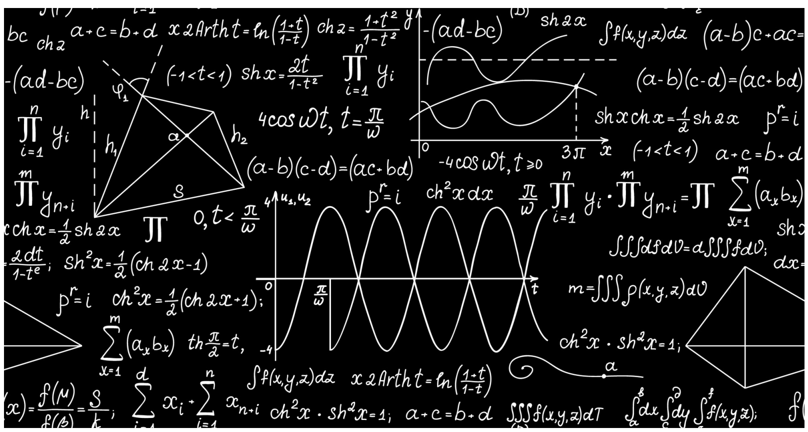
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas - Departamento de Matemática

Cálculo I

Compilado de Ejercicios Resueltos



Sebastián Breguel, Alumno de Ingeniería Civil

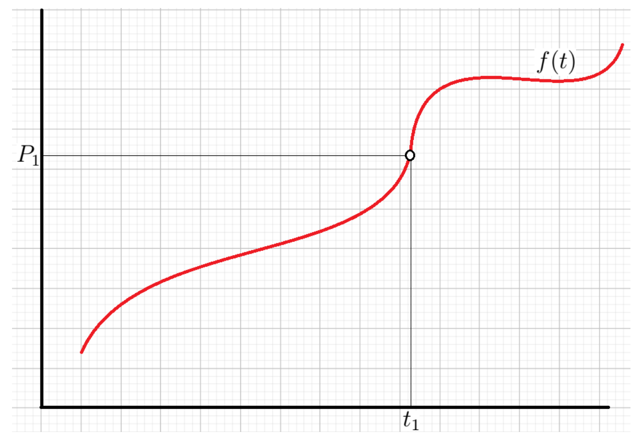
Contents

1 Límites y continuidad

1.1 Concepto de límite

Antes de iniciar a hacer cálculos números y demases, **me gustaría primero entregar una definición de un límite mas bien teórico con un ejemplo cotidiano**.

• Imagínense que ustedes van marcando con una **línea de pintura** el camino que llevan por un recorrido x que es muy largo, en cierto punto ustedes se detienen habiendo recorrido el trayecto en un t tiempo, se dan cuenta que pueden llevar el camino trazado a una función $f(t)$. Al día siguiente se acuerdan que en un momento de tiempo t_1 no pudieron marcar un punto del camino que llamaremos P_1 y el profesor les pide estimar su posición en base al momento t_1 en que no pudieron marcar ese punto. **¿Como lo calcularían si la función presenta un problema en ese punto P_1?**



acá el problema es que la función $f(t)$, al igual que la pintura no nos logra entregar ese valor. En estos casos es cuando el cálculo de un límite toma una medida practica, que vendria siendo finalmente la estimación de la posición en base a $f(t)$ nos dara finalmente ese punto en base al camino que nosotros estabamos recorriendo.

$$\lim_{t \to t_1} f(t) = P_1$$

enseguida pasando ya a una definición mas formal del límite sería la siguiente:

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad de a, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es l si podemos obtener valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a a l tomar x lo suficientemente cercano a a. Se anota matemáticamente como

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Definición: Sea $f(x)$ una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces se dice que $f(x)$ es una $forma$ *indeterminada* si en $x = a$ si $f(a)$ es de la forma $0/0$, ∞/∞,0^∞, $\infty/0$, $0 \cdot \infty$, etc...

Leyes de los limites

Teorema: es importante recalcar que **la existencia de un límite** depende totalmente de que se cumpla la condición de que sus límites laterales convergan al mismo valor, es decir si

$$\lim_{x\to\ a^+} f(x) = \lim_{x\to\ a^-} f(x) = L \to \lim_{x\to\ a} f(x) = L$$

Algunas de las **propiedades de los límites**, que nos permiten "jugar" con las expresiones se define como:

Sean $\alpha, \beta \ \in \mathbb{R}$ constantes y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- límite de una constante: $\lim_{x\to a} \alpha = \alpha$
- Homogeneidad: $\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \mathbf{A}$
- Superposición: $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$
- Linealidad: $\lim_{x\to a}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)] = \alpha\mathbf{A} \pm \beta\mathbf{B}$
- Producto: $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Cuociente: $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$, Si y solo si $B \neq 0$

Cambio de variable

Una técnica que es habitual en el curso es la sustitución. La idea detrás de realizar esta operación es siempre la misma: una expresión complicada de trabajar y/o analizar es reemplazada pertinente y correctamente por otra expresión mucho más sencilla de observar.

Teorema: Sean f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcioness tales que:
• $\lim_{x\to a} f(x) = l$ con $f(x) \neq l$ en una vecinidad reducida de a entonces

$$u = f(x)$$

Entonces cuando $x \to a$ tendremos $u \to l$, finalmente nos queda

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \longrightarrow \lim_{u\to l} g(u) = M$$

Formulas y propiedades utiles

Durante el desarrollo del curso y mas específicamente en la primera parte de límites, tendran que ocupar muchas fórmulas constantemente, donde la mayoria de estas son:

■ **Polinomios**

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $x^2 - (r+s)x + rs = (x-r)(x-s)$
- $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
- $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Ahora mas como fórmulas generales para factorizar polinomios, cuando estos no son tan tipicos son dos

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{R}$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n:$ **Impar**

■ **Propiedades trigonométricas**

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\beta)\sin(\alpha)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a \mp b}{2}\right)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

■ **límites notables**: son un conjunto de límites que es importante que sepan de "memoria" entendiendo el proceso que hay detras, pero saberlos puede hacerlos ganar una gran cantidad de tiempo.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-cos(x)}{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{u\to 0} (1+u)^{(1/u)} = e$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^{kx} - 1)}{x} = k\ln(a)$

1.2 Calculo de límites

1.2.1 raíces y polinomios

1. En este item deberán aplicar reglas básicas de la matemáticas para ir soltando la mano.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

(c) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

(d) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

Soluciones:
(1a**)** Para este ejercicio ocuparemos la formula de diferencia de cuadrados a nuestro favor, donde definiremos primero $a_1 = x^2; b_1 = 4$ y luego $a_2 = x; b_2 = 2$. enseguida remplazándolo en la fracción logramos lo siguiente:

$$\frac{x^4-16}{x-2} = \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x-2} = \frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x-2}$$

Finalmente con este resultado logramos notar que podremos simplificar la fracción al momento de evaluarlo en el límite y así lograr encontrar el resultado:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+4)(x+2) = 8\cdot 4 = 32$$

(1b**)** En este ejercicio deben lograr factorizar la fracción que a simple vista sale de rápida manera, es de la siguiente forma:

$$\frac{x^3-x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1}$$

Ahora nos resultara mucho mas fácil encontrar el valor del límite solicitado.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{1} = 1$$

(1c**)** En este caso para lograr simplificar la fracción de alguna manera, la elegida en este caso será la de ver el numerador de la fracción como una diferencia de cuadrados (a^2-b^2) para así lograr ampliar el numerador:

$$\frac{9-t}{3-\sqrt{t}} = \frac{(3-\sqrt{t})(3+\sqrt{t})}{3-\sqrt{t}}$$

Con esto logramos notar que podemos simplificar el límite y encontrar su valor:

$$\lim_{t\to 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}} = \lim_{t\to 9} \frac{(3-\sqrt{t})(3+\sqrt{t})}{3-\sqrt{t}} = \lim_{t\to 9} 3+\sqrt{t} = 6$$

(1d) en este ejercicio notamos una diferencia que ahora tenemos una resta de cubos, por lo que debemos ocupar esta formula para factorizar el numerador y lograr poder calcular el límite.

$$(2+h)^3 - 8 = ((2+h)-2)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4) = (h)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)$$

Luego podemos calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(h)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)}{1} = 4 + 4 + 4 = 12$$

2. Ya se empiezan a requerir mayores habilidades como lo son racionalizaciones o el trabajo con valores absolutos.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{2-|1-x|}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} (I1 - 2012 - 1)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{2x+6} - 4}{x-5}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2} (I1 - 2016 - tav)$

Soluciones: (2a) Para resolver el ejercicio debemos factorizar el numerador que se nota fácilmente cual es:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$

Con esto lograremos de manera fácil cácular el límite solicitado.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{1} = -3$$

(2b) Notamos que el límite se indefine, por lo que factorizamos en ambas partes de la fracción llegando a:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

enseguida sabiendo la factorización podemos obtener el valor simplificando la expresión.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{((x+2)} = \frac{1}{4}$$

(2c) Este límite es mas fácil de notar ya que tenemos un fracción con una raíz solo en el denominador, por lo que seguimos el método de la racionalización para acomodar la fracción y luego aplicar el límite.

$$\frac{\sqrt{2x+6} - 4}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{2x-6} + 4}{\sqrt{2x-6} + 4} = \frac{2x - 10}{(x-5)(\sqrt{2x-6} + 4)}$$

Enseguida aplicamos al límite a la expresión.

$$\lim_{x\to 5} \frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x+6}+4)} = \lim_{x\to 5} \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x+6}+4)} = \lim_{x\to 5} \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} = \frac{2}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{4}$$

2d**.-** En el caso de este límite notamos que tenemos un valor absolut que nos puede causar problemas al momento de calcular el límite. Aunque notamos que en el punto no habría un cambio de signo, por lo que solo hace falta notar cual sería el signo en el punto.

$$\frac{2x-6}{2-|1-x|} = \frac{2x-6}{2-(x-1)} = \frac{2x-6}{3-x} = \frac{2(x-3)}{-(x-3)}$$

Con esto notamos que podemos evaluar el límite de fácil manera.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{-(x-3)} = -2$$

(2e**)** En este ejercicio notamos que se debe racionalizar la fracción ya que arriba tenemos uno de los dos factores necesarios y si logramos racionalizarla, lograremos simplifcar el x^2 que esta en el numerador para lograr evaluarlo en el límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+4-4}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

Con el límite de esta forma logramos notar que es posible evaluar el límite , ya que se simplifican ambos x^2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{4}$$

3. Durante este item deberan aplicar factorizaciones y trabajo con valores absolutos en un nivel un poco mas alto.

(a) $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^4-1}{h}$

(b) $\lim_{x\to 3} \frac{|2x-7|-|2x-5|}{x-3}(I1-2018-2)$

(c) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\ln(x)}{|x-1|}(I1-2018-1)$

Soluciones:
(3a**)** En este límite debemos ampliar el polinomio donde ocuparemos la base de $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ y así iremos ampliando el polinomio:

$$(1+h)^4-1=\left((1+h)^2+1\right)\left((1+h)^2-1\right)=\left((1+h)^2+1\right)((1+h)+1)((1+h)-1)$$

$$(1+h)^4-1=\left((1+h)^2+1\right)(2+h)(h)$$

Enseguida con esto podemos reemplazarlo en el límite y luego simplificar el termino (h):

