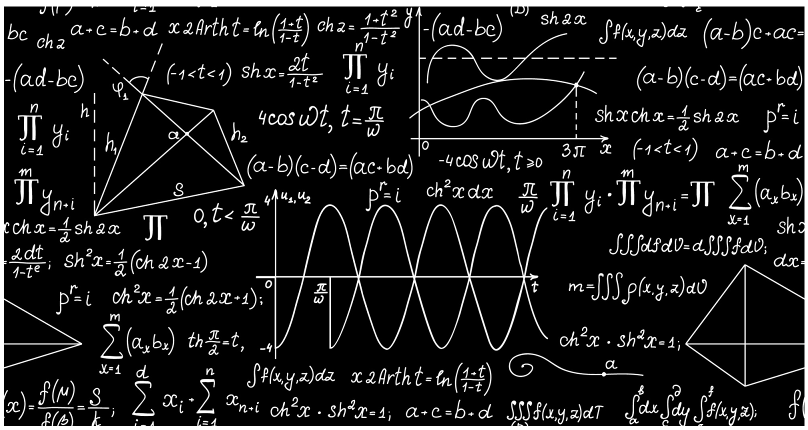
Pontificia Universidad Católica de Chile
*F*acultad de Matemáticas - Departamento de Matemática

Resumen Calculo I



Sebastián Breguel, Alumno de Ingeniería Civil

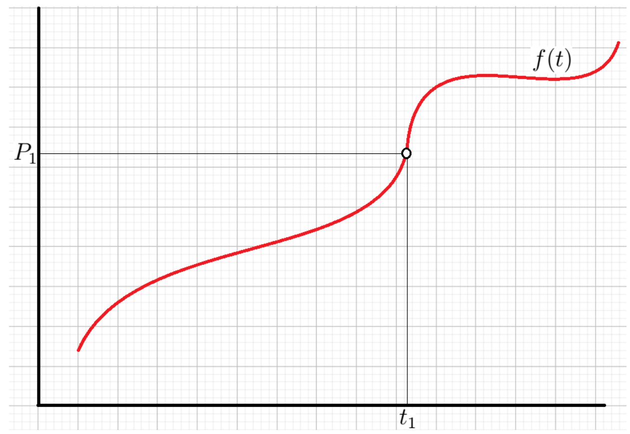
sebabreguel@uc.cl

1 Límites y continuidad

1.1 Concepto de límite

Antes de iniciar a hacer cálculos números y demases, **me gustaría primero entregar una definición de un límite mas bien teórico con un ejemplo cotidiano**.

• Imagínense que ustedes van marcando con una **línea de pintura** el camino que llevan por un recorrido x que es muy largo, en cierto punto ustedes se detienen habiendo recorrido el trayecto en un t tiempo, se dan cuenta que pueden llevar el camino trazado a una función $f(t)$. Al día siguiente se acuerdan que en un momento de tiempo t_1 no pudieron marcar un punto del camino que llamaremos P_1 y el profesor les pide estimar su posición en base al momento t_1 en que no pudieron marcar ese punto. **¿Como lo calcularían si la función presenta un problema en ese punto P_1?**



acá el problema es que la función $f(t)$, al igual que la pintura no nos logra entregar ese valor. En estos casos es cuando el cálculo de un límite toma una medida practica, que vendria siendo finalmente la estimación de la posición en base a $f(t)$ nos dara finalmente ese punto en base al camino que nosotros estabamos recorriendo.

$$\lim_{t \to t_1} f(t) = P_1$$

enseguida pasando ya a una definición mas formal del límite sería la siguiente:

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad de a, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es l si podemos obtener valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a a l tomar x lo suficientemente cercano a a. Se anota matemáticamente como

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Definición: Sea $f(x)$ una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces se dice que $f(x)$ es una *forma indeterminada* si en $x = a$ si $f(a)$ es de la forma $0/0$, ∞/∞,0^{∞}, $\infty/0$, $0 \cdot \infty$, etc...

