EXAMEN FINAL
Semestre: 2022-2
Nombre del curso: Introducción a la Estadística y Probabilidad
Clave del curso: 1EST10
Nombre del profesor: Arturo Calderón G.
Horario: 0923
Fecha: 30 de noviembre de 2022
Duración de la prueba: 2 horas y 50 minutos

- **Contestar en el cuadernillo cuadriculado adjunto.**
- **Redacción y ortografía serán tomadas en cuenta para la calificación de la prueba.**
- **Salvo formulario, no está permitido el uso de material de consulta durante el desarrollo de la prueba**
- **Salvo calculadora, no está permitido el uso de ningún dispositivo electrónico (celulares, tablets, laptops, iPods, etc.).**
- **Los celulares y las cartucheras deben permanecer guardados durante la prueba.**
- **Puntaje: 20 puntos**

Problema 1 (8 puntos)
Una fundación dedicada a financiar proyectos tecnológicos innovadores, diseña un índice de factibilidad que le permite evaluar la opción que tiene un proyecto de generar una empresa rentable. El índice es una variable X que tiene distribución normal: $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 50^2)$ y se sabe que el 97.5% de proyectos no pasan de los 598 puntos en X.

a) Halle la media μ de X (2p.)

b) Los proyectos con más de 526.23 puntos en factibilidad, obtienen financiamiento adicional para su inicio como empresas. ¿Qué probabilidad tiene un proyecto de obtener este financiamiento? (2p).

c) Toda empresa financiada según lo establecido en b), en su primer año de trabajo tiene un ingreso Y (anual y en miles de unidades monetarias) con distribución LogNormal $LogN(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$.
Dada una recesión general en la economía, se considera que si el ingreso anual cae debajo de 12.105 miles de u.m., la empresa entra en riesgo de quiebra, así que la fundación decide hacer un único préstamo de M miles de u.m. a cada empresa financiada, de modo que, sumado a su ingreso, baje a la mitad la probabilidad de quiebra. Halle la probabilidad de riesgo de quiebra de una empresa financiada y luego halle el valor de M. (4p.)

Solución:

a) Halle la media μ: $P(X \leq 598) = 0.975 = P\left(Z \leq \overbrace{\left[\frac{598-\mu}{50}\right]}^{Z_0}\right) \Rightarrow \frac{598-\mu}{50} = Z_0 = 1.9600 \Rightarrow$

$598 - \mu = 98 \Rightarrow \mu = 500.$

Distribución Acumulativa Normal Estándar P(Z ≤ c)			
c	**5**	**6**	**7**
0.0	0.5199	0.5239	0.5279
1.9	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9798	0.9803	0.9808

b) $P(Financiamiento) = P(X > 526.23) = 1 - P(X \leq 526.23) = 1 - P\left(Z \leq \frac{526.23-500}{50}\right) = 1 -$
$P(Z \leq 0.52) = 1 - 0.6985 = 0.3015 \cong 0.30$; la probabilidad es de 30%.

Distribución Acumulativa Normal Estándar P(Z ≤ c)			
c	**1**	**2**	**3**
0.0	0.5040	0.5080	0.5120
0.5	0.6950	0.6985	0.7019

c) $Y \sim LogN(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$. Si $Y < 12.105$ la empresa entra en riesgo de quiebra.
(1) Hallemos la probabilidad de quiebra $P(Y < 12.105) = P\big(lnY < ln(12.105)\big) = P\left(Z < \frac{ln(12.105)-3}{2}\right) =$
$P(Z < -0.25) = 0.4013$

Distribución Acumulativa Normal Estándar P(Z ≤ c)			
c	**4**	**5**	**6**
-4.0	0.0000	0.0000	0.0000
-0.2	0.4052	0.4013	0.3974

(2) Se presta M miles de u.m. a cada empresa para bajar a la mitad la probabilidad de quiebra. El nuevo ingreso será $W = Y + M$ de modo que $P(Y + M < 12.105) = \frac{1}{2}P(Y < 12.105)$ y se pide M:

$$P(Y + M < 12.105) = \frac{1}{2}P(Y < 12.105) = 0.2006 \Rightarrow P(Y + M < 12.105) = P\left(Y < \overbrace{[12.105 - M]}^{Y_0'}\right)$$

$$= 0.2006 = P\left(Y < \overbrace{[12.105 - M]}^{Y_0'}\right) = P\left(Z < \frac{ln(Y_0') - 3}{2}\right) \Rightarrow Z \cong -0.835 = \frac{ln(Y_0') - 3}{2}$$

$\Rightarrow ln\big(Y_0'\big) = 3 - 2 \times 0.835 = 1.2940 \Rightarrow Y_0' = e^{1.294} = 3.6473 = 12.105 - M \Rightarrow M = 12.105 - 3.6473 =$
8.4577 es el valor de préstamo.

