PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Ayudantía 8 - MAT1610

1. (a) Determine el polinomio de Taylor de grado 2 centrado en π de la función $f(x) = e^{\text{sen}(x)}$

   (b) Al construir el polinomio de Taylor grado 3, centrado en 1, de cierta función f se obtuvo $T_3(x) = x^2 - 2x + 3$. Detremine los valores $f'''(1)$, $f''(1)$ y la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(1, f(1))$.

Solucion:

(a) Se tiene que
$f'(x) = \left(e^{\text{sen}(x)}\right)' = e^{\text{sen}(x)} \cos(x)$
$f''(x) = \left(e^{\text{sen}(x)} \cos(x)\right)' = e^{\text{sen}(x)} \cos^2(x) - e^{\text{sen}(x)}\text{sen}(x) = e^{\text{sen}(x)} \left(\cos^2(x) - \text{sen}(x)\right)$

$f(\pi) = e^{\text{sen}(\pi)} = 1$
$f'(\pi) = e^{\text{sen}(\pi)} \cos(\pi) = -1$
$f''(\pi) = e^{\text{sen}(\pi)} \left(\cos^2(\pi) - \text{sen}(\pi)\right) = 1 \cdot (1 - 0) = 1$

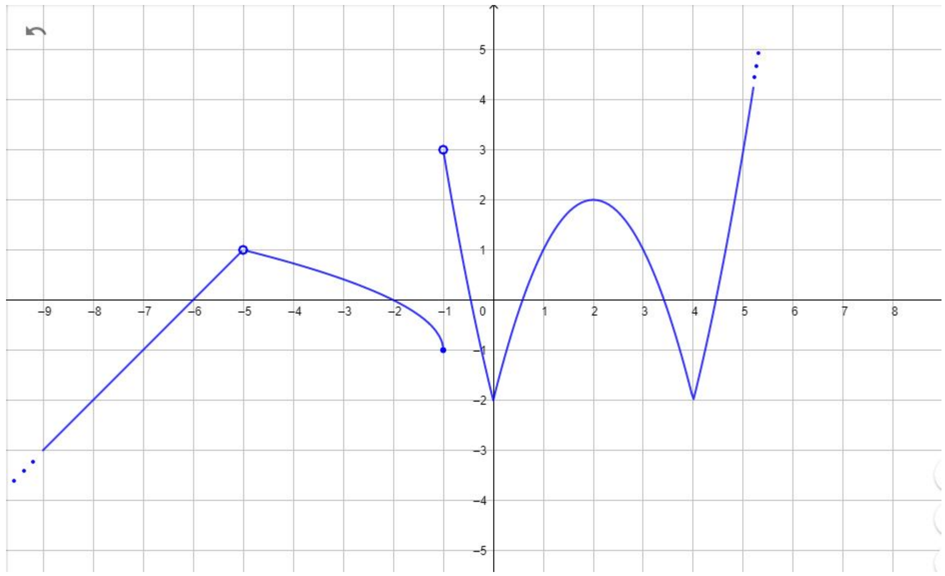
Polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado centrado en 0
$P(x) = 1 + (-1) \cdot (x - \pi) + \frac{1}{2!}(x - \pi)^2 = 1 - x + \pi + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 = \frac{1}{2}x^2 - (1 + \pi)x + \pi(\frac{\pi}{2} + 1) + 1$

(b) Dado que $T_3(x)$ es de grado 2, se tiene que $f'''(1) = 0$. Por otro lado,
$f''(1) = T_3'(1) = 2|_{x=1} = 2$
$f'(1) = T_3'(1) = 2x - 2|_{x=1} = 0$
$f(1) = T_3(1) = x^2 - 2x + 3|_{x=1} = 2$
Entonces la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(1, f(1))$ es la recta horizontal $y = 2$.

2. Para la función f cuya gráfica está dada en la figura, determine:

   (a) Los números o valores críticos de f y su imagen bajo f.

   (b) El mínimo y el máximo en cada uno de los siguientes intervalos: $[1, 4]$; $[1, 5]$; $[-9, -2]$; $[-1, 3]$;.



Solución

(a) Números Críticos:
Valores x del dominio de f tales que $f'(x) = 0$: $x = 2$.
Valores x del dominio de f tales que $f'(x)$ no existe: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 4$.
Valores de f en los números críticos: $f(2) = 2$; $f(0) = -2$; $f(-1) = -1$, $f(4) = -2$

(b) En el intervalo $[1, 4]$ la función f es continua, los valores de f en los extermos del intervalo son: $f(1) = 1$, $f(4) = -2$, y los valores de f en los números críticos contenidos en $[1, 4]$ son $f(2) = 2$ y $f(4) = -2$. Entonces, el mínimo de f es $f(4) = -2$ y el máximo de f es $f(2) = 2$.
En el intervalo $[1, 5]$ la función f es continua, los valores de f en los extermos del intervalo son: $f(1) = 1$, $f(5) = 3$, y los valores de f en los números críticos contenidos en $[1, 5]$ son $f(2) = 2$ y $f(4) = -2$. Entonces, el mínimo de f en $[1, 5]$ es $f(4) = -2$ y el máximo de f en $[1, 5]$ es $f(5) = 3$.
Note que f NO es continua en el intervalo $[-9, -2]$. El mínimo de f en $[-9, -2]$ es $f(-9) = -3$ y el máximo de f en $[-9, -2]$ no existe.
En el último caso se tiene que f NO es continua en el intervalo $[-1, 3]$. El mínimo de f en $[-1, 3]$ es $f(0) = -2$ y el máximo de f en $[-1, 3]$ no existe.