Leyes de los limites

Teorema: es importante recalcar que **la existencia de un límite** depende totalmente de que se cumpla la condición de que sus límites laterales convergan al mismo valor, es decir si

$$\lim_{x\to\ a^+} f(x) = \lim_{x\to\ a^-} f(x) = L \to \lim_{x\to\ a} f(x) = L$$

Algunas de las **propiedades de los límites**, que nos permiten "jugar" con las expresiones se define como:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- límite de una constante: $\lim_{x\to a} \alpha = \alpha$
- Homogeneidad: $\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha\mathbf{A}$
- Superposición: $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$
- Linealidad: $\lim_{x\to a}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)] = \alpha\mathbf{A} \pm \beta\mathbf{B}$
- Producto: $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Cuociente: $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$, Si y solo si $B \neq 0$

Cambio de variable

Una técnica que es habitual en el curso es la sustitución. La idea detrás de realizar esta operación es siempre la misma: una expresión complicada de trabajar y/o analizar es reemplazada pertinente y correctamente por otra expresión mucho más sencilla de observar.

Teorema: Sean f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcioness tales que:
• $\lim_{x\to a} f(x) = l$ con $f(x) \neq l$ en una vecinidad reducida de a entonces

$$u = f(x)$$

Entonces cuando $x \to a$ tendremos $u \to l$, finalmente nos queda

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \longrightarrow \lim_{u\to l} g(u) = M$$

1.2 Formulas y propiedades utiles

Durante el desarrollo del curso y mas específicamente en la primera parte de límites, tendran que ocupar muchas fórmulas constantemente, donde la mayoria de estas son:

■ **Polinomios**

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $x^2 - (r+s)x + rs = (x-r)(x-s)$
- $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
- $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Ahora mas como fórmulas generales para factorizar polinomios, cuando estos no son tan tipicos son dos

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{R}$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n:$ **Impar**

■ **Propiedades trigonométricas**

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\beta)\sin(\alpha)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a \mp b}{2}\right)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

■ **límites notables**: son un conjunto de límites que es importante que sepan de "memoria" entendiendo el proceso que hay detras, pero saberlos puede hacerlos ganar una gran cantidad de tiempo.

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{u \to 0} (1+u)^{(1/u)} = e$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^{kx} - 1)}{x} = k\ln(a)$

1.3 límites al infinito

En esta sección se hablara de infinitos, donde aprenderemos que hay infinitos mas grandes que otros, como por ejemplo x y $2x$, uno es el doble del otro, mientras que por ejemplo x y x^2 al infinito su diferencia es abismal, por lo que en esta sección aprenderemos a categorizar estas diferencias al infinito.

Definicion: Sean f, g dos funciones de polinomios $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Va a depender del grado de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, Donde M es el grado de $f(x)$ y N el de $g(x)$. Donde tenemos 3 posibles casos

- Caso 1: $M > N$, se produce que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
- Caso 2: $M = N$, se produce que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \quad a \in \mathbb{R}$
- Caso 3: $M < N$, se produce que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

•**Tip general:**, para esta seccion, cuando tenga por ejemplo $\infty - \infty$ intentar llevarlo a alguna forma donde se pueda hacer la comparacion(Como alguna fracción) o alguna formula que junte los terminos para asi poder compararlos.

1.4 Asintotas verticales y horizontales

Dentro de las asintotas, veremos 3 durante el tramo del curso, las cuales seran:

- Horizontales: Sea L una asintota horizontal de la función $f(x)$ se debe cumplir

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$$

- Verticales: Un asintota vertical en un punto $x = a$, es una tal que se cumpla

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

- Oblicuas(no se veran en esta sección): una asintota oblicua es una función del tipo $y = mx+n$, donde se cumple que

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

1.5 Continuidad

Continuidad de una Función

Definición: Sea f una función $\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, entonces f se dice continua en $x \in \mathbb{D}$, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

∘ Por lo que, es necesario que se cumplan tres premisas

1. $f(a)$ está definido ($a \in \mathbb{D}$)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

∘ Tambien se dice que una función $f$es **continua desde la derecha en un número** a si se cumple

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua desde la Izquierda en a** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Por otro lado durante el curso se nos preguntaran caracteristicas sobre una función que no es continua que se reducen a dos casos:

- Discontinuidad reparable: aquella discontinuidad no esencial, donde es posible calcular el límite en cierto punto $x = a$, pero $a \notin \mathbb{D}$ de la función.