Distribución Acumulativa Normal Estándar P(Z ≤ c)				
c	**0**	**2**	**3**	**4**
-0.9	0.1841	0.1788	0.1762	0.1736
-0.8	0.2119	0.2061	0.2033	0.2005

Problema 2 (8 puntos)

a) Un funcionario de un banco tiene 3 clientes VIP y 4 clientes No VIP a su cargo. El banco lanza una promoción y el funcionario llama a los clientes a su cargo para ofrecer la promoción. Con los clientes VIP calcula que tiene una probabilidad de 3/4 de que el cliente acepte la promoción, en cambio con los clientes No VIP esta probabilidad es 2/3. Se asume independencia entre clientes en cuanto a su decisión de aceptar o no la promoción. Una meta inicial es lograr afiliar a 2 clientes VIP y también afiliar a 3 clientes No VIP. ¿El funcionario logrará la meta? Use probabilidades para responder. Escriba su planteamiento y su procedimiento. (3p.)

Solución:

Tenemos dos procesos, independientes, cada uno con un mismo evento de interés A = "El cliente acepta la promoción", cuya probabilidad $p = P(A)$ es distinta según el tipo de cliente:
Con los VIP, $p = \frac{3}{4}$, el número X de aceptaciones es aleatorio y son $n = 3$ clientes.
Con los No VIP, $p = \frac{2}{3}$, el número Y de aceptaciones también es aleatorio y son $n = 4$ clientes.
La meta es $X = 2$ y $Y = 3$ o equivalentemente es $\big((X = 2) \cap (Y = 3)\big)$ y queremos saber si
$P\big((X = 2) \cap (Y = 3)\big) > 0.5$
Dada la independencia general entre clientes, reconocemos que tanto X como Y tienen correspondientes distribuciones binomiales, con sus respectivos parámetros, y además son v.a. independientes.
Con clientes VIP: $X \sim B\left(x; p = \frac{3}{4}, n = 3\right)$, mientras que con clientes $No\ VIP$: $Y \sim B\left(y; p = \frac{2}{3}, n = 4\right)$ y recordando

la independencia entre X y Y: $P\big((X=2)\cap(Y=3)\big)=P(X=2)\times P(Y=3)=\ C_2^3\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)\times C_3^4\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=$ $0.4219\times 0.3951=0.1667<0.5$: No logrará la meta.

b) El número de clientes que entra a una cola para ser asesorado por un especialista se presenta de acuerdo con un Proceso de Poisson a una tasa de ω = 3 clientes/hora. Por otra parte, cada cliente es atendido por el especialista de modo que el tiempo (en minutos) que demora en ser atendido tiene distribución Exponencial de parámetro $\beta=1/10$. El tiempo que demora el especialista no está asociado al proceso de entrada de clientes a la cola. El especialista atiende a los clientes en cola uno tras otro y hay independencia entre los sucesivos tiempos de atención. Escribiendo brevemente su planteamiento en cada caso y sus procedimientos:
(1) ¿Con qué probabilidad llegarán exactamente solo dos clientes en una hora? (1p.)

(2) ¿Con qué probabilidad pasarán más de 120 minutos hasta que llegue el tercer cliente? (1.5p.)

(3) Si durante una jornada de 8 horas han llegado 32 clientes en total ¿Habrá atendido a todos en menos de seis horas? (1.5p.)

(4) ¿Con qué probabilidad ocurrirá que, en una hora, entren en cola dos clientes para ser atendidos y con el primero demore menos de 15 minutos y con el segundo demore menos de 18 minutos? (1p.)

Solución:
Tenemos dos procesos, uno es el de la llegada de clientes a la cola y el otro es la atención a cada cliente. Además, hay independencia entre los tiempos de atención. Teniendo en mente estas especificaciones, pasemos a resolver cada sub pregunta, tomando los conceptos que se necesiten según el caso:

(1) Esta pregunta es sólo sobre el proceso de entrada o llegada de clientes. De $X=\#$ de clientes que entran en cola en *t* horas sabemos que $X\sim P(x;\lambda=\ \omega t=3)$, pues $t=1$ y se pregunta $P(X=2)=e^{-3}\frac{3^2}{2!}=\frac{9}{2}e^{-3}=0.2240$

