ANÁLISIS DE PROPAGACIÓN DE ENFERMEDADES CONTAGIOSAS

Oscar Andrés Gómez Hernández
Carlos Sebastian Martinez Vidal
Universidad del Rosario
Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología
Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación
Análisis Numérico y Computación Científica

(Dated: 2 noviembre 2021)

Se quiere analizar la propagación de enfermedades contagiosas mediante el uso de ecuaciones diferenciales, para las cuales se usaran métodos numéricos de problemas de valor inicial. Con estos métodos se busca predecir el número de individuos infectados en una población en cualquier momento.

I. INTRODUCCIÓN

Para la propagación de enfermedades contagiosas se utiliza una ecuación diferencial elemental para predecir el número de individuos en una población que se infectarán en un momento dado, siempre y ciando se cumplan ciertas condiciones. En particular, asumiremos que todos los miembros de una población fija tienen las mismas posibilidades de infectarse y, una vez infectados, de permanecer en ese estado y que el número de población susceptible y el número de población infectada cambia con el tiempo.
Supongamos que $x(t)$ es el número de individuos susceptibles en un tiempo t, y $y(t)$ es el número de individuos infectados. La razón a la cual cambia el número de infectados es proporcional al producto de $x(t)$ y $y(t)$. Además, si $x(t)$ y $y(t)$ con variables continuas, el problema lo expresamos como:

$$y'(t) = kx(t)y(t)$$

donde k es una constante y $x(t) + y(t) = m$ es el total de la población.
Esta ecuación la podemos reescribir en solo términos de $y(t)$ como:

$$y'(t) = k(m - y(t))y(t)$$

II. MÉTODOS NUMÉRICOS

Utilizaremos los siguientes métodos numéricos de problemas de valor inicial para hacer una aproximación de $y(t)$: .

- Euler
- Euler Modificado
- Runge Kutta de Cuarto Orden

Igualmente, generaremos gráficas de las aproximaciones contra el tiempo y algunas variaciones para poder observar estos resultados gráficamente.

III. ECUACIÓN DE BERNOULLI

Utilizaremos la ecuación de Bernoulli transformada a una ecuación diferencial de la manera $u(t) = (y(t))^{-1}$, para encontrar la solución exacta de la ecuación. Vamos a tomar $k = 0.2$, $m = 1$ y $y(0) = 1000$. Además de hallar el $\lim_{t\to\infty} y(t)$

A. Solución de la Ecuación

Remplazando los valores obtenidos anteriormente, tenemos:

$$y' = 0.2(1 - y)y$$

$$y' - 0.2y = -0.2y^2$$

Luego dividiendo por y^2

$$\frac{1}{y^2}y' - 0.2\frac{1}{y} = -0.2$$

Ahora tomaremos como $\tilde{y} = \frac{1}{y}$, por lo que obtendremos:

$$-(\tilde{y})' - 0.2\tilde{y} = -0.2$$

. Esta es una ecuación lineal, la cual tiene factor integrante de $e^{\int 0.2dt} = e^{0.2t}$. Por lo que:

$$e^{0.2t}(\tilde{y})' + 0.2e^{0.2t}\tilde{y} = 0.2e^{0.2t} \Longrightarrow (\tilde{y}e^{0.2t}) = 0.2e^{0.2t}$$

Integrando obtenemos

$$e^{0.2t}\tilde{y} = e^{0.2t} + c \Longrightarrow \tilde{y} = 1 + ce^{-0.2t}$$

Usando nuestra m original, tenemos: $\tilde{y} = \frac{1}{y} = \frac{10^5}{y}$. Y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{10^5}{y(t)} = 1 + ce^{-0.2t}$$