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+h)^4-1}{h}=\frac{((1+h)^2+1)(2+h)(h)}{h}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{((1+h)^2+1)(2+h)}{1}=\frac{(1+1)(2)}{1}=4$$

(3b**)** Para este ejercicio, tenemos dos valores absolutos donde ademas notamos que en el punto que se evalua el límite no es en donde se hace el cambio de signo para el valor absoluto, por lo que es fácil notar los signos a cambiar:

$$\frac{|2x-7|-|2x-5|}{x-3}=\frac{-(2x-7)-(2x-5)}{x-3}=\frac{12-4x}{x-3}=\frac{-4(x-3)}{x-3}$$

Enseguida con esto de manera fácil podemos llegar al valor del límite

$$\lim_{x\to 3} \frac{-4(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3} -4=-4$$

(3c**)** Enseguida notamos que en el denominador tenemos una diferencia de cubos y en el numerador una diferencia de cuadrados, donde ocupando las formulas entregadas la fracción termina de la siguiente manera:

$$\frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}=\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}$$

Llevando esto al límite y evaluándolo logramos encontrar su valor

$$\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}=\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}=\lim_{x\to a} \frac{x^2+ax+a^2}{(x^2+a^2)(x+a)}=\frac{3a^2}{(2a^2)(2a)}=\frac{3}{4a}$$

(3d) En el caso de este límite a diferencia del anterior donde teníamos un valor absoluto acá si cambia el signo de este en el punto a evaluar por lo que debemos separar la función en una función por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\ln(x)}{-(x-1)} & x < 1 \\ \\ \dfrac{(x-1)\ln(x)}{(x-1)} & 1 \leq x \end{cases}$$

Enseguida lo que debemos hacer es calcular los límites laterales para que se cumpla:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Ya que con esto, se asegura la existencia del límite.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\ln(x)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\ln(x)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} -\ln(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln(x)$$

$$0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

Con esto se comprueba que el valor del límite es 0.

4. Ya llegado a este punto es cuando empieza las preguntas tipo prueba difíciles, donde deben tener un buen manejo con cambios de variable, racionalizaciones y factorización.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x-1}-2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}} (I1-2015-tav)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+x}{x-1}$

Soluciones:

(4a) Notamos que en el numerador y denominador tienen raíces de segundo grado, por lo que debemos racionalizar ambas partes para poder reducir de alguna manera la expresión.

$$\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \cdot \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3} = \frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(x+\sqrt{x+2})}$$

Finalmente con esto logramos notar que en el numerador podríamos factorizarlo y llegar a reducir alguna expresión con el denominador

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \frac{(3)(6)}{4(2+2)} = \frac{18}{16}$$

(4b) Para este ejercicio al igual que el anterior notamos que tenemos ambos tipos de raíces tanto, de segundo como de tercer grado. Pero a diferencia del anterior este es resolvible de una manera mas facil. Que es la de hacer una doble racionalización, tanto para el numerador($a^2 - b^2$) como para el numerador($a^3 - b^3$)

$$\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x-1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9}{(\sqrt[3]{x-1}-2)(\sqrt{x}+3)}$$

$$\frac{x-9}{(\sqrt[3]{x-1}-2)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(x-1)}-2)^2) + (\sqrt[3]{x-1}-2) \cdot 2 + 4)}{(\sqrt[3]{(x-1)}-2)^2) + \sqrt[3]{x-1}-2) \cdot 2 + 4)}$$

$$\frac{(x-9)(\sqrt[3]{(x-1)}-2)^2) + (\sqrt[3]{x-1}-2) \cdot 2 + 4)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

luego de haber realizado esto podemos calcular el límite

$$\lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt[3]{(x-1)}-2)^2) + (\sqrt[3]{x-1}-2) \cdot 2 + 4)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

Reducimos terminos y llegamos al valor del límite

$$\lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt[3]{(x-1)}-2)^2) + (\sqrt[3]{x-1}-2) \cdot 2 + 4)}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{(2-2)^2 + (2-2) + 4}{6} = \frac{2}{3}$$

(4c) Notamos que tenemos una raíz en el Denominador de la fracción, por lo que primero intentaremos factorizando.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{\sqrt{x}-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{x - \sqrt{x}}$$

Si vemos el resultado, seguimos teniendo un problema en el denominador pero si notamos al ojo este nos causaría un problema si racionalizamos nuevamente(quedaría un termino x^2). Enseguida como es que seguimos el ejercicio entonces, talvez si llegamos a bajar la expresión de grado podria resultar, por lo que procedemos a hacerlo.

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{x - \sqrt{x}} = \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

Luego de haber bajado de grado la fracción creemos que ahora es mas fácil de racionalizar:

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(x-1)}$$

Finalmente notamos que la expresión es reducible($x-1$) y lograremos reemplazar el límite.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$$

(4d) Este ejericio debemos iniciarlo, no por la forma tipica, sino que debemos pensar en algun cambio de variable que nos facilite hacer la resta, ya que al trabajar con raíces todo es un poco mas complicado. Para simplificar llegamos a hacer el cambio de variable:

$$u = \sqrt{x}; \quad u \to 1 \quad x \to 1$$

Enseguida remplazando esto, notamos que se hace mucho mas facil

$$\lim_{u \to 1} \frac{1}{u-1} - \frac{u+u^2}{u^2-1} = \lim_{u \to 1} \frac{u+1-u-u^2}{u^2-1}$$

Finalmente nos quedaría:

$$\lim_{u \to 1} \frac{1-u^2}{u^2-1} = \lim_{u \to 1} \frac{-(u^2-1)}{u^2-1} = -1$$

5. Llegado a este punto es cuando terminamos con las preguntas mas difíciles de toda esta subsección, donde se necesita un analizis mas alla de los clasico, Suerte!

(a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 3} \frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}} - 1}{x-3} (I1 - 2019 - tav)$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3} (I1-2015-1)$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[7]{x}}$

Soluciones:

(5a) Este ejercicio es de alta dificultad, ya que notamos que tenemos una fracción de segundo y tercer grado. Por lo que no sabemos cual es la mejor manera de tratar este es ver cada raíz por separado, **Pero primero debemos sumar 0:**

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1} + 1 - 1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1 - (\sqrt[3]{x^3+x+1} - 1)}{x}$$

Reordenando llegamos a

$$\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x}}_{\beta}$$

Por lo que ahora es mas fácil de ver lo que hay que hacer, que sería racionalizar cada fracción y así llegar al valor del límite :

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{(x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{(x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}$$

$$\beta = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2+1)}{(x)(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}$$

$$\beta = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)}{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)} = \frac{1}{3}$$

Ahora juntando ambos valor y volviendo al límite originial:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x+1}+1-1}{x} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

5b.- La forma de afrontar este ejercicio es un poco mas difícil que la tipica, ya que lo normal sería juntar la fracción para luego racionalizar quedandonos algo como esto

$$\frac{\frac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}}{x-3} = \frac{\frac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}}{x-3} = \frac{\frac{2\sqrt{x+1}-(x+1)}{x+1}}{x-3}$$

Pero segun vemos por este método es un poco difícil continuar ya uq ele problema sigue existiendo. Por lo tanto seguiremos un método nuevo y bastante peculiar, que es el de racionalizar toda la fraccción de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1}{x-3} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1}{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1} = \frac{\frac{4}{x+1}-1}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \frac{\frac{3-x}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)}$$

Enseguida con esto notamos que si es posible simplificar la fracción al momento de evaluar el límite y así podemos calcularlo:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{(3-x)}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{-(x-3)}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \frac{-1}{(4)(\frac{2}{2}+1)} = \frac{-1}{(4)(2)} = \frac{1}{-8}$$

(5c) En este ejercicio será necesario aplicar un conocimiento mayor/diferente que en los ejercicios que hemos resuelto, ya que es necesario saber sobre división de polinomios para poder factorizar ambas partes de la fracción, ya que ambas se vuelven 0. Con esto logramos saber que $(x-1)$ es un factor de ambos polinomios, por lo que procedemos a hacer la división de polinomios:

$$\begin{array}{rr|l}
- & x^4+2x^3-4x^2+4x-4 & (x-1) = x^3+3x^2+4 \\
 & x^4-x^3 & \\ \hline
- & 3x^3-3x+4x-4 & \\
 & 3x^3-3x & \\ \hline
- & 4x-4 & \\
 & 4x-4 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Por lo que la primera factorisación nos quedaría:

$$x^4+2x^3-4x^2+4x-4 = (x-1)(x^3+3x^2+4)$$

Enseguida el polinomio del denominador lo dividimos por le factor:

$$\begin{array}{rr|l}
- & x^4+0+0+2x-3 & (x-1) = x^3+x^2+x+3 \\
 & x^4-x^3 & \\ \hline
- & x^3-0+\quad x-3 & \\
 & x^3-x^2 & \\ \hline
- & x^2+2x-3 & \\
 & x^2-x & \\ \hline
- & 3x-3 & \\
 & 3x-3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Quedanonos la fatorización de la siguiente manera:

$$x^4+0+0+2x-3 = (x-1)(x^3+x^2+x+3)$$

Por lo que ahora si es posible calcular el límite :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+3x^2+4)}{(x+1)(x^3+x^2+x+3)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x^2+x+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

(5d) acá lo que debemos hacer es intentar factorizar de alguna manera ambas partes de la fracción por el factor $(x + 1)$,El unico método que se nos ocurre es mediante la **Racionalizacion** de ambas partes.
Para saber esto debemos saber la siguiente propiedad del triangulo de pascal para factorización de suma de elevados impares son:

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a^5 + b^5) = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$(a^7 + b^7) = (a + b)(a^6 - a^5b^1 + a^4b^2 - a^3b^3 + b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

Por lo que ahora sabiendo esto aplicamos la racionalización para el numerador como para el denominador:

$$\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[7]{x}} \cdot \frac{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} \cdot \frac{(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}{(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}$$

$$\frac{(1 + x)(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}{(1 + x)(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

Enseguida con esto podemos simplificar la fracción y aplicar el límite

$$\lim_{x \to -1} \frac{1 + x}{1 + x} \frac{(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{7}{3} \qquad \square$$

1.2.2 Trigonometricos

1. Calcular los siguientes límite s

(a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x)}{x-\pi}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)} (I1-2011-2)$

(c) $\lim_{x\to 3}(x-3)\csc(\pi x)(I1-2017-1)$

(d) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{2\sin(x)-\sqrt{2}}{4x-\pi}(I1-2017-2)$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(4x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

(1a**)** En este ejercicio notamos que es del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que debemos hacer un cambio de variable para poder calcular este límite. El cambio es un poco notorio debido al denominador de la fracción donde seria:

$$u = x-\pi \to x = u+\pi$$

$$x\to\pi \qquad u\to 0$$

Enseguida aplicando esto en el límite nos queda:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u+\pi)}{u}$$

Para resolver el límite , debemos usar la formula de suma de angulos dandonos:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)(-1)+(0)\cos(u)}{u} \lim_{u\to 0} -\frac{\sin(u)}{u}$$

Finalmente notamos que llegamos al resultado de uno de los límites notables que nosotros sabemos, por lo que podemos calcularlo:

$$\lim_{u\to 0} -\frac{\sin(u)}{u} = -1$$

(1b**)** Este límite en especifico podemos llevar gran parte de este a un límite notable, junto con una simplificación simple que seria

