PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Ayudantía 14 - MAT1610

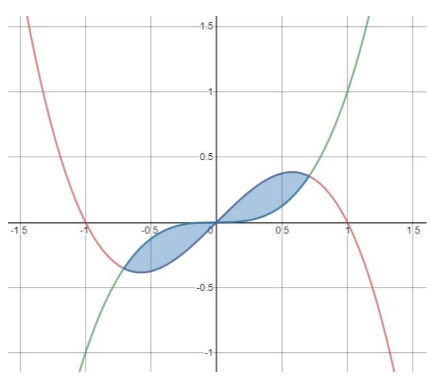
1. (a) Determine el área de la región comprendida entre las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = -x^3+x$.
   (b) Determine el área de la región R con $r = \{(x, y)|y \leq x^2 + 1 \wedge y \geq x^2 - 9 \wedge y \leq 3 - x\}$

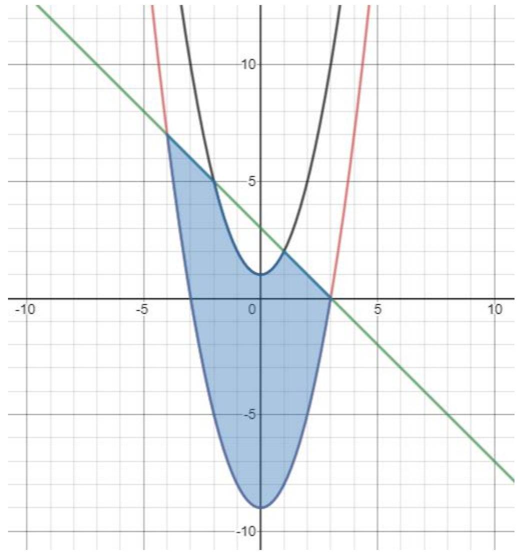
   Solución:

   (a) Note que cada función involucrada es una función impar, y $x^3 = -x^3 + x$ si $2x^3 - x = x(2x^2 - 1) = 0$, es decir, si $x = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0$, esto es, si $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Entonces, las funciones son impares y se intersectan en el origen y en los extremos de un intervalo simétrico respecto al origen, entonces el área A es:

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (-x^3 + x - x^3)dx \\ &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (-2x^3 + x)dx \\ &= 2\left(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 0\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Así, el valor del área es $\frac{1}{4}$ unidades de área.
   Idea gráfica:





(b) La región R se muestra en la figura

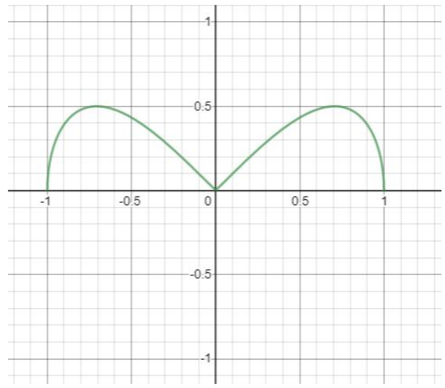
Note que $3-x=x^2-9 \Leftrightarrow x^2+x-12=0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=3$ y $3-x=x^2+1 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=1$
Entonces, una forma de calcular el área

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{3}(3-x-(x^2-9))dx - \int_{-2}^{1}(3-x-(x^2+1))dx \\ &= \int_{-4}^{3}(12-x-x^2)dx - \int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx \\ &= \left(12x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-4}^{3}\right) - \left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1}\right) \\ &= \frac{343}{6}-\frac{9}{2} \\ &= \frac{158}{3} \end{aligned}$$

El valor del área es $\frac{158}{3}$ unidades de área.

