MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2024
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Diego Olguín W. **Ayudantes:** Carlos Antil C. y Luis Fuentes C.

Laboratorio #1

Uso de `Julia` - `OptimalControl`

Fecha de entrega: 26 de agosto

Descripción: El objetivo de esta primera sesión es probar los sofware `Julia` y `OptimalControl`. Puede realizar consultas vía U-cursos.

Parte A. Uso de `Julia`

Ejercicio 1 (Ecuaciones diferenciales ordinarias) Dado el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 10xy, \\ \dot{y} = -y + \cos(y), \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x_0 = -5$ e $y_0 = 1$.

a) Encuentre la solución general del sistema sin considerar condiciones iniciales, usando la interfaz de `SymPy` en `Julia`. Puede encontrar más información en su documentación.

b) Resuelva el sistema de forma numérica en el intervalo de tiempo $[0, 5]$ en `Julia` mediante la librería `DifferentialEquations`. Grafique las soluciones. Puede encontrar más información en su documentación.

c) Utilice el *applet* `pyplane` (disponible en https://github.com/TUD-RST/pyplane) para dibujar los diagramas de fase del sistema para distintas condiciones iniciales. En particular muestre el mismo punto inicial utilizado antes.

Ejercicio 2 Considere el sistema de control en $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con condición inicial $x_0 = (0, 0, 0)^T$. Resuelva el sistema de forma numérica en el intervalo $[0, 10]$ en `Julia` mediante `DifferentialEquations` para los siguientes controles de lazo abierto (*open loop*):

$$u(t) = 1; \quad u(t) = e^{-t}; \quad u(t) = \max(0, t - 0{,}5); \quad u(t) = \mathbb{1}_{\{t \leq 0{,}75\}}(t) - \mathbb{1}_{\{t > 0{,}75\}}(t)$$

Grafique las soluciones.

Ejercicio 3 (Optimización lineal) Resuelva con `Julia` el siguiente problema de programación lineal (PL). Utilice `JuMP`, explore los distintos métodos disponibles y muestre la solución que entrega cada método.

$$\begin{aligned} \max \ & f(x, y, z) = 5x - y - 6z \\ \text{s.a.} \ & -x + 2y - 9z = 6, \\ & 6x + 3y + 4z \geq 0 \\ & 5x + z \leq 2 \\ & 2x - 3y + z \leq 3 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (Optimización no lineal) Usted desea construir un gabinete de PC, en forma de paralelepípedo rectangular, con el mayor volumen posible. Por razones de refrigeración debe cumplir que el área de su base sea superior a 150 cm^2 y debido al tamaño de su escritorio, la altura del gabinete más el perímetro de su base no puede superar los 80 cm. Escriba un modelo matemático para este problema y resuélvalo utilizando un *solver* de optimización no lineal de `JuMP`.

Ejercicio 5 Encuentre los puntos de intersección (x, y) de las siguientes cónicas:

- $(x-5)^2 + \frac{1}{2}y^2 = 10$,
- $2x + 3(y+2)^2 = 12$.

Para esto, utilice `NonlinearSolve` y grafique. Puede consultar más información en la documentación.

Parte B. Control Óptimo: Uso de `OptimalControl`

`OptimalControl` es un programa *open-source* diseñado para resolver problemas de control óptimo tipo Bolza a tiempo final fijo o libre y con restricciones de control y estado. Para instalar el *solver* de control óptimo `OptimalControl`puede consultar el siguiente *link*. También puede visitar la documentación de la librería. `OptimalControl` puede resolver problemas de la forma siguiente

$$
\text{(B)} \begin{cases}
\min\limits_{u(\cdot)} \; J(t_0, y(t_0), t_f, y(t_f)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t_f} \ell(t, y(t), u(t))\, dt & (\mathit{Criterio}) \\
\qquad \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (\mathit{Dinamica}) \\
\qquad \Phi_l \leqslant \Phi(t_0, y(t_0), t_f, y(t_f)) \leqslant \Phi_u & (\mathit{Condicion\ de\ borde}) \\
\qquad y_l \leqslant y(t) \leqslant y_u \quad u_l \leqslant u(t) \leqslant u_u \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (\mathit{Cotas}) \\
\qquad g_l \leqslant g(y(t), u(t)) \leqslant g_u \qquad \forall t \in [t_0, t_f] & (\mathit{Restricciones\ mixtas})
\end{cases}
$$

donde $y(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema y $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ el control.

Ejercicio 6 Considere el siguiente problema de control óptimo:

$$
\min_{u(\cdot)} \int_0^{t_f} u(t)y(t)\, dt; \qquad \ddot{y}(t) = u^3(t); \qquad y(t) \geq 0, \quad -1 \leq u(t) \leq 1
$$

con $t_f = 50,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1,\ y(t_f) = 1,\ \dot{y}(t_f) = 1{,}5$.

a) Identifique el sistema que modela este problema, viéndolo como un sistema de 2 ecuaciones de primer orden. Identifique las funciones J, ℓ, f, Φ y g.

b) Resuelva este problema y grafique los resultados encontrados.

c) Considere ahora que se quiere cambiar la función objetivo a

$$
\int_0^{t_f} u(t)y(t) + z(t)\, dt
$$

con

$$
z(t) = \int_0^t y(t)
$$

Determine el nuevo sistema, identificando la dinámica y condición inicial de z. Resuelva el problema y grafique los resultados.