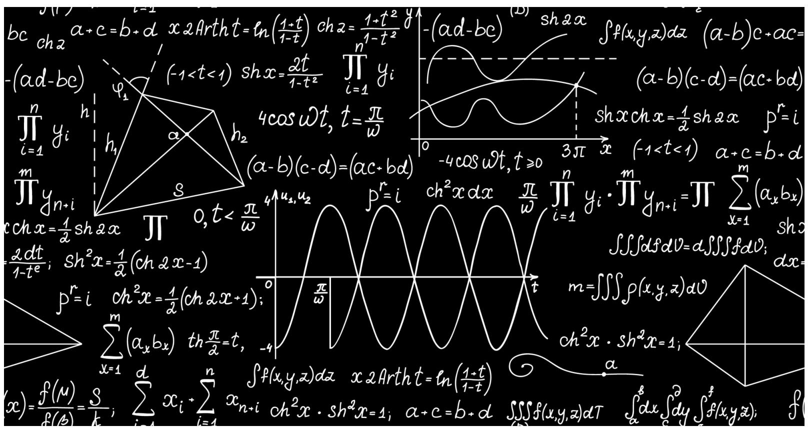
Pontificia Universidad Católica de Chile
*F*acultad de Matemáticas - Departamento de Matemática

Derivadas Cálculo I

Compilado de Ejercicios Resueltos



Sebastián Breguel, Alumno de Ingeniería Civil

sebabreguel@uc.cl

Contents

1 Derivadas y diferenciabilidad

1.1 Derivada por definición

La derivada de una función f en un número $x = a$, denotada por $f'(a)$, por definición al limite se da por dos formulas las cuales son:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Donde tendremos que la derivada existe si y sólo si el límite existe.
TIP: Comprobar derivabilidad de una función en $x = a$ implica verificar la continuidad de la función en a y además, comprobar la existencia del límite con el cual se define la derivada.

1. Sea $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $(a; b)$. Sea $x_0 \in (a; b)$ fijo. Se define **(I1-2014-1)**

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Calcule $\lim_{h \to 0} g(h)$.

Solución: Es evidente que g(h) con el límite que nos piden calcular vendria siendo alguna relación con la derivada por definición de la función $f(x)$, por lo que debemos tratar de armar de alguna manera esta fórmula y lo intentamos **sumando 0**.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{2h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{2h} \\
&= \frac{f^{'}(x_0)}{2} + \frac{f^{'}(x_0)}{2} \\
&= f^{'}(x_0)
\end{aligned}$$

2. Use la definición de derivada para calcular la derivada de **(I1-2015-2)**

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

solución: Para esto debemos usar la definición de la derivada que es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + (x+h)^2} - \sqrt{1 + x^2}}{h}$$

Ahora racionalizando llegaremos al resultado

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + (x+h)^2} - \sqrt{1 + x^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2})}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 + (x+h)^2 - (1 + x^2)}{h \cdot (1 + (x+h)^2 + \sqrt{1 + x^2})} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2hx}{h \cdot (1 + (x+h)^2 + \sqrt{1 + x^2})}$$

Ahora que podemos simplificar y evaluar el limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{h+2x}{1+(x+h)^2+\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Con lo que tendremos:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. Suponga que f es una función que cumple la propiedad $|f(x)| \leq \sin^2(x)$ para todo x. Demuestre que $f(0) = 0$, y calcule $f^{'}(0)$. **(I1-2015-2)**

Solucion: Nosotros tendremos que como se cumple:

$$-\sin^2(x) \leq f(x) \leq \sin^2(x)$$

Evaluando tenemos

$$\underbrace{-0 \leq f(0) \leq 0}_{f(x)=0}$$

Ahora para hacer el calculo de $f'(0)$ tendremos la siguiente desigualdad:

$$0 \leq |f(x)| \leq \sin^2(x)$$

Tambien por otro lado si aplicamos la definición de la derivada:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

Con esto tendremos

$$0 \leq |\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}| \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(h)}{h}$$

Finalmente aplicando el limite en el lado derecho tendremos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(h)}{h} = 0$$

Con lo que tendremos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

4. Sea f una función definida en todo R tal que $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique. **(I1-2017-2)**

   (a) f es derivable en $x = 0$.

   (b) $L = 0$

   (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Solucion:
a) Esto es verdaeraro, ya que la derivada por definición si existe, ya que:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = L$$

b) Esto es falso, donde esto puede ser demostrado con un contraejemeplo, donde si tomamos por ejemplo

$$f(x) = \sin(x) \to \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Por lo que $L \neq 0$.
c) Esto es verdadero, si seguimos el siguiente desarrollo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} - L = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Lx}{x} = 0$$

Ahora podemos multiplicar por x a ambos lados

$$\lim_{x\to 0} f(x) - Lx = 0$$

Ahora por ley de los limites tendremos

$$\lim_{x\to 0} f(x) - \underbrace{\lim_{x\to 0} Lx}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

que es lo que nos dicen.

5. Sea f la función definida por $f(x) = xe^x$. encuentre su derivada por defínción. **(I1-2018-2)**

Solución: Debemos aplicar la derivada por definicion, donde esto se hace por lo siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)e^{x+h} - xe^x}{h}$$

Reordenando

$$\lim_{h\to 0} \frac{xe^x(e^h - 1) + he^{x+h}}{h}$$

$$xe^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} e^{x+h}$$

Ocupando el limite notable:

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua tal que $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ si $x \neq 0$. Encuentre $f(0)$. Luego calcule $f'(0)$ si existe. **(I1-2019-tav)**

Solución: Como sabemos que f es una función continua en R, por lo que se debe cumplir la condición de continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

Ahora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

Con esto tenemos qe $f(0) = 0$
Para encontrar el valor de $f'(0)$, debemos aplicar la derivada por definición:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(h)}{h^2} = 1$$

Por lo tanto:

$$f'(0) = 1$$

7. Sea f una función continua y derivable en $x = 2$ tal que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$ es $y = 3x - 1$. Determine $f(2)$, $f'(2)$ y el valor de $(I1 - 2019 - 2)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)^2 - 25}{x - 2}$$

Solución: Debemos recordar la formula de la recta tangete que es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

Con esto y la informacon entregada por el enunciado, nosotros sabremos que podemos plantear las siguientes igualdades:

$$f'(2) = 3 \qquad -1 = f(2) - f'(2) \cdot 2$$

Por lo que con esto sabemos que

$$f(2) = 5 \quad f'(2) = 3$$

Luego de esto nos piden calcular:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)^2 - 25}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(f(x) - 5)(f(x) + 5)}{x - 2}$$

Separando por algebra de limites, notamos que le primer limite es la derivada por definición de $f'(2)$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} \cdot \lim_{x\to 2}(f(x) + 5) = 3 \cdot 10 = 30$$

1.2 Rectas tangentes

La formula por definición de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

1. Encuentre todos los puntos de la curva $y = \dfrac{1}{x+1}$ en los cuales la tangente a la curva en dichos puntos pasa por $(0, -1)$.

Solucion: La pendiente de la función vendria siendo $f^{'}(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, con lo que esto debemos remplazarlo en la ecuación de la tangente en un punto (x_0, y_0) de una curva es:

$$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

con $y = -1$ e $x = 0$

$$-1 - y_0 = \frac{-1}{(x_0+1)^2}(0 - x_0)$$

además notamos que debemos remplazar y_0, ya que debe satisfacer que este en la curva inicial.

$$-1 - \frac{1}{x_0+1} = \frac{-1}{(x_0+1)^2}(0 - x_0)$$

Despejeando vamos a llegar a la ecuación

$${x^2}_0 + 4x_0 + 2 = 0$$

Por lo que la coordenada x de los puntos que fueron solicitados en un principio son

$$x_1 = -2 + \sqrt{2}, \quad x_2 = -2 - \sqrt{2}$$

2. Sea C un curva de ecuación:

$$C : y = f(x) = -x^2 + 2x - 4$$

(a) Determine la ecuación de la recta tangente a C en un punto $x = x_0$

(b) Determine $x_0 \in \mathbb{R}$ de modo que la recta tangente pase por el origen.

Solución
a) Para determinar la recta tangente debemos primero encontrar la pendiente de esta que es la derivada de $f(x)$

$$f^{'}(x) = -2x + 2$$

Ahora si lo remplazamos en la fórmula de la recta tangente con $x = x_0$ e $y_0 = f(x_0)$

$$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (-{x_0}^2 + 2x_0 - 4) = (-2x_0 + 2)(x - x_0)$$

b) Enseguida para lograr encontrar la recta tangente que pasa por el origen debemos hacer que nos quede alguna ecuación de la forma $y = \alpha x$, por lo que despejamos y

$$y = (-2x_0 + 2)(x - x_0) + ({x_0}^2 + 2x_0 - 4)$$

$$= (-2x_0 + 2)x - x_0(-2x_0 + 2) + (-{x_0}^2 + 2x_0 - 4)$$

Ahora para que se cumpla lo anterior el coeficiente libre debe ser 0 por lo que se debe resolver la ecuación

$$-x_0(-2x_0 + 2) + (-{x_0}^2 + 2x_0 - 4) = 0$$

$$2{x_0}^2 - 2x_0 - {x_0}^2 + 2x_0 - 4 = 0$$

$${x_0}^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$$

Con lo qye llegamos a que las rectas tangentes son

$$y_1 = -2x; \qquad y_2 = 6x$$

3. Encuentre las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2 + 2$ que pasan por el punto $(1, -3)$. **(I1-2014-2)**

Solución

Partimos primero haciendo la ecuación de la recta tangente con la derivada y el punto dado

$$f'(x) = 2x \qquad x, y = 1, -3$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

Enseguida con esto remplazamos lo que sabemos con anterioridad, lo remplazamos y buscamos los valores iniciales a los que terminarian correspondiendo cada una de las rectas que vienen de la curva inicial y pasan por el punto dado

$$-3 - y_0 = 2x_0(| - x_0)$$

$$0 = 2x_0 - 2{x_0}^2 + 3 + y_0$$

$$0 = 2x_0 - 2{x_0}^2 + 3 + {x_0}^2 + 2$$

$${x_0}^2 - 2x_0 - 5 \longrightarrow x_0 = 1 \pm \sqrt{6}$$

Ahora teniendo esto, lo que debemos hacer es remplazarlo en la ecuación (1)

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (1 \pm \sqrt{6}) = 2(1 \pm \sqrt{6})(1 - 1 \pm \sqrt{6})$$

Con esto tenemos las dos rectas tangentes que pasan por el punto $(1, -3)$

4. Determine las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12; 3)$ **(I1-2015-1)**

Solución Empezamos derivando respecto a x la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(4y^2)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(36)}{\mathrm{d}x}$$

$$2x + 8y \cdot y' = 0 \rightarrow y' = \frac{-x}{4y}$$

Ahora tenemos la pendiente de nuestra recta tangente, luego de esto como nos piden las dos rectas. debemos dejar expresado en función de x_0 y y_0 donde estos seran puntos que cumplan con:

$$x_0^2 + 4y_0^2 = 36$$

y ahora las redctas tangentes tienen que pasar por el punto $(12, 3)$, por lo que en la formula clasica estas seran nuestras y e x

$$y - y_0 = m'(x - x_0) \rightarrow 3 - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(12 - x_0) \tag{2}$$

Ahora despejando llegamos :

$$y_0 = 3 - x_0 \tag{3}$$

Luego si juntamos con la reemplazmos en la ecuacionq ue tenian que cumplir x_0 e y_0

$$x_0^2 + 4(3 - x_0)^2 = 36 \rightarrow x_0^2 + 36 - 24x_0 + 4x_0^2 = 36$$

Ahora llegmaos a

$$5x_0^2 - 24x_0 = x_0(5x_0 - 24) = 0$$

$$x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{24}{5}$$

Ahora reemplazando en ambos puntos en 3 tendremos los puntos:

$$p_1 = (0, 3), \quad p_2 = (\frac{24}{5}, \frac{-9}{5})$$

Donde ahora reemplazamos esto en 2 lograremos tener las rectas tangentes que cumplen con lo solicitado

$$\text{recta } P_1 \;\; y - 3 = 0, \quad \text{recta } P_2 \;\; y - 6x = -\frac{153}{5}$$

5. Demuestre que el grafico de la función $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene tangentes paralelas a la recta $y = 4x - 5$. **(I1-2015-2)**

Solución:
Las rectas tangentes al grafico de la función $f(x) = 6x^3 + 5x - 3$tienen una pendiente que viene dada por la derivada $f^{'}(x) = 18x^2 + 5$. Por otra parte, la recta $y = 4x - 5$ tiene pendiente 4. Pero notamos la siguiente relación de la derivada

$$f^{'}(x) \geq 5 \geq 4$$

Por lo que con esto llegamos a que la recta tangente nunca tendra por pendiente 4, por lo que no será paralela a la recta $y = 4x - 5$.

6. Dada la curva $g(x) = \dfrac{f(x^2)}{x}$, $x \neq 0$ donde $f(9) = 9$,$f^{'}(9) = -2$, encuentre la ecuación de la tangente a la curva $y = g(x)$, en el punto donde $x = 3$. **(I1-2016-1)**

Solución
Para encontrar la recta tangente debemos recordar primero la fórmula de esta que vendria siendo

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0)$$

Enseguida lo que debbemos hacer es derivar $g(x)$

$$g'(x) = \frac{2xf'(x^2)x - f(x^2)}{x^2}$$

Ahora remplazando en la fórmula con el punto dado nos quedaría finalmente

$$y - \frac{f({x_0}^2)}{x_0} = \frac{2{x_0}^2 f'({x_0}^2) - f({x_0}^2)}{{x_0}^2}(x - x_0$$

$$y - \frac{f(3^2)}{3} = \frac{2 \cdot 3^2 f'(3^2) - f(3^2)}{3^2}(x - 3)$$

$$y - \frac{9}{3} = \frac{2 \cdot 9 \cdot -2 - 9}{3^2}(x - 3 \quad)$$

$$y - 3 = \frac{2 \cdot 9 \cdot (-2) - 9}{9}(x - 3)$$

$$y = \frac{-5 \cdot 9}{9}(x - 3) + 3$$

$$y = -5(x - 3) + 3$$

7. Las curvas $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ se intersectan en el punto $(1; 2)$: Demuestre que sus tangentes en ese punto son perpendiculares entre si. **(I1-2017-1)**

Solución Para lograr demostrar que las rectas tangentes son perpendiculares entre si lo que debemos hacer es buscarlas y luego según sabemos el producto de sus pendientes debe dar -1. la fórmula a usar será

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Partimos buscando la recta tangente de la primera curva

$$y^2 = 4x^3$$

$$2yy' = 12x^2 \rightarrow m_1 = y' = \frac{6x^2}{y}$$

Teniendo la primera pendiente ahora procedemos a calcular la segúnda, ocupando la fórmula de la segúnda curva

$$2x^2 + 3y^2 = 14$$

$$4x + 6yy' = 0 \rightarrow m_2 = y' = \frac{-4x}{6y}$$

Enseguida teniendo las dos curvas debemos remplzar el punto pedido y luego hacer el producto entre estas y comprobar que nos dan -1

$$m_1 = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3; \qquad m_2 = \frac{-4 \cdot 1}{6 \cdot 2} = \frac{-1}{3}$$

$$m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \frac{-1}{3} = -1 \qquad \blacksquare$$

8. Determine los puntos en la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6$ en los cuales la recta tangente es horizontal. Encuentre la ecuación de dichas rectas tangentes **(I1-2017-2)**

