, to $\hat{\beta} - \beta$ również ma rozkład normalny:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} - \beta \mid \boldsymbol{X} &\sim (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathcal{N}(0, \boldsymbol{I}\sigma^2) \\
&\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) \\
&= \mathcal{N}(0, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1})
\end{aligned}$$

co oznacza, że:

$$\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) \tag{1}$$

STATYSTYKA T

- Zapiszmy równanie (1) w inny sposób:
$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]_{j,j}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$
otrzymujemy statystykę t o standardowym rozkładzie normalnym

- Nie obserwujemy wariancji ε; należy skorzystać z oszacowania:
$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{s^2[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}]_{j,j}}} \sim t_{n-k-1}$$
Wtedy statystyka t ma rozkład t-studenta z $n - k - 1$ stopniami swobody

Test t: Hipoteza

- Mamy dany model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon_i$$

- chcemy sprawdzić, czy hipoteza $\beta = d$ jest prawdziwa, gdzie d przyjmuje jakąś znaną wartość (np. zero). Formalnie zapisujemy to w poniższy sposób:

$$H_0 : \beta = d$$
$$H_1 : \beta \neq d$$

Testowanie hipotezy

- Przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa, obliczamy wartość **statystyki testowej**:

$$\frac{\hat{\beta} - d}{se(\hat{\beta})} \sim t(n - k - 1)$$

- następnie ustalamy **poziom istotności**, standardowo przyjmuje się $\alpha = 0.05$
- znajdujemy **wartości krytyczne**: $t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1}$ oraz $t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}$
- przyjmujemy hipotezę zerową, jeżeli statystyka testowa znajduje się pomiędzy wartościami krytycznymi
- w przeciwnym przypadku, odrzucamy hipotezę zerową.

Testowanie istotności

- Oszacowanie modelu:

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k + \varepsilon_i$$

- Hipoteza zerowa i alternatywna:

$$H_0 : \hat{\beta}_k = 0$$

$$H_1 : \hat{\beta}_k \neq 0$$

- obliczmy wartość statystyki t:

$$t = \frac{\hat{\beta}_k}{se(\hat{\beta})} \sim t(n-k-1)$$

- znajdujemy **wartości krytyczne**: $t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1}$ oraz $t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}$
- przyjmujemy hipotezę zerową, jeżeli statystyka testowa znajduje się pomiędzy wartościami krytycznymi $\Rightarrow$ oszacowanie nie jest istotne statystycznie

Testowanie istotności

Obszary akceptacji i odrzucenia H_0 w teście t z obustronną H_1

Przedziały ufności

- Możemy skonstruować taki przedział, że będzie on zawierał prawdziwy parametr β z ustalonym prawdopodobieństwem równym $1 - \alpha$.
- dla 95% przedziałów ufności: $1 - \alpha = 0.95$
- z rozkładu t – *studenta* możemy uzyskać takie wartości krytyczne, że jakakolwiek zm. losowa mająca taki rozkład będzie zawierać się w przedziale $(t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1}, t, t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1})$ z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$:

$$P(t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1} \leq t \leq t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}) = 1 - \alpha$$

$$P(t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1} \leq \frac{\beta_k - \hat{\beta}_k}{se(\hat{\beta})} \leq t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}) = 1 - \alpha$$

$$P(se(\hat{\beta})t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1} \leq \beta_k - \hat{\beta}_k \leq se(\hat{\beta})t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}) = 1 - \alpha$$

Przedziały ufności

- Po przekształceniach otrzymujemy:

$$P(\hat{\beta}_k + se(\hat{\beta})t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1} \leq \beta_k \leq \hat{\beta}_k + se(\hat{\beta})t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}) = 1 - \alpha$$

- rozkład t – *studenta* jest symetryczny, więc $-t^*_{\frac{\alpha}{2},n-k-1} = t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}$, więc przedział ufności ma postać:

$$P(\hat{\beta}_k - se(\hat{\beta})t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1} \leq \beta_k \leq \hat{\beta}_k + se(\hat{\beta})t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}) = 1 - \alpha$$

- jeśli $\alpha = 0.95$, to wtedy z prawdopodobieństwem 0.95

$$\hat{\beta}_k - se(\hat{\beta})t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1} \leq \beta_k \leq \hat{\beta}_k + se(\hat{\beta})t^*_{\frac{1-\alpha}{2},n-k-1}$$

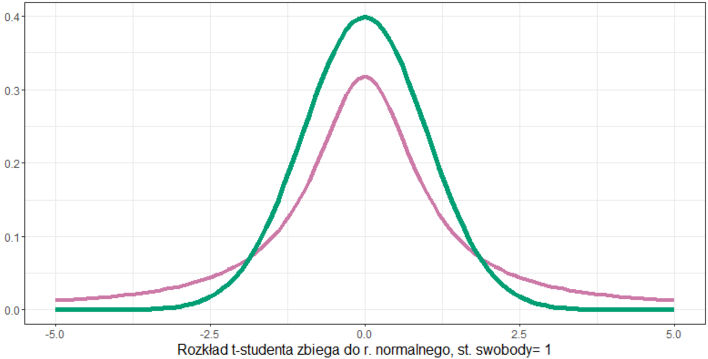
Co jeżeli ε nie ma rozkładu normalnego?

