FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2024
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Diego Olguín W. **Ayudantes:** Carlos Antil C. y Luis Fuentes C.

Laboratorio #3

Problema de tiempo mínimo y lineal cuadrático

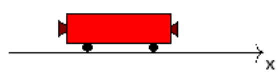
Descripción

En este laboratorio se resolverán numéricamente dos problemas de control óptimo: el primero a tiempo mínimo y el segundo lineal cuadrático.

Parte A. Control de un carro-cohete en tiempo mínimo y método de resolución directo

Un carro-cohete se encuentra en reposo en un punto x_0. Debido a la acción del viento, existe una fuerza que depende de la posición. La idea de esta parte es llevar el carro en tiempo mínimo desde el origen en reposo ($x_0 = v_0 = 0$) hasta una posición x_f con velocidad final nula. Lo anterior se debe lograr solo controlando su aceleración, que puede estar en $[-1, 1]$. La ecuación que rige la dinámica del sistema es

$$\ddot{x} = -\alpha x + u,$$



con $\alpha \in \mathbb{R}$ un parámetro dado. Considere como estado el vector (x, y), donde x es la posición del carro e y su velocidad. En clases se estudió el problema de tiempo mínimo descrito anteriormente sin fuerzas externas y mediante el principio de Pontryagin se dedujo que el control óptimo para este problema es de tipo Bang-Bang y que sólo existe un instante de conmutación para este control. La idea ahora es resolver el problema de control modificado a tiempo mínimo **directamente**, reduciéndolo tras discretización a un problema de optimización en dimensión finita.

Ejercicio 1 Discretice (de forma equidistribuída) en N puntos la dinámica del problema en el intervalo de tiempo $[0, t_f]$ (note que t_f no es conocido, de hecho se desea minimizarlo) mediante la fórmula de discretización de Euler. Notando que las variables en el problema discretizado son t_f y $\{u_i\}_{i=1}^N$ (donde u_i denota el valor del control en el i-ésimo punto de la discretización de $[0, t_f]$), escriba el problema de optimización en dimensión finita asociado.

Ejercicio 2 Resuelva el problema discretizado para distintos valores de N, x_f, y α utilizando `JuMP` de `Julia`. Grafique la trayectoria (discretizada) óptima y el control (discretizado) óptimo en $[0, t_f]$. Comente la solución obtenida.
Indicación de programación: Puede incluir como variable de optimización la discretización de posición y velocidad $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ en `JuMP` para plantear las restricciones del problema.

Ejercicio 3 Utilice `OptimalControl` para resolver el problema de tiempo mínimo (sin discretizar) del carro-cohete. Compare los resultados obtenidos con aquellos del método anteriormente descrito.

Ejercicio 4 Compare las soluciones de los Problemas 1 y 2 con la solución teórica cuando el coeficiente α es nulo. Comente.

NOTA: El método descrito en los Problemas 1 y 2 se conoce como "Método Numérico Directo". Este tipo de métodos se caracterizan por ser de fácil implementación e interpretación, pero adolecen de problemas de dimensionalidad (para mejorar la calidad de la solución se debe incrementar N) y posiblemente el problema no lineal de dimensión finita posea varios mínimos locales.

Parte B. Problema lineal cuadrático. Carro cohete en 2-D

Un carro-cohete en el plano es un auto cuyo desplazamiento es realizado mediante dos pares de motores independientes que apuntan en las direcciones del eje x y del eje y. El carro se encuentra sometido a una corriente de aire que define un campo de fuerza dependiente de la posición, de la forma $\vec{F} = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$. En el instante inicial, dicho carro-cohete se encuentra en reposo en un punto (x_0, y_0). La dinámica se puede escribir como $\dot{x} = Ax + Bu$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El costo que se buscará minimizar viene dado por

$$J(u) = x_1^2(T) + x_3^2(T) + \int_0^T (u(s)^2 + v(s)^2) ds$$

para un horizonte de tiempo $T = 1$. Es decir, se busca llevar el carro lo más cerca posible del origen, usando la menor cantidad de energía posible, controlando las aceleraciones horizontal y vertical.

Ejercicio 5 Para el problema lineal-cuadrático (PLC) definido anteriormente identifique las matrices Q, W y U y estudie la existencia y unicidad de su solución. Usando el Principio del Máximo para PLC demuestre que el estado adjunto del problema satisface

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{R(t-T)} \begin{pmatrix} x(T) \\ -Qx(T) \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} A & BU^{-1}B^T \\ W & -A^\top \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 Utilizando lo anterior encuentre el valor de $x(T)$ que minimiza el error de reconstruir la condición inicial $(x_0, 0, y_0, 0)$. Obtenga el control óptimo del problema y la trayectoria asociada. Explique los resultados obtenidos para distintos valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, y (x_0, y_0).

Ejercicio 7 Establezca la ecuación de Riccati del problema y resuélvala numéricamente para los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que haya elegido para el punto anterior. A partir de esto, deduzca un control óptimo del problema PLC. Compare con la solución obtenida en la pregunta anterior (grafique, estime error, etc.). Grafique la función valor en función de las condiciones iniciales partiendo del reposo.

Ejercicio 8 Utilice `OptimalControl` para resolver directamente el problema del carro-cohete en el plano para los valores de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ del problema anterior. Compare los resultados obtenidos con aquellos obtenidos en el Problema 5.

NOTA: El método descrito en el Ejercicio 6 se conoce como "Método Numérico Indirecto". Este tipo de métodos se caracterizan por no ser tan fáciles de implementar, pero tienen una dimensión baja en la variable de decisión, lo que los hace más eficientes.