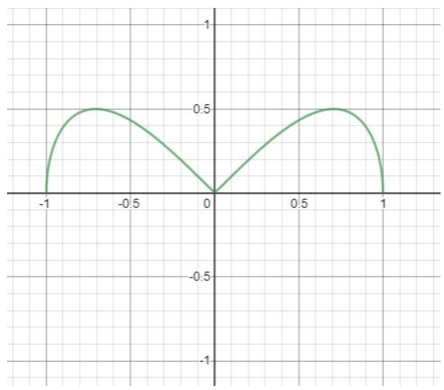
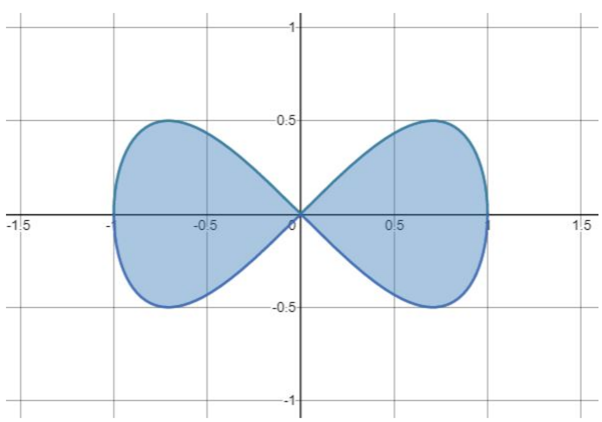
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

Ayudantía 14 - MAT1610

1. La gráfica dada en la figura corresponde a la función $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$. Determine el área comprendida entre las curvas asociadas a $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ y $g(x) = -\sqrt{x^2 - x^4}$.
   Solución:



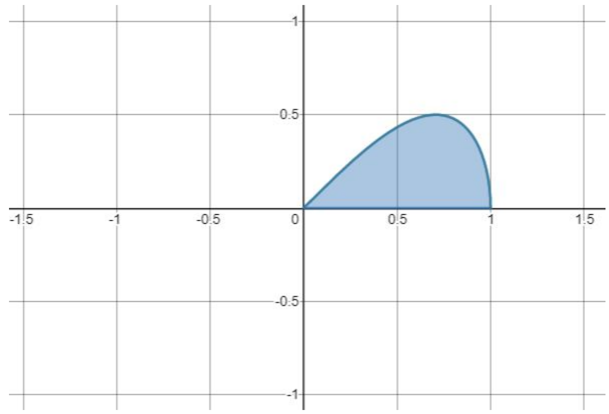
La región de interés está sombreada en la figura:
Notar que $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4} = |x|\sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{x^2 - x^4} = -|x|\sqrt{1 - x^2}$ entonces el



dominio de ambas funciones es $[-1, 1]$. Dada la simetría con respecto ambos ejes coordenados, una manera de obtener el valor del área A es multiplicar por 4 el valor del área ubicada en el primer cuadrante, como:

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}dx = 4\int_0^1 |x|\sqrt{1 - x^2}dx = 4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}dx = 2\int_1^0 (-2)x\sqrt{1 - x^2}dx$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1 - x^2$, $du = -2xdx$, se tiene que si $x = 0$ entonces, $u = 1$ y si $x = 1$ entonces, $u = 0$:



$$A = 2\int_0^1 \sqrt{u}du = 2\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

2. Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x.

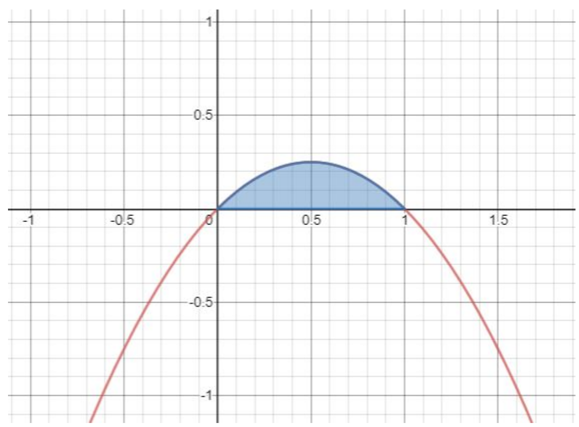
(a) Determine el área de la región R.

(b) ¿Existe una recta que pasa por el origen que divide a la región R en dos partes de igual área? ¿Cuál es la pendiente de la recta?

