Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Examen 2:

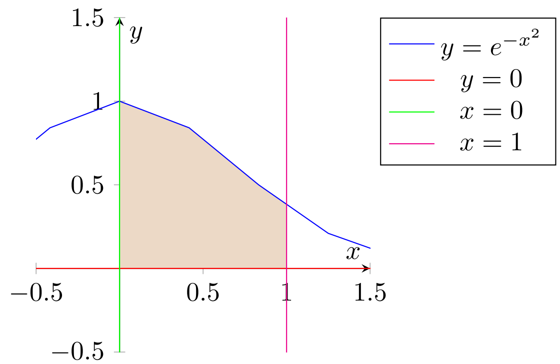
Sólidos de revolución

Sebastián Alamina Ramírez - 318685496

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II

Fecha de entrega: **25 de Marzo de 2019**.

1. Encuentra el volumen del sólido formado por la región encerrada por las curvas $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ al rotar al rededor del eje y.



Planteamiento:

Por discos...
$r = x$

$$V = \int_0^1 \pi x^2 \; dy$$

Pero x se dividiría en dos intervalos... Sea λ la intersección entre $x = 1$ y $y = -e^{x^2}$, entonces el método por discos sería:

$$V = \int_0^\lambda \pi \; dy + \int_\lambda^1 \pi(\sqrt{-\ln y})^2 \; dy$$

Por cilindros...
$r = x$
$h = e^{-x^2}$

$$V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2} \; dx$$

Solución:

Por cilindros...

$$V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2} \; dx = 2\pi \int_0^1 x e^{-x^2} \; dx$$

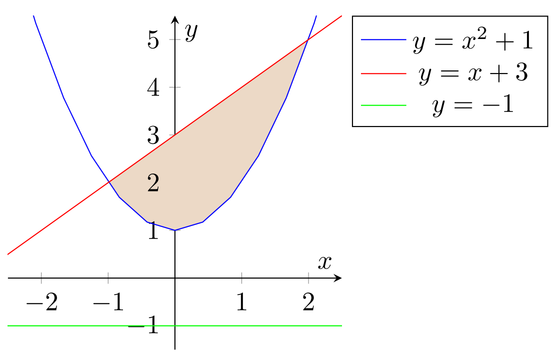
Sea $u = -x^2$, ent. $du = -2x \; dx \implies dx = \frac{du}{-2x}$

$$V = 2\pi \int_{x=0}^{x=1} -\frac{x}{2x} e^u \; du = -\pi \int_{x=0}^{x=1} e^u \; du$$

$$= -\pi[e^u]_{x=0}^{x=1} = -\pi[e^{-x^2}]_{x=0}^{x=1} = -\pi[e^{-1} - e^0]$$

$$= -\pi[\frac{1}{e} - 1] = \pi - \frac{\pi}{e}$$

2. Encuentra el volumen del sólido formado por la región encerrada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$ al rotar alrededor del eje $y = -1$.



Planteamiento:

Por discos...
$r_m = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$
$r_M = (x + 3) + 1 = x + 4$

$$V = \int_{-1}^2 \pi((x+4)^2 - (x^2+2)^2) \; dx$$

Por cilindros...
$r = (x + 3) + 1 = x + 4$
$h =$Aquí se "complica", $\therefore$ se resuelve por discos...

Solución:

Por discos...

$$V = \int_{-1}^2 \pi((x+4)^2 - (x^2+2)^2) \; dx$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 8x + 16 - x^4 - 4x^2 - 4) \; dx$$

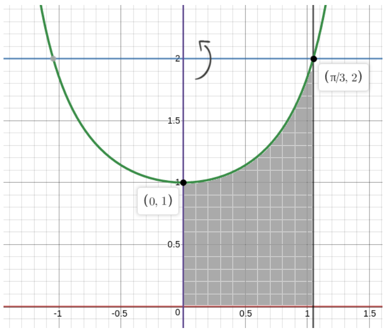
$$= \pi \int_{-1}^2 (-x^4 - 3x^2 + 8x + 12) \; dx$$

$$= \pi[\frac{-x^5}{5} - x^3 + 4x^2 + 12x]_{-1}^2$$

$$= \pi[\frac{-32}{5} - 8 + 16 + 24 - \frac{1}{5} - 1 - 4 + 12]$$

$$= \pi[\frac{-33}{5} + 39] = \pi[\frac{-33}{5} + \frac{195}{5}] = \frac{162}{5}\pi$$

3. Encuentra el volumen del sólido generado al hacer rotar alrededor de la recta $y = 2$ la región acotada por las curvas $y = \sec x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi/3$.



Planteamiento:

Por discos...
$r_m = 2 - \sec x$
$r_M = 2$

$$V = \int_0^{\pi/3} \pi((2)^2 - (2 - \sec x)^2)\ dx$$

Por cilindros...
$r = (2 - y)$
$h = \pi/3$ con $0 \leq y \leq 1$
y $h = \pi/3 - \text{arcsec}(y)$ con $1 \leq y \leq 2$

$$V = \int_0^1 2\pi(2-y)(\pi/3)\ dy \to$$

$$+ \int_1^2 2\pi(2-y)(\pi/3 - \text{arcsec}(y))\ dy$$

Solución:

Por discos...

$$V = \int_0^{\pi/3} \pi((2)^2 - (2 - \sec x)^2)\ dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/3} (4 - 4 + 4\sec x - \sec^2 x)\ dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/3} (4\sec x - \sec^2 x)\ dx$$

$$= \pi \left[4 \int_0^{\pi/3} \sec x\ dx - \int_0^{\pi/3} \sec^2 x\ dx \right]$$

$$= \pi \left[4 \Big[\ln(\tan x + \sec x) \Big]_0^{\pi/3} - \Big[\tan x \Big]_0^{\pi/3} \right]$$

$$= \pi \left[4 \Big[\ln(\tan \frac{\pi}{3} + \sec \frac{\pi}{3}) - \ln(\tan 0 + \sec 0) \Big] \to \right.$$

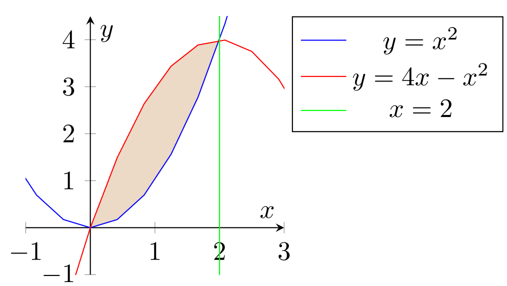
$$\left. - \Big[\tan \frac{\pi}{3} - \tan 0 \Big] \right]$$

$$= \pi \left[4 \Big[\ln(\sqrt{3} + 2) - \ln(0 + 1) \Big] - \Big[\sqrt{3} - 0 \Big] \right]$$

$$= \pi \left[4 \Big[\ln(\sqrt{3} + 2) - 0 \Big] - \sqrt{3} \right]$$

$$= \pi \Big(4\ln(\sqrt{3} + 2) - \sqrt{3} \Big) \approx 11.1079...$$

4. Halla el volumen del sólido de revolución generado al hacer rotar la región acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, en torno a la recta $x = 2$.



Planteamiento:

Por discos...
$r_m = 2 - \sqrt{y}$
$r_M = 2 - (-\sqrt{4 - y} + 2) = \sqrt{4 - y}$

$$V = \int_0^4 \pi((\sqrt{4 - y})^2 - (2 - \sqrt{y})^2)\ dy$$

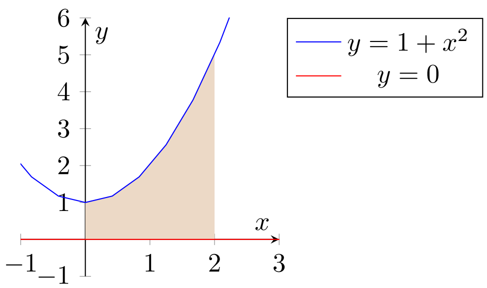
Por cilindros...
$r = 2 - x$
$h = (4x - x^2) - (x^2) = -2x^2 + 4x$

$$V = \int_0^2 2\pi(2 - x)(-2x^2 + 4x)\ dx$$

Solución:

Por cualquiera (de preferencia cilindros)...
Aproximadamente 16.75516081914556

5. Determina el volumen de la región encerrada entre las curvas $y = 1 + x^2$ y $y = 0$ al rotar alrededor del eje x cuando $0 \leq x \leq 2$.



Planteamiento:

Por discos...
$r = 1 + x^2$

$$V = \int_0^2 \pi(1 + x^2)\ dx$$

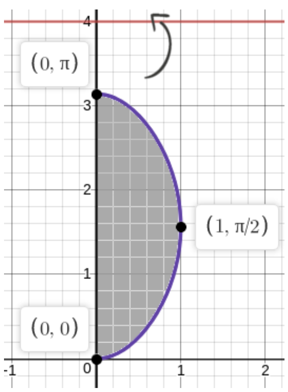
Por cilindros...
$r = y$
$h = 2$ con $0 \leq y \leq 1$
$h = 2 - \sqrt{y-1}$ con $1 \leq y \leq 5$

$$V = \int_0^1 2\pi y(2)\ dy + \int_1^5 2\pi y(2 - \sqrt{y-1})\ dy$$

Solución:

Por discos...
Aproximadamente 43.14453910929983

6. Determina el volumen de la región encerrada por la función $x = \sqrt{\sin y}$ con $0 \leq y \leq \pi$ y $x = 0$ si rota en $y = 4$.



Planteamiento:

Por discos...
$r_m = (4 - \pi) + \arcsin x^2$

$r_M = 4 - \arcsin x^2$

$$V = \int_0^1 \pi((4 - \arcsin x^2)^2 - ((4 - \pi) + \arcsin x^2)^2)\ dx$$

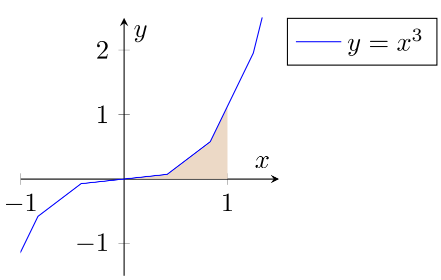
Por cilindros...
$r = 4 - y$
$h = \sqrt{\sin y}$

$$V = \int_0^\pi 2\pi(4 - y)(\sqrt{\sin y})\ dy$$

Solución:

Por ???...
Aproximadamente 36.574756682913

7. Determinar la superficie del sólido de revolución generado al rotar en el eje y la región definida por $y = x^3$ con $0 \leq x \leq 1$.



Planteamiento:

Con dx...

$r = x$

$$S = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1 + (3x^2)^2}\ dx$$

Con dy...
$r = x = \sqrt[3]{y}$

$$S = \int_0^1 2\pi(\sqrt[3]{y})\sqrt{1 + (\frac{y^{-2/3}}{3})^2}\ dx$$

Solución:

Con dx (tal vez)...
Aproximadamente 5.919430472443023