  Un ejemplo claro es $f(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$. Basta definir la función como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- Discontinuidad no reparable: aquella discontinuidad para la cual no existe una función $g(x)$ continua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq x_0$. Es decir, no se puede "reparar" la discontinuidad asignándole un valor en el punto. Se puede deber a dos causas

  1. Límites laterales no coinciden. Ejemplo: $\dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$.
  2. La función diverge en el punto. Ejemplo:

1.6 Teorema del Valor Intermedio

Teorema: Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.

2 Derivadas y diferenciabilidad

2.1 Derivada por definición

La derivada de una función f en un número $x = a$, denotada por $f'(a)$, por definicion al limite se da por dos formulas las cuales son:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Donde tendremos que la derivada existe si y sólo si el límite existe.
TIP: Comprobar derivabilidad de una función en $x = a$ implica verificar la continuidad de la función en a y además, comprobar la existencia del límite con el cual se define la derivada.

2.2 Rectas tangentes

La formula por definición de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

2.3 Reglas de derivación

Dentro de las derivas encontraran que estas siguen ciertas reglas, a continuación tienen algunas reglas/formulas que por su dificultad no es necesario dedicarle una sección a cada una:

- Derivada de una constante:
$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$
- Regla de la potencia:
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
- Multiplo constante:
$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$
- suma:
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$
- resta:
$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$
- Exponente natural:
$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Trigonometricas:

- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x)$
- $\frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x) \cdot \cot(x)$
- $\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x) \cdot \tan(x)$
- $\frac{d}{dx} \cot(x) = -\csc^2(x)$

Trigonometricas inversas:

- $\frac{d}{dx}\sin^{-}1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\tan^{-}1(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\sec^{-}1(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\cos^{-}1(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\csc^{-}1(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\cot^{-}1(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

A continuación hay tres secciones que se a distintas reglas con el uso de las anteriores.

2.3.1 Regla del producto y del cuociente

Las reglas de estas sección, siguen las siguientes formulas:

- regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]$$

- regla del cuociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) - f(x)\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]}{g^2(x)}$$

2.3.2 Regla de la cadena

Esta regla se compone de que uno tiene una función que al ser derivada:

$$F(x) = f(g(x)) \to \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}[f(g(x))]\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

Tambien destacar que si se ocupa la siguiente notación:

$$y = f(u) \qquad u = g(x)$$

Tendremos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

2.3.3 Derivada implicita

En muchos casos tenemos funciones donde $y = f(x)$, pero estas estan dentro de una ecuación donde $f(x)$ no es despejable de la forma clasica por lo que se deriva y como si fuera una variable, solo que la derivada como tal todavia nos falta y lo usamos como una regla de la cadena. Tomemos un ejemplo simple:

$$y^2\cdot x + x^2\cdot y = 0$$
$$2y\cdot y'\cdot x + y^2 + 2x\cdot y + x^2\cdot y' = 0$$

2.3.4 Funciones Inversa

La derivada de una función inversa, viene dada por:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

3 Aplicación de las derivadas

3.1 Razon de cambio

Durante la sección anterior vimos como derivar distintos tipos de funciones, ahora debemos ante un problema, lograr establecer una relación mediante una ecuación/función, en base a la información entregada de tal manera que podamos llegar a resultados. **TIP:** para esta sección es importante el manejo de derivada en el formato de $\frac{d}{dx}$, x como variable.

3.2 Teorema de Rolle

Este teorema se basa en que se deben cumplir 3 hipotesis para que este se pueda cumplir, que son:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces existira un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- En palabras simples, este teorema nos dice que si en cierto intervalo continuo(1) y diferenciable(2), donde se cumpla la tercera condición la derivada sera 0 en algun punto en el intervalo.