Usando la condición inicial obtenemos que $100 = 1 + c \Longrightarrow c = 99$, y finalmente obtenemos:

$$y(t) = \frac{100000}{1 + 99e^{-0.2t}}$$

Note que si $t \to \infty$, $y(t) \to 10^5$

IV. ANÁLISIS DE RESULTADO CON LOS MÉTODOS:

A. $w(t)$ vs t

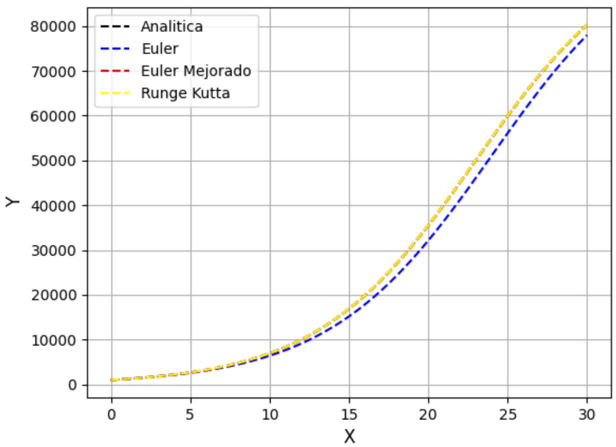

FIG. 1. $w(t)$ vs t

A priori, solo podemos observar la gráfica de Euler y otra gráfica de un color parecido al amarillo. El color es parecido al amarillo porque en verdad están solapadas tres gráficas.

Si acercamos un poco la gráfica

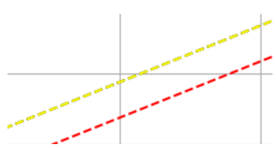

FIG. 2. $w(t)$ vs t

Observamos la gráfica de Euler mejorado, y si la acercamos un poco mas podremos diferenciar la de la solución analítica y la de Runge Kutta. Esto, se debe principalmente a porque Euler es el método que peor manera se aproxima a nuestra solución exacta. Por otro lado, Runge Kutta es tan preciso que requiere un nivel de acercamiento muy grande para poder notar su diferencia con la solución exacta en la gráfica.

B. $w(t) - y(t)$ vs t

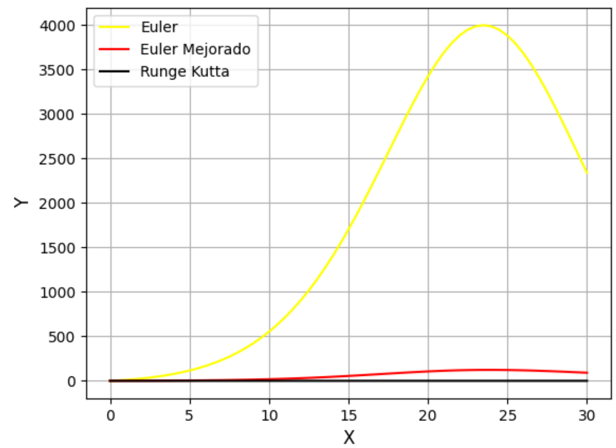

FIG. 3. $w(t) - y(t)$ vs t

El error absoluto nos da una indicación sobre la imprecisión de los métodos. Es por esto, que Runge Kutta tiene un error aproximadamente de 0 y Euler mejorado empieza tan bien como Runge kutta, pero luego incrementa su error en cuanto a la aproximación. Por otro lado para Euler tenemos un error a priori creciente pero que en cierto punto decrece, lo cual significa que se acerca mas a la solución exacta a partir de es punto. Si incrementamos el eje x de la gráfica podremos observar que tanto Euler como Euler mejorado decrecerán hacia aproximadamente 0. Lo que nos dice que las dos siguen un patrón parecido en cuanto a ser crecientes y luego decrecientes, aunque en Euler se ve mas claro.

