Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Examen 2:

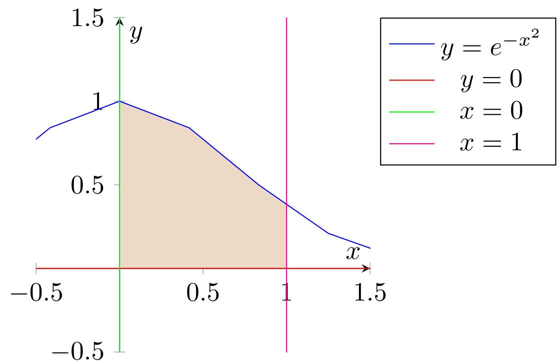
Sólidos de revolución

Sebastián Alamina Ramírez - 318685496

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II

Fecha de entrega: **25 de Marzo de 2019**.

1. Encuentra el volumen del sólido formado por la región encerrada por las curvas $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ al rotar al rededor del eje y.



Planteamiento:

Por discos...
$r = x$

$$V = \int_0^1 \pi x^2 \ dy$$

Pero x se dividiría en dos intervalos... Sea λ la intersección entre $x = 1$ y $y = -e^{x^2}$, entonces el método por discos sería:

$$V = \int_0^\lambda \pi \ dy + \int_\lambda^1 \pi(\sqrt{-\ln y})^2 \ dy$$

Por cilindros...
$r = x$
$h = e^{-x^2}$

$$V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2} \ dx$$

Solución:

Por cilindros...

$$V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2} \ dx = 2\pi \int_0^1 x e^{-x^2} \ dx$$

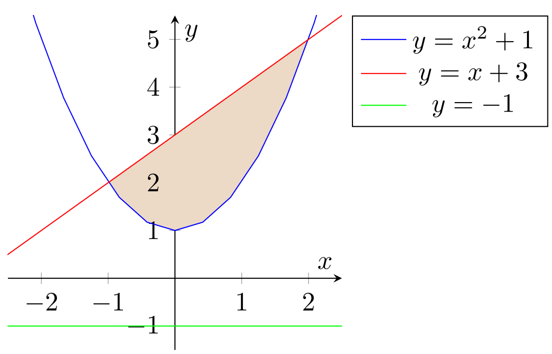
Sea $u = -x^2$, ent. $du = -2x \ dx \implies dx = \frac{du}{-2x}$

$$V = 2\pi \int_{x=0}^{x=1} -\frac{x}{2x} e^u \ du = -\pi \int_{x=0}^{x=1} e^u \ du$$

$$= -\pi[e^u]_{x=0}^{x=1} = -\pi[e^{-x^2}]_{x=0}^{x=1} = -\pi[e^{-1} - e^0]$$

$$= -\pi[\frac{1}{e} - 1] = \pi - \frac{\pi}{e}$$

2. Encuentra el volumen del sólido formado por la región encerrada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$ al rotar alrededor del eje $y = -1$.



Planteamiento:

Por discos...
$r_m = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2$
$r_M = (x + 3) + 1 = x + 4$

$$V = \int_{-1}^2 \pi((x+4)^2 - (x^2+2)^2) \ dx$$

Por cilindros...
$r = (x + 3) + 1 = x + 4$
$h =$Aquí se "complica", $\therefore$ se resuelve por discos...

Solución:

Por discos...

$$V = \int_{-1}^2 \pi((x+4)^2 - (x^2+2)^2) \ dx$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 8x + 16 - x^4 - 4x^2 - 4) \ dx$$

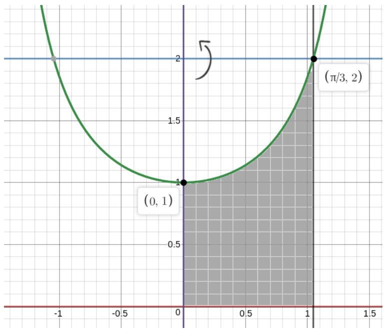
$$= \pi \int_{-1}^2 (-x^4 - 3x^2 + 8x + 12) \ dx$$

$$= \pi[\frac{-x^5}{5} - x^3 + 4x^2 + 12x]_{-1}^2$$

$$= \pi[\frac{-32}{5} - 8 + 16 + 24 - \frac{1}{5} - 1 - 4 + 12]$$

$$= \pi[\frac{-33}{5} + 39] = \pi[\frac{-33}{5} + \frac{195}{5}] = \frac{162}{5}\pi$$

3. Encuentra el volumen del sólido generado al hacer rotar alrededor de la recta $y = 2$ la región acotada por las curvas $y = \sec x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq \pi/3$.



