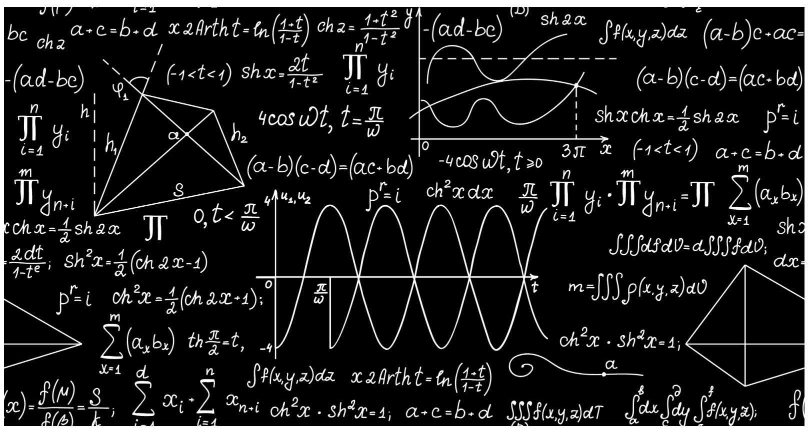
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas - Departamento de Matemática

Integrales Cálculo I

Compilado de Ejercicios Resueltos



Sebastián Breguel, Alumno de Ingeniería Civil

sebabreguel@uc.cl

Contents

1 Integrales **2**
- 1.1 Sumá de Riemann . . . 5
- 1.2 Cotas . . . 9
- 1.3 Teorema Fundamental del Cálculo . . . 15
- 1.4 Integrales indefinidas y la Regla de sustitución . . . 26

2 Aplicaciones de Integrales **34**
- 2.1 Área entre curvas . . . 34
- 2.2 Volúmenes . . . 36

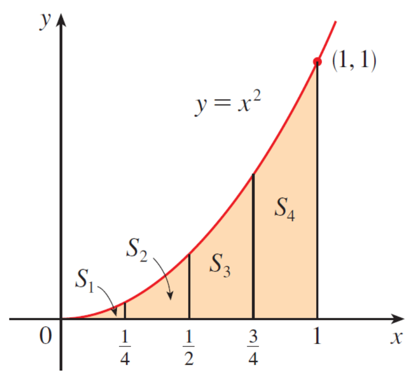
3 Técnicas de Integración **42**
- 3.1 Integración por partes . . . 42
- 3.2 Integrales Trigonométricas . . . 49
- 3.3 Sustitución Trigonométrica . . . 53
- 3.4 Fracciones Parciales . . . 59

1 Integrales

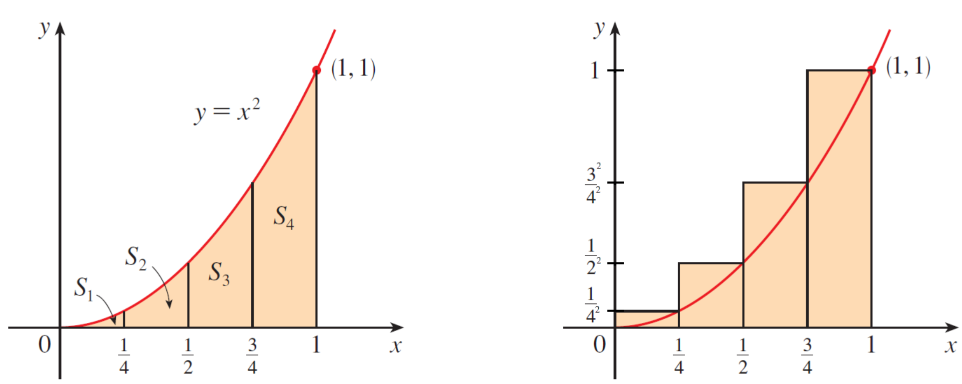
Antes de inciar esta sección es importante explicar algunas cosas y dar definiciones importantes:

- **Definición Antiderivada:** Una función F recibe el nombre de antiderivada de f sobre un intervalo I, si
$$F'(x) = f(x)$$
para todo x en I.

- ¿Como podemos encontrar el area bajo la curva de una función?, Esta pregunta es facil de resolver para ejercicios donde se forman figuras geometricas conocidas, pero para funciones como $f(x) = x^2$ notamos que es mas dificil encontrar el area bajo la curva para el intervalo $x = [0, 1]$. Donde, podremos ver que si lo graficamos seria algo como esto: Ahora una

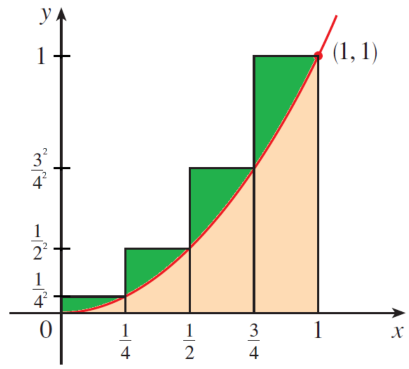


manera mas facil de resolver el problema del area, es representando el area bajo la curva como una suma del area de cierta cantidad de rectangulos entre cierto intervalo de la función x^2. Donde la altura para estos rectangulos puede ser tomada por dos criterios: el punto extremo derecho o izquierda, donde esto vendria siendo el valor de $f(x)$ para el valor de x en el extremo izquierdo del rectangulo y de igual manera para el derecho. En este caso el area lo dejamos como 4 rectangulos, con el metodo del punto extremo derecho: de la siguiente manera:

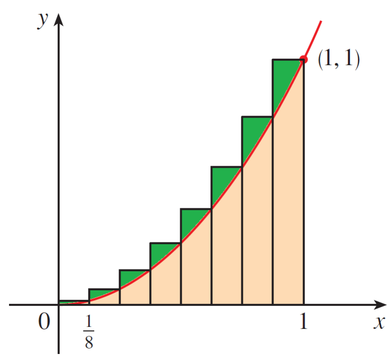


(a) (b)

Notamos que al ver esto, la forma de resolver el problema nos genera un error del area original que queriamos, que vendria dada por la sección que ahora es de color verde:

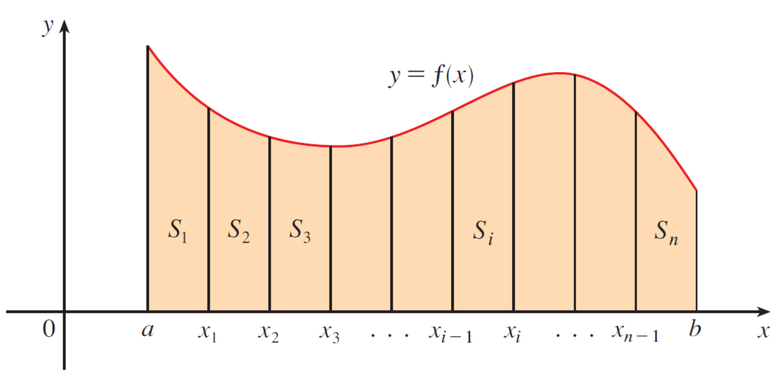


Si lo hacemos con una partición de 8 rectangulos para el area, donde si incluimos el error quedaria:



Donde es notorio que el error es menor, por que este viene dado por la cantidad de rectangulos y su ancho con el que representemos el area. Con esto mientras mayor sea la cantidad de rectangulos, mejor sera la aproximación con el area original, por lo que si tomamos como n el numero de rectangulos tendremos el siguiente caso:

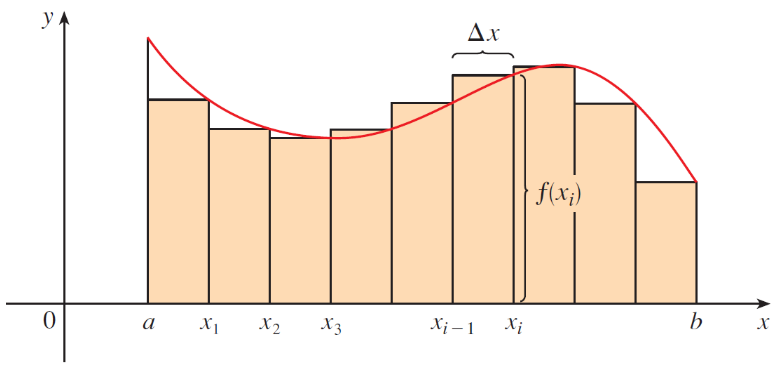
- Si denotamos S como la región del area bajo la curva de una función $y = f(x)$ en el intervalo $x \in (a, b)$, podemos hacer n particiones de esta región de la siguiente manera:



Con esto podemos denotar que si queremos que cada intervalo dentro de S sea igual podemos establecer:

$$\Delta = \frac{b-a}{n}$$

Luego haciendo la aproximación del area, por el metodo de los rectangulos con la aproximación por el extremo derecho, este graficamente sera:



Con esto tendremos que el area de S sera:

$$f(x_1) \cdot \delta x + f(x_2) \cdot \Delta + ... + f(x_n) \cdot \Delta x$$

Finalmente junto con que mientras mayor fuera el numero de particiones menor seria el error de la particion, tendremos la siguiente definición:
El área A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Donde esta ultima expresión se denotame como la **Suma de Riemann**

Esto nos lleva a una segunda definición y a un teorema que son:

- **Integral definida** Si f es una función continua definida para$a \leq x \leq b$ divida el intervalo a, b en n subintervalos de igual ancho. Haga que $x_0 = a, x_1, ...x_n = b$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1*, x_2*, ..., ...x_n*$ como los puntos muestras en estos subintervalos, de modo x_i*que se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f , desde a hasta b**, es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\Delta x$$

  siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$

- **Teorema**: Si f es integrable entre $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i*) \cdot \Delta x$$

  Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_i = a + i\Delta x$$

1.1 Sumá de Riemann

1. Calcule el siguiente Límite:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \tag{1}$$

Primero debemos lograr identificar tanto nuestro $\triangle(x)$, por lo que reescribimos (1):

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n*1/n^2}{(n^2+k^2)*1/n^2}=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

Enseguida logramos identificar nuestro $\triangle(x)=\frac{k^2}{n^2}$, con b=1 y a=0. Por lo que podemos reescribir la primera sumatoria (1) como:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}$$

Donde nuestro $f(x)$ es continua en x $\in$ [0,1], por lo que ahora procedemos a calcular la:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

2. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n+2}{n}}+\cdots\sqrt{\frac{n+n}{n}}) \tag{2}$$

Lo que debemos hacer acá llevar el límite a una sumatoria:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)$$

Como en el ejercicio anterior procedemos a identificar $\triangle(x)$. Pero hay dos interpretaciones:

$$\triangle_1(x)=\sqrt{\frac{k}{n}};\quad f_1(x)=\sqrt{1+x}\quad o\quad \triangle_2\,(x)=\sqrt{1+\frac{k}{n}};\quad f_2(x)=\sqrt{x}$$

Solución 1: Teniendo elegido $\triangle_1(x)$ y $f_1(x)$, $b=1$ y $a=0$ llegando a:

$$\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Solución 2: Teniendo elegido $\triangle_2(x)$ y $f_2(x)$, $b=2$ y $a=1$ llegando a:

$$\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}|_1^2=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

3. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{(1+n)/n} + e^{(2+n)/n} + \cdots + e^{(n+n)/n}\right) \tag{3}$$

Como en los ejercicios 1 y 2 debemos hacer el límite una sumatoria y luego ordenarla para encontrar así una expresión para llegar a una integral, donde esto sería:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(e^{(1+\frac{k}{n})}\right)$$

Llegando a $\triangle(x) = 1 + \dfrac{k}{n}$, con b=2 y a=1, y identificando $f(x) = e^x$, donde la reescribimos como integral:

$$\int_1^2 e^x \mathrm{d}x = e^x|_1^2 = e^2 - e^1$$

4. Escriba el siguiente límite como una suma de Riemann y calcule el valor de la respectiva integral definida:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5n^3k + \sqrt{7}k^4}{2n^5} \tag{4}$$

Para desarrollar este problema hay dos maneras o resolviendo la sumatoria en una sola o gracias a las propiedades de las sumatorias separarlo en dos y luego sumarlas. Acá realizaremos la segunda por temás de comodidad:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5n^3k + \sqrt{7}k^4}{2n^5} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5n^3k}{2n^5}}_{c} + \underbrace{\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{7}k^4}{2n^5}}_{d}$$

Para cada sumatoria identificamos respectivamente:

$$\triangle_c(x) = \frac{k}{n},\ f_c(x) = x \quad y \quad \triangle_d\,(x) = \frac{k^4}{n^4},\ f_d(x) = x^4$$

Enseguida llevándolo a las integrales llegamos a:

$$c = \frac{5}{2}\int_0^1 x\mathrm{d};\quad d = \frac{\sqrt{7}}{2}\int_0^1 x^4\mathrm{d}x \longrightarrow c = \frac{5}{2}\left(\frac{x^2}{2}|_0^1\right);\quad d = \frac{\sqrt{7}}{2}\left(\frac{x^5}{5}|_0^1\right)$$

Sumando c y d llegamos a:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{1-0}{2}\right) + \frac{\sqrt{7}}{2}\left(\frac{1-0}{5}\right) = \underbrace{\frac{5}{4}}_{c} + \underbrace{\frac{\sqrt{7}}{10}}_{d}$$

5. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{na}+\frac{1}{na+b}+\frac{1}{na+2b}+\cdots+\frac{1}{na+(n-1)b}\right) \tag{5}$$

Llevamos el límite a la siguiente sumatoria:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{na+(k-1)b}$$

Reordenando llegamos a:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{(na+(k-1)b)\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a+\frac{(k-1)}{n}b}\right)\frac{1}{n}$$

Donde logramos identificar $\triangle(x)=\dfrac{k-1}{n}$ y $f(x)=\dfrac{1}{a+bx}$. Donde ahora llevamos todo esto a una integral:

$$\int_0^1\frac{1}{a+bx}\mathrm{d}x=\frac{\ln(a+bx)}{b}|_0^1=\frac{\ln(b+a)-\ln(a)}{b}$$

6. Escriba el siguiente límite como una suma de Riemann y calcule el valor de la respectiva integral definida: **(I3-2019-TAV)**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} \tag{6}$$

Notamos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^2+kn})\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

Identificamos a $\triangle(x)=\dfrac{k}{n}$ y $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. Donde ahora llevamos todo esto a una integral:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{1+x}|_0^1=2\sqrt{2}-2$$

7. Calcular el siguiente límite: **Control 3 2017-1**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^3}+\frac{(n+2)^2}{n^3}+\cdots\frac{(n+n)^2}{n^3}\right) \tag{7}$$

Llevando a una sumatoria el límite (7) y lo ordenaremos:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n+k)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{k}{n})^2$$

Enseguida con la sumatoria ordenada llegamos a que $\triangle(x)=1+\frac{k}{n},\ f(x)=x^2$, con b=2 y a=1. Ocupando todo esto lo llevamos a (7) a:

$$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}|_1^2=\frac{8-1}{3}$$

1.2 Cotas

Algunas propiedades de Comparación de las integrales nos dicen lo siguiente:

1. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Demostrar las siguientes desigualdades:

1. **(I3-2014-2)**

$$3 \leq \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\mathrm{d}x \leq 5 \tag{8}$$

Notamos que la función $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+2}$ es estrictamente Decreciente en el intervalo de x $\in$ [0,2], por lo que procedemos a aplicar Donde logramos notar lo siguiente:

$$b = 2; \quad a = 0; \quad m = f(2) = \frac{9}{6}; \quad M = f(0) = \frac{5}{2}$$

Por lo que Ahora reemplazando logramos demostrar lo solicitado:

$$\frac{9}{6}2 \leq \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\mathrm{d}x \leq \frac{5}{2}2 \longrightarrow 3 \leq \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\mathrm{d}x \leq 5 \quad \blacksquare$$

2. $(I3-2018-2)$

$$2 \leq \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x}_{\alpha} \leq 2\sqrt{2} \tag{9}$$

Para este ejercicio identificamos $f_1(x) = \sqrt{1+x^2}$, la cual es una función par, por lo que(10) es equivalente a plantear:

$$2 \leq \underbrace{\int_0^1 2\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x}_{\beta} \leq 2\sqrt{2}$$

Donde ahora $f_2(x) = 2\sqrt{1+x^2}$ es una función creciente en x $\in$ [0,1], por lo que llegamos a la conclusión de:

$$b = 1; \quad a = 0; \quad m = f(0) = 2; \quad M = f(1) = 2\sqrt{2}$$

Remplazando y teniendo en cuenta que $\alpha = \beta$:

$$(1-0)2 \leq 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \leq (1-0)2\sqrt{2} \longrightarrow 2 \leq 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{2} \quad \blacksquare$$

3.

$$\frac{3\pi}{9+\pi^2} \leq \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{2\pi}{3} \tag{10}$$

Notamos que nuestra $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ es una función par, por lo que la ecuación (13) es equivalente a:

$$\frac{3\pi}{9+\pi^2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Ahora para encontrar m y M, debemos hacer un análizis a la nuestra $f(x)$, la cual notamos que es una función decreciente ya que $\cos(x)$ y $\dfrac{1}{1+x^2}$ son funciones decrecientes en el intervalo de x $\in$ [0,3], por lo que llegamos a la siguiente conclusión:

$$b = \frac{\pi}{3}; \quad a = 0; m = f(\frac{\pi}{3}) = 2\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\pi^2}{9}}; \quad M = f(0) = 2\frac{1}{1+0}$$

Lo cual lo reemplazamos en la propiedad conocida llegando a:

$$\frac{(\frac{\pi}{3}-0)2\frac{1}{2}}{1+\frac{\pi^2}{9}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{(\frac{\pi}{3}-0)2}{1} \Longleftrightarrow \frac{3\pi}{9+\pi^2} \leq \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{2\pi}{3}\blacksquare$$

4.

$$\frac{4}{5} \leq \int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq 4 \tag{11}$$

Acá se repite el proceso del ejercicio anterior, donde notamos que nuevamente $f(x)$ es decreciente en el intervalo que se reestablecerá x∈[0,2], reescribimos la ecuación (14):

$$\frac{4}{5} \leq \int_0^2 \frac{2\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq 4$$

Junto con los valores que concluimos:

$$b = 2; \quad a = 0; \quad m = f(2) = \frac{2}{1+4}; \quad M = f(0)\frac{2}{1+0}$$

Reemplazando en la propiedad ya conocida:

$$\frac{(2-0)2}{5} \leq \int_0^2 \frac{2\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq \frac{(2)2}{1} \Longleftrightarrow \frac{4}{5} \leq \int_{-2}^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq 4\blacksquare$$

5. $(I3 - 2019 - TAV)$

$$\underbrace{\frac{2}{5}}_{\alpha} \leq \arctan(2) + \frac{\pi}{4} \leq \underbrace{3}_{\beta} \tag{12}$$

Como notamos que esta desigualdad no es tan obvia como el resto, por lo que analizaremos α y β por separado. Primero analizamos la función $f(x) = \arctan(2) + \dfrac{\pi}{4}$, con α:

$$\arctan(2) + \frac{\pi}{4} \geq \arctan(2) = \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

También siguiendo el análisis:

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \geq \int_0^2 \frac{1}{5}\mathrm{d}x = \frac{2}{5} \Longleftrightarrow \arctan(2) + \frac{\pi}{4} \geq \frac{2}{5}$$

Ya habiendo demostrado la primera parte de la desigualdad, procedemos a hacer lo mismo con el lado derecho:

$$\arctan(2) + \frac{\pi}{4} = \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^2 \mathrm{d}x = 3\blacksquare$$

6. $(I3 - 2018 - TAV)$

$$\frac{1}{14} \leq \int_1^3 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \leq 1 \tag{13}$$

Para este ejercicio identificamos $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$, la cual es una función decreciente para x $\in$ [1,3]. Con lo que concluimos:

$$b = 3; \quad a = 1; \quad m = f(3) = \frac{1}{28}; \quad M = f(1) = \frac{1}{2}$$

Remplazando:

$$\frac{3-1}{28} \leq \int_1^3 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \leq \frac{3-1}{2} \longrightarrow \frac{1}{14} \leq \int_1^3 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \leq 1 \quad \blacksquare$$

7. $(I3-2017-2)$

$$\frac{3}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5}\mathrm{d}x \leq \frac{3}{5} \tag{14}$$

Para este ejercicio identificamos $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$, la cual es una función decreciente para x $\in$ [0,3]. Con lo que concluimos:

$$b = 3; \quad a = 0; \quad m = f(3) = \frac{1}{8}; \quad M = f(0) = \frac{1}{5}$$

Remplazando:

$$\frac{3-0}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5}\mathrm{d}x \leq \frac{3-0}{5} \iff \frac{3}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5}\mathrm{d}x \leq \frac{3}{5} \quad \blacksquare$$

Analizar cual integral es la que tiene mayor valor o si son iguales:

1.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\mathrm{d}x, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x \tag{15}$$

Este ejercicio es básicamente hacer un análisis de las funciones de cada integral tomando $f(x) = \cos(x) \quad y \quad g(x) = \cos^2(x)$, donde debemos analizar correctamente como se comportan las funciones en cada intervalo. Acá notamos que tanto $f(x)$ como $g(x)$ son funciones positivas (en el intervalo x $\in [-\pi, \pi]$ y pares, por lo que ahora queda hacer el análisis de cual es mayor, donde en este caso es $g(x)$ ya que se cumple:

$$|f(x)| \leq 1 \quad y \quad |g(x)| \leq 1$$

Junto con esto a una función ser el cuadrado del otro y ser menores a 1 ambos, llegamos a la conclusión:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\mathrm{d}x \geq \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x$$

2.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \tag{16}$$

Al igual que en el ejercicio anterior esto se trata de un análisis de ambas funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Para resolver esto aplicaremos cosas que nosotros deberíamos saber con anterioridad para x $\in$ [0,1]:

$$x^2 \leq x \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$$

Con lo que concluimos que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

1.3 Teorema Fundamental del Cálculo

Antes de empezar esta nueva sección, debemos dar a conocer algunas propiedades de las integrales:

- $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b cdx = c(b-a)$ c una constante
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ c una constante
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)dx$

Teorema Fundamental del Cálculo:

- **Parte 1**: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leq x \leq b$$

  es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $g'(x) = f(x)$

- **Parte 2**: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

  donde F es una antiderivada de $f(x)$, es decir una función tal que $F'(x) = f(x)$.

También por otro lado, podemos tener una función $g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \int_{h(x)}^{j(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

Si además tenemos que $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ tendremos que $g(x)$

$$g(x) = F(j(x)) - F(h(x))$$

Al momento de derivar $g(x)$, tendremos que usar la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$g'(x) = F'(j(x)) \cdot j'(x) - F'(h(x))h'(x) = f(j(x)) \cdot j'(x) - f(h(x)) \cdot h'(x)$$

Tip: Cuando les presenten una integral en la forma de que $g(x)$, lo que deben hacer es en cuentas resumidas es evaluar la función $f(t)$ en cada extremo y multiplicarlo por la derivada de la función de cada extremo. Esto mismo proceso se hace en la parte 1 del teorema que es:

$$g'(x) = f(x) \cdot (x)' - f(a) \cdot (a)' = f(x)$$

1. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\int_{1}^{x-1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{2}^{x} \sin(t^2)\mathrm{d}t \tag{17}$$

> Para este ejercicio podemos derivar a ambos lados, gracias a que f es continua y por TFC nos queda:
>
> $$f(x-1) = \sin(x^2)$$
>
> Enseguida haciendo el cambio de variable $u = x - 1$, reemplazamos:
>
> $$f(u) = \sin((u+1)^2) \Longrightarrow f(x) = \sin((x+1)^2)$$

2. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\int_{1}^{x^2} x f(t)\mathrm{d}t = \int_{x+1}^{x^2+1} e^{t^2}\mathrm{d}t + C \tag{18}$$

   (a) Calcule el Valor de C.

   (b) Determine $f(1)$.

> **(a)** Para calcular C lo que hacemos es reemplazar $x = 1$, y así nos quedó:
>
> $$\int_{1}^{1^2} x f(t)\mathrm{d}t = \int_{1+1}^{1^2+1} e^{t^2}\mathrm{d}t + C \Longrightarrow 0 = C$$
>
> Por lo que $C = 0$
> **(b)** Para encontrar $f(1)$ reescribimos la ecuación (18) y luego aplicamos TFC:
>
> $$x\int_{1}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x+1}^{x^2+1} e^{t^2}\mathrm{d}t + C \Longrightarrow \int_{1}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t + x\cdot(2x)f(x^2) = (2x)\cdot e^{(x^2+1)^2} - (1)\cdot e^{(x+1)^2}$$
>
> Enseguida si reemplazamos $x = 1$ llegamos a:
>
> $$\int_{1}^{1^2} f(t)\mathrm{d}t + 1\cdot(2\cdot 1)f(1^2) = (2\cdot 1)\cdot e^{(1^2+1)^2} - (1)\cdot e^{(1+1)} \Longrightarrow 0 + 2\cdot f(1) = 2\cdot e^4 - e^4$$
>
> Por lo que finalmente:
>
> $$f(1) = \frac{e^4}{2}$$

3. Sea f un función no nula, y de clase C^1 (Derivadas continuas y existentes) tal que: .

$$\int_{1}^{x^3} t\cdot f'(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} t^5\cdot f(t^3)\mathrm{d}t; \quad f(3) = 2e \tag{19}$$

Determine $f(x)$.

