Algebra - Rozwiązania

EKONOMETRIA WNE UW

Sebastian Zalas

s.zalas@uw.edu.pl

Proszę nie rozpowszechniać!

Rozwiązania wybranych zadań

Zadanie 1. Mamy macierze:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Znajdź $2\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{AB}$, $|\boldsymbol{AB}|$. Wyjaśnić dlaczego nie można policzyć $\boldsymbol{AB}'$ i $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

Rozwiązanie:

$$2\boldsymbol{A} = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{AB}| = det \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = 6 \times 9 - 7 \times 8 = 54 - 56 = -2$$

Nie można policzyć $\boldsymbol{AB}'$ i $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, ponieważ wymiary macierzy nie są odpowiednie.

Zadanie 2. Mamy dwie macierze kwadratowe:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokazać, że macierz $\boldsymbol{A}$ jest macierzą symetryczną. Pokaż że $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Udowodnij, że macierze $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{AB}$ są osobliwe.

Rozwiązanie: Macierz kwadratowa jest symetryczna gdy $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$. Sprawdźmy $\boldsymbol{A}'$:

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}$$

Czy $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$? Sprawdźmy:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 18 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$$

Macierze $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{AB}$ są osobliwe. Możemy sprawdzić wyznacznik i przekonać się że jest równy zero w obu przypadkach. Możemy również spojrzeć na te macierze i dostrzec, że ich kolumny są liniowo zależne.

Zadanie 4. Pokazać, że dla dowolnego odwracalnego $\boldsymbol{A}$, $(\boldsymbol{A}')^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})'$.

Rozwiązanie: skorzystamy z definicji macierzy odwrotnej, czyli $\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}$.Wychodząc od lewej strony:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}^{-1})' &= (\boldsymbol{A}^{-1})'\boldsymbol{I} \\ &= (\boldsymbol{A}^{-1})'\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{A}')^{-1} \\ &= (\boldsymbol{AA}^{-1})'(\boldsymbol{A}')^{-1} \\ &= \boldsymbol{I}'(\boldsymbol{A}')^{-1} \\ &= (\boldsymbol{A}')^{-1} \end{aligned}$$

QED.

Zadanie 5. Pokazać (z definicji), że macierz $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ jest nieujemnie określona.

Rozwiązanie: Niech macierz $\boldsymbol{X} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Zbadajmy określoność macierzy $\boldsymbol{X}$. W tym celu zbadajmy czy dla $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $\boldsymbol{v}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{v} \geq 0$.

oznaczmy $\boldsymbol{X}\boldsymbol{v}$ jako y (wektor wymiary $1 \times n$). Zatem:

$$\boldsymbol{v}'\boldsymbol{X}' = (\boldsymbol{X}\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{y}'$$

podstawmy do wzoru formy kwadratowej:

$$\boldsymbol{v}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$$

QED.

Zadanie 6. Pokazać (z definicji liniowej niezależności), że macierz $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ jest nieosobliwa jeśli kolumny macierzy $\boldsymbol{X}$ są liniowo niezależne.

Rozwiązanie: Niech macierz $\boldsymbol{X} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Wiemy, że kolumny macierzy $\boldsymbol{X}$ są liniowo niezależne, co oznacza że $\boldsymbol{Xv} \neq 0$ dla każdego wektora $\boldsymbol{v}$ różnego od zera. A więc mamy udowodnić że $\boldsymbol{Xv} \neq 0 \implies$ nieosobliwość $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$, gdy $\boldsymbol{v} \neq 0$. Zauważmy, że $\boldsymbol{v}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Xv} > 0$ gdy $\boldsymbol{v} \neq 0$, zatem gdy kolumny macierzy $\boldsymbol{X}$ są liniowo niezależne, wtedy macierz $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ jest dodatnio określona. Dodatnia określoność macierzy implikuje jej nieosobliwość. QED.