Planteamiento:

Por discos...
$r_m = 2 - \sec x$
$r_M = 2$

$$V = \int_0^{\pi/3} \pi((2)^2 - (2 - \sec x)^2)\ dx$$

Por cilindros...
$r = (2 - y)$
$h = \pi/3$ con $0 \leq y \leq 1$
y $h = \pi/3 - \text{arcsec}(y)$ con $1 \leq y \leq 2$

$$V = \int_0^1 2\pi(2-y)(\pi/3)\ dy \rightarrow$$

$$+ \int_1^2 2\pi(2-y)(\pi/3 - \text{arcsec}(y))\ dy$$

Solución:

Por discos...

$$V = \int_0^{\pi/3} \pi((2)^2 - (2 - \sec x)^2)\ dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/3} (4 - 4 + 4\sec x - \sec^2 x)\ dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/3} (4\sec x - \sec^2 x)\ dx$$

$$= \pi \left[4 \int_0^{\pi/3} \sec x\ dx - \int_0^{\pi/3} \sec^2 x\ dx \right]$$

$$= \pi \left[4 \Big[\ln(\tan x + \sec x) \Big]_0^{\pi/3} - \Big[\tan x \Big]_0^{\pi/3} \right]$$

$$= \pi \left[4 \Big[\ln(\tan \frac{\pi}{3} + \sec \frac{\pi}{3}) - \ln(\tan 0 + \sec 0) \Big] \rightarrow \right.$$

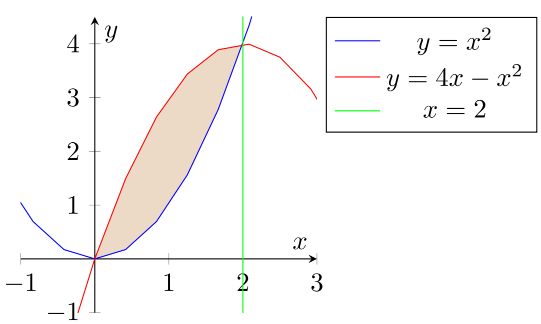
$$\left. - \Big[\tan \frac{\pi}{3} - \tan 0 \Big] \right]$$

$$= \pi \left[4 \Big[\ln(\sqrt{3} + 2) - \ln(0 + 1) \Big] - \Big[\sqrt{3} - 0 \Big] \right]$$

$$= \pi \left[4 \Big[\ln(\sqrt{3} + 2) - 0 \Big] - \sqrt{3} \right]$$

$$= \pi \Big(4\ln(\sqrt{3} + 2) - \sqrt{3} \Big) \approx 11.1079...$$

4. Halla el volumen del sólido de revolución generado al hacer rotar la región acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 4x - x^2$, en torno a la recta $x = 2$.



Planteamiento:

Por discos...
$r_m = 2 - \sqrt{y}$
$r_M = 2 - (-\sqrt{4-y} + 2) = \sqrt{4-y}$

$$V = \int_0^4 \pi((\sqrt{4-y})^2 - (2 - \sqrt{y})^2)\ dy$$

Por cilindros...
$r = 2 - x$
$h = (4x - x^2) - (x^2) = -2x^2 + 4x$

$$V = \int_0^2 2\pi(2-x)(-2x^2 + 4x)\ dx$$

Solución:

Por cilindros...

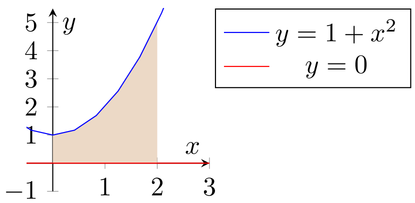
$$V = 2\pi \int_0^2 (2-x)(-2x^2 + 4x)\ dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2x^3 - 8x^2 + 8x)\ dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{2} - \frac{8x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^2 = 2\pi \left[\frac{16}{2} - \frac{64}{3} + 16 \right]$$

$$= 2\pi \left[-\frac{80}{6} + 16 \right] = 2\pi \Big(\frac{16}{6} \Big) = \frac{16\pi}{3}$$

5. Determina el volumen de la región encerrada entre las curvas $y = 1 + x^2$ y $y = 0$ al rotar alrededor del eje x cuando $0 \leq x \leq 2$.



Planteamiento:

Por discos...

$r = 1 + x^2$

$$V = \int_0^2 \pi(1 + x^2)^2 \; dx$$

Por cilindros...

