MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2024

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Diego Olguín W. **Ayudantes:** Carlos Antil C. y Luis Fuentes C.

Laboratorio #4

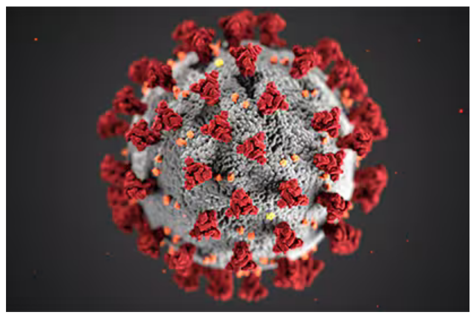
Principio del Máximo de Pontryagin

Descripción

En este laboratorio se resolverá numéricamente un sistema de control no lineal, tanto en su dinámica como en su función objetivo. El caso de estudio será un modelo epidemiológico que incluye factores de fatiga y económicos.

Control de un modelo epidemiológico considerando fatiga por cuarentenas

Durante la pandemia de COVID-19, muchas comunas del país implementaron largas y estrictas cuarentenas. Si bien estas medidas no farmacológicas ayudaron a mitigar los contagios y las muertes, también generaron pérdida de empleos y fatiga en una parte significativa de la población.



Se asumirá que la población se divide en tres grupos: susceptibles $S(t)$, infectados $I(t)$ y recuperados $R(t)$ y que es constante y que está normalizada, es decir, no hay nacimientos ni muertes, y que

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1$$

Además, se considera que la tasa de infección β depende del tiempo a través de la proporción de gente con empleo $\gamma(t)$ y de la fatiga, cuantificada por una variable $z(t)$. La dinámica de la población está dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{S}(t) &= -\beta(\gamma(t), z(t))S(t)I(t) \\
\dot{I}(t) &= \beta(\gamma(t), z(t))S(t)I(t) - \alpha I(t) \\
\dot{R}(t) &= \alpha I(t) \\
\dot{\gamma}(t) &= u(t) \\
\dot{z}(t) &= k_1(1 - \gamma(t)) - k_2 z(t)
\end{aligned}$$

donde la tasa de infección está definida como:

$$\beta(\gamma(t), z(t)) = \beta_1 + \beta_2 \left(\gamma(t) + \eta \frac{k_1}{k_2} z(t)\right)$$

El objetivo es minimizar un funcional que contemple tanto la fatiga por las cuarentenas, como la cantidad de infectados durante un cierto periodo de tiempo y el costo de implementar la medida. Esto se expresa mediante:

$$\min_{u(\cdot)} J(u(\cdot)) := \int_0^T z(t)^2 + I(t)^2 + u(t)^2 dt$$

Denotaremos $x(t) = (S(t), I(t), R(t), \gamma(t), z(t))$. Los valores considerados para las constantes vienen dados en el Cuadro 1.

Constante	β_1	β_2	S_0	I_0	R_0	γ_0	z_0	α	k_1	k_2	η	T
Valor	1.2	0.2	0.9	0.1	0.0	0.8	0.1	0.5	0.4	0.01	0.5	10

Cuadro 1: Constantes del modelo

Ejercicio 1 Utilice el **Principio del Máximo de Pontryaguin** para probar que los estados adjuntos $p = (p_S, p_I, p_R, p_\gamma, p_z)$ satisface la siguiente dinámica

$$\begin{aligned}
\dot{p}_S &= p_S\beta(\gamma(t), z(t))I(t) - p_I\beta(\gamma(t), z(t))I(t) \\
\dot{p}_I &= p_S\beta(\gamma(t), z(t))S(t) - p_I\left(\beta(\gamma(t), z(t))S(t) - \alpha\right) - p_R\alpha - 2I(t) \\
\dot{p}_R &= 0 \\
\dot{p}_\gamma &= -\left(p_I - p_S\right)S(t)I(t)\beta_2 - p_\gamma \\
\dot{p}_z &= -\left(p_I - p_S\right)S(t)I(t)\beta_2\eta\frac{k_1}{k_2} + k_2p_z - 2z(t)
\end{aligned}$$

con condición terminal nula

$$p(T) = (p_S(T), p_I(T), p_R(T), p_\gamma(T), p_z(T)) = 0$$

Además, pruebe que el control óptimo debe satisface

$$u^*(t) = -\frac{p_\gamma(t)}{2}, \quad \text{c.t.p. } t \in [0, T]$$

Ejercicio 2 Cree una función en `Julia` que permita calcular el control óptimo en un instante dado, en función de x, p y t.

Ejercicio 3 Implemente en `Julia` el sistema dinámico acoplado (x, p), sin considerar las condiciones de transversalidad. Note que aquí debe usar la función creada en la parte anterior.

Ejercicio 4 **Método de tiro**: Utilice las condiciones de transversalidad y la parte anterior para determinar el control óptimo del sistema. Según lo obtenido, ¿cuántos contagios se esperan al implementar la medida óptima?

Ejercicio 5 Implemente el sistema original en `OptimalControl` y resuélvalo.

Ejercicio 6 Compare ambos métodos, mostrando lado a lado el control, la evolución de las variables de estado y la función de optimización. Compare además el valor objetivo obtenido en cada caso, estime errores y comente acerca del tiempo de ejecución. Luego de realizar lo anterior, ¿qué control utilizaría para resolver este problema en la vida real? ¿Por qué? ¿Y si se tratara de otro problema, bajo qué criterios elegiría uno u otro método?