

12. Obliczanie całek $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdzie $D = [a, b] \times [c, d]$ złożoną kwadraturą Simpsona ze względu na zmienną x oraz złożoną kwadraturą prostokątów (z punktem środkowym) ze względem na zmienną y

Sebastian Szarafin
313460

2 stycznia 2022

1 Wstęp

Kwadratury Newtona-Cotesa są prostymi za równo w zrozumieniu jak i w implementacji metodami przybliżającymi całkę funkcji ciągłej na zadanym przedziale. Niemniej jednak, przy odpowiednim doborze parametrów mogą być one całkiem dokładne.

W raporcie została zbadana metoda obliczania całek podwójnych funkcji $f(x, y)$ opierająca się na połączeniu 2 złożonych kwadratur Newtona-Cotesa: kwadratury Simpsona względem zmiennej x oraz kwadratury prostokątów (z węzłem środkowym) względem zmiennej y , na prostokącie $D = [a, b] \times [c, d]$. Jak się okazało, nawet przy względnie skomplikowanych funkcjach, wyniki odbiegały bardzo nieznacznie od wyników teoretycznych.

2 Opis użytych metod

Kwadratury na których bazuje omawiana metoda przybliżają całkę funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ podzielonym na podprzedziały $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, N$), o długości $H = \frac{b-a}{N}$.

2.1 Kwadratura Simpsona

Prosty wzór Simpsona, zwany również wzorem parabol jest oparty na węzłach: a , b i $\frac{a+b}{2}$. Polega na przybliżeniu funkcji f wielomianem stopnia 2 i wyraża się wzorem:

$$S(f) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Złożony wzór Simpsona ma postać:

$$S(f) = \frac{H}{6} \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(a+kH) + 4 \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a+kH + \frac{H}{2}\right) \right),$$

a jego błąd jest równy:

$$E(f) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4 (b-a) f^{(4)}(\mu_2).$$

Kwadratura Simpsona jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia nie przekraczającego 3.

2.2 Kwadratura prostokątów

Prosty wzór prostokątów oparty jest na 1 węźle $x_0 \in [a, b]$. Polega na przybliżeniu funkcji f wielomianem stopnia 0 i wyraża się wzorem:

$$S(f) = (b-a)f(x_0).$$

Złożony wzór prostokątów (oparty na węźle środkowym) ma postać:

$$S(f) = \sum_{k=1}^N (x_k - x_{k-1}) f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right),$$

a jego błąd jest równy:

$$E(f) = \frac{1}{24} H^2 (b-a) f''(\mu_3).$$

Kwadratura prostokątów jest dokładna dla wszystkich wielomianów stopnia nie przekraczającego 1.

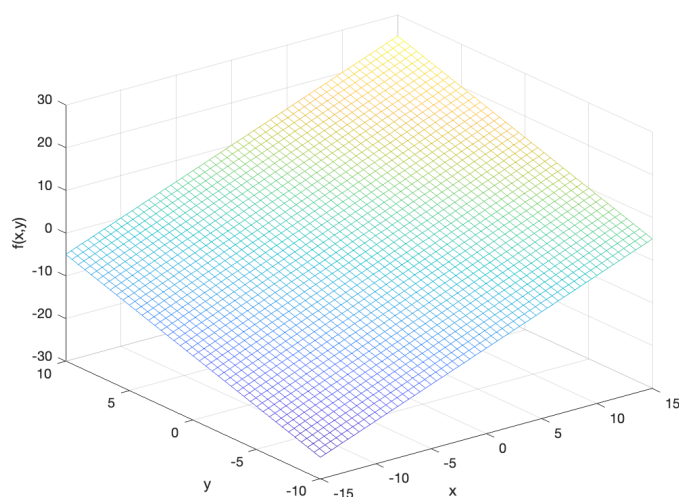
3 Eksperymenty

Metoda została przetestowana na kilku bardziej i mniej skomplikowanych funkcjach o różnorodnych przebiegach na zadanym przedziale.

3.1 Przykład 1

Przykład 1 przedstawia przybliżenie całki $\int_{-10}^{10} \int_{-15}^{15} x + y \, dx \, dy$.