$r = y$

$h = 2$ con $0 \leq y \leq 1$

$h = 2 - \sqrt{y-1}$ con $1 \leq y \leq 5$

$$V = \int_0^1 2\pi y(2) \; dy + \int_1^5 2\pi y(2 - \sqrt{y-1}) \; dy$$

Solución:

Por discos...

$$V = \int_0^2 \pi(1 + x^2)^2 \; dx$$

$$= \pi \int_0^2 (1 + 2x^2 + x^4) \; dx$$

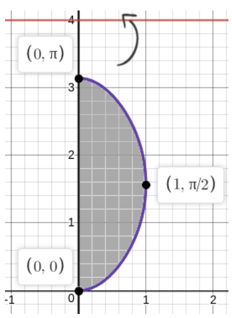
$$= \pi \left[x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[2 + \frac{16}{3} + \frac{32}{5} - 0 - 0 - 0 \right]$$

$$= \pi \left[2 + \frac{176}{15} \right]$$

$$= \frac{206\pi}{15}$$

6. Determina el volumen de la región encerrada por la función $x = \sqrt{\sin y}$ con $0 \leq y \leq \pi$ y $x = 0$ si rota en $y = 4$.



Planteamiento:

Por discos...

$r_m = (4 - \pi) + \arcsin x^2$

$r_M = 4 - \arcsin x^2$

$$V = \int_0^1 \pi((4 - \arcsin x^2)^2 - ((4 - \pi) + \arcsin x^2)^2) \; dx$$

Por cilindros...

$r = 4 - y$

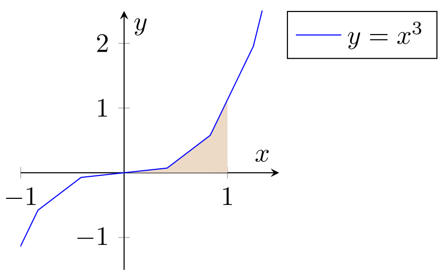
$h = \sqrt{\sin y}$

$$V = \int_0^\pi 2\pi(4 - y)(\sqrt{\sin y}) \; dy$$

Solución:

Estas integrales no tienen una solución concreta. Sin embargo, ambas arrojan como resultado un aproximado de 36.574756682... al utilizar "integración numérica".

7. Determinar la superficie del sólido de revolución generado al rotar en el eje y la región definida por $y = x^3$ con $0 \leq x \leq 1$.



Planteamiento:

Con dx...

$r = x$

$$S = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1 + (3x^2)^2}\ dx$$

Con dy...

$r = x = \sqrt[3]{y}$

$$S = \int_0^1 2\pi (\sqrt[3]{y}) \sqrt{1 + (\frac{y^{-2/3}}{3})^2}\ dx$$

Solución:

Con dx...

$$S = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1 + 9x^4}\ dx$$

Sea $u = x^2 \implies du = 2x\ dx$

$\implies dx = \frac{du}{2x}$

$$S = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2x} x \sqrt{1 + 9u^2}\ du$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 9u^2}\ du$$

Sea α el ángulo diferente de $90°$ en un ángulo rectángulo tal que:

$H = \sqrt{1 + 9u^2}$, $CO = 3u$ y $CA = 1$.

$\tan\alpha = \frac{CO}{CA} = 3u \implies u = \frac{\tan\alpha}{3}$

Y $du = \frac{\sec^2\alpha}{3}\ d\alpha$

$$S = \pi \int_{u=0}^{u=1} \sqrt{1 + 9(\frac{\tan\alpha}{3})^2}\ \frac{\sec^2\alpha}{3}\ d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_{u=0}^{u=1} \sqrt{1 + \tan^2\alpha}\ \sec^2\alpha\ d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_{u=0}^{u=1} \sqrt{\sec^2\alpha}\ \sec^2\alpha\ d\alpha$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_{u=0}^{u=1} \sec^3\alpha\ d\alpha$$

Tenemos que $\int \sec^3 x\ dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\ dx$

$$S = \frac{\pi}{3}\left(\left[\frac{\sec\alpha\tan\alpha}{2}\right]_{u=0}^{u=1} + \frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=1} \sec\alpha\ d\alpha \right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\left[\frac{\sec\alpha\tan\alpha}{2}\right]_{u=0}^{u=1} + \frac{1}{2}\left[\ln(\tan\alpha + \sec\alpha)\right]_{u=0}^{u=1} \right)$$

Pero $\tan\alpha = 3u$ y $\sec\alpha = \sqrt{1 + 9u^2}$

$$S = \frac{\pi}{3}\left(\left[\frac{\sqrt{1 + 9u^2}\ 3u}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(3u + \sqrt{1 + 9u^2})\right]_0^1 \right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\left[3\frac{\sqrt{10}}{2} - 0\right] + \frac{1}{2}\left[\ln(3 + \sqrt{10}) - 0\right] \right)$$

$$= \pi\left(\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{1}{6}\left[\ln(3 + \sqrt{10})\right] \right)$$

$$= \pi\left(\frac{3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})}{6} \right) \approx 5.9194304...$$