

# MÉTODOS DE INTEGRACIÓN PARA UN CAMPO MAGNÉTICO USANDO LA LEY DE BIO-SAVART

Oscar Andrés Gómez Hernández  
Carlos Sebastian Martinez Vidal  
*Universidad del Rosario*  
*Escuela de Ingeniería, Ciencia y Tecnología*  
*Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación*  
*Análisis Numérico y Computación Científica*  
(Dated: 23 septiembre 2021)

Se quiere calcular el campo magnético total de cierto alambre recto simple, mediante la ley de Bio-Savart, integrando sobre la longitud el cable. Para ello, se usarán diferentes métodos de integración, los cuales darán una aproximación numérica en un intervalo.

## I. INTRODUCCIÓN

Al diseñar dispositivos electrónicos, se tiene que tener en cuenta la corriente eléctrica de estos, ya que esta nos permite la evaluación del campo magnético que los dispositivos generan, así como la calidad del mismo. Esta última dependerá de la geometría del dispositivo en cuestión. Teniendo en cuenta lo anterior, consideramos un simple cable recto, hecho de un material  $\mu_0 I$ , con una corriente  $I$ , fluyendo en un segmento del cable, de longitud  $dz$ .

Para calcular el campo magnético, usaremos la ley de Biot-Savart, integrándola sobre la longitud del cable, siendo esta  $2L$  y el cable centrado en el origen. Tenemos, entonces, el término:

$$d\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{Z} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

al cual le calcularemos la integral. Para esto, primero debemos pasar la expresión a términos más sencillos, por lo que, en principio, realizaremos el producto vectorial entre  $d\mathbf{z} \times \mathbf{r}$ , el cual nos da como resultado  $\|dz\| \|r\| \sin \theta$ . Sabemos que  $\sin \theta = \frac{x}{r}$ . De esta manera, podemos expresar la integral de la siguiente manera,

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{x}{r^3} dz = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{x}{(z^2 + x^2)^{3/2}} dz$$

. Teniendo en cuenta que  $r^2 = z^2 + x^2$ .

Para resolver la anterior integral, usaremos métodos de integración, tales como la **regla del trapecio** y la **regla de Simpson**, cada una en su versión estándar, y en su versión compuesta.

## II. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

### A. Regla del trapecio

Es llamada regla del trapecio porque cuando  $f$  es una función con valores positivos  $\int_a^b f(x) dx$  es aproximada por el área en un trapecio.

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

donde  $h = b - a$  y  $x_0 \leq \xi \leq x_1$ .

#### 1. Regla del trapecio compuesta

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[ f(a) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b) \right] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\mu)$$

### B. Regla de Simpson

La regla de Simpson resulta de integrar sobre  $[a, b]$  el segundo polinomio de Lagrange con nodos igualmente espaciados  $x_0 = a, x_2 = b$  y  $x_1 = a + h$ , donde  $h = \frac{b-a}{2}$ .

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^4(\xi)$$

donde  $x_0 \leq \xi \leq x_2$ .

#### 1. Regla de Simpson compuesta

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[ f(a) + 2 \sum_{j=1}^{(n/2)-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b) \right] -$$

$$\frac{b-a}{180} h^4 f^4(\mu)$$

### III. INTEGRANDO LA REGLA DE BIOT-SAVART

Se evaluará el campo magnético como función de la distancia desde el cable. Para esto las siguientes constantes de la corriente serán  $\mu_0 I = 1$  y  $L = 1$

#### A. Análisis de resultado con trapezoide

Calculamos la magnitud del campo como función de  $x/L$  para  $y = z = 0$ . Para esto usamos regla del trapezoide compuesta con pasos de  $\Delta z = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ . y la comparamos con la regla del trapezoide estándar.

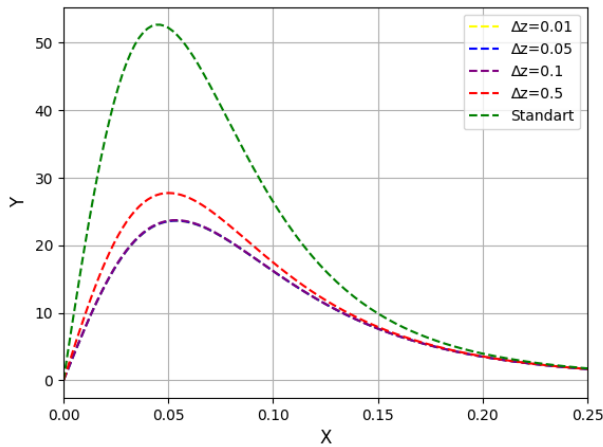


FIG. 1. Regla del trapezoide

Se observa a priori en la gráfica que a medida que hacemos el paso mas pequeño, nuestra magnitud del campo magnético decrece. También que a partir del paso  $\Delta z = 0.1$  nuestras gráficas son prácticamente iguales, aunque claramente si las acercamos un poco mas podremos diferenciarlas bien, por lo que esto nos muestra parcialmente desde que paso se consideraría "bueno" aplicar la regla del trapezoide. Por otro lado, afirmamos que es mejor usar la regla compuesta del trapezoide en vez de la estándar, ya que la magnitud del campo magnético para la regla estándar alcanza aproximadamente el doble del valor de su siguiente paso usado (0.5). Por ultimo, a pesar de que son muy distintas las gráficas entre 0-0.23, a partir de ahí vemos como todas se intersectan y convergen hacia el 0.

#### B. Análisis de resultado con Simpson

Calculamos la magnitud del campo como función de  $x/L$  para  $y = z = 0$ . Para esto usamos regla de Simpson compuesta con pasos de  $\Delta z = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ . y la comparamos con la regla de Simpson estándar.

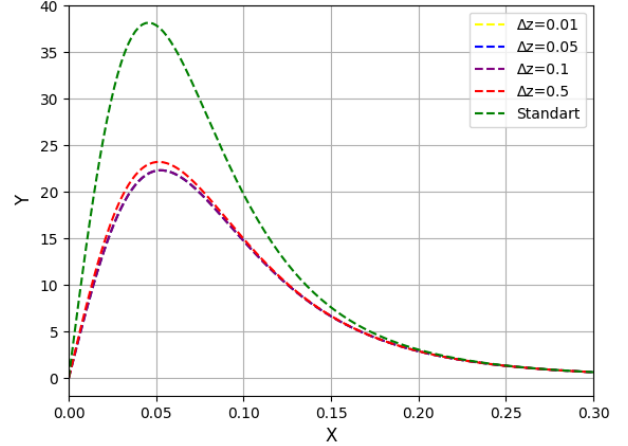
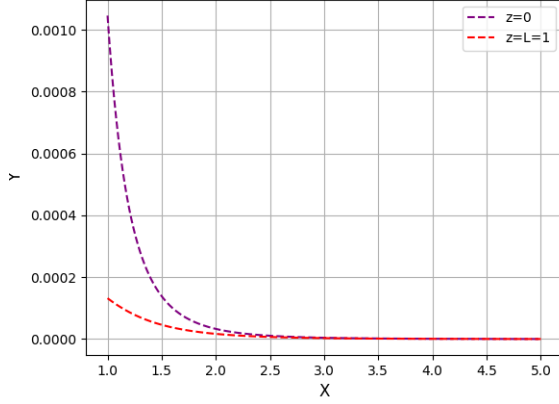


FIG. 2. Regla de Simpson

En esta gráfica con Simpson, a diferencia de la gráfica con trapezoide, la regla estándar alcanza un valor máximo inferior a 40. Sin embargo, con los otros pasos se alcanza un valor máximo idéntico al de la regla del trapezoide. Otra diferencia notable entre métodos es que la gráfica del paso  $\Delta z = 0.5$  esta mas "pegada" a los siguientes pasos mas pequeños, por lo que se concluye que la precisión de este método no disminuye tanto con un paso de  $\Delta z = 0.5$  como el del trapezoide lo hace y que la regla estándar de Simpson es considerablemente mejor que la regla estándar del trapezoide. Como mejora la precisión se concluye también porque es mejor usar la regla de Simpson y a diferencia de del trapezoide las gráficas se empiezan a intersectar a partir de 0.17.

