PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Ayudantía 13 - MAT1610

1. Use la regla de sustitución para determinar las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(4x)}{1+\cos^2(2x)}dx$

   (c) $\displaystyle\int \ln(\cos(x))\, tan(x)dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

   Solución:

   (a) Haciendo la sustitución $u = \arctan(\sqrt{x})$ se tiene que:
   $du = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $2du = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ y

   $$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int 2udu = u^2 + C = \left(\arctan\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 + C$$

   Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:
   Primero $u = \sqrt{x}$ y luego $t = \arctan(u)$

   (b) Haciendo la sustitución $u = 1 + \cos^2(2x)$ se tiene que:
   $du = -4\cos(2x)\operatorname{sen}(2x)dx = -2\operatorname{sen}(4x)dx$, es decir, $-\frac{du}{2} = \operatorname{sen}(4x)dx$ y

   $$\int \frac{\operatorname{sen}(4x)}{1+\cos^2(2x)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{\ln\left(|1+\cos^2(2x)|\right)}{2} + C = -\frac{\ln\left(1+\cos^2(2x)\right)}{2} + C$$

   Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:
   Primero $u = \cos(2x)$ y luego $t = 1 + u^2$

   (c) Haciendo la sustitución $u = \ln(\cos(x))$ se tiene que
   $du = -\frac{1}{\cos(x)}\operatorname{sen}(x)dx = -\tan(x)dx$ y

   $$\int \ln(\cos(x))\, tan(x)dx = -\int udu = \frac{u^2}{2} + C = -\frac{\left(\ln(\cos(x))\right)^2}{2} + C$$

   Nota: También se puede resolver aplicando dos veces la regla de sustitución:

   Primero escribir $\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, hacer $u = \cos(x)$ y luego $t = \ln(u)$

(d) Note que $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}$, entonces, haciendo la sustitución $u = e^{-x}$, se tiene que $du = -e^{-x}dx$ o $-du = e^{-x}dx$ y

$$\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos(u) + C = \arccos\left(e^{-x}\right) + C$$

2. (a) Si f es continua tal que $\displaystyle\int_0^9 f(x)dx = 4$, determine $\displaystyle\int_0^3 xf(x^2)dx$

   (b) Sea $g(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2(x+1)}$, demuestre que

$$\int_0^1 \frac{g'(x)dx}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \frac{\pi}{6}$$

Solución:

(a) Haciendo la sustitución $u = x^2$ se tiene que $du = 2xdx$, $\frac{1}{2}du = xdx$ y si $x = 0$ entonces $u = u(0) = 0$ y si $x = 3$ entonces $u = u(3) = 9$, por lo que

$$\int_0^3 xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^9 f(u)du = \frac{1}{2}4 = 2$$

(b) Haciendo la sustitución $u = g(x)$ se tiene que $du = g'(x)dx$ y si $x = 0$ entonces $u = g(0) = -\frac{1}{2}$ y si $x = 1$ entonces $u = g(1) = 0$, entonces

$$\int_0^1 \frac{g'(x)dx}{\sqrt{1-g^2(x)}} = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcsen}(0) - \text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

3. Suponga que $f : [3,5] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$\int_3^x f(t)dt = (x^2 - 4^2)\text{arcos}(4 - x)$$

Calcule:

(a) $\displaystyle\int_2^{5/2} 3f(2x)dx$

(b) $f(4)$.

Solución:

a) Considere la sustitución $u = 2x$, con eso $du = 2dx$, obteniedno que

$$\int_2^{5/2} 3f(2x)dx = \int_4^5 \frac{3}{2}f(u)du = \int_4^3 \frac{3}{2}f(u)du + \int_3^5 \frac{3}{2}f(u)du$$

del enunciado tenemos que

$$\int_4^3 \frac{3}{2}f(u)du = 0 \text{ y que } \int_3^5 \frac{3}{2}f(u)du = \frac{27}{2}\pi$$

obteniendo que

$$\int_2^{5/2} 3f(2x)dx = \frac{27}{2}\pi$$

b) Observe que derivando ambos lados de la igualdad dada tenemos que:

$$f(x) = 2x\text{arcos}(4-x) - (x^2 - 4^4)\frac{1}{1+(4-x)^2}$$

evaluando en $x = 4$ obtenemos que

$$f(4) = 8\text{arcos}(0) = 4\pi.$$

4. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$$

Solución:

Si realizamos la sustitución $u = (1-x)$, tenemos que $du = -dx$ obteniendo que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = -\int_1^0 (1-u)^a u^b du = \int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 (1-u)^a u^b du = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$$