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x-\sin(x)}{x}}{\frac{x+\sin(x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}}$$

Luego de esto podemos aplicar las reglas de los límites y hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{\lim_{x\to 0}1+\dfrac{\sin(x)}{x}}$$

Para terminar ocupamos otra regla de los límites que nos permite:

$$\frac{\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}}{\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(1c**)** La resolución de este ejercicio es mediante un cambio de variable que es bastante obvio, ya que si escribimos el límite notamos que es de la forma $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{\sin(\pi x)}$$

Enseguida haciendo el cambio de variable

$$u=x-3\to u+3=x$$

$$x\to 3\qquad u\to 0$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin(\pi x)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin(\pi(u+3))}$$

El problema mas comun es una vez llegando a este punto, debido a no saber que hacer con el $\sin(\pi(u+3))$, pero primero aprovechamos de su periocidad haciendo

$$\sin(u\pi+3\pi)=\sin(u\pi+\pi)$$

luego de esto ocuparemos la siguiente propiedad

$$\sin(u+\pi)=-\sin(u)\to\sin(u\pi+\pi)=-\sin(u\pi)$$

Reemplazamos esto en el límite

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin(\pi(u+3))}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{-\sin(u\pi)}$$

Finalmente solo debemos seguir el método para llegar al límite notable

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{-\sin(u\pi)}\cdot\frac{\pi}{\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{u\pi}{(-\pi)\sin(u\pi)}=-\frac{1}{\pi}$$

(1d) Debemos abordar este ejercicio desde el cambio de variable, donde tenemos dos opciones de cambios de variable los cuales son

$$u_1 = x - \frac{\pi}{4} \quad o \quad u_2 = 4x - \pi$$

$$u_1 + \frac{\pi}{4} = x \qquad o \qquad \frac{u_2 + \pi}{4} = x$$

En mi caso eligo u_1, ya que me es mas fácil trabajar el denominador y el sin con las propiedades de suma de angulos.

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi} = \lim_{u \to 0} \frac{2\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{4u}$$

$$\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(u)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(u) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(u)$$

Recordarmos que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\lim_{u \to 0} \frac{2\left(\frac{\sin\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right) - \sqrt{2}}{4u} = \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u) + \sqrt{2}\cos(u) - \sqrt{2}}{4u}$$

Enseguida factorizamos y separamos la suma en la siguiente manera:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{4u} + \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\cos(u) - 1)}{u}$$

Finalmente notamos que el primer y segundo termino son un límites notables que sabemos, los que son 1 y 0.

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{4u} + \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\cos(u) - 1)}{u} = \frac{\sqrt{2}}{4} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(1e) Partimos de la premisa de que debemos ocupar si o si la expresión del límite notable:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

Por lo que debemos separar el límite en dos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{1} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(4x)}$$

Enseguida debemos lograr llevarlo al límite notable ambas fracciones y nos dara el resultado:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{1} \cdot \frac{7x}{7x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{1} \cdot \frac{4x}{4x}\right)^{-1} = \lim_{x \to 0} 7x \frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{4x\sin(4x)}{4x}\right)^{-1}$$

Ya con esto podemos aplicar el límite notable y encontrar el valor final del límite solicitado:

$$\lim_{x\to 0} 7x\frac{\sin(7x)}{7x}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{4x\sin(4x)}{4x}\right)^{-1} = \lim_{x\to 0} 7x\cdot(4x)^{-1} = \lim_{x\to 0}\frac{7x}{4x} = \frac{7}{4}$$

(1f**)** Este límite se parece mucho a uno de los límites notables que nosotros sabemos, pero por eso mismo es importante saber el desarrollo para llegar al valor.
Primero notamos que en el numerador tenemos $1-\cos(x)$, lo cual si lo vemos de cierta manera es uno de los terminos de la suma por su diferencia, por lo que multiplicamos por el faltante que seria

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{(\sin^2(x))(1+\cos(x))}$$

Usando la propiedad: $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \to \sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ y reemplazandola en el límite :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{(\sin^2(x))(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

.

2. (a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{x}(I1-2019-2)$
(b) $\lim_{x\to -1}\frac{\sin(x^2-x-2)}{x+1}(I1-2014-1)$
(c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+\sin(\pi x)}{\sin(ex)+\sin(4x)}(I1-2018-1)$
(d) $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan(4x)}{2x-\pi}(I1-2019-1)$
(e) $\lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos(x)}{\sin(x-\pi/3)}$
(f) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)}(I1-2010-2)$

(2a**)** El límite , debe ser analizado desde la visión de la siguiente propiedad:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u} \tag{1}$$

Siendo u cualquier cosa, por lo que hacemos la siguiente operacion:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}$$

Luego de esto podemos por regla de límites hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

Donde notamos que ambos límites nos terminarian dando 1, ya que ambos se pueden adoptar y llevar a la forma de (1). Por lo que el valor final seria:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\cdot 1 = 1$$

(2b) A pesar de parecer complicado, este límite es bastante fácil porqué debemos llevarlo a tal forma de poder hacer el cambio de variable y llegar al límite notable.
Enseguida que sabemos que debemos hacer eso, primero factorizamos el polinomio que esta adentro del sin, el cual sabemos que tiene como uno de los factores $x + 1$, ya que se hace 0 cuando $x \to -1$.

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

Luego de esto remplazándolo en el límite sabemos por lo que debemos amplificar ambas partes de la fraccion:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin((x+1)(x-2))}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)\sin((x+1)(x-2))}{(x+1)(x-2)}$$

Finalmente podríamos hacer un cambio de variable como $u = x + 1$ y remplazarlo en la fracción, pero esto no es necesario, lo que impor es entender que siempre que suceda algo parecido como que el sin sea acompañado por algo, abajo debe estar lo mismo y ahi se puede reducir como 1. Con esto llegamos a:

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x-2)\sin((x+1)(x-2))}{(x+1)(x-2)} = (-3) \cdot 1 = -3$$

(2c) La manera de enfrentar este ejercicio es en base a las propiedades de los límites que nos permiten hacer lo siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) + \sin(\pi x)}{\sin(ex) + \sin(4x)} = \frac{\lim_{x \to 0} \sin(2x) + \lim_{x \to 0} \sin(\pi x)}{\lim_{x \to 0} \sin(ex) + \lim_{x \to 0} \sin(4x)}$$

Donde ahora llevamos un límite que parecia de cierta manera bastante raro a cuatro límites que por si solos son bastante simples que los podemos llevar al límite notable conocido. Por lo que trabajamos cada límite por separado y luego los evaluamos

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{1} \cdot \frac{2x}{2x} + \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{1} \cdot \frac{\pi x}{\pi x}}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(ex)}{1} \cdot \frac{ex}{ex} + \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{1} \cdot \frac{4x}{4x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 2x \frac{\sin(2x)}{2x} + \lim\limits_{x \to 0} \pi x \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}{\lim\limits_{x \to 0} ex \frac{\sin(ex)}{ex} + \lim\limits_{x \to 0} 4x \frac{\sin(4x)}{4x}}$$

Despues de esto tratamos cada límite por si solo, donde cada uno nos dara 1 y luego podemos hacer un proceso inverso al inicial que sería lo siguiente:

$$\frac{\lim_{x \to 0} 2x \cdot 1 + \lim_{x \to 0} ex \cdot 1}{\lim_{x \to 0} ex \cdot 1 + \lim_{x \to 0} 4x \cdot 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + \pi x}{ex + 4x}$$

Finalmente podemos factorizar por x y luego reducirlo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(2 + \pi)}{x(e + 4)} = \frac{2 + \pi}{e + 4}$$

(2d) acá lo que se debe hacer es un cambio de variable, ya que de esa forma logramos desacernos del polinomio y ocupando propiedades trigonométricas. Recordar que es posible hacer dos cambios de variable.

$$u_1 = x - \frac{\pi}{2} \quad o \quad u_2 = 2x - \pi$$

$$x \to \frac{\pi}{2} \qquad u \to 0$$

En este caso, elegiremos u_2, ya que al momento de reemplazar x en el numerador se nos hace mas fácil al reemplazarlo

$$2x = u + \pi \to 4x = 2u + 2\pi$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan(4x)}{2x-\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u+2\pi)}{u}$$

Enseguida es cuando se nos genera el problema, ya que la forma mas esperable de seguir desarrollando el ejercicio sería desarrollando la tangente como $\frac{\sin}{\cos}$, pero hay una forma mucho mas fácil en la que es necesario aplicar la siguiente propiedad de la tangente:

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi), \quad k \in \mathbb{R}$$

Notamos que en este caso $k = 2$, por lo que podemos proceder a resolver el límite y luego llevarlo a un límite notable que deberiamos saber

$$\lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u+2\pi)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u)}{u} \cdot \frac{2}{2} = \lim_{u\to 0} 2\frac{\tan(2u)}{2u} = 2$$

(2e) La forma en que llevaremos este ejercicio, será mediante un cambio de variable

$$u = x - \frac{\pi}{3} \to u + \frac{\pi}{3} = x$$

$$x \to \frac{\pi}{3} \qquad u \to 0$$

Donde nos quedaría:

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{1-2\cos(x)}{\sin(x-\pi/3)} = \lim_{u\to 0} \frac{1-2\cos\left(u+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin(u)}$$

Ocupamos la formula de suma de angulos

$$1 - 2\cos(u + \frac{\pi}{3}) = 1 - 2\left(\cos(u)\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(u)\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 1 - 2\left(\frac{\cos(u)}{2} - \frac{\sin(u)\sqrt{3}}{2}\right)$$

Finalmente reemplazamos en el límite , donde debemos separar en dos límites uno notable y otro que es una simplificación, con lo que llegamos al valor del límite.

$$\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)+\sin(u)\sqrt{3}}{\sin(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1+\cos(u)}{\sin(u)} + \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)\sqrt{3}}{\sin(u)} = 0+\sqrt{3}$$

(2f) Partimos el límite , donde la principal dificultad es racionalizar la expresión para luego calcularlo como un límite notable

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{x^2+x}{\sin(4x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

Luego de esto debemos factorizar el numerador, amplificar la fracción por 4 y luego reducir la expresión y calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{\sin(4x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} \cdot \frac{4}{4} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sin(4x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)}{4(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \frac{1}{8}$$

3. (a) $\lim_{x\to \pi} \frac{(x-\pi)^2}{\sin^2(x)} (I1-2015-1)$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(5x)} (I1-2011-2)$

   (c) $\lim_{x\to -2} \frac{\tan(\pi x)}{x+2} (I1-2009-2)$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x)} (I1-2016-1)$

   (e) $\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3-2x^2-3x}$

   (f) $\lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/4} (I1-2018-2)$

(3a) Notamos que este ejercicio es muy parecido al 1a, ya que el cambio de variable que se tiene que hacer es el mismo, y el resultado de hecho será el mismo pero con unas diferencias. Primero empezaremos haciendo lo siguientes ocupando las propiedades de las potencias y fracciones:

$$\frac{(x-\pi)^2}{\sin^2(x)} = \left(\frac{x-\pi}{\sin(x)}\right)^2 = \left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2}$$

Enseguida esto lo llevamos al límite , donde aplicando propiedades podemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2} = \left(\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-pi}\right)^{-2}$$