Solución:
Nos piden encontrar las rectas tangentes, que son horizontales donde según sabemos eso es cuando es constante por lo que su pendiente $f'(x) = 0$. Debido a esto derivamos la función normal.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x$$

Ahora se tiene que igualar a 0 la derivada y encontrar los valores de x para los que se cumple esta igualdad

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 18x = 0 \longrightarrow x = 0, 3$$

Enseguida tenemos que $x_{01} = 0$ y $x_{02} = 3$, por lo que debemos remplazarlo en la función y en la ecuación de la recta tangente

$$y_{01} = f(x_{01}) = 2(0)^3 + 9(0)^2 + 6 = 6 \qquad y_{02} = f(x_{02}) = 2(3^3) - 9(3^2) + 6 = 21$$

Finalemente debemos remplazar en la ecuación de la recta tangente, los puntos obtenidos.

$$y_1 - y_{01} = f'(x_{01})(x_1 - x_{01}) \qquad y_2 - y_{02} = f'(x_{02})(x_2 - x_{02})$$

$$\begin{aligned} y_1 - 6 &= 0(x_1 - 0) & y_2 - 21 &= 0(x_2 - 3) \\ y_1 &= 6 & y_2 &= 21 \end{aligned}$$

Por lo que las rectas serían

$$T_1 \qquad y_1 = 6$$

$$T_2 \qquad y_2 = 21$$

9. Encuentre una recta que sea tangente comun a las curvas $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$. **(I2-2009-2)**

Solución:
La ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $(a; a^2)$ viene dada por: $y = 2ax - a^2$. Por otra parte, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto $(b; \frac{1}{b})$ viene dada por: $y = -\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}$. Para que la recta sea tangente a ambas curvas se deben satisfacer las siguinetes ecuaciones:

$$2a = \frac{-1}{b^2}, \quad a^2 = \frac{2}{b}$$

Resolviendo obtenemos que $a = -2$ y que $b = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto la recta buscada es:

$$y = -4x - 4$$

10. Sea $f(x) = x^4 + x - e^x$. Demuestre que el gráfico de f tiene, al menos, una recta tangente paralela a la recta $y = x + 1$. **(I1-2021-1)**

Solución:
Para que la función $f(x)$, tenga al menos una recta tangente paralela a la recta $y = x + 1$ si y sólo si existe $c \in R$ tal que $f'(c) = 1$. Para demostrar esto derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 + 1 - e^x$$

Notamos que esta es una función continua en el intervalo $[0, 1]$, luego de esto

$$f'(0) = 0 \quad y \quad f'(1) = 5 - e > 2$$

entonces tendremos que por TVI existe un $c \in (0, 1)$ que cumple con que $f'(c) = 1$. Por consecuencia tendremos que el punto $(c, f(c))$ la recta tangente a la función $f(x)$, tiene pendiente 1 y por lo que es paralela a la recta $y = +1$.

1.3 Reglas de derivación

Dentro de las derivas encontraran que estas siguen ciertas reglas, a continuación tienen algunas reglas/formulas que por su dificultad no es necesario dedicarle una sección a cada una:

- Derivada de una constante:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

- suma:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

- Regla de la potencia:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

- resta:

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

- Multiplo constante:

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$

- Exponente natural:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Trigonometricas:

- $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$
- $\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x) \cdot \tan(x)$
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x) \cdot \cot(x)$
- $\frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)$

Trigonometricas inversas:

- $\frac{d}{dx}\sin^- 1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\tan^- 1(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\sec^- 1(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\cos^- 1(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\csc^- 1(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\cot^- 1(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

A continuación hay tres secciones que se a distintas reglas con el uso de las anteriores.

1.3.1 Regla del producto y del cuociente

Las reglas de estas sección, siguen las siguientes formulas:

- regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]$$

- regla del cuociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]}{g^2(x)}$$

1. sea $f(x) = \sin(x)(x^4 + \cot(x))$. Determine $f^{'}(x)$

Solución:
acá ocupamos la regla del producto donde consideramos

$$f(x) = \sin(x); \quad f^{'}(x) = \cos(x).$$

$$g(x) = x^4 + \cot(x); \quad g^{'}(x) = 4x^3 - \csc^2(x)$$

Enseguida aplicando la regla del producto nos quedaría

$$f(x)g^{'}(x) + f^{'}(x)g(x) = \sin(x)(4x^3 - \csc^2(x)) + \cos(x)(x^4 + \cot(x)) \quad \square$$

2. Derivar

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Solución
acá ocupamos la regla del couciente donde consideramos

$$h(x) = x^2 + 1; \quad h^{'}(x) = 2x.$$

$$g(x) = \sqrt{x} - 1; \quad g^{'}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f^{'}(x) = \frac{h^{'}(x)g(x) - h(x)g^{'}(x)}{g^2(x)}$$

$$f^{'}(x) = \frac{2x(\sqrt{x} - 1) - (x^2 + 1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\frac{(4\sqrt{x} \cdot x(\sqrt{x} - 1) - x^2 - 1)}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{(4\sqrt{x} \cdot x(\sqrt{x} - 1) - x^2 - 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{(4x^2 - 4\sqrt{x} \cdot x - x^2 - 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$$

Finalmente la derivada nos daría

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4\sqrt{x} \cdot x - 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$$

3. Derivar la siguiente función

$$f(x) = \frac{1+\sin(x)}{x+\cos(x)}$$

Solución
Usando la regla del cuociente establecimos las funciones y las derivamos

$$h(x) = 1+\sin(x); \qquad h^{'}(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = x+\cos(x); \qquad g^{'}(x) = 1-\sin(x)$$

Por lo que ahora remplazando en la fórmula del cuociente

$$f^{'}(x) = \frac{h^{'}(x)g(x) - h(x)g^{'}(x)}{g^2(x)} = \frac{\cos(x)(x+\cos(x)) - (1+\sin(x))(1-\sin(x))}{(x+\cos(x))^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{x\cos(x) + \cos^2(x) - 1 + \sin^2(x)}{(x\cos(x))^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{x\cos(x)}{(x+\cos(x))^2}$$

4. Derive la función $f(x) = \dfrac{xe^{3x}}{1+x^2}$ **(I1-2018-2)**

Solución
Primero debemos establecer cuales serían nuestras funciones que forman parte de la fracción y luego derivarlas

$$g(x) = xe^{3x}; \qquad g^{'}(x) = e^{3x} + 3xe^{3x}$$

$$h(x) = 1+x^2; \qquad h^{'}(x) = 2x$$

Enseguida con esto remplazamos en la fórmula del cuociente

$$f^{'}(x) = \frac{h^{'}(x)g(x) - h(x)g^{'}(x)}{g^2(x)} = \frac{(1+x^2)(e^{3x}+3xe^{3x}) - (xe^{3x})(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x} + 3xe^{3x} + x^2e^{3x} + 3x^3e^{3x} - 2x^2e^{3x}}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3e^{3x} - x^2e^{3x} + 3xe^{3x} + e^{3x}}{(1+x^2)^2}$$

5. Calcule la derivada de la siguiente función **(I1-2019-tav)**

$$f(x) = e^x - 4^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + 6x^3 - \cos(x)$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}(e^x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}(4^3)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(1/\sqrt[4]{x})}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}(\cos(x))}{\mathrm{d}x}$$
$$f(x) = e^x - 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} + 18x^2 + \sin(x)$$

6. Dada $y = f(x) = e^{3x}\cos(2x)$, determine $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x)$. $(I2 - 2014 - 1)$

Solución:
Lo que primero debemos hacer es calcular la derivada, luego la segúnda derivada y despues remplazarla en la ecuación dada y encontrar el valor de esta. Partimos derivando por la regla del producto

$$f(x)g^{'}(x) + f^{'}(x)g(x)$$
$$y' = f'(x) = 3e^{3x}\cos(2x) - 2e^{3x}\sin(2x)$$

Enseguida amente debemos aplicar la regla del producto

$$y'' = f''(x) = 9e^{3x}\cos(2x) - 6e^{3x}\sin(2x) - 6e^{3x}\sin(2x) - 4e^{3x}\cos(2x)$$
$$y'' = f''(x) = 5e^{3x}\cos(2x) - 12e^{3x}\sin(2x)$$

Finalmente ahora procedemos a remplazar en la ecuación dada para encontrar el valor faltante

$$y''(x) - 6y'(x) + 13y(x)$$
$$5e^{3x}\cos(2x) - 12e^{3x}\sin(2x) - 6(3e^{3x}\cos(2x) - 2e^{3x}\sin(2x)) + 13e^{3x}\cos(2x)$$
$$18e^{3x}\cos(2x) - 18e^{3x}\cos(2x) + 12e^{3x}\sin(2x) - 12e^{3x}\sin(2x) = 0$$

Por lo que llegamos a que $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 0$.

7. Determine un polinomio $p(x)$, de modo que la derivada de la función $(I2 - 2014 - 2)$

$$f(x) = e^{3x}p(x)$$

sea igual a $e^{3x}(3x^2 + 8x)$

Solución:
Primero ocupamos la regla del prdocuto derivando $f(x)$

$$f'(x) = 3e^{3x}p(x) + e^{3x}p'(x) = e^{3x}(3p(x) + p'(x))$$

Enseguida como la derivada de la función debbe ser igual a $e^{3x}(3x^2 + 8x)$, lo que debemos hacer es igualar este valor y ver de que manera podemos llegar a el polinomio $p(x)$

$$e^{3x}(3p(x) + p'(x)) = e^{3x}(3x^2 + 8x)$$

$$3p(x) + p'(x) = 3x^2 + 8x$$

Ahora tenemos una desigualdad que cumpli, lo que debemos hacer es ver como tiene que ser el polinomio $p(x)$, para esto es importante notar que el mayor exponente debe ser de grado 2. Esto es haci ya que, haciendo la igualdad notamos que el grado del polinomio al que debemos llegar es de grado 2, por lo que planteamos un polinomio de la forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

Enseguida lo que debemos hacer es remplazar esto en la igualdad y así podremos encontrar los factores(a,b y c) del polinomio $p(x)$.

$$3p(x) + p'(x) = 3x^2 + 8x$$

$$3(ax^2 + bx + c) + 2ax + b = 3x^2 + 8x$$
$$3ax^2 + (3b + 2a)x + (3c + b) = 3x^2 + 8x$$

Finalmente llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$3a = 3 \tag{4}$$

$$(3b + 2a) = 8 \tag{5}$$

$$3c + b = 0 \tag{6}$$

Enseguida resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a+

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = \frac{-2}{3}$$

Por lo que el polinomio sería

$$p(x) = x^2 + 2x - \frac{2}{3}$$

8. Determine la pendiente de la recta tangente a la curva **(I2-2021-1)**

$$x^y = y^x$$

en el punto $(2, 4)$.

Solución
Para resolver esto, primero aplicamos ln() a ambos lados de la ecuación y ocupando las propiedades de los logaritmos:

$$y \ln(x) = x \ln(y)$$

Ahora debemos derivar recto a y en ambos lados de la ecuación quedando:

$$y' \ln(x) + \frac{y}{x} = \ln(y) + \frac{x}{y} \cdot y'$$

Donde ahora despejando y' tendremos:

$$y' \left(\ln(x) - \frac{x}{y} \right) = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\ln(y) - \frac{y}{x}}{\ln(x) - \frac{x}{y}}$$

Por lo que ahora solo debemos reemplazar los valores para obtener la pendiente de la recta tangente:

$$y' = \frac{\ln(4) - \frac{4}{2}}{\ln(x) - \frac{2}{4}}$$

1.3.2 Regla de la cadena

Esta regla se compone de que uno tiene una función que al ser derivada:

$$F(x) = f(g(x)) \rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}[f(g(x))] \cdot \frac{d}{dx}g(x)$$

Tambien destacar que si se ocupa la siguiente notación:

$$y = f(u) \qquad u = g(x)$$

Tendremos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

1. derivadar la siguiente función **(I1-2016-2)**

$$f(x) = (x\ln(x))^{\cos(x)}$$

Solución
Para resolver este ejercicio de una manera mas fácil para aplicar la regla de la cadena haremos lo siguiente. según sabemos se cumple $x = e^{\ln(x)}$, por lo que podemos aplicar esto en la función dada

$$(x\ln(x))^{\cos(x)} = e^{\ln((x\ln(x))^{\cos(x)}} = e^{\cos(x)(x\ln(x))}$$

Ahora notamos que tenemos que usar la regla del producto solo que para 3 funciones no 2 como estamos acostumbrados, pero siguiendo el mismo método tipico procedemos

$$e^u \rightarrow e^u u'$$

$$f(x) = e^{\cos(x)(x\ln(x))} \rightarrow f'(x) = e^{\cos(x)(x\ln(x))}(\cos(x)(x\ln(x)))'$$

$$f'(x) = e^{\cos(x)(x\ln(x))}(\cos(x)(x\ln(x))' + \cos'(x)(x\ln(x))$$

$$f'(x) = e^{\cos(x)(x\ln(x))}(\cos(x)(1+\ln(x)) - \sin(x)(x\ln(x))$$

Recordar que $= e^{\cos(x)(x\ln(x))} = (x\ln(x))^{\cos(x)}$

2. Si $h(x) = f(xf(x))$, donde $f(1) = 2$,$f'(1) = 4$ y$f'(2) = 5$, encuentre $h'(1)$. **(I1-2018-1)**

Solución
Primero derivamos la función aplicando la

$$h^{'}(x) = f^{'}(u)u^{'}$$

Enseguida lo que debemos hacer es aplicar la regla de la cadena, donde también en este deberemos usar la regla del producto.

$$h^{'}(x) = f'(u)(u') = f^{'}(xf(x))(xf^{'}(x) + f(x))$$

Ahora remplazamos en el punto solicitado

$$h^{'}(1) = f^{'}(f(1))(f^{'}(1) + f(1))$$

$$h^{'}(1) = f^{'}(2)(4 + 2)$$

$$h^{'}(1) = 5(4 + 2) = 30$$

3. Dada la función real $g(x) = \sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$ entonces el valor de $g'(0)$ es: $(Control\, 1 - 2016 - 1)$

Solución En este ejercicio notamos que debemos usar la regla de la cadena 2 veces ya que tenemos una función con una función con una función dentro., pero primero recordaremos un poco algunas derivadas

$$\frac{\mathrm{d}(\arctan(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}; \qquad \frac{\mathrm{d}(\sec(x))}{\mathrm{d}x} = \sec(x)\tan(x)$$

Enseguida para derivar $g(x)$ debemos ocupar el siguiente metodo

$$u = \arctan(y); \qquad y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u' = \frac{1}{1+y^2}; \qquad y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$g(x) = \sec(u(y(x)) \rightarrow g'(x) = \sec'(u(y(x)) \cdot u'(y(x)) \cdot y'(x)$$

Ahora remplazando llegamos a

$$g'(x) = \sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1)}}\right)\right) tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} \cdot \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Enseguida debemos remplazar el valor de $x = 0$, ya que a primera vista es un poco difícil simplificar la expresión

$$g'(0) = \sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+1)}}\right)\right) tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+1}}\right)\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+0^2}\right)} \cdot \frac{-0}{\sqrt{(1+0^2)^3}}$$

Aun con el valor remplazado se ve bastante difícil de analizar pero vayamos analizando cada parte de la derivada y notaremos la respuesta de manera mas obvia

$$\sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+1)}}\right)\right) \neq 0; \qquad tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+1}}\right)\right) \neq 0$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+0^2}\right)} \neq 0; \qquad \frac{-0}{\sqrt{(1+0^2)^3}} = 0$$

Enseguida ya con esto notamos que finalmente $g'(0) = 0$, ya que es el producto de cuatro números, tres distintos de 0 pero uno igual a 0.

4. Calcule la derivada de $y = x^{e^x}$ $I2 - 2009 - 1$

Solución
Para resolver este ejercicio de una manera mas fácil para aplicar la regla de la cadena haremos lo siguiente. según sabemos se cumple $x = e^{\ln(x)}$, por lo que podemos aplicar esto en la función dada

$$x^{e^x} = e^{\ln(x^{e^x})} = e^{e^x \ln(x)}$$

Ahora derivando esta ultima expresión tenemos que usar la regla de la cadena junto con la regla del producto

$$\frac{\mathrm{d}(e^u)}{\mathrm{d}u} \to e^u u'$$

$$y = e^{e^x \ln(x)}$$

$$y' = e^{e^x \ln(x)}(e^x \ln(x))'$$

$$y' = e^{e^x \ln(x)}(e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x}) = x^{e^x}(e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x})$$

5. Sea $f(x)$ una función derivable en $\mathbb{R}$, con $f(4) = 2$ y $f'(4) = -6$. Se define: $(I2 - 2011 - 2)$

$$g(x) = \sqrt{1 + (f(4x))^3}$$

Calcule $g'(1)$.

Solución Derivamos la función aplicando la regla de la cadena de la siguiente manera

$$g(x) = \sqrt{u} \to g'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1 + (f(4x))^3}} \cdot (1 + (f(4x))^3)'$$

$$= \frac{3 \cdot 4f'(4x) \cdot (f(4x))^2}{2\sqrt{(1 + (f(4x))^3}}$$

$$g'(x) = \frac{6 \cdot f'(4x) \cdot (f(4x))^2}{\sqrt{(1 + (f(4x))^3}}$$

Enseguida debemos remplazar $x = 1$ en la expresión obtenida y así calcularemos lo solicitado

$$g'(1) = \frac{6 \cdot f'(4)) \cdot (f(4))^2}{\sqrt{(1 + (f(4))^3}}$$

$$g'(1) = \frac{6 \cdot (-6) \cdot (2)^2}{\sqrt{(1 + (2)^3}} = \frac{-36 \cdot 4}{\sqrt{9}} = -48$$

6. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 2$,$f'(0) = -1$,$f(1) = f'(1) = 2$, determine $g'(0)$, para la función g definida por: $g(x) = f(e^x)e^{f(x)}$ $(I2 - 2014 - 1)$

Solución
acá según vemos debemos ocupar dos reglas, tanto la de la cadena como la del producto en la derivada de la función

$$g(x) = f(e^x)e^{f(x)}$$
$$g'(x) = e^x f'(e^x)e^{f(x)} + f(e^x)f'(x)e^{f(x)}$$

Ahora con la derivada evaluamos la función en $x = 0$

$$g'(0) = e^0 \cdot f'(e^0) \cdot e^{f(0)} + f(e^0) \cdot f'(0) \cdot e^{f(0)}$$
$$g'(0) = 1 \cdot f'(1) \cdot e^2 + f(1) \cdot -1 \cdot e^2$$
$$g'(0) = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^2 = 0$$

7. Sea $f(x) = \ln(x^2 + 3^x)$. Determine $f'(0) + f''(0)$: $(I2 - 2018 - 2)$

Solución
Primero derivamos la función ocupando la regla de la cadena

$$f(x) = \ln(u) \to f'(x) = \frac{u'}{u}$$
$$f'(x) = \frac{2x + \ln(3)3^x}{x^2 + 3^x}$$

Enseguida derivando nuevamente debemos ocupar la regla del cuociente

$$g(x) = 2x + \ln(3)3^x; \qquad g'(x) = 2 + \ln(3)^2 3^x$$
$$h(x) = x^2 + 3^x; \qquad h'(x) = 2x + \ln(3)3^x$$
$$f''(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$
$$f''(x) = \frac{(2 + \ln^2(3)3^x)(x^2 + 3^x) - (2x + \ln(3)3^x)^2}{(x^2 + 3^x)^2}$$

Ahora si evaluamos en 0 ambas funciones nos dan

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0 + \ln(3)3^0}{0^2 + 3^0} = \ln(3)$$
$$f''(0) = \frac{(2 + \ln^2(3)3^0)(0^2 + 3^0) - (2 \cdot 0 + \ln(3)3^0)^2}{(0^2 + 3^0)^2} = \frac{2 + \ln^2(x) - \ln^2(x)}{1^2} = 2$$

Por lo que el resultado que nos pedian era

$$f'(0) + f''(0) = \ln(3) + 2$$

8. Sean $h(x)$ y $f(x)$ funciones derivables y definidas en $(0;\infty)$ tales que $f'(x) = \arctan(x)$ y $h'(x) = \frac{1}{x}$. Si $(I2-2017-1)$

$$g(x) = \frac{1}{2}h(1+x^2) - xf'(x)$$

Demuestre que $(f+g)$ es función constante en $\mathbb{R}^+$

Solución Para que una función sea constante se debe dar que su derivada sea 0, por lo que debemos hacer es derivar la función $g+f$ y si es igual a 0 quedara demostrado que es constante.

$$f+g = f(x) + \frac{1}{2}h(1+x^2) - xf'(x)$$

$$f'+g' = f'(x) + \frac{1}{2}h(1+x^2)2x - f'(x) - xf''(x)$$

$$f'(x) - f'(x) + h(1+x^2)x - xf''(x)$$

Enseguida si derigvamos $f'(x)$ y $h(1+x^2)$ llegaremos a:

$$f'(x) = \arctan(x) \rightarrow f''(x) = \frac{1}{1+x^2}; \qquad h(x) = \frac{1}{x} \rightarrow h'(1+x^2) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

finalmente juntando todo

$$f'+g' = f'(x) - f'(x) + \frac{x}{(1+x^2)} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$f'+g' = 0 \qquad \blacksquare$$

1.3.3 Derivada implicita

En muchos casos tenemos funciones donde $y = f(x)$, pero estas estan dentro de una ecuación donde $f(x)$ no es despejable de la forma clasica por lo que se deriva y como si fuera una variable, solo que la derivada como tal todavia nos falta y lo usamos como una regla de la cadena. Tomemos un ejemplo simple:

$$y^2 \cdot x + x^2 \cdot y = 0$$

$$2y \cdot y' \cdot x + y^2 + 2x \cdot y + x^2 \cdot y' = 0$$

Con esta explicación deben hacer los siguientes ejercicios.

1. Si $x^2y + y^3 = 2$; calcule y' e y'' en el punto $(1;1)$: **(I1-2017-1)**

   Solcuión
   Derivando implí citamente la ecuación, tenemos que:

   $$2xy + x^2y' + 3y^2y' = 0$$

   Despejando y' de la ecuación, tenemos que.

   $$y' = \frac{-2xy}{x^2 + 3y^2}$$

   Por lo tanto

   $$y'_{(1,1)} = \frac{-1}{2}$$

   Ahora debemos derivar nuevamente implicitanmente

   $$y'' = \frac{(-2y - 2xy')(x^2 + 3y^2) - (2x + 6yy')(-2xy)}{(x^2 + 3y^2)^2}$$

   Luego

   $$y''_{(1,1)} = \frac{-3}{8}$$

2. Suponga la ecuación

   $$\sqrt{x} + 1 = x\sqrt{y} + \sin(y)$$

   Define de manera implicita $y = f(x)$. Calcule y'

Solución Derivando primero

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \sqrt{y} + \frac{xy'}{2\sqrt{y}} + y' \cos(y)$$

Enseguida debemos despejar y'

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{y} = y' \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \cos(y) \right)$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{y} \right) \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \cos(y) \right)^{-1} = y'$$

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación **(I1-2018-1)**

$$\arctan(x+y)+y=\frac{\pi}{4}$$

en el punto $(1,0)$

Solución
La ecuación de la recta tangente pedida es

$$y=y'(1;0)\cdot(x-1):$$

Derivando implícitamente la ecuación de la curva tenemos que

$$\frac{1}{1+(x+y)^2}\cdot(1+y')+y'=0$$

Evaluando tenemos que

$$\frac{1}{1+(1+0)^2}\cdot(1+y')+y'=0$$

por lo tanto $y'(1;0)=-\frac{1}{3}$ Así, la ecuación de la recta tangente es $y=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$.

4. Determine los puntos de la curva $xy+y^2+x^2+x-y=2$ cuya recta tangente a la curva sea horizontal o vertical. $(I2-2012-TAV)$

Solución
Utilizamos derivación implicita para derivar con respecto a x la igualdad y obtenemos que:

$$y+xy'+2yy'+2x+1-y'=0$$

luego

$$y'=\frac{2x+y+1}{1-2y-x}$$

Ahora si seguimos lo solicitado en el enunciado debemos formar las siguientes ecuaciones para las rectas tangentes sean horizontales o verticales • **Horizontales**

$$2x+y+1=0$$

Con esto podemos llegar a que todos los puntos que esten en la recta $y=-1-2x$ y en la curva $xy+y^2+x^2+x-y=2$ sus rectas tangenetes serán **Horizontales**. Estos puntos son el $(0,-1)$ y $(0,2)$.
• **Verticales**

$$1-2y-x=0$$

Con esto se concluye que todos los puntos que esten en la recta $y=-\left(\frac{1+x}{2}\right)$y la curva $xy+y^2+x^2+x-y=2$ sus rectas tangentes serán **Verticales**. Los cuales son el $(1,0)$ y $(-3,0)$.

5. Considere la curva de ecuación $x^2 - xy + y^2 = 9.(I2 - 2013 - TAV)$
   (a) Muestre que las rectas tangentes a la curva, en los puntos donde esta intersecta al eje x son paralelas.
   (b) Calcular $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

Solución
(a) Para mostrar lo que nos piden primero buscaremos los puntos donde la curva intersecta al eje x.
Para esto notamos que sucede que la coordenada de $y = 0$, por lo que nos queda

$$x^2 = 9 \longrightarrow x = \pm 3$$

Ahora con esto tenemos los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

Ya con los puntos listos lo que debemos hacer es derivar la curva, ya que esa será la pendiente de las rectas tangentes.

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \longrightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x} \tag{7}$$

Enseguida remplazando con los puntos solicitados tenemos

$$x_1 = -3; \qquad x_2 = 3$$

$$y_1' = \frac{0 - 2\cdot(-3)}{0 - (-3)} = 2; \qquad y_2 = \frac{0 - 2\cdot(3)}{0 - 3} = 2$$

Por lo que notamos que ambas derivadas son iguales y si nos vamos a la fórmula de las rectas tangentes tenemos

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

Donde la derivada es la pendiente y para que dos rectas sean paralelas deben sus pendientes ser iguales, que es lo que sucede debido a que $y_1' = y_2'$. Por lo que con esto queda mostrado lo solicitado
(b) Ahora para calcular la segúnda derivada derivamos (7) nuevamente

$$2 - y' - y' - xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \to y''(2y - x) = 2y' - 2(y')^2 - 2$$

Enseguida si lo despejamos denuevo llegamos a

$$y'' = \frac{2y' - 2(y')^2 - 2}{2y - x}$$

Finalmente remplazando lo que teníamos en (7) tendremos

$$y'' = \frac{2\left(\dfrac{y - 2x}{2y - x}\right) - 2\left(\dfrac{y - 2x}{2y - x}\right)^2 - 2}{2y - x} = \frac{-6y^2 + 6xy - 6x^2}{(2y - x)^3}$$

6. Determine todos los puntos de la curva $x^2y+e^y = e$ cuya tangente es horizontal. $(I2-2018-2)$

Solución
Primero derivaremos implicitamente la ecuación de la curva, donde llegamos a

$$2xy + x^2y' + y'e^y = 0 \Longleftrightarrow y' = \frac{-2xy}{x^2 + e^y}$$

De lo anterior tenemos que los puntos cuya recta tangente a la curva es horizontal deben cumplir que $x = 0$ o $y = 0$, pero de la ecuación de la curva observamos que no existen puntos con segúnda coordenada cero, por lo tanto deben cumplir necesariamente que $x = 0$. Reemplazando $x = 0$ en la curva tenemos que $y = 1$, por lo tanto el único punto que tiene recta tangente horizontal es $(0; 1)$

1.3.4 Funciones Inversa

La derivada de una función inversa, viene dada por:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

1. Sea f una función derivable en un intervalo (a, b) tal que $f'(x) = 1+f(x)^2$ para todo $x \in (a, b)$. Demuestre que f es invertible y determine $(f^{-1})'(x)$. **(I2-2018-2)**

   Solución
   Del enunciado tenemos que $f'(x) = 1 + f(x)^2 > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en dicho intervalo lo que implica que es inyectiva y por lo tanto invertible. Sabemos que
   $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{1 + f(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

2. Se sabe que $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ es invertible en $(-\infty, -2)$. Determine $(f^{-1})'(5)$. **(I2-2018-TAV)**

   Solución
   Por formula nosotros sabemos que se cumplo:
   $$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))}$$
   Por otra parte $f^{-1}(5) = -3$, por lo tanto
   $$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(-3)} = \frac{1}{12}$$

3. La función $f(x) = 2x + e^x$ es una función invertible. Determine $(f^{-1})'(1)$. **(I2-2019-2)**

   Solución Para resolver este ejercicio, debemos derivar $f'(x)$
   $$f'(x) = 2 + e^x$$
   Luego de esto usando la fórmula para la derivada de la inversa de una función, tenemos que
   $$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

4. Dada la función $f(x) = x^3 + 4x - 7$, calcule $(f^{-1})'(-7)$ y $(f^{-1})''(-7)$ **(I2-2020-TAV)**

Solución
Recordemos que para funciones invertibles, tenemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Para determinar $f^{-1}(-7)$ resolvemos la ecuación $x(x^2+4) = 0$ cuya única solución es $x = 0$ y por lo tanto $f^{-1}(-7) = 0$. Además como $f'(x) = 3x^2 + 4$ tenemos que $f'(f^{-1})(-7)) = f'(0) = 4 \neq 0$. Luego

$$(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-7))} = \frac{1}{4}$$

Derivamos una segunda vez y obtenemos

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^2}$$

y como $f''(x) = 12x$ para todo $x \in \mathrm{R}$ entonces

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{-1}(-7))}{[f'(f^{-1}(-7))]^2} = \frac{f''(0)}{f'(0)^2} = 0$$

5. Se sabe que la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ es una función invertible con inversa f^{-1} Determine $(f^{-1})'(1)$

Solución
Recordemos que para funciones invertibles, tenemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Por otra parte $f(x) = 1$ si y solo si $x = 0$, por lo que $f^{-1}(1) = 0$, además $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ por lo tanto

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

6. Sea $h(x) = g(xg^{-1}(x))$ con g una función invertible tal que

x	1	-1	0	2	-2
$g(x)$	-2	2	3	1	5
$g'(x)$	1	4	2	6	3

Si g^{-1} denota la inversa de g, determine $h'(2)$. **(I2-2021-1)**

Solución
Primero debemos derivar $h(x)$, donde notamos que debemos usar la regla de la cadena quedando de la siguiente manera:

$$h'(x) = g'(x \cdot g^{-1}(x)) \cdot (xg^{-1}(x))' \Rightarrow (xg^{-1}(x))' = g^{-1}(x) + x(g^{-1})'(x)$$

$$h'(x) = g'(x \cdot g^{-1}(x)) \cdot g^{-1}(x) + x(g^{-1})'(x)$$

Ahora si reemplazamos la formula de la derivada de una función inversa, tendremos:

$$h'(x) = g'(x \cdot g^{-1}(x)) \cdot \left(g^{-1}(x) + \frac{x}{g'(g^{-1}(x))}\right)$$

Con esto ocuparemos la tabla y llegaremos al resultado:

$$h'(2) = g'(2 \cdot g^{-1}(2)) \cdot \left(g^{-1}(2) + \frac{2}{g'(g^{-1}(2))}\right), \qquad g'(g^{-1}(2)) = g'(-1) = 4$$

$$h'(2) = g'(2 \cdot -1) \cdot \left(-1 + \frac{2}{4}\right) = \frac{-3}{2}$$

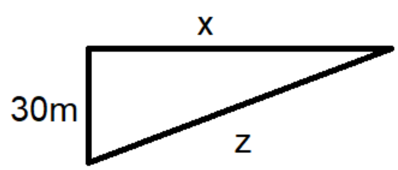
2 Aplicación de las derivadas

2.1 Razon de cambio

Durante la sección anterior vimos como derivar distintos tipos de funciones, ahora debemos ante un problema, lograr establecer una relación mediante una ecuación/función, en base a la información entregada de tal manera que podamos llegar a resultados. **TIP:** para esta sección es importante el manejo de derivada en el formato de $\frac{d}{dx}$, x como variable.