3.3 Teorema del Valor Medio

Este teorema es una version mas extendida del Teorema de Rolle, ya que primero tiene las siguientes condiciones:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces tendremos que $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Donde si notamos es el teorema de rolle, sin la tercera condición, que fuerza a que $f'(c) = 0$.

- Este teorema dicho de otra manera, es que sea una función $f(x)$ continua y diferenciable en un intervalo (a, b), se va a dar que un punto en el intervalo va a tener como derivada la pendiente de la recta formada por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

3.4 máximos, minimos y grafica de funciones

En el momento que a nosotros nos entregan una función, nosotros podemos sacar una cantidad importante de datos como lo son la derivada, puntos criticos, monotonia de la funcion, asintotas, etc... entre otras. Para todo esto tomaremos como caso de ejemplo una función $f(x)$ que cumple con que:

- Encontrar puntos criticos:

  $$f(x) \Rightarrow f'(x) = 0$$

  Supongamos que $a, b\, y\, c$ son puntos criticos($-\infty < a < b < c < \infty$).

- Monotonia:

  Teniendo $f'(x)$ tendremos que:

  $$f'(x) > 0 \rightarrow \text{Creciente} \qquad f'(x) < 0 \rightarrow \text{Decreciente}$$

  Con la información del punto anterior podemos construir los intervalos: $(-\infty, a)$,(a, b),(b, c) y (c, ∞). Luego de esto lo llevamos a una tabla con al derivada:

	$-\infty, a$	a, b	b, c	c, ∞
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

  Esta información se lee de la siguiente manera:

  $f'(x) > 0$ en el intervalo de $(-\infty, a) \rightarrow$ Creciente.

  $f'(x) < 0$ en el intervalo de (a, b) y $(b, c) \rightarrow$ Decreciente.

  $f'(x) > 0$ en el intervalo de $(c, \infty) \rightarrow$ Creciente.

- Clasificar puntos criticos:

  Para este criterio tenemos dos tecnicas que son:

  1) Prueba de la primera derivada que se basa en lo siguiente:
     a) si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en c
     b) si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en c
     c) si $f'(x)$ no cambia de signo en c no hay ni máximo ni mínimo local.

     Por lo que en base al caso de ejemplo y los intervalos de monotinia tendriamos que
     - $f'(a)$ punto máximo local.
     - $f'(b)$ ni máximo ni mínimo local.
     - $f'(c)$ punto mínimo local.
  2) Prueba de la segunda derivada:
     a) Si $f''(x) > 0$ en un punto c, entonces f tiene un mínimo local en c.
     b) Si $f''(x) < 0$ en un punto c, entonces f tiene un máximo local en c.

- Concavidad:

  Esta determinada por la segunda derivada de la función $f(x)$ Donde si

  $$f''(x) > 0 \rightarrow \text{Concava hacia arriba} \qquad f''(x) < 0 \rightarrow concavahaciaabajo$$

  Tambien se le llama punto de inflexión, a un punto c donde en este se hace un cambio de la concavidad. Por ejemplo si para $x < c$ $f''(x) > 0$ y para $x > c$ $f''(x) < 0$ tendremos que ese es un punto de inflexión(lo mismo de forma alrevez).

- Asintotas:

  - Horizontales: Sea L una asíntota horizontal de la función $f(x)$ se debe cumplir

    $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

  - Verticales: Un asíntota vertical en un punto $x = a$, es una tal que se cumpla

    $$\lim_{x\to\ a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

  - Oblicuas(no se veran en esta sección): una asíntota oblicua es una función del tipo $y = mx + n$, donde se cumple que

    $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

    $$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

3.5 L'Hópital

Durante la sección de limites, muchas veces se encontraron con limites que al ser evaluados daban $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Por lo que ahora veremos la regla de L'hopital para evaluar de forma mas rapida este tipo de problemas, esta regla se basa en que si tengo:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Uno puede derivar $f(x)$ y $g(x)$ para nuevamente evaluar el limite. En caso de no llegar a un valor y quedar de una forma indeterminada $0/0$ o ∞/∞, se puede ocupar L'Hopital hasta que se llegue a un valor constante(Siempre que al evaluar la fracción quede como una de las dos formas indeterminadas que se permiten usar L'Hopital).

