PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

Ayudantía 7 - MAT1610

1. La cantidad de carga, Q, en coulombs (c) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando $t = 0{,}5s$ y cuando $t = 1s$. La unidad de corriente es el ampere ($1A = 1\frac{c}{s}$). ¿En qué momento la corriente es la más baja?

   Solución

   Se tiene que la corriente en el tiempo t es $I(t) = \frac{dQ}{dt} = 3t^2 - 4t + 6$. Entonces,

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} + 6 = \frac{19}{4}A$$
$$I(1) = 3 - 4 + 6 = 5A$$

   Mínimo de la corriente: $I(t)$ es una función cuadrática, es decir, alcanza su mínimo valor en

$$t = -\frac{-4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}s$$

   Así, la corriente es más baja para $\frac{2}{3}s$

2. En un depósito en forma de cono invertido el agua sale de a razón de $10000\frac{cm^3}{min}$ al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a razón constante. El depósito mide $6m$ de altura, y el diámetro en la parte superior es de $4m$. Si el nivel del agua se eleva a razón de $20\frac{cm}{min}$ cuando la altura del agua es de $2m$, calcule la razón a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.
Solución: Considere
$E(t)$: Cantidad de agua que ha **Entrado** al tanque hasta el instante t.
$S(t)$: Cantidad de agua que ha **Salido** del tanque hasta el instante t.
$V(t)$: Cantidad o volumen de agua que hay en el tanque en el instante t.
$h(t)$: Altura del nivel de agua que está en el tanque en el instante t.
$r(t)$: radio correspondiente del nivel de agua en el tanque en el instante t.

Note que
$V(t) = E(t) - S(t)$ o $E(t) = V(t) + S(t)$
$V(t) = \frac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t)$
$\frac{dh}{dt} = 20\frac{cm}{min}$
$\frac{dS}{dt} = 10000\frac{cm^3}{min}$
Así,

$$E(t) = \frac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t) + S(t)$$

Para calcular, $\frac{dE}{dt}$ se deriva la igualdad anterior pero, como no se conoce $\frac{dr}{dt}$ en el instante de interés y, como $r(t)$ y $h(t)$ está relacionados, se puedes escribir a $r(t)$ en término de $h(t)$ ya que

$$\frac{r(t)}{2} = \frac{h(t)}{6}$$

lo cual indica que

$$r(t) = \frac{2}{6}h(t) = \frac{1}{3}h(t)$$

Por lo tanto,

$$E(t) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h(t)}{3}\right)^2 h(t) + S(t) = \frac{\pi}{27}(h(t))^3 + S(t)$$

derivando respecto de t,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi}{27}3(h(t))^2\frac{dh}{dt} + \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{9}(h(t))^2\frac{dh}{dt} + \frac{dS}{dt}$$

Todos los valores involucrados en el lado derecho están dados para el instante de tiempo de interés, entonces,

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\pi}{9}(200)^2 20 + 10000\right)\frac{cm^3}{min} = \left(\frac{800000\pi}{9} + 10000\right)\frac{cm^3}{min}$$

Note que se utilizó que $h(t) = 2m = 200cm$

3. La ley de Boyle establece que, cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.

   (a) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión.

   (b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.

   (c) Demuestre que la compresibilidad isotérmica se expresa mediante $\beta = \frac{1}{P}$

   Solución

   (a)

$$\begin{aligned} PV = C \quad &\Rightarrow \quad V = \frac{C}{P} \\ &\Rightarrow \quad \frac{dV}{dP} = -\frac{C}{P^2} \end{aligned}$$

   (b) Dado que la presión va aumentando con el tiempo, al inicio hay menor presión que al final Así, si P_i es la presión al inicio y P_f la presión al final, se tiene que $P_i < P_f$ y, por lo tanto, $\frac{C}{P_i^2} > \frac{C}{P_f^2}$, por lo que, $\left|\frac{dV}{dP}|_{P=P_i}\right| = \frac{C}{P_i^2} > \left|\frac{dV}{dP}|_{P=P_f}\right| = \frac{C}{P_f^2}$, es decir, la rapidez con la que el volumen disminuye al inicio es mayor que la rapidez con la que el volumen disminuye al final.

   (c) La compresibilidad isotérmica se define como $\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$ y mide qué tan rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante. En este caso se tiene que

$$\beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} = -\frac{P}{C}\left(-\frac{C}{P^2}\right) = \frac{1}{P}$$

4. Si $p(x)$ es el valor total de la producción cuando hay x trabajadores en una planta, entonces la productividad promedio de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Obtenga $A'(x)$. ¿Por qué quiere la empresa contratar a más trabajadores si $A'(x) > 0$?

(b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

Solución

(a)

$$A'(x) = \frac{p'(x)x - p(x)}{x^2}$$

Si $A'(x) > 0$ entonces $\Delta A > 0$ entonces, $A(x+n) > A(x)$, para $n > 0$, que al aumentar el número de trabajadores el valor de la productividad promedio aumenta y en consecuencia,

$$A(x) = \frac{p(x)}{x} < A(x+1) = \frac{p(x+1)}{x+1}$$

Además, como $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$, se tiene que $\frac{p(x)}{x+1} < \frac{p(x)}{x}$ y $\frac{p(x)}{x} < \frac{p(x+1)}{x+1}$, entonces $\frac{p(x)}{x+1} < \frac{p(x+1)}{x+1}$, es decir, como $x+1 > 0$, $p(x) < p(x+1)$, es decir, la productividad aumenta y por ello, la empresa quiere contratar a más trabajadores si $A'(x) > 0$.

(b)

$$\begin{aligned}
A'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{p'(x)x - p(x)}{x^2} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p'(x)x - p(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p'(x)x > p(x) \\
&\Leftrightarrow \quad p'(x) > \frac{p(x)}{x} \qquad x > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad p'(x) > A(x)
\end{aligned}$$

5. Utilice la aproximación lineal (o diferenciales) para estimar cada uno de los siguientes valores:

   (a) $\tan(44^\circ)$

   (b) $e^{0.0021}$

   Solución:

   (a) En este caso se debe aproximar el valor de en $\tan(44^\circ) = \tan\left(\frac{44\pi}{180}Rad\right) = \tan\left(\frac{11\pi}{45}Rad\right)$, se usa la aproximación lineal de $f(x) = \tan(x)$ en $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Como $f'(\frac{\pi}{4}) = \sec^2(\frac{\pi}{4}) = 2$ y $f(\frac{\pi}{4}) = 1$, se tiene que $y - 1 = 2(x - \frac{\pi}{4})$, es decir, $y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$, por lo que,

   $$\tan\left(\frac{11\pi}{45}\right) \approx 2\frac{11\pi}{45} - \frac{\pi}{2} + 1$$

   o,

   $$\tan\left(\frac{11\pi}{45}\right) \approx \frac{44\pi}{90} - \frac{45\pi}{90} + 1 = 1 - \frac{\pi}{90} = \frac{90 - \pi}{90}$$

   (b) Como se quiere la aproximación en $e^{0.0021}$ es razonable usar la aproximación lineal de $f(x) = e^x$ en 0. Ésta es $f'(0) = e^0 = 1$, $y - 1 = 1(x - 0)$, es decir, $y = x + 1$, por lo que $e^{0.0021} \approx 0.0021 + 1 = 1.0021$

   Resaltar en este ejercicio que, cerca de $x = 0$, $e^x \approx x + 1$