1. Un carabinero está parado a $30m$ de distancia de una carretera recta. Con su radar portátil determina que un auto que se esta desplazando por la carretera, acercandose a el carabinero, en el momento en que está a $50m$ de él, la distancia disminuye a una tasa de variación instatánea de $70Km/h$. Cuál es la velocidad del auto (en Km/h)? **(I1-2016-2)**

Primero lo que debemos es de cierta manera, imaginarnos el problema y dibujarlo, donde se definira $x = x(t)$ y $z = z(t)$ las distancias como se ven en el dibujo(siendo el punto verde, donde esta ubicado el carabinero):



Por lo que con esto, podemos establecer una relación por pitagoras donde:

$$z^2 = x^2 + (30m)^2$$

Derivando con respecto al tiempo t:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Reordenando nos queda

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{x} \cdot \frac{dz}{dt}$$

De pitagoras y el enunciado tendremos que cuando $z = 50m \rightarrow x = 40m$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{50m}{40m} \cdot 70Km/h = -87,5km/h$$

2. Un recipiente de agua tiene forma de cono invertido (con el vértice hacia abajo) de 6 m de radio y 10 m de altura. Si se llena con agua a razón de 5 litros por minuto, con qué rapidez varía la altura del agua en el recipiente cuando ésta llega a 4 m? **(I1-2017-1)**

Dado que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ es el volumen del cono, donde r es el radio y h la altura, además nos dan como dato que

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}} = 5$$

Dado que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ es el volumen del cono, donde r es el radio y h la altura, además nos dan como dato que

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}} = 5$$

Luego como nos piden calcular la $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$ en $h = 4$. Lo que hacemos es encontrar una relación entre h y r, para luego dejar V en torno a una sola variable. Por thales tendremos que

$$\frac{h}{r} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \to r = \frac{3h}{5}$$

Finalemnte con esti, lo remplazamos en la formula del volyumen y luego derivamos, podremos encontrar lo solicitado

$$V = \frac{3}{25}\pi h^3$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}} = (\frac{3}{25}\pi 3)h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$$

Donde de esta ecuación si sabemos $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}}$ despejamos $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$, reemplazamos $h = 4$ y tendremos el resultado

$$5 = \frac{9}{25}\pi h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}} \to \frac{125}{144\pi} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$$

3. El tiempo de vida media del radio es 1590 años. Una muestra de radio tiene una masa de 100mg. Determine el tiempo necesario para que la muesta en cuestión se reduzca a 30 gramos. Sugerencia: Si $m(t)$ representa la masa después de t años se tiene que $\frac{dm}{dt}$ =km $(I1 - 2017 - 2)$

Solución: Debemos nosotros saber, para resolver este ejercicio que la función de vida media sigue este formato:

$$m(t) = Ce^{kt}$$

Nosotros tenemos que

$$m(0) = Ce^0 = 100 \to C = 100$$

Por lo que ahora debemos calcular la constante K, esto se hace con la información entregada por el enunciado donde:

$$m(1590) = 50 = 100e^{kx} \to K = -\frac{\ln(2)}{1590}$$

Con esta información es posible responder a lo solicitado, recurriendo a invertir la función, de la siguiente manera:

$$m(t) = 100e^{-\frac{\ln(2)}{1590}\cdot t} = 30$$

$$e^{-\frac{\ln(2)}{1590}\cdot t} = 0.3$$

$$-\frac{\ln(2)}{1590} \cdot t = \ln(0.3)$$

$$t = -\frac{1590 \cdot \ln(3)}{\ln(2)}$$

4. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón constante de $6cm/s$.¿Cuán rápido se incrementa el área del cuadrado cuando el área es de $16cm^2$? **(Control 2-2016-1)**

Solución:
Definimos como x el largo del cuadrado, entonces del enunciado podemos obtener que:

$$\frac{dx}{dt} = 6\ cm/s$$

Ahora por enunciado, debemos calcular, la derivada del area, que se rige por:

$$A = x^2 \Rightarrow 16 = x^2$$

$$x = 4$$

Entonces si derivamos la función del area tendremos:

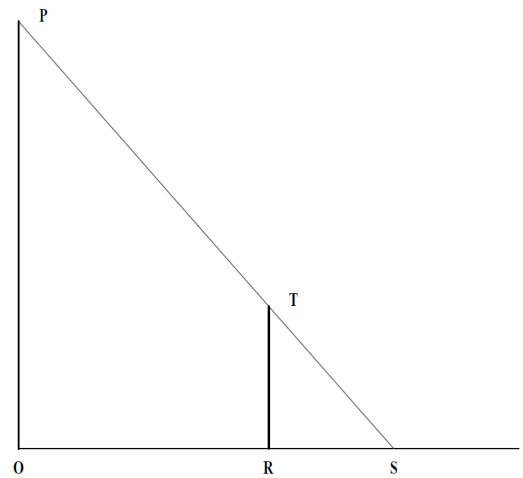
$$A' = 2x \cdot x'$$

Finalmente evaluamos en $x = 4$ y obtendremos lo solicitado:

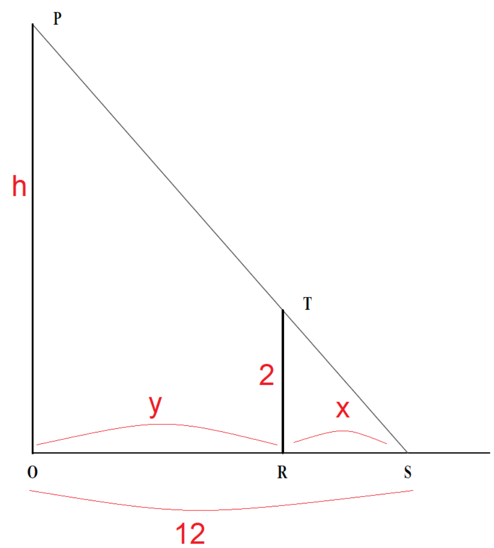
$$A' = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48cm^2/s$$

5. Un reflector en el piso alumbra un muro a 12m de distancia. Si un hombre de 2m de estatura camina del rector hacia el muro a una velocidad de $1.6m/s$. Con que velocidad disminuye la altura de su sombra en el muro cuando está a 4 m de la pared? **(I2-2013-1)**

Solución:
Se resuelve este ejercicio, haciendo un dibujo previo de la situación para lograr entender de mejor manera lo que se esta calculando:



En el dibujo tendremos $\overline{RT}$ representa la altura del hombre, $\overline{OP}$ sera su sombra proyectada en el muro por la luz que sale desde el punto S. Luego de esto definamos que $x = \overline{RS}$ la distancia del hombre al foco, $y = \overline{0R}$ e $h = \overline{OP}$ la proyección.



Ahora por thales, podemos hacer

$$\frac{h}{12} = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{24}{x}$$

Notamos que x y h son funciones del tiempo t derivamos obteniendo

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{24}{x^2} x'(t)$$

Pero por enunciado nos dicen que $x'(t) = 1.6 = \frac{8m/s}{5}$. Por lo que podemos reemplazarlo en la derivada anterior

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{24}{x^2} \cdot \frac{8m/s}{5} = \frac{-192}{5x^2}$$

Luego del dibujo nosotros podemos establecer que

$$x + y = 12$$

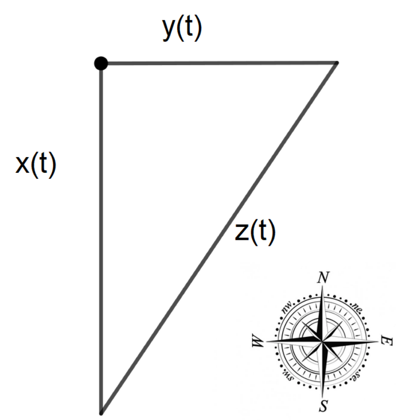
Por lo que ahora con eso podemos responder la pregunta reemplzando $y = 4$ y luego de esto reemplazar el valor de x en la ecuación de la derivada para obtener el valor de esta:

$$x = 12 - 8 = 4 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{24}{8^2} \cdot \frac{8m/s}{5} = -0.6m/s$$

Por lo que tendremos que h decrece a razon $0.6m/s$

6. Dos motocicletas parten desde un mismo punto. Una de ellas se dirige hacia el sur a $60km/hr$ y la otra hacia el este a 25km/hr ¿Con qué rápidez se incrementa la distancia entre ellas dos horas después de comenzar su trayecto? **(I2-2018-2)**

Solución: Primero debemos hacer un dibujo que represente la situación a la que nos enfrentamos:



Denotamos que $y(t)$ es la distancia recorrida por la moto que se dirige al este, después de t horas desde el punto inicial, y, análogamente, $x(t)$ a la distancia de la moto que se dirige al sur tenemos, del enunciado, que $y'(t) = 25$, y que $x'(t) = 60$. Por otra parte si $z(t)$ corresponde a la distancia entre las motos, después de t horas de iniciado el trayecto vemos que:

$$z^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

y derivando esta igualdad tenemos que

$$z(t)z'(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t)$$
$$z(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{z'(t)}$$

Lo que debemos calcular es $z'(2)$, para eso observe que después de 2 horas la moto que se dirige al este ha avanzado $50km$ y la que va al sur $120\,km$, y por lo tanto la distancia entre ellas es de $130\,km$. reemplazando esta información en la última de las igualdades obtenemos que

$$z'(2) = \frac{25 \cdot 50 + 60 \cdot 120}{130} = 65km/hr$$

7. Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola de ecuación $xy = 8$. Cuando alcanza el punto $(4, 2)$, la coordenada y se incrementa con una rapidez de $3\,cm/seg$. ¿Cuán rápido está cambiando la coordenada x del punto en movimiento en ese instante? **(Examen-2018-2)**

Solución: ya que nos dan la curva, lo que debemos hacer es derivarla respecto al tiempo, por lo que debemos usar la regla del producto y la cadena:

$$\frac{dx}{dt}y + \frac{dy}{dt}x = 0$$

Reemplazando los datos obtenemos

$$2\frac{dx}{dt} + 4 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -6$$

Por lo tanto la cordenada x decrece a razón $6cm/seg$.

2.2 Teorema de Rolle

Este teorema se basa en que se deben cumplir 3 hipotesis para que este se pueda cumplir, que son:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces existira un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- En palabras simples, este teorema nos dice que si en cierto intervalo continuo(1) y diferenciable(2), donde se cumpla la tercera condición la derivada sera 0 en algun punto en el intervalo.

1. Demostrar que si f es una función dos veces derivable que admite 3 raíces distintas en un intervalos abiero I; entonces f'' tiene por lo menos una raíz en I: $(Control\ 2 - 2016 - 1)$

Solución: según la hipótesis, tenemos que existe un α, β y γ que cumplen lo siguiente en el intervalo de $x \in I$

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$$

Con

$$\alpha < \beta < \gamma$$

Ahora si nosotros sabiendo esto, podemos llegar a aplicar el **Teorema de Rolle** que dice: Mientras haya un $f(a) = f(b)$ con $a, b \in I$ se cumplira

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0; \qquad c \in]a, b[$$

Por lo que aplicando el teorema, podemos primero hacerlo para α y β

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(a) = 0; \qquad a \in]\alpha, \beta[$$

Enseguida hacemos lo mismo para β y γ

$$\frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} = f'(b) = 0; \qquad b \in]\beta, \gamma[$$

Finalmente llegamos a una expresión que nos permite demostrar según el **Teorema de Rolle**, ya que ahora encontramos que $f'(x)$ tiene dos raíces distintats por lo que podemos aplicarlo y así demostar que existiria por lo menos una raíz en I.

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(c) = 0; \qquad c \in]a, b[$$

y según sabemos tanto b como a estan en el intervalo de I por lo que queda demostrado que existe un c tal que se cumpla $f''(c) = 0$ con $c \in I$ $\blacksquare$.

2. Demuestre que la función $f(x) = x^3 - 3x + b$ no puede tener dos raíces en el intervalo $[-1; 1]$ para cualquier valor de b: **(I2-2016-1)**

Solución: Si $f(x) = x^3 - 3x + b$ tuviera dos raíces en $[-1; 1]$; entonces existiría $c \in (-1; 1)$; tal que $f'(c) = 0$; por el **teorema de Rolle**.
Pero $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; y en $(-1; 1)$ la función derivada es negativa, es decir

$$x \in (-1, 1)(f'(x) < 0)$$

por lo tanto no existe tal c para todo b real. ■

2.3 Teorema del Valor Medio

Este teorema es una versión mas extendida del Teorema de Rolle, ya que primero tiene las siguientes condiciones:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces tendremos que $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Donde si notamos es el teorema de rolle, sin la tercera condición, que fuerza a que $f'(c) = 0$.

- Este teorema dicho de otra manera, es que sea una función $f(x)$ continua y diferenciable en un intervalo (a, b), se va a dar que un punto en el intervalo va a tener como derivada la pendiente de la recta formada por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

1. Sea $f(x)$ una función continua en $[0; 4]$ y derivable en $(0; 4)$ tal que $f(0) = 0$: Demuestre que si $f'(x) \leq x$ en $[0; 4]$; entonces $f(4) \leq 16$: **(Control 2-2016-1)**

   Solución: Si plantemaos el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, 4]$, ya que tenemos el valor de f en el límite inferior podemos aplicar el teorema.

   $$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{f(4)}{4} = f'(\alpha), \alpha \in (0, 4)$$

   Dado que $\alpha < 4$ tenemos que

   $$\frac{f(4)}{4} = f'(\alpha) \leq \alpha < 4$$

   Por lo que llegamos despejando podemos llegar a inferir

   $$f(4) \leq 16 \qquad \blacksquare$$

2. Demuestre que la ecuación **(I2-2019-2)**

   $$3x = \cos(x)$$

   tiene sólo una solución enR.

Solución: Al considerar la función $h(x) = 3x - \cos(x)$ observamos que h es continua en todo $\mathbb{R}$ y que

$$h(0) = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad h(1) = 3 - \cos(1) > 2$$

por lo tanto por **TVI** tenemos que al menos h tiene un cero o equivalentemente que la ecuación planteada tiene al menos una solución real.