Luego calculamos el valor el límite de la siguiente manera:

$$u = x-\pi \to x = u+\pi$$

$$x\to\pi \qquad u\to 0$$

Enseguida aplicando esto en el límite nos queda:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u+\pi)}{u}$$

Para resolver el límite , debemos usar la formula de suma de angulos dandonos:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)(-1)+(0)\cos(u)}{u}\lim_{u\to 0}-\frac{\sin(u)}{u}$$

Notamos que llegamos al resultado de uno de los límites notables que nosotros sabemos, por lo que podemos calcularlo:

$$\lim_{u\to 0}-\frac{\sin(u)}{u} = -1$$

Finalmente debemos aplicar la potencia para encontrar el valor del límite solicitado:

$$\left(\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2} = (-1)^{-2} = 1$$

(3b) Al igual que en el ejercicio anterior debemos racionalizar la fracción para luego llegar a un límite notable por otro valor

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(5x)}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{x}{\sin(5x)(\sqrt{x+4}+2)}$$

Para terminar amplificamos por 5 y llegamos al valor del límite evaluando

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{5\sin(5x)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{5(2+2)} = \frac{1}{20}$$

(3c) acá debemos realizar el siguiente cambio de variable

$$u = x + 2 \to u - 2 = x$$

$$x \to -2 \qquad u \to 0$$

Llevando esto al límite nos queda

$$\lim_{x\to -2} \frac{\tan(\pi x)}{x+2} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi(u-2))}{u}$$

Enseguida debemos aplicar la propiedad de la tangente y luego podemos reducir el límite notable

$$\lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi(u) - 2\pi)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi u)}{u} \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\pi \tan(\pi u)}{\pi u} = \pi$$

(3d) A simple vista, este ejercicio parece muy facil, ya que si primero racionalizamos y luego ocupamos la propiedad $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ es bastante simple pero hay un paso que es importante recordar. Partimos por racionalizar y ocupar la propeidad

$$\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x)} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{\sqrt{\sin^2(x)}}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x))}}$$

Despues de este paso porfavor, tener mucho cuidado, ya que el tipico error es asumir algo que es falso.

$$\sqrt{\sin^2(x)} \neq \sin(x) \to \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)| \checkmark$$

Reemplazamos esto en el límite y es evidente ahora que el problema es el valor absoluto, ya que se produce el cambio en el punto donde evaluamos. llevando esta expresión a una función a tramos nos quedaría de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} & x < 0 \\ \\ \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} & 0 \leq x \end{cases}$$

Finalmente debemos evaluar los límites laterales para determinar si existe o no $\lim_{x\to 0} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Con estos resultados podemos determinar que como los límites laterales son distintos, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

(3e) En este ejercicio lo unico que debemos factorizar el denominador de la fracción en base al factor $(x-3)$:

$$\frac{\sin(x-3)}{x^3-2x^2-3x} = \frac{\sin(x-3)}{x(x-3)(x+1)}$$

Enseguida podemos simplificar la expresión con el límite notable y evaluarlo

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x(x-3)(x+1)} = \frac{1}{3(4)} = \frac{1}{12}$$

(5a) El problema acá, presenta una dificultad en el punto donde debemos decidir que hacer con el valor absoluto, el cual luego de analizarlo notamos que no debes hacer ningun cambio y luego notamos que es posible reducir el límite , ya que es un límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{(0+1)1}{2} = \frac{1}{2}$$

(3f) Para la resolución de este ejercicio, debemos hacer un cambio de variable, el cual se basara en tratar dejar de manera simple el denominador

$$u = x - \frac{\pi}{4} \to u + \frac{\pi}{4} = x$$

$$x \to \frac{\pi}{4} \qquad u \to 0$$

Haciendo el cambio de variable y luego tenemos que hacer uso de las formulas de suma de angulos

$$\lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/4} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u+\frac{\pi}{4}) - \sin(u+\frac{\pi}{4})}{u}$$

$$\sin(u+\frac{\pi}{4}) = \sin(u)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(u)\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}$$

$$\cos(u+\frac{\pi}{4}) = \cos(u)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(u)\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}$$

usando esto en el límite nos queda

$$\lim_{u\to 0} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right)}{u}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\left(\frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right)}{u}$$

Finalente notamos que se nos reduce la expresión y calcular el límite es facil

$$\lim_{u\to 0} \frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{u} = -\sqrt{2}$$

4. Analise el siguiente límite dependiendo de los casos de a y b. CHONWEREIN

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(ax)}{x + \sin(bx)}$$

(4) Este ejercicio se tiene que enfrentar, presentandose ante supuestos y luego con casos mas generales.

- Caso 1: $a = 0$ y $b = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

- Caso 2: $a \neq 0$ y $b = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{a\sin(ax)}{ax} = 1 - a$$

- caso 3: $a = 0$ y $b \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \frac{\sin(bx)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \frac{b\sin(bx)}{bx}} = \frac{1}{1+b}$$

Ahora tenemos dos casos posibles, dependiendo de los posibles valores de b.

$$\frac{1}{1+b} \begin{cases} \textbf{no existe} & b = -1 \\ \frac{1}{1+b} & b \neq -1 \end{cases}$$

- caso 4: $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $b \neq -1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(ax)}{x + \sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{a\sin(ax)}{ax}}{1 + \frac{b\sin(bx)}{bx}} = \frac{1-a}{1+b}$$

- caso 5: $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $b = -1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(ax)}{x - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{a\sin(ax)}{ax}}{1 - \frac{\sin(x)}{x}} = \pm\infty, \textbf{No existe}$$

- caso 6: $a = 1$ y $b \neq -1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x - \sin(x)} = 1$$

Con esto tenemos cubietos todos los casos para a y b.

5. Existen los siguientes límite s? calcúlelos; en caso contrario, explique por qué no existe/n.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2} (I1-2016-2)$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin(x)|}{x^2+x} (I1-2015-2)$

(5a**)** El problema acá, presenta una dificultad en el punto donde debemos decidir que hacer con el valor absoluto, el cual luego de analizarlo notamos que no debes hacer ningun cambio y luego notamos que es posible reducir el límite , ya que es un límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{(0+1)1}{2} = \frac{1}{2}$$

(5b**)** Para saber si existe o no el límite solicitado, debemos hacerla una función por partes, ya que esta cambia en el punto solicitado

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin(x)}{x^2+x} & x < 0 \\[2ex] \dfrac{\sin(x)}{x^2+x} & 0 \leq x \end{cases}$$

Ahora para que el límite que nos piden exista, los límites laterales deben ser iguales, por lo que los calculamos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = 1$$

Finalmente notamos que no se cumple que los límites laterales sean iguales. por lo que el límite solicitado no existe.

6. Determine, justificadamente, el valor de $(I1-2019-1)$

$$\lim_{x\to -\pi} \sin(\sin(x)+x)$$

(6**)** Para el calculo de este límite , debemos aplicar una de las propiedades que nos permite

$$\lim_{x\to -\pi} \sin(\sin(x)+x) = \sin(\sin(\lim_{x\to -\pi} x) + \lim_{x\to -\pi} x)$$

Esto lo podemos hacer ya que sin y x son funciones continuas. Dandonos finalmente

$$\sin(\sin(-\pi)-\pi) = \sin(0-\pi) = 0$$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{\cos(x-1)} - \sqrt{\cos(x-1)})}{\sin^2(x-1)}$

Hint: revisar el ejercicio 5a de la sección anterior

(7) Antes de seguir el **Hint** haremos un cambio de variable para que el ejercicio sea mas fácil visualmente

$$u = x-1 \qquad x \to 1, \quad u \to 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{\cos(x-1)} - \sqrt{\cos(x-1)}}{\sin^2(x-1)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - \sqrt{\cos(u)}}{\sin^2(u)}$$

Ahora con esta expresión es mas notorio los pasos que debemos seguir, tomando como referencia el ejercicio 5a, partiendo por agregar $-1+1$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1 - \sqrt{\cos(u)} + 1}{\sin^2(u)} = \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} - \frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)}$$

Notamos que el paso que debemos seguir es ahora racionalizar cada expresión por separado

$$\frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1}{\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)}$$

$$\frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)} \cdot \frac{\sqrt{\cos(u)} + 1}{\sqrt{\cos(u)} + 1} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt{\cos(u)} + 1)}$$

Ahora con ambas expresiones racionalizadas podemos calcular el límite por separado de cada una de ellas. Notamos que ambas expresiones se pueden llevar al uso de dos límites notables.

I.

$$\lim_{u\to 0} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)} \cdot \frac{u^2}{u^2}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sin^2(u)} \frac{\cos(u) - 1}{u^2} \frac{1}{(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+1+1)} = \frac{1}{6}$$

II.

$$\lim_{u\to 0} \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt{\cos(u)} + 1)} \frac{u^2}{u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sin^2(u)} \frac{\cos(u) - 1}{u^2} \frac{1}{(\sqrt{\cos(u)} + 1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{4}$$

Enseguida si juntamos ambos valores y los restamos en el orden correcto, llegamos al valor del límite

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} - \frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$$

8. Analize el valor del siguiente límite dependiendo de los valores de a.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)} - \sqrt{1+\sin(x)})}{x^a}$$

(8) Para lograr analizar el valor del límite dependiendo de a, debemos primero racionalizar la expresion

$$\frac{\sqrt{1+\tan(x)} - \sqrt{1+\sin(x)}}{x^a} \cdot \frac{\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}}$$

$$\frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Ahora si seguimos desarrollando la expresión

$$\frac{\dfrac{\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}}{x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Finalmente cuando tengamos que evaluar el límite podemos hacer las siguientes separaciones, donde podemos notar dos límites notables

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{1}{x^{a-3}\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Enseguida debemos ponernos en los posibles casos, donde les recomiendo partir analizando en el punto de cambio que vendria siendo $a = 3$.

Caso 1: $a = 3$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{1}{\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{4}$$

Caso 2: $a < 3$.

Para este caso, si les es muy difícil verlo a la primera, pueden probar con algun número, como yo lo hare con $a = 1$, en cual notamos que solo podríamos formas uno de los dos límites notables quedandonos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

Caso 3: $3 < a$.
Si sigue siendo muy difícil analizarlo con solo variables, pueden probar con algun número, como yo lo hare con $a = 4$, quedadonos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{1}{x\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\infty = \textbf{No existe}$$

Con esto llegamos a la siguiente conclusion

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)} \begin{cases} 0, & si\ a < 3 \\ \frac{1}{4}, & si\ a = 3 \\ \textbf{no existe}, & si\ 3 < a \end{cases}$$

9. **Propuesto para ustedes:**

$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sqrt{-\cos(x)}}{\cos(2x)-\sin(x/2)}$ (Respuesta: $-2/15$)

1.2.3 límites al infinito

En esta sección se hablara de infinitos, donde aprenderemos que hay infinitos mas grandes que otros, como por ejemplo x y $2x$, uno es el doble del otro, mientras que por ejemplo x y x^2 al infinito su diferencia es abismal, por lo que en esta sección aprenderemos a categorizar estas diferencias al infinito.