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = ... = C$$

Tip, muchas veces se encontraran con limites que al evaluarse, son de la forma

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$$

Por lo que aca no podemos usar L'Hopital, pero si usamos algebra podremos llegar a una forma indeterminada que nos permita usar la L'Hopital:

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{1/f(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Donde notamos que aca si podemos usar L'Hopital, a pesar de que en un principio no se podia usar logramos adaptar el limite de tal forma de poder usar la regla. Tambien pueden encontrarse con otro tipo de problemas, pero siempre intentar de llevar a una forma de fracción que al evaluarse de $0/0$ o ∞/∞.

3.6 Optimización

Dentro de esta sección se les plantearan problemas que deben modelar mediante ecuaciones y funciones, donde aca deben lograr encontrar puntos máximos y mínimos para esta función que plantearon. Como recomendación les digo que hagan los siguientes pasos:

1. **Comprender que es lo que me estan pidiendo**, donde pueden plantearse algunas preguntas como: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?

2. **Hacer un diagrama/dibujo del problema** puede llegar a ser util para identificar ecuaciones y la función a modelar.

3. **Asignar variables o parametros** a ciertas cosas, como lo pueden ser la altura h, area como A, etc...

4. **Llevar estas variables a una función**, final que tenga una variable que debe ser la variable que buscamos maximizar o minimizar.

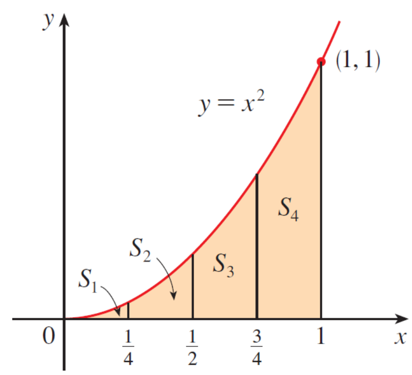
5. **Aplicar las tecnicas explicadas en la sección de máximos y mínimos**, aplicandola para llegar a la solución pedida.

4 Integrales

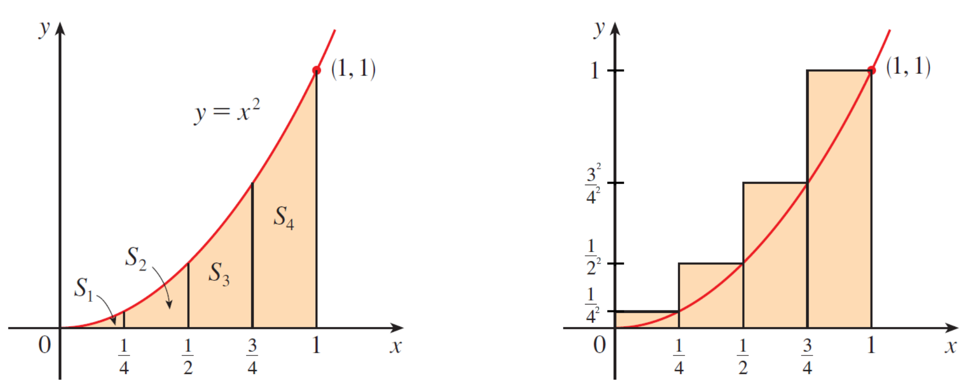
Antes de inciar esta sección es importante explicar algunas cosas y dar definiciones importantes:

- **Definición Antiderivada:** Una función F recibe el nombre de antiderivada de f sobre un intervalo I, si
$$F'(x) = f(x)$$
para todo x en I.