Por otra parte, al suponer que tiene al menos dos soluciones a y b, tenemos que h cumple las hipótests del **Teorema de Rolle (o TVM)**, por lo tanto existe $c \in (a; b)$ tal que $h'(c) = 3 + \sin(c) = 0$, lo que es imposible, por lo tanto h tiene exactamente un cero real, es decir, la ecuación planteada tiene sólo una solución en $\mathbb{R}$. ■

3. Demuestre que el polinomio $P(x) = x^5 - 5x + b$, para cualquiera sea $b \in \mathbb{R}$, tiene a lo más una raíz real en $(-1; 1)$. **(I2-2011-1)**

Solución: Denotemos como

$$P'(x) = 5(x^4 - 1)$$

Por lo tanto para $x \in (-1; 1)$ tendremos que $P'(x) < 0$. Por lo que sera un función estrictamente decreciente, donde nosotros sabemos que puede tener a lo más una raíz real.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar y diferenciable. Demuestre que para todo $a > 0$ existe c tal que $f'(c) = \dfrac{f(a)}{a}$. **(I2-2011-tav)**

> **Solución:** Sea $a > 0$: Si f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$; en particular es continua en $[-a; a]$ y diferenciable en $]-a; a[$: Aplicando el Teorema del Valor Medio, tenemos que existe $c \in]-a; a[$ tal que
>
> $$f'(c) = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{f(a) - f(-a)}{2a}\frac{f(a) + f(a)}{2a} = \frac{f(a)}{a}$$
>
> donde en la tercera igualdad utilizamos que la función es impar, es decir, $f(-a) = -f(a)$:

5. Sea f una función continua en $[2, 5]$, derivable en $(2, 5)$ tal que $f(2) = 0$ y tal que $1 \leq f'(x) \leq 4$. Demuestre que $3 \leq f(5) \leq 12$. **(I2-2012-TAV)**

> **Solución:** Observe que podemos usar el Teorema del valor medio para la función f en el intervalo $[2, 5]$, es decir podemos garantizar que existe $c \in (2, 5)$ tal que
>
> $$f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{3}$$
>
> lo que equivale a que existe $c \in (2, 5)$ tal que $f(5) = 3f'(c) + f(2)$ Por las hipótesis del problema tenemos que
>
> $$1 \leq f'(c) \leq 4$$
>
> ademas que $f(2) = 0$, por lo tanto
>
> $$3 \leq f(5) \leq 12$$

6. Demuestre que para $0 < a < b$ se tiene la siguiente desigualdad **(I2-2013-TAV)**

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$$

> **Solución:** Para entender mejor el problema, podemos manipular la expresión de la siguiente manera donde primero
>
> $$1 - \frac{a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b}{a} - 1$$
>
> $$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}$$
>
> $$\frac{1}{b} < \left(\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a}\right) < \frac{1}{a}$$

Enseguida notamos que podemos ocupar esta expresión y es muy similar por no decir exactamente igual a la del **T.V.M.** donde $f(x) = \ln(x)$ por lo que se deberia cumplir

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = f'(c) = \frac{1}{c}; \quad c \in (a, b)$$

Luego remplazzando esto en la desigualdad con $x = c \in (a, b)$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

Donde notamos que esto se cumple ya que $\frac{1}{x}$ es estrictamente dececiente por lo que queda demostrada la expresion

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1 \qquad \blacksquare$$

7. Use el Teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$ entonces **(I2-2018-2)**

$$\arctan(x) < x$$

Solución: Observe que $f(x) = \arctan(x)$ es una función derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto dado $x > 0$ podemos aplicar el **TVM** en el intervalo $[0; x]$, obteniendo que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{1 + c^2} < 1$$

Donde notamos que la expresión de la derecha es la derivada de x, por lo que su pendiente es menor y por lo tanto tenemos

$$\frac{1}{1 + x^2} < 1$$

$$\arctan(x) < x \qquad \blacksquare$$

8. Si c es un número real cualquiera, usando el TVM, pruebe que $f(x) = x^4 + 4x - c$ tiene a lo más 2 raíces reales.

Solución: Notemos que f es un polinomio de grado 4, así es una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, si $a < b$ satisfacen $f(a) = f(b)$, entonces por el TVM (o de Rolle) existe $x_0 \in (a; b)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Es decir, entre 2 raíces hay un punto crítico. Por lo tanto, si hubieran 3 raíces reales, digamos

$$x_1 < x_2 < x_3 \text{ con } f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$$

entonces existirián $x' \in (x1; x2)$ y $x'' \in (x_2; x_3)$ tales que

$$f'(x') = f'(x'') = 0$$

es decir, existirían dos puntos críticos. Por otro lado, es claro que

$$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1) = 4(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Como se cumple que

$$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

Por lo tanto, f tiene sólo un punto crítico, por lo que no podría tener más de dos raíces reales. Así, concluimos que f tiene a lo más 2 raíces reales. ■

9. Sea f una función dos veces derivable y tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(c) > 0$; con $a < c < b$: Demuestre que entre a y b existe un α para el cual $f'' < 0$:

Solución: Como f es dos veces derivable, entonces es continua y podemos utilizar T.V.M. para obtener:

- Existe α_1 entre a; y c tal que

$$\left(f'(\alpha_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right) = \frac{f(c)}{c - a}$$

  como $f(c) > 0$ entonces $f'(\alpha_1) > 0$

Usando nuevamente T.V.M. para $f(x)$

- Existe α_2 entre c; y b tal que

$$\left(f'(\alpha_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \right) = \frac{-f(c)}{b - c} < 0$$

Ahora debemos usar T.V.M. para $f'(x)$

- Existe α entre α_1; y α_2 tal que

$$\left(f'(\alpha_2) = \frac{f'(\alpha_2) - f'(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)$$

Con esto notamos que existe un $\alpha \in (a, b)$ tal que $f''(\alpha) < 0$. ■

10. Suponga que $f(0) = 5$ y que $f'(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f(x) = 2x + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$. **(I2-2017-2)**

Verdadero, ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene, por **Teorema del Valor Medio**

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c), \qquad c \in (0, x)$$

$$\frac{f(x) - 5}{2} = 2$$

$$f(x) - 5 = 2x$$

Lo que equivale a

$$f(x) = 2x + 5$$

11. Use el Teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$ entonces

$$\arctan(x) < x$$

Solución: Si nosotros que $f(x) = \arctan(x)$ es una función derivable en todo R, por lo tanto dado $x > 0$ podemos aplicar el TVM en el intervalo $[0, x]$, obteniendo que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = f'(c)$$

Ahora por definición tendremos que:

$$f(x) = \arctan(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ahora si por lo establecido en el T.V.M. podemos juntarlo y tener:

$$\underbrace{\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{1 + c^2} < 1}_{\frac{\arctan(x)}{x} < 1}$$

Por lo tanto podemos establecer que:

$$\arctan(x) < x$$

Que es lo que nos piden demostrar.

12. Demuestre que la desigualdad
$$e^x > x + 1$$
se cumple para cada $x > 0$.

Solución: Sea $x > 0$, definimos con la función:
$$f(x) = e^x$$
Ahora como f es continua y derivable en $(-\infty, \infty)$, si tomamos $a = 0, b = x$ particular, es continua en $[a, b] = [0, x]$ y derivable en $(a, b) = (0, x)$, Ahora que se cumplen las condiciones para usar el Teorema del Valor Medio (TVM), donde establecemos que existe un valor $c, c \in (a, b) = (0, x)$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - e^0}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$$
es decir, existe un valor $c, c \in (0, x)$ tal que:
$$f'(c) = e^x - 1x$$
y,$f'(c) = e^c$, entonces, para algún valor $c, c \in (0, x)$
$$e^c = \frac{e^x - 1}{x}$$
Por lo tanto, como $0 < c < x$ y $f(x) = e^x$ es una función creciente, entonces se tiene que, $e^0 < e^c < e^x$ o $1 < e^c < e^x$, en particular,
$$1 < e^c$$
es decir,
$$1 < f'c)$$
entonces,
$$1 < \frac{e^x - 1}{x}$$
o, como $x > 0$, multiplicando por$x$la desigualdad,
$$x < e^x - 1$$
o, equivalentemente $x + 1 < e^x$, lo cual es lo solicitado por el enunciado.

2.4 máximos, minimos y grafica de funciones

En el momento que a nosotros nos entregan una función, nosotros podemos sacar una cantidad importante de datos como lo son la derivada, puntos criticos, monotonia de la funcion, asintotas, etc... entre otras. Para todo esto tomaremos como caso de ejemplo una función $f(x)$ que cumple con que:

- Encontrar puntos criticos:
$$f(x) \Rightarrow f'(x) = 0$$
Supongamos que $a, b\, y\, c$ son puntos criticos($-\infty < a < b < c < \infty$).

- Monotonia:

  Teniendo $f'(x)$ tendremos que:
$$f'(x) > 0 \rightarrow \text{Creciente} \qquad f'(x) < 0 \rightarrow \text{Decreciente}$$
  Con la información del punto anterior podemos construir los intervalos: $(-\infty, a)$,(a, b),(b, c) y (c, ∞). Luego de esto lo llevamos a una tabla con al derivada:

	$-\infty, a$	a, b	b, c	c, ∞
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

  Esta información se lee de la siguiente manera:

  $f'(x) > 0$ en el intervalo de $(-\infty, a) \rightarrow$ Creciente.

  $f'(x) < 0$ en el intervalo de $(a, b)\, y\, (b, c) \rightarrow$ Decreciente.

  $f'(x) > 0$ en el intervalo de $(c, \infty) \rightarrow$ Creciente.

- Clasificar puntos criticos:

  Para este criterio tenemos dos tecnicas que son:

  1) Prueba de la primera derivada que se basa en lo siguiente:
     a) si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en c
     b) si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en c
     c) si $f'(x)$ no cambia de signo en c no hay ni máximo ni mínimo local.

     Por lo que en base al caso de ejemplo y los intervalos de monotinia tendriamos que

     - $f'(a)$ punto máximo local.
     - $f'(b)$ ni máximo ni mínimo local.
     - $f'(c)$ punto mínimo local.
  2) Prueba de la segunda derivada:
     a) Si $f''(x) > 0$ en un punto c, entonces f tiene un mínimo local en c.
     b) Si $f''(x) < 0$ en un punto c, entonces f tiene un máximo local en c.

- Concavidad:

  Esta determinada por la segunda derivada de la función $f(x)$ Donde si

  $$f''(x) > 0 \rightarrow \text{Concava hacia arriba} \qquad f''(x) < 0 \rightarrow concavahaciaabajo$$

  Tambien se le llama punto de inflexión, a un punto c donde en este se hace un cambio de la concavidad. Por ejemplo si para $x < c$ $f''(x) > 0$ y para $x > c$ $f''(x) < 0$ tendremos que ese es un punto de inflexión(lo mismo de forma alrevez).

- Asintotas:

  - Horizontales: Sea L una asíntota horizontal de la función $f(x)$ se debe cumplir

    $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

  - Verticales: Un asíntota vertical en un punto $x = a$, es una tal que se cumpla

    $$\lim_{x\to\ a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

  - Oblicuas(no se veran en esta sección): una asíntota oblicua es una función del tipo $y = mx + n$, donde se cumple que

    $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

    $$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

Con todo esto, podemos empezar a hacer los ejercicios.

---

1. Sea $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ función real con dominio $\mathbb{R} - \{1\}$: Determine intervalos de crecimiento y decreciemiento.**(Control 2-2016-1)**

Solución: Tenemos que

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-a)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

	$-\infty, 0$	$0, 1$	$1, 2$	$2, \infty$
$2x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Por lo tanto f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2; \infty)$ y es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

2. Sea f función derivable y tal que $f'(x) < 0$; $x \in \mathbb{R}$: Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)$ donde

$$g(x) = f(x^2)$$

Solución: Para encontrar los intervalos solicitados, debemos primero derivar la función, donde debemos usar regla de la cadena

$$g(x) = 2x \cdot f(x^2)$$

Ahora para determinar los intervalos de monotonia, hagamos la tabla:

	$-\infty, 0$	$0, \infty$
$2x$	$-$	$+$
$f(x^2)$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$

Notamos finalmente que :

- Creciente: $x \in (-\infty, 0)$
- Decreciente: $x \in (0, \infty)$

3. Sea $f(x) = 1 + xe^x + e^{-x}$. Bosqueje el gráfico de f indicando explícitamente los intervalos de monotonía, concavidad y asíntotas. **(I2-2019-2)**

Solución: Observemos primero que f es continua en todo R, por lo tanto no tendra asintotas verticales, luego para asintotas horizontales:

$$\lim_{x \to \mp\infty} (1 + xe^x + e^{-x}) = \infty$$

por lo tanto tampoco tiene asíntotas horizontales.
Luego para las asintotas oblicuas(que son de la forma $y = mx + n$), veremos si existe viendo si tiene pendiente:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{(1 + ex + e^{-x})}{x} = e$$

Ahora teniendo el m, debemos calcular el n

$$n = \lim_{x\to\infty} (1 + ex + e^{-x}) - (ex) = 1$$

por lo tanto la recta $y = 1 + ex$ es una asíntota oblicua.
Por otra parte si vemos la otra asintota oblicua($x \to -\infty$):

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + ex + e^{-x}}{x} = -\infty$$

Entonces no tiene asíntotas oblicuas para el extremo izquierdo del gráfico.
Para estudiar la cóncavidad y monotonía derivamos la función obteniendo que

$$f'(x) = e - e^{-x} \qquad e \qquad f''(x) = e^{-x}$$

Ahora para estudiar la monotonia tendremos que:

$$f'(x) = e - e^{-x} > 0 \Rightarrow e > e^{-x}$$

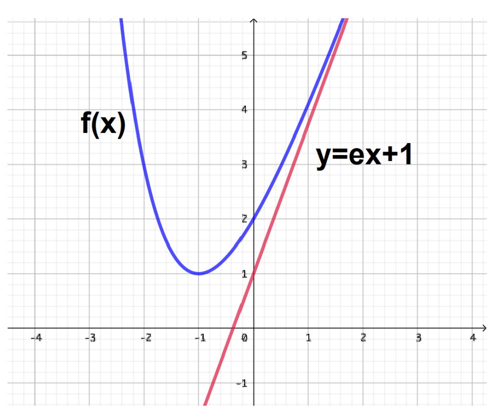
Donde alfinal esto es una desigualdad de los exponentes, si aplicamos ln() en la desigualdad:

$$1 > -x$$
$$-1 < x$$

Con lo que tenemos que:

- Crecimiento $x \in (-1, \infty)$
- Decrecimiento $x \in (-\infty, -1)$

Finalmente la concavidad sera siempre hacia arriba, ya que $f''(x) > 0, \quad x \in \mathrm{R}$ Donde la grafica debe aproximarse a algo de este estilo:



4. Sea $f(x) = \dfrac{5x}{5x^4+3}$ **(I2-2010-1)**

   (a) Hallar los intervalos donde f es creciente y aquellos donde es decreciente.

   (b) Hallar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y aquellos donde es cóncava hacia abajo.

   (c) Encuentre los máximos y mínimos locales de f. Indique si posee máximos y mínimos absolutos y si existen encuéntrelos.

