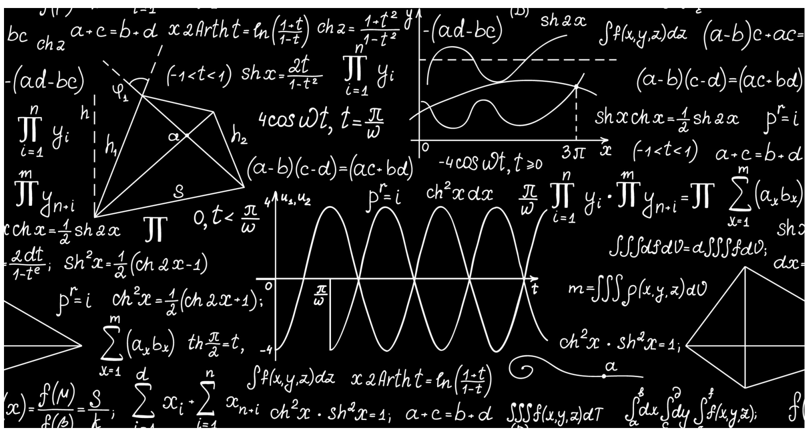
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas - Departamento de Matemática

Cálculo I

Compilado de Ejercicios Resueltos



Sebastián Breguel, Alumno de Ingeniería Civil

sebabreguel@uc.cl

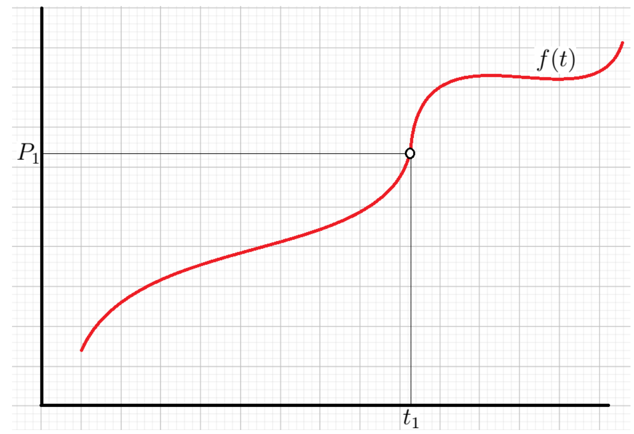
Contents

1 Límites y continuidad

1.1 Concepto de límite

Antes de iniciar a hacer cálculos números y demases, **me gustaría primero entregar una definición de un límite más bien teórico con un ejemplo cotidiano**.

• Imagínense que ustedes van marcando con una **línea de pintura** el camino que llevan por un recorrido x que es muy largo, en cierto punto ustedes se detienen habiendo recorrido el trayecto en un t tiempo, se dan cuenta que pueden llevar el camino trazado a una función $f(t)$. Al día siguiente se acuerdan que en un momento de tiempo t_1 no pudieron marcar un punto del camino que llamaremos P_1 y el profesor les pide estimar su posición en base al momento t_1 en que no pudieron marcar ese punto. **¿Cómo lo calcularían si la función presenta un problema en ese punto P_1?**



acá el problema es que la función $f(t)$, al igual que la pintura no nos logra entregar ese valor. En estos casos es cuando el cálculo de un límite toma una medida práctica, que vendría siendo finalmente la estimación de la posición en base a $f(t)$ nos dará finalmente ese punto en base al camino que nosotros estábamos recorriendo.

$$\lim_{t \to t_1} f(t) = P_1$$

enseguida pasando ya a una definición mas formal del límite sería la siguiente:

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad de a, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es l si podemos obtener valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a l tomar x lo suficientemente cercano a a. Se anota matemáticamente como

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Definición: Sea $f(x)$ una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces se dice que $f(x)$ es una *forma indeterminada* si en $x = a$ si $f(a)$ es de la forma $0/0$, ∞/∞,0^∞, $\infty/0$, $0 \cdot \infty$, etc...

Leyes de los límites

Teorema: es importante recalcar que **la existencia de un límite** depende totalmente de que se cumpla la condición de que sus límites laterales convergen al mismo valor, es decir si

$$\lim_{x\to\ a^+} f(x) = \lim_{x\to\ a^-} f(x) = L \to \lim_{x\to\ a} f(x) = L$$

Algunas de las **propiedades de los límites**, que nos permiten "jugar" con las expresiones se define como:

Sean $\alpha, \beta \ \in \mathbb{R}$ constantes y $f, g : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- límite de una constante: $\lim_{x\to a} \alpha = \alpha$
- Homogeneidad: $\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha\mathbf{A}$
- Superposición: $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$
- Linealidad: $\lim_{x\to a}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)] = \alpha\mathbf{A} \pm \beta\mathbf{B}$
- Producto: $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Cuociente: $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$, Si y solo si $B \neq 0$

Cambio de variable

Una técnica que es habitual en el curso es la sustitución. La idea detrás de realizar esta operación es siempre la misma: una expresión complicada de trabajar y/o analizar es reemplazada pertinente y correctamente por otra expresión mucho más sencilla de observar.

Teorema: Sean f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcioness tales que:
• $\lim_{x\to a} f(x) = l$ con $f(x) \neq l$ en una vecindad reducida de a entonces

$$u = f(x)$$

Entonces cuando $x \to a$ tendremos $u \to l$, finalmente nos queda

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \longrightarrow \lim_{u\to l} g(u) = M$$

fórmulas y propiedades útiles

Durante el desarrollo del curso y mas específicamente en la primera parte de límites, tendran que ocupar muchas fórmulas constantemente, donde la mayoria de estas son:

■ **Polinomios**

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $x^2 - (r+s)x + rs = (x-r)(x-s)$
- $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
- $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Ahora mas como fórmulas generales para factorizar polinomios, cuando estos no son tan tipicos son dos

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{R}$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n:$ **Impar**

■ **Propiedades trigonométricas**

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\beta)\sin(\alpha)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a \mp b}{2}\right)$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

■ **límites notables**: son un conjunto de límites que es importante que sepan de "memoria" entendiendo el proceso que hay detras, pero saberlos puede hacerlos ganar una gran cantidad de tiempo.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{u\to 0} (1+u)^{(1/u)} = e$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{kx} - 1)}{x} = k\ln(a)$

1.2 Calculo de límites

1.2.1 raíces y polinomios

1. En este item deberán aplicar reglas básicas de la matemáticas para ir soltando la mano.

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x-2}$

(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

(c) $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

(d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

Soluciones:
(1a) Para este ejercicio ocuparemos la fórmula de diferencia de cuadrados a nuestro favor, donde definiremos primero $a_1 = x^2; b_1 = 4$ y luego $a_2 = x; b_2 = 2.$ enseguida reemplazando en la fracción logramos lo siguiente:

$$\frac{x^4-16}{x-2} = \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x-2} = \frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x-2}$$

Finalmente con este resultado logramos notar que podremos simplificar la fracción al momento de evaluarlo en el límite y así lograr encontrar el resultado:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+4)(x+2) = 8\cdot 4 = 32$$

(1b) En este ejercicio deben lograr factorizar la fracción que a simple vista sale de rápida manera, es de la siguiente forma:

$$\frac{x^3-x}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-1}$$

Ahora nos resultará mucho más fácil encontrar el valor del límite solicitado.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{1} = 1$$

(1c) En este caso para lograr simplificar la fracción de alguna manera, la elegida en este caso será la de ver el numerador de la fracción como una diferencia de cuadrados (a^2-b^2) para así lograr ampliar el numerador:

$$\frac{9-t}{3-\sqrt{t}} = \frac{(3-\sqrt{t})(3+\sqrt{t})}{3-\sqrt{t}}$$

Con esto logramos notar que podemos simplificar el límite y encontrar su valor:

$$\lim_{t\to 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}} = \lim_{t\to 9} \frac{(3-\sqrt{t})(3+\sqrt{t})}{3-\sqrt{t}} = \lim_{t\to 9} 3+\sqrt{t} = 6$$

(1d) en este ejercicio notamos una diferencia que ahora tenemos una resta de cubos, por lo que debemos ocupar esta fórmula para factorizar el numerador y lograr poder calcular el límite.

$$(2+h)^3 - 8 = ((2+h)-2)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4) = (h)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)$$

Luego podemos calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(h)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)}{1} = 4 + 4 + 4 = 12$$

2. Ya se empiezan a requerir mayores habilidades como lo son racionalizaciones o el trabajo con valores absolutos.

   (a) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

   (b) $\lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{2 - |1 - x|}$

   (c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ **(I1-2012-1)**

   (d) $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x + 6} - 4}{x - 5}$

   (e) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2}$ **(I1-2016-tav)**

Soluciones:
(2a) Para resolver el ejercicio debemos factorizar el numerador que se nota fácilmente cual es:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$

Con esto lograremos de manera fácil calcular el límite solicitado.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{1} = -3$$

(2b) Notamos que el límite se indefine, por lo que factorizamos en ambas partes de la fracción llegando a:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

enseguida sabiendo la factorización podemos obtener el valor simplificando la expresión.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{((x+2)} = \frac{1}{4}$$

(2c) Este límite es más fácil de notar ya que tenemos un fracción con una raíz solo en el denominador, por lo que seguimos el método de la racionalización para acomodar la fracción y luego aplicar el límite.

$$\frac{\sqrt{2x+6} - 4}{x - 5} \cdot \frac{\sqrt{2x-6} + 4}{\sqrt{2x-6} + 4} = \frac{2x - 10}{(x-5)(\sqrt{2x-6} + 4)}$$

Enseguida aplicamos el límite a la expresión.

$$\lim_{x\to 5} \frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x+6}+4)} = \lim_{x\to 5} \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x+6}+4)} = \lim_{x\to 5} \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} = \frac{2}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{4}$$

(2d) En el caso de este límite notamos que tenemos un valor absoluto que nos puede causar problemas al momento de calcular el límite. Aunque notamos que en el punto no habría un cambio de signo, por lo que solo hace falta notar cuál sería el signo en el punto.

$$\frac{2x-6}{2-|1-x|} = \frac{2x-6}{2-(x-1)} = \frac{2x-6}{3-x} = \frac{2(x-3)}{-(x-3)}$$

Con esto notamos que podemos evaluar el límite de manera fácil.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{-(x-3)} = -2$$

(2e) En este ejercicio notamos que se debe racionalizar la fracción ya que arriba tenemos uno de los dos factores necesarios y si logramos racionalizarla, logramos simplificar el x^2 que está en el numerador para lograr evaluarlo en el límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+4-4}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

Con el límite de esta forma logramos notar que es posible evaluar el límite , ya que se simplifican ambos x^2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{4}$$

3. Durante este ítem deberán aplicar factorizaciones y trabajo con valores absolutos en un nivel un poco más alto.

   (a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^4-1}{h}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|2x-7|-|2x-5|}{x-3}$ **(I1-2018-2)**

   (c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^4-a^4}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\ln(x)}{|x-1|}$ **(I1-2018-1)**

Soluciones:
(3a) En este límite debemos ampliar el polinomio donde ocuparemos la base de $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ y así iremos ampliando el polinomio:

$$(1+h)^4-1=\big((1+h)^2+1\big)\big((1+h)^2-1\big)=\big((1+h)^2+1\big)\left((1+h)+1\right)\left((1+h)-1\right)$$

$$(1+h)^4-1=\big((1+h)^2+1\big)\left(2+h\right)\left(h\right)$$

Enseguida con esto podemos reemplazarlo en el límite y luego simplificar el término (h):

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+h)^4-1}{h}=\frac{\left((1+h)^2+1\right)\left(2+h\right)\left(h\right)}{h}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+h)^2+1\right)\left(2+h\right)}{1}=\frac{(1+1)(2)}{1}=4$$

(3b) Para este ejercicio, tenemos dos valores absolutos donde además notamos que en el punto que se evalúa el límite no es en donde se hace el cambio de signo para el valor absoluto, por lo que es fácil notar los signos a cambiar:

$$\frac{|2x-7|-|2x-5|}{x-3}=\frac{-(2x-7)-(2x-5)}{x-3}=\frac{12-4x}{x-3}=\frac{-4(x-3)}{x-3}$$

Enseguida con esto de manera fácil podemos llegar al valor del límite

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}-4=-4$$

(3c) Enseguida notamos que en el denominador tenemos una diferencia de cubos y en el numerador una diferencia de cuadrados, donde ocupando las fórmulas entregadas la fracción termina de la siguiente manera:

$$\frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}=\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}$$

Llevando esto al límite y evaluándose logramos encontrar su valor

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{(x^2+a^2)(x+a)}=\frac{3a^2}{(2a^2)(2a)}=\frac{3}{4a}$$

(3d) En el caso de este límite a diferencia del anterior donde teníamos un valor absoluto acá si cambia el signo de este en el punto a evaluar por lo que debemos separar la función en una función por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\ln(x)}{-(x-1)} & x < 1 \\ \\ \dfrac{(x-1)\ln(x)}{(x-1)} & 1 \leq x \end{cases}$$

Enseguida lo que debemos hacer es calcular los límites laterales para que se cumpla:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Ya que con esto, se asegura la existencia del límite.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\ln(x)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\ln(x)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} -\ln(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln(x)$$

$$0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0$$

Con esto se comprueba que el valor del límite es 0.

4. Ya llegado a este punto es cuando empiezan las preguntas tipo prueba difíciles, donde deben tener un buen manejo con cambios de variable, racionalizaciones y factorización.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x-1}-2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}$ **(I1-2015-tav)**

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+x}{x-1}$

Soluciones:

(4a) Notamos que en el numerador y denominador tienen raíces de segundo grado, por lo que debemos racionalizar ambas partes para poder reducir de alguna manera la expresión.

$$\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} \cdot \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3} = \frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(x+\sqrt{x+2})}$$

Finalmente con esto logramos notar que en el numerador podríamos factorizar y llegar a reducir alguna expresión con el denominador

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \frac{(3)(6)}{4(2+2)} = \frac{18}{16}$$

(4b) Para este ejercicio al igual que el anterior notamos que tenemos ambos tipos de raíces tanto de segundo como de tercer grado. Pero a diferencia del anterior este es resolvible de una manera más fácil. Que es la de hacer una doble racionalización, tanto para el numerador($a^2 - b^2$) como para el denominador($a^3 - b^3$)

$$\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x-1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9}{(\sqrt[3]{x-1}-2)(\sqrt{x}+3)}$$

$$\frac{x-9}{(\sqrt[3]{x-1}-2)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + (\sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}{(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + \sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}$$

$$\frac{(x-9)(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + (\sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

luego de haber realizado esto podemos calcular el límite

$$\lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + (\sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

Reducimos términos y llegamos al valor del límite

$$\lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + (\sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{(2)^2 + (2) \cdot 2 + 4}{6} = 2$$

(4c) Notamos que tenemos una raíz en el Denominador de la fracción, por lo que primero intentaremos factorizar.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{\sqrt{x}-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{x - \sqrt{x}}$$

Si vemos el resultado, seguimos teniendo un problema en el denominador pero si notamos al ojo este nos causaría un problema si racionalizamos nuevamente(quedaría un término x^2). Enseguida cómo es que seguimos el ejercicio entonces, tal vez si llegamos a bajar la expresión de grado podría resultar, por lo que procedemos a hacerlo.

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{x - \sqrt{x}} = \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

Luego de haber bajado de grado la fracción creemos que ahora es más fácil de racionalizar:

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(x-1)}$$

Finalmente notamos que la expresión es reducible($x-1$) y lograremos reemplazar el límite.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$$

(4d) Este ejercicio debemos iniciarlo, no por la forma típica, sino que debemos pensar en algun cambio de variable que nos facilite hacer la resta, ya que al trabajar con raíces todo es un poco más complicado. Para simplificar llegamos a hacer el cambio de variable:

$$u = \sqrt{x}; \quad u \to 1 \quad x \to 1$$

Enseguida reemplazando esto, notamos que se hace mucho más fácil

$$\lim_{u \to 1} \frac{1}{u-1} - \frac{u+u^2}{u^2-1} = \lim_{u \to 1} \frac{u+1-u-u^2}{u^2-1}$$

Finalmente nos quedaría:

$$\lim_{u \to 1} \frac{1-u^2}{u^2-1} = \lim_{u \to 1} \frac{-(u^2-1)}{u^2-1} = -1$$

5. Llegado a este punto es cuando terminamos con las preguntas mas difíciles de toda esta subsección, donde se necesita un analizis mas alla de los clasíco, Suerte!

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{2}{\sqrt{x+1}} - 1}{x-3}$ **(I1-2019-tav)**

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3}$ **(I1-2015-1)**

(d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[7]{x}}$

Soluciones:

(5a) Este ejercicio es de alta dificultad, ya que notamos que tenemos una fracción de segundo y tercer grado. Por lo que no sabemos cual es la mejor manera de tratar esto es ver cada raíz por separado, **Pero primero debemos sumar 0:**

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1} + 1 - 1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1 - (\sqrt[3]{x^3+x+1} - 1)}{x}$$

Reordenando llegamos a

$$\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x}}_{\beta}$$

Por lo que ahora es más fácil de ver lo que hay que hacer, qué sería racionalizar cada fracción y así llegar al valor del límite :

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{(x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

$$\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{(x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}$$

$$\beta = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2+1)}{(x)(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}$$

$$\beta = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+1)}{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)} = \frac{1}{3}$$

Ahora juntando ambos valor y volviendo al límite original:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x+1}+1-1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

5b.- La forma de afrontar este ejercicio es un poco más difícil que la típica, ya que lo normal sería juntar la fracción para luego racionalizar quedándonos algo como esto

$$\frac{\frac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}}{x-3} = \frac{\frac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}}{x-3} = \frac{\frac{2\sqrt{x+1}-(x+1)}{x+1}}{x-3}$$

Pero según vemos por este método es un poco difícil continuar ya uq ele problema sigue existiendo. Por lo tanto seguiremos un método nuevo y bastante peculiar, que es el de racionalizar toda la fracción de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1}{x-3} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1}{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1} = \frac{\frac{4}{x+1}-1}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \frac{\frac{3-x}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)}$$

Enseguida con esto notamos que si es posible simplificar la fracción al momento de evaluar el límite y así podemos calcularlo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{(3-x)}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{-(x-3)}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{-1}{(x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \frac{-1}{(4)(\frac{2}{2}+1)} = \frac{-1}{(4)(2)} = \frac{1}{-8}$$

(5c) En este ejercicio será necesario aplicar un conocimiento mayor/diferente que en los ejercicios que hemos resuelto, ya que es necesario saber sobre división de polinomios para poder factorizar ambas partes de la fracción, ya que ambas se vuelven 0. Con esto logramos saber que $(x-1)$ es un factor de ambos polinomios, por lo que procedemos a hacer la división de polinomios:

$$
\begin{array}{rr|l}
- & x^4+2x^3-4x^2+4x-4 & (x-1) = x^3+3x^2+4 \\
 & x^4-x^3 & \\
\hline
- & 3x^3-3x+4x-4 & \\
 & 3x^3-3x & \\
\hline
- & 4x-4 & \\
 & 4x-4 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Por lo que la primera factorisación nos quedaría:

$$x^4+2x^3-4x^2+4x-4 = (x-1)(x^3+3x^2+4)$$

Enseguida el polinomio del denominador lo dividimos por el factor:

$$
\begin{array}{rr|l}
- & x^4+0+0+2x-3 & (x-1) = x^3+x^2+x+3 \\
 & x^4-x^3 & \\
\hline
- & x^3-0+\quad x-3 & \\
 & x^3-x^2 & \\
\hline
- & x^2+2x-3 & \\
 & x^2-x & \\
\hline
- & 3x-3 & \\
 & 3x-3 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

Quedanonos la fatorización de la siguiente manera:

$$x^4+0+0+2x-3 = (x-1)(x^3+x^2+x+3)$$

Por lo que ahora si es posible calcular el límite :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+3x^2+4)}{(x-1)(x^3+x^2+x+3)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x^2+x+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

(5d) acá lo que debemos hacer es intentar factorizar de alguna manera ambas partes de la fracción por el factor $(x + 1)$,El unico método que se nos ocurre es mediante la **Racionalizacion** de ambas partes.
Para saber esto debemos saber la siguiente propiedad del triangulo de pascal para factorización de suma de elevados impares son:

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a^5 + b^5) = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$(a^7 + b^7) = (a + b)(a^6 - a^5b^1 + a^4b^2 - a^3b^3 + b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

Por lo que ahora sabiendo esto aplicamos la racionalización para el numerador como para el denominador:

$$\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[7]{x}} \cdot \frac{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} \cdot \frac{(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}{(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}$$

$$\frac{(1 + x)(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}{(1 + x)(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

Enseguida con esto podemos simplificar la fracción y aplicar el límite

$$\lim_{x \to -1} \frac{1 + x}{1 + x} \frac{(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(1 - \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{x^2} - \sqrt[7]{x^3} + \sqrt[7]{x^4} - \sqrt[7]{x^5} + \sqrt[7]{x^6})}{(1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{7}{3} \qquad \square$$

1.2.2 Trigonometricos

1. Calcular los siguientes límite s

(a) $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\sin(x)}{x - \pi}$

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)}$ **(I1-2011-2)**

(c) $\lim_{x \to 3}(x-3)\csc(\pi x)$ **(I1-2017-1)**

(d) $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi}$ **(I1-2017-2)**

(e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(4x}$

(f) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)}$

(1a) En este ejercicio notamos que es del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que debemos hacer un cambio de variable para poder calcular este límite. El cambio es un poco notorio debido al denominador de la fracción donde sería:

$$u = x - \pi \to x = u + \pi$$

$$x \to \pi \qquad u \to 0$$

Enseguida aplicando esto en el límite nos queda:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x)}{x - \pi} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u + \pi)}{u}$$

Para resolver el límite , debemos usar la fórmula de suma de angulos dándonos:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos(u)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)(-1) + (0)\cos(u)}{u} \lim_{u \to 0} -\frac{\sin(u)}{u}$$

Finalmente notamos que llegamos al resultado de uno de los límites notables que nosotros sabemos, por lo que podemos calcularlo:

$$\lim_{u \to 0} -\frac{\sin(u)}{u} = -1$$

(1b) Este límite en especifico podemos llevar gran parte de este a un límite notable, junto con una simplificación simple que sería

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x + \sin(x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x - \sin(x)}{x}}{\frac{x + \sin(x)}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{\sin(x)}{x}}{1 + \frac{\sin(x)}{x}}$$

Luego de esto podemos aplicar las reglas de los límites y hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0} 1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{\lim_{x\to 0} 1+\dfrac{\sin(x)}{x}}$$

Para terminar ocupamos otra regla de los límites que nos permite:

$$\frac{\lim_{x\to 0} 1-\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}}{\lim_{x\to 0} 1+\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

(1c) La resolución de este ejercicio es mediante un cambio de variable que es bastante obvio, ya que si escribimos el límite notamos que es de la forma $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)}{\sin(\pi x)}$$

Enseguida haciendo el cambio de variable

$$u = x-3 \to u+3 = x$$

$$x \to 3 \qquad u \to 0$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sin(\pi x)} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin(\pi(u+3))}$$

El problema mas comun es una vez llegando a este punto, debido a no saber que hacer con el $\sin(\pi(u+3))$, pero primero aprovechamos de su periocidad haciendo

$$\sin(u\pi + 3\pi) = \sin(u\pi + \pi)$$

luego de esto ocuparemos la siguiente propiedad

$$\sin(u+\pi) = -\sin(u) \to \sin(u\pi+\pi) = -\sin(u\pi)$$

Reemplazamos esto en el límite

$$\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin(\pi(u+3))} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{-\sin(u\pi)}$$

Finalmente solo debemos seguir el método para llegar al límite notable

$$\lim_{u\to 0} \frac{u}{-\sin(u\pi)} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{u\pi}{(-\pi)\sin(u\pi)} = -\frac{1}{\pi}$$

(1d) Debemos abordar este ejercicio desde el cambio de variable, donde tenemos dos opciones de cambios de variable los cuales son

$$u_1 = x - \frac{\pi}{4} \quad o \quad u_2 = 4x - \pi$$

$$u_1 + \frac{\pi}{4} = x \qquad o \qquad \frac{u_2 + \pi}{4} = x$$

En mi caso eligo u_1, ya que me es mas fácil trabajar el denominador y el sin con las propiedades de suma de angulos.