Definicion: Sean f, g dos funciones de polinomios $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Va a depender del grado de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, Donde M es el grado de $f(x)$ y N el de $g(x)$. Donde tenemos 3 posibles casos

- Caso 1: $M > N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
- Caso 2: $M = N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \quad a \in \mathbb{R}$
- Caso 3: $M < N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

•**Tip general:**, para esta seccion, cuando tenga por ejemplo $\infty - \infty$ intentar llevarlo a alguna forma donde se pueda hacer la comparacion(Como alguna fracción) o alguna formula que junte los terminos para asi poder compararlos.

Resolver los siguientes ejercicios:

1. (a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x(x - \sqrt{x^2 - 1})(I1 - 2013 - tav)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{5^x - 3^x + 1}{5^x + 3^x + 2}(I1 - 2017 - 2)$

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + n^2} - \sqrt{n}}{n}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin(2x)}{4x + 1}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(2x + 7)\cos(x^2) - \sin(4 - x^3)}{x - \pi}$

(1a) Se denota que el problema termina siendo la siguiente operación

$$-\infty + \infty$$

Por lo que para dejarlo en una expresiondonde pueda haber comparación, debemos racionalizar ocupando la formula que se uso en el para lograr reducir la expresión y poder aplicar el límite

$$\lim_{x\to\ -\infty}(x+\sqrt{x^2+2x}) = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+2x})}{1}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{x-\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{2x}{x-\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+2x}}$$

Enseguida cuando ingresemos el $1/x$ a la raíz debemos multiplicar por -1 la raíz para que el número final nos de positivo

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{2}{1-(-\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}})} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2x}{x^2}}}$$

Ahora podemos evaluar el límite

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2x}{x^2}}} = 1$$

(1b) Acá debemos intentar racionalizar la expresión, ya que notamos que tenemos $\infty-\infty$ y llevandolo a una fraccion es la manera que tenemos para lograr hacer una comparación eficiente. Pero notar que tenemos una x afuera, por lo que debemos dejarla fuera de la racionalisación.

$$\frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{1}\cdot\frac{(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{x+1}{(x+\sqrt{x^2-1})}$$

Ahora notamos que podemos aplicar el límite , ya que tanto denominador como numerador tienen el mismo maximo exponente(1).Por lo que debemos multiplicar por el mayor exponente arriba y abajo que en este caso sería $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}{(x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

Recordamos que si $1\leq n$ se cumple

$$\lim_{x\to\infty^{\pm}}\frac{1}{x^n} = 0$$

(1c) En este ejercicio, a pesar de que tenemos $\dfrac{\infty}{\infty}$, notamos que podemos hacer una comparacion amplificando por $\dfrac{1}{5^x}$ y asi nos quedara lo siguiente:

$$\frac{5^x-3^x+1}{5^x+3^x+2}\cdot\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^x}}=\frac{\frac{5^x}{5^x}-\frac{3^x}{5^x}+\frac{1}{5^x}}{\frac{5^x}{5^x}+\frac{3^x}{5^x}+\frac{2}{5^x}}=\frac{1-\frac{3^x}{5^x}+\frac{1}{5^x}}{1+\frac{3^x}{5^x}+\frac{2}{5^x}}$$

Luego de esto si aplicamos el limite, tenemos el problema de que hacer con el $\dfrac{3^x}{5^x}$, pero notamos que podemos hacer lo siguiente

$$\frac{3^x}{5^x}=\left(\frac{3}{5}\right)^x$$

y segun sabemos $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$ para $|a|<1$, donde este seria nuestro caso, por lo que podemos ocupar esto y tendremos el valor del limite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3^x}{5^x}+\frac{1}{5^x}}{1+\frac{3^x}{5^x}+\frac{2}{5^x}}=\frac{1-0+0}{1+0+0}=1$$

(1d) Para este ejercicio, notamos que si m y n fueran el valor del grado del polinomio que hay en el numerador y el denominador de la fracción, notamos que estos son iguales($m=n=1$) por lo que segun sabemos podemos aplicar la siguiente operación:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}-\sqrt{n}}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}}-\sqrt{\frac{n}{n^2}}}{\frac{n}{n}}=\frac{0+1-\sqrt{0}}{1}=1$$

(1e) Para este ejercicio, es importante hacer la comparación de grado del polinomio del numerador y denomidor de la función.

$$f(x)=x+\sin(2x)\longrightarrow m=1$$

$$g(x)=4x+1\longrightarrow n=1$$

Notamos que sucede que $m=n$, por lo que podemos aplicar la propiedad de amplificar por $\dfrac{1}{x}$ la fracción para finalmente cálcular el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(2x)}{4x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{\sin(2x)}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{4+0}=4$$

(1f) Este ejercicio debe ser mirado desde un analisis de los posibles valores del numerador de la fracción, ya que segun sabemos sucede que

$$|\sin(u)| \leq 1 \qquad |\cos(u)| \leq 1$$

Entonces como $\sin(u)$ y $\cos(u)$ son numeros menores a 1, por lo que en el limite terminan siendo insignificantes. Ademas si nosotros consideramos el numerador como un polinomio, notamos que este es de grado 0, mientras que el denominador de grado 1 Por lo que segun la definicion entregada en el inicio de la sección

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x+7)\cos(x^2) - \sin(4-x^3)}{x-\pi} = 0$$

2. (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} (I1-2010-2)$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(x-\sqrt{x^2-13})(I1-2013-tav)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3}+x\cos^2(x)} (I1-2014-1)$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} (I1-2014-tav)$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2})(I1-2009-2)$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+5x})(Control\ 1-2018-1)$

(2a) Si hacemos caso a la definición entregada al principio de la sección

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - 1 \longrightarrow m = \frac{2}{2} = 1$$

$$g(x) = x \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$, entonces podemos amplificar por $1/x$ la fracción, luego evaluar el limite y nos dara el valor.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}$$

Ahora es cuando es muy posible cometer un error, pero debemos notar que al ingresar a la raíz el x ya que hay que tener en cuenta que x tiende a **menos infinito**, por lo que se haria de la siguiente forma

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = -\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}$$

Esto lo hacemos, debido a que como $x \to -\infty$ la expresión nos daria un numero negativo antes de ingresarlo a la raíz, por lo que colocamos un signo negativo a la expresion y asi cambia su valor. Seguimos desarrollando la expresion

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1} = \frac{-\sqrt{1+0+0}-0}{1} = -1$$

(2b) A diferencia del ejercicio anterior, no es tan facil lograr hacer una comparación "visual" porque debemos llevarlo a la forma de una fracción mediante la racionalización de la siguiente manera:

$$\frac{x(x-\sqrt{x^2-13})}{1} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2-13}}{x+\sqrt{x^2-13}} = \frac{x(x^2-x^2+13)}{x+\sqrt{x^2-13}} = \frac{13x}{x+\sqrt{x^2-13}}$$

En seguida es notorio que es posible hacer una comparacion del grado en la fracción

$$f(x) = 13x \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = x+\sqrt{x^2-13} \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$ podemos calcular el limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{13x}{x+\sqrt{x^2-13}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{13x}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2-13}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{13}{1+\sqrt{1-\frac{13}{x^2}}} = \frac{13}{1+1} = \frac{13}{2}$$

(2c) Si seguimos el proceso de comparación de la fracción procedemos a ver los grados de los polinomios

$$f(x) = x^{5/3}+1 \longrightarrow m = 5/3$$

$$g(x) = x^{5/3}+x\cos^2(x) \longrightarrow n = 5/3$$

Tenemos que $m = n$, por lo que podemos hacer

$$\frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3}+x\cos^2(x)} \cdot \frac{x^{-5/3}}{x^{-5/3}} = \frac{1+x^{-5/3}}{1+x^{-2/3}\cos^2(x)}$$

Ahora si aplicamos el limite nos da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-5/3}}{1+x^{-2/3}\cos^2(x)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

(2d) Siguiendo el metodo de la definición del inicio de la sección, buscamos el grado de cada polinomio

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \longrightarrow n = \frac{1}{2}$$

En la fracción se presenta que los grados de ambos polinomios es $m = n = \frac{1}{2}$, por lo que seguimos el metodo clasico

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} = 1$$

(2e) Tenemos una expresión que no es identificable de manera visual ni matematica, ya que es de la forma

$$\infty - \infty$$

Ahora esta expresion es llevable a una expresion para lograr hacer una comparacion y calcular el limite, de la siguiente manera

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$\frac{x^2+2x+3-x^2-x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$f(x) = x+1 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2} \longrightarrow n = 1$$

$$m = n$$

Como los grados son iguales amplificamos por $\frac{1}{x}$.

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x^2}}}$$

Finalmente podemos aplicar el limite a la fracción

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{2}$$

(2f) Al igual que el ejercicio anterior, se debe resolver mediante la racionalización.

$$\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+5x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}}$$

Ahora podemos usar

$$f(x) = -2x \longrightarrow m = 1$$
$$g(x) = \sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x} \longrightarrow n = 1$$

Como los grados son iguales y al igual que en el ejercicio 2a, al momento de amplificar la fracción debemos colocar un signo negativo en ambas fracciónes.

$$\frac{-2x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{-2x}{x}}{-\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}\right)} = \frac{-2}{-\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}$$

Luego de esto aplicamos el limite a la fraccion y nos dara el resultado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{-\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)} = \frac{-2}{-(1+1)} = 1$$

3. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x)(I1-2019-1)$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}(I1-2015-2)$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}(I1-2016-1)$

   (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x-5}{|x^2+2x-3|}(I1-2019-2)$

   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+2x-1}(I1-2014-2)$

(3a) Es posible en este ejercicio, lograr hacer una comparación en la fracción siguiendo la definición de la sección

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} \longrightarrow m = 1$$
$$g(x) = x-1 \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$, es posible calcular el limite mediante la amplificacion de x^{-m}.