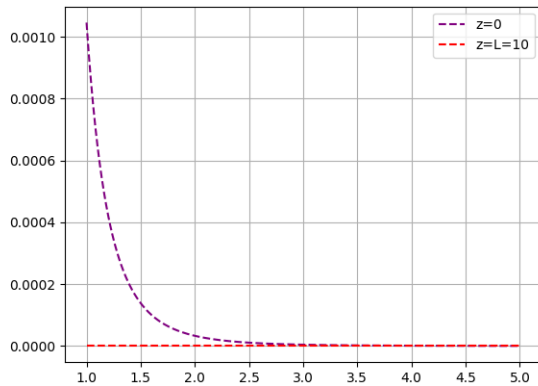
#### C. Análisis de resultado con Simpson con diferentes condiciones iniciales

Calculamos la magnitud del campo como función de  $x/L$  para  $y = 0$  y  $z = L$ . Para esto usamos regla de Simpson compuesta con paso de  $\Delta z = 0.01$ . y la comparamos con la magnitud del campo formada por  $z = 0$

FIG. 3. Regla de Simpson,  $L=1$ 

Teniendo en cuenta que  $z = L$  implica que en principio  $z$  es 1, se observa que las dos son curvas y que cuando  $z = 1$  tenemos un campo magnético mas cercano al 0. Sin embargo, las dos son bastante cercanas y a partir de cierto punto bastante cercano también las dos magnitudes de los campos magnéticos comienzan a ser iguales.

Ahora repetimos para  $L = 10$  y lo comparamos con la magnitud del campo formada por  $z = 0$

FIG. 4. Regla de Simpson,  $L=10$ 

A priori lo mas notable es el hecho de que la gráfica hecha con  $L = 0$  nos genera una magnitud del campo magnético de supuestamente 0. Pero si observamos mas de cerca nos damos cuenta que:

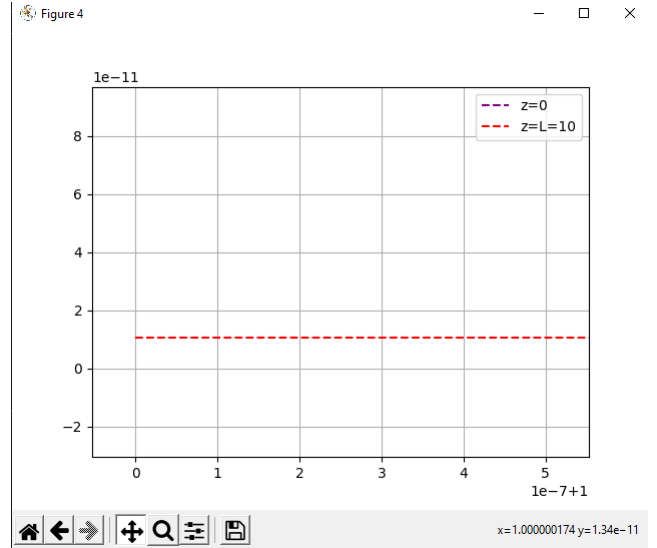


FIG. 5. Gráfica anterior acercada

no es 0, y para poder saberlo tuvimos que acercar la gráfica en el punto  $x = 1$  y  $y = 1.34e-11$ , por lo cual esta ha sido nuestra aproximación mas cercana hasta ahora a una magnitud de campo magnético de 0. Concluimos entonces que a medida que se incrementa la longitud del cable nuestra magnitud de campo magnético es mas cercana a 0.

#### IV. CONCLUSIONES

- La regla de Simpson es mas precisa que la regla del trapecioide.
- A media que el paso se hace mas pequeño nuestra magnitud del campo magnético disminuye.
- Las reglas estándar de los dos métodos alcanzan aproximadamente dos veces el valor de su siguiente paso.
- A partir de cierto punto las gráficas tienden hacia 0.
- Si incrementamos el  $L$  nuestra magnitud de campo magnético será mas cercana a 0.

#### REFERENCIAS

- [1] Wikipedia contributors. (2021, 13 septiembre). Biot-Savart law. Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Biot%E2%80%93Savart\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Biot%E2%80%93Savart_law)
- [2] Burden, R. L., Faires, D. J., & Burden, A. M. (2015). Numerical Analysis (10th Revised ed.). Cengage Learning.