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi} = \lim_{u \to 0} \frac{2\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{4u}$$

$$\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(u)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(u) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(u)$$

Recordarmos que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\lim_{u \to 0} \frac{2\left(\frac{\sin\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right) - \sqrt{2}}{4u} = \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u) + \sqrt{2}\cos(u) - \sqrt{2}}{4u}$$

Enseguida factorizamos y separamos la suma en la siguiente manera:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{4u} + \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\cos(u) - 1)}{u}$$

Finalmente notamos que el primer y segúndo termino son un límites notables que sabemos, los que son 1 y 0.

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{4u} + \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\cos(u) - 1)}{u} = \frac{\sqrt{2}}{4} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(1e) Partimos de la premisa de que debemos ocupar si o si la expresión del límite notable:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

Por lo que debemos separar el límite en dos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{1} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(4x)}$$

Enseguida debemos lograr llevarlo al límite notable ambas fracciones y nos dara el resultado:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{1} \cdot \frac{7x}{7x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{1} \cdot \frac{4x}{4x}\right)^{-1} = \lim_{x \to 0} 7x\frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{4x\sin(4x)}{4x}\right)^{-1}$$

Ya con esto podemos aplicar el límite notable y encontrar el valor final del límite solicitado:

$$\lim_{x\to 0} 7x\frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{4x\sin(4x)}{4x}\right)^{-1} = \lim_{x\to 0} 7x \cdot (4x)^{-1} = \lim_{x\to 0} \frac{7x}{4x} = \frac{7}{4}$$

(1f) Este límite se parece mucho a uno de los límites notables que nosotros sabemos, pero por eso mismo es importante saber el desarrollo para llegar al valor.
Primero notamos que en el numerador tenemos $1-\cos(x)$, lo cual si lo vemos de cierta manera es uno de los terminos de la suma por su diferencia, por lo que multiplicamos por el faltante que sería

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{(\sin^2(x))(1+\cos(x))}$$

Usando la propiedad: $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1 \to \sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ y reemplazandola en el límite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{(\sin^2(x))(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

.

2. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x}$ **(I1-2019-2)**
   (b) $\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x^2-x-2)}{x+1}$ **(I1-2014-1)**
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+\sin(\pi x)}{\sin(ex)+\sin(4x)}$ **(I1-2018-1)**
   (d) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\tan(4x)}{2x-\pi}$ **(I1-2019-1)**
   (e) $\lim_{x\to \pi/3} \frac{1-2\cos(x)}{\sin(x-\pi/3)}$
   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)}$ **(I1-2010-2)**

(2a) El límite , debe ser analizado desde la visión de la siguiente propiedad:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} \tag{1}$$

Siendo u cualquier cosa, por lo que hacemos la siguiente operacion:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x}$$

Luego de esto podemos por regla de límites hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Donde notamos que ambos límites nos terminarian dando 1, ya que ambos se pueden adoptar y llevar a la forma de (1). Por lo que el valor final sería:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

(2b) A pesar de parecer complicado, este límite es bastante fácil porqué debemos llevarlo a tal forma de poder hacer el cambio de variable y llegar al límite notable.
Enseguida que sabemos que debemos hacer eso, primero factorizamos el polinomio que esta adentro del sin, el cual sabemos que tiene como uno de los factores $x + 1$, ya que se hace 0 cuando $x \to -1$.

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

Luego de esto remplazándolo en el límite sabemos por lo que debemos amplificar ambas partes de la fraccion:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin((x+1)(x-2))}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)\sin((x+1)(x-2))}{(x+1)(x-2)}$$

Finalmente podríamos hacer un cambio de variable como $u = x + 1$ y remplazarlo en la fracción, pero esto no es necesario, lo que impor es entender que siempre que suceda algo parecido como que el sin sea acompañado por algo, abajo debe estar lo mismo y ahi se puede reducir como 1. Con esto llegamos a:

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x-2)\sin((x+1)(x-2))}{(x+1)(x-2)} = (-3) \cdot 1 = -3$$

(2c) La manera de enfrentar este ejercicio es en base a las propiedades de los límites que nos permiten hacer lo siguiente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x) + \sin(\pi x)}{\sin(ex) + \sin(4x)} = \frac{\lim_{x \to 0} \sin(2x) + \lim_{x \to 0} \sin(\pi x)}{\lim_{x \to 0} \sin(ex) + \lim_{x \to 0} \sin(4x)}$$

Donde ahora llevamos un límite que parecia de cierta manera bastante raro a cuatro límites que por si solos son bastante simples que los podemos llevar al límite notable conocido. Por lo que trabajamos cada límite por separado y luego los evaluamos

$$\frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{1} \cdot \dfrac{2x}{2x} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(\pi x)}{1} \cdot \dfrac{\pi x}{\pi x}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ex)}{1} \cdot \dfrac{ex}{ex} + \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(4x)}{1} \cdot \dfrac{4x}{4x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 2x \dfrac{\sin(2x)}{2x} + \lim\limits_{x \to 0} \pi x \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}}{\lim\limits_{x \to 0} ex \dfrac{\sin(ex)}{ex} + \lim\limits_{x \to 0} 4x \dfrac{\sin(4x)}{4x}}$$

Despues de esto tratamos cada límite por si solo, donde cada uno nos dara 1 y luego podemos hacer un proceso inverso al inicial que sería lo siguiente:

$$\frac{\lim_{x \to 0} 2x \cdot 1 + \lim_{x \to 0} ex \cdot 1}{\lim_{x \to 0} ex \cdot 1 + \lim_{x \to 0} 4x \cdot 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + \pi x}{ex + 4x}$$

Finalmente podemos factorizar por x y luego reducirlo

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(2+\pi)}{x(e+4)} = \frac{2+\pi}{e+4}$$

(2d) acá lo que se debe hacer es un cambio de variable, ya que de esa forma logramos desacernos del polinomio y ocupando propiedades trigonométricas. Recordar que es posible hacer dos cambios de variable.

$$u_1 = x - \frac{\pi}{2} \quad o \quad u_2 = 2x - \pi$$

$$x \to \frac{\pi}{2} \qquad u \to 0$$

En este caso, elegiremos u_2, ya que al momento de reemplazar x en el numerador se nos hace mas fácil al reemplazarlo

$$2x = u + \pi \to 4x = 2u + 2\pi$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan(4x)}{2x-\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u+2\pi)}{u}$$

Enseguida es cuando se nos genera el problema, ya que la forma mas esperable de seguir desarrollando el ejercicio sería desarrollando la tangente como $\frac{\sin}{\cos}$, pero hay una forma mucho mas fácil en la que es necesario aplicar la siguiente propiedad de la tangente:

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi), \quad k \in \mathbb{R}$$

Notamos que en este caso $k = 2$, por lo que podemos proceder a resolver el límite y luego llevarlo a un límite notable que deberiamos saber

$$\lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u+2\pi)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u)}{u} \cdot \frac{2}{2} = \lim_{u\to 0} 2\frac{\tan(2u)}{2u} = 2$$

(2e) La forma en que llevaremos este ejercicio, será mediante un cambio de variable

$$u = x - \frac{\pi}{3} \to u + \frac{\pi}{3} = x$$

$$x \to \frac{\pi}{3} \qquad u \to 0$$

Donde nos quedaría:

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{1-2\cos(x)}{\sin(x-\pi/3)} = \lim_{u\to 0} \frac{1-2\cos\left(u+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin(u)}$$

Ocupamos la fórmula de suma de angulos

$$1-2\cos(u+\frac{\pi}{3}) = 1-2\left(\cos(u)\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(u)\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 1-2\left(\frac{\cos(u)}{2} - \frac{\sin(u)\sqrt{3}}{2}\right)$$

Finalmente reemplazamos en el límite , donde debemos separar en dos límites uno notable y otro que es una simplificación, con lo que llegamos al valor del límite.

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)+\sin(u)\sqrt{3}}{\sin(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)}{\sin(u)}+\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)\sqrt{3}}{\sin(u)}=0+\sqrt{3}$$

(2f) Partimos el límite , donde la principal dificultad es racionalizar la expresión para luego calcularlo como un límite notable

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}=\frac{x^2+x}{\sin(4x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

Luego de esto debemos factorizar el numerador, amplificar la fracción por 4 y luego reducir la expresión y calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{\sin(4x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}\cdot\frac{4}{4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin(4x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{4(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\frac{1}{8}$$

3. (a) $\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{\sin^2(x)}$ **(I1-2015-1)**

   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(5x)}$ **(I1-2011-2)**

   (c) $\lim_{x\to -2}\frac{\tan(\pi x)}{x+2}$ **(I1-2009-2)**

   (d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x)}$ **(I1-2016-1)**

   (e) $\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^3-2x^2-3x}$

   (f) $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/4}$ **(I1-2018-2)**

(3a) Notamos que este ejercicio es muy parecido al 1a, ya que el cambio de variable que se tiene que hacer es el mismo, y el resultado de hecho será el mismo pero con unas diferencias. Primero empezaremos haciendo lo siguientes ocupando las propiedades de las potencias y fracciones:

$$\frac{(x-\pi)^2}{\sin^2(x)} = \left(\frac{x-\pi}{\sin(x)}\right)^2 = \left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2}$$

Enseguida esto lo llevamos al límite , donde aplicando propiedades podemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2} = \left(\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-pi}\right)^{-2}$$

Luego calculamos el valor el límite de la siguiente manera:

$$u = x-\pi \to x = u+\pi$$

$$x\to\pi \qquad u\to 0$$

Enseguida aplicando esto en el límite nos queda:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u+\pi)}{u}$$

Para resolver el límite , debemos usar la fórmula de suma de angulos dándonos:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)(-1)+(0)\cos(u)}{u}\lim_{u\to 0}-\frac{\sin(u)}{u}$$

Notamos que llegamos al resultado de uno de los límites notables que nosotros sabemos, por lo que podemos calcularlo:

$$\lim_{u\to 0}-\frac{\sin(u)}{u} = -1$$

Finalmente debemos aplicar la potencia para encontrar el valor del límite solicitado:

$$\left(\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2} = (-1)^{-2} = 1$$

(3b) Al igual que en el ejercicio anterior debemos racionalizar la fracción para luego llegar a un límite notable por otro valor

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(5x)}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{x}{\sin(5x)(\sqrt{x+4}+2)}$$

Para terminar amplificamos por 5 y llegamos al valor del límite evaluando

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{5\sin(5x)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{5(2+2)} = \frac{1}{20}$$

(3c) acá debemos realizar el siguiente cambio de variable

$$u = x + 2 \to u - 2 = x$$

$$x \to -2 \qquad u \to 0$$

Llevando esto al límite nos queda

$$\lim_{x \to -2} \frac{\tan(\pi x)}{x + 2} = \lim_{u \to 0} \frac{\tan(\pi(u - 2))}{u}$$

Enseguida debemos aplicar la propiedad de la tangente y luego podemos reducir el límite notable

$$\lim_{u \to 0} \frac{\tan(\pi(u) - 2\pi)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\tan(\pi u)}{u} \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{\pi \tan(\pi u)}{\pi u} = \pi$$

(3d) A simple vista, este ejercicio parece muy fácil, ya que si primero racionalizamos y luego ocupamos la propiedad $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ es bastante simple pero hay un paso que es importante recordar. Partimos por racionalizar y ocupar la propeidad

$$\frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\sin(x)} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos(x)}}{\sqrt{1 + \cos(x)}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}{\sin(x)\sqrt{1 + \cos(x)}} = \frac{\sqrt{\sin^2(x)}}{\sin(x)\sqrt{1 + \cos(x))}}$$

Despues de este paso porfavor, tener mucho cuidado, ya que el tipico error es asumir algo que es falso.

$$\sqrt{\sin^2(x)} \neq \sin(x) \to \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)| \checkmark$$

Reemplazamos esto en el límite y es evidente ahora que el problema es el valor absoluto, ya que se produce el cambio en el punto donde evaluamos. llevando esta expresión a una función a tramos nos quedaría de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1 + \cos(x)}} & x < 0 \\ \\ \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1 + \cos(x)}} & 0 \leq x \end{cases}$$

Finalmente debemos evaluar los límites laterales para determinar si existe o no $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1 + \cos(x)}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1 + \cos(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1 + \cos(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + \cos(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Con estos resultados podemos determinar que como los límites laterales son distintos, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

(3e) En este ejercicio lo unico que debemos factorizar el denominador de la fracción en base al factor $(x-3)$:

$$\frac{\sin(x-3)}{x^3-2x^2-3x} = \frac{\sin(x-3)}{x(x-3)(x+1)}$$

Enseguida podemos simplificar la expresión con el límite notable y evaluarlo

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x(x-3)(x+1)} = \frac{1}{3(4)} = \frac{1}{12}$$

(5a) El problema acá, presenta una dificultad en el punto donde debemos decidir que hacer con el valor absoluto, el cual luego de analizarlo notamos que no debes hacer ningún cambio y luego notamos que es posible reducir el límite , ya que es un límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{(0+1)1}{2} = \frac{1}{2}$$

(3f) Para la resolución de este ejercicio, debemos hacer un cambio de variable, el cual se basara en tratar dejar de manera simple el denominador

$$u = x - \frac{\pi}{4} \to u + \frac{\pi}{4} = x$$

$$x \to \frac{\pi}{4} \qquad u \to 0$$

Haciendo el cambio de variable y luego tenemos que hacer uso de las fórmulas de suma de angulos

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/4} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u+\frac{\pi}{4}) - \sin(u+\frac{\pi}{4})}{u}$$

$$\sin(u+\frac{\pi}{4}) = \sin(u)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(u)\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}$$

$$\cos(u+\frac{\pi}{4}) = \cos(u)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(u)\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}$$

usando esto en el límite nos queda

$$\lim_{u\to 0} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right)}{u}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\left(\frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right)}{u}$$

Finalente notamos que se nos reduce la expresión y calcular el límite es fácil

$$\lim_{u\to 0} \frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{u} = -\sqrt{2}$$

4. Analice el siguiente límite dependiendo de los casos de a y b. CHONWEREIN

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(ax)}{x+\sin(bx)}$$

(4) Este ejercicio se tiene que enfrentar, presentándose ante supuestos y luego con casos mas generales.

- Caso 1: $a=0$ y $b=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

- Caso 2: $a\neq 0$ y $b=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{a\sin(ax)}{ax} = 1-a$$

- caso 3: $a=0$ y $b\neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\dfrac{\sin(bx)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\dfrac{b\sin(bx)}{bx}} = \frac{1}{1+b}$$

Ahora tenemos dos casos posibles, dependiendo de los posibles valores de b.

$$\frac{1}{1+b}\begin{cases} \textbf{no existe} & b=-1 \\ \dfrac{1}{1+b} & b\neq -1 \end{cases}$$

- caso 4: $a\neq 0$, $b\neq 0$ y $b\neq -1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(ax)}{x+\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\dfrac{a\sin(ax)}{ax}}{1+\dfrac{b\sin(bx)}{bx}} = \frac{1-a}{1+b}$$

- caso 5: $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $b=-1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(ax)}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\dfrac{a\sin(ax)}{ax}}{1-\dfrac{\sin(x)}{x}} = \pm\infty, \textbf{No existe}$$

- caso 6: $a=1$ y $b\neq -1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x-\sin(x)} = 1$$

Con esto tenemos cubiertos todos los casos para a y b.

5. Existen los siguientes límite s? calcúlelos; en caso contrario, explique por qué no existe/n.

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2}$ **(I1-2016-2)** (b) $\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(x)|}{x^2+x}$ **(I1-2015-2)**

(5a) El problema acá, presenta una dificultad en el punto donde debemos decidir que hacer con el valor absoluto, el cual luego de analizarlo notamos que no debes hacer ningún cambio y luego notamos que es posible reducir el límite , ya que es un límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{(0+1)1}{2} = \frac{1}{2}$$

(5b) Para saber si existe o no el límite solicitado, debemos hacerla una función por partes, ya que esta cambia en el punto solicitado

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin(x)}{x^2+x} & x < 0 \\ \\ \dfrac{\sin(x)}{x^2+x} & 0 \leq x \end{cases}$$

Ahora para que el límite que nos piden exista, los límites laterales deben ser iguales, por lo que los calculamos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = 1$$

Finalmente notamos que no se cumple que los límites laterales sean iguales. por lo que el límite solicitado no existe.

6. Determine, justificadamente, el valor de **(I1-2019-1)**

$$\lim_{x\to -\pi} \sin(\sin(x)+x)$$

(6) Para el calculo de este límite , debemos aplicar una de las propiedades que nos permite

$$\lim_{x\to -\pi} \sin(\sin(x)+x) = \sin(\sin(\lim_{x\to -\pi} x) + \lim_{x\to -\pi} x)$$

Esto lo podemos hacer ya que sin y x son funciones continuas. Dándonos finalmente

$$\sin(\sin(-\pi)-\pi) = \sin(0-\pi) = 0$$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{\cos(x-1)} - \sqrt{\cos(x-1)})}{\sin^2(x-1)}$

Hint: revisar el ejercicio 5a de la sección anterior

(7) Antes de seguir el **Hint** haremos un cambio de variable para que el ejercicio sea mas fácil visualmente

$$u = x-1 \qquad x \to 1, \quad u \to 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{\cos(x-1)} - \sqrt{\cos(x-1)}}{\sin^2(x-1)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - \sqrt{\cos(u)}}{\sin^2(u)}$$

Ahora con esta expresión es mas notorio los pasos que debemos seguir, tomando como referencia el ejercicio 5a, partiendo por agregar $-1+1$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1 - \sqrt{\cos(u)} + 1}{\sin^2(u)} = \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} - \frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)}$$

Notamos que el paso que debemos seguir es ahora racionalizar cada expresión por separado

$$\frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1}{\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)}$$

$$\frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)} \cdot \frac{\sqrt{\cos(u)} + 1}{\sqrt{\cos(u)} + 1} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt{\cos(u)} + 1)}$$

Ahora con ambas expresiones racionalizadas podemos calcular el límite por separado de cada una de ellas. Notamos que ambas expresiones se pueden llevar al uso de dos límites notables.

I.

$$\lim_{u\to 0} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)} \cdot \frac{u^2}{u^2}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sin^2(u)} \frac{\cos(u) - 1}{u^2} \frac{1}{(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+1+1)} = \frac{1}{6}$$

II.

$$\lim_{u\to 0} \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt{\cos(u)} + 1)} \frac{u^2}{u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sin^2(u)} \frac{\cos(u) - 1}{u^2} \frac{1}{(\sqrt{\cos(u)} + 1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{4}$$

Enseguida si juntamos ambos valores y los restamos en el orden correcto, llegamos al valor del límite

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} - \frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$$

8. Analize el valor del siguiente límite dependiendo de los valores de a.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)} - \sqrt{1+\sin(x)})}{x^a}$$

(8) Para lograr analizar el valor del límite dependiendo de a, debemos primero racionalizar la expresion

$$\frac{\sqrt{1+\tan(x)} - \sqrt{1+\sin(x)}}{x^a} \cdot \frac{\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}}$$

$$\frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Ahora si seguimos desarrollando la expresión

$$\frac{\frac{\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}}{x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Finalmente cuando tengamos que evaluar el límite podemos hacer las siguientes separaciones, donde podemos notar dos límites notables

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \frac{1}{x^{a-3}\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Enseguida debemos ponernos en los posibles casos, donde les recomiendo partir analizando en el punto de cambio que vendria siendo $a = 3$.
Caso 1: $a = 3$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \frac{1}{\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{4}$$

Caso 2: $a < 3$.
Para este caso, si les es muy difícil verlo a la primera, pueden probar con algun número, como yo lo hare con $a = 1$, en cual notamos que solo podríamos formas uno de los dos límites notables quedándonos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

Caso 3: $3 < a$.
Si sigue siendo muy difícil analizarlo con solo variables, pueden probar con algun número, como yo lo hare con $a = 4$, quedadonos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \frac{1}{x\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \infty = \textbf{No existe}$$

Con esto llegamos a la siguiente conclusion

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)} \begin{cases} 0, & si\ a < 3 \\ \frac{1}{4}, & si\ a = 3 \\ \textbf{no existe}, & si\ 3 < a \end{cases}$$

9. **Propuesto para ustedes:**

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sqrt{-\cos(x)}}{\cos(2x)-\sin(x/2)} \text{ (Respuesta: } -2/15)$$

1.2.3 límites al infinito

En esta sección se hablara de infinitos, donde aprenderemos que hay infinitos mas grandes que otros, como por ejemplo x y $2x$, uno es el doble del otro, mientras que por ejemplo x y x^2 al infinito su diferencia es abismal, por lo que en esta sección aprenderemos a categorizar estas diferencias al infinito.

Definicion: Sean f, g dos funciones de polinomios $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Va a depender del grado de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, Donde M es el grado de $f(x)$ y N el de $g(x)$. Donde tenemos 3 posibles casos

- Caso 1: $M > N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
- Caso 2: $M = N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \quad a \in \mathbb{R}$
- Caso 3: $M < N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

•**Tip general:**, para esta seccion, cuando tenga por ejemplo $\infty - \infty$ intentar llevarlo a alguna forma donde se pueda hacer la comparacion(Como alguna fracción) o alguna fórmula que junte los terminos para así poder compararlos.