Al f ser una función continua y C^1, podemos derivar y por TFC queda:

$$(3x^2) \cdot (x^3) \cdot f^{'}(x^3) = x^5 \cdot f(x^3) \Longrightarrow 3 \cdot f^{'}(x^3) = f(x^3); \quad x \neq 0$$

Enseguida primero hacemos el cambio de variable $u = x^3$, quedandonos:

$$3 \cdot f^{'}(u) = f(u)$$

y ahora sea $y = f(u)$ podemos reemplazar de la siguiente manera:

$$3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = y \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}u$$

Notamos que tenemos diferenciales a ambos lados, por lo que aplicamos la integral a ambos lados de tal manera que nos queda:

$$\ln(|y|) = \frac{1}{3}u + C \Longrightarrow y = K \cdot e^{\frac{1}{3}u} \quad ; K \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Finalmente con la información inicial de $f(3) = 2e$, reemplazamos para determinar K y así llegar a $f(x)$

$$f(3) = 2e = ke \Longrightarrow k = 2$$

$$f(x) = 2e^{\frac{x}{3}}$$

4. Encuentre una función f y constante C tal que:

$$6 + \int_c^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{x}, \quad 0 < x \tag{20}$$

Para encontrar C, tenemos un problema ya que no conocemos $f(t)$, por lo que podemos facilitar las cosas si reemplazamos $x = C$:

$$6 + \int_c^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{C} \Longleftrightarrow \sqrt{C} = 3$$

$$C = 9$$

Enseguida teniendo ya el valor de C, para encontrar $f(t)$ derivamos y por TFC llegamos a:

$$0 + \frac{f(x)}{x^2} - 0 = \frac{2}{2\sqrt{x}} \Longleftrightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

5. Sabiendo que:

$$\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = e^{x^2}(x+1) \tag{21}$$

Calcular el valor de $f(1)$.

Para encontrar el valor solicitado, derivamos a ambos lados y por TFC nos queda:

$$f(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot (x+1) + e^{x^2}$$

Reemplazando $x = 1$:

$$f(1) = 2e^1(2) + e^1$$
$$f(1) = 3e$$

6. Sea f una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$, continua. Si:

$$\int_0^{x^5} f(u)\mathrm{d}u = \int_1^{x+1} x^5 \cdot f(t)\mathrm{d}t \quad ; 0 < x \tag{22}$$

Y también:

$$f(2) = f^{'}(2) = 1$$

Determine $f^{'}(1)$.

Primero reescribimos la ecuación de la siguiente manera, para luego derivar ocupando TFC:

$$\int_0^{x^5} f(u)\mathrm{d}u = x^5 \int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow 5x^4 \cdot f(x^5) = 5x^4 \cdot \int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t + x^5 \cdot f(x+1)$$

Notamos que un logramos llegar a lo solicitado, por lo que debemos derivar nuevamente, pero también podemos reducir un poco la ecuación:

$$5 \cdot f(x^5) = 5 \cdot \int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t + x \cdot f(x+1) \Longrightarrow 25x^4 \cdot f^{'}(x^5) = 5 \cdot f(x+1) + f(x+1) + x \cdot f^{'}(x+1)$$

$$25x^4 \cdot f^{'}(x^5) = 6 \cdot f(x+1) + x \cdot f^{'}(x+1)$$

Ahora si reemplazamos $x = 1$, y con la información que nos da el enunciado, lograremos llegar a lo solicitado:

$$25 \cdot 1^4 \cdot f^{'}(1^5) = 6 \cdot f(1+1) + 1 \cdot f^{'}(1+1) \Longrightarrow 25f^{'}(1) = 6 + 1$$

$$f^{'}(1) = \frac{7}{25}$$

7. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\int_1^{x} \sin(x + t^2)\mathrm{d}t = \int_1^{x^3} f(t)\mathrm{d}t \tag{23}$$

Determinar $f(1)$.

Para este ejercicio notamos que la primera integral debemos separarla y esto lo haremos ocupando la fórmula: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

$$\int_1^x \sin(x)\cos(t^2) + \cos(x)\sin(t^2)\mathrm{d}t = \int_1^{x^3} f(t)\mathrm{d}t$$

Lo cual es equivalente a:

$$\sin(x)\cdot\int_1^x \cos(t^2)\mathrm{d}t + \cos(x)\cdot\int_1^x \sin(t^2)\mathrm{d}t = \int_1^{x^3} f(t)\mathrm{d}t$$

Enseguida teniendo estas expresiones y como f es una función continua derivamos la ecuación, dándonos por TFC:

$$\cos(x)\cdot\int_1^x \cos(t^2)\mathrm{d}t + \sin(x)\cdot\cos(x^2) - \sin(x)\cdot\int_1^x \sin(t^2)\mathrm{d}t + \cos(x)\sin(x^2) = 3x^2\cdot f(x^3)$$

Finalmente podemos reemplazar $x = 1$ en toda la ecuación dándonos:

$$\cos(1)\cdot\int_1^1 \cos(t^2)\mathrm{d}t + \sin(1)\cos(1) - \sin(1)\cdot\int_1^1 \sin(t^2)\mathrm{d}t + \cos(1)\sin(1) = 3\cdot f(1)$$

$$2\sin(1)\cos(1) = 3\cdot f(1) \Longrightarrow f(1) = \frac{2\sin(1)\cos(1)}{3}$$

8. Sea f función continua en $\mathbb{R}$, tal que: $(I3-2017-1)$

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xe^{2x} - \int_0^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t \tag{24}$$

Encuentre $f(x)$

Lo que debemos hacer para calcular $f(x)$ es derivar respecto a x, donde por TFC nos da:

$$f(x) = e^{2x} + 2x\cdot e^{2x} - e^{-x}f(x) = e^{2x}(1+2x) - e^{-x}f(x)$$

Ahora se despeja $f(x)$ y tendremos nuestro resultado:

$$f(x) + e^{-x}f(x) = e^{2x}(1+2x) \Longrightarrow f(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{1+e^{-x}}$$

9. Si se cumple para $a > 1$: $(I3-2016-2)$

$$\int_a^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x^3(\ln(x) - \frac{1}{3}) \tag{25}$$

Encontrar $f(x)$.

Lo que debemos hacer para calcular $f(x)$ es derivar respecto a x, donde por TFC nos da:

$$2xf(x^2) = 3x^2(\ln(x) - \frac{1}{3}) + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2\ln(x) - x^2 + x^2 = 3x^2\ln(x)$$

$$f(x^2) = \frac{3x\ln(x)}{2}$$

Lo que es equivalente a:

$$f(x) = \frac{3\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})}{2}$$

10. Demuestre que si f es continua en R, entonces:

$$\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \tag{26}$$

Acá para demostrar la ecuación (26) la ordenamos y luego la derivamos:

$$x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x f(u)u\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \Longrightarrow \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \blacksquare$$

11. Si se cumple:

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = \cos(x) - \frac{1}{2} \tag{27}$$

Determinar c y $f(x)$

Para encontrar c reemplazamos $x = c$:

$$\int_c^c f(t)\mathrm{d}t = \cos(c) - \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos(c) = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{\pi}{3}$$

Enseguida derivando la ecuación por TFC llegamos a:

$$f(x) = -\sin(x)$$

12. Sean:$(I3-2016-1)$

$$F(x)=\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad y \quad G(x)=\int_x^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \tag{28}$$

(a) Demuestre que $F^{'}(x)=G^{'}(x)$ y consecuentemente $F(x)=G(x)$.

(b) Usar la parte (a) para llegar a:

$$\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}, \quad x>0 \tag{29}$$

(a) Primero debemos demostrar que $F^{'}(x)?=G^{'}(x)$, por lo que derivamos ambas funciones y luego las igualamos:

$$F^{'}=\left((-\frac{1}{x^2})\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\right)=\frac{-1}{1+x^2}\Longleftrightarrow G^{'}(x)=\frac{-1}{1+x^2}\ \blacksquare$$

Como tenemos dos funciones donde sus derivadas son iguales estan siguen la relación de $F(x)=G(x)+C$, donde para encontrar esta constante C reemplazamos en $x=1$:

$$F(1)=G(1)+C$$

$$\int_1^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_1^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+C\to 0=0+C\longrightarrow C=0$$

$$F(x)=G(x)\ \blacksquare$$

(b) Para esta parte y para llegar a lo solicitado lo más fácil es integrar cada función por separado y luego juntarlas:

$$F(x)=\arctan(x)|_1^{\frac{1}{x}}=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4};\quad G(x)=\arctan(x)|_x^1=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$$

Y debido a lo demostrado en la parte **(a)**:

$$F(x)=G(x)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$$

$$\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2},\quad x>0$$

13. Encontrar una función f y una constante C tal que: $(Ex - 2009 - 1)$

$$\int_c^{x^2} \frac{f(t)}{1+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \log \frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1}{2} \log 2; \quad 0 < x < 1 \tag{30}$$

Primero para encontrar las dos cosas solicitadas, partimos buscando el valor de c, donde lo que hacemos es tomar $x = \sqrt{c}$:

$$\int_c^c \frac{f(t)}{1+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \log \frac{1+c}{1-c} - \frac{1}{2} \log 2 \longrightarrow 0 = \frac{1}{2} \log \frac{1+c}{1-c} - \frac{1}{2} \log 2$$

$$\log \frac{1+c}{1-c} = \log 2 \longrightarrow \frac{1+c}{1-c} = 2$$

$$1 + c = 2 - 2c \longrightarrow c = \frac{1}{3}$$

Luego de esto para encontrar f, ocupamos TFC derivando la ecuación (31) y nos queda:

$$\frac{2xf(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2) \cdot (1-x^2)}$$

Ahora solo queda hacer el despeje de $f(x^2)$ y hacer un cambio de variable $u = x^2$:

$$f(x^2) = \frac{(2x)(1+x^2)}{(2x)(1+x^2) \cdot (1-x^2)} = \frac{1}{(1-x^2)}$$

$$f(u) = \frac{1}{(1-u)} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{1-x}$$

14. Si se tiene una función $F(x)$: $(I3 - 2009 - 1)$

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t \quad ; 0 < x \tag{31}$$

Demostrar que $F(x)$ es una función constante y encontrar el valor de esta.

Primero debemos demostrar que $F(x)$, debemos llegar a que la derivada de esta función es 0, ya que es una función constante:

$$F^{'}(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left((-\frac{1}{x^2}) \cdot \frac{-1}{1+(\frac{1}{x})^2} \right) \Longleftrightarrow \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \blacksquare$$

Ya habiendo demostrado que F(x) es un valor constante, mediante su derivada, Enseguida debemos encontrar el valor de esta constante, por lo que reemplazamos en $x = 1$:

$$F(1) = \int_1^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{1}}^1 \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = 0$$

15. Dada una función $f(x)$: $(I3 - 2014 - 1)$

$$f(x) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \tag{32}$$

Comprobar que esta satisface la siguiente ecuación diferencial: $f^{''}(x) + f(x) = g(x)$

Al igual que en el ejercicio 6 de esta sección ordenamos $f(x)$:

$$f(x) = \sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t - \cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

Ahora para comprobar lo solicitado debemos derivar dos veces la ecuación:

$$f^{'}(x) = \cos(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \sin(x)g(x)\cos(x) + \sin(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t - \cos(x)g(x)\sin(x)$$

$$f^{'}(x) = \cos(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

Derivando nuevamente:

$$f^{''}(x) = -\sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \cos^2(x)g(x) + \cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \sin^2(x)g(x)$$

$$f^{''}(x) = -\sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t + g(x)$$

Ya teniendo lo solicitado procedemos a comprobar la ecuación diferencial:

$$f^{''}(x) + f(x) = g(x)$$

$$(\sin(x) - \sin(x))\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + (\cos(x) - \cos(x))\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t + g(x) = g(x)$$

$$g(x) = g(x) \blacksquare$$

16. Sea $f(x)$ una función continua y positiva, tal que:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = e^x + \arctan(x) + a \tag{33}$$

Determinar a y $f(x)$.

Lo que hacemos para calcular a reemplazamos con $x = 0$ en la desigualdad:

$$\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = e^0 + \arctan(0) + a \iff a = -1$$

Enseguida para encontrar $f(x)$ debemos derivar a ambos lados y por TFC llegando a:

$$f(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2}$$

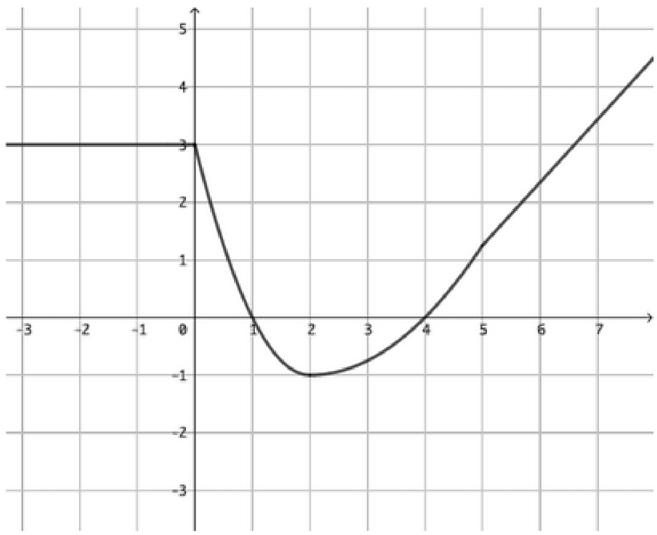
17. Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^3)\mathrm{d}t}{x^4} \tag{34}$$

Notamos que el límite es de la forma de $\frac{0}{0}$, por lo que podemos aplicar l'Hopital y por TFC tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin(t^3)\mathrm{d}t}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

18. Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ donde f es una función: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuyo gráfico es el siguiente:



(a) Determine $g^{'}(x)$ en términos de f.

(b) Determine intervalos de monotonía y puntos críticos de g.

(c) Determine intervalos de concavidad y puntos de inflexión de g.

(a) Es evidente que en este ejercicio se debe simplemente derivar $g(x)$ ocupando TFC, por lo que $g^{'}(x) = f^{'}(x)$.
(b) Primero notamos que encontramos los puntos críticos es cuando $g(x) = 0$, donde son $x = (1, 4)$. Junto con esto debemos ahora definir los intervalos donde $g(x) > 0$ y $g(x) < 0$ que serían:

$$\text{Creciente}\, g(x) > 0,\; x \in (-\inf, 1)\cup(4, \inf);\quad \text{Decreciente}\, g(x) < 0,\; x\in(1,4)$$

(c) Enseguida debemos analizar a $f^{'}(x)$, donde primero $g^{'}(x) = 0$ para $x = 2$ que sería un punto de inflexión. Finalmente analizando el gráfico llegamos a:

$$\text{Concavidad}\cup,\; g^{'}(x) > 0,\; x\in(2,\inf);\quad \text{Concavidad}\cap,\; g(x) < 0,\; x\in(1,4)$$

19. Sea $F(x)$ la siguiente función:($Control\,2-2018-1$):

$$F(x)=\int_1^{x^2}(1-e^{t^2-1})\mathrm{d}t$$

Demostrar que $F(x)$ es creciente para x ∈(-∞,-1).

Para demostrar que $F(x)$ es creciente debemos, derivar la función y por TFC:

$$F^{'}(x)=2x(1-e^{x^4-1})$$

Enseguida lo que debemos probar es lo siguiente para x ∈(-∞,-1):

$$2x(1-e^{x^4-1})>0$$

dado que $2x<0$ para x ∈ (-∞,-1), se debe cumplir que $(1-e^{x^4-1})<0$:

$$(1<e^{x^4-1})\iff 1<x^4$$

Y como esta última se cumple para los valores de x, queda demostrado que $F(x)$ es creciente para x ∈(-∞,-1).

20. Calcular:

$$lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(2+t^2+\sin^2(t))^{100}\arctan(t)\mathrm{d}t}{1-\cos(x)} \tag{35}$$

Acá notamos que tenemos una fracción de tipo $\dfrac{0}{0}$ por lo que podemos hacer uso de la técnica de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(2+t^2+\sin^2(x))^{100}\arctan(x)\mathrm{d}t}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(2+x^2+\sin^2(x))^{100}\arctan(x)}{\sin(x)}$$

Notamos que nuevamente tenemos una fracción de tipo $\dfrac{0}{0}$, por lo que debemos aplicar nuevamente l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x^2+\sin^2(x))^{100}\arctan(x)}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{100(2x+2\sin(x)\cos(x))(2+x^2+\sin^2(x))^{99}\arctan(x)+\dfrac{(2+x^2+\sin^2(x))^{100}}{1+x^2}}{\cos(x)}=2^{100}$$

1.4 Integrales indefinidas y la Regla de sustitución

En la sección anterior vimos la integrales definidas(los extremos sobre los cuales se evalúa), pero en esta sección veremos más en detalle integrales indefinidas y la regla de la sustitución sobre estas(también sirve para definidas).

Integral indefinida: En estas integrales, donde no hay que evaluar la antiderivada de la función en cuestión se denotan de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ y C una constante.
La siguiente tabla tiene las integrales indefinidas que deberían saber:

- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
- $\int k\,dx = kx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
- $\int \sec^2(x) = \tan(x) + C$
- $\int \csc^2(x) = -\cot(x) + C$
- $\int \sec(x)\tan(x) = \sec(x) + C$
- $\int \csc(x)\cot(x) = -\csc(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
- $\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \cot^- 1(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$
- $\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \csc^- 1(x) + C$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \mathrm{arcsec}(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
- $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + C$

La Regla de sustitución:

- En Integrales Indefinidas: Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

- En Integrales definidas: Si tenemos $g'(x)$ una función $[a,b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$ entonces

$$x = a \to u = g(a) \qquad x = b \to u = g(b)$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

1. Calcule las siguientes integrales:

(a) $\int \sqrt{\cot(x)} \csc^2(x)\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{2-x^2}{(x^3-6x+1)^5}\mathrm{d}x$ $(I3-2014-TAV)$

(e) $\int \tan(x)\ln(\cos(x))\mathrm{d}x$ $(I3-2017-1)$

(f) $\int \frac{x^3+x}{(x^4+1)}\mathrm{d}x$ $(I3-2016-1)$

(g) $\int \frac{2\cos(x)\sin(x)}{(1+\cos^2(x))}\mathrm{d}x$ $(I3-2019-1)$

(a) Notamos que dentro de la integral tenemos la función y también su derivada por lo que podemos hacer el cambio de variable:

$$u = \cot(x); \quad du = -\csc^2(x)dx$$

Reemplazando notamos que llegamos a:

$$\int \sqrt{u}\mathrm{d}u = -\frac{2u^{3/2}}{3} + C = -\frac{2\cot(x)}{3} + C$$

(b) Al igual que en el ejercicio (a) logramos identificar una función y su derivada, por lo que hacemos el cambio de variable:

$$u = e^x + 1; \quad \mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$$

Reemplazamos:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(u) + C = \ln(e^x+1) + C$$

(c) A diferencia de los otros ejercicios, en este no es tan directo, pero notamos que si $u = x^2$ tenemos la derivada en la parte de arriba por lo que reemplazando llegamos a:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\arctan(u)}{2} + C = \frac{\arctan(x^2)}{2} + C$$

(d) En este ejercicio notamos a simple vista que la función de abajo tiene por derivada la parte de arriba de la fracción por lo que hacemos:

$$u = x^3 - 6x + 1; \quad \mathrm{d}u = 3x^2 - 6\mathrm{d}x$$

y Enseguida reemplazando tenemos que:

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^5} = \frac{-1}{12u^4} + C = \frac{-1}{12(x^3 - 6x + 1)} + C$$

(e) Tomamos $u = \ln\cos(x); \to \mathrm{d}u = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x$, notamos que logramos reemplazarlo en la integral por lo que nos da:

$$\int \tan(x)\ln(\cos(x))\mathrm{d}x \Longrightarrow \int -u\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u^2 + C$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\cos(x))^2 + C$$

(f) Primero para trabajar la integral la separamos en dos:

$$\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{x^3}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{x}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}x}_{I_2}$$

Calculando I_1, tomamos $u = x^4 + 1; \quad \mathrm{d}u = 4x^3$:

$$\int \frac{x^3}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{ln(u)}{4} + C\frac{x^4 + 1}{4} + C_1$$

Luego notamos que I_2 es una integral calculada en **(c)** que es:

$$I_2 = \frac{\arctan(x^2)}{2} + C_2$$

Por lo que:

$$\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}x = \frac{ln(u)}{4} + \frac{x^4 + 1}{4} + C_1 + \frac{\arctan(x^2)}{2} + C_2$$

(g) En este ejercicio notamos que es similar al **(d)** ya que tiene la deriva y la función, por lo que hacemos:

$$u = 1 + \cos^2(x) \to \mathrm{d}u = 2\cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

Reemplazando llegamos a:

$$\int \frac{2\cos(x)\sin(x)}{(1 + \cos^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln(u) + C = \ln(1 + \cos^2(x)) + C$$

2. Demostrar:
$$\int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m \mathrm{d}x \tag{36}$$

Lo que debemos hacer acá es desde la premisa de la primera integral llegar a la segunda, donde lo que haremos será hacer un cambio de variable con $u = x - 1$:

$$u = 1 - x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x; \quad x = 0 \to u = 1; \quad x = 1 \to u = 0$$

Enseguida reemplazando todo esto en la integral, cambiando los límites de integración y aplicando las propiedades de las integrales llegamos a:

$$-\int_1^0 (1-u)^m u^n \mathrm{d}u = \int_0^1 (1-u)^m u^n \mathrm{d}u$$

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n \mathrm{d}x \blacksquare$$

Hay que recordar que en el último paso podemos reemplazar x como u ya que estamos en una integral definida.

3. Sea f una función continua y par, definida en $\mathbb{R}$, tal que:

$$\int_a^b x \cdot f(x)\mathrm{d}x = C$$

Determinar el valor de:
$$\int_{-a}^{-b} x \cdot f(x)\mathrm{d}x \tag{37}$$

Con la información dada, notamos que las dos integrales son casi identifica excepto por los límites de integración por lo que planteamos:

$$u = -x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x; \quad x = -a \to u = a; \quad x = -b \to u = b$$

Ahora llegamos a:
$$\int_a^b -u \cdot f(-u) \cdot -\mathrm{d}u = \int_a^b u \cdot f(-u)\mathrm{d}u$$

Enseguida como sabemos que $f(x)$ es una función par:

$$\int_a^b u \cdot f(-u)\mathrm{d}u = \int_a^b u \cdot f(u)\mathrm{d}u$$

Donde esta integral la conocemos del enunciado por lo que:

$$\int_{-a}^{-b} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u \cdot f(u)\mathrm{d}u = C$$

4. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica, con periodo T $\in \mathbb{R}$. Tal que:

$$\int_{T-a}^{T} f(x)\mathrm{d}x = C$$

Determinar el valor de:

$$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x \tag{38}$$

Notamos que la diferencia entre los límites de integración entre la primera y segunda integral son idénticos(a), y junto con eso como $f(x)$ tiene periodo T, planteamos:

$$u = T - x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x; \quad x = T - a \to u = a; \quad x = T \to u = 0$$

Enseguida reemplazando todo esto en la integral y debidos a su periodicidad:

$$\int_{a}^{0} f(T+u) \cdot \mathrm{d}u = \int_{0}^{a} f(u)\mathrm{d}u = C$$

5. Calcular:

$$\int_{e^{-1}}^{e} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\mathrm{d}x \tag{39}$$

Notamos que hay una gran similitud entre las dos integrales, por lo que intentamos de llegar de una a la otra, ya que el cálculo directo de cada una resultaría muy difícil.

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\mathrm{d}x; \quad u = e^x; \quad \mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$$

Reemplazando esto y cambiando los límites de integración llegamos a:

$$\int_{e^{-1}}^{e} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

Notamos que desde la segunda integral llegamos a la primera por lo que:

$$\int_{e^{-1}}^{e} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\mathrm{d}x = 0$$

6. Calcular:

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^6+x^3+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x \tag{40}$$

Este ejercicio es muy parecido al anterior, por lo que deberíamos intentar algo similar, desde la primera integral:

$$u = x^3; \quad \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x => \frac{\mathrm{d}u}{3u^{2/3}} = \mathrm{d}x$$

Reemplazando en la integral y haciendo el cambio en los límites de integración llegamos a:

$$\int_1^8 \frac{u\mathrm{d}u}{3u^{2/3}(u^2+u+1)} = \int_1^8 \frac{u^{1/3}\mathrm{d}u}{3(u^2+u+1)}$$

Se ve evidenciado que la primera integral es igual a la segunda integral:

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^6+x^3+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = 0$$

7. Si f es una función continua y $a \in \mathbb{R}$, calcular:

$$\int_{-a}^{a} (f(x) - f(-x))\mathrm{d}x \tag{41}$$

Para resolver esta integral, la separamos en dos integrales de la siguiente manera:

$$I_1 = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x; \quad I_2 = \int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

Ahora haciendo un cambio de variable en I_2 con $u = -x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ y reemplazando llegamos a:

$$\int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{-a} f(u)\cdot -\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} f(u)\mathrm{d}u$$

Con lo que notamos que $I_1 = I_2$ por lo que:

$$\int_{-a}^{a} (f(x) - f(-x))\mathrm{d}x = 0$$

8. Si tenemos $f(x) = \frac{x-3}{2x}$ demuestre que se cumple:

$$\int_1^3 \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)^2} = \frac{\pi}{4} \tag{42}$$

Hint: no intente calcular la integral reemplazando, sino por medio de una sustitución.