C. $w(t) - y(t)/y(t)$ vs t

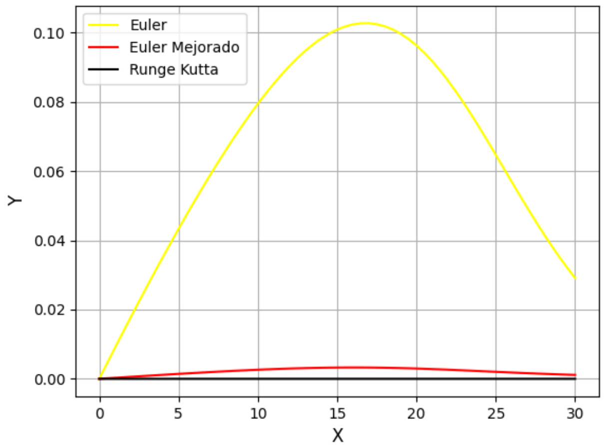

FIG. 4. $w(t) - y(t)/y(t)$ vs t

El error relativo nos da un indicador sobre la calidad de los métodos. Para Euler mejorado y Runge Kutta obtenemos prácticamente la misma gráfica que con el error absoluto. Sin embargo, para Euler esta vez obtenemos un tipo de parábola. La diferencia radica en el comienzo de la gráfica

D. $w(t) - y(t)$ vs h

Para esta gráfica usamos un paso de $h \in [0.0005, 0.5]$

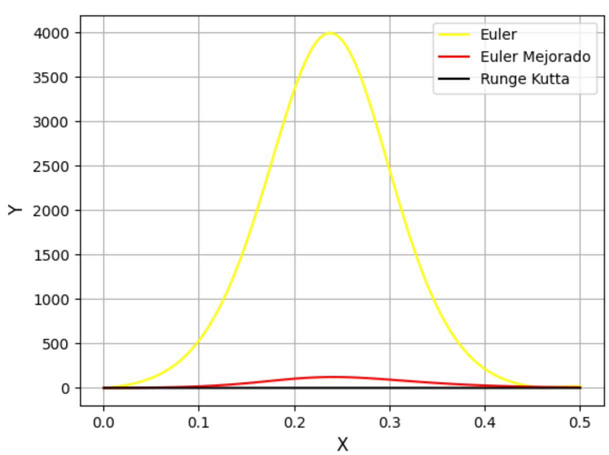

FIG. 5. $w(t) - y(t)$ vs h

En esta gráfica si obtuvimos una parábola completa para Euler. De esta manera, se sigue el fenómeno de los errores en cuanto a que se mantienen las gráficas de Euler mejorado y Runge Kutta y que la gráfica de Euler se acerca cada vez mas a una parábola.

V. RESULTADOS

Con los resultados obtenidos podemos evidenciar que a lo largo del tiempo el número de infectados crece, sin al parecer tener un fin, lo que nos dice que la razón de esparcimiento de la enfermedad es creciente. Por hipótesis sabemos que cada individuo de la población tiene la misma posibilidad de contagiarse así que lo lógico para los oficiales de salud es buscar alguna cura para la enfermedad o por lo menos tomar medidas de Bio-Seguridad para que la enfermedad no se esparza tan rápidamente. Entre más medidas se tomen menos va a ser la razón de crecimiento de la enfermedad y además se podría lograr una reducción en la razón de los infectados.
Podemos observar con los resultados anteriores que aunque cambiemos los métodos, la interpretación a la que llegamos es la misma, lo que llega a tener una variación es el tiempo en el que se llega a un estado de infección lo suficientemente grande.

VI. CONCLUSIONES

- A menos que se tomen medidas, el numero de contagiados seguirá creciendo rápidamente.
- Los métodos que mas se aproximan a la solución exacta son Runge Kutta y Euler mejorado
- El método de Euler nos da una predicción en donde tomará un poco mas de tiempo alcanzar cierto nivel de contagiados.
- El mejor método es Runge Kutta y esto se ve reflejado en su aproximación al 0 en cuanto su error.

REFERENCIAS

[1] Burden, R. L., Faires, D. J., & Burden, A. M. (2015). Numerical Analysis (10th Revised ed.). Cengage Learning.