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

Finalmente es posible aplicar el limite a la expresión

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1-0} = 1$$

(3b) Notamos que tenemos un límite de la forma

$$\infty - \infty$$

Entonces para llevarlo a una forma que sea facil su interpretacion racionalizamos

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

Luego de esto es posible aplicar el criterio del grado de los polinomios

$$f(x) = x+1 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+x+1}+x \longrightarrow n = 1$$

Como en el ejercicio anterior, amplificamos por x^{-1}

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Finalmente aplicamos el limite y obtenemos el valor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$$

(3c) Podemos hacer de manera inmediata la comparacion de los polinomios

$$f(x) = x+2 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{9x^2+1} \longrightarrow n = 1$$

Debido a que $m = n$, amplificamos por x^{-n}

$$\frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}$$

Para terminar evaluamos el limite y nos da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{9+0}} = \frac{1}{3}$$

(3d)
(3e)
(3f)Tenemos una expresión que no es identificable de manera visual ni matematica, ya que es de la forma

$$\infty - \infty$$

Ahora esta expresion es llevable a una expresion para lograr hacer una comparacion y calcular el limite mediante la racionalización

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-1}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$\frac{x^2+x-1-x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

En seguida es posible aplicar la definición para hacer la comparación

$$f(x) = -x \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1} \longrightarrow n = 1$$

$$m = n$$

Como los grados son iguales amplificamos por $\frac{1}{x}$.

$$\frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+2x-1}{x^2}}}$$

Finalmente podemos aplicar el limite a la fracción

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0-0}} = \frac{1}{2}$$

4. (a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-10}-\sqrt{x^2-2x+1})(I1-2016-2)$

   (b) $\lim_{x\to\infty}\frac{|x-1|}{x-1}(I1-2016-tav)$

   (c) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x})(I1-2018-2)$

   (d) $\lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{6}{x}\right)(I1-2019-tav)$

   (e) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{x^2+\sin(x)}(Control1-2017-1)$

   (f) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+2x}+x+5)(Control\ 1-2018-1)$

   (g) $\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x-e^{-3x}}{e^x+4e^{-x}}(Control\,1-2018-2)$

5. A continuación se muestra una igualdad, encuentre el valor de a para que esta igualdad se cumpla:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2(I1-2013-2)$$

1.2.4 Teorema del sandiwch

1. Sea f una función que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < f(x) < \frac{10x-21}{2x}, \qquad 1 < x$$

Calcular $\lim\limits_{x\to\ 0^+} f(1/x)$

Solucion
Primero notamos que debemos hacer un cambio de variable, ya que la desigualdad esta respecto a x no $1/x$:

$$u = 1/x; \quad x = 0^+ \to u = \infty$$

Y debido a que cumple la condición de $1 < x$ podemos calcular el límite soliticado como

$$\frac{5\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1} < f(u) < \frac{10u-21}{2u}$$

$$\lim_{u\to\ \infty} \frac{5\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1} < \lim_{u\to\ \infty} f(u) < \lim_{u\to\ \infty} \frac{10u-21}{2u},$$

$$\lim_{u\to\ \infty} \frac{5\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}}}{\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u}}} < \lim_{u\to\ \infty} f(u) < \lim_{u\to\ \infty} \frac{10\dfrac{u}{u} - \dfrac{21}{u}}{2\dfrac{u}{u}},$$

$$5 < f(u) < 5$$

Por lo que con esto tenemos que se llega a que

$$\lim_{x\to\ 0^+} f(1/x) = \lim_{u\to\infty} f(u) = 5$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$Control 1- 2018-2

3. $\lim\limits_{x\to\ \infty} \sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right) - \sin(x) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{|x|}(1-\cos(x))$Control 1- 2019-1

5. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)(I1 - 2016 - tav)$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{x}\right)(I1-2019-1)$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-\cos(3x)}{x+14}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} x\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0} x^3\cos(35\pi x)$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\dfrac{1}{x}\right](I1-2019-2)$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos(x)}{4x^2} - \dfrac{1}{8}\right)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)(I1 - 2014 - TAV)$

12. $\lim_{x\to 0} x^2 2^{(1/\sin(x))}$

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{x+1}\cos\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)$

14. $\lim_{x\to\infty}\left(\sin(x+\frac{1}{x})-\sin(x)\right)$

(14) Este ejercicio supone una mayor dificultad debido a que tenemos la resta de dos valores insiertos, pero podriamos recurrir a la siguiente formula

$$\sin(a)-\sin(b)=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

siendo

$$a=x+\frac{1}{x}, \qquad b=x$$

$$\sin(x+\frac{1}{x})-\sin(x)=2\sin\left(\frac{x+\frac{1}{x}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+\frac{1}{x}+x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right)$$

Ahora con esto podemos calcular el limite aplicando el teorema de la compresión

$$-1\leq\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right)\leq 1$$

$$-2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\leq\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right)\leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\leq\lim_{x\to\infty}2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right)\leq\lim_{x\to\infty}2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$0\leq\lim_{x\to\infty}2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right)\leq 0$$

Entonces por el teorema de la compresión:

$$\lim_{x\to\infty}2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right)=0$$

Solucion

2) Para iniciar a resolver el límite es mejor primero analizar las partes de la función a evaluar, donde notamos que primero tenemos $\cos(x)$ que es una función que al infinito no sabemos su valor, pero si sabemos que se cumple la siguiente desigualdad

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad / \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Enseguida bien con esto podemos aplicar el límite en todas las partes de la desigualdad:

$$\lim_{x\to\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Finalmente si analizamos los límites conocemos el valor de los extremos ya que $\lim_{x\to\infty} ln(1/x) = 0$, entonces nos quedaría los siguiente

$$-\ln(1) \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \ln(1)$$

$$-0 \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Y por teomera del sandiwch queda demostrado que el límite da 0. ■

3) En este ejercicio se debe usar la formula:

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin(x) = \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{x + \frac{1}{x} - x}{2}\right)\cos\left(\frac{x + \frac{1}{x} + x}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{2}\right)$$

Ahora proseguimos ocupando Teorema del Sandiwch, donde segun sabemos el $\cos(\alpha)$ con α siendo cualquier valor cumple:

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

Enseguida remplazando α por $\dfrac{2x + \frac{1}{x}}{2}$:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{2}\right) \leq 1$$

$$-2\sin\left(\frac{1}{2x}\right) \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{2}\right) \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Aplicando el límite en toda la desigualdad

$$\lim_{x\to\infty} -2\sin\left(\frac{1}{2x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{2}\right) \leq \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$0 \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{2}\right) \leq 0$$

Por lo que el límite finalmente nos da

$$\lim_{x\to\ \infty} \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin(x) = 0$$

15. Demuestre que si $f(x)$ satisface que $-x^2 + 3x \leq f(x) - \sin(x) \leq x^4 + 3x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$

1.2.5 Repaso

1. $\lim_{x\to 9} \dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$
2. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x\pi)(1-\cos(x))}{x^2\sin(x)}$
4. $\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)(I1-2016-tav)$
5. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{[x]}{x}(I1-2018-2)$
6. $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin(x))}{2x-\pi}(Control1-2016-1)$
7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)}{|x-1|}\sin(x-1)(Control\,1-2018-2)$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)}(I1-2011-2)$
9. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+a^{-n}}$
10. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1-e^x}{1+2e^x}(I1-2019-2)$
11. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x-a)}-x = \dfrac{a}{2}$
12. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

    Hint: Usar $u = \sqrt[12]{x}$
13. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x})(I1-2018-2)$
14. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(\sin(\cos(x)))}{\cos(x)}(I1-2015-tav)$
15. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\cot(x)}-\dfrac{\pi}{2\cos(x)}\right)(I1-2013-tav)$

1.3 Asintotas verticales y horizontales

Dentro de las asintotas, veremos 3 durante el tramo del curso, las cuales seran:

- Horizontales: Sea L una asintota horizontal de la función $f(x)$ se debe cumplir

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

- Verticales: Un asintota vertical en un punto $x = a$, es una tal que se cumpla

$$\lim_{x\to\ a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

- Oblicuas(no se veran en esta sección): una asintota oblicua es una función del tipo $y = mx+n$, donde se cumple que

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

1. Determine las asíntotas verticales y horizontales de

$$f(x) = \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3 - x}$$

Solución:
• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2-\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x})^2}{1-\frac{1}{x^2}} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 2$ es una asintota horizontal.

• Ahora para el tema de las **asintotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3-x} = \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)}$$

Con esto logramos notar que tenemos 3 posibles candidatos que son $x = -1, 0, 1$, por lo que debemos ver si existe el límite en ese punto o es una asintota

$$\lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to0^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = 0$ e $x = 1$ son asintotas verticales pero $x = -1$ no.

2. Determine las asíntotas verticales y horizontales de

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{3x^2+7x+2}{x^2-x-6}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x^3-x}$

(e) $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2+x-2}$

(f) $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x-5}$

(g) $f(x) = x\sin(1/x)$

(h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3}$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+3}$

(j) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

(k) $f(x) = \dfrac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2}(I1-2018-1)$

(l) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$

Soluciones:
(a)
• Primero viendo las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1$$

• Enseguida para el tema de las **asintotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción, donde tenemos doss candidatos $x=\pm1$.

$$\lim_{x\to-1^\pm}\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to1^\pm}\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

Con esto llegamos a que $y=1$ es asintota horizontal y $x=-1,1$ son asintotas verticales.

(b)
• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+3}{5-x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{5}{x}-1} = -2$$

• Para las **asintotas verticales**, nosotros notamos que esta es clara, ya que, es el unico factor del denominador

$$\lim_{x\to5^\pm}\frac{2x+3}{5-x} = \pm\infty$$

Con esto llegamos a que $y=-2$ es asintota horizontal y $x=5$ son asintotas verticales.

(c)

• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+7x+2}{x^2-x-6} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}} = 3$$

Por lo que con esto concluimos que $y=3$ es una asintota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asintotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{3x^2+7x+2}{x^2-x-6} = \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

Con esto logramos notar que tenemos 2 posibles candidatos que son $x=-2,3$.

$$\lim_{x\to-2^\pm} \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to-2^\pm} \frac{(3x+1)}{(x-3)} = \frac{-6+1}{-5} = 1$$

$$\lim_{x\to3^\pm} \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x=3$ es asintotas verticales, pero $x=-2$ no.

(d)

• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+5}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{x-\dfrac{1}{x}} = 0$$

Por lo que con esto concluimos que $y=0$ es una asintota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asintotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^3-x} = \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)}$$

Ahora de manera mas evidente tenemos 3 candidatos que son $x=-1,0,1$.

$$\lim_{x\to0^\pm} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to-1^\pm} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to1^\pm} \frac{(x-5)}{x(x+1)} = \frac{1-5}{1(2)} = -2$$

Con esto concluimos que $x=0$ e $x=-1$ son asintotas verticales pero $x=1$ no.

(e)
• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 3$ es una asintota horizontal.

• Ahora para el tema de las **asintotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2} = \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

Con esto logramos notar que tenemos hay dos candidatos $x = -2, 1$, por lo que debemos ver si existe el límite en ese punto o es una asintota

$$\lim_{x\to-2^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = -2$ e $x = 1$.

(f)
• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2e^x}{e^x-5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\dfrac{5}{e^x}} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 0$ es una asintota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asintotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción, acá notamos altiro que es cuando se produce $e^x = 5 \to x = \ln(5)$

$$\lim_{x\to\ln(5)} \frac{2e^x}{e^x-5} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = \ln(5)$ es asintotas vertical.

(g)

• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin(1/x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(1/x)}{\frac{1}{x}} = 1$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 1$ es una asintota horizontal.

• Para analizar **Asintota vertical**, notamos que en el $x = 0$ no es continua.

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$$

El límite notamos que es posible resolver mediante el **Teorema del Sandiwch**.

$$-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$$

$$-x \leq x\sin(1/x) \leq x$$

$$-\lim_{x\to 0} x \leq \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) \leq \lim_{x\to 0} x$$

$$-0 \leq \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) \leq 0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$$

Con esto se concluye que la función no tiene asintotas ni verticales ni horizontales. $\square$

(h)

• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = -1$$

Concluimoss que las asintotas son $y = \pm 1$. **Es importante entender que en el segundo límite se le colca un** 0 **ya que** $x \to -\infty$.

• Para las **asintotas verticales**,debemos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x = 1, 3$.

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 3^\pm} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye las asintotas verticales son $x = 1$ e $x = 3$.

(i)

• Para esto partimos por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = 1$$

Por lo que con esto concluimos que $y=1$ es una asintota horizontal.

• Para analizar las **Asintotas verticales** debemos factorizar la función para verlo de una manera mas evidente

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}$$

Enseguida para ver la discontinuidad debemos analizar el límite en los puntos de $x = -1, -3$

$$\lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to-3^{\pm}} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye que la función tiene como asintotas verticales $x=-1$ e $x=-3$.

(j)

• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1$$

Con esto se llegamos a que $y=1$ es una asintota horizotal.