Siguiendo el consejo hacemos el cambio de variable $u = f(x); \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x$:

$$\int_1^3 \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$\arctan(x)|_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \blacksquare$$

9. Si f es una función continua para x $\in [0,\pi]$, demuestre la siguiente ecuación:

$$\underbrace{\int_0^\pi xf(\sin(x))\,\mathrm{d}x}_{I_1} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x \tag{43}$$

Hint: usar $u = \pi - x$

Siguiendo el consejo planteamos el cambio de variable $u = \pi - x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ en I_1(**no olvide cambiar los límites de integración**):

$$I_1 = \int_0^\pi xf(\sin(x))\mathrm{d}x = \int_\pi^0 (\pi - u)f(\sin(\pi - u)) \cdot -\mathrm{d}u = \int_0^\pi (\pi - u)f(\sin(\pi - u)) \cdot \mathrm{d}u$$

Ahora con esto, notamos que debemos usar la fórmula de $\sin(\alpha + \beta)$:

$$\int_0^\pi (\pi - u)f(\sin(\pi - u)) \cdot \mathrm{d}u = \int_0^\pi (\pi - u)f(\sin(\pi)\cos(u) - \cos(\pi)\sin(u))\mathrm{d}u$$

Como sabemos que $\sin(\pi) = 0$ y $\cos(\pi) = -1$, podemos remplazar esto:

$$I_1 = \int_0^\pi (\pi - u)f(\sin(u))\mathrm{d}u \Longleftrightarrow \pi\int_0^\pi f(\sin(u))\mathrm{d}u - \int_0^\pi uf(\sin(u))\mathrm{d}u$$

Y debido a que estamos en integrales definidas, las variables son mutables, por lo todas las u las podemos reemplazar por una x:

$$I_1 = \int_0^\pi xf(\sin(x))\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x - \int_0^\pi xf(\sin(x))\mathrm{d}x$$

Finalmente tenemos todo en la misma variable por lo que podríamos representarlo con la siguiente ecuación:

$$I_1 = \pi\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x - I_1 \Longleftrightarrow 2I_1 = \pi\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int_0^\pi xf(\sin(x))\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x \blacksquare$$

10. Calcular la siguiente integral indefinida: **wolfram**

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x \tag{44}$$

Notamos que este es un ejercicio clásico, solo que acá se aplica una regla de la cadena, por lo que podemos aplicar el ejemplo clásíco de igual manera:

$$u = \arctan(\sqrt{x}); \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)}\mathrm{d}x$$

Aplicando el cambio de variable llegamos a:

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x = \int \frac{2u}{1}\mathrm{d}u = u^2 + C = (\arctan(\sqrt{x}))^2 + C$$

11. Demostrar que si f es una función continua e integrable sobre [-a,a]. Entonces si f impar demostrar que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{45}$$

Primero analizamos cada caso de a:

• Para $a = 0$:

$$\int_0^0 f(x)dx = 0$$

• Para $a \neq 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$$

Enseguida debemos demostrar que $I_1 = -I_2$ por lo que trabajaremos con I_1, haciendo un cambio de variable con $u = -x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ quedandonos:

$$I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-x)\cdot -\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

Ahora como $f(x)$ es impar podemos hacer lo siguiente:

$$I_1 = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \Longleftrightarrow I_1 = -I_2$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x}_{I_2} = -I_2 + I_2 = 0 \blacksquare$$

2 Aplicaciones de Integrales

2.1 Área entre curvas

1. Calcule el Área entre las siguientes curvas Región plana acotada por la/s curvas:
   (a) $y = x^2$, el eje x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 3$.
   (b) $y = 5x - x^2$ e $y = x$.
   (c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ y el eje x
   (d) $y = 10x - x^2$ e $y = 3x - 8$
   (e) $y^2 = x$ e $y = 3x - 10$
   (f) $y = \cos(x)$ e $y = \sin(x)$, entre $x = 0$ y $x = \pi$

(a) Notamos que tenemos los límites de integración con las ordenadas de x que se nos da y también la función por lo que lo reemplazamos:

$$\int_1^3 x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}|_1^3 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

(b) Para encontrar los puntos donde estas curvas se intersectan debemos resolver la siguiente ecuación:

$$5x - x^2 = x; \longrightarrow x = 1, x = 4$$

Por lo que lo llevamos a la siguiente integral:

$$\int_1^4 (5x - x^2) - (x)\mathrm{d}x = (\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_1^4 = \frac{32}{3}$$

(c) Al igual que en el ejercicio anterior debemos igualar las función y encontrar los puntos:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x; \longrightarrow x = 0, x = 2, x = 4$$

Ahora notamos que vamos a tener dos integrales, pero tenemos que ver que función está arriba de cual:

$$x < x^3 - 6x^2 + 9x \longrightarrow x = (0, 2)$$
$$x > x^3 - 6x^2 + 9x \longrightarrow x = (2, 4)$$

Por lo que las integrales nos quedan de la siguiente manera:

$$\underbrace{\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 9x) - (x)\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (x) - (x^3 - 6x^2 + 9x)\mathrm{d}x}_{I_2}$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{7x^2}{2}|_0^2 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}|_2^4\right) = 12$$

(d) Repetimos el proceso estándar de igualar las dos curvas:

$$10x - x^2 = 3x - 8; \longrightarrow x = 8, x = 1$$

Ahora es evidente que la función que es mayor, es $y = 10x - x^2$, por lo que la integral queda:

$$\int_{-1}^{8} (10x - x^2) - (3x + 8)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{8} 7x - x^2 - 8\mathrm{d}x = \frac{7x}{2} - \frac{x^3}{3} - 8x|_{-1}^{8} = \frac{243}{2}$$

(e) En este ejercicio se hace más difícil que los anteriores ya que tenemos una función con y^2, por lo que lo que debemos hacer es dejar y en función de x, por lo que despejamos la segunda función:

$$y = 3x - 10 \rightarrow \frac{y+10}{3}$$

Por lo que ahora igualamos los x, llegamos a:

$$y^2 = \frac{y+10}{3}; \longrightarrow y = \frac{-5}{3}, y = 2$$

Enseguida lo llevamos a la integral clásica sólo que ahora respecto a y, también hay que ver cual función es mayor a la otra por lo que buscamos para el mismo y cual x es mayor, probamos en $y = 0$:

$$y^2 = 0 = x; \quad 0 = 3x - 10 \rightarrow x = \frac{10}{3}$$

Con esto concluimos que la segunda función es mayor por lo que nos queda:

$$\int_{\frac{-5}{3}}^{2} \frac{y+10}{3} - y^2\mathrm{d}y = \frac{1331}{162}$$

(f) Como ahora nos delimitan las ordenadas de x y sabiendo cómo se comportan las funciones $\cos(x)$ e $\sin(x)$ debemos analizar como hacer el proceso típico de igualar funciones:

$$\sin(x) = \cos(x) \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + K\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Con esto tenemos que se encuentran en $x = \frac{\pi}{4}$, y previamente sabemos que para el intervalo limitado se da lo siguiente:

$$\sin(x) < \cos(x) \rightarrow x \in (0, \frac{\pi}{4}); \quad \cos(x) < \sin(x) \rightarrow x \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$$

Teniendo esto dividimos en dos integrales el proceso:

$$\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x)) - (\sin(x))\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin(x)) - (\cos(x))\mathrm{d}x}_{I_2} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}$$

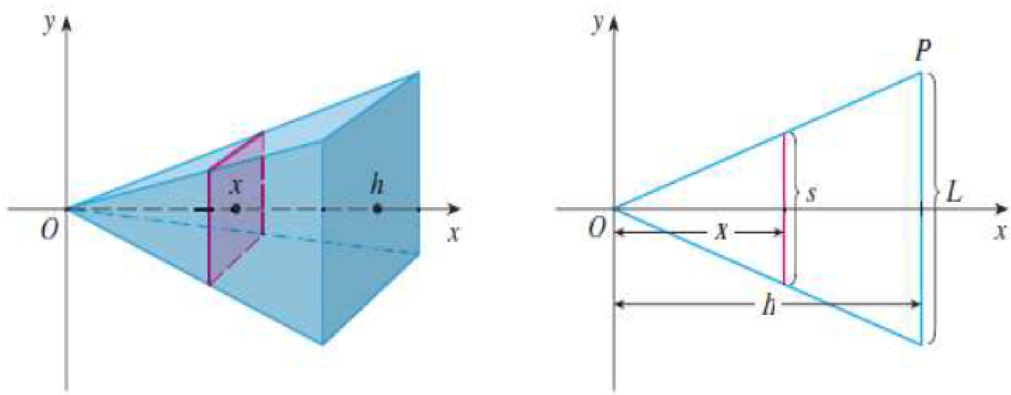
2.2 Volúmenes

1. Demostrar que el volumen de una pirámide cuya base es cuadrada de lado L, cuya curva es h, es $\dfrac{L^2h}{3}$ $(I3-2018-1)$

Para lograr demostrar lo solicitado lo que haremos será calcular el volumen que según sabemos se hace por la siguiente fórmula:

$$\int A = V$$

Pero en este caso la función A es un poco problemática debido a que el área no es constante y depende del largo de la base por lo que hacemos el siguiente análisis:



Donde lo que haremos será hacer la siguiente relación para dejar todo en función del eje x, así poder integrar respecto a esa función y haciendo por thales la siguiente relación:

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{L} \longrightarrow s = \frac{xL}{h}$$

Enseguida también notamos que el área de la base y la relación que hicimos debería darnos:

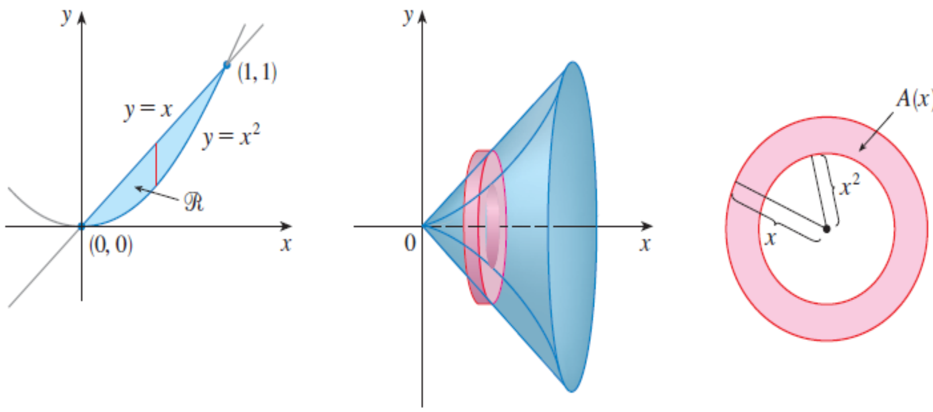
$$A(x) = s^2 = \frac{L^2x^2}{h^2}$$

Por lo que ahora integrando respecto a x tendremos el volumen:

$$V = \int_0^h A(x)\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{L^2x^2}{h^2}\mathrm{d}x = \frac{L^2h}{3} \blacksquare$$

2. Calcule el Volumen del sólido de revolución de un sólido al girar la región encerrada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$ en torno a la recta $y = 2$ $(I3 - 2015 - 1)$

Primero debemos hacer un análisis de la sección transversal que notamos que seguiría el siguiente dibujo:



Donde la sección tendría como radio interior $r_1 = 2 - x$ y $r_2 = 2 - x^2$.
Por lo que el área va a estar dada por:

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

Y llevando esto al cálculo de volúmenes, debemos encontrar en qué puntos de x debe ser por lo que debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$x = x^2; \longrightarrow x = 0, x = 1$$

Por lo que el volumen va a ser:

$$V = \int_0^1 A(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2\mathrm{d}x = \frac{8\pi}{15}$$

3. Determinar el volumen de un sólido generado al rotar la región $y = x^3$, $y = 6$ y $x = 0$ en torno al eje x.

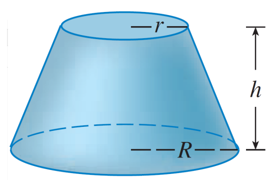
Primero debemos analizar de que tomaremos como nuestra sección transversal y sus radios. Pero al ser respecto al eje y el radio debe estar respecto a y quedándonos:

$$x = \sqrt[3]{y} \longrightarrow A(y) = \pi \sqrt[3]{y}^2 - 0$$

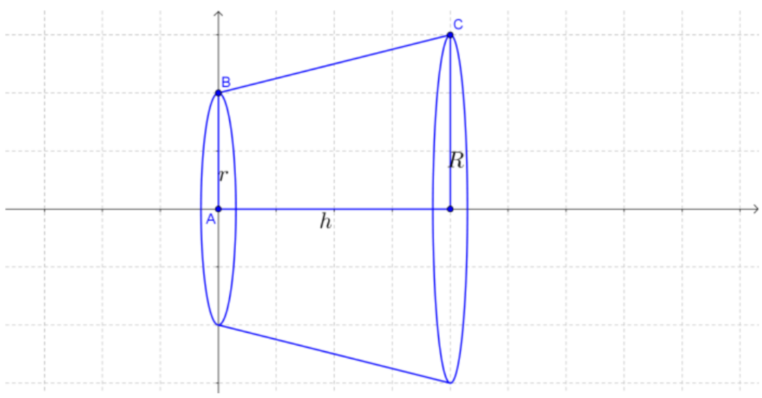
Y dado que los puntos de intersección son finalmente $y = 0$ e $y = 6$, llegamos a la siguiente integral:

$$V = \int_0^6 A(y)\mathrm{d}y = \int_0^6 \pi \sqrt[3]{y^2}\mathrm{d}y = \pi \frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5}|_0^6 = \frac{3\pi 6^{\frac{5}{3}}}{5}$$

4. Calcular el volumen del sólido de un ”cono circular” cuya altura es h , base inferior R y radio superior r



acá debemos hacer un análisis similar al del ejercicio **1**, por lo que hacemos lo siguiente:



Por lo que el radio de la sección transversal va a ser la recta $\overline{BC}$, que calcularemos reemplazando en la clásica fórmula:

$$y = mx + n \longrightarrow y = \frac{R - r}{h}(x) + r$$

Con lo que ahora reemplazamos esto en la fórmula para el volumen:

$$V = \int_0^h A(x)\mathrm{d}x = \int_0^h \pi(\frac{R-r}{h}x + r)^2 \mathrm{d}x$$

