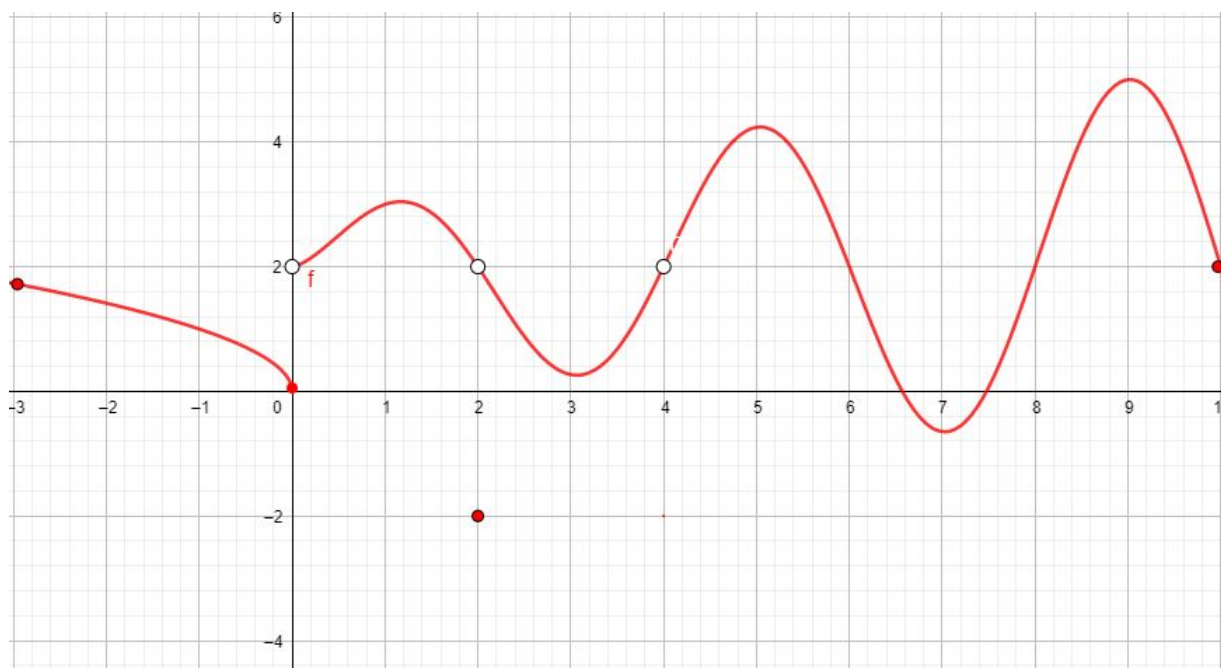


Ayudantía 1 - MAT1610

1. Para la función, $f(x)$, cuya gráfica está dada, determine, si existe, cada límite indicado. En caso de que no exista, justifique su respuesta.



a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{no existe ya que } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

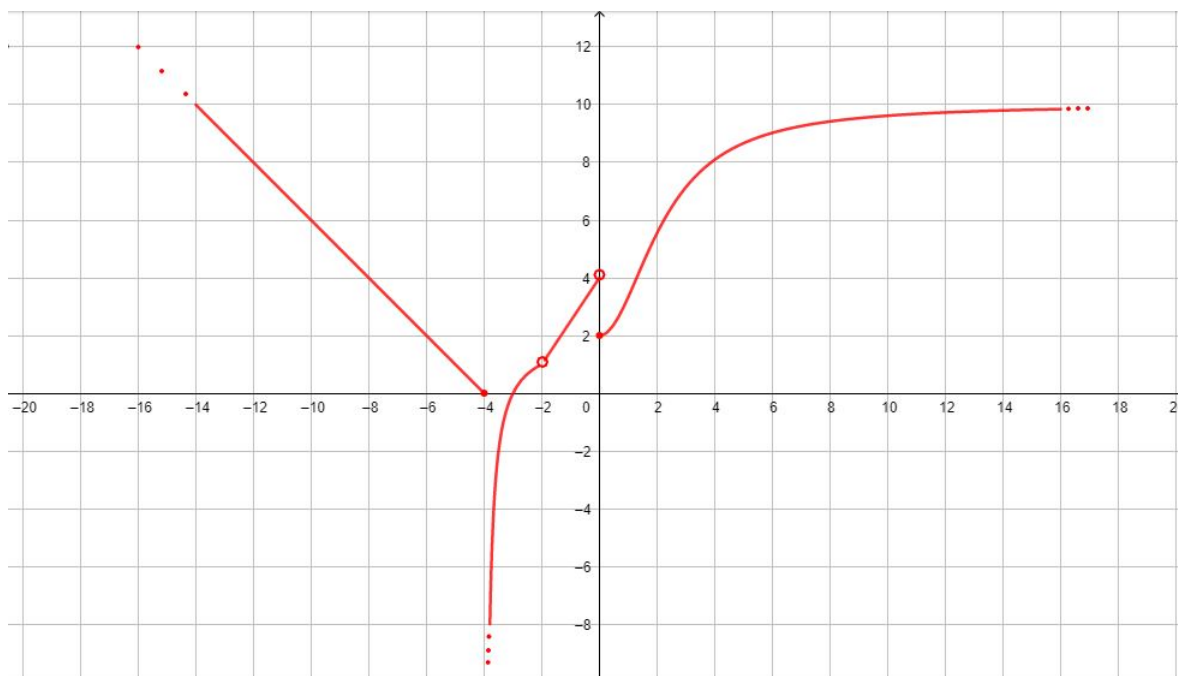
a) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \text{existe y } -2 \notin \text{Dom}(f)$

b) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{no existe}$

La gráfica de un ejemplo de función que cumple las condiciones dadas se muestra en la figura.



3. Para la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{|x-2|}$

(a) Determine el valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(b) ¿Existe el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? Justifique su respuesta. En caso afirmativo, cuál es su valor?

Note que, el dominio de la función f son los valores reales no negativos diferentes de 2 y que

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

entonces, la función f puede escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

o, equivalentemente, como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

ya que

$$2 - x = (\sqrt{2} - \sqrt{x})(\sqrt{2} + \sqrt{x}) = -(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$$

$$x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$$

Así,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{-(\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{-(0 + \sqrt{2})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Para la parte b) se estudian los límites laterales

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{-(\sqrt{x} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{-(\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{-(\sqrt{2} + \sqrt{2})} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Entonces, como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe.

4. Demuestre, usando la definición, que $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-5+3x}{2} = -4$

Sea ε un número positivo dado. Se debe determinar un número positivo δ tal que:

$$\text{si } |x - (-1)| < \delta \text{ entonces } \left| \frac{-5+3x}{2} - (-4) \right| < \varepsilon$$

o, equivalentemente,

$$\text{si } |x + 1| < \delta \text{ entonces } \left| \frac{-5+3x}{2} + 4 \right| < \varepsilon$$

Note que,

$$\begin{aligned} \left| \frac{-5+3x}{2} + 4 \right| &= \left| \frac{-5+3x+8}{2} \right| \\ &= \left| \frac{3x+3}{2} \right| \\ &= \left| \frac{3}{2}(x+1) \right| \\ &= \frac{3}{2}|x+1| \end{aligned}$$

y, si $|x+1| < \delta$, entonces $\frac{3}{2}|(x+1)| < \frac{3}{2}\delta$. Es decir, que:

$$\text{si } |x+1| < \delta \text{ entonces, } \left| \frac{-5+3x}{2} + 4 \right| = \frac{3}{2}|x+1| < \frac{3}{2}\delta$$

Así, para garantizar que $\left| \frac{-5+3x}{2} + 4 \right| < \varepsilon$, basta garantizar que $\frac{3}{2}\delta \leq \varepsilon$. En particular, basta considerar $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$.

Para la verificación, observe que, para $\varepsilon > 0$ dado, si se toma $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$

$$\begin{aligned} |x+1| < \delta &\implies |x+1| < \frac{2}{3}\varepsilon \\ &\implies \frac{3}{2}|x+1| < \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\varepsilon \\ &\implies \underbrace{\frac{3}{2}|x+1|}_{\downarrow} < \varepsilon \\ &\implies \left| \frac{-5+3x}{2} + 4 \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

lo cual demuestra lo requerido.

5. Determine, si corresponde, la ecuación de la(s) asíntota(s) vertical(es) de la función dada:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6}$

Note que el denominador de $f(x)$ es cero si $x = 2$, por lo que la recta de ecuación $x = 2$ es una posible asíntota vertical. El numerador es $\sqrt{2036}$, que es mayor que cero, y cuando x tiende a 2 por la derecha (2^+), la expresión $3x - 6$ toma valores positivos que tienden a cero. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x^2 + 2020}}{3x - 6} = +\infty$$

Así, la recta de ecuación $x = 2$ es una asíntota vertical de f .

Además, debido a que cuando x tiende a 2 por la izquierda (2^-), la expresión $3x - 6$ toma valores negativos que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4x^2 + 2020}}{3x - 6} = -\infty$$

lo cual, también indica que la recta de ecuación $x = 2$ es una asíntota vertical de la función f .