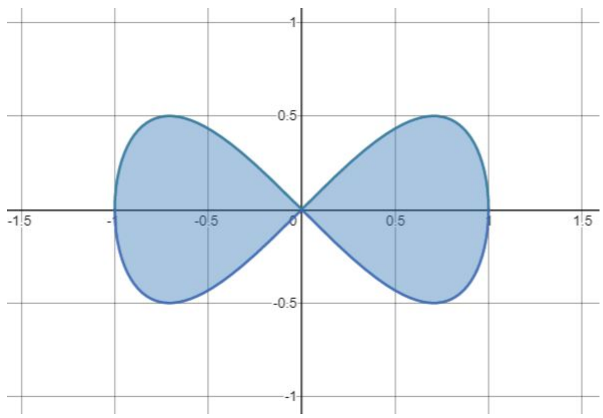
2. La gráfica dada en la figura corresponde a la función $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$. Determine el área comprendida entre las curvas asociadas a $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$ y $g(x) = -\sqrt{x^2 - x^4}$.

Solución:

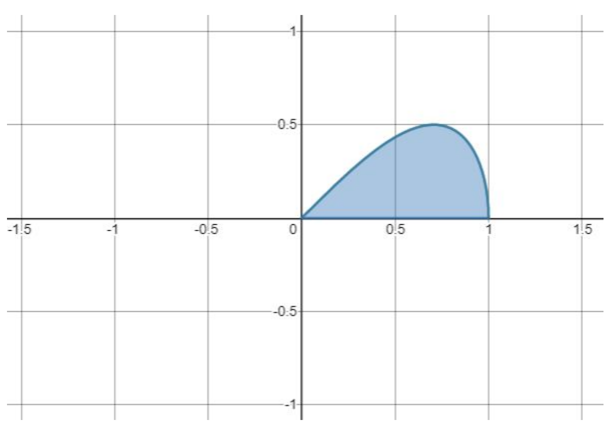


La región de interés está sombreada en la figura:

Notar que $f(x) = \sqrt{x^2 - x^4} = |x|\sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{x^2 - x^4} = -|x|\sqrt{1 - x^2}$ entonces el



dominio de ambas funciones es $[-1, 1]$. Dada la simetría con respecto ambos ejes coordenados, una manera de obtener el valor del área A es multiplicar por 4 el valor del área ubicada en el primer cuadrante, como:



$$A = 4\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}dx = 4\int_0^1 |x|\sqrt{1-x^2}dx = 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_1^0 (-2)x\sqrt{1-x^2}dx$$

Haciendo el cambio de variable $u = 1 - x^2$, $du = -2xdx$, se tiene que si $x = 0$ entonces, $u = 1$ y si $x = 1$ entonces, $u = 0$:

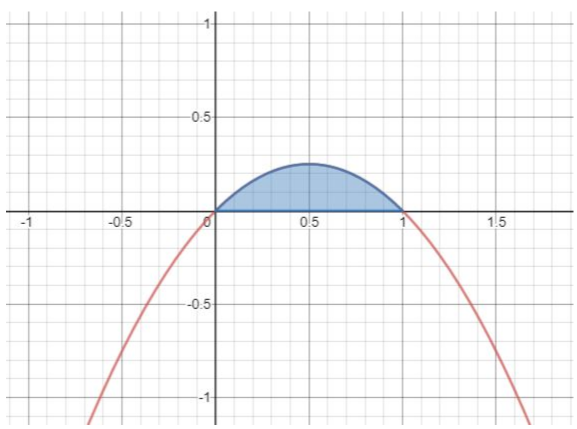
$$A = 2\int_0^1 \sqrt{u}du = 2\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}$$

3. Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x.
   (a) Determine el área de la región R.
   (b) ¿Existe una recta que pasa por el origen que divide a la región R en dos partes de igual área? ¿Cuál es la pendiente de la recta?