Zadanie 9. Udowodnij, że dla macierzy A i B o odpowiednich wymiarach $\boldsymbol{AB}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'$

Rozwiązanie: Niech $\boldsymbol{A}$ będzie macierzą o wymiarze $m \times n$, i $\boldsymbol{B}$ niech będzie macierzą o wymiarze $n \times p$.

Wyznaczmy macierz AB i jej transpozycję (lewa strona):

$$\boldsymbol{AB} = (ab)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$$

$$(\boldsymbol{AB})' = (ab)'_{i,j} = (ab)_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}b_{k,i}$$

prawą stronę możemy rozwinąć jako:

$$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}' = (b'a')_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}$$

Ponieważ prawa i lewa strona są takie same, to jest prawdziwe

$$(\boldsymbol{AB})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$$

QED.

Zadanie 10. Udowodnij, że dla śladu macierzy prawdą jest, że $tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A})+tr(\boldsymbol{B})$ oraz $tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA})$

Rozwiązanie: Niech $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ będą macierzami kwadratowymi, stopnia n.

(i) $tr(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$

Wyznaczmy ślad A i B

$$\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

$$\boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,k}$$

Macierz $A + B$ to suma elementów na odpowiednich pozycjach, więc:

$$tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} + b_{k,k}$$

możemy rozdzielić sumę:

$$tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} + \sum_{k=1}^{n} b_{k,k}$$

Zatem:

$$tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$$

QED.

(ii) $tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA})$ patrz notatki.

Zadanie 11. Pokaż, że dla idempotentnego $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ jest także idempotentne.

Rozwiązanie: Macierz idempotentna, to taka że $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^2$

$$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}^2 - \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}^2$$

ponieważ $\boldsymbol{P}$ oraz $\boldsymbol{I}$ są idempotentne:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} + \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$$

QED.

Zadanie 12. Pokaż, że macierz $\boldsymbol{P}$ dla dowolnego $\boldsymbol{A}$ takiego, że $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ jest nieosobliwe, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'$ jest idempotentna.

Rozwiązanie: Z definicji macierzy idempotentnej:

$$\boldsymbol{P}^2 = [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'][\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}']$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\underbrace{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}}_{=\boldsymbol{I}}\boldsymbol{A}'$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$$

QED.

Zadanie 13. Udowodnij, że macierz $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T$ jest macierzą idempotentną rzędu $n-1$ oraz $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{M} = 0$. Policzyć $tr(\boldsymbol{M})$.

Rozwiązanie:

(i) $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T$ jest idempotentna. Z definicji:

$$\boldsymbol{M}^2 = (\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T)(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T)$$
$$\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{I}^2 - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T + \frac{1}{n^2}\underbrace{(\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T)^2}_{\text{macierz } n\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n}$$
$$\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{I} - \frac{2}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T + \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T$$
$$\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T$$
$$\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{M}$$

QED.

(ii) rząd $\boldsymbol{M}$

Jeśli $\boldsymbol{X}$ jest idempotentna, to $rz(\boldsymbol{X}) = tr(\boldsymbol{X})$

$$rz(\boldsymbol{M}) = tr(\boldsymbol{M})$$
$$rz(\boldsymbol{M}) = tr(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T)$$
$$rz(\boldsymbol{M}) = tr(\boldsymbol{I}) - tr(\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T)$$
$$rz(\boldsymbol{M}) = n - \frac{1}{n}n = n - 1$$

(iii) $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{M} = 0$

$$\boldsymbol{I}_n(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T) = 0$$
$$\boldsymbol{I}_n - (\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T)\boldsymbol{I}_n = 0$$
$$\boldsymbol{I}_n - \frac{1}{n}n\boldsymbol{I}_n = 0$$

(iv) $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{M} = 0$

$$\boldsymbol{I}_n(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T) = 0$$
$$\boldsymbol{I}_n - (\frac{1}{n}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{I}_n^T)\boldsymbol{I}_n = 0$$
$$\boldsymbol{I}_n - \frac{1}{n}n\boldsymbol{I}_n = 0$$

(v) $tr(\boldsymbol{M}) = rz(\boldsymbol{M}) = n - 1$