PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Ayudantía 11 - MAT1610

1. Suponga que f es una función continua en $[0,3]$ la cual satisface que:

   - $f(0) = -1$
   - $f'(x) = 2$ para todo $x \in (0,1)$
   - $f'(x) = 1$ para todo $x \in (1,2)$
   - $f'(x) = -1$ para todo $x \in (2,3)$

   Encuentre una fórmula para la función f.

   Solución:

   Notemos que

   - una antiderivada para la función f sobre el intervalo $(0,1)$ es de la forma $2x + C_1$
   - una antiderivada para la función f sobre el intervalo $(1,2)$ es de la forma $x + C_2$
   - una antiderivada para la función f sobre el intervalo $(2,3)$ es de la forma $-x + C_3$

   como f es continua y $f(x) = -1$ se deduce que $C_1 = -1$, nuevamente por continuidad se tiene que $2 \cdot 1 - 1 = 1 + C_2$ y por tanto $C_2 = 0$ y que $2 = -2 + C_3$ y por tanto $C_3 = 4$, luego tenemos que

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ x & \text{si } x \in (1,2] \\ -x + 4 & \text{si } x \in (2,3] \end{cases}$$

2. (a) Determine la antiderivada general de la función

$$g(x) = \frac{2 + x^2 + x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

   (b) Determine la función f tal.

$$f''(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \text{ y } f(0) = 3 \text{ y } f'(0) = 7$$

   (c) Determine la antiderivada de la función $f(x) = 10 * 2^x - 1$ que pasa por el punto $(0, 20)$.

(d) Determine una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la grafica de f.

Solución:

(a) Notar que
$g(x) = \frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$
Enonces, la antiederivada general es:

$$G(x) = x + \arctan(x) + \sqrt{1+x^2} + C$$

(b) Dado que $f''(x) = \text{sen}(x) + \cos(x$ su antiderivada general es $G(x) = -\cos(x) + \text{sen}(x) + C$ y
$f'(x) = -\cos(x) + \text{sen}(x) + C$ donde la constante C es tal que,

$$f'(0) = -\cos(0) + \text{sen}(0) + C = 7$$

es decir, $C = 8$. Entonces, $f(x) = -\text{sen}(x) - \cos(x) + 8x + K$ y K es el valor que hace que $f(0) = -\text{sen}(0) - \cos(0) + K = 3$, es decir, $k = 4$. Así, la función buscada es:

$$f(x) = -\text{sen}(x) - \cos(x) + 8x + 4$$

(c) Recordar que $(2^x)' = 2^x \ln(2)$, entonces, $\frac{(2^x)'}{\ln(2)} = \left(\frac{2^x}{\ln(2)}\right)' = 2^x$, es decir, una antiderivada de la función 2^x es $\frac{2^x}{\ln(2)}$. Entonces, la antiderivada general para f es:

$$F(x) = \frac{10}{\ln(2)} 2^x - x + C$$

Para que $F(0) = 20$ debe cumplirse que $C = 20 - \frac{10}{\ln(2)}$, entonces la función buscada es $F(x) = \frac{10}{\ln(2)} 2^x - x + 20 - \frac{10}{\ln(2)}$.

(d) La antiderivada general para f' es $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, para que la recta $y = -x$ (que tiene pendiente -1) sea tangente a F debe ocurrir que $f'(x_0) = -1$, es decir, $x_0^3 = -1$ para algún x_0, lo cual ocurre si $x_0 = -1$ e $y_0 = -x_0 = 1$. Por lo tanto la constante C debe ser tal que $F(-1) = 1$, esto es, $\frac{(-1)^4}{4} + C = \frac{1}{4} + C = 1$, es decir, $C = \frac{3}{4}$.
Entonces, $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}$

3. ¿Qué aceleración constante se requiere para incrementar la rapidez de un vehículo desde $48Km/h$ hasta $80Km/h$ en 5 segundos?
Solución:
Se tiene que la aceleración es constante, a, entonces la función velocidad (es antiderivada de la aceleración) es lineal, por lo que

$$v(t) = at + b$$

Dado que inicialmente la velocidad es $48Km/h$, esto es, $v(0) = 48Km/h$, por lo tanto,
$v(t) = at + 48$ y para $t = 5s = \frac{5}{3600} = \frac{1}{720}$h, $v\left(\frac{1}{720}\right) = 80Km/h$ se tiene que
$v\left(\frac{1}{720}\right) = 80Km/h = a\frac{1}{720}h + 48Km/h$ y, en consecuencia

$$32Km/h \cdot 7201/h = a$$

esto es

$$a = 23040 Km/h^2$$

que equivale a:

$$a = \frac{23040 \cdot 1000}{(3600)^2} m/s^2 = \frac{2304}{(36)^2} m/s^2 \approx 1,78 m/s^2$$