(b) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$

En este caso el denominador de la función racional dada se anula cuando $x = 1$ y cuando $x = 5$, por lo que las rectas de ecuación $x = 1$ y $x = 5$ son posibles asíntotas verticales. Sin embargo, para el caso en el que $x = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{x-1} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\ &= 1 \cdot \left(\frac{2}{-4} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

es decir, el límite es finito, por lo que la recta de ecuación $x = 1$ no corresponde a una asíntota vertical de la función f .

Para el caso de $x = 5$,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x(x+1)}{x-5} \\
 &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

ya que cuando x tiende a 5 por la derecha (5^+), la expresión $x(x+1)$ tiende a 30, que es mayor que cero, y la expresión $x-5$ toma valores positivos que tienden a cero. Entonces, la recta de ecuación $x = 5$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

También, observe que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x(x+1)}{x-5} \\
 &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

ya que cuando x tiende a 5 por la izquierda (5^-), la expresión $x(x+1)$ tiende a 30, que es mayor que cero, y la expresión $x-5$ toma valores negativos que tienden a cero.

El hecho de que el $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$ también indica que la recta de ecuación $x = 5$ es una asíntota vertical de f .

(c) $f(x) = \frac{-2e^x}{e^x - 5}$

Para esta función el denominador de $f(x)$ es cero si $x = \ln(5)$.

El numerador es $-2e^{\ln(5)} = -2 \cdot 5 = -10$, que es menor que cero, entonces,

$$\lim_{x \rightarrow ((\ln(5))^+)} f(x) = \lim_{x \rightarrow ((\ln(5))^+)} \frac{-2e^x}{e^x - 5} = -\infty$$

ya que cuando x tiende a $\ln(5)$ por la derecha $((\ln(5))^+)$, la expresión $e^x - 5$ toma valores positivos que tienden a cero. Así, la recta de ecuación $x = \ln(5)$ es una asíntota vertical de f .

Además,

$$\lim_{x \rightarrow ((\ln(5))^-)} f(x) = \lim_{x \rightarrow ((\ln(5))^-)} \frac{-2e^x}{e^x - 5} = \infty$$

ello debido a que cuando x tiende a $\ln(5)$ por la izquierda $((\ln(5))^-)$, la expresión $e^x - 5$ toma valores negativos que tienden a cero.

Esto también indica que $x = \ln(5)$ es una asíntota vertical de f .

6. Estudie si cada uno de los límites indicados existe o no. Si existe, determine su valor, en caso contrario, explique por qué:

(a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 - \sqrt{9 + x^2}}{1 - \sqrt{5 - x}}$.

Note que no se puede determinar el límite por sustitución porque si $f(x) = \frac{5 - \sqrt{9 + x^2}}{1 - \sqrt{5 - x}}$, $f(4)$ no está definida. Para calcularlo se realizan, previamente, varias operaciones algebraicas.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 - \sqrt{9 + x^2}}{1 - \sqrt{5 - x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5 - \sqrt{9 + x^2})(5 + \sqrt{9 + x^2})(1 + \sqrt{5 - x})}{(1 - \sqrt{5 - x})(1 + \sqrt{5 - x})(5 + \sqrt{9 + x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(16 - x^2)}{(x - 4)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1 + \sqrt{5 - x})}{(5 + \sqrt{9 + x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(4 + x)}{(x - 4)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1 + \sqrt{5 - x})}{(5 + \sqrt{9 + x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)}{(x - 4)} \lim_{x \rightarrow 4} (4 + x) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1 + \sqrt{5 - x})}{(5 + \sqrt{9 + x^2})} \\ &= (-1)8\frac{2}{10} \\ &= -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x - 27} + 3}$

Al considerar $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x - 27} + 3}$, $f(0)$ no está definida, por lo tanto, no se puede determinar el límite por sustitución. Para calcularlo se realizan, previamente, varias operaciones algebraicas.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x - 27} + 3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left((\sqrt[3]{x - 27})^2 - 3\sqrt[3]{x - 27} + 3^2 \right)}{(\sqrt[3]{x - 27} + 3) \left((\sqrt[3]{x - 27})^2 - 3\sqrt[3]{x - 27} + 3^2 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left((\sqrt[3]{x - 27})^2 - 3\sqrt[3]{x - 27} + 9 \right)}{(\sqrt[3]{x - 27})^3 + 3^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left((\sqrt[3]{x - 27})^2 - 3\sqrt[3]{x - 27} + 9 \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \left((\sqrt[3]{x - 27})^2 - 3\sqrt[3]{x - 27} + 9 \right) \\ &= 1 \cdot ((-3)^2 - 3(-3) + 9) \\ &= 27 \end{aligned}$$