PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

# Ayudantía 6 - MAT1610

1. Determine $f'(x)$ para $f(x) = \sec(-x) + \operatorname{sen}(x^7 \cos(2x)) + \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

   **Solución:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sec(-x) + \operatorname{sen}\left(x^7 \cos(2x)\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)' \\ &= -\sec(-x)\tan(-x) + \cos\left(x^7\cos(2x)\right)\left(7x^6\cos(2x) - 2x^7\operatorname{sen}(2x)\right) - \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

2. (a) Sea $f(x) = \cos(x)$, determine el valor de $f^{(7)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(50)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

   (b) Determine la $n$-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

   **Solución:**

   (a) Como 7 mod 4 = 3 y 50 mod 4 = 2, se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{(7)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(50)}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   (b) Note que

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$
$$f'''(x) = -\frac{6}{(x-2)^4}$$
$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x-2)^5}$$
$$f^{(5)}(x) = -\frac{120}{(x-2)^6}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}}$$

3. Considere la función $f(x)=x+e^x$, la cual es uno a uno (o inyectiva) en $\mathbb{R}$. Determine el valor $\left(f^{-1}\right)'(1)$. **Solución**

**Una forma:**

Se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ y $f'(x)=1+e^x$, entonces

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}\\ &= \frac{1}{1+e^{f^{-1}(1)}}\end{aligned}$$

Por definición $f^{-1}(1)=a \Leftrightarrow f(a)=1$, es decir,

$$\begin{aligned}f^{-1}(1)=a &\Leftrightarrow f(a)=1\\ &\Leftrightarrow a+e^a=1\end{aligned}$$

Como $f(0)=1$ y $f$ es inyectiva, solo para $a=0$ se cumple que $f(a)=1$. Por lo tanto, $f^{-1}(1)=0$. Así,

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{1+e^0}\\ &= \frac{1}{1+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Otra forma:**

Considerar $y=x+e^x$, y calcular implícitamente $\frac{dx}{dy}$, que es $\left(f^{-1}\right)'(x,y)$. Se tiene que:

$$1=\frac{dx}{dy}+e^x\frac{dx}{dy}$$

Entonces,

$$1=\frac{dx}{dy}\left(1+e^x\right)$$

y, por lo tanto,

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+e^x}$$

y

$$\frac{dx}{dy}(0,1)=\frac{1}{1+e^0}=\frac{1}{2}$$

4. Para cada una de las siguientes funciones, determine $y'$, usando la derivación logarítmica.

   (a) $y=(\tan(x))^{\frac{1}{x}}$

(b) $y = \dfrac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

**Solución:**

(a)

$$
\begin{aligned}
y = (\tan(x))^{\frac{1}{x}} \quad &\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left((\tan(x))^{\frac{1}{x}}\right)\\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \frac{1}{x}\ln(\tan(x))\\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\ln(\tan(x))\right)\\
&\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{1}{x}\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)}\\
&\Rightarrow \quad y' = y\left(-\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{\sec^2(x)}{x\tan(x)}\right)\\
&\Rightarrow \quad y' = (\tan(x))^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{\sec^2(x)}{x\tan(x)}\right)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
y = \frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad &\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(\frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)\\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\cos^2(x)\right) - \ln\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)\\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\right) + \ln\left(\cos^2(x)\right) - \frac{2}{3}\ln((x+1))\\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\right) + 2\ln(\cos(x)) - \frac{2}{3}\ln((x+1))\\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = x^2 - x + 2\ln(\cos(x)) - \frac{2}{3}\ln(x+1)\\
&\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2x - 1 - 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{2}{3(x+1)}\\
&\Rightarrow \quad y' = y\left(2x - 1 - 2\tan(x) - \frac{2}{3(x+1)}\right)\\
&\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)\left(2x - 1 - 2\tan(x) - \frac{2}{3(x+1)}\right)
\end{aligned}
$$

5. Utilice la derivación implícita para calcular la derivada indicada.

   (a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $\arctan(x^2y) = x + xy^2$

   (b) $\dfrac{dx}{dy}$ si $y\sec(x) = x\tan(y)$

**Solución:**

(a)

$$\begin{aligned}
\arctan\left(x^2y\right) = x + xy^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\arctan\left(x^2y\right) = \frac{d}{dx}\left(x + xy^2\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{2xy + x^2\frac{dy}{dx}}{1 + x^4y^2} = 1 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(\frac{x^2}{1 + x^4y^2} - 2xy\right) = 1 + y^2 - \frac{2xy}{1 + x^4y^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(1 + y^2\right)\left(1 + x^4y^2\right) - 2xy}{x^2 - 2xy\left(1 + x^4y^2\right)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
y\sec(x) = x\tan(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(y\sec(x)\right) = \frac{d}{dy}\left(x\tan(y)\right) \\
&\Rightarrow \quad \sec(x) + y\sec(x)\tan(x)\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}\tan(y) + x\sec^2(y) \\
&\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}\left(y\sec(x)\tan(x) - \tan(y)\right) = x\sec^2(y) - \sec(x) \\
&\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x\sec^2(y) - \sec(x)}{y\sec(x)\tan(x) - \tan(y)}
\end{aligned}$$

6. Utilice derivación implícita para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2 + y^2 = \left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2$$

en el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. **Solución:**

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = \left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2\right) \\
&\Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\left(4x + 4y\frac{dy}{dx} - 1\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(2y\left(1 - 4\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\right)\right) = 2\left((4x - 1)\left(2x^2 + 2y^2 - x\right) - x\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\left((4x - 1)\left(2x^2 + 2y^2 - x\right) - x\right)}{2y\left(1 - 4\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\right)} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(4x - 1)\left(2x^2 + 2y^2 - x\right) - x}{y\left(1 - 4\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\right)}
\end{aligned}$$

Así,

$$y'(x, y) = \frac{dy}{dx}(x, y) = \frac{(4x - 1)\left(2x^2 + 2y^2 - x\right) - x}{y\left(1 - 4\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\right)}$$

$$y'\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ es:

$$y = 1(x - 0) + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$$