4. (a) Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2}$

(b) Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}$

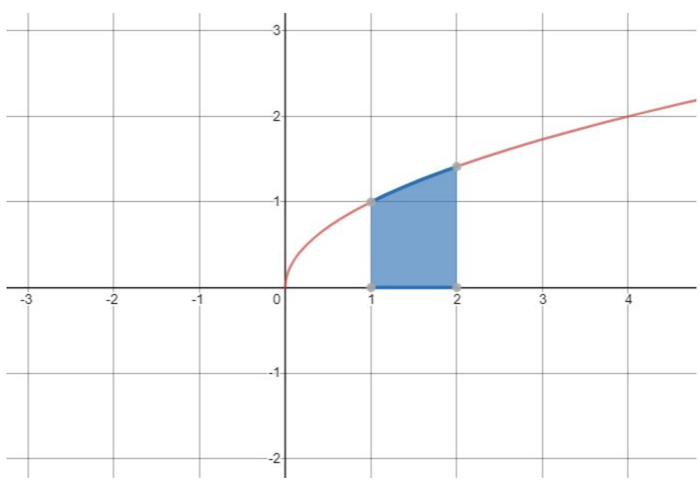
(c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}}+\cdots+\frac{1}{e}\right)$

Solución:

(a)

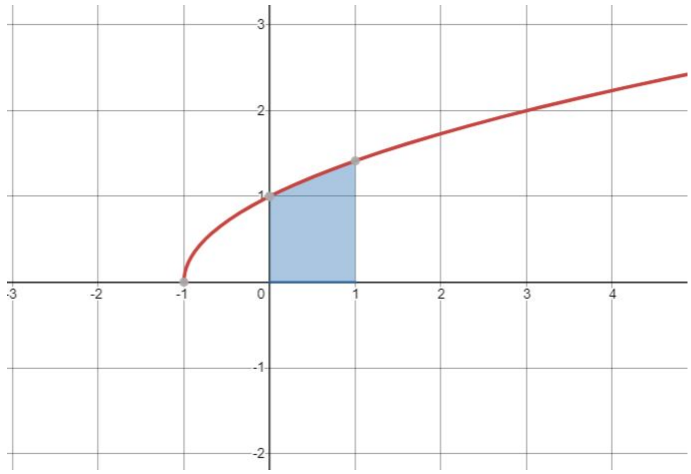
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2+kn}}{n}\frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+k\frac{1}{n}}\frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sqrt{1+k\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}}}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}
\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x = \frac{1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud 1) y Una opción, $[a,b]=[1,2]$, $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0^*=1$, $x_k^*=1+k\Delta x=1+k\frac{1}{n}$, $1\le k\le n$, $(x_n^*=2)$



Otra opción, $f(x)=\sqrt{1+x}$, $[a,b]=[0,1]$, $x_0^*=0$, $x_k^*=0+k\Delta x=k\frac{1}{n}$, $1\le k\le n$, $(x_n^*=1)$

Por lo tanto,

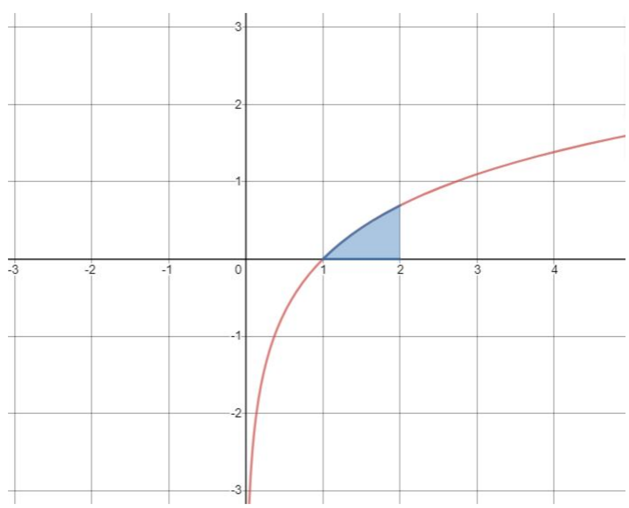


$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2}=\int_1^2\sqrt{x}dx=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$$

(b)

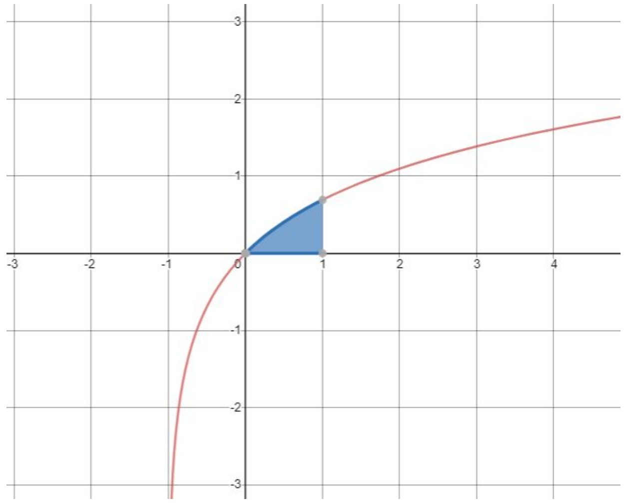
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\frac{1}{n}\ \text{propiedad}\ln\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\ln\left(1+k\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\right)}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x=\frac{1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud 1) y Una opción, tomar $[a,b]=[1,2]$, $f(x)=\ln(x)$, , $x_0^*=1$, $x_k^*=1+k\Delta x=1+k\frac{1}{n}$, $1\leq k\leq n$, $(x_n^*=2)$
Otra opción, tomar $f(x)=\ln(1+x)$, $[a,b]=[0,1]$, $x_0^*=0$, $x_k^*=0+k\Delta x=k\frac{1}{n}$, $1\leq k\leq n$,