(2) Se trata del tiempo hasta el 3er. cliente, esto también está referido al proceso Poisson de entrada. Si $T=$ Tiempo (en horas) hasta que llega el 3er. cliente, en un proceso de Poisson T tiene distribución Gamma $T\sim\Gamma\left(t;\ \alpha=3,\beta=\frac{1}{\omega}=\frac{1}{3}\right)$ y $P(T>2)=1-P(T\le 2)=1-\int_0^2 f_T(t)dt=1-\int_0^2\frac{3^3t^2e^{-3t}}{\Gamma(3)}dt=$ $1-0.9380=0.0620$ (Usamos $T>2$ porque 120 minutos equivale a 2 horas). También se puede resolver usando $X\sim P(x;\lambda=\ \omega t=3t=6)$, pues t = 120 min = 2 horas y $(T>2)=(X\le 2)$ (para que pasen más de 2 horas hasta el 3er cliente, en las dos primeras horas sólo pueden llegar 2 clientes como máximo). Luego $P(T>2)=P(X\le 2)=\sum_{x=0}^{2}e^{-6}\frac{6^x}{x!}=e^{-6}+e^{-6}\frac{6^1}{1!}+e^{-6}\frac{6^2}{2!}=e^{-6}(1+6+18)=25\times e^{-6}=0.0620$

(3) Esta parte está en contexto sólo de los tiempos de atención a cada cliente (ya es dato que son $n=32$ clientes los que han llegado en las ocho horas, o sea esto ya es fijo) y si T es el tiempo total de atención, que es v.a. continua, se pregunta si ocurrió $T<6\ horas)=(T<360\ min.)$, para ello necesitamos ver si $P(T<360)$ resulta mayor que 0.5;

No tenemos la distribución de T, pero sabemos que atiende a los clientes uno tras otro, o sea que T es la suma de los $n=32$ tiempos de atención individuales T_i= Tiempo del cliente #*i*, *i*=1, 2, …,32. El número de sumandos $n=32>30$ es "grande", y hay independencia entre los tiempos, así que el Teorema del Límite Central es aplicable: $T=\sum_{i=1}^{32}T_i\sim N(\mu_T,\sigma_T^2)$, $\mu_T=\sum_{i=1}^{32}\mu_i$; $\sigma_T^2=\sum_{i=1}^{32}\sigma_i^2$. En este caso por dato $T_i\sim Exp\left(t_i;\beta_i=\frac{1}{10}\right)\forall i\Rightarrow\mu_i=\frac{1}{\beta}=10;\ \ \sigma_i^2=\frac{1}{\beta^2}=100\Rightarrow\mu_T=320,\sigma_T^2=3200$: $T\sim N(320,3200)\Rightarrow$ $P(T<360)=P\left(Z<\frac{360-320}{\sqrt{3{,}200}}\right)=P(Z<0.71)=0.7611>0.5$: sí atenderá a todos en menos de seis horas.

(4) Aquí sí confluyen los dos procesos: se pregunta $P\big((X=2)\cap(T_1<15)\cap(T_2<18)\big)$, donde X = # de clientes que entran en cola en t = 1 hora; T_i= Tiempo del cliente #*i*, *i*=1, 2, donde los tiempos son independientes por dato y podemos asumir independencia entre número de llegada de clientes y tiempos de atención. En ese contexto, con $X\sim P(x;\lambda=\ \omega t=3)$ y $T_i\sim Exp\left(t_i;\beta_i=\frac{1}{10}\right)\forall i$:
$P\big((X=2)\cap(T_1<15)\cap(T_2<18)\big)=P(X=2)\times P(T_1<15)\times P(T_2<18)=0.224\times 0.7769\times$

$0.8347 = 0.1453$ es la probabilidad pedida.

Aquí aplicamos que $T_i \sim Exp\left(t_i; \beta_i = \frac{1}{10}\right) \Rightarrow P(T < t_0) = \int_0^{t_0} \left(\frac{1}{10}\right) e^{-\frac{t}{10}} dt = \left(-e^{-\frac{t}{10}}\right)_0^{t_0} = 1 - e^{-\frac{t_0}{10}}$.

Problema 3 (4 puntos)

Un estudiante de economía hace prácticas preprofesionales en una empresa que asesora a comerciantes que venden sus productos en mercados y galerías del centro de Lima. El estudiante es asignado para asesorar a un comerciante de calzado, que, entre otras prácticas de su negocio, suele contratar chicas jóvenes para que trabajen como "jaladoras", o sea personas que, con un catálogo de calzados y precios en mano, ubican clientes que buscan ese tipo de producto dentro de la galería y los convencen para visitar el local del comerciante a fin de hacerles ofertas para que compren allí. El comerciante trabaja de lunes a sábado y en cada día el número de jaladoras que contrata es variable. En una semana, el practicante registró, para cada día el número de jaladoras contratadas y el valor de las ventas en el local registradas en cientos de unidades monetarias. Los datos son:

Día	1	2	3	4	5	6	Media	D. Estándar
Jaladoras	2	1	3	5	4	6	3.5	1.8708
Ventas	16	14	18	17	17	20	17	2.0000
Productos	32	14	54	85	68	120	Sum.Prod	373

a) El comerciante está interesado en la relación que podría existir entre el número de jaladoras y las ventas diarias, con fines de pronóstico de ventas diarias y le encarga al practicante ese trabajo. Usando todas las herramientas estadísticas apropiadas ¿qué podría concluir el practicante? (2p.)

b) El comerciante tiene dos locales, uno en la Galería A y el otro en la Galería B. En A al inicio del día sólo ha podido contratar 2 jaladoras y ese día tiene que pagar una deuda de 34 cientos de u.m. a un prestamista, con el dinero que logre juntar con las ventas en sus dos locales y pregunta al practicante cuántas jaladoras debiera contratar en B como mínimo para lograr su objetivo. Bajo el supuesto de que en ambos locales la relación Número de jaladoras y Ventas diarias es similar, y procediendo analíticamente (con fundamento formal) ¿Cuál sería la respuesta del practicante? (2p.)

Solución:

a) La posible "*relación entre el número de jaladoras y las ventas diarias, con fines de pronóstico de ventas diarias*" plantea una relación de tipo $Y = Ventas\ diarias = f(X), donde\ X = \#\ de\ jaladoras$. Dado que tenemos datos, las herramientas estadísticas apropiadas son:
(1) Diagrama de dispersión XY que permitirá ver si existe la relación, y qué tipo de relación (lineal o no lineal) podría ser.
(2) Coeficiente de correlación de Pearson r_{XY} que cuantificará la relación lineal de existir esta, indicando si es directa o inversa y si es lo suficientemente fuerte como para poder representarla con una recta que muestre el valor promedio o esperado de las ventas Y como función del número X de jaladoras:
$E(Y|X) \equiv \hat{y} = f(X) = a + bX$

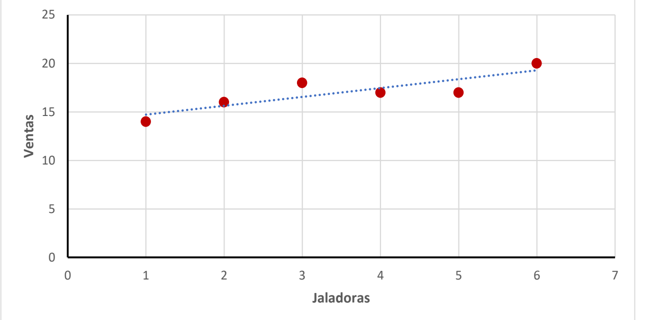

Figura 1 Diagrama de dispersión Ventas vs Jaladoras

(1) La figura 1 muestra que **sí habría relación**, y ésta **sería lineal y directa**: A más jaladoras, más ventas.
Para que sea aplicable una recta de regresión lineal $E(Y|X) \equiv \hat{y} = a + bX$ debe de haber una correlación grande $|r_{XY}| > 0.8$

(2) Calculando la correlación:

$$r_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{(n-1)S_X S_Y} = \frac{373 - 6\times 3.5\times 17}{5\times 1.8708\times 2} = 0.8552$$

Sí hay relación y es lineal directa

b) Calculando las estimaciones de los parámetros a y b de la recta de regresión se obtiene:
$b = r_{XY}\frac{S_Y}{S_X} = 0.8552 \times \frac{2}{1.8708} = 0.9143$
$a = \overline{Y} - b\overline{X} = 17 - 0.9143 \times 3.5 = 13.8000$
La ecuación es $\hat{y} = 13.8 + 0.9143X$ o $Ventas = 13.8 + 0.9143Jaladoras$.

Con $X = 2$ jaladoras, en su local de la Galería A tendría ventas por valor $\hat{y} = 13.8 + 0.9143 \times 2 = 15.63$; como necesita un ingreso (por valor de las ventas) que le permita pagar su deuda de 34 cientos de u.m. tiene que tener un ingreso por ventas en su local de la Galería B por lo menos igual a $34 - 15.63 = 18.37$ cientos de u.m.

Como la ecuación de regresión en B es la misma que en A: $\hat{y} = 13.8 + 0.9143X$, igualando $18.37 = \hat{y}$, podemos despejar X: $18.37 = 13.8 + 0.9143X \Rightarrow X = \frac{18.37-13.8}{0.9143} = \frac{4.57}{0.9143} = 4.9984 \cong 5$ jaladoras: Debe contratar 5 jaladoras para su local en la Galería B.