Resolver los siguientes ejercicios:

1. (a) $\displaystyle\lim_{x\to\ -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(x - \sqrt{x^2 - 1})$ **(I1-2013-tav)**

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5^x - 3^x + 1}{5^x + 3^x + 2}$ **(I1-2017-2)**

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + n^2} - \sqrt{n}}{n}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin(2x)}{4x + 1}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x + 7)\cos(x^2) - \sin(4 - x^3)}{x - \pi}$

(1a) Se denota que el problema termina siendo la siguiente operación

$$-\infty + \infty$$

Por lo que para dejarlo en una expresiondonde pueda haber comparación, debemos racionalizar ocupando la fórmula que se uso en el para lograr reducir la expresión y poder aplicar el límite

$$\lim_{x\to\ -\infty}(x+\sqrt{x^2+2x}) = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+2x})}{1}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x-\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2x}{x-\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2}{1-\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+2x}}$$

Enseguida cuando ingresemos el $1/x$ a la raíz debemos multiplicar por -1 la raíz para que el número final nos de positivo

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2}{1-(-\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}})} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2x}{x^2}}}$$

Ahora podemos evaluar el límite

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2x}{x^2}}} = -1$$

(1b) Acá debemos intentar racionalizar la expresión, ya que notamos que tenemos $\infty-\infty$ y llevandolo a una fracción es la manera que tenemos para lograr hacer una comparación eficiente. Pero notar que tenemos una x afuera, por lo que debemos dejarla fuera de la racionalización.

$$\frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{1}\cdot\frac{(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{x+1}{(x+\sqrt{x^2-1})}$$

Ahora notamos que podemos aplicar el límite , ya que tanto denominador como numerador tienen el mismo máximo exponente(1).Por lo que debemos multiplicar por el mayor exponente arriba y abajo que en este caso sería $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}{(x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

Recordamos que si $1\leq n$ se cumple

$$\lim_{x\to\infty^{\pm}}\frac{1}{x^n} = 0$$

(1c) En este ejercicio, a pesar de que tenemos $\frac{\infty}{\infty}$, notamos que podemos hacer una comparación amplificando por $\frac{1}{5^x}$ y así nos quedara lo siguiente:

$$\frac{5^x-3^x+1}{5^x+3^x+2}\cdot\frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^x}}=\frac{\frac{5^x}{5^x}-\frac{3^x}{5^x}+\frac{1}{5^x}}{\frac{5^x}{5^x}+\frac{3^x}{5^x}+\frac{2}{5^x}}=\frac{1-\frac{3^x}{5^x}+\frac{1}{5^x}}{1+\frac{3^x}{5^x}+\frac{2}{5^x}}$$

Luego de esto si aplicamos el límite, tenemos el problema de que hacer con el $\frac{3^x}{5^x}$, pero notamos que podemos hacer lo siguiente

$$\frac{3^x}{5^x}=\left(\frac{3}{5}\right)^x$$

y según sabemos $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$ para $|a|<1$, donde este sería nuestro caso, por lo que podemos ocupar esto y tendremos el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3^x}{5^x}+\frac{1}{5^x}}{1+\frac{3^x}{5^x}+\frac{2}{5^x}}=\frac{1-0+0}{1+0+0}=1$$

(1d) Para este ejercicio, notamos que si m y n fueran el valor del grado del polinomio que hay en el numerador y el denominador de la fracción, notamos que estos son iguales($m=n=1$) por lo que según sabemos podemos aplicar la siguiente operación:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+n^2}-\sqrt{n}}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}}-\sqrt{\frac{n}{n^2}}}{\frac{n}{n}}=\frac{0+1-\sqrt{0}}{1}=1$$

(1e) Para este ejercicio, es importante hacer la comparación de grado del polinomio del numerador y denomidor de la función.

$$f(x)=x+\sin(2x)\longrightarrow m=1$$

$$g(x)=4x+1\longrightarrow n=1$$

Notamos que sucede que $m=n$, por lo que podemos aplicar la propiedad de amplificar por $\frac{1}{x}$ la fracción para finalmente calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(2x)}{4x+1}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{\sin(2x)}{x}}{\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+0}{4+0}=4$$

(1f) Este ejercicio debe ser mirado desde un análisis de los posibles valores del numerador de la fracción, ya que según sabemos sucede que

$$|\sin(u)| \leq 1 \qquad |\cos(u)| \leq 1$$

Entonces como $\sin(u)$ y $\cos(u)$ son números menores a 1, por lo que en el límite terminan siendo insignificantes. Además si nosotros consideramos el numerador como un polinomio, notamos que este es de grado 0, mientras que el denominador de grado 1 Por lo que según la definición entregada en el inicio de la sección

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x+7)\cos(x^2) - \sin(4-x^3)}{x-\pi} = 0$$

---

2. (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$ **(I1-2010-2)**

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(x-\sqrt{x^2-13})$ **(I1-2013-tav)**

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3}+x\cos^2(x)} (I1-2014-1)$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ **(I1-2014-tav)**

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+x+2})$ **(I1-2009-2)**

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+5x})$ **(Control 1-2018-1)**

(2a) Si hacemos caso a la definición entregada al principio de la sección

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - 1 \longrightarrow m = \frac{2}{2} = 1$$

$$g(x) = x \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$, entonces podemos amplificar por $1/x$ la fracción, luego evaluar el límite y nos dara el valor.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}$$

Ahora es cuando es muy posible cometer un error, pero debemos notar que al ingresar a la raíz el x ya que hay que tener en cuenta que x tiende a **menos infinito**, por lo que se haría de la siguiente forma

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = -\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}$$

Esto lo hacemos, debido a que como $x \to -\infty$ la expresión nos daría un número negativo antes de ingresarlo a la raíz, por lo que colocamos un signo negativo a la expresión y así cambia su valor. Seguimos desarrollando la expresión

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{1} = \frac{-\sqrt{1+0+0}-0}{1} = -1$$

(2b) A diferencia del ejercicio anterior, no es tan fácil lograr hacer una comparación "visual" porque debemos llevarlo a la forma de una fracción mediante la racionalización de la siguiente manera:

$$\frac{x(x-\sqrt{x^2-13})}{1} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2-13}}{x+\sqrt{x^2-13}} = \frac{x(x^2-x^2+13)}{x+\sqrt{x^2-13}} = \frac{13x}{x+\sqrt{x^2-13}}$$

En seguida es notorio que es posible hacer una comparación del grado en la fracción

$$f(x) = 13x \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = x+\sqrt{x^2-13} \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$ podemos calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{13x}{x+\sqrt{x^2-13}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{13x}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2-13}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{13}{1+\sqrt{1-\frac{13}{x^2}}} = \frac{13}{1+1} = \frac{13}{2}$$

(2c) Si seguimos el proceso de comparación de la fracción procedemos a ver los grados de los polinomios

$$f(x) = x^{5/3}+1 \longrightarrow m = 5/3$$

$$g(x) = x^{5/3}+x\cos^2(x) \longrightarrow n = 5/3$$

Tenemos que $m = n$, por lo que podemos hacer

$$\frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3}+x\cos^2(x)} \cdot \frac{x^{-5/3}}{x^{-5/3}} = \frac{1+x^{-5/3}}{1+x^{-2/3}\cos^2(x)}$$

Ahora si aplicamos el límite nos da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-5/3}}{1+x^{-2/3}\cos^2(x)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

(2d) Siguiendo el metodo de la definición del inicio de la sección, buscamos el grado de cada polinomio

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \longrightarrow n = \frac{1}{2}$$

En la fracción se presenta que los grados de ambos polinomios es $m = n = \dfrac{1}{2}$, por lo que seguimos el metodo clasíco

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} = 1$$

(2e) Tenemos una expresión que no es identificable de manera visual ni matemática, ya que es de la forma

$$\infty - \infty$$

Ahora esta expresión es llevable a una expresión para lograr hacer una comparación y calcular el límite, de la siguiente manera

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$\frac{x^2+2x+3-x^2-x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$f(x) = x+1 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2} \longrightarrow n = 1$$

$$m = n$$

Como los grados son iguales amplificamos por $\dfrac{1}{x}$.

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x^2}}}$$

Finalmente podemos aplicar el límite a la fracción

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{2}$$

(2f) Al igual que el ejercicio anterior, se debe resolver mediante la racionalización.

$$\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+5x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}}$$

Ahora podemos usar

$$f(x) = -2x \longrightarrow m = 1$$
$$g(x) = \sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x} \longrightarrow n = 1$$

Como los grados son iguales y al igual que en el ejercicio 2a, al momento de amplificar la fracción debemos colocar un signo negativo en ambas fracciones.

$$\frac{-2x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{-2x}{x}}{-\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}\right)} = \frac{-2}{-\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}$$

Luego de esto aplicamos el límite a la fracción y nos dará el resultado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{-\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)} = \frac{-2}{-(1+1)} = 1$$

---

3. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1} - x)$ **(I1-2019-1)**

   (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$ **(I1-2015-2)**

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$ **(I1-2016-1)**

   (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x-5}{|x^2+2x-3|}$ **(I1-2019-2)**

   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2+2x-1}$ **(I1-2014-2)**

(3a) Es posible en este ejercicio, lograr hacer una comparación en la fracción siguiendo la definición de la sección

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} \longrightarrow m = 1$$
$$g(x) = x - 1 \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$, es posible calcular el límite mediante la amplificación de x^{-m}.

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

Finalmente es posible aplicar el límite a la expresión

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1-\dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1-0} = 1$$

(3b) Notamos que tenemos un límite de la forma

$$\infty - \infty$$

Entonces para llevarlo a una forma que sea fácil su interpretación racionalizamos

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

Luego de esto es posible aplicar el criterio del grado de los polinomios

$$f(x) = x+1 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+x+1}+x \longrightarrow n = 1$$

Como en el ejercicio anterior, amplificamos por x^{-1}

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \cdot \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{x}{x}+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{x}{x}} = \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}$$

Finalmente aplicamos el límite y obtenemos el valor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$$

(3c) Podemos hacer de manera inmediata la comparación de los polinomios

$$f(x) = x+2 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{9x^2+1} \longrightarrow n = 1$$

Debido a que $m = n$, amplificamos por x^{-n}

$$\frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}} \cdot \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{x}{x}+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{9x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}$$

Para terminar evaluamos el límite y nos da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1+0}{\sqrt{9+0}}=\frac{1}{3}$$

(3d)
En este límite, aplicamos la multiplicación por $\dfrac{1}{x^n}$ con n el mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}\frac{\cdot\dfrac{1}{x}}{\cdot\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(3e) Lo que debemos hacer ver el signo del polinomio del valor absoluto, para identificar si se debe locar un signo antes o no, donde se observa:

$$\lim_{x\to-\infty}x^2+2x-3=\infty$$

Por lo que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-5}{|x^2+2x-3|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}$$

Con esto, aplicamos lo mismo que en el ejercicio anterior, solo que ahora con $n=2$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}\frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+4/x-5/x^2}{1+2/x-3/x^2}=\frac{1+0-0}{1+0-0}=1$$

(3f)Tenemos una expresión que no es identificable de manera visual ni matemática, ya que es de la forma

$$\infty-\infty$$

Ahora esta expresión es llevable a una expresión para lograr hacer una comparación y calcular el límite mediante la racionalización

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-1}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$\frac{x^2+x-1-x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

En seguida es posible aplicar la definición para hacer la comparación

$$f(x)=-x\longrightarrow m=1$$

$$g(x)=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}\longrightarrow n=1$$

Como tenemos que $m = n$ iguales amplificamos por $\dfrac{1}{x}$.

$$\frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+2x-1}{x^2}}}$$

Finalmente podemos aplicar el límite a la fracción

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0-0}} = \frac{-1}{2}$$

---

4. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-10}-\sqrt{x^2-2x+1})$ **(I1-2016-2)**
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ **(I1-2016-tav)**
   (c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x})$ **(I1-2018-2)**
   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\left(\dfrac{6}{x}\right)$ **(I1-2019-tav)**
   (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin(x^2)}{x^2+\sin(x)}$ **(Control1-2017-1)**
   (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}+x+5$**(Control1-2018-1)**
   (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^x-e^{-3x}}{e^x+4e^{-x}}$**(Control1 2018-2)**

(4a) Empezamos identificando que debemos racionalizar la expresión para lograr resolverla, por lo que procedemos:

$$\frac{\sqrt{x^2+x-10}-\sqrt{x^2-2x+1}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x-10}+\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{x^2+x-10}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$\frac{3x-11}{\sqrt{x^2+x-10}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

Ahora con esto aplicamos el límite y también la división por el mayor exponente que sería x

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-11}{\sqrt{x^2+x-10}+\sqrt{x^2-2x+1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-11/x}{\sqrt{1+1/x-10/x^2}+\sqrt{1-2/x+1/x^2}} = \frac{3-0}{1+1} = \frac{3}{2}$$

(4b) Para este ejercicio, es importante ver que sucede con el valor absoluto, pero es evidente que $x-1>0$ para todo $1<x$, por lo que: podemos aplicar el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

(4c) Al igual que en el ejercicio 4a debemos racionalizar, por lo que:

$$\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}$$

Ahora con esto, aplicamos el criterio del máximo exponente para hacer la division:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}\frac{\cdot\frac{1}{x}}{\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1/x}}=\infty$$

(4d) Este ejercicio implica una mayor dificultad, ya que muy pocas veces se ve una tan en un límite de $x\to\infty$. Entonces lo que haremos será tratar de separar las partes de la tangente para lograr intentar trabajar con el sin y el cos por separado

$$x\tan\left(\frac{6}{x}\right)=x\cdot\frac{\sin\left(\frac{6}{x}\right)}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}$$

Trabajando con el límite, notamos que podríamos separalo en dos, ocupando las leyes de los límites que nos permiten:

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\sin\left(\frac{6}{x}\right)}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\left(\frac{6}{x}\right)}_{\alpha}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}$$

Calculamos el primer límite por separado, ocupando un cambio de variable $u=\frac{6}{x}$

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\left(\frac{6}{x}\right)=\lim_{u\to 0}6\frac{\sin(u)}{u}=6$$

Jutando esto en el límite general llegamos a

$$6\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}=6\cdot\frac{1}{1}=6$$

(4e) En este ejercicio, es normal intentar de realizar algo con los $\sin(x)$, pero recordar que el valor de este va entre -1 y 1, por lo que es despreciable al infinito, importando solamente los x e x^2. Por lo que ocuparemos el criterio del mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{x^2+\sin(x)}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+\sin(x^2)/x^2}{1+\sin(x)/x^2}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

(4f) Este límite es algo peculiar, ya que se debe racionalizar para lograr solucionarlo, pero notamos que en este caso ambas raíces sería $\sqrt{x^2+2x}$ y $x+5$. Entonces se realiza de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+5}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}-(x+5)}{\sqrt{x^2+2x}-(x+5)}=\frac{-8x-25}{\sqrt{x^2+2x}-x-5}$$

Ahora aplicando el límite en estas expresiones, debemos seguir la técnica del máximo exponente:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x-25}{\sqrt{x^2+2x}-x-5}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Notamos que hay un problema, ya que para introducir el x a la raíz, debemos colocar un signo negativo a esta, ya que $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-8-25/x}{-\sqrt{1+2/x}-1-5/x}=\frac{-8}{-1-1}=4$$

(4g) Para esta expresion, a diferencia de los polinomios clásicos, debemos tratar como si fueran los exponentes, entonces la forma más practica de manejar esto, es multiplicar por 1 partido el valor que aumenta de manera más rápida, que sería $1/e^x$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2e^x-e^{-3x}}{e^x+4e^{-x}}\cdot\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-e^{-4x}}{1+4e^{-2x}}=2$$

5. A continuación se muestra una igualdad, encuentre el valor de a para que esta igualdad se cumpla:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2 \quad \textbf{(I1-2013-2)}$$

(5) Debemos buscar el valor del límite, en función de a, por lo que racionalizamos la expresión:

$$\frac{\sqrt{x^2+ax+1}-x}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+ax+1}+x}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}=\frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}$$

Aplicamos el límite a la expresion, dividiendo por el mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+1/x}{\sqrt{1+a/x+1/x^2}+1}=\frac{a}{2}$$

Con esto sabemos que el valor de a debe ser:

$$a=4$$

1.2.4 Teorema del sandiwch

1. Sea f una función que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < f(x) < \frac{10x-21}{2x}, \qquad 1 < x$$

Calcular $\lim\limits_{x\to\ 0^+} f(1/x)$

Solucion
Primero notamos que debemos hacer un cambio de variable, ya que la desigualdad esta respecto a x no $1/x$:

$$u = 1/x; \quad x = 0^+ \to u = \infty$$

Y debido a que cumple la condición de $1 < x$ podemos calcular el límite solicitado como

$$\frac{5\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1} < f(u) < \frac{10u-21}{2u}$$

$$\lim_{u\to\ \infty}\frac{5\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1} < \lim_{u\to\ \infty} f(u) < \lim_{u\to\ \infty}\frac{10u-21}{2u},$$

$$\lim_{u\to\ \infty}\frac{5\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}}}{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}}-\frac{1}{\sqrt{u}}} < \lim_{u\to\ \infty} f(u) < \lim_{u\to\ \infty}\frac{10\frac{u}{u}-\frac{21}{u}}{2\frac{u}{u}},$$

$$5 < f(u) < 5$$

Por lo que con esto tenemos que se llega a que

$$\lim_{x\to\ 0^+} f(1/x) = \lim_{u\to\infty} f(u) = 5$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(x)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$ (Control 1- 2018-2)

3. $\lim\limits_{x\to\ \infty}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sin(x) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **(I1-2016-tav)**

5. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3+2x^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ **(I1-2019-1)**

6. $\lim\limits_{x\to 0} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2}-\frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ **(I1-2014-TAV)**

8. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot 2^{(sin(1/x))}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x)\cdot\sin(\frac{1}{x})$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]$ **(I1-2019-2)**

(2) Para iniciar a resolver el límite es mejor primero analizar las partes de la función a evaluar, donde notamos que primero tenemos $\cos(x)$ que es una función que al infinito no sabemos su valor, pero si sabemos que se cumple la siguiente desigualdad

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad / \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Enseguida bien con esto podemos aplicar el límite en todas las partes de la desigualdad:

$$\lim_{x\to\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Finalmente si analizamos los límites conocemos el valor de los extremos ya que $\lim_{x\to\infty} ln(1/x) = 0$, entonces nos quedaría los siguiente

$$-\ln(1) \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \ln(1)$$

$$-0 \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Y por teomera del sandiwch queda demostrado que el límite da 0. ■

(3) Este ejercicio supone una mayor dificultad debido a que tenemos la resta de dos valores insiertos, pero podríamos recurrir a la siguiente fórmula

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

siendo

$$a = x + \frac{1}{x}, \qquad b = x$$

$$\sin(x + \frac{1}{x}) - \sin(x) = 2\sin\left(\frac{x + \frac{1}{x} - x}{2}\right)\cos\left(\frac{x + \frac{1}{x} + x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{2}\right)$$

Ahora proseguimos ocupando Teorema del Sandiwch, donde según sabemos el $\cos(\alpha)$ con α siendo cualquier valor cumple:

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

Enseguida remplazando α por $\dfrac{2x+\frac{1}{x}}{2}$:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right) \leq 1$$

$$-2\sin\left(\frac{1}{2x}\right) \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right) \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Aplicando el límite en toda la desigualdad

$$\lim_{x\to\infty} -2\sin\left(\frac{1}{2x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right) \leq \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$0 \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right) \leq 0$$

Por lo que según el teorema del Sandwich:

$$\lim_{x\to\ \infty} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) - \sin(x) = 0$$

(4) Al momento de tratar de resolver este ejercicio, es algo clasíco intentar de ver como podria comportarse el $\sin(1/x)$, pero aca no debemos caer en eso y primero establescamos que valores puede tomar este:

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$$

Si multiplicando x^2 a ambos lados tendremos:

$$-x^2 \leq x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Aplicamos el límite

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Por lo que finalmente tendremos que:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(5) Al igual que en ejercicio anterior, debemos establecer en que internvalo se mueve el $\sin(\frac{2\pi}{x})$ y no confundirse con el 2π:

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$$

Ahora al igual que antes:

$$-\sqrt{x^3+2x^2} \leq \sqrt{x^3+2x^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \leq \sqrt{x^3+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} -\sqrt{x^3+2x^2} \leq \lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+2x^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+2x^2}$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+2x^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \leq 0$$

Por lo que finalmente tendremos que:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+2x^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 0$$

(6) En este caso, es mas dificil notar de que manera podria comportarse la tan por lo que tenemos dos opciones que son:

1. Trabajar la tangete como $\dfrac{\sin(1/x)}{\cos(1/x)}$
2. Trabajar la tangente solo en su intervalo

Donde aca es mas fácil la segúnda opción, ya que sigue la misma modalidad de los otros ejercicios:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

Multiplicamos por x a ambos lados

$$-\frac{x\cdot\pi}{2} \leq x\cdot\tan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{x\cdot\pi}{2}$$

Aplicamos el límite

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x\cdot\pi}{2} \leq \lim_{x\to 0} x\cdot\tan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\pi}{2}$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x\cdot\tan\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Por lo que el límite que nos piden sería finalmente:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\tan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(7) Este ejercicio implica una doble dificultad, ya que tendremos que saber que ocurre con el primer factor, para luego ver que sucede con el cos, por lo que primero se intentara resolver solo el límite de el primer factor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}$$

Si nos fijamos, podemos identificar un límite notable como lo sería:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{8}$$

Por lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8} = 0$$

Con esta información, podemos aplicarlo, para seguir con el metodo de los ejercicios anteriores:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8} \leq \left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}$$

Aplicando el límite a la desigualdad

$$-\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8} \leq \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Entonces tendremos que

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(8) En este caso, se parece a los anteriores, solo que ahora tenemos el $\sin(1/x)$ como una potencia, por lo que primero debemos establecer la desigualdad y luego de esto, aplicarla como una potencia, de la siguiente manera:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$2^{-1} \leq 2^{(\sin(1/x))} \leq 2$$

De esta manera, podemos seguir resolviendo el ejercicio de la misma manera que los anteriores

$$x^2 \cdot 2^{-1} \leq x^2 \cdot 2^{(\sin(1/x))} \leq x^2 \cdot 2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{-1} \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{(\sin(1/x))} \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2$$
$$0 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{(\sin(1/x))} \leq 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{(\sin(1/x))} = 0$$

(9) A pesar de que en este ejercicio, nos encontramos ante una multiplicación de identidades trigonometricas, de igual manera podemos aplicar el teorema del sandiwch, ya que uno de estos, esta de forma que no genera problemas en el punto a evaluar. Por lo que seguimos el proceso de los ejercicios anteriores:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Ahora al igual que antes:

$$-\sin(x) \leq \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sin(x)$$

$$-\lim_{x\to 0} \sin(x) \leq \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} \sin(x)$$
$$0 \leq \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Por lo que finalmente tendremos que:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(10) Este ejercicio, es el mas dificil de la sección, y esto se debe a que presenta la función parte entera. Empezamos por ahi, donde notamos que la funciónparte entera se comporta de la siguiente manera:

$$u - 1 \leq [u] \leq u; \qquad u = \frac{1}{x}, \text{para } u > 0$$

Siguiendo el metodo de los ejercicios anteriores:

$$x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) \leq x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) \leq \lim_{x\to 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{1}{x}$$
$$1 \leq \lim_{x\to 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

11. Demuestre que si $f(x)$ satisface que $-x^2 + 3x \leq f(x) - \sin(x) \leq x^4 + 3x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$

(11) Aca para lograr resolver el ejercicio, primero debemos formar la función que es parte del límite solicitado, la cual definiremos como:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Por lo que debemos llegar a esta función a partir de la desigualdad, lo cual se hace de la siguiente manera:

$$-x^2 + 3x \leq f(x) - \sin(x) \leq x^4 + 3x$$

$$-x^2 + 3x + \sin(x) \leq f(x) \leq x^4 + 3x + \sin(x)$$

$$-x + 3 + \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq x^3 + 3 + \frac{\sin(x)}{x}$$

Con la función $g(x)$ formada, se puede aplicar el límite a la desigualdad llegando a

$$\lim_{x \to 0} -x + 3 + \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \to 0} g(x) \leq \lim_{x \to 0} x^3 + 3 + \frac{\sin(x)}{x}$$

$$0 + 3 + 1 \leq \lim_{x \to 0} g(x) \leq 0 + 3 + 1$$

Por lo que tendremos por teorema del Sandiwch que

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

1.2.5 Repaso

1. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{|x|}(1-\cos(x))$ **(Control 1- 2019-1)**
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\cos(3x)}{x+14}$
3. $\lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$
4. $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\pi)(1-\cos(x))}{x^2\sin(x)}$
6. $\lim_{x\to\infty} x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **(I1-2016-tav)**
7. $\lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x}(I1-2018-2)$
8. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin(x))}{2x-\pi}$ **(Control1-2016-1)**
9. $\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)}{|x-1|}\sin(x-1)$ **(Control 1-2018-2)**
10. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)}$ **(I1-2011-2)**
11. $\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^x}{1+2e^x}$ **(I1-2019-2)**
12. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

    Hint: Usar $u = \sqrt[12]{x}$
13. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x})$ **(I1-2018-2)**
14. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos(x)))}{\cos(x)}$ **(I1-2015-tav)**
15. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot(x)} - \frac{\pi}{2\cos(x)}\right)$ **(I1-2013-tav)**

(1) En este caso tenemos que además de una identidad trigonometrica, también esta presente un valor absoluto, donde este cambia de signo en el punto que nos piden calcular el límite. Por lo que evaluamos los límites laterales, donde debe cumplirse:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{|x|}(1-\cos(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{|x|}(1-\cos(x))$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{-x}(1-\cos(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x}(1-\cos(x)) \to \lim_{x\to 0^-} -2\cdot(1-\cos(x)) = \lim_{x\to 0^+} 2(1-\cos(x))$$

Evaluando llegamos a:

$$-2\cdot 0 = 2\cdot 0 = 0$$

Por lo que el valor del límite solicitado es 0.