3. Determine los números críticos de la función f en cada caso:

   (a) $f(x)$ es una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $e^{1+x^2}f(x)+\frac{(f(x))^5}{5}+\pi f(x)=0$.

   (b) $f(x)=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}$, con $a\in\mathbb{R}$.

   Solución:

   (a) Dado que f es derivable en $\mathbb{R}$, los únicos números críticos, si existen, corresponden a aquellos valores tales que $f'(x)=0$. En este caso, la función derivada se obtiene derivando implicitamente, como sigue

$$\begin{aligned} e^{1+x^2}f(x)+\frac{(f(x))^5}{5}+\pi f(x)=0 \quad &\Rightarrow \quad e^{1+x^2}2xf(x)+e^{1+x^2}f'(x)+(f(x))^4 f'(x)+\pi f'(x)=0 \\ &\Rightarrow \quad e^{1+x^2}2xf(x)+f'(x)\left(e^{1+x^2}+(f(x))^4+\pi\right)=0 \\ &\Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{e^{1+x^2}2xf(x)}{e^{1+x^2}+(f(x))^4+\pi}(\text{denominador no nulo}) \end{aligned}$$

   Entonces,

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{e^{1+x^2}2xf(x)}{e^{1+x^2}+(f(x))^4+\pi}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{1+x^2}2xf(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad xf(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=0\vee f(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=0\vee x=f^{-1}(0)(\text{está garantizada su existencia **}) \end{aligned}$$

   ** Se garantiza la existencia de $x=f^{-1}(0)$ porque si $f(x)=0$, se cumple la ecuación original ya que,

$$e^{1+x^2}f(x)+\frac{(f(x))^5}{5}+\pi f(x)=e^{1+x^2}\cdot 0+\frac{(0)^5}{5}+\pi\cdot 0=0$$

   Así, los valores críticos de f son: $x=0$ y $x=f^{-1}(0)$

   (b) Dominio de f: $\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{4ax-3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}=\frac{x\,(4a-3x)}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}$$

   Dominio de f': $R-\{0,2a\}$ y

$$\begin{aligned} f'(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x\,(4a-3x)}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}=0\wedge x\neq 0\wedge x\neq 2a \\ &\Leftrightarrow \quad x\,(4a-3x)=0\wedge x\neq 0\wedge x\neq 2a \\ &\Leftrightarrow \quad 4a-3x=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{4a}{3} \end{aligned}$$

   Así, los valores críticos de f son: $x=0$, $x=2a$ y $x=\frac{4a}{3}$

4. Determine, el máximo y el mínimo de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ en el intervalo $[-1, 3]$ **Solución:**
Valor de f en los extremos del intervalo:
$f(-1) = \frac{1}{1+|-1|} + \frac{1}{1+|-1-1|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
$f(3) = \frac{1}{1+|3|} + \frac{1}{1+|3-1|} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$
Se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} & si \quad x < 0 \\ \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

y,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} & si \quad x < 0 \\ \\ -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} & si \quad 0 < x < 1 \\ \\ -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Notar que f no es derivable en $x = 0$ y $x = 1$ y que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-6x+5}{(1-x)^2(2-x)^2} & si \quad x < 0 \\ \\ \frac{-3+6x}{(2-x)^2(1+x)^2} & si \quad 0 < x < 1 \\ \\ \frac{-2x^2-2x-1}{(1+x)^2x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Entonces, $f'(x) = 0$ sólo si $-3 + 6x = 0$, es decir, $x = \frac{1}{2}$. Note que los polinomios $2x^2 - 6x + 5$ y $-2x^2 - 2x - 1$ no tienen raíces reales.

Por lo tanto, los números críticos de f en el intervalo $[-1, 3]$ son $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ y $f(0) = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ y $f(1) = \frac{3}{2}$. Por otro lado, $f(-1) = \frac{5}{6}$ y $f(3) = \frac{7}{12}$. Entonces:
El máximo de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ en el intervalo $[-1, 3]$ es $f(0) = f(1) = \frac{3}{2}$
El mínimo de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ en el intervalo $[-1, 3]$ es $f(3) = \frac{7}{12}$.

5. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a (1-x)^b$ en el intervalo $[0, 1]$

Solución:

Dado que $x \geq 0$, entonces, x^a está bien definido para cualquier valor de $a > 0$. Como $0 \leq x \leq 1$ y, en consecuencia, $0 \leq 1 - x \leq 1$, se tiene que $(1-x)^b$ está bien definido para cualquier valor de $b > 0$. Entonces, f es continua en $[0, 1]$

Como

$$f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1}$$

se tiene que f es derivable en el intervalo $(0, 1)$ y se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a(1-x) - bx) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a(1-x) - bx = 0 \qquad \text{ya que } x^{a-1}(1-x)^{b-1} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{b+a} \end{aligned}$$

Así, el número crítico de f es: $x = \frac{a}{b+a}$.

Valor de f en el número crítico:

$f\left(\frac{a}{b+a}\right) = \left(\frac{a}{b+a}\right)^a \left(1 - \frac{a}{b+a}\right)^b = \left(\frac{a}{b+a}\right)^a \left(\frac{b}{b+a}\right)^b = \frac{a^a b^b}{(b+a)^{a+b}}$

Valor de f en los extremos del intervalo $f(0) = f(1) = 0$. Así,

$$f\left(\frac{a}{b+a}\right) > 0 = f(0) = f(1)$$

Entonces, el valor máximo de f es $f\left(\frac{a}{b+a}\right) = \frac{a^a b^b}{(b+a)^{a+b}}$