MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2024

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Diego Olguín W. **Ayudantes:** Carlos Antil C. y Luis Fuentes C.

Laboratorio #2

Controlabilidad, observabilidad, estabilidad y detectabilidad

Descripción: El objetivo de este laboratorio es estudiar la controlabilidad, observabilidad, estabilidad y detectabilidad de un sistema lineal controlado. Para esto, se pide verificar los respectivos criterios de manera directa y usando el paquete `ControlSystems` de `Julia`. También se estudiarán conceptos relacionados como la matriz de controlabilidad y la matriz de observabilidad.

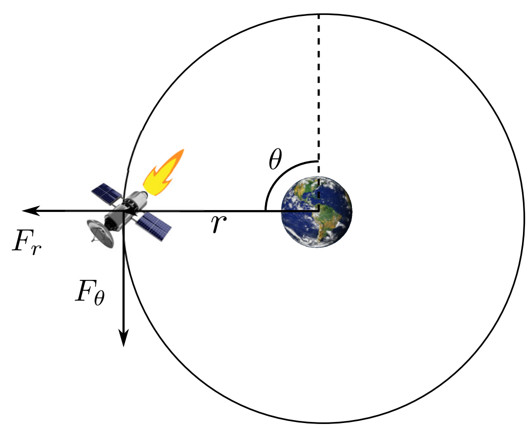
Parte A. Modelamiento y simulación

La dinámica de un satélite que se mueve en un plano orbital sigue las ecuaciones

$$\ddot{r} = r\dot{\theta} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{F_r}{m} \tag{1}$$

$$\ddot{\theta} = -2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{F_\theta}{mr} \tag{2}$$

donde las variables (r, θ) representan las coordenadas polares del satélite y (F_r, F_θ) son la fuerza del motor en las direcciones r y θ. Los parámetros son: $m = 350$ kg masa del satélite, $\mu = 4{,}54 \cdot 10^{13}$ m^3 s^{-2} constante gravitacional del centro de la atracción.



El objetivo de este laboratorio es estudiar el problema de estabilizar el satélite en una orbita de referencia $(r(t), \theta(t)) = (R_0, \Omega_0 t)$. Para esto rescribimos la dinámica con las siguentes variables:

$$x_1 = r(t) - R_0 \quad ; \quad x_2 = \dot{r}$$
$$x_3 = \theta(t) - \Omega_0 t \quad ; \quad x_4 = \dot{\theta} - \Omega_0$$

y la dinámica esta dada por

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= (x_1 + R_0)(x_4 + \Omega_0)^2 - \frac{\mu}{(x_1 + R_0)^2} + \frac{F_r}{m} \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= -2\frac{x_2(x_4 + \Omega_0)}{x_1 + R_0} + \frac{F_\theta}{m(x_1 + R_0)}
\end{aligned}$$

Así, la orbita de referencia corresponde al equilibrio $(0,0,0,0)$, si $R_0^3 = \frac{\mu}{\Omega_0^2}$ y si las fuerzas F_r y F_θ estan nulas. Sin embargo, se puede probar que este equilibrio no es asintóticamente estable y por lo tanto es necesario usar el motor para estabilizar la orbita del satélite.
La estabilidad local de este equilibrio puede ser estudiada mediante la linealización del modelo, obteniendo un sistema lineal autónomo controlado de la forma

$$\dot{X} = AX + BU \tag{3}$$

con $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$; $U = (F_r, F_\theta)$ y

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega_0^2 & 0 & 0 & 2\Omega_0 R_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\Omega_0}{R_0} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{mR_0} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1 Utilizando `DifferentialEquations` simule trayectorias del sistema lineal para distintos controles (constantes, sinusoidales, feedbacks, bang bang, etc.) con $\Omega_0 = 6{,}4 \cdot 10^{-3}$ y $R_0^3 = \frac{\mu}{\Omega_0^2}$.

Parte B. Controlabilidad, observabilidad y estabilidad

Ejercicio 2 Utilizando `Julia` (sin el paquete de control), calcule la matriz de controlabilidad para el satélite. Compare el resultado con el obtenido usando el comando `ctrb` del paquete `ControlSystems` de `Julia`.

Ejercicio 3 Usualmente es difícil conocer completamente las variables de estado ya que sólo podemos obtener observaciones imprecisas de estas. Por esto, en lo que sigue, supondremos que solamente observamos x_1 y x_3. Esto nos lleva a considerar un observador de la forma:

$$\vec{Y} \;=\; C\vec{X}. \tag{4}$$

Identifique C y utilice `Julia` (sin el paquete de control) para calcular la matriz de observabilidad del sistema (3) - (4). Compare con lo obtenido usando el comando `obsv` del paquete `ControlSystems` de `Julia`.

Ejercicio 4 A partir de lo aprendido en clases, calcule la forma canónica de Brunovski de los sistemas del ejercicio anterior (sin utilizar el toolbox de Control).

Parte C. Reguladores y estabilizadores

Ejercicio 5 Construya un estabilizador por feedback lineal, $\vec{U} = -K\vec{X}$ para una matriz K apropiada, para el sistema (3). Para esto, utilice los comandos `place` y `lqr` para obtener distintas matrices de ganancia K. Con `eigvals` de `LinearAlgebra` verifique los sistemas son estabilizables. Compare los resultados obtenidos al utilizar ambos comandos. Simule las trayectorias obtenidas por estos controles.

Ejercicio 6 Construya el estimador de Luenberger asociado al sistema controlado y observado del ejercicio 3. Simule el estimador para distintos observaciones $Y(\cdot)$ y controles $U(\cdot)$.

Ejercicio 7 Considere los sistemas lineales controlados y observados del ejercicio 3. A partir de lo aprendido en clases, construya un control estabilizador por feedback lineal a partir de la observación $\vec{Y}$. Simule lo obtenido y compare con las trayectorias del sistema original para distintas condiciones iniciales. Discuta los resultados numéricos obtenidos en base a la teoría vista en cátedra.

Ejercicio 8 Utilizando `DifferentialEquations` resuelva numéricamente el sistema no lineal (1) - (2) con los distintos controles obtenidos de los ejercicios 6 y 7. Grafique las soluciones y los controles obtenidos y compare los gráficos con las soluciones del sistema lineal (3).