Solución:

(a) El área, A_R de la región R es:

$$A_R = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

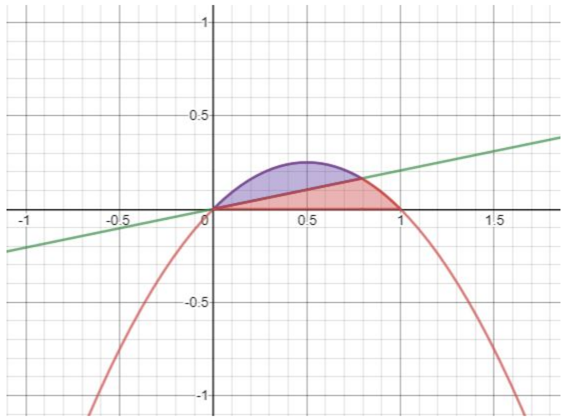


(b) La mitad del área es $\frac{1}{12}$. Si existe la recta solicitada, tiene ecuación del tipo $y = mx$. el valor de m debe ser positivo, para que pueda dividir la región en dos regiones de igual área y pasar por el origen. Sea (a, b) el punto de intersección de la recta y la parábola. Note que $m = \frac{b}{a}$, y que $b = a - a^2$, entonces, $m = \frac{a-a^2}{a} = 1 - a$

$$A_1 = \int_0^a \left(x - x^2 - mx\right)dx = \int_0^a \left(x - x^2 - (1-a)x\right)dx = \int_0^a \left(ax - x^2\right)dx$$

Así,

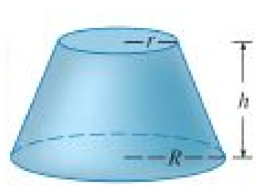
$$A_1 = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$



Entonces, para que el área de la región superior A_1, corresponda a la mitad del área, debe ocurrir que $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{12}$, es decir, $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Por lo tanto, El valor de la pendiente es $m = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

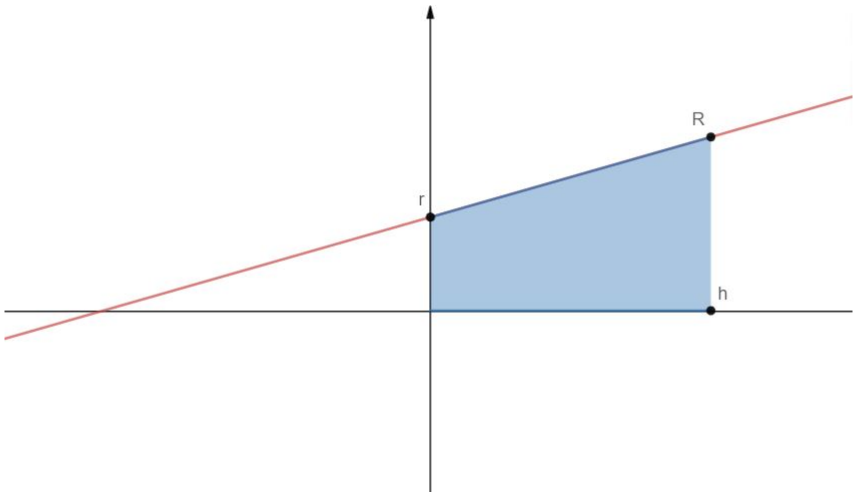
4. Calcular el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r, como se muestra en la figura.



Solución:
Note que el cono circular truncado puede obtenerse al rotar alrededor del eje x el área del trapecio de altura h, base menor r y base mayor R, como en la figura
Note el área del trapecio se asocia al área bajo la recta que pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, R), entre 0 y h. Dicha recta tiene ecuación $y = mx + r$ con $m = \frac{R-r}{h-0} = \frac{R-r}{h}$, entonces,

$$V = \int_0^h \pi(mx+r)^2 dx = \pi \int_0^h (mx+r)^2 = \pi \left. \frac{(mx+r)^3}{3m} \right|_0^h = \frac{(mh+r)^3}{3m} - \frac{(r)^3}{3m}$$

Por lo tanto,
$V = \frac{\pi}{3m}\left((mh+r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi}{3\frac{R-r}{h}}\left((R-r+r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3(R-r)}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$
Así, el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r es $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$ unidades de volumen.