(2) Para este caso, donde tenemos un límite al infinito, aplicamos la misma tecnica que nos recomendaron de los grados de cada parte de la fracción, donde notamos que los grados son

$$M = 1, \quad N = 1$$

Por lo que si aplicamos la tecnica de la división por el mayor exponente nos quedaría:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\cos(3x)}{x+14} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{\cos(3x)}{x}}{1+\frac{14}{x}}$$

Ahora aplicando esto, podemos notar que el $\cos(3x)$ es un número entre -1 y 1, por lo que sucedera lo mismo que con el número 14. Aplicando el límite tendremos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{\cos(3x)}{x}}{1+\frac{14}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

(3) Aca debemos racionalizar, donde tenemos dos opciones que son:
1. Expander el polinomio del numerador
2.Racionalizar el denominador
En este caso tomeramos la primera opción, que se hace de la siguiente manera:

$$x^2-81 = (x+9)(x-9) = (x+9)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)$$

Llevando esto al límite:

$$\lim_{x\to 9} \frac{(x+9)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9}(x+9)(\sqrt{x}+3)$$

Aplicando el límite tendremos:

$$\lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3} = 18\cdot 6 = 108$$

(4) Debmos racionalizar la expresiónpara así, luego lograr simplificar el denominador de la fracción que es la parte que genera el problema. Procediendo a esto tendremos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t} \cdot \frac{\sqrt{2-t}+\sqrt{t}}{\sqrt{2-t}+\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{-t}{(t)\cdot(\sqrt{2-t}+\sqrt{2})}$$

Con esto se puede calcular el valor del límite de manera simple, ya que simplificamos el numerador con un factor del denominador

$$\lim_{t\to 0} \frac{-1}{(\sqrt{2-t}+\sqrt{2})} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

(5) Como vemos tenemos muchos cosas que componen la función, pero nosotros para resolverlo, debemos pensar primero, que cosa nos sirven y que límite notables puedo identificar aca. Primero notamos que la fracción debemos sepárarla en lo siguiente:

$$\frac{(1-\cos(x))}{x^2} \cdot \frac{\sin(x\pi)}{\sin(x)}$$

Aca identificamos que tenemos un límite notable y existe la posibilidad de formar dos mas, por lo que debemos amplificar por πx la segúnda fracción y luego sepárarlas de la siguiente manera:

$$\frac{(1-\cos(x))}{x^2} \cdot \frac{\sin(x\pi)}{x\pi} \cdot \frac{x\pi}{\sin(x)}$$

Con esto podemos aplicar el límite y aplicar los límites notables de las siguientes maneras:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))}{x^2} \cdot \frac{\sin(x\pi)}{x\pi} \cdot \frac{x\pi}{\sin(x)} = \pi \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\pi)}{x\pi} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\pi)(1-\cos(x))}{x^2\sin(x)} = \frac{\pi}{2}$$

(6) Notar que este límite es llevable a un límite notable mediante un cambio de variable que sería:

$$u = \frac{1}{x^2}, \quad x^2 = \frac{1}{u}$$

$$x \to \infty; \qquad u \to 0$$

Con esto tendremos que

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

(7) Recordamos la sección anterior, que la función parte entera funciona de la siguiente manera:

$$x - 1 \leq [x] \leq x; \text{para } 0 < x$$

Por lo que si multiplicamos por $\frac{1}{x}$ y aplicamos el límite tendremos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x}$$

$$1 \leq \lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x} \leq 1$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

(8) Es evidente que para ser resuelto, este ejercicio, requiere de un cambio de variable y también de luego saber aplicar fórmulas de suma/resta de angulos. Primero el cambio de variable es:

$$u = x - \pi/2 \qquad x = u + \pi/2$$

$$x \to \pi/2 \qquad u =\to 0$$

Aplicando esto en el límite nos queda

$$\lim_{u\to 0} \frac{1-\sin(u+\pi/2)}{2u}$$

Trabjamos la suma de angulos de la siguiente manera:

$$\sin(u+\pi/2) = \sin(u)\cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)\cos(u) = \cos(u)$$

Reemplazando se tiene

$$\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{2u}$$

Finalmente, notamos que tenemos uno de los límites notables, por lo que es fácil saber el resultado:

$$\frac{1}{2}\lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

(9) Descata de este ejercicio, la presencia del valor absoluto, y sobre todo que en el punto donde se evalua, se genera el cambio en el valor absoluto. Por lo que, debemos ver si los límites laterales existen, para así encontrar el valor de este.

Primero notamos que el denominador se divide de la siguiente manera:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

Por lo que la función podria definirse de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)}{x-1}\sin(x-1), & x \geq 1 \\ \\ \dfrac{(x^2-1)}{1-x}\sin(x-1), & x < 1 \end{cases}$$

Para el calculo del límite, se vera si los laterales son iguales:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x^2-1)}{x-1}\sin(x-1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)}{1-x}\sin(x-1)$$

factorizamos las diferencias de cuadrados:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\sin(x-1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{1-x}\sin(x-1)$$

Aca se nota que podremos generar el límite notable usando el siguiente cambio de variable:

$$u = x-1; \quad u = 1-x$$

$$x \to 1; \quad u \to 0$$

$$\lim_{u \to 0^-} \frac{(u)(u+2)}{u} \sin(u) = \lim_{u \to 0^+} \frac{(u)(u+2)}{-u} \sin(u)$$

Ahora ocupando las leyes de los límites, las que nos permiten realizar lo siguiente:

$$\lim_{u \to 0^-} (u)(u+2) \cdot \lim_{u \to 0^-} \frac{\sin(u)}{u} = \lim_{u \to 0^+} (u)(u+2) \cdot \lim_{u \to 0^+} \frac{\sin(u)}{-u}$$

Usando los límites notables y evaluando, llegamos a:

$$0 \cdot (2) \cdot 1 = 0 \cdot 2 \cdot -1$$

$$0 = 0$$

Por lo que el límite si existe y es:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2-1)}{|1-x|} \sin(x-1) = 0$$

(10) Nuevamente nos encontramos con un valor absoluto, solo que además, debemos racionalizar la fracción para así llevarlo a un límite notable, por lo que primero racionalizamos:

$$\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)} \cdot \frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{-x}{\sin(|x|) \cdot (1+\sqrt{x+1})}$$

Luego de esto realizamos, igual que antes descomponemos el valor absoluto en rangos:

$$\sin(|x|) = \begin{cases} \sin(x), & x \geq 0 \\ -\sin(x), & x < 0 \end{cases}$$

Lo llevamos a una función por partes:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sin(x) \cdot (1+\sqrt{x+1})}, & x \geq 0 \\ \dfrac{x}{\sin(x) \cdot (1+\sqrt{x+1})}, & x < 0 \end{cases}$$

Es mas fácil que en el ejericio anterior aplicar el límite y notar el resultado:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{\sin(x) \cdot (1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin(x) \cdot (1+\sqrt{x+1})}$$

Ocupamos las leyes de los límites

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{\sin(x)} \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\cdot(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cdot(1+\sqrt{x+1})}$$

Finalmente aplicamos el límite

$$-1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \to \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Por lo que se concluye que el límite no existe.

(11) En estos casos donde tenemos límites al infinito, pero no polinomios comunes, debemos establecer la divisiónen este caso por e^x, donde nos quedaría:

$$\frac{1-e^x}{1+2e^x} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} = \frac{1/e^x - 1}{1/e^x + 2}$$

Por lo que si aplicamos el límite nos dara el resultado:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{0-1}{0+2} = \frac{-1}{2}$$

(12) Siguiendo el tip realizamos el cambio de variable donde nos quedaría:

$$\sqrt[3]{x} = u^4; \quad \sqrt[4]{x} = u^3$$

Por lo que reemplazando en el límite de la fracción, notamos que debemos expander el polinomio de la siguiente manera:

$$\frac{u^4-1}{u^3-1} = \frac{(u^2+1)(u^2-1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{(u^2+1)(u+1)(u-1)}{(u-1)(u^2+u+1)}$$

Al aplicar el límite, notamos que esta forma de expresar estos polinomios nos permite resolver el límite de manera fácil

$$\lim_{u \to 1} \frac{(u^2+1)(u+1)(u-1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim_{u \to 1} \frac{(u^2+1)(u+1)}{(u^2+u+1)}$$

Evaluando nos da

$$\frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

(13) Debemos racionalizar y luego aplicar la división por x^2

$$\frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1/x^2 + 1/x^3} + \sqrt{1/x^3}}$$

Aplicando el límite notamos que hay un problema, que es que nos queda:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1/x^2+1/x^3}+\sqrt{1/x^3}} = \frac{1}{0}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1/x^2+1/x^3}+\sqrt{1/x^3}} = \infty$$

(14) Notamos que aca podemos hacer el siguiente cambio de variable

$$u = \cos(x)$$

$$x \to \frac{\pi}{2}; \quad u \to 0$$

Con esto tendremos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos(x)))}{\cos(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\sin(u))}{u}$$

Debemos poder formar un límite notable, entonces amplificamos la fracción de la siguiente expresión:

$$\frac{\sin(\sin(u))}{u} \cdot \frac{\sin(u)}{\sin(u)}$$

Para luego ocupando las leyes de los límites hacer lo siguiente

$$\underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\sin(u))}{\sin(u)}}_{\alpha} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u}$$

Por lo que para calcular α, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$z = \sin(u)$$

$$u \to 0; \quad z \to 0$$

Entonces nos quedarían, solamente dos límites notables multiplicados entre si, que serían:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

(15) Primero para ver como resolver este ejercicio, primero juntamos la resta en una sola fracción de la siguiente manera:

$$\frac{x}{\cot(x)} - \frac{\pi}{2\cos(x)} = \frac{2x\sin(x)-\pi}{2\cos(x)}$$

Esto es reducible a la sigueinte expresión:

$$\frac{x\sin(x)-\pi/2}{\cos(x)}$$

Ahora si realizamos el siguiente cambio de variable, que nos permite dejar todo tal cual estaba:

$$u = x - \frac{\pi}{2}; \quad x = u + \frac{\pi}{2}$$

$$x \to \frac{\pi}{2}; \quad u \to 0$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{(u + \pi/2)\sin(u + \pi/2)}{cos(u + \pi/2)}$$

Aca debemos usar las propiedades de cos y sin, que puede ser por suma de angulos o mas rapido son:

$$\sin(u + \pi/2) = \cos(u); \quad \cos(u + \pi/2) = -\sin(u)$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{(u + \pi/2)\cos(u) - \pi/2}{-sin(u)}$$

Finalmente de aca en adelante debemos separar en fracciones de la siguiente manera:

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{-\sin(u)} + \frac{\pi/2(\cos(u) - 1}{-\sin(u)}$$

Para desarrollar la segúnda fracción, se hace mediante la amplificaciónde u, para poder aplicar límites notables:

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{-\sin(u)} + \frac{\pi/2(\cos(u) - 1}{-\sin(u)} \cdot \frac{u}{u}$$

Reacomodamos para luego evaluar el límite

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{-\sin(u)} + \frac{\pi/2(\cos(u) - 1}{-u} \cdot \frac{u}{\sin(u)} = -1 + 0 \cdot 1 = -1$$

Por lo que:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cot(x)} - \frac{\pi}{2\cos(x)} = -1$$

16. Determine cual es valor que debe tener a para que se cumpla lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x-a)} - x = \frac{a}{2}$$

(16) Primero deberemos racionalizar:

$$\frac{\sqrt{x(x-a)} - x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x(x-a)} + x}{\sqrt{x(x-a)} + x} = \frac{-ax}{\sqrt{x(x-a)} + x}$$

Para aplicar el límite, debemos primero dividir por el mayor exponente que sería x

$$\frac{-ax}{\sqrt{x(x-a)} + x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{-a}{\sqrt{1-a/x} + 1}$$

Evaluando el límite nos da:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-a}{\sqrt{1-a/x} + 1} = \frac{-a}{2}$$

Finalmente para que se cumpla lo solicitado, el unico valor que permitiria esto sería

$$a = 0$$

1.3 asíntotas verticales y horizontales

Dentro de las asíntotas, veremos 3 durante el tramo del curso, las cuales serán:

- Horizontales: Sea L una asíntota horizontal de la función $f(x)$ se debe cumplir
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$
- Verticales: Un asíntota vertical en un punto $x = a$, es una tal que se cumpla
$$\lim_{x\to\ a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$
- Oblicuas(no se veran en esta sección): una asíntota oblicua es una función del tipo $y = mx+n$, donde se cumple que
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

1. Determine las asíntotas verticales y horizontales de

(a) $f(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3 - x}$

(b) $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x}$ **(I1-2020-2)**

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5 - x}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 7x + 2}{x^2 - x - 6}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^3 - x}$

(g) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

(h) $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

(i) $f(x) = x\sin(1/x)$

(j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2 - 4x + 3}$

(k) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3}$

(l) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

(m) $f(x) = \dfrac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x} - 1)}{x^2 - 3x + 2}$ **(I1-2018-1)**

(n) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

Solución:
(1a)
• Para esto partiendo por las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$, pero como notamos que se comporta de igual manera para ambos extremos, lo calculamos juntos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3 - x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2 - \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{x})^2}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{(2-0)\cdot(1)^2}{1 - 0} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 2$ es una asíntota horizontal.

• Ahora para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3-x} = \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)}$$

Con esto logramos notar que tenemos 3 posibles candidatos que son $x = -1, 0, 1$, por lo que debemos ver si existe el límite en ese punto o es una asíntota

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = 0$ e $x = 1$ son asíntotas verticales pero $x = -1$ no.

(1b) En este caso a diferencia del ejercicio anterior, tenemos una raíz, lo cual nos genera un problema si esque quisieramos calcular los límites al $\pm\infty$ juntos. Por lo que haremos el calculo por separado:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2-\sqrt{x^2-3x+6}}{3-3x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2-\sqrt{x^2-3x+6}}{3-3x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Ahora **es la parte mas importante** del calculo de este límite, ya que al entrar el $\frac{1}{x}$ a la raíz, se le introduce un signo negativo produciendo lo siguiente:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - (-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{6}{x^2}})}{\frac{3}{x} - \frac{3x}{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2/x + \sqrt{1-3/x+6/x^2}}{3/x-3} = \frac{0+\sqrt{1-0+0}}{0-3} = -\frac{1}{3}$$

Por otro lado, para el ∞ es el mismo procedimiento solo, que en la raíz, si se queda como resta:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2-\sqrt{x^2-3x+6}}{3-3x} == \lim_{x\to \infty} \frac{2/x - \sqrt{1-3/x+6/x^2}}{3/x-3} = \frac{0+\sqrt{1-0+0}}{0-3} = \frac{1}{3}$$

Finalmente tenemos un solo candidato de asíntota vertical, que sería $x = 3$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x^2-3x+6}}{3-3x} = \frac{-1}{12}$$

Entonces las **asíntotas horizontales** serían: $y = \pm\frac{1}{3}$ la **asíntota vertical**

(1c)
• Primero viendo las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

• Enseguida para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción, donde tenemos doss candidatos $x = \pm 1$.

$$\lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

Con esto llegamos a que $y = 1$ es asíntota horizontal y $x = -1, 1$ son asíntotas verticales.

(1d)
• Para las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{5-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{5}{x}-1} = \frac{2+0}{0-1} = -2$$

• Para las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que esta es clara, ya que, es el unico factor del denominador

$$\lim_{x\to 5^\pm} \frac{2x+3}{5-x} = \pm\infty$$

Con esto llegamos a que $y = -2$ es asíntota horizontal y $x = 5$ son asíntotas verticales.

(1e) • Pimero calculamos las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+7x+2}{x^2-x-6} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}} = \frac{3+0+0}{1-0-0} = 3$$

Por lo que con esto concluimos que $y=3$ es una asíntota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{3x^2+7x+2}{x^2-x-6} = \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

Con esto logramos notar que tenemos 2 posibles candidatos que son $x=-2,3$.

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{(3x+1)}{(x-3)} = \frac{-6+1}{-5} = 1$$

$$\lim_{x\to 3^{\pm}} \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x=3$ es asíntotas verticales, pero $x=-2$ no.

(1f)

• Las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+5}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{x-\dfrac{1}{x}} = \frac{1-0+0}{\infty-0-0} = 0$$

Por lo que con esto concluimos que $y=0$ es una asíntota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^3-x} = \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)}$$

Ahora de manera mas evidente tenemos 3 candidatos que son $x=-1,0,1$.

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{(x-5)}{x(x+1)} = \frac{1-5}{1(2)} = -2$$

Con esto concluimos que $x=0$ e $x=-1$ son asíntotas verticales pero $x=1$ no.

(1g)

• Partimos por calcular **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1+0-0} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 3$ es una asíntota horizontal.

• Mientras que **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2} = \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

Con esto logramos notar que tenemos hay dos candidatos $x = -2, 1$, por lo que debemos ver si existe el límite en ese punto o es una asíntota

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = -2$ e $x = 1$.

(1h)

• Calculamos las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2e^x}{e^x-5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\dfrac{5}{e^x}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción, acá notamos altiro que es cuando se produce $e^x = 5 \to x = \ln(5)$

$$\lim_{x\to \ln(5)} \frac{2e^x}{e^x-5} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = \ln(5)$ es asíntotas vertical.

(1i) • Partimos con las **asíntotas horizontales**, donde debemos calcular el límite al $\pm\infty$, donde aca primero moveremos el x y luego haremos un cambio de varible $u = 1/x$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin(1/x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(1/x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

• Para analizar la **asíntota vertical**, notamos que en el $x = 0$ no es continua.

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$$

El límite notamos que es posible resolver mediante el **Teorema del Sandiwch**.

$$-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$$

$$-x \leq x\sin(1/x) \leq x$$

$$-\lim_{x\to 0} x \leq \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) \leq \lim_{x\to 0} x$$

$$-0 \leq \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) \leq 0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$$

Con esto se concluye que la función no tiene asíntotas ni verticales ni horizontales. □

(1j)

• Se inicia por el calculo de las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+0+0}}{1-0+0} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = -\frac{\sqrt{1+0+0}}{1-0+0} = -1$$

Concluimos que las asíntotas son $y = \pm 1$. **Es importante entender que en el segúndo límite se le colca un** 0 **ya que** $x \to -\infty$.

• Para las **asíntotas verticales**,debemos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x = 1, 3$.

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 3^\pm} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye las asíntotas verticales son $x = 1$ e $x = 3$.

(1k)
• Para las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} == \frac{\sqrt{1+0-0}}{1+0+0}1$$

Por lo que con esto concluimos que $y=1$ es una asíntota horizontal.

• Por otro lado **asíntotas verticales** debemos factorizar la función para verlo de una manera mas evidente

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}$$

Enseguida para ver la discontinuidad debemos analizar el límite en los puntos de $x = -1, -3$

$$\lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to-3^{\pm}} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye que la función tiene como asíntotas verticales $x=-1$ e $x=-3$.

(1l)
• En el calculo de las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+0-0}}{1-0} = 1$$

Con esto se llegamos a que $y=1$ es una asíntota horizotal.

• En el caso de**asíntotas verticales**, factorizamos el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x=\pm 1$.

$$\lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to-1^{\pm}} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to1^{\pm}} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to1^{\pm}} \frac{(x+3)}{(x+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Con esto se concluye la asíntota vertical es $x=-1$, y $x=1$ no es una asíntota vertical.

(1m)
• Se empezara por el calculo de **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2} = \frac{\dfrac{(1-1/\sqrt[3]{x})}{x}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-0}{\infty}}}{1-0+0} = 0$$

Por lo que con esto concluimos que $y=0$ es una asíntota horizontal.
notar que consideramos igual para $\pm\infty$ ya que la raíz de grado $1/3$ por lo que admite números negativos

• Para el calculo de las **asíntotas verticales** debemos factorizar la función para verlo de una manera mas evidente

$$\frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2} = \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Enseguida para ver la discontinuidad debemos analizar el límite en los puntos de $x=1,2$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Para este límite debemos recordar que $a^3-b^3=(a^2-b^2)(a+ab+b)$ con $a=\sqrt[3]{x}, b=1$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)} \frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^{2/3}(x-1)}{(x-1)(x-2)} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^{2/3}}{x-2)} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{(-1)(3)}$$

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye que la función tiene como asíntotas verticales $x=2$, y $x=1$ no es una asíntota ya que su límite existe.

(1n)

• Empezando por las **asíntotas horizontales**, se debe calcular el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+0}}{2-0-0} = \frac{1}{2}$$

Con esto se llegamos a que $y = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota horizotal.

• Para las **asíntotas verticales**, debemos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2} = \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{-1}{2}^{\pm}} \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye que las asíntotas verticales son $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{2}$. vertical.

2. Encuentre el valor de a y b para que se cumpla el siguiente límite :

$$\lim_{x\to\infty} ax + b - \frac{x^3+1}{x^2+1} = 0$$

Solución: En este ejercicio en el que nos piden encontrar valores para que algo se cumpla, partamos por lo mas simple que es llevar todo a una misma expresión llegando a suma de fracciones:

$$\frac{(ax)(x^2+1)+b(x^2+1)-x^3-1}{x^2+1} = \frac{ax^3+ax+bx^2+b-x^3-1}{x^2+1}$$

Enseguida si lo llevamos al límite , para que el límite sea 0 necesitamos que el exponente del denominador sea mayor al del numerador, esto partiremos factorizando cada expresión:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(a-1)+bx^2+ax+b-1}{x^2+1}$$

Ahora notamos que necesitamos que $a-1=0$ y $b=0$, para que el exponente mayor lo tenga el denominador(x^2) y si escribimos esto en el límite inicial sería:

$$\lim_{x\to\infty} x - \frac{x^3+1}{x^2+1} = 0$$

3. Determine el valor de $p \in \mathbb{R}$ de manera que que la función:

$$f(x) = \frac{x^6+(1+x^2)^3}{x^p}$$

tenga una asíntota horizontal.

