

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



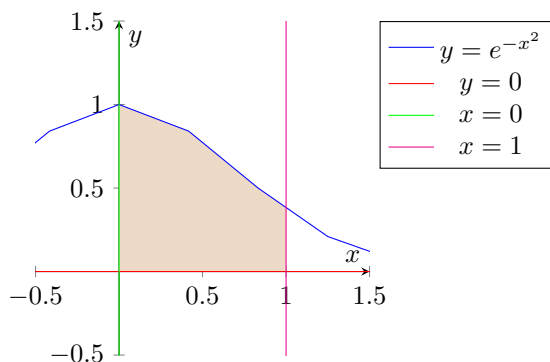
Examen 2:
Sólidos de revolución

Sebastián Alamina Ramírez - 318685496

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II

Fecha de entrega: **25 de Marzo de 2019.**

1. Encuentra el volumen del sólido formado por la región encerrada por las curvas $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ al rotar al rededor del eje y .



Planteamiento:

Por discos...

$$V = \int_0^1 \pi x^2 dy$$

Pero x se dividiría en dos intervalos... Sea λ la intersección entre $x = 1$ y $y = -e^{x^2}$, entonces el método por discos sería:

$$V = \int_0^\lambda \pi dy + \int_\lambda^1 \pi(\sqrt{-\ln y})^2 dy$$

Por cilindros...

$$r = x$$

$$h = e^{-x^2}$$

$$V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2} dx$$

Solución:

Por cilindros...

$$V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2} dx = 2\pi \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$

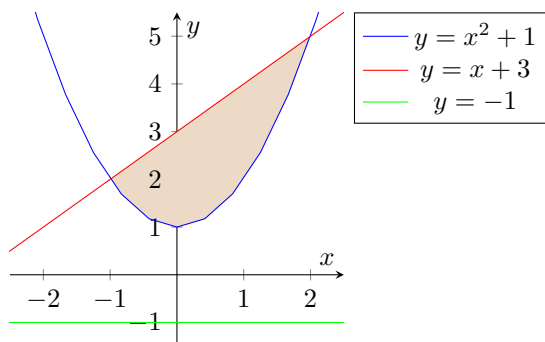
Sea $u = -x^2$, ent. $du = -2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x}$

$$V = 2\pi \int_{x=0}^{x=1} -\frac{x}{2x} e^u du = -\pi \int_{x=0}^{x=1} e^u du$$

$$= -\pi[e^u]_{x=0}^{x=1} = -\pi[e^{-x^2}]_{x=0}^{x=1} = -\pi[e^{-1} - e^0]$$

$$= -\pi\left[\frac{1}{e} - 1\right] = \pi - \frac{\pi}{e}$$

2. Encuentra el volumen del sólido formado por la región encerrada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$ al rotar alrededor del eje $y = -1$.



Planteamiento:

Por discos...

$$r_m = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$$

$$r_M = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$$V = \int_{-1}^2 \pi((x + 4)^2 - (x^2 + 2)^2) dx$$

Por cilindros...

$$r = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$h =$ Aquí se "complica", \therefore se resuelve por discos...

Solución:

Por discos...

$$V = \int_{-1}^2 \pi((x + 4)^2 - (x^2 + 2)^2) dx$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 8x + 16 - x^4 - 4x^2 - 4) dx$$

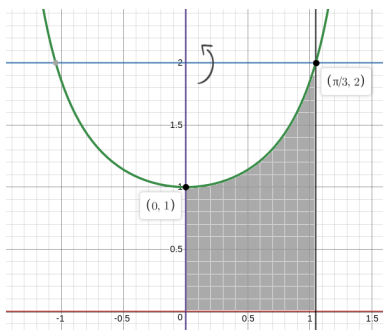
$$= \pi \int_{-1}^2 (-x^4 - 3x^2 + 8x + 12) dx$$

$$= \pi\left[\frac{-x^5}{5} - x^3 + 4x^2 + 12x\right]_{-1}^2$$

$$= \pi\left[\frac{-32}{5} - 8 + 16 + 24 - \frac{1}{5} - 1 - 4 + 12\right]$$

$$= \pi\left[\frac{-33}{5} + 39\right] = \pi\left[\frac{-33}{5} + \frac{195}{5}\right] = \frac{162}{5}\pi$$

3. Encuentra el volumen del sólido generado al hacer rotar alrededor de la recta $y = 2$ la región acotada por las curvas $y = \sec x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi/3$.