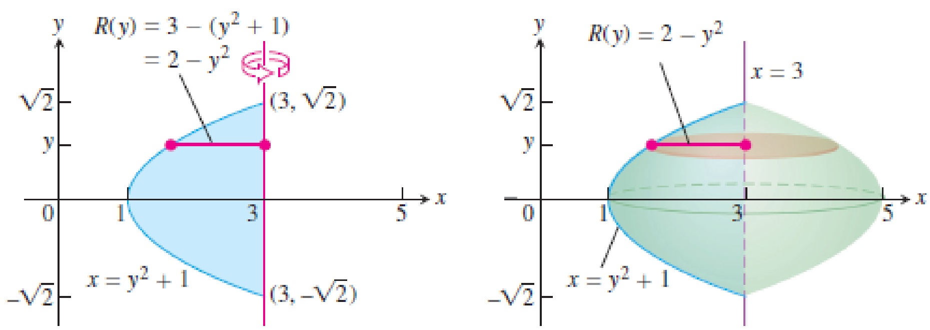
$$\int_0^h \pi(\frac{R-r}{h}x + r)^2 \mathrm{d}x \longrightarrow u = \frac{R-r}{h}x + r;\ \mathrm{d}u = \frac{R-r}{h}\mathrm{d}x$$

Ahora reemplazando esto en la integral y cambiando los límites de integración llegamos a:

$$V = \int_0^h \frac{\pi h(u)^2}{R-r}\mathrm{d}u = \frac{\pi h}{R-r}(R^3 - r^3) \equiv \frac{\pi h}{3}(R^2 + 2Rr + r^2)$$

5. Determinar el volumen del sólido al hacer girar respecto a $x = 3$ la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$. $(I3 - 2017 - 2)$

Haciendo el análisis respectivo de la sección transversal podemos llegar al siguiente dibujo:



Con esto logramos identificar que el área de la sección transversal es:

$$A(y) = \pi(2 - y^2)^2$$

Y reemplazando en la fórmula del volumen identificando que los límites son $y = \pm\sqrt{2}$

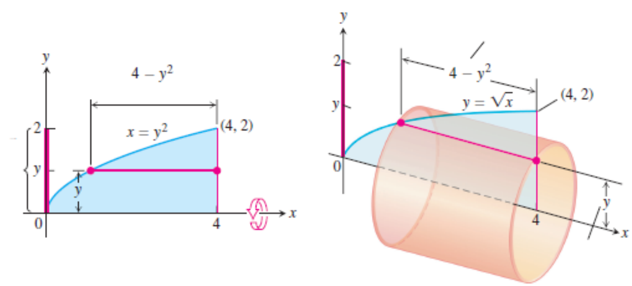
$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} A(y)\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi(2 - y^2)^2 \mathrm{d}y$$

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi(4 - 4y^2 + y^4)\mathrm{d}y = \pi\left(4y - \frac{4y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$

6. Calcule el volumen de la región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ que se hace girar respecto al eje x.

acá ocuparemos el método de capas cilindricas, para analizar mejor la situación vemos el bosquejo de la situación:



Con el bosquejo notamos que los límites de integración son $y = 0$ e $y = 2$, donde reemplazando esto en la fórmula de capas cilíndricas tenemos:

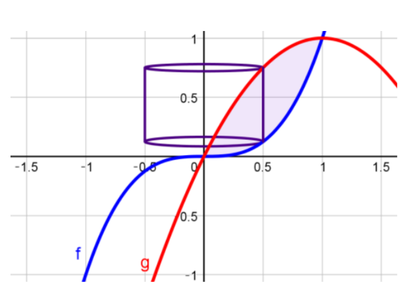
$$V = \int_0^2 2\pi(radio)(altura)\mathrm{d}y = \int_0^2 2\pi(y)(4 - y^2)\mathrm{d} = 8\pi$$

7. Calcule el Volumen que se genera al rotar respecto al eje y, la región delimitada por $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$.

Para saber que límites ponerle a la integral del volumen primero debemos resolver esta ecuación:

$$x^3 = 2x - x^2 \longrightarrow x = 0, x = 1$$

Enseguida debemos lograr identificar cuál es el radio y altura, para facilitar la situación revisamos el bosquejo:

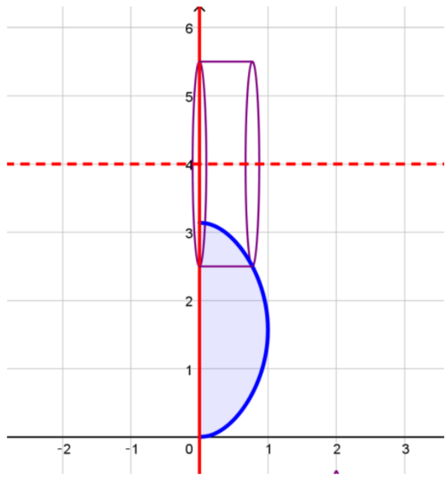


Ahora es fácil notar que el radio$= x$ y la altura$=2x - x^2 - x^3$, reemplazando en la integral:

$$V = \int_0^1 2\pi(x)(2x - x^2 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{13\pi}{30}$$

8. Plantear la integral que representa el volumen de la región que se ubica entre el eje y, la curva $x = \sqrt{\sin(y)}$ para $y \in [0, 2]$, si se hace girar respecto a $y = 4$

Lo que se debe hacer primero en este caso es hacer un bosquejo de la función, $x = \sqrt{\sin(y)}$, ya que es un poco difícil de analizar a simple vista, el cual sería:



Con el bosquejo logramos identificar fácilmente cuál es el radio$=\sqrt{\sin(y)}$ y la altura$=(4 - y)$, donde también en el enunciado tenemos el intervalo de integración:

$$V = \int_0^{\pi} 2\pi(4 - y)(\sqrt{\sin(y)}\mathrm{d}y$$

9. Exprese el Volumen de la región entre las curvas $y = x^2\ln(x)$ e $y = 2ln(x)$, que se hace girar respecto a $x = -1$.

Primero debemos ver las coordenadas del eje x, donde se intersectan que sería resolver:

$$x^2\ln(x) = 2\ln(x); \longrightarrow x = 1, x = \sqrt{2}$$

acá también logramos notar que la fución que es más grande en el intervalo es la función $y = 2\ln(x)$, donde llegamos a la conclusión:

$$radio = (2\ln(x) - x^2\ln(X);\ altura = x - (traslacion) = x + 1$$

Enseguida reemplazando en la fórmula de la integral llegamos a:

$$V = \int_1^{\sqrt{2}} 2\pi(x + 1)(2\ln(x) - x^2\ln(x))\mathrm{d}x$$

también se puede usar la fórmula de secciones transversales

3 Técnicas de Integración

3.1 Integración por partes

1. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \ln(x)\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 xe^{7x}\mathrm{d}x \ (I4-2018-TAV)$

(c) $\displaystyle\int x\arctan(x)\mathrm{d}x \ (Ex-2018-2)$

(d) $\displaystyle\int e^{-x}\ln(1+e^x)\mathrm{d}x \ (Ex-2017-2)$

(e) $\displaystyle\int_1^e x^5\ln(x)^2\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int x\sec(x)\tan(x)\mathrm{d}x$

(g) $\int x^2e^x\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{x\cos(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int x\arctan(x)\mathrm{d}x$

(a) Integrando por partes tomamos:

$$u=\ln(x)\longrightarrow du=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$dv=\mathrm{d}x\longrightarrow v=x$$

Donde nos queda:

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln(x)}-\int \mathrm{d}x$$

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln(x)}-x+C$$

(b) Integrando por partes tomamos:

$$u=x \quad\longrightarrow\quad du=\mathrm{d}x$$
$$dv=e^{7x}\mathrm{d}x \ \longrightarrow\ v=\frac{e^{7x}}{7}$$

Reemplazando nos da:

$$\int_0^1 xe^{7x}\mathrm{d}x=\frac{xe^{7x}}{7}|_0^1-\int_0^1\frac{e^7x}{7}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 xe^{7x}\mathrm{d}x=\frac{xe^{7x}}{7}|_0^1-\frac{e^7x}{49}|_0^1=\frac{1\cdot e^7}{7}-\left(\frac{e^7}{49}-\frac{1}{49}\right)$$

(c) Integrando por partes tomamos:

$$u = \arctan(x) \quad \longrightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$dv = x\mathrm{d}x \longrightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Reemplazando llegamos a:

$$\int x\arctan(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2\arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x}_{I1}$$

$$I1 = \int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int\frac{x^2+1}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$I1 = x - \arctan(x) + C$$

Ahora juntando llegamos a:

$$\int x\arctan(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2\arctan(x)}{2} + x - \arctan(x) + C$$

(d) Integrando por partes tomamos:

$$u = \ln(1+e^x) \quad \longrightarrow \quad du = \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

$$dv = e^{-x}\mathrm{d}x \longrightarrow v = -e^{-x}$$

Reemplazando llegamos a:

$$\int e^{-x}\ln(1+e^x)\mathrm{d}x = e^{-x}\cdot\ln(1+e^x) + \underbrace{\int\frac{e^x\cdot e^{-x}}{1+e^x}\mathrm{d}x}_{I2}$$

Calculamos $I2$, donde tomamos :

$$I2 = \int\frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

$$I2 = x - \ln(1+e^x) + C$$

Juntamos la integral con lo anterior calculado dándonos:

$$\int e^{-x}\ln(1+e^x)\mathrm{d}x = e^{-x}\cdot\ln(1+e^x) + x - \ln(x) + C$$

(e) Integrando por partes tomamos:

$$u = \ln(x)^2 \quad \longrightarrow \quad du = \frac{2\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$$
$$dv = x^5\mathrm{d}x \longrightarrow v = 5x^4$$

Enseguida reemplazando llegamos a:

$$\int_1^e x^5 \ln(x)^2 \mathrm{d}x = 10\frac{\ln(x)x^4}{x}|_1^e - \underbrace{\int \frac{10\ln(x)x^4}{x}\mathrm{d}x}_{I3}$$

Notamos que nuevamente debemos integrar por partes dándonos:

$$u = \ln(x) \quad \longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$dv = x^3\mathrm{d}x \longrightarrow v = 3x^2$$

$$I3 = 4x^3\ln(x) - \int \frac{3x^2}{x}\mathrm{d}x = 3x^2\ln(x) - \frac{3x^2}{2}$$

Juntando llegamos a:

$$\int_1^e x^5 \ln(x)^2 \mathrm{d}x = 10\frac{\ln(x)x^4}{x} - 10\left(3x^2\ln(x) - \frac{3x^2}{2}\right)|_1^e$$

(f) Integrando por partes tomamos:

$$u = x^2 \quad \longrightarrow \quad du = 2x\mathrm{d}x$$
$$dv = e^x\mathrm{d}x \longrightarrow v = e^x$$

$$\int x^2e^x\mathrm{d}x = x^2e^x - \underbrace{\int 2xe^x\mathrm{d}x}_{I4}$$

Notamos que nuevamente debemos integrar por partes, donde tomamos:

$$u = 2x \quad \longrightarrow \quad du = 2\mathrm{d}x$$
$$dv = e^x\mathrm{d}x \longrightarrow v = e^x$$

$$I4 = 2xe^x - \int 2e^x\mathrm{d}x = 2xe^x - 2e^x$$

Ahora juntando las integrales llegamos a:

$$\int x^2e^x\mathrm{d}x = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x)$$

(h) Para este caso nombremos como $I4$ a integral solicitada, Enseguida Integrando por partes tomamos:

$$u = cos(x) \longrightarrow du = -\sin(x)\mathrm{d}x$$
$$dv = e^x\mathrm{d}x \longrightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x = e^x \cos(x) + \int \sin(x)e^x$$

Notamos que debemos integrar por partes nuevamente la $I5$ Tomando:

$$u = \sin(x) \longrightarrow du = \cos(x)\mathrm{d}x$$
$$dv = e^x\mathrm{d}x \longrightarrow v = e^x$$

$$I5 = \int \sin(x)e^x\mathrm{d}x = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\mathrm{d}x$$

Ahora notamos que tenemos la misma integral en ambos ya que $I4 = I5$

$$\underbrace{\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x}_{I4} = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \underbrace{\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x}_{I4}$$

$$2\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x = e^x \cos(x) + e^x \sin(x)$$

$$\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x = \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2}$$

(i) Antes de integrar por partes debemos notar que:

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \cot(x) \cdot \csc(x)$$

Enseguida integrando por partes hacemos:

$$u = x \longrightarrow du = \mathrm{d}x$$
$$dv = \cot(x) \cdot \csc(x)\mathrm{d}x \longrightarrow v = -\csc(x)$$

Ahora reemplazando:

$$\int \frac{x\cos(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = -\csc(x)x - \int -\csc(x)\mathrm{d}x = -\csc(x)x - (\ln(|\tan(x/2)|)$$

2. Demostrar la siguiente ecuación para $n > 1$: $(Ex - 2019 - 1)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x$$

Para empezar la demostración, tomamos:

$$\begin{aligned} u = \sin^{n-1}(x) &\longrightarrow du = (n-1)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\ dv = \sin(x)\mathrm{d}x \quad &\longrightarrow \quad v = -\cos(x) \end{aligned}$$

con lo que reemplazando llegamos a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \underbrace{-\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\alpha} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\cdot -\cos(x)\mathrm{d}x}_{\theta}$$

Enseguida calculamos cada una por separado, primero partimos por α:

$$\alpha = --\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (-0\cdot 1) - (-1\cdot 0) = 0$$

Ahora para hacer la demostración necesitamos lograr alguna forma de que θ, junto con la integral inicial lleguen a ser la ecuación por lo que haremos algo con $\cos^2(x)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n}(x)\mathrm{d}x$$