Solución
Notemos que para que la función tenga una asíntota horizontal es cuando $x \to -\infty$ y el límite de la función es una valor fijo, entonces pensemos lo que pasa si $x \to \infty$, notemos que $x \neq 0$ por lo tanto podemos dividir el numerado y denominador por x^6

$$\frac{(x^6+(1+x^2)^3)\cdot 1/x^6}{\frac{x^p}{x^6}}$$

notemos que en el numerado todos los elementos que tengan un grado menor que 6 van a tender a ser 0, por lo tanto sobreviven dos elementos, por lo tanto ya tengo un valor fijo en el numerador, mientras tanto en el denominador tengo que obtener un valor fijo por lo tanto $P = 6$

1.4 Continuidad

Continuidad de una Función

Definición: Sea f una función $\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, entonces f se dice continua en $x \in \mathbb{D}$, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

∘ Por lo que, es necesario que se cumplan tres premisas

1. $f(a)$ está definido ($a \in \mathbb{D}$)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

∘ también se dice que una función $f$es **continua desde la derecha en un número** a si se cumple

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua desde la Izquierda en a** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Por otro lado durante el curso se nos preguntaran caracteristicas sobre una función que no es continua que se reducen a dos casos:

- <u>Discontinuidad reparable</u>: aquella discontinuidad no esencial, donde es posible calcular el límite en cierto punto $x = a$, pero $a \notin \mathbb{D}$ de la función.

  Un ejemplo claro es $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Basta definir la función como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- <u>Discontinuidad no reparable</u>: aquella discontinuidad para la cual no existe una función $g(x)$ continua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq x_0$. Es decir, no se puede "reparar" la discontinuidad asígnándole un valor en el punto. Se puede deber a dos causas

  1. Límites laterales no coinciden. Ejemplo: $\dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$.
  2. La función diverge en el punto. Ejemplo:

1. Determine todos los números reales $a|$ y b para los cuales la siguiente función es continua sobre todo $\mathbb{R}$. Justifique, para los valores encontrados, por qué la función es continua sobre todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & x<1 \\ x^2+bx & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x-2a & 2<x \end{cases}$$

La forma de proceder en este ejercicio esque para asegurar la continuidad de la función, debemos igualar los límites laterales para $x = 1$ e $x = 2$.
Partiendo por $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} ax + 2 = \lim_{x \to 1^+} x^2 + bx$$

$$a + 2 = 1 + b \to a + 1 = b$$

Donde obtenemos nuestra primera ecuación. $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 + bx = \lim_{x \to 2^+} 3x - 2a$$

$$4 + 2b = 6 - 2ab + a = 1$$

Con esta segúnda ecuación que obtenemos, llegmaos al sistema de ecuaciones

$$a + 1 = b \tag{2}$$

$$a + b = 1 \tag{3}$$

Este tiene o por solucion

$$a = 0; \qquad b = 1$$

Por lo que la función inicial termina siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x<1 \\ x^2+x & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x & 2<x \end{cases}$$

2. ¿Que valores a y b deben tener para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a + \dfrac{\sin(bx)}{x} & x < 0 \\ \\ x & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \\ ax + b\cos(x) & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Nos piden que la función sea continua en $\mathbb{R}$, por lo que debemos hacer que los límites laterales en $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$ deben ser iguales, donde llegaremos a un sistema de ecuaciones

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + a + \frac{\sin(bx)}{x} = \lim_{x \to 0^+} x$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + a + \frac{b\sin(bx)}{bx} = 0$$

$$0 + a + b = 0 \longrightarrow a = -b$$

Enseguida para $x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} ax + b\cos(x)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2} + 0$$

Por lo tanto para que sea continua debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a = -b \tag{4}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2} \tag{5}$$

$$a = 1; \qquad b = -1$$

Quedándonos finalmente $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 + \dfrac{\sin(-x)}{x} & x < 0 \\ \\ x & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \\ x - \cos(x) & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}(x \neq 0)$ **(I1-2012-1)**

   (a) Es posible definir $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

   (b) Demuestre que, dado cualquier número $a \in (0, 1/2)$ hay algun valor x_0 para el cual $f(x_0) = a$.

Solución:
Lo que debemos hacer acá es calcular el límite para $x = 0$ en el que notamos que debemos racionalizar para lograr calcularlo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{(x)(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{2}$$

Con esto llegamos a la conclusión que deberiamos definir $f(x)$ de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

4. Sea **(I1-2011-2)**

$$f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$$

Demuestre que no existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in \text{Dom } f$.

Solución
Para que exista una función $F(x) = f(x)$ se debe dar que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, pero notamos que hay un problema en $x = 1$, donde se debe dar al menos que exista el límite de $f(x)$. Para el calculo del límite notamos que debemos hacer un cambio en la parte de abajo de la fracción, debido a la presencia del valor absoluto, por lo que nos quedarían de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{-(x-1)} = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = 2$$

Como los límites laterales no son continuos, no es posible que existe un $F(x)$ tal que $F(x) = f(x)$.

5. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ mx+n & 1 \le x \end{cases}$$

Determine condiciones sobre m y n de manera que f sea continua en $x=1$.

Solución
acá lo que debemos hacer es que los límites laterales deben ser continuas y luego el valor del límite debe ser igual al de la función en $x=1$, por lo que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} x^2+1 = \lim_{x\to 1^+} mx+n$$

$$2 = m+n$$

Con lo que llegamos a la conclusión que debe darse que $m+n=2$ $\square$

6. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-[x]}+x & x>1 \\ x-[x] & x<1 \end{cases}$$

es posible definirla en $x=1$, de modo que sea continua en dicho punto? **(I1-2014-1)**

Solución
Para lograr realizar lo que nos piden, se verifica primero que los límites laterales coincidan dando el mismo valor.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} x-[x] = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-[x]}+x$$

$$1-0 = 0+1$$

$$1 = 1$$

Con esto llegamos a que los límites laterales efectivamente dan lo mismo, por lo que la función deberia definirse con ese valor para $x=1$ quedando como

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-[x]}+x & x>1 \\ 1 & x=1 \\ x-[x] & x<1 \end{cases}$$

7. Analice las discontinuidades de la función

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{x - x^2}$$

Solución:
Primero debemos notar cuales son los puntos donde se produce una discontinuidad

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)}$$

Habiendo factorizado la función notamos que son $x = 0, 1$, ahora debemos calcular los límites para decir si esa discontinuidad es removible o no.

- $x = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x + \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{x(1-x)} \frac{\pi}{\pi} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{\pi x} \frac{\pi}{1-x} = -\pi
\end{aligned}$$

- $x = 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x + \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x - \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi(x-1))}{x(1-x)} \cdot \frac{-\pi}{-\pi} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-\sin(\pi(x-1))}{\pi(x-1)} \cdot \frac{-\pi}{x} = -\pi
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que tanto $x = 0$ como $x = 1$ son **discontinuidades removibles**, ya que sus límites existen.

8. Encuentre los valores de a y b que hacen que f sea continua en todo $\mathbb{R}$: **(I1-2015-2)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & x \geq 3 \end{cases}$$

Solución:
Para asegurar la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$ por lo que los límites laterales en $x = 2$ e $x = 3$ deben ser lo mismo, pues en el resto de los puntos f es continua por propiedades de las funciones continuas.

- Para $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} x + 2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} ax^2 - bx + 3 = 4a - 2b + 3$$

Con esto llegamos a

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$$4 = 3 + 4a - 2b$$

$$1 = 4a - 2b \tag{6}$$

- Analogamente, para $x = 3$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} ax^2 - bx + 3 = 9a - 3b + 3$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2x - a + b = 6 - a + b$$

Lo cual nos obliga a cumplir

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$9a - 3b + 3 = 6 - a + b$$

$$3 = 10a - 4b \tag{7}$$

Ahora juntando ambas ecuaciones llegamos a un sistema donde tenemos

$$1 = 4a - 2b$$

$$3 = 10a - 4b$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

9. Determine todos los valores de a para los que la función **(I1-2018-2)**

$$f(x) = \begin{cases} |x+a| & x \geq a \\ x^2+1 & x < a \end{cases}$$

es continua en todo R

Para asegurar la continuidad debe suceder que:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to a^-} |x+a| = \lim_{x\to a^+} x^2+1$$

Notamos que aca finalmente se cumplira que:

$$2|a| = a^2+1$$

Con esto tenemos que

$$0 = a^2 - 2|a| + 1$$

Luego se puede factorizar de la siguiente manera gracias a que: $|a^2| = a^2$

$$0 = (|a|-1)^2 \to a = 1 \quad y \quad a = -1$$

Donde tendremos finalmente con esto, tendremos que tenemos dos opciones que son:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$$

y como segunda opción:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x \geq -1 \\ x^2+1 & x < -1 \end{cases}$$

10. Considere la función **(I1-2019-1)**

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ \cos(bx) + a & x < 0 \end{cases}$$

(a) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es continua en $x = 0$?

(b) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es derivable en $x = 0$?

a) Para que la función f sea continua en 0, los límites laterales tiene que ser iguales a $f(0) = b$. como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = b$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 + a$ entonces$1 + a = b$. Así la funciónf es continua para $a \in \mathbb{R}$ y para $b = a + 1$.

b) Para que f sea una función derivable en 0 el límite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(h)}{h}$ tiene que existir. Calculamos los límites laterales

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ah + (a+1)\sqrt{h+1} - (a+1)}{h} = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}$$

de la misma manera

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos((a+1)h) + a - (a+1)}{h} = 0$$

Entonces la función f es derivable en = si tenemos $\frac{3}{2}a + \frac{1}{2} = 0$ o sea $a = -\frac{1}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$. Con esto nos quedaría finalmente $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ \\ \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) - \dfrac{1}{3} & x < 0 \end{cases}$$

11. Encuentre los valores de a y b de manera que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$. **(I1-2019-tav)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x < -1 \\ ax+b, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

Notar que para $x < -1$ la función racional esta siempre definida a al igual que el polinimio $ax + b$ entre $-1 < x < 0$. además, si $x > 0$,$\sin(1/x)$ es continua, por lo que dicho tramo también lo es. En conclusión, para cualquier a y b, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Ahora analizamos en $x = -1$ y en $x = 0$. Para que sea continua en dichos puntos, los límites laterales tienen que coincidir:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{x \to -1^-} x + 1 = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} ax + b = -a + b$$

de donde obtenemos que $a = b$: Por otro lado, para todo $x \neq 0$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \to -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \leq \lim_{x \to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \to 0^+} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} ax + b = b$$

lo que implica que $b = 1$ y por la ecuación anterior $a = 1$. En conclusión, para que f sea continua en $\mathbb{R}$, a y b deben ser 1. Donde $f(x)$ finalmente sería: función sea continua en todo $\mathbb{R}$. **(I1-2019-tav)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x < -1 \\ x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

12. Considere la función **(I1-2019-2)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\sin(ax)}{x} + \cos(ax), & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ e^{a/x} + 2, & x < 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de $a > 0$ la función f es continua en $x = 0$?

Partamos por establecer que los límites laterales deben ser iguales al valor de $f(0)$ por lo que podemos establecer los siguiente:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

Enseguida remplazando en los puntos, primero por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} a\frac{\sin(ax)}{x} \cdot \frac{a}{a} + \cos(ax) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} a^2\frac{\sin(ax)}{ax} + \cos(ax) = a^2 + 1 = 2$$

Por lo que nos quedaría

$$a^2 + 1 = 2 \longrightarrow a^2 = 1$$

Con esto tenemos la posibilidad de que $a = \pm 1$, pero podemos salir de la duda calculando el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} + 2 = 2$$

Notamos que no queda otra opción que $\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} = 0$, donde esto solo sucede cuando $0 < a$, ya que si a fuera un número negativo tendriamos $\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} = \infty$. Estos valores se deben a que si el límite viene por el 0 por la izquierda viene siendo un número negativo, lo que produce una $e^{-\infty} = 0$. Por lo que $a = 1$, donde nos queda la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} + \cos(x), & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ e^{1/x} + 2, & x < 0 \end{cases}$$

13. Determine el (los) valor(es) $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$ $(Control 1-2016-1)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|(1-\cos(x))}{x^2}, & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Solución: Para encontrar el valor para que a sea continua en $x = 0$, debemos encontrar los valores de los limites laterales, para despues igualarlo al valor de a:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| \cdot \sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x \cdot (1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-(1-\cos(x))}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| \cdot \sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot (1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 0$$

Ahora tenemos que el valor de:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Por lo que se debe cumplir lo siguiente para que la función sea continua en el $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to a = 0$$

14. Determine si el $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe ($Control\ 1 - 2016 - 1$)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2 + \sqrt[3]{x-9}}{x-1}, & x < 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{12x-12}, & x > 1 \end{cases}$$

Solución
Para ver si el limite existe, debemos calcular los limites lateras y si estos son iguales, el limite en $x = 1$ existe y ese sera su valor.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{12x-12}$$

este limite es de facil resolucion, ya que solamente factorizamos por 12 en el denominador y luego aplicamos el limite notable

$$\frac{1}{12} \lim_{x \to 1+} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{1}{12}$$

Luego de esto calculamos el otro limite lateral racionalizando

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2 + \sqrt[3]{x-9}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(2 + \sqrt[3]{x-9})(4 - 2 \cdot \sqrt[3]{x-9} + (\sqrt[3]{x-9})^2)}{(x-1)(4 - 2\sqrt[3]{x-9} + (\sqrt[3]{x-9})^2)}$$

Ahora podemos reducir el denominador y evaluar el limite

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(4 - 2\sqrt[3]{x-9} + (\sqrt[3]{x-9})^2)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{4 - 2\sqrt[3]{x-9} + (\sqrt[3]{x-9})^2} = \frac{1}{12}$$

Notamos que ambos valores, dan lo mismo por lo que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{12}$$

1.5 Teorema del Valor Intermedio

Teorema: Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.

1. Sea f una función continua en $[0, 2]$ tal que $f(0) = f(2)$. Demuestre que existe $x_1 \in [0, 1]$ tal que $f(x_1) = f(x_1 + 1)$ **(I1-2013-1)**

   Hint: Considere usar la función $g(x) = f(x + 1) - f(x)$ en el intervalor $[0, 1]$

   Solución: Primero lo que debemos hacer es seguir el Hint y tomar en cuenta la función $g(x) = f(x+1) - f(x)$, la cual la podemos usar ya que es una resta de funciones continuas donde lo que se tiene que hacer es lograr demostrar que existe un $g(c) = 0$, $c \in [0, 1]$.

   Enseguida Tomamos $g(0) = f(1) - f(0)$ y $g(1) = f(2) - f(1)$, acá debemos considerar 3 posibles casos

   - Caso 1: Si $f(1) < f(0)$, $g(0) < 0$ y por ende $f(1) < f(2)$ dando así $g(1) > 0$, donde con esto queedaría demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
   - Caso 2: Si $f(1) > f(0)$, $g(0) > 0$, entonces $f(1) > f(2)$ dándonos $g(1) < 0$, donde con esto quedaría demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
   - Caso 3: Si $f(1) = f(0)$, $g(0) = 0$,por lo tanto $f(1) = f(2)$ dando así $g(1) = 0$, donde con esto quedaría demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$. ■

2. Sea f una función continua tal que: **(I1-2013-2)**

   - máximo $f(x) :\in [a, b] = a^2$ y Minimo $f(x) :\in [a, b] = b^2$

   Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c^2$.

   acá se debe primero crear una función auxiliar con la información dada, donde podríamos recurrir a
   $$g(x) = f(x) - x^2$$
   Ocupamos esto ya que así podemos usar los extremos del intervalo para usar **TVI**.
   $$g(a) = f(a) - a^2 \leq 0$$
   $$g(b) = f(b) - b^2 \geq 0$$
   Con esto queda demostrado que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c^2$. ■

3. Demuestre que las curvas definidas por $f(x) = 10x^3 + x^2 + 5x - 11$ y $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10$ se intersectan en algun punto $x_0 > 0$.**(I1-2014-1)**

acá consideremos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = 8x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Primero notamos que esta función es un polinomio por lo que es continua en $\mathbb{R}$, por lo que debemos hacer es demostrar que en un intervalor $[0, a]$, con $a \geq 1$. Por lo que ahora si elegimos $a = 1$ y evaluando een los extremos llegamos a

$$h(0) = -1 < 0$$
$$h(1) = \ 2 > 0$$

Por lo que con esto queda demostrado que las curvas se intersectan en un punto $x_0 \in [0, 1]$, el cual cumple con $x_0 > 0$. ■

4. Demuestre que existe al menos una solución real de la ecuación

$$\sqrt[3]{x} = 1 - x$$

en el intervalo $]0, 1[$ **(I1-2014-2)**

Solución
Definiendo la función auxiliar

$$f(x) = (1 - x) - (\sqrt[3]{x})$$

Dado que f(x) es función continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular en $]0, 1[$ ahora si evaluamos en los extremos del intervalo

$$f(0) = 1 > 0$$
$$f(1) = -1 < 0$$

Entonces por el Teorema del Valor Intermedio, f toma el valor cero en el intervalo $]0, 1[$ con $c \in]0, 1[$ y esa es una solución a esta ecuación.

5. Demuestre que, por lo menos, hay dos soluciones reales distintas de la ecuación **(I1-2014-TAV)**
$$\cos^2(x) - 3x^2 = -\sin(x)$$

Solución Definamos
$$f(x) = (-\sin(x)) - (\cos^2(x) - 3x^2)$$
Notamos que esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que podemos aplicar el TVI. Buscamos valores $x_1; x_2$ reales y distintos tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Como f es continua, con miras a usar el Teorema del Valor Intermedio, notamos que
$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 3\frac{\pi^2}{4} - 1 > 0$$
$$f(0) = -\sin(0) - \cos^2(0) + 3 \cdot 0^2 = -1 < 0$$
$$f(x) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 = 3\frac{\pi^2}{4} + 1 > 0$$
As, por el teorema del valor intermedio, existe$x_1 \in (\frac{-\pi}{2}; 0)$ tal que $f(x_1) = 0$, y existe $x_2 \in (0; \frac{\pi}{2})$ tal que $f(x_2) = 0$. Las que serían nuestras dos soluciones. ■

6. Sea f una función continua en $[1; 6]$ tal que $f(2) = 1$ y $f(3) = 6$: Demuestre que existe $c \in (2; 3)$ tal que $f(c) = c$: **(I1-2015-1)**

Si consideramos la función auxiliar
$$h(x) = f(x) - x$$
Donde notamos que es una función continua en el intervalo $x \in [2, 3]$, por lo que podemos evaluar en los bordes
$$h(2) = 1 - 2 < 0$$
$$h(3) = 6 - 3 > 0$$
Y con esto según el TVI queda demostrado que existe un $c \in (2; 3)$ tal que $f(c) = c$. ■

7. Demuestre que el polinomio $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 2$ tiene por lo menos dos raíces reales. **(I1-2015-tav)**

Solución
Sabemos que p es una función continua, y vemos que $p(-1) = -1$, $p(0) = 2$ y $p(3) = -25$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existen $x_1 in(-1; 0)$ y $x_2 \in (0; 3)$ tales que $p(x_1) = p(x_2) = 0$.

8. Demuestre que la ecuación $\sin(x) + x = x^2$ tiene al menos una solución real. **(I1-2016-tav)**

Solucion se define como $f(x) = \sin(x) + x - x^2$, donde $f(x)$ es una función continua para todos los reales, por ser un polinomio y una función trigonometrica continua en R. Ahora se tomamos:

$$f(\pi/4) > 0 \qquad f(\pi/2) < 0$$

Con esto demostramos que existe un $c \in (\pi/4, \pi/2)$ que cumple con $f(c) = 0$, lo que equivale a la ecuación solicitada.

9. Dadas las funciones f y g continuas en $[a; b]$;tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$; demuestre que existe un número c tal que $f(c) = g(c)$: **(I1-2017-1)**

Solucion
Definimos una función auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Luego h es continua en $[a; b]$ porque f y g lo son, además:

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) < 0$$

Luego $c \in (a; b)$ tal que $h(c) = 0$ Con esto queda demostrado que existe un c tal que $h(c) = 0$ lo que implicaria

$$h(c) = 0 \to f(c) = g(c) \quad \blacksquare$$

10. Demuestre que la ecuación $\ln(x) = 3 - 2x$ tiene por lo menos una solución real **(I1-2017-2)** e **(I1-2019-1)**

Solución
Para probar que la ecuación pedida tiene al menos una solución real considerarems la siguiente función continua

$$h(x) = \ln(x) - 3 + 2x.$$

Notamos que

$$h(e) = 1 - 3 + 2e > 0, \qquad h(1) = -1 < 0$$

luego el Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe un punto $x_0 \in (1, e)$ tal que $h(x_0) = 0$. Por lo tanto tal x_0 es una solución de la ecuación dada.

11. Sea g una función continua en $[-1;2]$ tal que $g(-1) > 1$ y que $g(2) < 4$. Demuestre que existe $c \in (-1;2)$ tal que $g(c) = c^2$. **(I1-2018-2)**

Solución
Si $h(x) = g(x) - x^2$, tenemos que h es continua en $[-1;2]$, además $h(-1) = g(-1) - 1 > 0$ y $h(2) = g(2) - 4 < 0$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio tenemos que existe $c \in (-1;2)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, tal que $g(c) = c^2$.

12. Sea $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Muestre que existe $c \in]-1;4[$ tal que $f(c) = 2$. **(I1-2019-tav)**

Solución
Como f es un polinomio, entonces es continua en todo R. Además notamos que $f(-1) = 4$ y $f(0) = 0$. Ya que $0 < 2 < 4$, el Teorema del Valor Intermedio implica que existe $c \in]-1;0[C]-1;4[$ tal que $f(c) = 2$.

13. Demuestre que si $h(x) = x^2 + 7sen(x)$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(c) = 50$.**(I1-2019-2)**

Solución
Considere la función $f(x) = x^2 + 7\sin(x) - 50$ y observe que f es continua en $[0;10]$, además evaluando vemos que $f(0) = -50$ y que $f(10) = 50 + 7sen(10) > 48 > 0$, por lo tanto por TVI tenemos que, existe $c \in [0;10]$ tal que $f(c) = 0$, lo que equivale a que, existe $c \in [0;10]$ con $h(c) = 50$.

2 Derivadas y diferenciabilidad

2.1 Derivada por definición

La derivada de una función f en un número $x = a$, denotada por $f'(a)$, por definición al limite se da por dos formulas las cuales son:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Donde tendremos que la derivada existe si y sólo si el límite existe.
TIP: Comprobar derivabilidad de una función en $x = a$ implica verificar la continuidad de la función en a y además, comprobar la existencia del límite con el cual se define la derivada.

1. Sea $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $(a;b)$. Sea $x_0 \in (a;b)$ fijo. Se define **(I1-2014-1)**

$$g(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Calcule $\lim\limits_{h\to 0} g(h)$.