Planteamiento:

Por discos...

$$r_m = 2 - \sec x$$

$$r_M = 2$$

$$V = \int_0^{\pi/3} \pi((2)^2 - (2 - \sec x)^2) dx$$

Por cilindros...

$$r = (2 - y)$$

$$h = \pi/3 \text{ con } 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{y } h = \pi/3 - \operatorname{arcsec}(y) \text{ con } 1 \leq y \leq 2$$

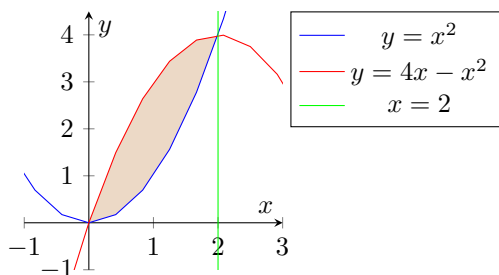
$$V = \int_0^1 2\pi(2-y)(\pi/3) dy + \int_1^2 2\pi(2-y)(\pi/3 - \operatorname{arcsec}(y)) dy$$

Solución:

Por discos...

Aproximadamente 11.1079

4. Halla el volumen del sólido de revolución generado al hacer rotar la región acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, en torno a la recta $x = 2$.



Planteamiento:

Por discos...

$$r_m = 2 - \sqrt{y}$$

$$r_M = 2 - (-\sqrt{4-y} + 2) = \sqrt{4-y}$$

$$V = \int_0^4 \pi((\sqrt{4-y})^2 - (2 - \sqrt{y})^2) dy$$

Por cilindros...

$$r = 2 - x$$

$$h = (4x - x^2) - (x^2) = -2x^2 + 4x$$

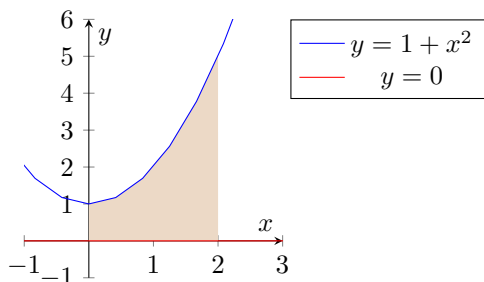
$$V = \int_0^2 2\pi(2-x)(-2x^2 + 4x) dx$$

Solución:

Por cualquiera (de preferencia cilindros)...

Aproximadamente 16.75516081914556

5. Determina el volumen de la región encerrada entre las curvas $y = 1 + x^2$ y $y = 0$ al rotar alrededor del eje x cuando $0 \leq x \leq 2$.



Planteamiento:

Por discos...

$$r = 1 + x^2$$

$$V = \int_0^2 \pi(1 + x^2) dx$$

Por cilindros...

$$r = y$$

$$h = 2 \text{ con } 0 \leq y \leq 1$$

$$h = 2 - \sqrt{y-1} \text{ con } 1 \leq y \leq 5$$

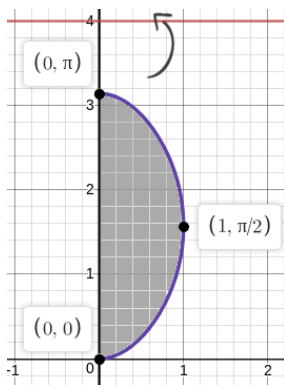
$$V = \int_0^1 2\pi y(2) dy + \int_1^5 2\pi y(2 - \sqrt{y-1}) dy$$

Solución:

Por discos...

Aproximadamente 43.14453910929983

6. Determina el volumen de la región encerrada por la función $x = \sqrt{\sin y}$ con $0 \leq y \leq \pi$ y $x = 0$ si rota en $y = 4$.



Planteamiento:

Por discos...

$$r_m = (4 - \pi) + \arcsin x^2$$

$$r_M = 4 - \arcsin x^2$$

$$V = \int_0^1 \pi((4 - \arcsin x^2)^2 - ((4 - \pi) + \arcsin x^2)^2) dx$$

Por cilindros...

$$r = 4 - y$$

$$h = \sqrt{\sin y}$$

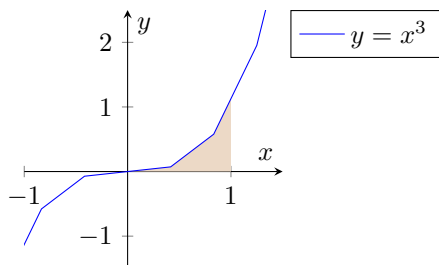
$$V = \int_0^\pi 2\pi(4 - y)(\sqrt{\sin y}) dy$$

Solución:

Por ???...

Aproximadamente 36.574756682913

7. Determinar la superficie del sólido de revolución generado al rotar en el eje y la región definida por $y = x^3$ con $0 \leq x \leq 1$.



Planteamiento:

Con dx ...

$$r = x$$

$$S = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx$$

Con dy ...

$$r = x = \sqrt[3]{y}$$

$$S = \int_0^1 2\pi(\sqrt[3]{y}) \sqrt{1 + \left(\frac{y^{-2/3}}{3}\right)^2} dy$$

Solución:

Por xxxxxx...

Aproximadamente 5.919430472443023