PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Ayudantía 10 - MAT1610

1. (a) Estudie $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cosh(x)}{1-cos^2(x)}$.

   (b) Determine los valores de a para que

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$$

Solución

(a) Observe que $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \cosh(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \cos^2(x) = 0$ y

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cosh(x))'}{(1-cos^2(x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{(-\operatorname{senh}(x))}{2\cos(x)\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(-\operatorname{senh}(x))}{\operatorname{sen}(2x)}$$

Además, $\lim\limits_{x \to 0} -\operatorname{senh}(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(2x) = 0$ y

$$\lim_{x \to 0} \frac{(-\operatorname{senh}(x))'}{(\operatorname{sen}(2x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{(-\cosh(x))}{2\cos(2x)} = -\frac{1}{2}$$

Así, aplicando la regla de L'Hopital dos veces, se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cosh(x)}{1-\cos^2(x)} = -\frac{1}{2}$$

(b) Sea $y = \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x$, entoonces

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln(y) = \lim\limits_{x \to \infty} x \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{\frac{1}{x}}$

Note que

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-a}{x+a}\right) = \ln(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ y

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x+a}{x-a}\frac{2a}{(x+a)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2ax^2}{a^2-x^2} = -2a$

Así,

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} e^{ln(y)} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \ln(y)} = e^{-2a}$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$ si $e^{-2a} = e$, es decir, $-2a = 1$,o, $a = -\frac{1}{2}$.

2. Considere la función $y = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ y determine, si existen: valores críticos, intervalos donde es creciente, intervalos donde es decreciente, mínimos locales, máximos locales, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, asíntotas.

A partir de la información obtenida, grafique la curva asociada.
Dominio: $\mathbb{R}$
Solución:
Derivada: (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)

$$f'(x) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}\,(6-x)^{\frac{2}{3}}}$$

Valores críticos:
Valores donde $f'(x) = 0$: $x = 4$
Valores del dominio donde $f'(x)$ no existe: $x = 0$ y $x = 6$.

Estudio signo de la derivada
$(6-x)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{6-x}\right)^2 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.
$x^{\frac{1}{3}}$ tiene el mismo signo de x.

Intervalo	$x^{\frac{1}{3}}$	$4-x$	f'	f
$(-\infty, 0)$	-	+	-	decreciente
$(0, 4)$	+	+	+	creciente
$(4, 6)$	+	-	-	decreciente
$(6, \infty)$	+	-	-	decreciente

Intervalos donde f es creciente: $(0, 4)$
Intervalos donde f es decreciente: $(-\infty, 0)$, $(4, 6)$ y $(6, \infty)$
$f(0) = 0$ es un mínimo local de f.
$f(4) = 2\sqrt[3]{4}$ es un máximo local de f.
Nota: En $x = 6$, no hay cambio de monotonía, no se alcanza valor extremo. (En $(6, 0)$ la recta tangente es vertical)

Estudio signo de la segunda derivada
$f''(x) = \dfrac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$ (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)
$x^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{x})^4 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.
$(6-x)^{\frac{5}{3}}$ tiene el mismo signo de $6-x$.

Intervalo	-8	$(6-x)^{\frac{5}{3}}$	f''	f
$(-\infty, 0)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(0, 4)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(4, 6)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(6, \infty)$	-	-	+	cóncava hacia arriba

Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $(6, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, 6)$
Punto inflexión: $(6, 0)$

Asíntotas:

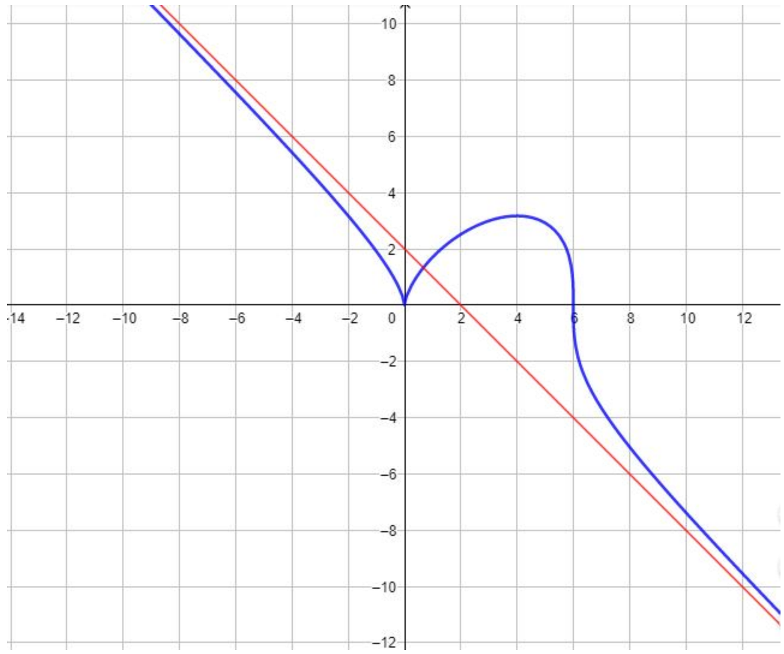
Vertical: No tiene
Horizontal: No tiene, ya que
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\infty} x^2(6-x)} = -\infty$ (no finito)
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty} x^2(6-x)} = \infty$ (no finito)
Oblicua: $y = mx + b$
$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2(6-x)}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{6x^2-x^3}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} - 1} = -1$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} - (-1)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2(6-x) + x^3)}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2 - x\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2 - x\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\frac{\sqrt[3]{36x^4-12x^5+x^6}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} + 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{\frac{36}{x^2} - \frac{12}{x} + 1} - \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} + 1} \\
&= \frac{6}{1-(-1)+1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ecuación: $y = -x + 2$
Nota: La asíntota oblicua hacia $-\infty$ tambi[en es la recta $y = -x + 2$ (dejar de ejercicio a los estudiantes)