Solución: Es evidente que g(h) con el límite que nos piden calcular vendria siendo alguna relación con la derivada por definición de la función $f(x)$, por lo que debemos tratar de armar de alguna manera esta fórmula y lo intentamos **sumando 0**.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{2h} \\
&= \frac{f^{'}(x_0)}{2} + \frac{f^{'}(x_0)}{2} \\
&= f^{'}(x_0)
\end{aligned}$$

2. Use la definición de derivada para calcular la derivada de **(I1-2015-2)**

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

solución: Para esto debemos usar la definición de la derivada que es:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+(x+h)^2} - \sqrt{1+x^2}}{h}$$

Ahora racionalizando llegaremos al resultado

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+(x+h)^2} - \sqrt{1+x^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x+h)^2} + \sqrt{1+x^2})}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1+(x+h)^2 - (1+x^2)}{h\cdot(1+(x+h)^2 + \sqrt{1+x^2})} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2hx}{h\cdot(1+(x+h)^2 + \sqrt{1+x^2})}$$

Ahora que podemos simplificar y evaluar el limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{h+2x}{1+(x+h)^2+\sqrt{1+x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Con lo que tendremos:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

3. Suponga que f es una función que cumple la propiedad $|f(x)| \leq \sin^2(x)$ para todo x. Demuestre que $f(0) = 0$, y calcule $f^{'}(0)$. **(I1-2015-2)**

Solucion: Nosotros tendremos que como se cumple:

$$-\sin^2(x) \leq f(x) \leq \sin^2(x)$$

Evaluando tenemos

$$\underbrace{-0 \leq f(0) \leq 0}_{f(x)=0}$$

Ahora para hacer el calculo de $f'(0)$ tendremos la siguiente desigualdad:

$$0 \leq |f(x)| \leq \sin^2(x)$$

Tambien por otro lado si aplicamos la definición de la derivada:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$

Con esto tendremos

$$0 \leq |\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}| \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(h)}{h}$$

Finalmente aplicando el limite en el lado derecho tendremos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(h)}{h} = 0$$

Con lo que tendremos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$

4. Sea f una función definida en todo R tal que $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique. **(I1-2017-2)**

   (a) f es derivable en $x = 0$.

   (b) $L = 0$

   (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Solucion:
a) Esto es verdaeraro, ya que la derivada por definición si existe, ya que:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = L$$

b) Esto es falso, donde esto puede ser demostrado con un contraejemeplo, donde si tomamos por ejemplo

$$f(x) = \sin(x) \to \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Por lo que $L \neq 0$.
c) Esto es verdadero, si seguimos el siguiente desarrollo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} - L = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Lx}{x} = 0$$

Ahora podemos multiplicar por x a ambos lados

$$\lim_{x\to 0} f(x) - Lx = 0$$

Ahora por ley de los limites tendremos

$$\lim_{x\to 0} f(x) - \underbrace{\lim_{x\to 0} Lx}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

que es lo que nos dicen.

5. Sea f la función definida por $f(x) = xe^x$. encuentre su derivada por defínción. **(I1-2018-2)**

Solución: Debemos aplicar la derivada por definicion, donde esto se hace por lo siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)e^{x+h} - xe^x}{h}$$

Reordenando

$$\lim_{h\to 0} \frac{xe^x(e^h - 1) + he^{x+h}}{h}$$

$$xe^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} e^{x+h}$$

Ocupando el limite notable:

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua tal que $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ si $x \neq 0$. Encuentre $f(0)$. Luego calcule $f'(0)$ si existe. **(I1-2019-tav)**

Solución: Como sabemos que f es una función continua en R, por lo que se debe cumplir la condición de continuidad en $x = 0$:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

Ahora

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sin(x) = 0$$

Con esto tenemos qe $f(0) = 0$
Para encontrar el valor de $f'(0)$, debemos aplicar la derivada por definición:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(h)}{h^2} = 1$$

Por lo tanto:

$$f'(0) = 1$$

7. Sea f una función continua y derivable en $x = 2$ tal que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$ es $y = 3x - 1$. Determine $f(2)$, $f'(2)$ y el valor de $(I1 - 2019 - 2)$

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)^2 - 25}{x - 2}$$

Solución: Debemos recordar la formula de la recta tangete que es:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0$$

Con esto y la informacon entregada por el enunciado, nosotros sabremos que podemos plantear las siguientes igualdades:

$$f'(2) = 3 \qquad -1 = f(2) - f'(2) \cdot 2$$

Por lo que con esto sabemos que

$$f(2) = 5 \quad f'(2) = 3$$

Luego de esto nos piden calcular:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)^2 - 25}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(f(x) - 5)(f(x) + 5)}{x - 2}$$

Separando por algebra de limites, notamos que le primer limite es la derivada por definición de $f'(2)$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} \cdot \lim_{x\to 2}(f(x) + 5) = 3 \cdot 10 = 30$$

2.2 Rectas tangentes

La formula por definición de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

1. Encuentre todos los puntos de la curva $y = \dfrac{1}{x+1}$ en los cuales la tangente a la curva en dichos puntos pasa por $(0, -1)$.

Solucion: La pendiente de la función vendria siendo $f^{'}(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$, con lo que esto debemos remplazarlo en la ecuación de la tangente en un punto (x_0, y_0) de una curva es:

$$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

con $y = -1$ e $x = 0$

$$-1 - y_0 = \frac{-1}{(x_0+1)^2}(0 - x_0)$$

además notamos que debemos remplazar y_0, ya que debe satisfacer que este en la curva inicial.

$$-1 - \frac{1}{x_0+1} = \frac{-1}{(x_0+1)^2}(0 - x_0)$$

Despejeando vamos a llegar a la ecuación

$${x^2}_0 + 4x_0 + 2 = 0$$

Por lo que la coordenada x de los puntos que fueron solicitados en un principio son

$$x_1 = -2 + \sqrt{2}, \quad x_2 = -2 - \sqrt{2}$$

2. Sea C un curva de ecuación:

$$C : y = f(x) = -x^2 + 2x - 4$$

   (a) Determine la ecuación de la recta tangente a C en un punto $x = x_0$

   (b) Determine $x_0 \in \mathbb{R}$ de modo que la recta tangente pase por el origen.

Solución

a) Para determinar la recta tangente debemos primero encontrar la pendiente de esta que es la derivada de $f(x)$

$$f^{'}(x) = -2x + 2$$

Ahora si lo remplazamos en la fórmula de la recta tangente con $x = x_0$ e $y_0 = f(x_0)$

$$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (-{x_0}^2 + 2x_0 - 4) = (-2x_0 + 2)(x - x_0)$$

b) Enseguida para lograr encontrar la recta tangente que pasa por el origen debemos hacer que nos quede alguna ecuación de la forma $y = \alpha x$, por lo que despejamos y

$$y = (-2x_0 + 2)(x - x_0) + ({x_0}^2 + 2x_0 - 4)$$

$$= (-2x_0 + 2)x - x_0(-2x_0 + 2) + (-{x_0}^2 + 2x_0 - 4)$$

Ahora para que se cumpla lo anterior el coeficiente libre debe ser 0 por lo que se debe resolver la ecuación

$$-x_0(-2x_0 + 2) + (-{x_0}^2 + 2x_0 - 4) = 0$$
$$2{x_0}^2 - 2x_0 - {x_0}^2 + 2x_0 - 4 = 0$$
$${x_0}^2 = 4 \longrightarrow x = \pm 2$$

Con lo qye llegamos a que las rectas tangentes son

$$y_1 = -2x; \qquad y_2 = 6x$$

3. Encuentre las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2 + 2$ que pasan por el punto $(1, -3)$. **(I1-2014-2)**

Solución
Partimos primero haciendo la ecuación de la recta tangente con la derivada y el punto dado

$$f'(x) = 2x \qquad x, y = 1, -3$$
$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \tag{8}$$

Enseguida con esto remplazamos lo que sabemos con anterioridad, lo remplazamos y buscamos los valores iniciales a los que terminarian correspondiendo cada una de las rectas que vienen de la curva inicial y pasan por el punto dado

$$-3 - y_0 = 2x_0(| - x_0)$$

$$0 = 2x_0 - 2{x_0}^2 + 3 + y_0$$
$$0 = 2x_0 - 2{x_0}^2 + 3 + {x_0}^2 + 2$$
$${x_0}^2 - 2x_0 - 5 \longrightarrow x_0 = 1 \pm \sqrt{6}$$

Ahora teniendo esto, lo que debemos hacer es remplazarlo en la ecuación (8)

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (1 \pm \sqrt{6}) = 2(1 \pm \sqrt{6})(1 - 1 \pm \sqrt{6})$$

Con esto tenemos las dos rectas tangentes que pasan por el punto $(1, -3)$

4. Determine las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12; 3)$ **(I1-2015-1)**

Solución Empezamos derivando respecto a x la ecuación de la siguiente manera:

$$\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(4y^2)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(36)}{\mathrm{d}x}$$

$$2x + 8y \cdot y' = 0 \rightarrow y' = \frac{-x}{4y}$$

Ahora tenemos la pendiente de nuestra recta tangente, luego de esto como nos piden las dos rectas. debemos dejar expresado en función de x_0 y y_0 donde estos seran puntos que cumplan con:

$$x_0^2 + 4y_0^2 = 36$$

y ahora las redctas tangentes tienen que pasar por el punto $(12, 3)$, por lo que en la formula clasica estas seran nuestras y e x

$$y - y_0 = m'(x - x_0) \rightarrow 3 - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(12 - x_0) \tag{9}$$

Ahora despejando llegamos :

$$y_0 = 3 - x_0 \tag{10}$$

Luego si juntamos con la reemplazmos en la ecuacionq ue tenian que cumplir x_0 e y_0

$$x_0^2 + 4(3 - x_0)^2 = 36 \rightarrow x_0^2 + 36 - 24x_0 + 4x_0^2 = 36$$

Ahora llegmaos a

$$5x_0^2 - 24x_0 = x_0(5x_0 - 24) = 0$$

$$x_0 = 0; \quad x_0 = \frac{24}{5}$$

Ahora reemplazando en ambos puntos en 10 tendremos los puntos:

$$p_1 = (0, 3), \quad p_2 = (\frac{24}{5}, \frac{-9}{5})$$

Donde ahora reemplazamos esto en 9 lograremos tener las rectas tangentes que cumplen con lo solicitado

$$\text{recta } P_1 \;\; y - 3 = 0, \quad \text{recta } P_2 \;\; y - 6x = -\frac{153}{5}$$

5. Demuestre que el grafico de la función $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene tangentes paralelas a la recta $y = 4x - 5$. **(I1-2015-2)**

Solución:
Las rectas tangentes al grafico de la función $f(x) = 6x^3 + 5x - 3$tienen una pendiente que viene dada por la derivada $f^{'}(x) = 18x^2 + 5$. Por otra parte, la recta $y = 4x - 5$ tiene pendiente 4. Pero notamos la siguiente relación de la derivada

$$f^{'}(x) \geq 5 \geq 4$$

Por lo que con esto llegamos a que la recta tangente nunca tendra por pendiente 4, por lo que no será paralela a la recta $y = 4x - 5$.

6. Dada la curva $g(x) = \dfrac{f(x^2)}{x}$, $x \neq 0$ donde $f(9) = 9$,$f^{'}(9) = -2$, encuentre la ecuación de la tangente a la curva $y = g(x)$, en el punto donde $x = 3$. **(I1-2016-1)**

Solución
Para encontrar la recta tangente debemos recordar primero la fórmula de esta que vendria siendo

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0)$$

Enseguida lo que debbemos hacer es derivar $g(x)$

$$g'(x) = \frac{2xf'(x^2)x - f(x^2)}{x^2}$$

Ahora remplazando en la fórmula con el punto dado nos quedaría finalmente

$$y - \frac{f(x_0{}^2)}{x_0} = \frac{2x_0{}^2 f'(x_0{}^2) - f(x_0{}^2)}{x_0{}^2}(x - x_0$$

$$y - \frac{f(3^2)}{3} = \frac{2 \cdot 3^2 f'(3^2) - f(3^2)}{3^2}(x - 3)$$

$$y - \frac{9}{3} = \frac{2 \cdot 9 \cdot -2 - 9}{3^2}(x - 3 \quad)$$

$$y - 3 = \frac{2 \cdot 9 \cdot (-2) - 9}{9}(x - 3)$$

$$y = \frac{-5 \cdot 9}{9}(x - 3) + 3$$

$$y = -5(x - 3) + 3$$

7. Las curvas $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ se intersectan en el punto $(1;2)$: Demuestre que sus tangentes en ese punto son perpendiculares entre si. **(I1-2017-1)**

Solución Para lograr demostrar que las rectas tangentes son perpendiculares entre si lo que debemos hacer es buscarlas y luego según sabemos el producto de sus pendientes debe dar -1. la fórmula a usar será

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Partimos buscando la recta tangente de la primera curva

$$y^2 = 4x^3$$

$$2yy' = 12x^2 \rightarrow m_1 = y' = \frac{6x^2}{y}$$

Teniendo la primera pendiente ahora procedemos a calcular la segúnda, ocupando la fórmula de la segúnda curva

$$2x^2 + 3y^2 = 14$$

$$4x + 6yy' = 0 \rightarrow m_2 = y' = \frac{-4x}{6y}$$

Enseguida teniendo las dos curvas debemos remplzar el punto pedido y luego hacer el producto entre estas y comprobar que nos dan -1

$$m_1 = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3; \qquad m_2 = \frac{-4 \cdot 1}{6 \cdot 2} = \frac{-1}{3}$$

$$m_1 \cdot m_2 = 3 \cdot \frac{-1}{3} = -1 \qquad \blacksquare$$

8. Determine los puntos en la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6$ en los cuales la recta tangente es horizontal. Encuentre la ecuación de dichas rectas tangentes **(I1-2017-2)**

Solución:
Nos piden encontrar las rectas tangentes, que son horizontales donde según sabemos eso es cuando es constante por lo que su pendiente $f'(x) = 0$. Debido a esto derivamos la función normal.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x$$

Ahora se tiene que igualar a 0 la derivada y encontrar los valores de x para los que se cumple esta igualdad

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 18x = 0 \longrightarrow x = 0, 3$$

Enseguida tenemos que $x_{01} = 0$ y $x_{02} = 3$, por lo que debemos remplazarlo en la función y en la ecuación de la recta tangente

$$y_{01} = f(x_{01}) = 2(0)^3 + 9(0)^2 + 6 = 6 \qquad y_{02} = f(x_{02}) = 2(3^3) - 9(3^2) + 6 = 21$$

Finalemente debemos remplazar en la ecuación de la recta tangente, los puntos obtenidos.

$$y_1 - y_{01} = f'(x_{01})(x_1 - x_{01}) \qquad y_2 - y_{02} = f'(x_{02})(x_2 - x_{02})$$

$$\begin{aligned} y_1 - 6 &= 0(x_1 - 0) \qquad & y_2 - 21 &= 0(x_2 - 3) \\ y_1 &= 6 & y_2 &= 21 \end{aligned}$$

Por lo que las rectas serían

$$\begin{aligned} &T_1 \qquad && y_1 = 6 \\ &T_2 && y_2 = 21 \end{aligned}$$

9. Encuentre una recta que sea tangente comun a las curvas $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$. **(I2-2009-2)**

Solución:
La ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto $(a; a^2)$ viene dada por: $y = 2ax - a^2$. Por otra parte, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto $(b; \frac{1}{b})$ viene dada por: $y = -\frac{x}{b^2} + \frac{2}{b}$. Para que la recta sea tangente a ambas curvas se deben satisfacer las siguinetes ecuaciones:

$$2a = \frac{-1}{b^2}, \quad a^2 = \frac{2}{b}$$

Resolviendo obtenemos que $a = -2$ y que $b = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto la recta buscada es:

$$y = -4x - 4$$

10. Sea $f(x) = x^4 + x - e^x$. Demuestre que el gráfico de f tiene, al menos, una recta tangente paralela a la recta $y = x + 1$. **(I1-2021-1)**

Solución:
Para que la función $f(x)$, tenga al menos una recta tangente paralela a la recta $y = x + 1$ si y sólo si existe $c \in R$ tal que $f'(c) = 1$. Para demostrar esto derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 + 1 - e^x$$

Notamos que esta es una función continua en el intervalo $[0, 1]$, luego de esto

$$f'(0) = 0 \quad y \quad f'(1) = 5 - e > 2$$

entonces tendremos que por TVI existe un $c \in (0, 1)$ que cumple con que $f'(c) = 1$. Por consecuencia tendremos que el punto $(c, f(c))$ la recta tangente a la función $f(x)$, tiene pendiente 1 y por lo que es paralela a la recta $y = +1$.

2.3 Reglas de derivación

Dentro de las derivas encontraran que estas siguen ciertas reglas, a continuación tienen algunas reglas/formulas que por su dificultad no es necesario dedicarle una sección a cada una:

- Derivada de una constante:
$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$
- Regla de la potencia:
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$
- Multiplo constante:
$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$
- suma:
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$
- resta:
$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$
- Exponente natural:
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Trigonometricas:

- $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$
- $\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x) \cdot \tan(x)$
- $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x) \cdot \cot(x)$
- $\frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)$

Trigonometricas inversas:

- $\frac{d}{dx}\sin^- 1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\tan^- 1(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx}\sec^- 1(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\cos^- 1(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\csc^- 1(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $\frac{d}{dx}\cot^- 1(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

A continuación hay tres secciones que se a distintas reglas con el uso de las anteriores.

2.3.1 Regla del producto y del cuociente

Las reglas de estas sección, siguen las siguientes formulas:

- regla del producto:
$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]$$
- regla del cuociente:
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}[f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx}[g(x)]}{g^2(x)}$$

1. sea $f(x) = \sin(x)(x^4 + \cot(x))$. Determine $f'(x)$

Solución:
acá ocupamos la regla del producto donde consideramos

$$f(x) = \sin(x); \quad f'(x) = \cos(x).$$

$$g(x) = x^4 + \cot(x); \quad g'(x) = 4x^3 - \csc^2(x)$$

Enseguida aplicando la regla del producto nos quedaría

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = \sin(x)(4x^3 - \csc^2(x)) + \cos(x)(x^4 + \cot(x)) \quad \square$$

2. Derivar

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-1}$$

Solución
acá ocupamos la regla del couciente donde consideramos

$$h(x) = x^2 + 1; \quad h'(x) = 2x.$$

$$g(x) = \sqrt{x} - 1; \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x(\sqrt{x}-1) - (x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\dfrac{(4\sqrt{x}\cdot x(\sqrt{x}-1) - x^2 - 1)}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4\sqrt{x}\cdot x(\sqrt{x}-1) - x^2 - 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{(4x^2 - 4\sqrt{x}\cdot x - x^2 - 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

Finalmente la derivada nos daría

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 4\sqrt{x}\cdot x - 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$$

3. Derivar la siguiente función
$$f(x) = \frac{1+\sin(x)}{x+\cos(x)}$$

Solución
Usando la regla del cuociente establecimos las funciones y las derivamos

$$h(x) = 1+\sin(x); \qquad h^{'}(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = x+\cos(x); \qquad g^{'}(x) = 1-\sin(x)$$

Por lo que ahora remplazando en la fórmula del cuociente

$$f^{'}(x) = \frac{h^{'}(x)g(x) - h(x)g^{'}(x)}{g^2(x)} = \frac{\cos(x)(x+\cos(x)) - (1+\sin(x))(1-\sin(x))}{(x+\cos(x))^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{x\cos(x) + \cos^2(x) - 1 + \sin^2(x)}{(x\cos(x))^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{x\cos(x)}{(x+\cos(x))^2}$$

4. Derive la función $f(x) = \dfrac{xe^{3x}}{1+x^2}$ **(I1-2018-2)**

Solución
Primero debemos establecer cuales serían nuestras funciones que forman parte de la fracción y luego derivarlas

$$g(x) = xe^{3x}; \qquad g^{'}(x) = e^{3x} + 3xe^{3x}$$

$$h(x) = 1+x^2; \qquad h^{'}(x) = 2x$$

Enseguida con esto remplazamos en la fórmula del cuociente

$$f^{'}(x) = \frac{h^{'}(x)g(x) - h(x)g^{'}(x)}{g^2(x)} = \frac{(1+x^2)(e^{3x}+3xe^{3x}) - (xe^{3x})(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x} + 3xe^{3x} + x^2e^{3x} + 3x^3e^{3x} - 2x^2e^{3x}}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3e^{3x} - x^2e^{3x} + 3xe^{3x} + e^{3x}}{(1+x^2)^2}$$

5. Calcule la derivada de la siguiente función **(I1-2019-tav)**

$$f(x) = e^x - 4^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + 6x^3 - \cos(x)$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}(e^x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}(4^3)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}(1/\sqrt[4]{x})}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}(\cos(x))}{\mathrm{d}x}$$

$$f(x) = e^x - 0 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{4}\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} + 18x^2 + \sin(x)$$

6. Dada $y = f(x) = e^{3x}\cos(2x)$, determine $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x)$. $(I2 - 2014 - 1)$

Solución:
Lo que primero debemos hacer es calcular la derivada, luego la segúnda derivada y despues remplazarla en la ecuación dada y encontrar el valor de esta. Partimos derivando por la regla del producto

$$f(x)g^{'}(x) + f^{'}(x)g(x)$$

$$y' = f'(x) = 3e^{3x}\cos(2x) - 2e^{3x}\sin(2x)$$

Enseguida amente debemos aplicar la regla del producto

$$y'' = f''(x) = 9e^{3x}\cos(2x) - 6e^{3x}\sin(2x) - 6e^{3x}\sin(2x) - 4e^{3x}\cos(2x)$$

$$y'' = f''(x) = 5e^{3x}\cos(2x) - 12e^{3x}\sin(2x)$$

Finalmente ahora procedemos a remplazar en la ecuación dada para encontrar el valor faltante

$$y''(x) - 6y'(x) + 13y(x)$$

$$5e^{3x}\cos(2x) - 12e^{3x}\sin(2x) - 6(3e^{3x}\cos(2x) - 2e^{3x}\sin(2x)) + 13e^{3x}\cos(2x)$$

$$18e^{3x}\cos(2x) - 18e^{3x}\cos(2x) + 12e^{3x}\sin(2x) - 12e^{3x}\sin(2x) = 0$$

Por lo que llegamos a que $y''(x) - 6y'(x) + 13y(x) = 0$.

7. Determine un polinomio $p(x)$, de modo que la derivada de la función $(I2-2014-2)$

$$f(x) = e^{3x}p(x)$$

sea igual a $e^{3x}(3x^2+8x)$

Solución:
Primero ocupamos la regla del prdocuto derivando $f(x)$

$$f'(x) = 3e^{3x}p(x) + e^{3x}p'(x) = e^{3x}(3p(x) + p'(x))$$

Enseguida como la derivada de la función debbe ser igual a $e^{3x}(3x^2+8x)$, lo que debemos hacer es igualar este valor y ver de que manera podemos llegar a el polinomio $p(x)$

$$e^{3x}(3p(x) + p'(x)) = e^{3x}(3x^2+8x)$$

$$3p(x) + p'(x) = 3x^2 + 8x$$

Ahora tenemos una desigualdad que cumpli, lo que debemos hacer es ver como tiene que ser el polinomio $p(x)$, para esto es importante notar que el mayor exponente debe ser de grado 2. Esto es haci ya que, haciendo la igualdad notamos que el grado del polinomio al que debemos llegar es de grado 2, por lo que planteamos un polinomio de la forma

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

Enseguida lo que debemos hacer es remplazar esto en la igualdad y así podremos encontrar los factores(a,b y c) del polinomio $p(x)$.

$$3p(x) + p'(x) = 3x^2 + 8x$$

$$3(ax^2+bx+c) + 2ax + b = 3x^2 + 8x$$

$$3ax^2 + (3b+2a)x + (3c+b) = 3x^2 + 8x$$

Finalmente llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$3a = 3 \tag{11}$$

$$(3b+2a) = 8 \tag{12}$$

$$3c + b = 0 \tag{13}$$

Enseguida resolviendo el sistema de ecuaciones llegamos a+

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = \frac{-2}{3}$$

Por lo que el polinomio sería

$$p(x) = x^2 + 2x - \frac{2}{3}$$

8. Determine la pendiente de la recta tangente a la curva **(I2-2021-1)**

$$x^y = y^x$$

en el punto $(2, 4)$.