Enseguida retomamos la primera integral y hacemos un despeje:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n}(x)\mathrm{d}x$$

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x$$

Finalmente notamos que debemos hacer un despeje y llegamos a lo solicitado:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \quad \blacksquare$$

3. Calcule el área de la región limitada por las curvas. **(Ex-2018-1)**

$$y = x^2 \cdot ln(x) \text{ e } y = 4 \cdot ln(x)$$

Para determinar la región limitada por dichas curvas determinaremos la intersección entre éstas, para eso resolvemos la ecuación

$$4\ln(x) = x^2 \ln(x)$$

cuya solución es $x = 1$ y $x = 2$, obteniendo que el área es:

$$\int_1^2 \left(4 - x^2\right) \ln(x) dx$$

c

Si hacemos integración por partes con $u = \ln(x)$ y $dv = (4 - x^2)\, dx$ tenemos que

$$\int \left(4 - x^2\right) \ln(x) dx = \ln(x)\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) - \int 4 - \frac{x^2}{3} dx = \ln(x)\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) - 4x + \frac{x^3}{9} + C$$

De lo que tenemos que

$$\int_1^2 \left(4 - x^2\right) \ln(x) dx = \frac{16}{3}\ln(2) - \frac{29}{9}$$

4. Sea f una función tal que $f(0) = 0$, calcule el valor de **(Ex-2021-2)**

$$\int_1^0 e^s (f'(1-s) - f(1-s)) ds$$

Si separamos la integral en dos:

$$\underbrace{\int_1^0 e^s f'(1-s)}_{I_2} - \underbrace{\int_1^0 e^s f(1-s) ds}_{I_1}$$

Para calcular I_1 tendremos que usar:

$$u = e^s \longrightarrow du = e^s ds$$

$$dv = f'(1-s)ds \longrightarrow v = -f(1-s)$$

Con esto tenemos que

$$I_1 = \int_1^0 e^s f(1-s) ds = -\left. f(1-s)e^s\right|_1^0 + \underbrace{\int_1^0 e^s f'(1-s) ds}_{I_2} = -\left. f(1-s)e^s\right|_1^0$$

por lo tanto notamos que $I2$ es parte de I1, por lo que tenemos la ecuacion

$$I_2 - I_1 = I_2 - (-f(1-s)e^s|_1^0 + I_2) = f(1-s)e^s|_1^0$$

Finalmente tendremos que:

$$\int_1^0 e^s\left(f'(1-s) - f(1-s)\right)ds = f(1-s)e^s|_0^1 = f(1)$$

3.2 Integrales Trigonométricas

Evalúe las siguientes integrales:

1. $\int \cos(8x)\sin(5x)\mathrm{d}x$
2. $\int \cos^3(x)\sin(2x)\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x$ **(Ex-2015-2)**
4. $\int_0^{\pi/4} \tan^5(x)\sec^4(x)dx$ **(Ex-2018-1)**
5. $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\mathrm{d}x$ **(Ex-2018-2)**
6. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x)\sec^4(x)\mathrm{d}x$ **(I4-2019-TAV)**
7. $\int \sec^3(x)\mathrm{d}x$
8. $\int_0^1 \arcsin(x)dx$ **(Ex-2021-1)**

(a) Lo que tenemos que hacer acá es primero ocupar la propiedad de $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$:

$$\int \cos^3(x)\sin(2x)\mathrm{d}x = \int \cos^3(x)2\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x \to 2\int \cos^4(x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

Enseguida con la propiedad aplicada podemos hacer una sustitución:

$$u = \cos(x) \to \mathrm{d}u = -\sin(x)\mathrm{d}x$$

Reemplazando llegamos a:

$$2\int \cos^4(x)\sin(x)\mathrm{d}x = 2\int -u^4\mathrm{d}u = -2\left(\frac{u^5}{5}\right) + C = \frac{-2\cos^5(x)}{5} + C$$

(b) En este caso se debe ocupar dos propiedades que son:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}; \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Por lo que ocupando estas propiedades llegamos a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2(2x)\mathrm{d}x$$

Notamos que debemos ocupar la propiedad del $\cos^2(x)$:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)\mathrm{d}x$$

finalmente nos da:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(u-\frac{\sin(4x)}{4}\right)|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(u-\frac{\sin(4x)}{4}\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

(c) Para este ejercicio debemos tratar de formar de alguna manera que lo de abajo sea la función y arriba sea la derivada, por lo que hacemos:

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+(\cos^2(x))^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+(1-\sin(x)^2)^2}\mathrm{d}x$$

Con la integral escrita de esta manera, notamos que podemos hacer el cambio de variable:

$$u = \sin^2(x); \qquad \mathrm{d}u = 2\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+(1-\sin(x)^2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2(u^4+(1-u^2))}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{4u^4-4u^2+2}\mathrm{d}u$$

Ahora ajustamos la parte inferior de la fracción:

$$\int \frac{1}{4u^2-4u+2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(4u^2-4u+1)+1}\mathrm{d}u$$

Enseguida notamos que podemos hacer una factorización y luego hacer una sustitución:

$$\int \frac{1}{(4u^2-4u+1)+1}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(2u-1)^2+1}\mathrm{d}u \longrightarrow v = 2u-1;\ \mathrm{d}v = 2\mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(v)^2+1}\mathrm{d}c$$

Finalmente notamos que la integral es parecida a una integral conocida, por lo que la calculamos:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(v)^2+1}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\arctan(v)+C = \frac{\arctan(2u-1)}{2}+C = \frac{\arctan(2\sin^2(x)-1)}{2}+C$$

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\mathrm{d}x = \frac{\arctan(2\sin^2(x)-1)}{2}+C$$

(d) En este ejercicio usaremos propiedad de $\sec^2(x) = \tan^2(x)+1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x)\sec^4(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x)\sec^2(x)(1+\tan^2(x)\mathrm{d}x$$

Luego de esto notamos que si hacemos el cambio de variable $u = \tan(x)$, tenemos la derivada ahí mismo, por lo que nos queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x)\sec^2(x)(1+\tan^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} u^4(1+u^2)\mathrm{d}u$$

Ahora integrando y calculando llegamos a:

$$\int_0^{\sqrt{3}} u^4(1+u^2)\mathrm{d}u = \left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}\right)|_0^{\sqrt{3}} = \frac{198}{5}$$

(e) acá ocupamos la siguiente propiedad:

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\sin(A-B)+\sin(A+B)\right)$$

Enseguida reemplazando en la integral:

$$\int \cos(8x)\sin(5x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\sin(3x)+\sin(13x)\right)\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\left(\frac{\cos(3x)}{3}+\frac{\cos(13x)}{13}\right)+C$$

(f) Primero reescribimos la integral:

$$\int \sec^3(x)\mathrm{d}x = \int \sec^2(x)\sec(x)\mathrm{d}x \tag{46}$$

Ahora notamos que podemos integrar por partes tomando:

$$u = \sec(x) \quad \longrightarrow du = \sec(x)\cdot\tan(x)\mathrm{d}x$$
$$dv = \sec^2(x)\mathrm{d}x \longrightarrow v = \tan(x)$$

Quedándonos:

$$\int \sec^2(x)\sec(x)\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\tan(x) - \int \tan(x)\cdot\tan(x)\sec(x)\mathrm{d}x$$

Enseguida ocupando la identidad $\tan^2(x)+1 = \sec^2(x)$:

$$\sec(x)\cdot\tan(x) - \int(\sec^2(x)-1)\sec(x)\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\tan(x) - \underbrace{\int \sec^3(x)-\sec(x)\mathrm{d}x}_{\phi}$$

Ahora si calculamos ϕ por separado:

$$\phi = \underbrace{\int \sec^3(x)}_{\beta} - \underbrace{\int \sec(x)\mathrm{d}x}_{\gamma} = \underbrace{\int \sec^3(x)}_{\beta} - \underbrace{\ln(|\sec(x)+\tan(x)|)}_{\gamma}$$

Notamos que podemos identificar primero que la integral solicitada(β) inicialmente y además debemos calcular la otra integral que es:
Enseguida reemplazando todo en la ecuación (47):

$$\int \sec^3(x)\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\tan(x) - \int \sec^3(x) + \ln(|\sec(x)+\tan(x)|)$$

$$2\int \sec^3(x)\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\tan(x) + \ln(|\sec(x)+\tan(x)$$

$$\int \sec^3(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\sec(x)\cdot\tan(x) + \ln(|\sec(x)+\tan(x)\right)$$

3.3 Sustitución Trigonométrica

Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \ (Ex-2015-2)$

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x \ (Ex-2017-2)$

4. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{5+4x-x^2}\mathrm{d}x \ (Ex-2018-1)$

5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x \ (I4-2018-TAV)$

6. $\displaystyle\int \sqrt{2x+x^2}\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$

1. Primero lo que acá debemos hacer es notar que debemos usar la identidad de:

$$1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$$

Por lo que debemos hacer el cambio de variable:

$$x=\tan(u); \qquad \mathrm{d}x=\sec^2(u)\mathrm{d}u$$

$$x=1\to u=\frac{\pi}{4}; \qquad x=\sqrt{3}\to\frac{\pi}{3}$$

Quedándonos:

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)} \sqrt{1+\tan^2(u)}\sec^2(u)\mathrm{d}u=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^3(u)\mathrm{d}u$$

Notamos que esta integral fue calculada en la sección Integrales Trigonométricas, que es:

$$\int \sec^3(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\sec(x)\cdot\tan(x)+\ln(|\sec(x)+\tan(x)\right)$$

Por lo que:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^3(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\sec(u)\cdot\tan(u)+\ln(|\sec(u)+\tan(u)\right)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{2}\left((2\cdot\sqrt{3}+\ln|2+\sqrt{3})-(\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 1+\ln(\frac{2}{\sqrt{2}}+1))\right)$$

2. Para esta integral debemos hacer el siguiente cambio de variable

$$x = \cos(u); \qquad \mathrm{d}x = -\sin(u)\mathrm{d}u$$

Enseguida si reemplazamos esto en la integral nos queda:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{-\sin(u)}{\cos^2(u)\sqrt{1-\cos^2(u)}}\mathrm{d}u$$

Donde notamos que nos queda la siguiente integral reordenando:

$$\int \frac{-\sin(u)}{\cos(u)^2\sin(u)}\mathrm{d}u = \int -\sec^2(u)\mathrm{d}u = -\tan(u) + C$$

Ahora recordamos que debemos reemplazar el cambio de variable por lo que reacomodar $\tan(u)$:

$$-\tan(u) + C = -\left(\frac{sin(u)}{\cos(u)}\right) + C$$

Enseguida notamos que llegamos a:

$$-\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C$$

3. En esta integral tomamos:

$$x = 2\sin(t); \qquad \mathrm{d}x = 2\cos(t); \qquad x = 1 \to t = \frac{\pi}{6}; \qquad x = 2 \to t = \frac{\pi}{2}$$

Reemplazando en la integral nos quedaría:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)\cdot\sqrt{4-(2\sin(t))^2}}{(2\sin(t))^2}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2(t))}{4\sin^2(t)}\mathrm{d}t$$

Donde finalmente llegamos a:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2(t))}{4\sin^2(t)}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2(t)\mathrm{d}t$$

acá ocupamos la propiedad de $1 + \cot^2(t) = \csc^2(t)$:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2(t) - 1\mathrm{d}t$$

Enseguida estas dos integrales son conocidas por lo que nos queda finalmente:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2(t) - 1\mathrm{d}t = (-\cot(t) - u)\,|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

4. En este ejercicio notamos que tenemos un problema ya que no es tan obvio el cambio de variable que se debe hacer. En este caso se debe tratar de llevar la integral a un caso más general, por lo que trataremos de completar los cuadrado y ahí hacer un cambio de variable.

$$5 + 4x - x^2 = -(x^2 - 4x - 5) = -(x^2 - 4x - 5 + 9) + 9 = -(x^2 - 4x + 4) + 9$$

$$-(x^2 - 4x - 4) + 9 = -(x - 2)^2 + 9$$

Por lo que al escribirlo en la integral nos queda:

$$\int_1^3 \sqrt{5 + 4x - x^2}\mathrm{d}x = \int_1^3 \sqrt{9 - (x-2)^2}\mathrm{d}x$$

Ahora notamos que debemos llegar a una forma que nos quede $\sqrt{a^2 - \cos(t)}$(también puede ser $\sin(t)$), por lo que el cambio de variable que debemos hacer es:

$$x - 2 = u; \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}u; \quad x = 1 \to t = -1; \quad x = 3 \to u = 1$$

Quedándonos:

$$\int_1^3 \sqrt{9 - (x-2)^2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \sqrt{9 - (u)^2}\mathrm{d}u$$

Nuevamente debemos hacer un cambio de variable solo que ahora es más obvio:

$$u = 3\sin(t); \quad \mathrm{d}u = 3\cos(t)\mathrm{d}t; \quad u = -1 \to t = -\arcsin\left(\frac{1}{3}\right); \quad u = 1 \to t = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{9 - (u)^2}\mathrm{d}u = \int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} 3\cos(t)\sqrt{9 - (3\sin(t))^2}\mathrm{d}t = \int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} 9\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Enseguida notamos que para resolver esta integral debemos usar la siguiente propiedad:

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

Por lo que

$$\int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} 9\cos^2(t)\mathrm{d}t = 9\int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\mathrm{d}t$$

Finalmente nos da:

$$9\int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = 9\left(\frac{u}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\Big|_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} = 9\arcsin(\frac{1}{3}) + 2\sqrt{2}$$

$$\int_1^3 \sqrt{5 + 4x - x^2}\mathrm{d}x = 9\arcsin(\frac{1}{3}) + 2\sqrt{2} \quad \square$$

5. En esta integral tomamos:

$$x = 2\sin(t); \qquad \mathrm{d}x = 2\cos(t); \qquad x = 1 \to t = \frac{\pi}{6}; \qquad x = 2 \to t = \frac{\pi}{2}$$

Reemplazando en la integral nos quedaría:

$$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)4\sin^2(t)}{\sqrt{4-(2\sin(t))^2}}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)4\sin^2(t))}{2\cos^2(t)}\mathrm{d}t$$

Donde finalmente llegamos a:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)4\sin^2(t))}{2\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2(t)\mathrm{d}t$$

acá ocupamos la propiedad de $\sin^2(t) = \dfrac{1-\sin(2t)}{2}$:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4(\frac{1-\sin(2t))}{2}\mathrm{d}t$$

Ahora estas dos integrales son conocidas por lo que nos queda finalmente:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(2t)}{2}\mathrm{d}t = 4\left(\frac{u}{2} + \frac{\cos(2t)}{4}\right)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

6. acá lo que debemos hacer es completar el cuadrado haciendo lo siguiente:

$$\sqrt{2x+x^2} = \sqrt{x^2+2x+1-1} = \sqrt{(x+1)^2-1}$$

$$\int \sqrt{2x+x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x+1)^2-1}\mathrm{d}x$$

Por lo que Enseguida hacemos el cambio de variable:

$$x+1 = \sec(t); \qquad \mathrm{d}x = \sec(t)\tan(t)\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{(x+1)^2-1}\mathrm{d}x = \int \sqrt{(\sec(t))^2-1}\sec(t)\tan(t)\mathrm{d}t$$

Donde ocupamos la propiedad de $tan^2(t) = \sec^2(t) - 1$:

$$\int \sqrt{(\sec(t))^2-1}\sec(t)\tan(t)\mathrm{d}t = \int \tan^2(t)\sec(t)\mathrm{d}t = \int (\sec^2(t)-1)\sec(t)\mathrm{d}t$$

dándonos

$$\int \sec^3(t) - \sec(t)\mathrm{d}t$$

Finalmente debemos calcular las integrales pero notamos que estas integrales fueron calcula en la sección Integrales Trigonométricas en (46) Por lo que podemos remplazar los resultados:

$$\int \sec^3(t) - \sec(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sec(t)\cdot\tan(t) + \ln(|\sec(t)+\tan(t)) - \ln(|\sec(t)+\tan(t)|\right)$$

$$\int \sec^3(t) - \sec(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sec(t)\cdot\tan(t) - \ln(|\sec(t)+\tan(t))\,|\right)$$

Ahora debemos llevar todo a la variable respecto a x ocupando

$$x+1 = \sec(t) \to t = \operatorname{arcsec}(x+1)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sec(t)\cdot\tan(t) - \ln(|\sec(t)+\tan(t))\,|\right) = \frac{1}{2}\sec(arcsec(x+1))\cdot\tan(arcsec(x+1)) -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(|\sec(arcsec(x+1)) + \tan(arcsec(x+1))|)$$

Haciendo la sustituciones

$$\frac{1}{2}(x+1)\cdot\tan(arcsec(x+1)) - \frac{1}{2}\ln(|x+1+\tan(arcsec(x+1))|)$$

Enseguida notamos que tenemos un problema para calcular $\tan(arcsec(x+1))$. Si usamos la siguiente propiedad $\tan(t) = \sqrt{(x+1)^2-1}$, finalmente nos daría

$$\int \sqrt{2x+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x+1)\cdot\sqrt{(x+1)^2-1} - \frac{1}{2}\ln(|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}|) \qquad \square$$

7. En esta integral notamos que debemos hacer un cambio de variable:

$$u = x^2 \qquad \mathrm{d}u = 2x\cdot\mathrm{d}x$$

Quedándonos:

$$\int x\sqrt{1-x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}x$$

Enseguida es más obvio la sustitución trigonométrica que debemos hacer

$$u = \sin(t) \qquad \mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{2}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2}\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Finalmente usamos la siguiente propiedad:

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right) + C$$

Ahora recordemos que $u = \sin(t)$ por lo que $t = \arcsin(u)$, reemplazamos y nos da

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin(u)}{2} + \frac{2u)}{4}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin(x^2)}{2} + \frac{2(x)^2}{4}\right) + C$$

8. Lo que notamos acá es que la única opcion que tenemos es calcular el cuadrado de la parte inferior de la fracción:

$$\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (1 - 2x + x^2)} = \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

Reemplazando esto en la integral notamos que podemos hacer un cambio de variable

$$u = x - 1; \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

Enseguida notamos que esta integral está dentro de las conocidas por lo que la calculamos y luego cambiamos la variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \arcsin(u) + C = \arcsin(x-1) + C \qquad \square$$

3.4 Fracciones Parciales

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)(x^2+4)}\mathrm{d}x (I4-2019-TAV)$
3. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\mathrm{d}x (Ex-2017-2)$
4. $\displaystyle\int_4^5 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x (Ex-2018-TAV)$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)(x-1)}\mathrm{d}x (Ex-2015-2)$
6. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+5}{(x^2+5)(x+3)}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2+2x+2}{(x)(x^2+2x+1)}\mathrm{d}x\ (Ex-2018-2)$

1. En este ejercicio debemos identificar los factores por los que podemos llegar a separar la fracción parcial. Notamos que son $(1-x)(1+x) = 1-x^2$, por lo que ahora procedemos a hacer la separación:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

Donde llegamos al sistema de ecuaciones que no da

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A+Ax+B-Bx}{(1-x)(1+x)}$$

$$A+B=1$$

$$A-B=0$$

$$A = B \to A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{1}{2}$$

Por lo que ahora podemos resolver la integral de la siguiente manera

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-\ln(1-x)+\ln(1+x))$$

2. Primero debemos resolver el problema ocupando fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+4)}$$

$$\frac{Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C}{(x+3)(x^2+4)}$$

Con esto llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$1 = Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C$$

$$\begin{aligned} A\ +B\ &= 0 \\ 3B+C\ &= 0 \\ 4A+3C &= 1 \end{aligned}$$

dándonos

$$A = \frac{1}{13}; \qquad B = \frac{-1}{13}; \qquad C = \frac{3}{13}$$

Por lo que nos daría:

$$\int \frac{1}{(x+3)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \frac{1}{13}\left(\underbrace{\int \frac{1}{(x+3)}\mathrm{d}x}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x}{(x^2+4)}\mathrm{d}x}_{I_2} + \underbrace{\int \frac{3}{(x^2+4)}\mathrm{d}x}_{I_3}\right)$$

$I_1 = \int \frac{1}{(x+3)}\mathrm{d}x = \ln(|x+3|) + C_1$

$I_2 = \int \frac{x}{(x^2+4)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(|x^2+4|) + C_2$

$I_3 = \int \frac{3}{(x^2+4)}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C_3$

Ahora si hacemos $C_1 + C_2 + C_3 = C$

$$\int \frac{1}{(x+3)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \ln(|x+3|) + \frac{1}{2}\ln(|x^2+4|) + \frac{3}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C \qquad \square$$

3.
Para calcular esta integral utilizamos el método de descomposición en fracciones parciales,

$$\frac{2x^2-x+4}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{Ax^2+4A+Bx^2+Cx}{(x)(x^2+4)}$$

Con esto tenemos las siguientes ecuaciones que resolver:

$$2x^2-x+4=(A+B)x^2+(C)x+4A\rightarrow A+B=2\quad C=-1\quad 4A=4$$

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-1$$

con lo cual

$$\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx=\underbrace{\int\frac{1}{x}dx}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{x+1}{x^2+4}dx}_{I2}$$

Ahora resolviendo las dos integrales que nos quedaro tenemos que:

$$I_1=\int\frac{1}{x}=\ln(x)+C_1$$

$$I_2=\int\frac{x+1}{x^2+4}dx\underbrace{\int\frac{x}{x^2+4}dx}_{I3}+\underbrace{\int\frac{1}{x^2+4}dx}_{I4}$$

Esta ultima integral, notamos que es mas complicada pero se resuelve de manera sencilla si para I_3 tomamos $u=x_2+4$; $du=2xdx$

$$I_3=\int\frac{x}{x^2+4}dx=\int\frac{1}{2(u)}du=\frac{ln(u)}{2}=\frac{ln(x^2+4)}{2}+C_2$$

Ahora para I_4, debemos notar que se debemos re agrupar la fracción y despues hacer un cambio de variable:

$$I_4=\int\frac{\frac{1}{4}}{\frac{x^2}{4}+\frac{4}{4}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}dx$$

Hacemos el cambio de variable $u=x/2$; $\quad du=\frac{dx}{2}$, donde al reemplazar notaremos que podemos ocupar un integral conocida:

$$I_4=\frac{1}{4}\int\frac{1}{u^2+1}2du=\frac{1}{2}\cdot\arctan(u)+C_3=\frac{\arctan(x/2)}{2}+C_3$$

Por lo tanto si juntamos todas las integrales tendremos que:

$$\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx=\ln(x)+C_1+\frac{\ln(x^2+4)}{2}+C_2+\frac{\arctan(x/2)}{2}+C_3$$

$$\ln(x)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{2}\arctan(x/2)+C.$$

4.
Para este ejercicio, deben notar que el denominador de la fracción se puede factorizar y asi llegar a $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Esto lo hicimos con el fin de poder resolver la integral usando fracciones parciales:

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax - 3A + Bx - B}{(x-1)(x+3)}.$$

Notamos que se nos forma un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 3 \\ 3A + B &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Un calculo muestra que las soluciones del sistema anterior son $A = 1$ y $B = 2$. De esta manera

$$\int_4^5 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}dx = \int_4^5 \frac{1}{x-1}dx + \int_4^5 \frac{2}{x-3}dx$$

Por lo que resolvemos ambas integrales:

$$\int_4^5 \frac{1}{x-1}dx = (\ln|x-1| + 2)|_4^5 = (\ln(4) + 2 - \ln(3) - 2) = 2\ln(2) - \ln(3)$$

$$\int_4^5 \frac{2}{x-2}dx = (\ln|x-3|)|_4^5 = 2(\ln(2) - \ln(1)) = 2\ln(2)$$

Con lo que la integral inicial da por resultado:

$$\int_4^5 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}dx = 4\ln(2) - \ln(3)$$

5. Primero tendremos que hacer la fraccion parcial de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{C}{x-1}$$

, Donde nostmaos que se nos formara un sistema de ecuaciones:

$$1=(Ax+B)(x-1)+C\left(x^2+x+1\right).$$

Así, Resolviendo se obtiene:

$$A=-\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{3}$$

. Con esto tendremos que resolver dos integrales, de la siguiente manera:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)(x-1)}=-\frac{1}{3}\underbrace{\int\frac{x+2}{\left(x^2+x+1\right)}dx}_{I_1}+\underbrace{\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}dx}_{I_2}$$

$$\begin{aligned} I_1&=-\frac{1}{6}\int\frac{2x+4}{x^2+x+1}dx\\ &=-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{3}{6}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx\\ &=-\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)+C_1+\frac{1}{2}\underbrace{\int\frac{1}{x^2+x+1}dx}_{I_3} \end{aligned}$$

Debemos calcular I_3, de la siguiente manera:

$$x^2+x+1=x^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

Ahora con esto, lo que podemos hacer es hacer un cambio de variable $u=x+\frac{1}{2},\quad du=dx$

$$\begin{aligned} I_3&=\int\frac{1}{x^2+x+1}dx\\ &=\int\frac{1}{u^2+3/4}du\\ &=4\int\frac{1}{4u^2+3}du \end{aligned}$$

Nuevamente debemos hacer una sustitucion, la cual es posible de la siguiente manera:

$$4u^2+3=3\left[\frac{4u^2}{3}^2+1\right]=3\left[\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]$$

Donde con esto finalmente podemos hacer el cambio de variables:

$$w = \frac{2u}{\sqrt{3}} \qquad dw = \frac{2}{\sqrt{3}} du$$

Llevandolo a la integral, podremos resolver esta:

$$\begin{aligned}
I_3 &= 4 \int \frac{1}{4u^2+3} du \\
&= 4 \int \frac{1}{3(w^2+1)} \frac{\sqrt{3}}{2} dw \\
&= 4 \int \frac{1}{2\sqrt{3}(w^2+1)} dw \\
&= \frac{4}{2\sqrt{3}} \arctan(w) + C_2 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} u\right) + C_2 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + C_2 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que I_1:

$$I_1 = -\frac{1}{6} \ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_1 + C_2$$

Finalmente debemos calcular I_2 y tendremos el valor solicitado:

$$I_2 \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{3} \ln|x-1| + C_3$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x-1)} = -\frac{1}{6} \ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3} \ln|x-1| + C$$

Recordar que cuando teniamos constantes, podemos resumirlas en $C_1 + C_2 + C_3 = C$