

## Ayudantía 5 - MAT1610

1. Determine los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + 2x^2} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan(4x)}{2x - \pi}$

**Solución:**

a) Observamos que la función  $x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$  es acotada en  $\mathbb{R}^*$  y que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + 2x^2} = 0$ . Entonces por el teorema del Sandwich tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 + 2x^2} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 0. \quad (1)$$

b) Por cambio de variable  $u = 2x - \pi$ , tenemos que  $4x = 2u + 2\pi$  y por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(4x)}{2x - \pi} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan(2u + 2\pi)}{u} \quad (2)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan(2u)}{u} \quad (3)$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(2u)}{2u} \frac{2}{\cos(2u)} \quad (4)$$

$$= 2. \quad (5)$$

2. a) Determine, justificadamente, el valor de

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \sin(\sin(x) + x)$$

b) Demuestre que la ecuación

$$\ln(x) = 3 - 2x$$

tiene, al menos, una raíz real.

**Solución.**

a) La función  $x \mapsto \text{sen}(x)$  es continua en todo  $\mathbb{R}$ , por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\pi} \text{sen}(\text{sen}(x) + x) &= \text{sen} \left( \lim_{x \rightarrow -\pi} (\text{sen}(x) + x) \right) \\ &= \text{sen} \left( \text{sen} \left( \lim_{x \rightarrow -\pi} x \right) + x \right) \\ &= \text{sen}(\text{sen}(-\pi) + \pi) \\ &= \text{sen}(0 - \pi) \\ &= \text{sen}(-\pi) \\ &= 0.\end{aligned}$$

b) Sea  $h(x) = \ln(x) + 2x - 3$ . Observe que la función  $h$  es continua en  $[1, e]$  porque es suma de funciones continuas en todo  $\mathbb{R}^{+*}$ . Además observamos que  $h(1) = -1 < 0$  y  $h(e) = 2e - 2 > 0$  y por el TVI tenemos que existe  $c \in (1, e)$  tal que  $h(c) = 0$ . Es decir  $c$  es solución de la ecuación.

3. Determine, todos los números reales de  $a$  y  $b$  para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} a[|x|] - b & \text{si } x < 1 \\ -2x^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua en  $x = 1$

NOTA:  $[|x|]$ := parte entera de  $x$

**Solución:**

Para que  $f$  sea continua en  $x = 1$  se debe cumplir que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = -2 + b$$

Observe que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -b$  y que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 + b$  por lo tanto  $-2 + b = -b$ , obteniendo que  $b = 1$  y la continuidad no depende del valor de  $a$ , por lo que  $a$  puede tomar cualquier valor real.

4. Derive las siguientes funciones

a)  $f(x) = x^2 e^x \cos(x)$ .

b)  $f(x) = \frac{x^2 + x}{e^x \text{sen}(x)}$

c)  $f(x) = 7e^{-x}$

**Solución:**

a)  $f'(x) = 2xe^x \cos(x) + x^2 e^x \cos(x) - x^2 e^x \text{sen}(x)$

b)  $f'(x) = \frac{(2x + 1)e^x \text{sen}(x) - (x^2 + x)(e^x \text{sen}(x) + e^x \cos(x))}{e^{2x} \text{sen}^2(x)}$

$$c) f'(x) = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{0e^x - e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$$

5. Sea  $f$  una función continua y derivable en  $x = 2$  tal que la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en  $x = 2$  es  $y = 3x - 1$ . Determine  $f(2)$ ,  $f'(2)$  y el valor de

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x))^2 - 25}{x - 2}$$

**Solución:**

Observe que la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en  $x = 2$  tiene pendiente  $f'(2)$  y pasa por el punto  $(2, f(2))$ , obteniendo que  $f'(2) = 3$  y que  $f(2) = 5$ . Por otra parte, de la definición de derivada, tenemos que

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$$

y que, por ser  $f$  continua en  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 5$$

por lo tanto, usando álgebra de límites, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x))^2 - 25}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 5) = 3 \cdot 10 = 30$$