$(x_n^*=1)$

Por lo tanto,

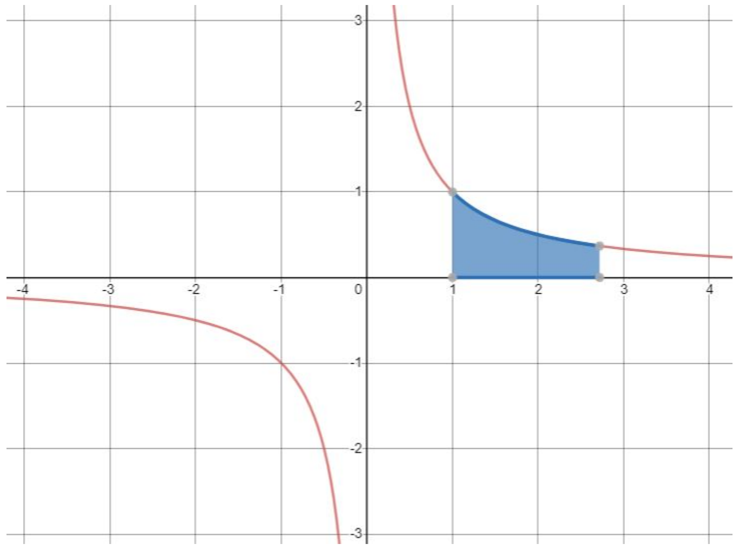


$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}=\int_1^2 \ln(x)dx=\int_0^1 \ln(1+x)dx$$

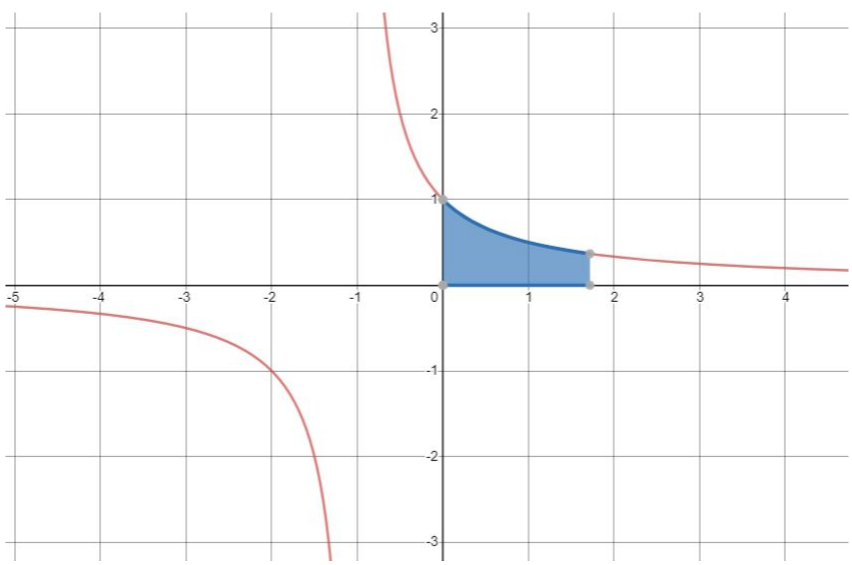
(c) Notar que $\frac{1}{e}=\frac{1}{1+\frac{n(e-1)}{n}}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}}\cdots+\frac{1}{e}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k\frac{(e-1)}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{1+k\underbrace{\frac{(e-1)}{n}}_{\Delta x}}}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{e-1}{n}}_{\Delta x}\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x = \frac{e-1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud $e-1$) y
Una opción, $[a,b] = [1,e]$ y $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0^* = 1$, $x_k^* = 1 + k\Delta x = 1 + k\frac{e-1}{n}$, $1 \le k \le n$, $(x_n^* = e)$



Otra opción, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $[a,b] = [0, e-1]$, $x_0^* = 0$, $x_k^* = 0 + k\Delta x = k\frac{e-1}{n}$, $1 \le k \le n$, $(x_n^* = e-1)$
Entonces,



$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}} \cdots + \frac{1}{e}\right) = \int_1^e \frac{1}{x}dx = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

o

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}} \cdots + \frac{1}{e}\right) = \int_0^{e-1} \frac{1}{1+x}dx = 1$$