Solución:
a) Para encontrar los intervalos de crecimiento y decreciemiento, debemos derivar hacer la tabla

$$f'(x) = \frac{5(5x^4-3) - 5x \cdot (20x^3)}{(5x^4+3)^2} = \frac{15(1-5x^4)}{(5x^4+3)^2}$$

	$-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	$-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \infty$
$15(1-5x^4)$	$-$	$+$	$-$
$(5x^4+3)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Ahora los intervalos de monotonia

- Creciente: $x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}})$
- Decreciente: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \infty)$

b)Nuevamente derivamos $f(x)$ y ocupar la tabla nuevamnte

$$f''(x) = \cdots\cdots = \frac{1500x^3(x^4-1)}{(5x^4+3)^3}$$

	$-\infty, -1$	$-1, 0$	$0, 1$	$1, \infty$
$1500x^3$	$-$	$-$	$+$	$-$
x^4-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$(5x^4+3)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$

Por lo que ahora los intervalos de concavidad sera:

- Concava hacia arriba: $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$
- Concava hacia abajo: $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

c) Tenemos que para encontrar los minimos locales y maximos, debemos tener nuestros candidatos a estos que son:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

Ahora podemos ver en los cambios de signo, si es un maximo o minimo:

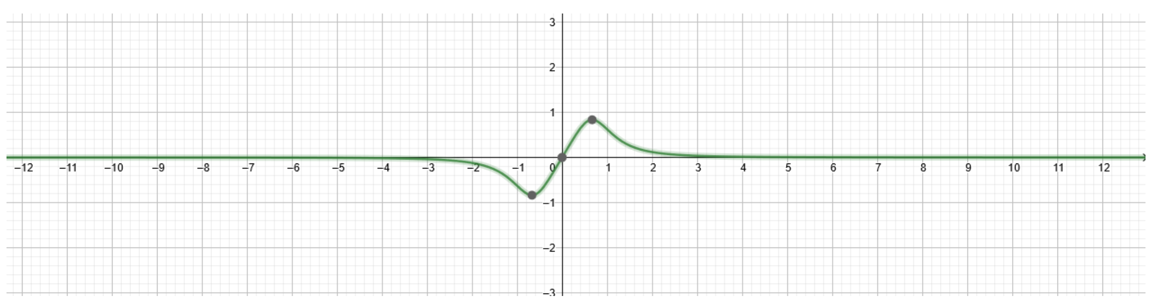
- Para x_1 notamos que
$$f'(x_1^-) < 0 \text{ y } f'(x_1^+) > 0$$
por lo que con esto comprobamos que es un minimo local. Pero este es ¿Este es absoluto o solo local?, para esto se puede dar explicacion, teniendo en cuenta que $f(x)$ es negativa en $x \in (-\infty, 0)$:

  - Por otro lado podemos ver que la asintota horizontal sera:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
Entonces descartamos la opción de la que la función no tengo minimo absoluto. Despues de esto, notamos que al tener un unico minimo local, esta es la unica opcion, ya que no hay cambios de monotonia en el intervalo de x antes del minimo local analizado, por lo que pasa a ser minimo absoluto.

- Para x_2 notamos que
$$f'(x_2^+) < 0 \text{ y } f'(x_2^-) > 0$$
por lo que con esto comprobamos que es un maximo local.Pero este es ¿Este es absoluto o solo local?, para esto se puede dar explicacion, teniendo en cuenta que $f(x)$ es positiva en $x \in (0, \infty)$:

  - Por otro lado podemos ver que la asintota horizontal sera:
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
Entonces descartamos la opción de la que la función no tengo maximo absoluto. Despues de esto, notamos que al tener un unico maximo local, esta es la unica opcion, ya que no hay cambios de monotonia en el intervalo de x despues del maximo local analizado, por lo que pasa a ser maximo absoluto.

Una forma de ver esto de manera mas clara es mediante el grafico de $f(x)$



5. Sea f una función diferenciable en $(-\infty;\infty)$ tal que **(I2-2011-1)**

$$x^2 f(x) + \frac{f(x)^3}{3} = 9$$

   (a) Determine $f'(x)$

   (b) Encuentre los puntos críticos de f.

Solución:
a) Aca debemos derivar toda la ecuación en una primera instacia:

$$2xf(x) + x^2 f'(x) + f(x)^2 f'(x) = 0$$

Ahora debemos despejar $f'(x)$

$$f'(x)(x^2 + f(x)^2) = -2xf(x)$$

$$f'(x) = -\frac{2xf(x)}{x^2 + f(x)^2}$$

b) Finalmente los puntos criticos seran cuando:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, f(x) = 0$$

Pero notamos que en la ecuación inicial si reemplazamos con $f(x) = 0$ esto nos dara $0 = 9$ lo cual no es posible, por lo que $x = 0$ es el unico punto critico.

6. Analice (dominio, crecimiento, máximos y mínimo, concavidad y asíntotas) y realice el gráfico de la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$. **(I2-2011-TAV)**

Solución:
El dominio de $f(x)$ es

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

Para encontrar los intervalos de monotonia, maximo y minimos debemos derivar la función

$$f'(x) = \frac{x(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{(\sqrt{x^2-4})^3}$$

Ahora debemos hacer la tabla a partir de los puntos criticos:

	$-\infty, -2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}, -2$	$2, 2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}, \infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 2\sqrt{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(\sqrt{x^2-4})^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Con esto lo que tenemos es que la función:

- Crece: $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2, 2\sqrt{2})$
- Drece: $x \in (-2\sqrt{2}, -2) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$

Por otro lado los unicos puntos criticos son:

$$x_1 = -2\sqrt{2} \qquad x_2 = 2\sqrt{2}$$

Donde ambos puntos son minimos locales segun el criterio de analisis segun la primera derivada y la tabla.
Luego de esto para la concavidad necesitamos la segunda derivada que tendra por resultado:

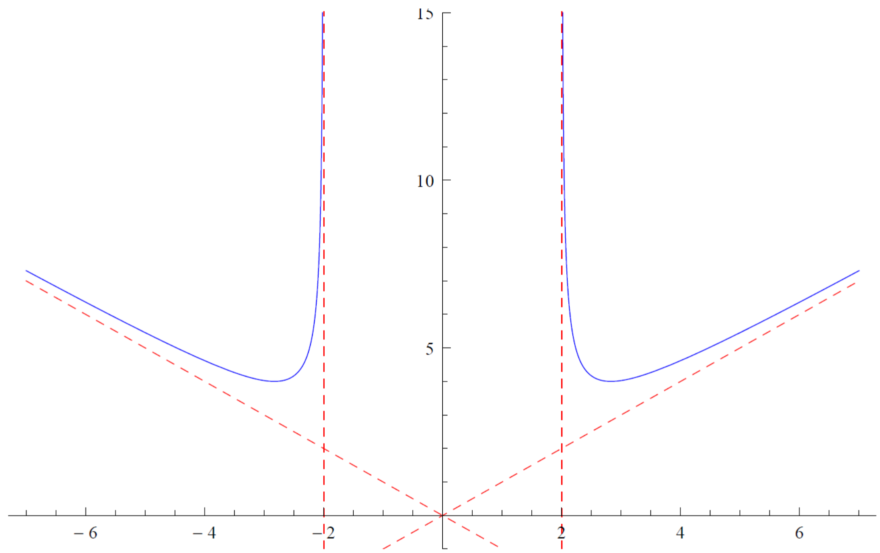
$$f''(x) = \frac{4x^2 + 32}{(\sqrt{x^2 - 4})^5}$$

Con esto notamos que $f''(x) > 0$ en todo el dominio de $f(x)$, por lo que la función es concava hacia arriba(convexa): $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
Ahora debemos ver las asintotas de $f(x)$:

- verticales:
$$\lim_{x \to -2} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$$
con esto $x = -2$ e $x = 2$ son asintotas verticales.
- Horizontales:
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$
Por lo tanto no hay asintotas horizontales
- Oblicuas:
-Para $x \to \infty$:
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4} \cdot x} = 1$$
$$n = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$$
$y = x$ es una asintota oblicua.

  -Para $x \to -\infty$:
$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4} \cdot x} = -1$$
$$n = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} - x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$$
$y = -x$ es una asintota oblicua. Como conclusión tenemos que las asintotas oblicuas son:
$$y_1 = x \qquad y_2 = -x$$

Finalmente el grafico de la función sera:



7. Si a y b son números positivos, encuentre el máximo de la función $f(x) = x^a(1-x)^b$ en el intervalo $x \in [0,1]$.**(I2-2018-2)**

Solución: Para encontrar el maximo, primero debemos derivar la funcion:

$$f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1}$$

$$f'(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a - x(a+b))$$

Lo que debemos hacer ahora es $f'(x) = 0$, lo que nos lleva a

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = \frac{a}{a+b}$$

Ahora lo que debemos hacer es evaluar la función en cada uno dde los puntos y sabremos cual es el maximo de la función en el intervalo. Lo que resulta:

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(\cdot\frac{b}{a+b}\right)^b$$

Nótese que $0 < \dfrac{a}{a+b} < 1$, por lo que el punto crítico está en el interior del intervalo $[0,1]$. Comparando los valores de f en los tres puntos encontrados anteriormente, y como a y b son positivos, el valor máximo de f es:

$$x_3 = \frac{a}{a+b} \qquad f(x_3) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(\cdot\frac{b}{a+b}\right)^b$$

8. Considere la función **(I2-2018-2)**

$$f(x) = xe^{(1/x)}$$

   (a) Determine las asíntotas de f.
   (b) Determine intervalos de monotonía y, en caso de existir, los extremos locales de f.
   (c) Determine intervalos de concavidad y, en caso de existir, los puntos de inflexión

Solución:
a)Para las asintotas debemos verlas una por una:

- Verticales:
$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$$
Para este limite notamos que se forma $0 \cdot \infty$, entonces debemos hacer es formar la forma en que logremos tener una forma de aplicar H'opital de la siguiente manera:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x}$$
el último de estos tiene la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$ luego por la regla del H'opital tenemos que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2 \cdot e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$
por lo tanto la recta $x = 0$ es asíntota vertical.
- Horizontales:
$$\lim_{x\to \pm\infty} xe^{1/x} = \pm\infty$$
- Oblicuas: Por otra parte tenemos que
$$m = \lim_{x\to \pm\infty} e^{1/x} = 1$$
$$n = \lim_{x\to \pm\infty} xe^{1/x} - x = \lim_{x\to \pm\infty} x(e^{1/x} - 1)$$
Ahora como tenemos al igual que en la asintot vertical un limite de la forma $0 \cdot \infty$, formamos el limite para poder usar H'opital de $\dfrac{0}{0}$:
$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{-1/x^2 \cdot e^{1/x}}{-1/x^2} = 1$$
por lo tanto $y = x + 1$ es asíntota oblicua.

b) Para determinar la monotonia de una función debemos derivarla y ver los cambios de signo:
$$f'(x) = e^{1/x} \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Los puntos criticos de la funcion:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

Ahora debemos hacer la tabla pero ver la monotonia:

	$-\infty, 0$	$0, 1$	$1, \infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
$e^{1/x}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

por lo tanto :

- Creciente en $x \in (-\infty, 0)$.
- Decreciente en $x \in (0, \infty)$.

Con esto tenemos que $x_1 = 0$ es un maximo local y $x_2 = 1$ un minimo local.
c) Determine intervalos de concavidad y, en caso de existir, los puntos de inflexión. Solución:

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

- cóncava hacia arriba en $x \in (0, 1)$.
- cóncava hacia abajo en $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

9. Determine los valores de a, b, $c \in \mathbb{R}$ de modo que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ posea un máximo local en $x = 3$, un mínimo local en $x = -1$ y un punto de inflexión en $(1, 11)$. **(I2-2017-2)**

Solución: Tenemos que $x = 3$, $x = -1$ determinan, el máximo y mínimo local, por lo tanto son puntos criticos que cumplen con:

$$f'(3) = f(-1) = 0$$

Entonces debemos derivar la $f(x)$, despues reemplazar los valores y igualarla a 0

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$27a + 6b + c = 0, 3a - 2b + c = 0$$

Ahora, tenemos 2 ecuaciones, pero 3 incognitas, tenemos dos formas de conseguir una tercera:

- Por enunciado se cumple que $f(1) = 11$, donde podemos formar:

$$a + b + c = 11$$

- Como sabemos que se cumple que el punto $(1, 11)$ es un punto de inflexión de f, lo que implica que

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 6a + 2b = 0$$

Con esto, logramos formar 3 ecuaciones con 3 incognitas de dos formas, por lo que al momento de resolverlos la solución es:

$$a = -1, b = 3, c = 9.$$

Es decir la función pedida es

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$$

notemos que $f(1) = 11$ y que $f''(x) = 6(-x + 1)$ luego

$$f''(3) = -12 < 0, f''(-1) = 12 > 0$$

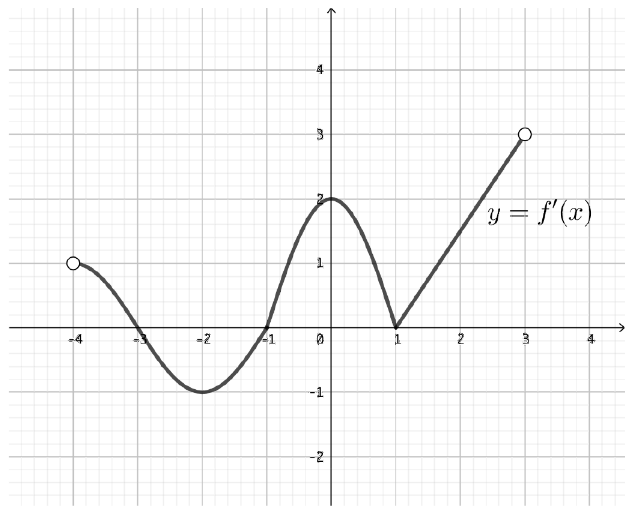
con lo cual se verifica que $x = 3$ y $x = -1$ determinan respectivamente valores máximos y minimos locales de f.

10. Verdadero o falso:

-Si las gráficas de las funciones f, g tienen puntos de inflexión en $x = a$ entonces la función $f \cdot g$ posee un punto de inflexión en $x = a$ **(I2-2017-2)**

Falso, ya que podemos considerar las funciones $f(x) = x^3, g(x) = -x^3$. Ambas funciones poseen un punto de inflexión en $x = 0$ sin embargo $f(x) \cdot g(x) = -x^6$ en $x = 0$ no.

11. Sea f una función derivable en $]-4,3[$ y tal que el gráfico de su derivada es el de la figura adjunta.**I2-2019-2** Determine dónde se alcanzan los extremos locales de f y los puntos de



inflexión. NOTA: Para referirse a un punto de la grafica de f cuya abscisa sea a, escriba $(a, f(a))$.

Teniendo el grafico de $f'(x)$ tenemos que ver cuales son los candidatos a ser puntos extremos, estos seran donde suceda que $f'(x) = 0$ y vemos que esto sucede para:

$$f'(-3) = f'(-1) = f'(1) = 0$$

Con esto tenemos que $x = -3, x = -1$ y $x = 1$ son posibles puntos donde se obtienen los extremos locales. Ahora llegando al siguiente paso haremos la tecnica de la tabla:

	$-\infty, -3$	$-3, -1$	$-1, 1$	$1, \infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

Con esto podemos concluir lo siguiente:

- $x = -3$ es un extremo local, máximo.
- $x = -1$ es un extremo local, mínimo.
- $x = 1$ es solamente un punto crítico.

Luego de esto tenemos los puntos de Inflexión, que son cuando se cumple que $f''(x) = 0$ donde esto se cumple en los puntos de $x = -2$ e $x = 0$.

2.5 L'Hópital

Durante la sección de limites, muchas veces se encontraron con limites que al ser evaluados daban $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Por lo que ahora veremos la regla de L'hopital para evaluar de forma mas rapida este tipo de problemas, esta regla se basa en que si tengo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Uno puede derivar $f(x)$ y $g(x)$ para nuevamente evaluar el limite. En caso de no llegar a un valor y quedar de una forma indeterminada $0/0$ o ∞/∞, se puede ocupar L'Hopital hasta que se llegue a un valor constante(Siempre que al evaluar la fracción quede como una de las dos formas indeterminadas que se permiten usar L'Hopital).

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=...=C$$

Tip, muchas veces se encontraran con limites que al evaluarse, son de la forma

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$$

Por lo que aca no podemos usar L'Hopital, pero si usamos algebra podremos llegar a una forma indeterminada que nos permita usar la L'Hopital:

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Donde notamos que aca si podemos usar L'Hopital, a pesar de que en un principio no se podia usar logramos adaptar el limite de tal forma de poder usar la regla. Tambien pueden encontrarse con otro tipo de problemas, pero siempre intentar de llevar a una forma de fracción que al evaluarse de $0/0$ o ∞/∞.

---

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot(x))^{\sin(x)}$ **(I2-2010-1)**

Para este ejercicio, no es aplicar L'Hopital directamente, primero debemos aplicar algebra para asi, lograr formar la fracción que al evaluarse se indetermine. Para esto nos basaremos en la siguiente regla:

$$1=e^{\ln(1)}$$

Ahora:

$$\cot(x)^{\sin(x)}=e^{\ln(\cot(x)^{\sin(x)})}=e^{\sin(x)\cdot\ln(\cot(x))}$$

Con esto tendremos que

$$\lim_{x\to 0}(\cot(x))^{\sin(x)}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin(x)\cdot\ln(\cot(x))}$$

Por leyes de los limites podemos hacer:

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\sin(x)\cdot\ln(\cot(x))}=e^{\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\cdot\ln(\cot(x))}$$

Entonces resolveremos el limite y luego elevaremos a e el valor. Notamos que sucede un caso familiar al Tip explicado al principio de la sección, por lo que la usaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0^+} \sin(x) \cdot \ln(\cot(x)) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\cot(x))}{1/\sin(x)}$$

Ocupamos la regla de L'Hopital y notamos que podemos evaluarlo llegando a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{-\cot(x)} \cdot \csc^2(x)}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(x) \cdot \csc(x)}{\cot(x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Finalmente este valor debemos elevarlo a e y asi tendremos el valor del limite solicitado inicialmente:

$$\lim_{x \to 0^+} (\cot(x))^{\sin(x)} = e^0 = 1$$

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)^2}{1 - \cos(3x)}$ **(I2-2015-1)**

A diferencia del limite anterior aca debemos llegar y aplicar la regla de L'Hopital ya que al evaluarlo este es de la forma 0/0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(x)^2}{1 - \cos(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \arcsin(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3 \sin(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2} \cdot 3 \sin(3x)}$$

Con esto notamos que si evaluamos, nuevamente tendremos 0/0 entonces aplicamos L'Hopital nuevamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \arcsin(x)}{\sqrt{1 - x^2} 3 \sin(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3 \cdot (3 \cos(3x) \sqrt{1 - x^2} - x \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin(3x))}$$

Notamos que en este caso si es posible evaluar el limite y llegar a un valor que seria:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3 \cdot (3 \cos(3x) \sqrt{1 - x^2} - x \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin(3x))} = \frac{2}{9}$$

3. Determine todos los valores de a y b de modo que se cumpla: **(I2-2021-1)**

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(ax)}{x^2} + \frac{2}{x} + b \right) = -3$$

Primero tenemos que
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)+2x+bx^2}{x^2}\right)$$
Se indetermina de la forma 0/0, por lo que podemos usar la regla de L'Hopital:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a\cos(ax)+2+2bx}{2x}\right)$$
Aca notamos que el denominador de la fracción se va a 0 entonces con el numerador debe suceder lo mismo para asi lograr ocupar L'Hopital nuevamente, evaluamos el numerador donde nos da:
$$\lim_{x\to 0} a\cos(ax)+2+2bx = a+2=0 \Rightarrow a=-2$$
Con podemos usar nuevamente L'Hopital:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\cos(-2x)+2+2bx}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-4\sin(-2x)+2b}{2}\right)$$
Es bastante obvio que ahora el denominador no se indefinira, por lo que ahora evaluamos el limite y lo igualamos al valor que nos pedian que cumpliera inicialmente:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-4\sin(-2x)+2b}{2}\right)=\frac{2b}{2}=-3$$
Dondde con esto tendremos que
$$b=-3$$
Rescribiendo el limite inicial, hubiera sido de la forma:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(-2x)}{x^2}+\frac{2}{x}-3\right)=-3$$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ **(I2-2015-1)**

Para este ejercicio debemos usar la propiedad de $1 = e^{\ln(1)}$ con el fin de poder usar la propiedad de los logaritmos:

$$x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^{\ln\left(x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}}\right)} = e^{\dfrac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}}$$

Luego de esto podemos usar las leyes de los limites que nos permiten

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}}$$

Aca tenemos un limite que es de la forma de $\dfrac{\infty}{\infty}$, donde con esto podemos usar L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x\cdot e^x}$$

Este es nuevamente indeterminado, solo que de la forma $\dfrac{0}{0}$, por lo que podemos aplciar L'Hopital nuevamente y notamos que si se puede evaluar el limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x + xe^x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Con este resultado, debemos elevarlo a e y tendremos el valor del limite inicial:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}} = e$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$ **(I2-2016-1)**

Notamos que tal como el Tip incial tenemos un limite de la forma de $0\cdot\infty$, por lo que debemos hacer un juego de algebra de la siguiente manera:

$$e^{-x}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{1/e^{-x}} = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

Con esto tendremos el limite de la forma de ∞/∞, por lo que podemos usar L'Hopital y veremos que nos da un valor:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^x} = 0$$

6. $\lim_{x\to 0}\left(\cot(x) - \dfrac{1}{x}\right)$ **(I2-2016-1)** y **(I2-2017-1)**

Para este ejercicio debemos desarollar las fracciones de la siguiente manera:

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$$

Donde notamos ahora que si lo llevamos al limite este de es la forma de 0/0, por lo que podemos aplciar L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)}{\sin(x) + x\cos(x)}$$

Nuevamente tenemos un limite de la forma 0/0, aplicamos L'Hopital y lograremos evaluar el limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)}{\sin(x) + x\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x) - x\cos(x)}{2\cos(x) - x\cos(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = 0$$

7. Calcular $\lim_{x\to 0^+}(\sin(x))^{\tan(x)}$ **(I2-2011-1)**

Para este ejercicio debemos usar la propiedad de $1 = e^{\ln(1)}$ con el fin de poder usar la propiedad de los logaritmos:

$$\sin(x)^{\tan(x)} = e^{\ln(\sin(x)^{\tan(x)})} = e^{\tan(x)\cdot\ln(\sin(x))}$$

Ahora llevandolo al limite notamos que tendremos un limite como el del tip, por lo que debemos hacer algebra en este:

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin(x))}{1/\tan(x)}}$$

Con esto, notamos que tenemos un limite de la forma ∞/∞ entonces aplicamos L'Hopital y lo evaluamos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{-\csc^2(x)} = \lim_{x\to 0^+}\cos(x)\cdot\sin(x) = 0$$

Finalmente el valor del limite inicial, sera:

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin(x))^{\tan(x)} = e^0 = 1$$

8. $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{3x+1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}\right)$ **(I2-2017-2)**

Desarrolamos la resta, de tal forma de dejarla como una sola fracción

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x\sin(x) + \sin(x) - x}{x\sin(x)}$$

De esta manera es mas facil notar que es un limite de la forma de 0/0, aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\sin(x) + 3x\cos(x) + \cos(x) - 1}{\sin(x) + x\cos(x)}$$

Nuevamente aplicamos L'Hopital, ya que es de la forma de 0/0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{6\cos(x) - 3x\sin(x) - \sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)}$$

Logramos ver que ahora no se indetermina y es posibl evaluar el limite, dando como resultado:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x+1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{6\cos(x) - 3x\sin(x) - \sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = \frac{6}{2} = 3$$

9. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(2\arctan(x^2) - \pi)$ **(I2-2011-tav)**

Nuevamente debemos jugar con el algebra, ya que tenemos un limite de la forma de $\infty \cdot 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\arctan(x^2) - \pi}{1/x^2}$$

Con esto tenemos un limite de la forma 0/0, donde aplicando L'Hopital llegamos a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{1+x^4}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-8x^4}{1+x^4}$$

Donde en este caso, no es necesario Ocupar L'Hopital para calcular el valor del limite:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-8x^4}{1+x^4} \cdot \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}} = -8$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx}$ **(I2-2018-1)**

Para este ejercicio debemos usar la propiedad de $1 = e^{\ln(1)}$ con el fin de poder usar la propiedad de los logaritmos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^b x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\right]}$$

Por leyes de los limites y la propiedades de los logaritmos podemos hacer lo siguiente:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$

Notemos que el limite es $\infty\cdot 0$, entonces haremos lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{1/bx}$$

Ahora tenemos un limite de la forma de $0/0$ aplicando L'Hopital llegamos a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{1/bx} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{bx^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{abx^2}{x(x+a)}$$

Con esto tenemos un limite, que es resolvible de la forma clasica vista en la primera sección que seria:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{abx}{x+a}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = ab$$

Finalmente debemos elevar este resultado y tendremos el valor el limite inicial:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

11. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-x}{\arcsin(x)-x}$ **(I2-2012-1)**

Este limite es de la forma de $0/0$, aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\arcsin(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}$$

Reescribimos el resultado

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x) - 1) \cdot \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}}$$

Notamos que este limite nuevamente es de la forma de $0/0$, entonce aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(-\sin(x) \cdot \sqrt{1-x^2}) - (\cos(x) - 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)(1-x^2) - (\cos(x) - 1)x}{x}$$

Debemos aplicar nuevamente L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)(1-x^2) + 2x\sin(x) + x\sin(x) - (\cos(x) - 1)}{1}$$

Finalmente podemos evaluar el limite y llegar al valor:

$$\lim_{x\to 0} x^2\cos(x) - 2\cos(x) + 3x\sin(x) + 1 = -2 + 1 = -1$$

12. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} xe^{1/x}$ **(I2-2018-2)**

Es de la forma de $0 \cdot \infty$ por lo que debemos usar algebra para lograr aplicar L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{1/x}$$

Aplicando L'Hopital, podemos evaluar el limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(-1/x^2) \cdot e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{1/x} = \infty$$

13. $\lim\limits_{x\to 5} \tan\left(\frac{\pi x}{10}\right) \ln\left(2 - \frac{x}{5}\right)$ **(I2-2012-TAV)**

A primera vista, notamos que el limite es de la forma $0 \cdot \infty$, por lo que haciendo lo siguiente:

$$\lim_{x \to 5} \tan\left(\frac{\pi x}{10}\right) \ln\left(2 - \frac{x}{5}\right) = \lim_{x \to 5} \frac{\ln\left(2 - \frac{x}{5}\right)}{\cot(\frac{\pi x}{10})}$$

Con esto, tenemos un limite de la forma $0/0$ que nos permite usar L'Hopital:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\ln\left(2 - \frac{x}{5}\right)}{\cot(\frac{\pi x}{10})} = \lim_{x \to 5} \frac{\dfrac{5}{10 - x} \cdot \dfrac{-1}{5}}{-\csc^2\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)\left(\dfrac{\pi}{10}\right)}$$

Este limite final es posible evaluarlo llegando a:

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\dfrac{1}{10 - x}}{\csc^2\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)\left(\dfrac{\pi}{10}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{1 \cdot \frac{\pi}{10}} = \frac{2}{\pi}$$

El cual sera el valor del limite solicitado

14. Determine todos los valores de $a \in \mathrm{R}$ tales que:**(I2-2019-1)**

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x - a}{x + a}\right)^x = e$$

Para este ejercicio debemos usar la propiedad de $1 = e^{\ln(1)}$ con el fin de poder usar la propiedad de los logaritmos:

$$\left(\frac{x - a}{x + a}\right)^x = e^{\ln\left[\left(\frac{x - a}{x + a}\right)^x\right]} = e^{x \ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right)}$$

Con esto tenemos que el limite es de la forma de $\infty \cdot 0$ entonces con algebra se podra llegar a una forma de $0/0$ y aplicar L'Hopital:

$$\lim_{x \to \infty} x \ln\left(\frac{x - a}{x + a}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{1/x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{2a}{(x+a)^2}}{-1/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2ax^2}{(x - a)(x + a)}$$

Notamos que este ultimo limite es calculable por las tecnicas de la sección de limites:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-2ax^2}{(x - a)(x + a)} \cdot \frac{1/x^2}{1/x^2} = -2a$$

Con esto elevamos a e el valor del limite y lo igualamos con la condición inicial:

$$e^{-2a} = e \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin(x)}}{x^3}$ **(I2-2013-1)**

El limite es de la forma de 0/0 por lo que aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a)a^x - \ln(a)\cos(x)a^{\sin(x)}}{3x^2}$$

Nuevamente es de la forma de 0/0 por lo que aplicamos L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(a)a^x - \ln^2(a)\cos^2(x)a^{\sin(x)} + \ln(a)\sin(x)a^{\sin(x)}}{6x}$$

Nuevamente es de la forma de 0/0, aplicamos L'Hopital y lograremos evaluar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^3(a)a^x - \ln^3(a)\cos^3(x)a^{\sin(x)} + 3\ln^2(a)\sin(x)\cos(x)a^{\sin(x)} + \ln(a)\cos(x)a^{\sin(x)}}{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin(x)}}{x^3} = \frac{\ln(a)}{6}$$

16. Calcule $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)}$ **(I2-2018-TAV)**

Este limite es de la forma de 0/0, por lo que por L'Hopital:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x/2)/2 - \sin(x)}{2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x/2)/2 - \sin(x)}{\sin(2x) - \sin(x)}$$

Nuevamente el limite es de la forma indeterminada de 0/0 entonces por L'Hopital:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{-\sin(x/2)/4 - \cos(x)}{2\cos(2x) - \cos(x)}$$

Ahora podemos evaluar el limite:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{-\sin(x/2)/4 - \cos(x)}{2\cos(2x) - \cos(x)} = \frac{-1/4 + 1}{3} = \frac{1}{4}$$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^h - (1+h)}{h^2}$ **(I2-2017-2)**

Este limite es de la forma de 0/0, donde si aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^h - (1+h)}{h^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^h - 1}{2h}$$

Donde aca podemos volver a usar L'Hopital ya que es de la forma 0/0

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^h - 1}{2h} = \lim_{x\to 0} \frac{e^h}{2}$$

Evaluando llegamos al resultado que es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}$$

2.6 Optimización

Dentro de esta sección se les plantearan problemas que deben modelar mediante ecuaciones y funciones, donde aca deben lograr encontrar puntos máximos y mínimos para esta función que plantearon. Como recomendación les digo que hagan los siguientes pasos:

1. **Comprender que es lo que me estan pidiendo**, donde pueden plantearse algunas preguntas como: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?

2. **Hacer un diagrama/dibujo del problema** puede llegar a ser util para identificar ecuaciones y la función a modelar.