Solución
Para resolver esto, primero aplicamos ln() a ambos lados de la ecuación y ocupando las propiedades de los logaritmos:

$$y\ln(x) = x\ln(y)$$

Ahora debemos derivar recto a y en ambos lados de la ecuación quedando:

$$y'\ln(x) + \frac{y}{x} = \ln(y) + \frac{x}{y}\cdot y'$$

Donde ahora despejando y' tendremos:

$$y'\left(\ln(x) - \frac{x}{y}\right) = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\ln(y) - \frac{y}{x}}{\ln(x) - \frac{x}{y}}$$

Por lo que ahora solo debemos reemplazar los valores para obtener la pendiente de la recta tangente:

$$y' = \frac{\ln(4) - \frac{4}{2}}{\ln(x) - \frac{2}{4}}$$

2.3.2 Regla de la cadena

Esta regla se compone de que uno tiene una función que al ser derivada:

$$F(x) = f(g(x)) \to \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}[f(g(x))] \cdot \frac{d}{dx}g(x)$$

Tambien destacar que si se ocupa la siguiente notación:

$$y = f(u) \qquad u = g(x)$$

Tendremos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

1. derivadar la siguiente función **(I1-2016-2)**

$$f(x) = (x\ln(x))^{\cos(x)}$$

Solución
Para resolver este ejercicio de una manera mas fácil para aplicar la regla de la cadena haremos lo siguiente. según sabemos se cumple $x = e^{\ln(x)}$, por lo que podemos aplicar esto en la función dada

$$(x\ln(x))^{\cos(x)} = e^{\ln((x\ln(x))^{\cos(x)}} = e^{\cos(x)(x\ln(x))}$$

Ahora notamos que tenemos que usar la regla del producto solo que para 3 funciones no 2 como estamos acostumbrados, pero siguiendo el mismo método tipico procedemos

$$e^u \to e^u u'$$

$$f(x) = e^{\cos(x)(x\ln(x))} \to f'(x) = e^{\cos(x)(x\ln(x))}(\cos(x)(x\ln(x)))'$$

$$f'(x) = e^{\cos(x)(x\ln(x))}(\cos(x)(x\ln(x))' + \cos'(x)(x\ln(x))$$

$$f'(x) = e^{\cos(x)(x\ln(x))}(\cos(x)(1+\ln(x)) - \sin(x)(x\ln(x))$$

Recordar que $= e^{\cos(x)(x\ln(x))} = (x\ln(x))^{\cos(x)}$

2. Si $h(x) = f(xf(x))$, donde $f(1) = 2$,$f'(1) = 4$ y$f'(2) = 5$, encuentre $h'(1)$. **(I1-2018-1)**

Solución
Primero derivamos la función aplicando la

$$h^{'}(x) = f^{'}(u)u^{'}$$

Enseguida lo que debemos hacer es aplicar la regla de la cadena, donde también en este deberemos usar la regla del producto.

$$h^{'}(x) = f'(u)(u') = f^{'}(xf(x))(xf^{'}(x) + f(x))$$

Ahora remplazamos en el punto solicitado

$$h^{'}(1) = f^{'}(f(1))(f^{'}(1) + f(1))$$

$$h^{'}(1) = f^{'}(2)(4 + 2)$$
$$h^{'}(1) = 5(4 + 2) = 30$$

3. Dada la función real $g(x) = \sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$ entonces el valor de $g'(0)$ es: $(Control\,1 - 2016 - 1)$

Solución En este ejercicio notamos que debemos usar la regla de la cadena 2 veces ya que tenemos una función con una función con una función dentro., pero primero recordaremos un poco algunas derivadas

$$\frac{\mathrm{d}(\arctan(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}; \qquad \frac{\mathrm{d}(\sec(x))}{\mathrm{d}x} = \sec(x)\tan(x)$$

Enseguida para derivar $g(x)$ debemos ocupar el siguiente metodo

$$u = \arctan(y); \qquad y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u' = \frac{1}{1+y^2}; \qquad y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$g(x) = \sec(u(y(x)) \to g'(x) = \sec'(u(y(x)) \cdot u'(y(x)) \cdot y'(x)$$

Ahora remplazando llegamos a

$$g'(x) = \sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1)}}\right)\right) tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} \cdot \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

Enseguida debemos remplazar el valor de $x = 0$, ya que a primera vista es un poco difícil simplificar la expresión

$$g'(0) = \sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+1)}}\right)\right) tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+1}}\right)\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+0^2}\right)} \cdot \frac{-0}{\sqrt{(1+0^2)^3}}$$

Aun con el valor remplazado se ve bastante difícil de analizar pero vayamos analizando cada parte de la derivada y notaremos la respuesta de manera mas obvia

$$\sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+1)}}\right)\right) \neq 0; \qquad tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{0^2+1}}\right)\right) \neq 0$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+0^2}\right)} \neq 0; \qquad \frac{-0}{\sqrt{(1+0^2)^3}} = 0$$

Enseguida ya con esto notamos que finalmente $g'(0) = 0$, ya que es el producto de cuatro números, tres distintos de 0 pero uno igual a 0.

4. Calcule la derivada de $y = x^{e^x}$ $I2 - 2009 - 1$

Solución
Para resolver este ejercicio de una manera mas fácil para aplicar la regla de la cadena haremos lo siguiente. según sabemos se cumple $x = e^{\ln(x)}$, por lo que podemos aplicar esto en la función dada

$$x^{e^x} = e^{\ln(x^{e^x})} = e^{e^x \ln(x)}$$

Ahora derivando esta ultima expresión tenemos que usar la regla de la cadena junto con la regla del producto

$$\frac{\mathrm{d}(e^u)}{\mathrm{d}u} \to e^u u'$$

$$y = e^{e^x \ln(x)}$$

$$y' = e^{e^x \ln(x)}(e^x \ln(x))'$$

$$y' = e^{e^x \ln(x)}(e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x}) = x^{e^x}(e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x})$$

5. Sea $f(x)$ una función derivable en $\mathbb{R}$, con $f(4) = 2$ y $f'(4) = -6$. Se define: $(I2 - 2011 - 2)$

$$g(x) = \sqrt{1 + (f(4x))^3}$$

Calcule $g'(1)$.

Solución Derivamos la función aplicando la regla de la cadena de la siguiente manera

$$g(x) = \sqrt{u} \to g'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1 + (f(4x))^3}} \cdot (1 + (f(4x))^3)'$$

$$= \frac{3 \cdot 4f'(4x) \cdot (f(4x))^2}{2\sqrt{(1 + (f(4x))^3}}$$

$$g'(x) = \frac{6 \cdot f'(4x) \cdot (f(4x))^2}{\sqrt{(1 + (f(4x))^3}}$$

Enseguida debemos remplazar $x = 1$ en la expresión obtenida y así calcularemos lo solicitado

$$g'(1) = \frac{6 \cdot f'(4)) \cdot (f(4))^2}{\sqrt{(1 + (f(4))^3}}$$

$$g'(1) = \frac{6 \cdot (-6) \cdot (2)^2}{\sqrt{(1 + (2)^3}} = \frac{-36 \cdot 4}{\sqrt{9}} = -48$$

6. Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 2$,$f'(0) = -1$,$f(1) = f'(1) = 2$, determine $g'(0)$, para la función g definida por: $g(x) = f(e^x)e^{f(x)}$ $(I2 - 2014 - 1)$

Solución
acá según vemos debemos ocupar dos reglas, tanto la de la cadena como la del producto en la derivada de la función

$$g(x) = f(e^x)e^{f(x)}$$

$$g'(x) = e^x f'(e^x)e^{f(x)} + f(e^x)f'(x)e^{f(x)}$$

Ahora con la derivada evaluamos la función en $x = 0$

$$g'(0) = e^0 \cdot f'(e^0) \cdot e^{f(0)} + f(e^0) \cdot f'(0) \cdot e^{f(0)}$$

$$g'(0) = 1 \cdot f'(1) \cdot e^2 + f(1) \cdot -1 \cdot e^2$$

$$g'(0) = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^2 = 0$$

7. Sea $f(x) = \ln(x^2 + 3^x)$. Determine $f'(0) + f''(0)$: $(I2 - 2018 - 2)$

Solución
Primero derivamos la función ocupando la regla de la cadena

$$f(x) = \ln(u) \to f'(x) = \frac{u'}{u}$$

$$f'(x) = \frac{2x + \ln(3)3^x}{x^2 + 3^x}$$

Enseguida derivando nuevamente debemos ocupar la regla del cuociente

$$g(x) = 2x + \ln(3)3^x; \qquad g'(x) = 2 + \ln(3)^2 3^x$$

$$h(x) = x^2 + 3^x; \qquad h'(x) = 2x + \ln(3)3^x$$

$$f''(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

$$f''(x) = \frac{(2 + \ln^2(3)3^x)(x^2 + 3^x) - (2x + \ln(3)3^x)^2}{(x^2 + 3^x)^2}$$

Ahora si evaluamos en 0 ambas funciones nos dan

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0 + \ln(3)3^0}{0^2 + 3^0} = \ln(3)$$

$$f''(0) = \frac{(2 + \ln^2(3)3^0)(0^2 + 3^0) - (2 \cdot 0 + \ln(3)3^0)^2}{(0^2 + 3^0)^2} = \frac{2 + \ln^2(x) - \ln^2(x)}{1^2} = 2$$

Por lo que el resultado que nos pedian era

$$f'(0) + f''(0) = \ln(3) + 2$$

8. Sean $h(x)$ y $f(x)$ funciones derivables y definidas en $(0;\infty)$ tales que $f'(x) = \arctan(x)$ y $h'(x) = \dfrac{1}{x}$. Si $(I2 - 2017 - 1)$

$$g(x) = \frac{1}{2}h(1+x^2) - xf'(x)$$

Demuestre que $(f+g)$ es función constante en $\mathbb{R}^+$

Solución Para que una función sea constante se debe dar que su derivada sea 0, por lo que debemos hacer es derivar la función $g+f$ y si es igual a 0 quedara demostrado que es constante.

$$f + g = f(x) + \frac{1}{2}h(1+x^2) - xf'(x)$$

$$f' + g' = f'(x) + \frac{1}{2}h(1+x^2)2x - f'(x) - xf''(x)$$

$$f'(x) - f'(x) + h(1+x^2)x - xf''(x)$$

Enseguida si derigvamos $f'(x)$ y $h(1+x^2)$ llegaremos a:

$$f'(x) = \arctan(x) \to f''(x) = \frac{1}{1+x^2}; \qquad h(x) = \frac{1}{x} \to h'(1+x^2) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

finalmente juntando todo

$$f' + g' = f'(x) - f'(x) + \frac{x}{(1+x^2)} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$f' + g' = 0 \qquad \blacksquare$$

2.3.3 Derivada implicita

En muchos casos tenemos funciones donde $y = f(x)$, pero estas estan dentro de una ecuación donde $f(x)$ no es despejable de la forma clasica por lo que se deriva y como si fuera una variable, solo que la derivada como tal todavia nos falta y lo usamos como una regla de la cadena. Tomemos un ejemplo simple:

$$y^2 \cdot x + x^2 \cdot y = 0$$

$$2y \cdot y' \cdot x + y^2 + 2x \cdot y + x^2 \cdot y' = 0$$

Con esta explicación deben hacer los siguientes ejercicios.

1. Si $x^2y + y^3 = 2$; calcule y' e y'' en el punto $(1;1)$: **(I1-2017-1)**

Solcuión
Derivando implí citamente la ecuación, tenemos que:

$$2xy + x^2y' + 3y^2y' = 0$$

Despejando y' de la ecuación, tenemos que.

$$y' = \frac{-2xy}{x^2 + 3y^2}$$

Por lo tanto

$$y'_{(1,1)} = \frac{-1}{2}$$

Ahora debemos derivar nuevamente implicitanmente

$$y'' = \frac{(-2y - 2xy')(x^2 + 3y^2) - (2x + 6yy')(-2xy)}{(x^2 + 3y^2)^2}$$

Luego

$$y''_{(1,1)} = \frac{-3}{8}$$

2. Suponga la ecuación

$$\sqrt{x} + 1 = x\sqrt{y} + \sin(y)$$

Define de manera implicita $y = f(x)$. Calcule y'

Solución Derivando primero

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \sqrt{y} + \frac{xy'}{2\sqrt{y}} + y' \cos(y)$$

Enseguida debemos despejar y'

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{y} = y' \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \cos(y) \right)$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{y} \right) \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \cos(y) \right)^{-1} = y'$$

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación **(I1-2018-1)**

$$\arctan(x+y)+y=\frac{\pi}{4}$$

en el punto $(1,0)$

Solución
La ecuación de la recta tangente pedida es

$$y=y'(1;0)\cdot(x-1):$$

Derivando implícitamente la ecuación de la curva tenemos que

$$\frac{1}{1+(x+y)^2}\cdot(1+y')+y'=0$$

Evaluando tenemos que

$$\frac{1}{1+(1+0)^2}\cdot(1+y')+y'=0$$

por lo tanto $y'(1;0)=-\frac{1}{3}$ Así, la ecuación de la recta tangente es $y=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$.

4. Determine los puntos de la curva $xy+y^2+x^2+x-y=2$ cuya recta tangente a la curva sea horizontal o vertical. $(I2-2012-TAV)$

Solución
Utilizamos derivación implicita para derivar con respecto a x la igualdad y obtenemos que:

$$y+xy'+2yy'+2x+1-y'=0$$

luego

$$y'=\frac{2x+y+1}{1-2y-x}$$

Ahora si seguimos lo solicitado en el enunciado debemos formar las siguientes ecuaciones para las rectas tangentes sean horizontales o verticales • **Horizontales**

$$2x+y+1=0$$

Con esto podemos llegar a que todos los puntos que esten en la recta $y=-1-2x$ y en la curva $xy+y^2+x^2+x-y=2$ sus rectas tangenetes serán **Horizontales**. Estos puntos son el $(0,-1)$ y $(0,2)$.

• **Verticales**

$$1-2y-x=0$$

Con esto se concluye que todos los puntos que esten en la recta $y=-\left(\frac{1+x}{2}\right)$y la curva $xy+y^2+x^2+x-y=2$ sus rectas tangentes serán **Verticales**. Los cuales son el $(1,0)$ y $(-3,0)$.

5. Considere la curva de ecuación $x^2 - xy + y^2 = 9.(I2 - 2013 - TAV)$

   (a) Muestre que las rectas tangentes a la curva, en los puntos donde esta intersecta al eje x son paralelas.

   (b) Calcular $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

Solución
(a) Para mostrar lo que nos piden primero buscaremos los puntos donde la curva intersecta al eje x.
Para esto notamos que sucede que la coordenada de $y = 0$, por lo que nos queda

$$x^2 = 9 \longrightarrow x = \pm 3$$

Ahora con esto tenemos los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

Ya con los puntos listos lo que debemos hacer es derivar la curva, ya que esa será la pendiente de las rectas tangentes.

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \longrightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x} \tag{14}$$

Enseguida remplazando con los puntos solicitados tenemos

$$x_1 = -3; \qquad x_2 = 3$$

$$y_1' = \frac{0 - 2\cdot(-3)}{0 - (-3)} = 2; \qquad y_2 = \frac{0 - 2\cdot(3)}{0 - 3} = 2$$

Por lo que notamos que ambas derivadas son iguales y si nos vamos a la fórmula de las rectas tangentes tenemos

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

Donde la derivada es la pendiente y para que dos rectas sean paralelas deben sus pendientes ser iguales, que es lo que sucede debido a que $y_1' = y_2'$. Por lo que con esto queda mostrado lo solicitado
(b) Ahora para calcular la segúnda derivada derivamos (14) nuevamente

$$2 - y' - y' - xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \rightarrow y''(2y - x) = 2y' - 2(y')^2 - 2$$

Enseguida si lo despejamos denuevo llegamos a

$$y'' = \frac{2y' - 2(y')^2 - 2}{2y - x}$$

Finalmente remplazando lo que teníamos en (14) tendremos

$$y'' = \frac{2\left(\dfrac{y - 2x}{2y - x}\right) - 2\left(\dfrac{y - 2x}{2y - x}\right)^2 - 2}{2y - x} = \frac{-6y^2 + 6xy - 6x^2}{(2y - x)^3}$$

6. Determine todos los puntos de la curva $x^2y+e^y=e$ cuya tangente es horizontal. $(I2-2018-2)$

Solución
Primero derivaremos implicitamente la ecuación de la curva, donde llegamos a

$$2xy + x^2y' + y'e^y = 0 \iff y' = \frac{-2xy}{x^2+e^y}$$

De lo anterior tenemos que los puntos cuya recta tangente a la curva es horizontal deben cumplir que $x=0$ o $y=0$, pero de la ecuación de la curva observamos que no existen puntos con segúnda coordenada cero, por lo tanto deben cumplir necesariamente que $x=0$. Reemplazando $x=0$ en la curva tenemos que $y=1$, por lo tanto el único punto que tiene recta tangente horizontal es $(0;1)$

2.3.4 Funciones Inversa

La derivada de una función inversa, viene dada por:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

1. Sea f una función derivable en un intervalo (a, b) tal que $f'(x) = 1+f(x)^2$ para todo $x \in (a, b)$. Demuestre que f es invertible y determine $(f^{-1})'(x)$. **(I2-2018-2)**

Solución
Del enunciado tenemos que $f'(x) = 1 + f(x)^2 > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en dicho intervalo lo que implica que es inyectiva y por lo tanto invertible. Sabemos que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{1 + f(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}$$

2. Se sabe que $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ es invertible en $(-\infty, -2)$. Determine $(f^{-1})'(5)$. **(I2-2018-TAV)**

Solución
Por formula nosotros sabemos que se cumplo:

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(5))}$$

Por otra parte $f^{-1}(5) = -3$, por lo tanto

$$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(-3)} = \frac{1}{12}$$

3. La función $f(x) = 2x + e^x$ es una función invertible. Determine $(f^{-1})'(1)$. **(I2-2019-2)**

Solución Para resolver este ejercicio, debemos derivar $f'(x)$

$$f'(x) = 2 + e^x$$

Luego de esto usando la fórmula para la derivada de la inversa de una función, tenemos que

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

4. Dada la función $f(x) = x^3 + 4x - 7$, calcule $(f^{-1})'(-7)$ y $(f^{-1})''(-7)$ **(I2-2020-TAV)**

Solución
Recordemos que para funciones invertibles, tenemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Para determinar $f^{-1}(-7)$ resolvemos la ecuación $x(x^2+4) = 0$ cuya única solución es $x = 0$ y por lo tanto $f^{-1}(-7) = 0$. Además como $f'(x) = 3x^2 + 4$ tenemos que $f'(f^{-1})(-7)) = f'(0) = 4 \neq 0$. Luego

$$(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-7))} = \frac{1}{4}$$

Derivamos una segunda vez y obtenemos

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^2}$$

y como $f''(x) = 12x$ para todo $x \in \mathrm{R}$ entonces

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{-1}(-7))}{[f'(f^{-1}(-7))]^2} = \frac{f''(0)}{f'(0)^2} = 0$$

5. Se sabe que la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ es una función invertible con inversa f^{-1} Determine $(f^{-1})'(1)$

Solución
Recordemos que para funciones invertibles, tenemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Por otra parte $f(x) = 1$ si y solo si $x = 0$, por lo que $f^{-1}(1) = 0$, además $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ por lo tanto

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

6. Sea $h(x) = g(xg^{-1}(x))$ con g una función invertible tal que

x	1	-1	0	2	-2
$g(x)$	-2	2	3	1	5
$g'(x)$	1	4	2	6	3

Si g^{-1} denota la inversa de g, determine $h'(2)$. **(I2-2021-1)**

Solución
Primero debemos derivar $h(x)$, donde notamos que debemos usar la regla de la cadena quedando de la siguiente manera:

$$h'(x) = g'(x \cdot g^{-1}(x)) \cdot (xg^{-1}(x))' \Rightarrow (xg^{-1}(x))' = g^{-1}(x) + x(g^{-1})'(x)$$

$$h'(x) = g'(x \cdot g^{-1}(x)) \cdot g^{-1}(x) + x(g^{-1})'(x)$$

Ahora si reemplazamos la formula de la derivada de una función inversa, tendremos:

$$h'(x) = g'(x \cdot g^{-1}(x)) \cdot \left(g^{-1}(x) + \frac{x}{g'(g^{-1}(x))}\right)$$

Con esto ocuparemos la tabla y llegaremos al resultado:

$$h'(2) = g'(2 \cdot g^{-1}(2)) \cdot \left(g^{-1}(2) + \frac{2}{g'(g^{-1}(2)}\right), \qquad g'(g^{-1}(2)) = g'(-1) = 4$$

$$h'(2) = g'(2 \cdot -1) \cdot \left(-1 + \frac{2}{4}\right) = \frac{-3}{2}$$

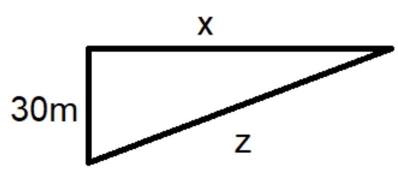
3 Aplicación de las derivadas

3.1 Razon de cambio

Durante la sección anterior vimos como derivar distintos tipos de funciones, ahora debemos ante un problema, lograr establecer una relación mediante una ecuación/función, en base a la información entregada de tal manera que podamos llegar a resultados. **TIP:** para esta sección es importante el manejo de derivada en el formato de $\frac{d}{dx}$, x como variable.

