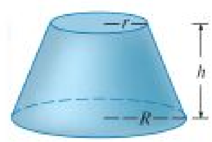
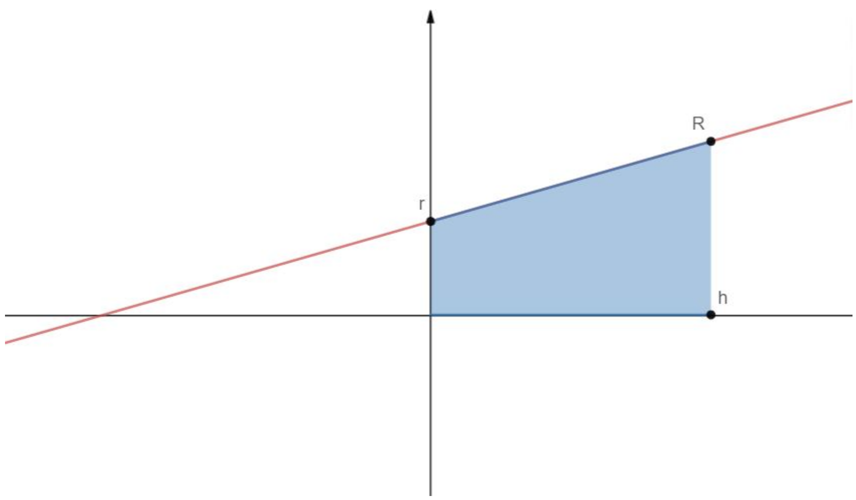
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

Ayudantía 15 - MAT1610

1. Calcular el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r, como se muestra en la figura.



Solución:
Note que el cono circular truncado puede obtenerse al rotar alrededor del eje x el área del trapecio de altura h, base menor r y base mayor R, como en la figura
Note el área del trapecio se asocia al área bajo la recta que pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, R),

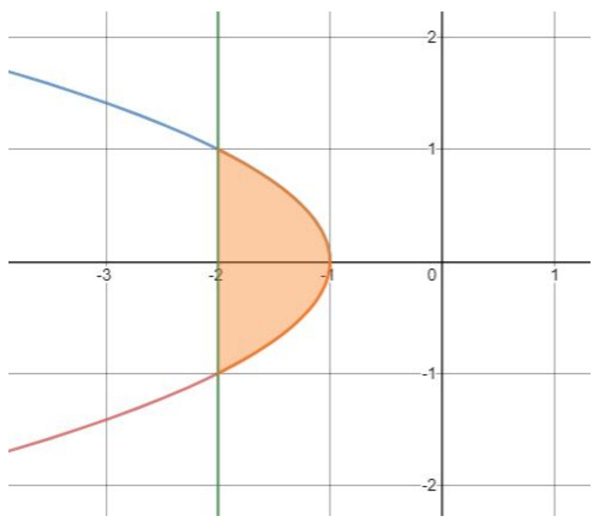


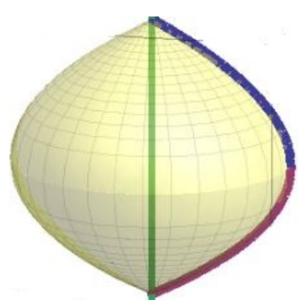
entre 0 y h. Dicha recta tiene ecuación $y = mx + r$ con $m = \frac{R-r}{h-0} = \frac{R-r}{h}$, entonces,
$$V = \int_0^h \pi(mx+r)^2 dx = \pi \int_0^h (mx+r)^2 = \pi \left.\frac{(mx+r)^3}{3m}\right|_0^h = \frac{(mh+r)^3}{3m} - \frac{(r)^3}{3m}$$
Por lo tanto,
$$V = \frac{\pi}{3m}\left((mh+r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi}{3\frac{R-r}{h}}\left((R-r+r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3(R-r)}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$$
Así, el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r es $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$ unidades de volumen.

2. Determinar el volumen del sólido generado por la rotación del área limitada por las curvas asociadas a $-y^2 - 1 = x$ y la recta $x = -2$ alrededor de la recta $x = -2$
Solución:
Puntos de Intersección: $-y^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$, es decir, los puntos son $(-2, -1)$, $(-2, 1)$.

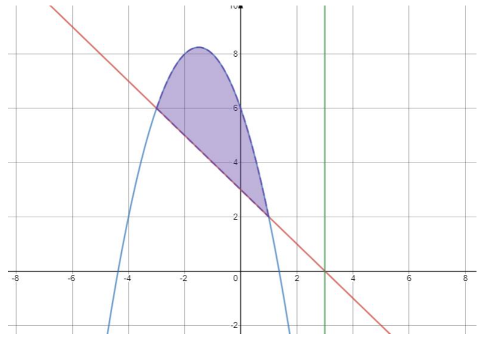
$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi(-y^2 - 1 - (-2))^2 dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (-y^2 + 1)^2 dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (y^4 - 2y^2 + 1) dy \\
&= \pi \left(\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^3}{3} + y \Big|_{-1}^{1} \right) \\
&= \left(\frac{16\pi}{15} \right)
\end{aligned}
$$

Así el volumen es $\frac{16\pi}{15}$ unidades de volumen.
Idea gráfica





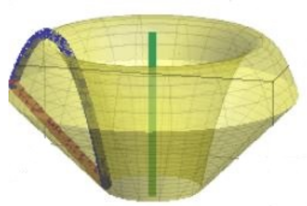
3. Hallar el volumen del sólido generado en la rotación del área limitada por la parábola $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $y = 3 - x$ alrededor de la recta $x = 3$ y del eje x.
Solución:
El área a rotar se muestra en la figura



Intersección entre las curvas:

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 6 = 3 - x \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+3)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Idea gráfica del sólido generado:



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-3x+6-(3-x)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-2x+3)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(-3x^2-6x+9+x^3+2x^2-3x)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(x^3-x^2-9x+9)\right) dx \\
&= 2\pi \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{9x^2}{2}+9x\right]\Bigg|_{-3}^{1} \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{9}{2}+9-\left(\frac{81}{4}+9-\frac{81}{2}-27\right)\right] \\
&= 2\pi \left[-\frac{80}{4}+\frac{72}{2}+27-\frac{1}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[43-\frac{1}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[\frac{128}{3}\right] \\
&= \frac{256\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Así, el volumen del sólido es $\frac{256\pi}{3}$ unidades de volumen.

4. Determinar el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje y del área limitada por las curvas asociadas a $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.
Solución:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 (2\pi x e^{-x^2}) dx \\ &= \pi \int_0^1 (2x e^{-x^2}) dx \\ &= -\pi \int_0^{-1} e^u du \\ &= \pi \int_{-1}^{0} e^u du \\ &= \pi \left(e^u \big|_{-1}^{0} \right) \\ &= \pi(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

Así el volumen es $\pi(1 - e^{-1})$ unidades de volumen. Idea gráfica: