MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2024
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Diego Olguín W. **Ayudantes:** Carlos Antil C. y Luis Fuentes C.

Modelación y control en una pesquería de acceso abierto

Descripción: El objetivo de este proyecto es analizar un modelo basado en una pesquería compuesta por dos especies de peces en una dinámica de depredación. Estas especies son capturadas por una flota pesquera que utiliza un arte de pesca que no discrimina entre especies, por lo que la captura es no selectiva. El objetivo de la flota pesquera es conocer una política de captura que le permita maximizar el valor presente de su flujo continuo de ingresos. Para ello se debe describir y resolver un problema de control óptimo, obteniendose una política óptima de captura de ambas especies.

Introducción: Los recursos pesqueros son recursos renovables muy importantes, debido a que su explotación provee algunos ejemplos clásicos de manejo desastroso de recursos. Muchas pesquerías han sido destruidas por la sobrepesca. A principios de 1950, el economista canadiense H. S. Gordon fue consultado por las autoridades pesqueras federales con el objetivo de realizar un análisis económico del persistente problema de bajas ganancias entre los pescadores marítimos de Canadá. La teoría de Gordon de la pesquería de propiedad común se ha convertido en un referente clásico desde entonces, puesto que no solo explica la baja ganancia de los pescadores, sino que aclara en términos económicos el llamado problema de la sobrepesca, el cual explica como la sobrepesca económica ocurre en cualquier pesquería irregulada, mientras que la sobrepesca biológica ocurre cuando los costos son mayores a los precios de mercado. Gordon sugiere posibles soluciones del problema de la sobrepesca. Sin embargo, modelación bioeconómica más detallada indica que muchas soluciones originalmente propuestas por el modelo de Gordon son demasiado simples para superar la tragedia de los comunes en pesquerías.

Lo anterior ha influido en la construcción de distintos modelos durante años. La modelación bioeconómica de la explotación de recursos biológicos y las técnicas y metodologías asociadas a la modelación han sido consideradas en detalle por C. W.Clark, sobre todo, para modelos de una sola especie sometida a captura, pero los intentos para estudiar modelos de más de una especie han sido bastante limitados debido a las complicaciones propias del análisis de sistemas de ecuaciones no lineales.

Figura 1: Pesquería de la Merluza del Pacífico.

Sobre modelos de interacción entre especies, se ha avanzado mucho desde el clásico modelo de Lotka-Volterra (1925). Uno de los modelos más aceptados es conocido como modelo de Gause (1936)

$$\begin{cases} \dot{x} = & xg(x) - h(x)y, \\ \dot{y} = & bh(x)y - \phi(y). \end{cases}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son los tamaños de las poblaciones de presas y depredadores para $t \geq 0$, respectivamente. Por simplicidad, asumiremos que la tasa de crecimiento de la población de presas sigue un comportamiento logístico (Verlhulst, 1838) y que la mortalidad natural de los depredadores es proporcional a su población en cada instante.

En términos del modelo

$$\begin{cases} xg(x) = & rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \\ \phi(y) = & my. \end{cases}$$

donde r representa la tasa de crecimiento intrínseco de la población de presas, K es la capacidad de soporte del medio ambiente, m es la tasa de mortalidad natural de la especie depredadora y b es la eficiencia de conversión. La función $h(x)$ es conocida como respuesta funcional o tasa de consumo y expresa la acción del depredador en la tasa de crecimiento de las presas. Holling (1959) propuso tres tipos de respuestas distintas, las cuales han sido ampliamente aceptadas dependiendo de los casos particulares a estudiar. La forma más simple es conocida como Holling tipo 1 y es dada por $h(x) = ax$ donde a representa la eficiencia de busqueda del depredador. Ahora bien, si se asume que la pesca de ambas especies por la flota pesquera sigue la hipótesis de captura por unidad de esfuerzo (CPUE) de Schaefer (1954), dada por $C(x, E) = qxE$ donde q representa el coeficiente de capturabilidad de la especie x, E representa el esfuerzo de pesca (medido por ejemplo en número viajes por toneladas capturadas), entonces el modelo que representa la pesquería de ambas especies es dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = & rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy - q_1xE, \\ \dot{y} = & abxy - my - q_2yE. \end{cases}$$

Asumiendo que el esfuerzo de pesca es una variable de control ($E = E(t)$), luego el sistema depredador-presa con captura no selectiva definido antes, considerando los parámetros constantes y positivos, es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal controlado afín en la entrada de control.