Wykres przybliżanej funkcji przedstawia Rysunek 1.



Rysunek 1: Przedstawia wykres funkcji $f(x, y) = x + y$.

Funkcja jest nieparzysta na zadanym przedziale, wobec tego jej całka jest równa 0.

Wyniki przybliżania przedstawiono w Tablicy 1.

Tablica 1: Wyniki - Przykład 1

N	M	wynik uzyskany	wynik teoretyczny	błąd
1	1	0	0	0
10	10	0	0	0
100	100	$1.8189e-14$	0	$1.8189e-14$
1000	1000	0	0	0
10000	10000	$-1.1641e-16$	0	$-1.1641e-16$

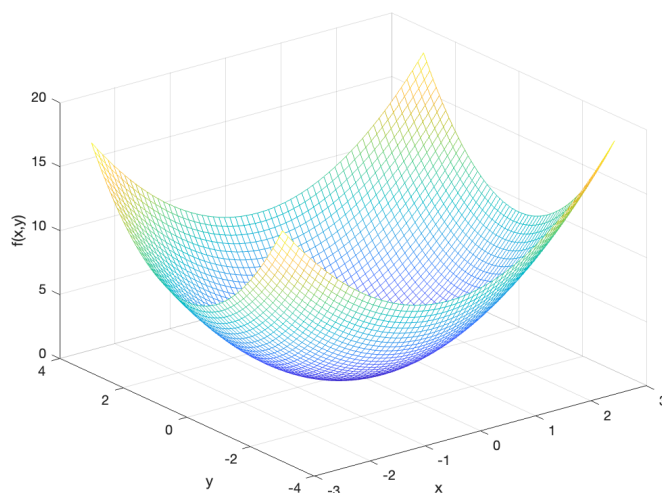
Widać, że funkcja została bardzo dokładnie przybliżona, całka w 3 przypadkach jest równa dokładnie 0, a w 2 przypadkach jest bardzo bliska 0.

Zwiększenie ilości podprzedziałów nie do końca przełożyło się na poprawę dokładności obliczeń, aczkolwiek uzyskane błędy są bardzo niewielkie i właściwie pomijalne.

3.2 Przykład 2

Przykład 2 przedstawia przybliżenie całki $\int_{-3}^3 \int_{-3}^3 x^2 + y^2 dx dy$.

Wykres przybliżanej funkcji przedstawia Rysunek 2.



Rysunek 2: Przedstawia wykres funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Funkcja jest parzysta na zadanym przedziale oraz $\forall x, y \in D f(x, y) \geq 0$. Wyniki przybliżania przedstawiono w Tabeli 2.

N	M	wynik uzyskany	wynik teoretyczny	błąd
1	1	108	216	$1.08e02$
10	10	214.92	216	1.08
100	100	215.9892	216	$1.08e-02$
1000	1000	215.9998	216	$1.0799e-04$
10000	10000	215.9999	216	$1.08e-06$

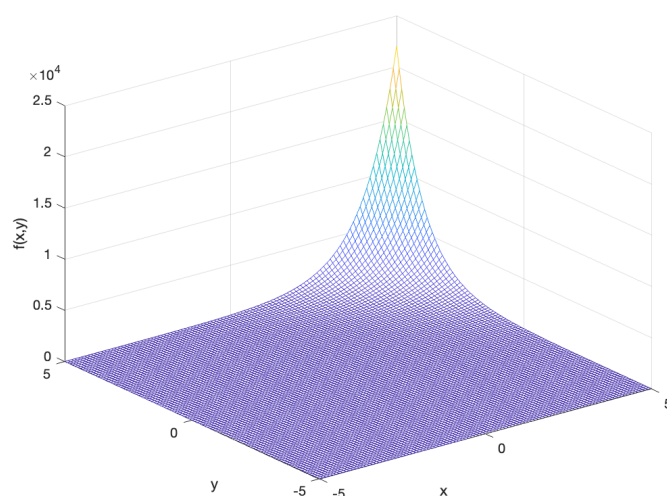
Pierwsze przybliżenie jest niezbyt zadowalające, ale nic w tym dziwnego gdyż użyty został jedynie 1 węzeł. Z każdym kolejnym przybliżeniem błąd jest

coraz mniejszy, a uzyskany wynik jest praktycznie zgodny z wynikiem teoretycznym.