• Para las **asintotas verticales**, factorizamos el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x=\pm 1$.

$$\lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Con esto se concluye la asintota vertical es $x=-1$, y $x=1$ no es una asintota vertical.

(k)
• Para esto partimos por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2} = \frac{\dfrac{(1-1/\sqrt[3]{x})}{x}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = 0$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 0$ es una asintota horizontal.
notar que consideramos igual para $\pm\infty$ ya que la raíz de grado $1/3$ por lo que admite números negativos

• Para analizar las **Asintotas verticales** debemos factorizar la función para verlo de una manera mas evidente

$$\frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2} = \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Enseguida para ver la discontinuidad debemos analizar el límite en los puntos de $x = 1, 2$

$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Para este límite debemos recordar que $a^3 - b^3 = (a^2 - b^2)(a + ab + b)$ con $a = \sqrt[3]{x}, b = 1$

$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)} \frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to1^\pm} \frac{x^{2/3}(x-1)}{(x-1)(x-2)} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{x^{2/3}}{x-2)} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{(-1)(3)}$$

$$\lim_{x\to2^\pm} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye que la función tiene como asintotas verticales $x = 2$, y $x = 1$ no es una asintota ya que su límite existe.

(l)

• Para esto partiendo por las **asintotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Con esto se llegamos a que $y = \dfrac{1}{2}$ es una asintota horizotal.

• Para las **asintotas verticales**, debemos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2} = \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{-1}{2}^{\pm}} \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye que las asintotas verticales son $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{2}$. vertical.

3. Encuentre el valor de a y b para que se cumpla el siguiente límite :

$$\lim_{x\to\infty} ax + b - \frac{x^3+1}{x^2+1} = 0$$

Solución: En este ejercicio en el que nos piden encontrar valores para que algo se cumpla, partamos por lo mas simple que es llevar todo a una misma expresión llegando a suma de fracciones:

$$\frac{(ax)(x^2+1)+b(x^2+1)-x^3-1}{x^2+1} = \frac{ax^3+ax+bx^2+b-x^3-1}{x^2+1}$$

Enseguida si lo llevamos al límite , para que el límite sea 0 necesitamos que el exponente del denominador sea mayor al del numerador, esto partiremos factorizando cada expresión:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(a-1)+bx^2+ax+b-1}{x^2+1}$$

Ahora notamos que necesitamos que $a-1=0$ y $b=0$, para que el exponente mayor lo tenga el denominador(x^2) y si escribimos esto en el límite inicial seria:

$$\lim_{x\to\infty} x - \frac{x^3+1}{x^2+1} = 0$$

4. Determine el valor de $p \in \mathbb{R}$ de manera que que la función:

$$f(x) = \frac{x^6+(1+x^2)^3}{x^p}$$

tenga una asíntota horizontal.

Solución
Notemos que para que la función tenga una asíntota horizontal es cuando $x \to -\infty$ y el límite de la función es una valor fijo, entonces pensemos lo que pasa si $x \to \infty$, notemos que $x \neq 0$ por lo tanto podemos dividir el numerado y denominador por x^6

$$\frac{(x^6+(1+x^2)^3)\cdot 1/x^6}{\frac{x^p}{x^6}}$$

notemos que en el numerado todos los elementos que tengan un grado menor que 6 van a tender a ser 0, por lo tanto sobreviven dos elementos, por lo tanto ya tengo un valor fijo en el numerador, mientras tanto en el denominador tengo que obtener un valor fijo por lo tanto $P = 6$

1.4 Continuidad

Continuidad de una Función

Definición: Sea f una función $\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, entonces f se dice continua en $x \in \mathbb{D}$, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

∘ Por lo que, es necesario que se cumplan tres premisas

1. $f(a)$ está definido ($a \in \mathbb{D}$)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

∘ Tambien se dice que una función $f$es **continua desde la derecha en un número** a si se cumple

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua desde la Izquierda en a** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Por otro lado durante el curso se nos preguntaran caracteristicas sobre una función que no es continua que se reducen a dos casos:

- Discontinuidad reparable: aquella discontinuidad no esencial, donde es posible calcular el límite en cierto punto $x = a$, pero $a \notin \mathbb{D}$ de la función.

  Un ejemplo claro es $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$. Basta definir la función como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- Discontinuidad no reparable: aquella discontinuidad para la cual no existe una función $g(x)$ continua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq x_0$. Es decir, no se puede "reparar" la discontinuidad asignándole un valor en el punto. Se puede deber a dos causas

  1. Límites laterales no coinciden. Ejemplo: $\dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$.
  2. La función diverge en el punto. Ejemplo:

1. Determine todos los números reales $a|$ y b para los cuales la siguiente función es continua sobre todo $\mathbb{R}$. Justifique, para los valores encontrados, por qué la función es continua sobre todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & x<1 \\ x^2+bx & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x-2a & 2<x \end{cases}$$

La forma de proceder en este ejercicio esque para asegurar la continuidad de la función, debemos igualar los límites laterales para $x = 1$ e $x = 2$.
Partiendo por $x = 1$

$$\lim_{x \to\ 1^-} ax + 2 = \lim_{x \to\ 1^+} x^2 + bx$$

$$a + 2 = 1 + b \to a + 1 = b$$

Donde obtenemos nuestra primera ecuación. $x = 2$

$$\lim_{x \to\ 2^-} x^2 + bx = \lim_{x \to\ 2^+} 3x - 2a$$

$$4 + 2b = 6 - 2ab + a = 1$$

Con esta segunda ecuación que obtenemos, llegmaos al sistema de ecuaciones

$$a + 1 = b \tag{2}$$

$$a + b = 1 \tag{3}$$

Este tiene o por solucion

$$a = 0; \qquad b = 1$$

Por lo que la función inicial termina siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x<1 \\ x^2+x & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x & 2<x \end{cases}$$

2. ¿Que valores a y b deben tener para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a + \dfrac{\sin(bx)}{x} & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ ax + b\cos(x) & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Nos piden que la función sea continua en $\mathbb{R}$, por lo que debemos hacer que los límites laterales en $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$ deben ser iguales, donde llegaremos a un sistema de ecuaciones

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + a + \frac{\sin(bx)}{x} = \lim_{x \to 0^+} x$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + a + \frac{b\sin(bx)}{bx} = 0$$

$$0 + a + b = 0 \longrightarrow a = -b$$

Enseguida para $x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} ax + b\cos(x)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2} + 0$$

Por lo tanto para que sea continua debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a = -b \tag{4}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2} \tag{5}$$

$$a = 1; \qquad b = -1$$

Quedandonos finalmente $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 + \dfrac{\sin(-x)}{x} & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x - \cos(x) & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} (x \neq 0)$ (I1-2012-1)

   (a) Es posible definir $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

   (b) Demuestre que, dado cualquier número $a \in (0, 1/2)$ hay algun valor x_0 para el cual $f(x_0) = a$.

Solución:
Lo que debemos hacer acá es calcular el límite para $x = 0$ en el que notamos que debemos racionalizar para lograr calcularlo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{(x)(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{2}$$

Con esto llegamos a la conclusión que deberiamos definir $f(x)$ de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

4. Sea $(I1 - 2011 - 2)$

$$f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$$

Demuestre que no existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in \text{Dom } f$.

Solución
Para que exista una función $F(x) = f(x)$ se debe dar que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, pero notamos que hay un problema en $x = 1$, donde se debe dar al menos que exista el límite de $f(x)$. Para el calculo del límite notamos que debemos hacer un cambio en la parte de abajo de la fracción, debido a la presencia del valor absoluto, por lo que nos quedarían de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{-(x-1)} = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = 2$$

Como los límites laterales no son continuos, no es posible que existe un $F(x)$ tal que $F(x) = f(x)$.

5. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ mx+n & 1 \leq x \end{cases}$$

Determine condiciones sobre m y n de manera que f sea continua en $x=1$.

Solución
acá lo que debemos hacer es que los límites laterales deben ser continuas y luego el valor del límite debe ser igual al de la función en $x=1$, por lo que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} x^2+1 = \lim_{x\to 1^+} mx+n$$

$$2 = m+n$$

Con lo que llegamos a la conclusión que debe darse que $m+n=2$ $\square$

6. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-[x]}+x & x>1 \\ x-[x] & x<1 \end{cases}$$

es posible definirla en $x=1$, de modo que sea continua en dicho punto? $(I1-2014-1)$

Solución
Para lograr realizar lo que nos piden, se verifica primero que los límites laterales coincidan dando el mismo valor.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} x-[x] = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-[x]}+x$$

$$1-0 = 0+1$$

$$1 = 1$$

Con esto llegamos a que los límites laterales efectivamente dan lo mismo, por lo que la función deberia definirse con ese valor para $x=1$ quedando como

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-[x]}+x & x>1 \\ 1 & x=1 \\ x-[x] & x<1 \end{cases}$$

7. Analice las discontinuidades de la función

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{x - x^2}$$

Solución:
Primero debemos notar cuales son los puntos donde se produce una discontinuidad

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)}$$

Habiendo factorizado la función notamos que son $x = 0, 1$, ahora debemos calcular los límites para decir si esa discontinuidad es removible o no.

- $x = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x + \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{x(1-x)} \frac{\pi}{\pi} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{\pi x} \frac{\pi}{1-x} = -\pi
\end{aligned}$$

- $x = 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x + \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x - \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi(x-1))}{x(1-x)} \cdot \frac{-\pi}{-\pi} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-\sin(\pi(x-1))}{\pi(x-1)} \cdot \frac{-\pi}{x} = -\pi
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que tanto $x = 0$ como $x = 1$ son **discontinuidades removibles**, ya que sus límites existen.

8. Encuentre los valores de a y b que hacen que f sea continua en todo $\mathbb{R}$: $(I1-2015-2)$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x<2 \\ ax^2-bx+3 & 2\leq x<3 \\ 2x-a+b & x\geq 3 \end{cases}$$

Solución:
Para asegurar la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$ por lo que los límites laterales en $x=2$ e $x=3$ deben ser lo mismo, pues en el resto de los puntos f es continua por propiedades de las funciones continuas.

- Para $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-} x+2=4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} ax^2-bx+3=4a-2b+3$$

Con esto llegamos a

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$$
$$4=3+4a-2b$$
$$1=4a-2b \tag{6}$$

- Analogamente, para $x=3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} ax^2-bx+3=9a-3b+3$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+} 2x-a+b=6-a+b$$

Lo cual nos obliga a cumplir

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$$
$$9a-3b+3=6-a+b$$
$$3=10a-4b \tag{7}$$

Ahora juntando ambas ecuaciones llegamos a un sistema donde tenemos

$$1=4a-2b$$
$$3=10a-4b$$
$$a=b=\frac{1}{2}$$

9. Determine todos los valores de a para los que la función $(I1-2018-2)$

$$f(x)=\begin{cases} |x+a| & x\geq a \\ x^2+1 & x<a \end{cases}$$

10. Considere la función $(I1 - 2019 - 1)$

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ \cos(bx) + a & x < 0 \end{cases}$$

(a) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es continua en $x = 0$?