- jeśli $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ to wtedy statystyka testowa t ma dokładnie rozkład *t – studenta*
- jeśli zaś składnik losowy nie ma rozkładu normalnego nadal możemy przeprowadzić test jesli mamy wystarczająco dużą próbę
- Na podstawie Centralnego Twierdzenia Granicznego:

$$t = \frac{\hat{\beta}_k}{se(\hat{\beta})} \overset{as.}{\sim} N(0, 1)$$

- wtedy odczytujemy wartości krytyczne ze standardowego rozkładu normalnego: $\mid t^* \mid \pm 1.96$

Rozkład t-studenta zbiega do rozkładu normalnego standardowego.



Testowanie wielu restrykcji:

- Korzystając z testu t możemy przetestować hipotezę dotyczącą jednego parametru, $\hat{\beta}_k$. Test F pozwala na przetestowanie wielu restrykcji (*multiple restrictions*), które chcemy nałożyć na model.

- Przykład: mamy dany model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon_i$$

- chcemy sprawdzić czy $\beta_2 = \beta_3 = 0$, zatem:

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0 \text{ lub } \beta_3 \neq 0$$

Test F

- szacujemy podstawowy model, bez restrykcji (oznaczmy go literą U -*unrestricted*):

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k + \varepsilon_i$$

- następnie szacujemy z restrykcjami (oznaczmy go literą R -*restricted*):

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k + \varepsilon_i$$

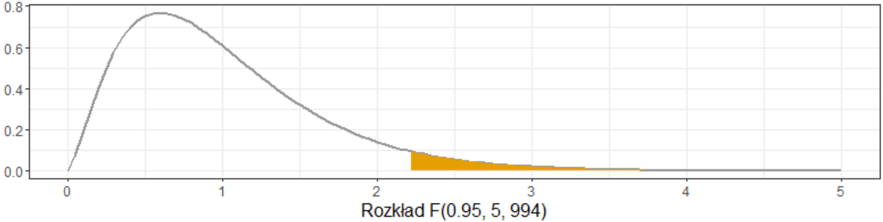
- budujemy statystykę testową

$$F = \frac{\frac{R_U^2 - R_R^2}{q}}{\frac{1 - R_U^2}{n - k_U - 1}} \sim F(1 - \alpha, q, n - k - 1)$$

gdzie q to liczba restrykcji

Test F

Obszary akceptacji i odrzucenia H_0 w teście F



Test F

- Korzystamy z rozkładu F z $(q, b - k - 1)$ stopniami swobody aby wyznaczyć wartość krytyczną F^*. Przyjmujemy H_0 jeśli statystyka testowa jest niższa niż wartość krytyczna: $F < F^*$
- Im większa różnica między $R_U^2 - R_R^2 \Rightarrow$ tym wyższa statystyka $F \Rightarrow$ lepsze dopasowanie do danych dzięki dodaniu zmiennych do modelu.
- Przykład: powszechnie stosowany **test łącznej istotności**. Model podstawowy, bez restrykcji:

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k$$

- w tym przypadku, model z restrykcjami ma postać:

$$y_i = \hat{\beta}_0$$

Test F

- Hipotezy

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

$$H_1 : \text{chociaż jeden parametr } \underline{\text{nie}} \text{ jest równy zero}$$

- statystyka testowa, w tym przypadku jest nieco uproszczona:

$$F = \frac{\frac{SST^2 - SSE^2}{q}}{\frac{1 - SSE^2}{n-k-1}} \sim F(1 - \alpha, q, n - k - 1)$$

statystyka F oraz odpowiadające jej *p-value* są raportowane w pakietach statystycznych, np. w `R`.

Restrykcje w zapisie macierzowym

- Hipotezy dotyczące kilku parametrów możemy zapisać w formie macierzowej:

$$\boldsymbol{H}\beta = \boldsymbol{h}$$

gdzie $\boldsymbol{H}$ to macierz $(q \times (k+1))$ opisująca restrykcje, q to liczba restrykcji, $\boldsymbol{h}$ to wektor stałych z każdej restrykcji.

- Przykład – test łącznej istotności:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{q \times k+1} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{q}$$

Restrykcje w zapisie macierzowym

- Przykład – test następujących restrykcji:
  1. $\beta_1 = \beta_3$
  2. $\beta_2 = a$
  3. $\beta_1 + \beta_4 = b$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD RESTRYKCJI: STAŁE KORZYŚCI SKALI

- Możemy narzucić restrykcje na model, korzystając z teorii ekonomii.
- Przykład – funkcja produkcji:

$$y = \beta_0 + \beta_k k + \beta_l l + \varepsilon$$

- ekonomiści często zakładają że charakteryzują stałe korzyści skali, co można przetestować formułując hipotezę:

$$\beta_k + \beta_l = 1$$

Pytania? Wątpliwości?

Dziękuję!

e: s.zalas@uw.edu.pl