3.3 Przykład 3

Przykład 3 przedstawia przybliżenie całki $\int_{-5}^5 \int_{-5}^5 e^{x+y} dx dy$.

Wykres przybliżanej funkcji przedstawia Rysunek 3.



Rysunek 3: Przedstawia wykres funkcji $f(x, y) = e^{x+y}$.

Funkcja jest bardzo bliska 0 dla $x + y < 0$, a w momencie zmiany znaku wykładnika liczby e , gwałtownie wzrasta. Dla argumentów ujemnych:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow -\infty} f(x, y) = 0,$$

natomiast dla argumentów dodatnich:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = \infty.$$

Wyniki przybliżania przedstawiono w Tablicy 3.

Tablica 3: Wyniki - Przykład 3

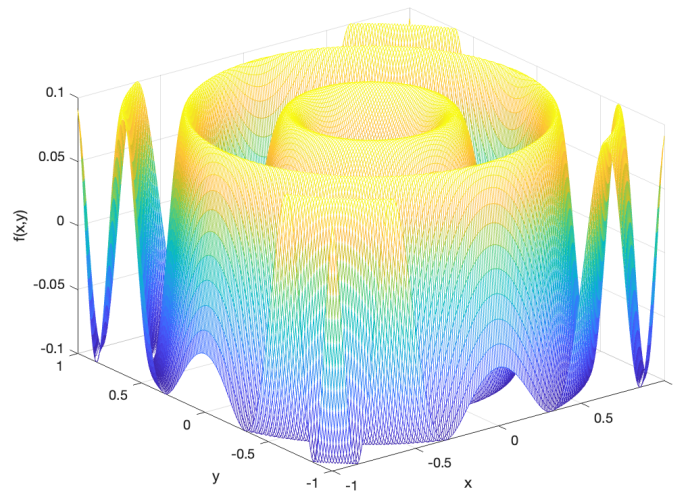
N	M	wynik uzyskany	wynik teoretyczny	błąd
1	1	2540.3316	22024.5	1.9484e04
10	10	21139.9826	22024.5	8.8451e02
100	100	22015.2924	22024.5	9.2075
1000	1000	22024.3740	22024.5	1.2592e-01
10000	10000	22024.4649	22024.5	3.5077e-02

Podobnie jak w poprzednim przykładzie z każdym kolejnym przybliżeniem błąd jest coraz mniejszy, a uzyskany wynik coraz bliższy wynikowi teoretycznemu.

3.4 Przykład 4

Przykład 4 przedstawia przybliżenie bardziej skomplikowanej całki $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sin(10(x^2+y^2))}{10} dx dy$.

Wykres przybliżanej funkcji przedstawia Rysunek 4.



Rysunek 4: Przedstawia wykres funkcji $f(x, y) = \frac{\sin(10(x^2+y^2))}{10}$.

Funkcja wyglądem przypomina fale kapilarne powstające na powierzchni 2

cieczy.

Wyniki przybliżania przedstawiono w Tablicy 4.

Tablica 4: Wyniki - Przykład 4

N	M	wynik uzyskany	wynik teoretyczny	błąd
1	1	-0.0725	0.0334	$1.0594e-01$
10	10	0.0353	0.0334	$1.9334e-03$
100	100	0.0334	0.0334	$1.9760e-06$
1000	1000	0.0334	0.0334	$6.3975e-08$
10000	10000	0.0334	0.0334	$4.5324e-08$

Mimo, iż wynik teoretyczny jest względnie mały to jako że przedział całkowania jest kwadratem o polu 1, już przy 10 podprzedziałach N i M uzyskane wyniki są porównywalne.

4 Podsumowanie

Przeprowadzone testy pokazują, że połączenie kwadratury Simpsona i prostokątów daje dokładne lub bardzo niewiele różniące się wyniki niezależnie od zróżnicowania całkowanej funkcji.

Metoda jest również efektywna czasowo. Zaimplementowana w Matlabie nie trwa dłużej niż 0.3s nawet przy ilości podprzedziałów rzędu $1.0e08$.