3. **Asignar variables o parametros** a ciertas cosas, como lo pueden ser la altura h, area como A, etc...

4. **Llevar estas variables a una función**, final que tenga una variable que debe ser la variable que buscamos maximizar o minimizar.

5. **Aplicar las tecnicas explicadas en la sección de máximos y mínimos**, aplicandola para llegar a la solución pedida.

---

1. De todos los rectángulos de diagonal $2\sqrt{2}$, determine el perímetro máximo que pueden tener estos. **(I2-2016-1)**

Definimos x e y como los lados del rectángulo, donde notamos que la diagonal estaría dada por:

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2}) = 8 \tag{8}$$

y la fórmula que nosotros buscamos maximizar es $P(x, y) = 2x + 2y$. Por lo que tenemos de despejar una variable respecto a la otra con la ecuación (8), donde lo hacemos de la siguiente manera:

$$y = \sqrt{8 - x^2} \Longleftrightarrow P(x) : 2x + 2 \cdot \sqrt{8 - x^2}$$

Por lo que ahora procedemos a derivar nuestra función $P(x)$ respecto a x y buscando sus puntos críticos:

$$P^{'}(x) = 2 + \frac{-2x}{\sqrt{8 - x^2}} = \frac{2\sqrt{8 - x^2} - 2x}{\sqrt{8 - x^2}} \longrightarrow P^{'}(x) = 0$$

Notamos que los valores cuando se cumple lo anterior es en $x = (\pm 2, \pm 2\sqrt{2})$, eliminamos inmediatamente 2, que son los valores negativos ya que no está en el dominio de nuestra función. Enseguida para comprobar cuál de los dos puntos un máximo ocupamos el método de la segúnda derivada:

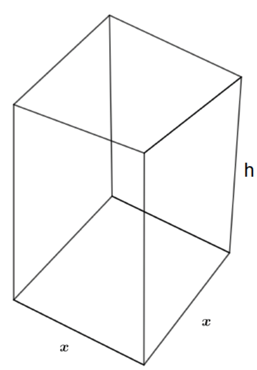
$$P^{''}(x) = \frac{-16}{(8 - x^2)3/2} < 0$$

Como es menor a 0 para x $\in \mathbb{R}$, por lo que tenemos que $P(x)$ es una función cóncava hacia abajo, por lo que el máximo absoluto de la función será en $x = 2$, por lo que calculamos y y el perímetro:

$$(2)^2 + y^2 = 8 \longrightarrow y = 2; \quad P(2,2) = 8$$

2. Se necesita construir una caja de base cuadrada, sin tapa, que debe tener un volumen de $32000cm^3$.**(I2-2021-1)**

Primero con los datos que nos entregan debemos hacer un dibujo/diagrama de la situación:



Con este dibujo/diagrama podemos realizar la siguiente relación, junto con la función que queremos minimizar (definimos x=lado de la base, h=altura):

$$A(x,h) = x^2 + 4xh; \quad V(x,h) = x^2 \cdot h = 32000$$

Enseguida para dejar el área solo en función de una variable despejamos h de $V(x,h)$: $h = \dfrac{32000}{x^2}$. Lo cual lo remplazamos en la función de área, donde luego de esto tenemos que derivar y encontrar sus puntos críticos:

$$A(x) = x^2 + \frac{(4x)32000}{x^2} \longrightarrow A^{'}(x) = 2x - \frac{128000}{x^2} = 0$$

$$2x^3 = 128000 \longrightarrow x = 40$$

Teniendo el único punto critico procedemos a ver si es un máximo o mínimo, mediante la segúnda derivada:

$$A^{''}(x) = 2 + \frac{256000}{x^3}; \quad A^{''}(40) = 2 + 4 > 0$$

Con lo que podemos concluir que es un mínimo. Ahora solo queda calcular h, con los valores de x:

$$h = \frac{32000}{40^2} = 20; \quad x = 40$$

3. Se debe construir un contenedor rectangular sin tapa de $10m^3$. La longitud de su base es dos veces el ancho. El material para la base cuesta 10 por metro cuadrado y el material para los costados cuesta 6 por metro cuadrado. Encuentre cuál es el menor costo que puede tener dicho. $(I3-2018-TAV)$

Notamos que podemos escribir el volumen con la siguiente fórmula:

$$V(x,h)=2x^2h=10 \longrightarrow h=\frac{5}{x^2}$$

Junto con que el Costo (Área·costo por metro) se puede expresar de la siguiente manera, y remplazando el despeje de h llegamos a :

$$C(x,h)=20x^2+6\cdot(4xh+2xh) \longrightarrow C(x)=20x^2+\frac{180}{x}$$

Por lo que ahora derivamos $C(x)$ y buscamos sus puntos críticos:

$$C^{'}(x)=40x-\frac{180}{x^2} \longrightarrow C^{'}(x)=0 \Longleftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

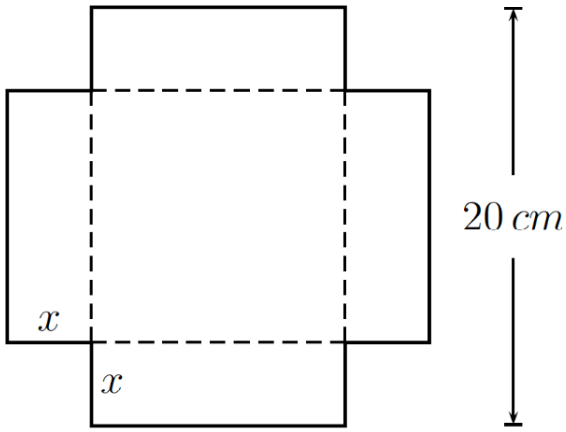
Comprobamos que es un punto mínimo con la segúnda derivada:

$$C^{''}(x)=40+\frac{369}{x^3} \longrightarrow C^{''}(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}>0$$

Por lo que Con esto comprobamos que es un punto mínimo y el costo sería:

$$C(\sqrt[3]{\frac{9}{2}})=20(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}^2+\frac{180}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}}}$$

4. Una lámina cuadrada tiene $20cm$ de lado. En sus esquinas se recortan cuadrados iguales y se doblan los bordes resultantes en un ángulo recto hacia arriba, formando una caja. ¿Cuál es el recorte que produce la caja de volumen máximo?



Lo que debemos hacer acá es primero definir la función que nos determinaría el volumen, lo cual lo hacemos definiendo también los lados que tendría nuestra caja:

$$V = x^2 * y$$

Ahora y lo debemos dejar expresado en forma de x, lo que podemos hacer debido a que se cumple la siguiente ecuación:

$$2x + y = 20 \to y = 20 - 2x$$

Por lo que ahora teniendo el volumen procedemos a derivarlo:

$$V(x) = x^2(20 - 2x) \to V^{'}(x) = 40x - 6x$$

Enseguida lo que debemos hacer es identificar los dos x que nos darían $V^{'}(x) = 0$ que serían $x = 0$ y $x = \frac{20}{,}3$. **¿Pero cómo logramos identificar cuáles son los puntos máximos y mínimos?**, podemos hacerlo mediante el método de la segúnda derivada(También pude ocupar el método de la tabla, viendo el signo de la primera derivada) y ver su signo para estos valores:

$$V^{''}(x) = 40 - 12x \to V^{''}(0) = 40,\ V^{''}(\frac{20}{3}) < 0$$

Con esto llegamos a la conclusión de que el punto $x = 0$ es un mínimo y el $x = \dfrac{20}{3}$ siendo este el recorte necesario.

5. Determine el punto sobre la recta $y = 2x + 3$ que está más cerca del origen.

Acá lo que debemos hacer es minimizar finalmente la función distancia que es:

$$D = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$$

Pero notamos que al final maximizar la función D, equivalente a maximizar la función:

$$D \rightarrow f(x, y) = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$$

Por lo que procedemos a hacer esto, donde $(x_o, y_o) = (0, 0)$, pero ahora debemos dejar la variable y respecto a x lo que hacemos remplazando la recta que nos dan:

$$f(x, y) = (x)^2 + (y)^2 \rightarrow f(x) = x^2 + (2x + 3)^2$$

Finalmente encontrar el mínimo derivamos la función y encontramos su punto mínimo:

$$f^{'}(x) = 2x + 2 \cdot 2(2x + 3) \rightarrow f^{'}(x) = 0 \rightarrow x = \frac{-6}{5}$$

Para ver si es un punto mínimo, lo haremos con la segúnda derivada:

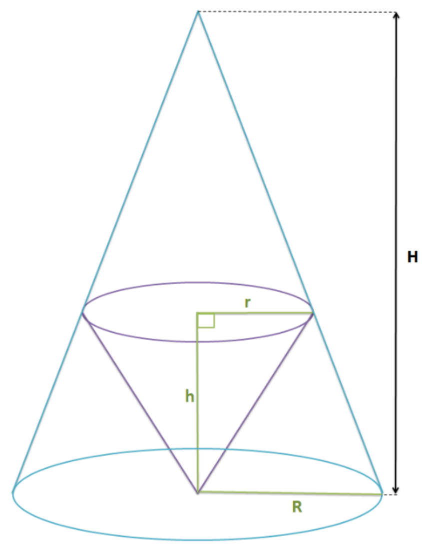
$$f^{''}(x) = 2 + 4 > 0 \rightarrow x = \frac{-6}{5} \leftrightarrow min$$

Por lo que la distancia mínima sería:

$$D = \sqrt{\left(\frac{-6}{5}\right)^2 + \left(2\left(\frac{-6}{5}\right) + 3\right)^2} \rightarrow D = \sqrt{\frac{117}{5}}$$

6. Un cono recto de altura h está inscrito en otro cono recto de mayor tamaño cuya altura es de H de manera que su vértice está en el centro de la base del cono más grande. Determine la altura h que maximiza el volumen del cono inscrito. **(I3-2018-2)**

Debemos primero realizar un diagrama de la situación para lograr hacer el análizis correcta:



Ahora debemos hacer alguna relación con las variables que tenemos y la función que queremos maximizar:

$$V(h,r) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Como tenemos dos variables debemos dejar un en expresión de las otras, por lo que hacemos thales, entre el triángulo que se forma del triángulo grande y el pequeño quedándonos la siguiente relación:

$$\frac{r}{H-h} = \frac{R}{H} \rightarrow h = \frac{H(R-r)}{R}$$

Enseguida remplazamos en V y derivamos para ver el valor máximo:

$$V(r) = \frac{\pi H(R-r)}{3R} \rightarrow V^{'}(h) = \frac{\pi H r(2R-3r)}{3R}$$

$$V^{'}(r) = 0 \rightarrow r = 0, r = \frac{2R}{3}$$

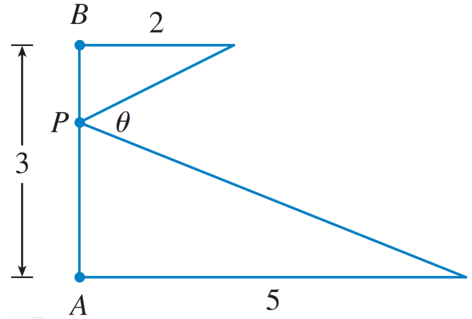
Ahora para ver si es un punto máximo vemos la segúnda derivada:

$$V^{''}(r) = \frac{\pi H(2R-6r)}{3R} \rightarrow V^{''}(0) > 0, V^{''}(\frac{2R}{3}) < 0$$

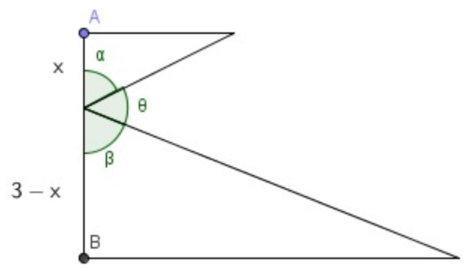
Por lo que notamos que es un punto máximo es con $r = \frac{2R}{3}$ y remplazando en la relación de Thales llegamos a:

$$h = \frac{H}{3}$$

7. ¿Cuánto debe medir el segmento AP de modo que se maximice el ángulo θ?.



Primero dividimos los ángulos que comparte θ, donde nos quedaría:



Enseguida notamos que se cumple la siguiente ecuación:

$$180^o = \theta + a + b \to \theta = 180 - a - b$$

Pero notamos que debemos dejar θ, en alguna expresión por lo que según podemos analizar cada triángulo llegamos a:

$$\tan(a) = \frac{2}{x} \to a = \arctan\frac{2}{x} \quad ; \tan(b) = \frac{5}{3-x} \to b = \arctan\frac{5}{3-x}$$

Remplazando esto en la ecuacioń llegamos a una función de θ que debemos derivar para ver máximo dependiendo de x:

$$\theta(x) = 180 - \frac{2}{x} - \frac{5}{3-x} \to \theta'(x) = -\left(\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{1+\frac{25}{(3-x)^2}} \cdot \frac{5}{(3-x)^2}\right)$$

Ahora igualamos a 0 la derivada para ver cuáles son sus puntos máximos:

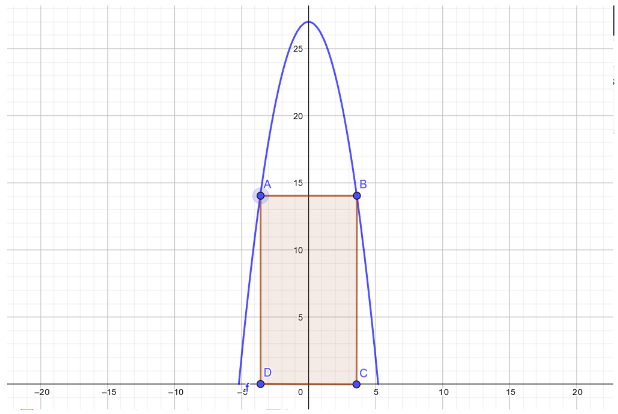
$$\theta'(x) = \frac{2}{x^2+4} - \frac{5}{9-6x+x^2+25} = 0 \to 5x^2 + 20 = 2x^2 - 12x + 68$$

$$3x^2 + 12x - 48 = 0$$

Acá les darán dos soluciones ($x \approx -6.472, 2.72$), deben tomar la positiva ya que el ángulo también debe serlo.

8. Hallar el área del rectángulo más grande con base inferior en el eje X y vértices superiores en la parábola $y = 27 - x^2$. **(I2-2017-1)**

Acá lo que primero, es hacer un bosquejo de la gráfica y el eje X:



Enseguida sabemos la ecuación de área:

$$A(x, y) = 2xy$$

pero debemos dejarla en x, por lo que remplazamos la función:

$$A(x) = 2x(27 - x^2) = 54x - 2x^3; \quad 0 < x < 3\sqrt{3}$$

Notar que tomamos el intervalo de x, ya que $y > 0$. Ahora procedemos a maximizar la función, por lo que derivando y calculamos sus puntos críticos:

$$A^{'}(x) = 54 - 6x^2 = 0 \longrightarrow A^{'}(x) = 0\,;\; x = 3$$

Enseguida comprobamos con la segúnda derivada:

$$A^{''}(x) = -12x \longrightarrow A^{''}(0) = 0,\; A^{''}(3) < 0$$

Por lo $x = 3$ es donde tendrá área máxima:

$$A(3) = 54(3) - 2(3^3) = 108$$

9. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono de altura h y radio basal r. **(I2-2009-2)**

10. Determine las dimensiones del trapecio de área máxima que puede ser inscrito en un semicírculo de radio r. **(I2-2013-tav)**