PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Ayudantía 6 - MAT1610

1. Determine $f'(x)$ para $f(x) = \sec(-x) + \operatorname{sen}(x^7\cos(2x)) + \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

   Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sec(-x) + \operatorname{sen}\left(x^7\cos(2x)\right) + \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)' \\
&= -\sec(-x)\tan(-x) + \cos\left(x^7\cos(2x)\right)\left(7x^6\cos(2x) - 2x^7\operatorname{sen}(2x)\right) - \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

2. (a) Sea $f(x) = \cos(x)$, determine el valor de $f^{(7)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(50)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

   (b) Determine la n-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

   Solución:

   (a) Como 7 mod 4 = 3 y 50 mod 4 = 2, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
f^{(7)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(50)}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

   (b) Note que

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} \\
&f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \\
&f'''(x) = -\frac{6}{(x-2)^4} \\
&f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x-2)^5} \\
&f^{(5)}(x) = -\frac{120}{(x-2)^6} \\
&\vdots \\
&f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{(x-2)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

3. Considere la función $f(x) = x + e^x$, la cual es uno a uno (o inyectiva) en $\mathbb{R}$. Determine el valor $(f^{-1})'(1)$. **Solución**

   Una forma:

   Se tiene que $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ y $f'(x) = 1 + e^x$, entonces

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} \\ &= \frac{1}{1 + e^{f^{-1}(1)}} \end{aligned}$$

   Por definición $f^{-1}(1) = a \Leftrightarrow f(a) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) = a \quad &\Leftrightarrow \quad f(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a + e^a = 1 \end{aligned}$$

   Como $f(0) = 1$ y f es inyectiva, solo para $a = 0$ se cumple que $f(a) = 1$. Por lo tanto, $f^{-1}(1) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{1 + e^0} \\ &= \frac{1}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Otra forma:

   Considerar $y = x + e^x$, y calcular implícitamente $\frac{dx}{dy}$, que es $(f^{-1})'(x, y)$. Se tiene que:

$$1 = \frac{dx}{dy} + e^x \frac{dx}{dy}$$

   Entonces,

$$1 = \frac{dx}{dy}(1 + e^x)$$

   y, por lo tanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + e^x}$$

   y

$$\frac{dx}{dy}(0, 1) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

4. Para cada una de las siguientes funciones, determine y', usando la derivación logarítmica.

   (a) $y = (\tan(x))^{\frac{1}{x}}$

(b) $y = \dfrac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
y = (\tan(x))^{\frac{1}{x}} \quad &\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left((\tan(x))^{\frac{1}{x}}\right) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \frac{1}{x}\ln(\tan(x)) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\ln(\tan(x))\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{1}{x}\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)} \\
&\Rightarrow \quad y' = y\left(-\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{\sec^2(x)}{x\tan(x)}\right) \\
&\Rightarrow \quad y' = (\tan(x))^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{\sec^2(x)}{x\tan(x)}\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
y = \frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad &\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(\frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\cos^2(x)\right) - \ln\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\right) + \ln\left(\cos^2(x)\right) - \frac{2}{3}\ln((x+1)) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\right) + 2\ln(\cos(x)) - \frac{2}{3}\ln((x+1)) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = x^2 - x + 2\ln(\cos(x)) - \frac{2}{3}\ln(x+1) \\
&\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2x - 1 - 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{2}{3(x+1)} \\
&\Rightarrow \quad y' = y\left(2x - 1 - 2\tan(x) - \frac{2}{3(x+1)}\right) \\
&\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)\left(2x - 1 - 2\tan(x) - \frac{2}{3(x+1)}\right)
\end{aligned}$$

5. Utilice la derivación implícita para calcular la derivada indicada.

   (a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $\arctan(x^2y) = x + xy^2$

   (b) $\dfrac{dx}{dy}$ si $y\sec(x) = x\tan(y)$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\arctan\left(x^2y\right) = x + xy^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\arctan\left(x^2y\right) = \frac{d}{dx}\left(x+xy^2\right)\\
&\Rightarrow \quad \frac{2xy + x^2\frac{dy}{dx}}{1+x^4y^2} = 1 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(\frac{x^2}{1+x^4y^2} - 2xy\right) = 1 + y^2 - \frac{2xy}{1+x^4y^2}\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+y^2)(1+x^4y^2) - 2xy}{x^2 - 2xy(1+x^4y^2)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
y\sec(x) = x\tan(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(y\sec(x)\right) = \frac{d}{dy}\left(x\tan(y)\right)\\
&\Rightarrow \quad \sec(x) + y\sec(x)\tan(x)\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}\tan(y) + x\sec^2(y)\\
&\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}\left(y\sec(x)\tan(x) - \tan(y)\right) = x\sec^2(y) - \sec(x)\\
&\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x\sec^2(y) - \sec(x)}{y\sec(x)\tan(x) - \tan(y)}
\end{aligned}$$

6. Utilice derivación implícita para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2 + y^2 = \left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2$$

en el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. **Solución:**

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = \left(2x^2+2y^2-x\right)^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(2x^2+2y^2-x\right)^2\right)\\
&\Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2\left(2x^2+2y^2-x\right)\left(4x + 4y\frac{dy}{dx} - 1\right)\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(2y\left(1 - 4\left(2x^2+2y^2-x\right)\right)\right) = 2\left((4x-1)\left(2x^2+2y^2-x\right) - x\right)\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\left((4x-1)\left(2x^2+2y^2-x\right)-x\right)}{2y\left(1-4\left(2x^2+2y^2-x\right)\right)}\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(4x-1)\left(2x^2+2y^2-x\right)-x}{y\left(1-4\left(2x^2+2y^2-x\right)\right)}
\end{aligned}$$

Así,

$$y'(x,y) = \frac{dy}{dx}(x,y) = \frac{(4x-1)\left(2x^2+2y^2-x\right)-x}{y\left(1-4\left(2x^2+2y^2-x\right)\right)}$$

$$y'\left(0,\frac{1}{2}\right)=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ es:

$$y=1(x-0)+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$$