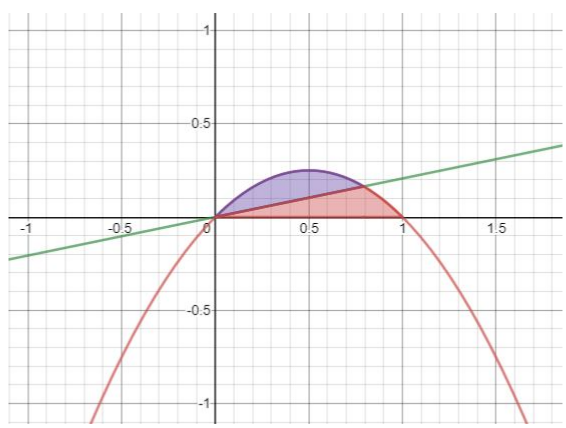
Solución:

(a) El área, A_R de la región R es:

$$A_R = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



(b) La mitad del área es $\frac{1}{12}$. Si existe la recta solicitada, tiene ecuación del tipo $y = mx$. el valor de m debe ser positivo, para que pueda dividir la región en dos regiones de igual área y pasar por el origen. Sea (a, b) el punto de intersección de la recta y la parábola.



Note que $m = \frac{b}{a}$, y que $b = a - a^2$, entonces, $m = \frac{a-a^2}{a} = 1 - a$

$$A_1 = \int_0^a \left(x - x^2 - mx\right) dx = \int_0^a \left(x - x^2 - (1-a)x\right) dx = \int_0^a \left(ax - x^2\right) dx$$

Así,

$$A_1 = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

Entonces, para que el área de la región superior A_1, corresponda a la mitad del área, debe ocurrir que $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{12}$, es decir, $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Por lo tanto, El valor de la pendiente es $m = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

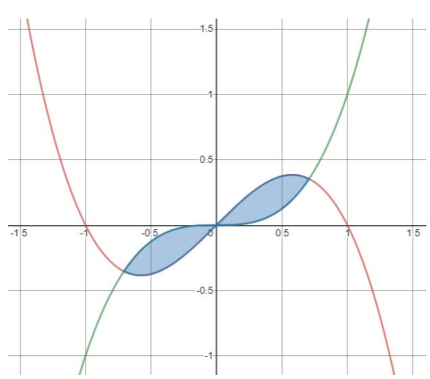
3. (a) Determine el área de la región comprendida entre las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = -x^3+x$.
   (b) Determine el área de la región R con $r = \{(x, y)|y \leq x^2 + 1 \wedge y \geq x^2 - 9 \wedge y \leq 3 - x\}$

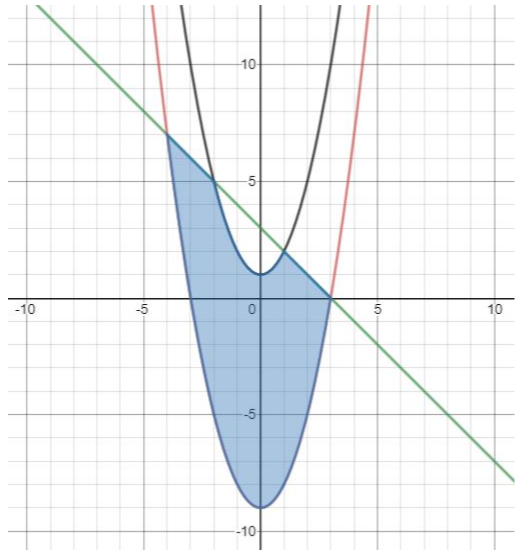
Solución:

(a) Note que cada función involucrada es una función impar, y $x^3 = -x^3 + x$ si $2x^3 - x = x(2x^2 - 1) = 0$, es decir, si $x = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0$, esto es, si $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Entonces, las funciones son impares y se intersectan en el origen y en los extremos de un intervalo simétrico respecto al origen, entonces el área A es:

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (-x^3 + x - x^3)dx \\ &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (-2x^3 + x)dx \\ &= 2\left(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 0\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así, el valor del área es $\frac{1}{4}$ unidades de área.
Idea gráfica:





(b) La región R se muestra en la figura

Note que $3 - x = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$ y $3 - x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$
Entonces, una forma de calcular el área

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-4}^{3} (3 - x - (x^2 - 9))dx - \int_{-2}^{1} (3 - x - (x^2 + 1))dx \\
&= \int_{-4}^{3} (12 - x - x^2)dx - \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx \\
&= \left(12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-4}^{3} \right) - \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{1} \right) \\
&= \frac{343}{6} - \frac{9}{2} \\
&= \frac{158}{3}
\end{aligned}$$

El valor del área es $\frac{158}{3}$ unidades de área.

4. Determine el área de la región comprendida entre las curvas asociadas a $-|y| + 3 - x = 0$, $y^2 = 4x$.
Solución:

El valor del área puede expresarse como

$$
\begin{aligned}
A &= 2\int_0^2 \left(-y+3-\frac{y^2}{4}\right) dy \\
&= 2\left(-\frac{y^2}{2}+3y-\frac{y^3}{12}\bigg|_0^2\right) \\
&= 2\left(-2+6-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

El valor del área es $\frac{20}{3}$ unidades de área.
Idea gráfica