La ganancia económica de la flota pesquera dependerá del precio unitario de la especie capturada (p_1, p_2 resp.), el cual se asume constante y el costo de pesca por unidad de esfuerzo (c), el cual también se asumirá constante. Con ello, podemos definir la siguiente función

$$\pi_t = \pi_t(x, y, E) := p_1xE + p2_yE - cE,$$

que representa el flujo continuo de ganancia obtenido por el desembarco. Se tiene que el valor presente de un cobro (de la flota) en el momento t es $\pi_t e^{-\delta t}$, donde δ representa la tasa de descuento continua (intereses). Ahora bien, donde la flota obtiene beneficios económicos (o pérdidas) de manera continua, donde no solo los intereses son continuos, sino también la cantidad que estamos descontando llega como un flujo continuo (p.ej. el valor de gozar de buena salud nos da felicidad todo el tiempo), luego tendríamos que sumar los valores para una cantidad infinita de momentos infinitesimales. Si llamamos J al valor presente del flujo continuo de ingresos, entonces

$$J = \int_0^T \pi_t e^{-\delta t} dt.$$

Objetivos: La idea es utilizar las herramientas teóricas y numéricas de control óptimo estudiadas en el curso para analizar este problema. **Se le otorga cierta libertad a la hora de plantear el problema y en el formato del informe. Sin embargo, debe guiarse por la pauta siguiente que entrega los criterios mínimos a ser evaluados.**

- Analizar cualitativamente la dinámica del sistema considerando en un principio E constante, para distintos valores de parámetros (acotamiento de soluciones, existencia de puntos de equilibrio, estabilidad local y global, etc.) y entregar simulaciones.
- Estudiar la controlabilidad del sistema linealizado en los puntos de equilibrio y la observabilidad cuando el observable es $O(t) = y(t)$.
- Investigar condiciones de optimalidad en el equilibrio (Máximo rendimiento sustentable MSY y equilibrio bioeconómico). Estudiar además sobre políticas de regulación pesquera y su impacto en la economía (cuotas de captura, impuestos sobre precios de desembarcos, vedas, etc.).
- Plantear el ejercicio de la maximización del valor presente de ingresos de la flota como un problema de control óptimo (describir el conjunto de controles admisibles, el conjunto objetivo, el Hamiltoniano del problema, las ecuaciones de los estados adjuntos y obtener las condiciones de transversalidad) y resolverlo mediante el uso del Principio del Máximo de Pontryagin (PMP).
- Describir de forma explícita la función valor y las ecuaciones de HJB del problema de control óptimo y resolver analíticamente la ecuación de HJB (de ser posible) o de forma numérica.

Referencias

[1] A. D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of interacting populations.* World Scientific 1998.

[2] K. S. Chaudhuri, *A bioeconomic model of harvesting a multispecies fishery,.* cological Modelling 32 (1986) 12.

[3] C. W. Clark, *Mathematical Bioeconomic: The optimal management of renewable resources.* John Wiley and Sons, 1990.

[4] C. W. Clark, *Bioeconomic Modelling and Fisheries Management.* John Wiley and Sons, 1985.

[5] B. S. Goh, *Management and Analysis of Biological Populations.* Elsevier Scientific Publishing Company, 1980.

[6] T. K. Kar and K.S. Chaudhuri, *On non-selective harvesting of a multispecies fishery.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 33 (2002) 543-556.

[7] M. Kot, *Elements of Mathematical Biology.* Cambridge University Press, 2001.