- ¿Como podemos encontrar el area bajo la curva de una función?, Esta pregunta es facil de resolver para ejercicios donde se forman figuras geometricas conocidas, pero para funciones como $f(x) = x^2$ notamos que es mas dificil encontrar el area bajo la curva para el intervalo $x = [0, 1]$. Donde, podremos ver que si lo graficamos seria algo como esto: Ahora una

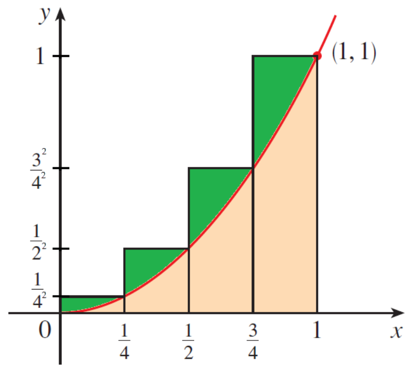


manera mas facil de resolver el problema del area, es representando el area bajo la curva como una suma del area de cierta cantidad de rectangulos entre cierto intervalo de la funcion x^2. Donde la altura para estos rectangulos puede ser tomada por dos criterios: el punto extremo derecho o izquierda, donde esto vendria siendo el valor de $f(x)$ para el valor de x en el extremo izquierdo del rectangulo y de igual manera para el derecho. En este caso el area lo dejamos como 4 rectangulos, con el metodo del punto extremo derecho: de la siguiente manera:

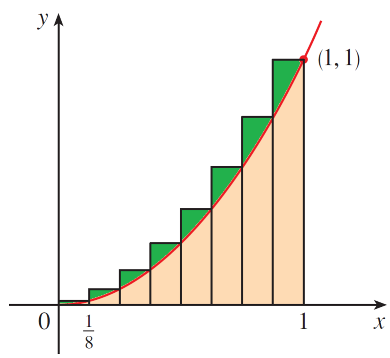


(a) (b)

Notamos que al ver esto, la forma de resolver el problema nos genera un error del area original que queriamos, que vendria dada por la sección que ahora es de color verde:

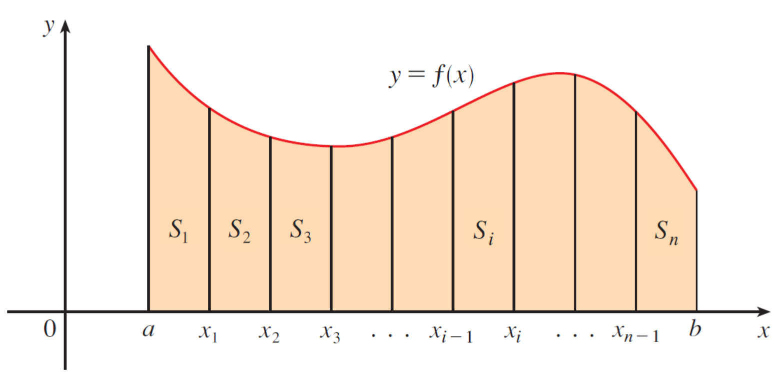


Si lo hacemos con una partición de 8 rectangulos para el area, donde si incluimos el error quedaria:



Donde es notorio que el error es menor, por que este viene dado por la cantidad de rectangulos y su ancho con el que representemos el area. Con esto mientras mayor sea la cantidad de rectangulos, mejor sera la aproximación con el area original, por lo que si tomamos como n el numero de rectangulos tendremos el siguiente caso:

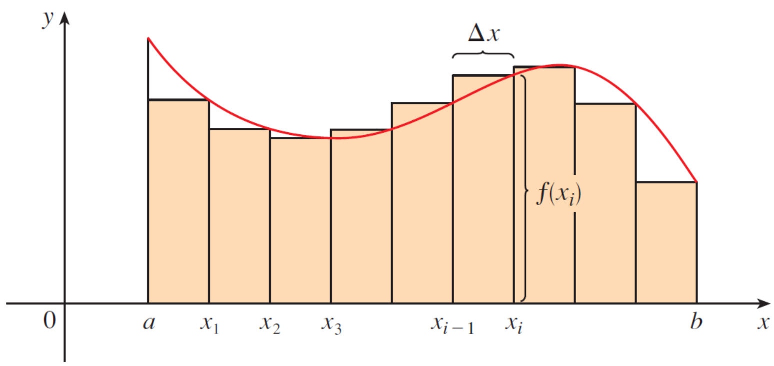
- Si denotamos S como la region del area bajo la curva de una función $y = f(x)$ en el intervalo $x \in (a, b)$, podemos hacer n particiones de esta región de la siguiente manera:



Con esto podemos denotar que si queremos que cada intervalo dentro de S sea igual podemos establecer:

$$\Delta = \frac{b-a}{n}$$

Luego haciendo la aproximación del area, por el metodo de los rectangulos con la aproximación por el extremo derecho, este graficamente sera:



Con esto tendremos que el area de S sera:

$$f(x_1)\cdot\delta x + f(x_2)\cdot\Delta + ... + f(x_n)\cdot\Delta x$$

Finalmente junto con que mientras mayor fuera el numero de particiones menor seria el error de la particion, tendremos la siguiente definición:
El área A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x] = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

Donde esta ultima expresión se denotame como la **Suma de Riemann**

Esto nos lleva a una segunda definición y a un teorema que son:

- **Integral definida** Si f es una función continua definida para$a \leq x \leq b$ divida el intervalo a, b en n subintervalos de igual ancho. Haga que $x_0 = a, x_1, ...x_n = b$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1*, x_2*, ..., ...x_n*$ como los puntos muestras en estos subintervalos, de modo x_i*que se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f , desde a hasta b**, es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\Delta x$$

  siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$

- **Teorema**: Si f es integrable entre $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\cdot\Delta x$$

  Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_i = a + i\Delta x$$

4.1 Cotas

Algunas propiedas de Comparación de las integrales nos dicen lo siguiente:

1. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

4.2 Teorema Fundamental del Cálculo

Antes de empezar esta nueva sección, debemos dar a conocer algunas propiedades de las integrales:

- $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b cdx = c(b-a)$ c una constante
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ c una constante
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)dx$

Teorema Fundamental del Calculo:

- **Parte 1**: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leq x \leq b$$

  es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $g'(x) = f(x)$

- **Parte 2**: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

  donde F es una antiderivada de $f(x)$, es decir una función tal que $F'(x) = f(x)$.

Tambien por otro lado, podemos tener una funcion $g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \int_{h(x)}^{j(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

Si ademas tenemos que $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ tendremos que $g(x)$

$$g(x) = F(j(x)) - F(h(x))$$

Al momento de derivadar $g(x)$, tendremos que usar la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$g'(x) = F'(j(x)) \cdot j'(x) - F'(h(x))h'(x) = f(j(x)) \cdot j'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

Tip: Cuando les presenten una integral en la forma de que $g(x)$, lo que deben hacer es en cuentas resumidas es evaluar la funcion $f(t)$ en cada extremo y multiplicarlo por la derivada de la función de cada extremo. Esto mismo proceso se hace en la parte 1 del teorema que es:

$$g'(x) = f(x) \cdot (x)' - f(a) \cdot (a)' = f(x)$$

4.3 Integrales indefinidas y la Regla de sustitución

En la sección anterior vimos la integrales definidas(los extremos sobre los cuales se evalua), pero en esta sección veremos mas en detalle integrales indefinidas y la regla de la sustitución sobre estas(tambien sirve para definidas).

Integral indefinida: En estas integrales, donde no hay que evaluar la antiderivada de la función en cuestión se denotan de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ y C una constante.
La siguiente tabla tiene las integrales indefinidas que deberian saber:

- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
- $\int k\, dx = kx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
- $\int \sec^2(x) = \tan(x) + C$
- $\int \csc^2(x) = -\cot(x) + C$
- $\int \sec(x)\tan(x) = \sec(x) + C$
- $\int \csc(x)\cot(x) = -\csc(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$
- $\int -\frac{1}{1+x^2}dx = \cot^{-}1(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x) + C$

- $\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \csc^{-}1(x) + C$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arcsec}(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$
- $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + C$

La Regla de sustitución:

- En Integrales Indefinidas: Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

- En Integrales definidas: Si tenemos $g'(x)$ una función $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$ entonces

$$x = a \to u = g(a) \qquad x = b \to u = g(b)$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$