Cálculo primera derivada

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)' \\
&= \frac{1}{3}\left(x^2(6-x)\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2(6-x)\right)' \\
&= \frac{2x(6-x) - x^2}{3\left(x^2(6-x)\right)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{x(4-x)}{\left(x^2(6-x)\right)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$



Cálculo Segunda derivada:
Sea $w = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$
Entonces,
$\ln(w) = \ln(4-x) - \frac{1}{3}\ln(x) - \frac{2}{3}\ln(6-x)$
Así
$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{4-x} - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3(6-x)} = \frac{-3x(6-x)-(4-x)(6-x)+2x(4-x)}{3x(4-x)(6-x)} = \frac{-3x(6-x)+3(4-x)(x-2)}{3x(4-x)(6-x)}$
es decir,
$\frac{w'}{w} = \frac{-x(6-x)-(4-x)(x-2)}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x(4-x)(6-x)}$
o
$w' = w\left(\frac{-8}{x(4-x)(6-x)}\right) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}\frac{-8}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$

3. Con una lámina cuadrada de 10 cm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recorta un cuadrado en cada vértice. Determine la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.
Solución
Sea x la longitud del lado del cuadrado a recortar en cada vértice. Note que $0 < x < 5$ (dominio)
Entonces, la base(cuadrada) de la caja tiene lado de longitud $10-2x$ y como área $(10-2x)^2$ y la altura es x y, por lo tanto, el volúmen de la caja es

$$v(x) = (10-2x)^2x = 100x - 40x^2 + 4x^3$$

y

$$v'(x) = 100 - 80x + 12x^2 = 4(25 - 20x + 3x^2)$$

Entonces, $v'(x) = 0$ si $25 - 20x + 3x^2 = 0$, es decir, $x = \frac{20\pm\sqrt{400-300}}{6} = \frac{20\pm10}{6} = \frac{10\pm5}{3}$, y $x = 5$ o $x = \frac{5}{3}$. pero, $x = 5$ no está en el dominio, por lo que el valor crítico es $x = \frac{5}{3}$.
Por otro lado, $v''(x) = (4(25-20x+3x^2))' = -80 + 24x$ y $v''(\frac{5}{3}) = -80 + 40 = -40 < 0$, lo

cual indica que $v\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2000}{27} cm^3$ es un valor máximo del volumen. Así, la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo es $\frac{5}{3}$ cm.

4. Hallar el punto sobre la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la recta tangente determine, en el primer cuadrante, con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.
Solución:
La recta que forma el triángulo con los ejes coordenados es tangente a la función dada en algún punto, denotado por (x_0, y_0), por ahora desconocido. Dicho punto debe ser tal que el área del triángulo sea mínima entre las áreas de todos los posibles triángulos que pueden formarse en el primer cuadrante con las diferentes rectas tangentes.
Note que si la recta es $y = mx + b$, entonces la base del triángulo (rectángulo) es $B = -\frac{b}{m}$ y la altura es $H = b$. Es de resaltar que la base y la altura del triángulo cambian con el punto de tangencia.

Se tiene que: $m = f'(x_0) = -2x_0$ e $y_0 = 4 - x_0$ y, por lo tanto,

$$b = y_0 - mx_0 = 4 - x_0^2 - (-2x_0)x_0 = 4 + x_0^2$$

Entonces, el área del triángulo está dada, en términos de x_0, como:

$$A(x_0) = \frac{BH}{2} = \frac{-\frac{b}{m}b}{2} = -\frac{b^2}{2m} = \frac{(4 + x_0^2)^2}{4x_0}$$

Así,

$$A'(x_0) = \frac{2(4 + x_0^2)4x_0 2x_0 - (4 + x_0^2)^2 4}{(4x_0)^2} = \frac{(4 + x_0^2)\left(4x_0^2 - 4 - x_0^2\right)}{4x_0^2} = \frac{(4 + x_0^2)\left(3x_0^2 - 4\right)}{4x_0^2}$$

$A'(x_0) = 0$ si $(4 + x_0^2)\left(3x_0^2 - 4\right) = 0$ y como $4 + x_0^2 \neq 0$, debe ocurrir que $3x_0^2 - 4 = 0$, es decir, $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (x_0 debe ser positivo para que el triángulo se forme en el primer cuadrante), entonces, $y_0 = 4 - x_0^2 = \frac{8}{3}$.

Además, $A'(x_0) = \frac{(4+x_0^2)\left(3x_0^2-4\right)}{4x_0^2} = \frac{8x_0^2-16+3x_0^4}{4x_0^2} = 2 - \frac{4}{x_0^2} + \frac{3}{4}x_0^2$
Entonces,
$A''(x_0) = \frac{8}{x_0^3} + \frac{3}{2}x_0$ que es positivo para cualquier valor x_0 positivo, en particular, $A''(\frac{2\sqrt{3}}{3}) > 0$, es decir, $A(\frac{2\sqrt{3}}{3})$ es un valor mínimo. Por lo tanto, el punto sobre la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la recta tangente determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima es el punto $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3})$.