(b) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es derivable en $x = 0$?

a) Para que la función f sea continua en 0, los límites laterales tiene que ser iguales a $f(0) = b$. como $\lim_{x \to 0^+} f(x) = b$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 + a$ entonces$1 + a = b$. Así la funciónf es continua para $a \in \mathbb{R}$ y para $b = a + 1$.

b) Para que f sea una función derivable en 0 el límite $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(h)}{h}$ tiene que existir. Calculamos los límites laterales

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{ah + (a+1)\sqrt{h+1} - (a+1)}{h} = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}$$

de la misma manera

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos((a+1)h) + a - (a+1)}{h} = 0$$

Entonces la función f es derivable en = si tenemos $\frac{3}{2}a + \frac{1}{2} = 0$ o sea $a = -\frac{1}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$. Con esto nos quedaría finalmente $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ \\ \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) - \dfrac{1}{3} & x < 0 \end{cases}$$

11. Encuentre los valores de a y b de manera que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$. $(I1 - 2019 - tav)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x < -1 \\ ax+b, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

Notar que para $x < -1$ la función racional esta siempre definida a al igual que el polinimio $ax+b$ entre $-1 < x < 0$. Ademas, si $x > 0$,$\sin(1/x)$ es continua, por lo que dicho tramo también lo es. En conclusión, para cualquier a y b, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Ahora analizamos en $x = -1$ y en $x = 0$. Para que sea continua en dichos puntos, los límites laterales tienen que coincidir:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} x+1 = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} ax+b = -a+b$$

de donde obtenemos que $a = b$: Por otro lado, para todo $x \neq 0$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \to -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \leq \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0^+} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax+b = b$$

lo que implica que $b = 1$ y por la ecuación anterior $a = 1$. En conclusión, para que f sea continua en $\mathbb{R}$, a y b deben ser 1. Donde $f(x)$ finalmente seria: función sea continua en todo $\mathbb{R}$. $(I1 - 2019 - tav)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x < -1 \\ x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

12. Considere la función $(I1 - 2019 - 2)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\sin(ax)}{x} + \cos(ax), & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ e^{a/x} + 2, & x < 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de $a > 0$ la función f es continua en $x = 0$?

Partamos por establecer que los límites laterales deben ser iguales al valor de $f(0)$ por lo que podemos establecer los siguiente:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

Enseguida remplazando en los puntos, primero por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} a\frac{\sin(ax)}{x} \cdot \frac{a}{a} + \cos(ax) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} a^2\frac{\sin(ax)}{ax} + \cos(ax) = a^2 + 1 = 2$$

Por lo que nos quedaría

$$a^2 + 1 = 2 \longrightarrow a^2 = 1$$

Con esto tenemos la posibilidad de que $a = \pm 1$, pero podemos salir de la duda calculando el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} + 2 = 2$$

Notamos que no queda otra opción que $\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} = 0$, donde esto solo sucede cuando $0 < a$, ya que si a fuera un número negativo tendriamos $\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} = \infty$. Estos valores se deben a que si el límite viene por el 0 por la izquierda viene siendo un número negativo, lo que produce una $e^{-\infty} = 0$. Por lo que $a = 1$, donde nos queda la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} + \cos(x), & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ e^{1/x} + 2, & x < 0 \end{cases}$$

13. Determine el (los) valor(es) $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$ $(Control\, 1 - 2016 - 1)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|(1 - \cos(x))}{x^2}, & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

14. Determine si el $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe $(Control\ 1 - 2016 - 1)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 + \sqrt[3]{x - 9}}{x - 1}, & x < 1 \\ \dfrac{\sin(x - 1)}{12x - 12}, & x > 1 \end{cases}$$

1.5 Teorema del Valor Intermedio

Teorema: Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.

1. Sea f una función continua en $[0, 2]$ tal que $f(0) = f(2)$. Demuestre que existe $x_1 \in [0, 1]$ tal que $f(x_1) = f(x_1 + 1)$ $(I1 - 2013 - 1)$

   Hint: Considere usar la función $g(x) = f(x + 1) - f(x)$ en el intervalor $[0, 1]$

   Solución: Primero lo que debemos hacer es seguir el Hint y tomar en cuenta la función $g(x) = f(x+1) - f(x)$, la cual la podemos usar ya que es una resta de funciones continuas donde lo que se tiene que hacer es lograr demostrar que existe un $g(c) = 0$, $c \in [0, 1]$.

   Enseguida Tomamos $g(0) = f(1) - f(0)$ y $g(1) = f(2) - f(1)$, acá debemos considerar 3 posibles casos

   - Caso 1: Si $f(1) < f(0)$, $g(0) < 0$ y por ende $f(1) < f(2)$ dando así $g(1) > 0$, donde con esto queedaria demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
   - Caso 2: Si $f(1) > f(0)$, $g(0) > 0$, entonces $f(1) > f(2)$ dandonos $g(1) < 0$, donde con esto quedaría demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
   - Caso 3: Si $f(1) = f(0)$, $g(0) = 0$,por lo tanto $f(1) = f(2)$ dando así $g(1) = 0$, donde con esto quedaría demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$. ■

2. Sea f una función continua tal que: $(I1 - 2013 - 2)$

   Maximo $f(x) :\in [a, b]= a^2$ y Minimo $f(x) :\in [a, b]= b^2$

   Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c^2$.

   acá se debe primero crear una función auxiliar con la información dada, donde podríamos recurrir a

   $$g(x) = f(x) - x^2$$

   Ocupamos esto ya que así podemos usar los extremos del intervalo para usar **TVI**.

   $$g(a) = f(a) - a^2 \leq 0$$

   $$g(b) = f(b) - b^2 \geq 0$$

   Con esto queda demostrado que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c^2$. ■

3. Demuestre que las curvas definidas por $f(x) = 10x^3 + x^2 + 5x - 11$ y $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10$ se intersectan en algun punto $x_0 > 0.(I1 - 2014 - 1)$

acá consideremos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = 8x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Primero notamos que esta función es un polinomio por lo que es continua en $\mathbb{R}$, por lo que debemos hacer es demostrar que en un intervalor $[0, a]$, con $a \geq 1$. Por lo que ahora si elegimos $a = 1$ y evaluando een los extremos llegamos a

$$h(0) = -1 < 0$$
$$h(1) = \ 2 > 0$$

Por lo que con esto queda demostrado que las curvas se intersectan en un punto $x_0 \in [0, 1]$, el cual cumple con $x_0 > 0$. ■

4. Demuestre que existe al menos una solución real de la ecuación

$$\sqrt[3]{x} = 1 - x$$

en el intervalo $]0, 1[$ $(I1 - 2014 - 2)$

Solución
Definiendo la función auxiliar

$$f(x) = (1 - x) - (\sqrt[3]{x})$$

Dado que f(x) es función continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular en $]0, 1[$ ahora si evaluamos en los extremos del intervalo

$$f(0) = 1 > 0$$
$$f(1) = -1 < 0$$

Entonces por el Teorema del Valor Intermedio, f toma el valor cero en el intervalo $]0, 1[$ con $c \in]0, 1[$ y esa es una solución a esta ecuación.

5. Demuestre que, por lo menos, hay dos soluciones reales distintas de la ecuación $(I1-2014-TAV)$
$$\cos^2(x) - 3x^2 = -\sin(x)$$

Solución Definamos
$$f(x) = (-\sin(x)) - (\cos^2(x) - 3x^2)$$
Notamos que esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que podemos aplicar el TVI. Buscamos valores $x_1; x_2$ reales y distintos tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Como f es continua, con miras a usar el Teorema del Valor Intermedio, notamos que
$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 3\frac{\pi^2}{4} - 1 > 0$$
$$f(0) = -\sin(0) - \cos^2(0) + 3 \cdot 0^2 = -1 < 0$$
$$f(x) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 = 3\frac{\pi^2}{4} + 1 > 0$$
As, por el teorema del valor intermedio, existe$x_1 \in (\frac{-\pi}{2}; 0)$ tal que $f(x_1) = 0$, y existe $x_2 \in (0; \frac{\pi}{2})$ tal que $f(x_2) = 0$. Las que serian nuestras dos soluciones. ■

6. Sea f una función continua en $[1; 6]$ tal que $f(2) = 1$ y $f(3) = 6$: Demuestre que existe $c \in (2; 3)$ tal que $f(c) = c$: $(I1 - 2015 - 1)$

Si consideramos la función auxiliar
$$h(x) = f(x) - x$$
Donde notamos que es una función continua en el intervalo $x \in [2, 3]$, por lo que podemos evaluar en los bordes
$$h(2) = 1 - 2 < 0$$
$$h(3) = 6 - 3 > 0$$
Y con esto segun el TVI queda demostrado que existe un $c \in (2; 3)$ tal que $f(c) = c$. ■

7. Demuestre que el polinomio $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 2$ tiene por lo menos dos raíces reales. $(I1 - 2015 - tav)$

Solución
Sabemos que p es una función continua, y vemos que $p(-1) = -1$, $p(0) = 2$ y $p(3) = -25$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existen $x_1 in(-1; 0)$ y $x_2 \in (0; 3)$ tales que $p(x_1) = p(x_2) = 0$.

8. Demuestre que la ecuación $\sin(x)+x = x^2$ tiene al menos una solución real. $(I1-2016-tav)$

9. Dadas las funciones f y g continuas en $[a;b]$;tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$; demuestre que existe un número c tal que $f(c) = g(c)$: $(I1-2017-1)$

Solucion
Definimos una función auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Luego h es continua en $[a;b]$ porque f y g lo son, además:

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) < 0$$

Luego $c \in (a;b)$ tal que $h(c) = 0$ Con esto queda demostrado que existe un c tal que $h(c) = 0$ lo que implicaria

$$h(c) = 0 \to f(c) = g(c) \quad \blacksquare$$

10. Demuestre que la ecuación $\ln(x) = 3-2x$ tiene por lo menos una solución real $(I1-2017-2)$ e $(I1-2019-1)$

Solución
Para probar que la ecuación pedida tiene al menos una solución real considerarems la siguiente función continua

$$h(x) = \ln(x) - 3 + 2x.$$

Notamos que

$$h(e) = 1 - 3 + 2e > 0, \qquad h(1) = -1 < 0$$

luego el Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe un punto $x_0 \in (1, e)$ tal que $h(x_0) = 0$. Por lo tanto tal x_0 es una solución de la ecuación dada.

11. Sea g una función continua en $[-1;2]$ tal que $g(-1) > 1$ y que $g(2) < 4$. Demuestre que existe $c \in (-1;2)$ tal que $g(c) = c^2$. $(I1-2018-2)$

Solución
Si $h(x) = g(x) - x^2$, tenemos que h es continua en $[-1;2]$, además $h(-1) = g(-1) - 1 > 0$ y $h(2) = g(2) - 4 < 0$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio tenemos que existe $c \in (-1;2)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, tal que $g(c) = c^2$.

12. Sea $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Muestre que existe $c \in]-1; 4[$ tal que $f(c) = 2$. $(I1 - 2019 - tav)$

Solución
Como f es un polinomio, entonces es continua en todo R. Además notamos que $f(-1) = 4$ y $f(0) = 0$. Ya que $0 < 2 < 4$, el Teorema del Valor Intermedio implica que existe $c \in] - 1; 0[C] - 1; 4[$ tal que $f(c) = 2$.

13. Demuestre que si $h(x) = x^2 + 7sen(x)$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(c) = 50.(I1 - 2019 - 2)$