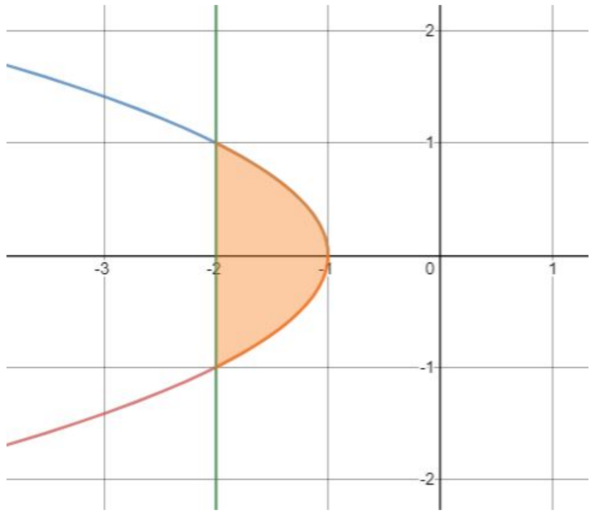


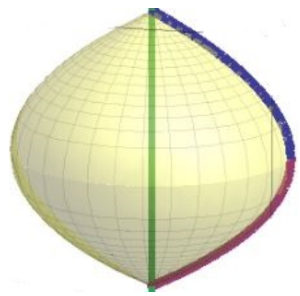
5. Determinar el volumen del sólido generado por la rotación del área limitada por las curvas asociadas a $-y^2 - 1 = x$ y la recta $x = -2$ alrededor de la recta $x = -2$

   Solución:
   Puntos de Intersección: $-y^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$, es decir, los puntos son $(-2, -1)$, $(-2, 1)$.

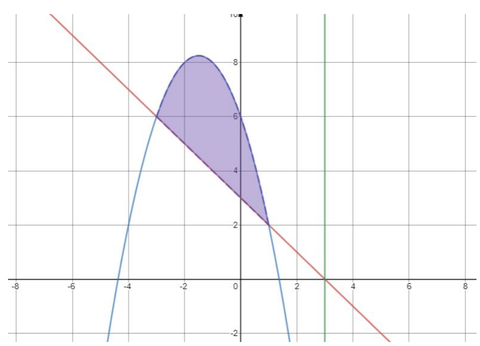
$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi(-y^2 - 1 - (-2))^2 dy \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} (-y^2 + 1)^2 dy \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} (y^4 - 2y^2 + 1) dy \\ &= \pi \left(\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^3}{3} + y \Big|_{-1}^{1} \right) \\ &= \left(\frac{16\pi}{15} \right) \end{aligned}$$

   Así el volumen es $\frac{16\pi}{15}$ unidades de volumen.
   Idea gráfica





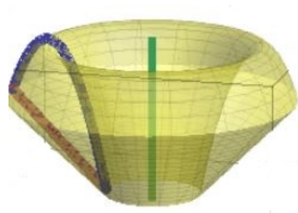
6. Hallar el volumen del sólido generado en la rotación del área limitada por la parábola $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $y = 3 - x$ alrededor de la recta $x = 3$.
   Solución:
   El área a rotar se muestra en la figura



Intersección entre las curvas:

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 6 = 3 - x &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Idea gráfica del sólido generado:



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-3x+6-(3-x)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-2x+3)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(-3x^2-6x+9+x^3+2x^2-3x)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(x^3-x^2-9x+9)\right) dx \\
&= 2\pi \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{9x^2}{2}+9x\right]\Bigg|_{-3}^{1} \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{9}{2}+9-\left(\frac{81}{4}+9-\frac{81}{2}-27\right)\right] \\
&= 2\pi \left[-\frac{80}{4}+\frac{72}{2}+27-\frac{1}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[43-\frac{1}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[\frac{128}{3}\right] \\
&= \frac{256\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Así, el volumen del sólido es $\frac{256\pi}{3}$ unidades de volumen.