1. Un carabinero está parado a $30m$ de distancia de una carretera recta. Con su radar portátil determina que un auto que se esta desplazando por la carretera, acercandose a el carabinero, en el momento en que está a $50m$ de él, la distancia disminuye a una tasa de variación instatánea de $70Km/h$. Cuál es la velocidad del auto (en Km/h)? **(I1-2016-2)**

Primero lo que debemos es de cierta manera, imaginarnos el problema y dibujarlo, donde se definira $x = x(t)$ y $z = z(t)$ las distancias como se ven en el dibujo(siendo el punto verde, donde esta ubicado el carabinero):



Por lo que con esto, podemos establecer una relación por pitagoras donde:

$$z^2 = x^2 + (30m)^2$$

Derivando con respecto al tiempo t:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Reordenando nos queda

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{x} \cdot \frac{dz}{dt}$$

De pitagoras y el enunciado tendremos que cuando $z = 50m \rightarrow x = 40m$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{50m}{40m} \cdot 70Km/h = -87,5km/h$$

2. Un recipiente de agua tiene forma de cono invertido (con el vértice hacia abajo) de 6 m de radio y 10 m de altura. Si se llena con agua a razón de 5 litros por minuto, con qué rapidez varía la altura del agua en el recipiente cuando ésta llega a 4 m? **(I1-2017-1)**

Dado que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ es el volumen del cono, donde r es el radio y h la altura, además nos dan como dato que

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}} = 5$$

Dado que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ es el volumen del cono, donde r es el radio y h la altura, además nos dan como dato que

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}} = 5$$

Luego como nos piden calcular la $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$ en $h = 4$. Lo que hacemos es encontrar una relación entre h y r, para luego dejar V en torno a una sola variable. Por thales tendremos que

$$\frac{h}{r} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \to r = \frac{3h}{5}$$

Finalemnte con esti, lo remplazamos en la formula del volyumen y luego derivamos, podremos encontrar lo solicitado

$$V = \frac{3}{25}\pi h^3$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}} = (\frac{3}{25}\pi 3)h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$$

Donde de esta ecuación si sabemos $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{dt}}$ despejamos $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$, reemplazamos $h = 4$ y tendremos el resultado

$$5 = \frac{9}{25}\pi h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}} \to \frac{125}{144\pi} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{dt}}$$

3. El tiempo de vida media del radio es 1590 años. Una muestra de radio tiene una masa de 100mg. Determine el tiempo necesario para que la muesta en cuestión se reduzca a 30 gramos. Sugerencia: Si $m(t)$ representa la masa después de t años se tiene que $\dfrac{dm}{dt}$ =km $(I1 - 2017 - 2)$

Solución: Debemos nosotros saber, para resolver este ejercicio que la función de vida media sigue este formato:

$$m(t) = Ce^{kt}$$

Nosotros tenemos que

$$m(0) = Ce^0 = 100 \to C = 100$$

Por lo que ahora debemos calcular la constante K, esto se hace con la información entregada por el enunciado donde:

$$m(1590) = 50 = 100e^{kx} \to K = -\frac{\ln(2)}{1590}$$

Con esta información es posible responder a lo solicitado, recurriendo a invertir la función, de la siguiente manera:

$$m(t) = 100e^{-\frac{\ln(2)}{1590}\cdot t} = 30$$

$$e^{-\frac{\ln(2)}{1590}\cdot t} = 0.3$$

$$-\frac{\ln(2)}{1590}\cdot t = \ln(0.3)$$

$$t = -\frac{1590\cdot\ln(3)}{\ln(2)}$$

4. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón constante de $6cm/s$.¿Cuán rápido se incrementa el área del cuadrado cuando el área es de $16cm^2$? **(Control 2-2016-1)**

Solución:
Definimos como x el largo del cuadrado, entonces del enunciado podemos obtener que:

$$\frac{dx}{dt} = 6\ cm/s$$

Ahora por enunciado, debemos calcular, la derivada del area, que se rige por:

$$A = x^2 \Rightarrow 16 = x^2$$

$$x = 4$$

Entonces si derivamos la función del area tendremos:

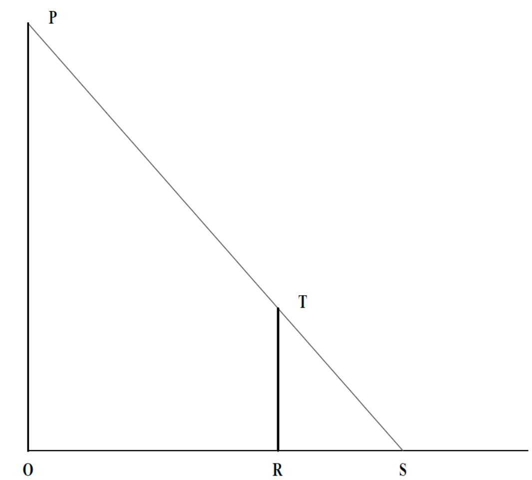
$$A' = 2x\cdot x'$$

Finalmente evaluamos en $x = 4$ y obtendremos lo solicitado:

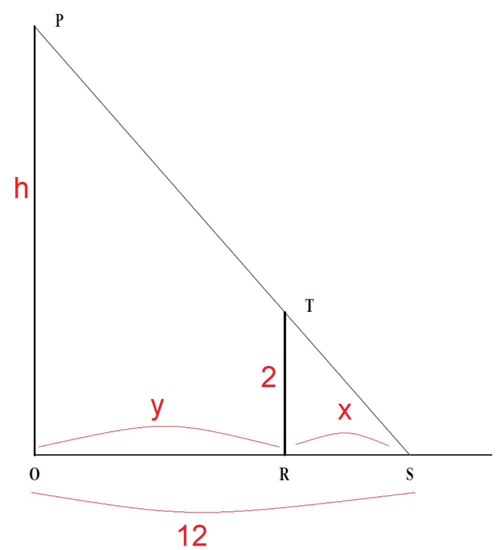
$$A' = 2\cdot 4\cdot 6 = 48cm^2/s$$

5. Un reflector en el piso alumbra un muro a 12m de distancia. Si un hombre de 2m de estatura camina del rector hacia el muro a una velocidad de $1.6m/s$. Con que velocidad disminuye la altura de su sombra en el muro cuando está a 4 m de la pared? **(I2-2013-1)**

Solución:
Se resuelve este ejercicio, haciendo un dibujo previo de la situación para lograr entender de mejor manera lo que se esta calculando:



En el dibujo tendremos $\overline{RT}$ representa la altura del hombre, $\overline{OP}$ sera su sombra proyectada en el muro por la luz que sale desde el punto S. Luego de esto definamos que $x = \overline{RS}$ la distancia del hombre al foco, $y = \overline{0R}$ e $h = \overline{OP}$ la proyección.



Ahora por thales, podemos hacer

$$\frac{h}{12} = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{24}{x}$$

Notamos que x y h son funciones del tiempo t derivamos obteniendo

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{24}{x^2} x'(t)$$

Pero por enunciado nos dicen que $x'(t) = 1.6 = \frac{8m/s}{5}$. Por lo que podemos reemplazarlo en la derivada anterior

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{24}{x^2} \cdot \frac{8m/s}{5} = \frac{-192}{5x^2}$$

Luego del dibujo nosotros podemos establecer que

$$x + y = 12$$

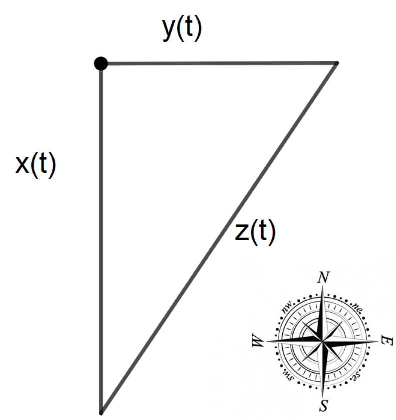
Por lo que ahora con eso podemos responder la pregunta reemplzando $y = 4$ y luego de esto reemplazar el valor de x en la ecuación de la derivada para obtener el valor de esta:

$$x = 12 - 8 = 4 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{24}{8^2} \cdot \frac{8m/s}{5} = -0.6m/s$$

Por lo que tendremos que h decrece a razon $0.6m/s$

6. Dos motocicletas parten desde un mismo punto. Una de ellas se dirige hacia el sur a $60km/hr$ y la otra hacia el este a 25km/hr ¿Con qué rápidez se incrementa la distancia entre ellas dos horas después de comenzar su trayecto? **(I2-2018-2)**

Solución: Primero debemos hacer un dibujo que represente la situación a la que nos enfrentamos:



Denotamos que $y(t)$ es la distancia recorrida por la moto que se dirige al este, después de t horas desde el punto inicial, y, análogamente, $x(t)$ a la distancia de la moto que se dirige al sur tenemos, del enunciado, que $y'(t) = 25$, y que $x'(t) = 60$. Por otra parte si $z(t)$ corresponde a la distancia entre las motos, después de t horas de iniciado el trayecto vemos que:

$$z^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$$

y derivando esta igualdad tenemos que

$$z(t)z'(t) = x(t)x'(t) + y(t)y'(t)$$
$$z(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{z'(t)}$$

Lo que debemos calcular es $z'(2)$, para eso observe que después de 2 horas la moto que se dirige al este ha avanzado $50km$ y la que va al sur $120\,km$, y por lo tanto la distancia entre ellas es de $130\,km$. reemplazando esta información en la última de las igualdades obtenemos que

$$z'(2) = \frac{25 \cdot 50 + 60 \cdot 120}{130} = 65km/hr$$

7. Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola de ecuación $xy = 8$. Cuando alcanza el punto $(4, 2)$, la coordenada y se incrementa con una rapidez de $3\,cm/seg$. ¿Cuán rápido está cambiando la coordenada x del punto en movimiento en ese instante? **(Examen-2018-2)**

Solución: ya que nos dan la curva, lo que debemos hacer es derivarla respecto al tiempo, por lo que debemos usar la regla del producto y la cadena:

$$\frac{dx}{dt}y + \frac{dy}{dt}x = 0$$

Reemplazando los datos obtenemos

$$2\frac{dx}{dt} + 4 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -6$$

Por lo tanto la cordenada x decrece a razón $6cm/seg$.

3.2 Teorema de Rolle

Este teorema se basa en que se deben cumplir 3 hipotesis para que este se pueda cumplir, que son:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces existira un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- En palabras simples, este teorema nos dice que si en cierto intervalo continuo(1) y diferenciable(2), donde se cumpla la tercera condición la derivada sera 0 en algun punto en el intervalo.

1. Demostrar que si f es una función dos veces derivable que admite 3 raíces distintas en un intervalos abiero I; entonces f'' tiene por lo menos una raíz en I: $(Control\, 2 - 2016 - 1)$

Solución: según la hipótesis, tenemos que existe un α, β y γ que cumplen lo siguiente en el intervalo de $x \in I$
$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$$
Con
$$\alpha < \beta < \gamma$$
Ahora si nosotros sabiendo esto, podemos llegar a aplicar el **Teorema de Rolle** que dice: Mientras haya un $f(a) = f(b)$ con $a, b \in I$ se cumplira
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0; \qquad c \in]a, b[$$
Por lo que aplicando el teorema, podemos primero hacerlo para α y β
$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(a) = 0; \qquad a \in]\alpha, \beta[$$
Enseguida hacemos lo mismo para β y γ
$$\frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} = f'(b) = 0; \qquad b \in]\beta, \gamma[$$
Finalmente llegamos a una expresión que nos permite demostrar según el **Teorema de Rolle**, ya que ahora encontramos que $f'(x)$ tiene dos raíces distintats por lo que podemos aplicarlo y así demostar que existiria por lo menos una raíz en I.
$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(c) = 0; \qquad c \in]a, b[$$
y según sabemos tanto b como a estan en el intervalo de I por lo que queda demostrado que existe un c tal que se cumpla $f''(c) = 0$ con $c \in I$ ■.

2. Demuestre que la función $f(x) = x^3 - 3x + b$ no puede tener dos raíces en el intervalo $[-1; 1]$ para cualquier valor de b: **(I2-2016-1)**

Solución: Si $f(x) = x^3 - 3x + b$ tuviera dos raíces en $[-1; 1]$; entonces existiría $c \in (-1; 1)$; tal que $f'(c) = 0$; por el **teorema de Rolle**.
Pero $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; y en $(-1; 1)$ la función derivada es negativa, es decir

$$x \in (-1, 1)(f'(x) < 0)$$

por lo tanto no existe tal c para todo b real. ■

3.3 Teorema del Valor Medio

Este teorema es una versión mas extendida del Teorema de Rolle, ya que primero tiene las siguientes condiciones:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces tendremos que $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Donde si notamos es el teorema de rolle, sin la tercera condición, que fuerza a que $f'(c) = 0$.

- Este teorema dicho de otra manera, es que sea una función $f(x)$ continua y diferenciable en un intervalo (a, b), se va a dar que un punto en el intervalo va a tener como derivada la pendiente de la recta formada por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

1. Sea $f(x)$ una función continua en $[0; 4]$ y derivable en $(0; 4)$ tal que $f(0) = 0$: Demuestre que si $f'(x) \leq x$ en $[0; 4]$; entonces $f(4) \leq 16$: **(Control 2-2016-1)**

   Solución: Si plantemaos el Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0, 4]$, ya que tenemos el valor de f en el límite inferior podemos aplicar el teorema.

   $$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{f(4)}{4} = f'(\alpha), \alpha \in (0, 4)$$

   Dado que $\alpha < 4$ tenemos que

   $$\frac{f(4)}{4} = f'(\alpha) \leq \alpha < 4$$

   Por lo que llegamos despejando podemos llegar a inferir

   $$f(4) \leq 16 \qquad \blacksquare$$

2. Demuestre que la ecuación **(I2-2019-2)**

   $$3x = \cos(x)$$

   tiene sólo una solución enR.

Solución: Al considerar la función $h(x) = 3x - \cos(x)$ observamos que h es continua en todo $\mathbb{R}$ y que

$$h(0) = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad h(1) = 3 - \cos(1) > 2$$

por lo tanto por **TVI** tenemos que al menos h tiene un cero o equivalentemente que la ecuación planteada tiene al menos una solución real.

Por otra parte, al suponer que tiene al menos dos soluciones a y b, tenemos que h cumple las hipótests del **Teorema de Rolle (o TVM)**, por lo tanto existe $c \in (a; b)$ tal que $h'(c) = 3 + \sin(c) = 0$, lo que es imposible, por lo tanto h tiene exactamente un cero real, es decir, la ecuación planteada tiene sólo una solución en $\mathbb{R}$. ■

3. Demuestre que el polinomio $P(x) = x^5 - 5x + b$, para cualquiera sea $b \in \mathbb{R}$, tiene a lo más una raíz real en $(-1; 1)$. **(I2-2011-1)**

Solución: Denotemos como

$$P'(x) = 5(x^4 - 1)$$

Por lo tanto para $x \in (-1; 1)$ tendremos que $P'(x) < 0$. Por lo que sera un función estrictamente decreciente, donde nosotros sabemos que puede tener a lo más una raíz real.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar y diferenciable. Demuestre que para todo $a > 0$ existe c tal que $f'(c) = \dfrac{f(a)}{a}$. **(I2-2011-tav)**

Solución: Sea $a > 0$: Si f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$; en particular es continua en $[-a; a]$ y diferenciable en $]-a; a[$: Aplicando el Teorema del Valor Medio, tenemos que existe $c \in]-a; a[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{f(a) - f(-a)}{2a} \frac{f(a) + f(a)}{2a} = \frac{f(a)}{a}$$

donde en la tercera igualdad utilizamos que la función es impar, es decir, $f(-a) = -f(a)$:

5. Sea f una función continua en $[2, 5]$, derivable en $(2, 5)$ tal que $f(2) = 0$ y tal que $1 \leq f'(x) \leq 4$. Demuestre que $3 \leq f(5) \leq 12$. **(I2-2012-TAV)**

Solución: Observe que podemos usar el Teorema del valor medio para la función f en el intervalo $[2, 5]$, es decir podemos garantizar que existe $c \in (2, 5)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{3}$$

lo que equivale a que existe $c \in (2, 5)$ tal que $f(5) = 3f'(c) + f(2)$ Por las hipótesis del problema tenemos que

$$1 \leq f'(c) \leq 4$$

ademas que $f(2) = 0$, por lo tanto

$$3 \leq f(5) \leq 12$$

6. Demuestre que para $0 < a < b$ se tiene la siguiente desigualdad **(I2-2013-TAV)**

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$$

Solución: Para entender mejor el problema, podemos manipular la expresión de la siguiente manera donde primero

$$1 - \frac{a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b}{a} - 1$$

$$\frac{b - a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b - a}{a}$$

$$\frac{1}{b} < \left(\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a}\right) < \frac{1}{a}$$

Enseguida notamos que podemos ocupar esta expresión y es muy similar por no decir exactamente igual a la del **T.V.M.** donde $f(x) = \ln(x)$ por lo que se deberia cumplir

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = f'(c) = \frac{1}{c}; \quad c \in (a, b)$$

Luego remplazzando esto en la desigualdad con $x = c \in (a, b)$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

Donde notamos que esto se cumple ya que $\dfrac{1}{x}$ es estrictamente dececiente por lo que queda demostrada la expresion

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1 \qquad \blacksquare$$

7. Use el Teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$ entonces **(I2-2018-2)**

$$\arctan(x) < x$$

Solución: Observe que $f(x) = \arctan(x)$ es una función derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto dado $x > 0$ podemos aplicar el **TVM** en el intervalo $[0; x]$, obteniendo que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{1 + c^2} < 1$$

Donde notamos que la expresión de la derecha es la derivada de x, por lo que su pendiente es menor y por lo tanto tenemos

$$\frac{1}{1 + x^2} < 1$$
$$\arctan(x) < x \qquad \blacksquare$$

8. Si c es un número real cualquiera, usando el TVM, pruebe que $f(x) = x^4 + 4x - c$ tiene a lo más 2 raíces reales.

Solución: Notemos que f es un polinomio de grado 4, así es una función continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, si $a < b$ satisfacen $f(a) = f(b)$, entonces por el TVM (o de Rolle) existe $x_0 \in (a; b)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Es decir, entre 2 raíces hay un punto crítico. Por lo tanto, si hubieran 3 raíces reales, digamos

$$x_1 < x_2 < x_3 \text{ con } f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$$

entonces existirián $x' \in (x1; x2)$ y $x'' \in (x_2; x_3)$ tales que

$$f'(x') = f'(x'') = 0$$

es decir, existirían dos puntos críticos. Por otro lado, es claro que

$$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1) = 4(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Como se cumple que

$$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

Por lo tanto, f tiene sólo un punto crítico, por lo que no podría tener más de dos raíces reales. Así, concluimos que f tiene a lo más 2 raíces reales. ■

9. Sea f una función dos veces derivable y tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(c) > 0$; con $a < c < b$: Demuestre que entre a y b existe un α para el cual $f'' < 0$:

Solución: Como f es dos veces derivable, entonces es continua y podemos utilizar T.V.M. para obtener:

- Existe α_1 entre a; y c tal que

$$\left(f'(\alpha_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right) = \frac{f(c)}{c - a}$$

como $f(c) > 0$ entonces $f'(\alpha_1) > 0$

Usando nuevamente T.V.M. para $f(x)$

- Existe α_2 entre c; y b tal que

$$\left(f'(\alpha_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} \right) = \frac{-f(c)}{b - c} < 0$$

Ahora debemos usar T.V.M. para $f'(x)$

- Existe α entre α_1; y α_2 tal que

$$\left(f'(\alpha_2) = \frac{f'(\alpha_2) - f'(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)$$

Con esto notamos que existe un $\alpha \in (a, b)$ tal que $f''(\alpha) < 0$. ■

10. Suponga que $f(0) = 5$ y que $f'(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f(x) = 2x + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$. **(I2-2017-2)**

Verdadero, ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene, por **Teorema del Valor Medio**

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c), \qquad c \in (0, x)$$

$$\frac{f(x) - 5}{2} = 2$$

$$f(x) - 5 = 2x$$

Lo que equivale a

$$f(x) = 2x + 5$$

11. Use el Teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$ entonces

$$\arctan(x) < x$$

Solución: Si nosotros que $f(x) = \arctan(x)$ es una función derivable en todo R, por lo tanto dado $x > 0$ podemos aplicar el TVM en el intervalo $[0, x]$, obteniendo que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = f'(c)$$

Ahora por definición tendremos que:

$$f(x) = \arctan(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ahora si por lo establecido en el T.V.M. podemos juntarlo y tener:

$$\underbrace{\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{1 + c^2} < 1}_{\dfrac{\arctan(x)}{x} < 1}$$

Por lo tanto podemos establecer que:

$$\arctan(x) < x$$

Que es lo que nos piden demostrar.

12. Demuestre que la desigualdad

$$e^x > x + 1$$

se cumple para cada $x > 0$.

Solución: Sea $x > 0$, definimos con la función:

$$f(x) = e^x$$

Ahora como f es continua y derivable en $(-\infty, \infty)$, si tomamos $a = 0, b = x$ particular, es continua en $[a, b] = [0, x]$ y derivable en $(a, b) = (0, x)$, Ahora que se cumplen las condiciones para usar el Teorema del Valor Medio (TVM), donde establecemos que existe un valor $c, c \in (a, b) = (0, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - e^0}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$$

es decir, existe un valor $c, c \in (0, x)$ tal que:

$$f'(c) = e^x - 1x$$

y,$f'(c) = e^c$, entonces, para algún valor $c, c \in (0, x)$

$$e^c = \frac{e^x - 1}{x}$$

Por lo tanto, como $0 < c < x$ y $f(x) = e^x$ es una función creciente, entonces se tiene que, $e^0 < e^c < e^x$ o $1 < e^c < e^x$, en particular,

$$1 < e^c$$

es decir,

$$1 < f'c)$$

entonces,

$$1 < \frac{e^x - 1}{x}$$

o, como $x > 0$, multiplicando por$x$la desigualdad,

$$x < e^x - 1$$

o, equivalentemente $x + 1 < e^x$, lo cual es lo solicitado por el enunciado.

3.4 máximos, minimos y grafica de funciones

En el momento que a nosotros nos entregan una función, nosotros podemos sacar una cantidad importante de datos como lo son la derivada, puntos criticos, monotonia de la funcion, asintotas, etc... entre otras. Para todo esto tomaremos como caso de ejemplo una función $f(x)$ que cumple con que:

- Encontrar puntos criticos:
  $$f(x) \Rightarrow f'(x) = 0$$
  Supongamos que $a, b\, y\, c$ son puntos criticos$(-\infty < a < b < c < \infty)$.

- Monotonia:

  Teniendo $f'(x)$ tendremos que:
  $$f'(x) > 0 \rightarrow \text{Creciente} \qquad f'(x) < 0 \rightarrow \text{Decreciente}$$
  Con la información del punto anterior podemos construir los intervalos: $(-\infty, a)$,(a, b),(b, c) y (c, ∞). Luego de esto lo llevamos a una tabla con al derivada:

	$-\infty, a$	a, b	b, c	c, ∞
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

  Esta información se lee de la siguiente manera:

  $f'(x) > 0$ en el intervalo de $(-\infty, a) \rightarrow$ Creciente.

  $f'(x) < 0$ en el intervalo de $(a, b)\ y\ (b, c) \rightarrow$ Decreciente.

  $f'(x) > 0$ en el intervalo de $(c, \infty) \rightarrow$ Creciente.

- Clasificar puntos criticos:

  Para este criterio tenemos dos tecnicas que son:

  1) Prueba de la primera derivada que se basa en lo siguiente:
     a) si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en c
     b) si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en c
     c) si $f'(x)$ no cambia de signo en c no hay ni máximo ni mínimo local.

     Por lo que en base al caso de ejemplo y los intervalos de monotinia tendriamos que
     - $f'(a)$ punto máximo local.
     - $f'(b)$ ni máximo ni mínimo local.
     - $f'(c)$ punto mínimo local.
  2) Prueba de la segunda derivada:
     a) Si $f''(x) > 0$ en un punto c, entonces f tiene un mínimo local en c.
     b) Si $f''(x) < 0$ en un punto c, entonces f tiene un máximo local en c.

- Concavidad:

  Esta determinada por la segunda derivada de la función $f(x)$ Donde si

  $$f''(x) > 0 \rightarrow \text{Concava hacia arriba} \qquad f''(x) < 0 \rightarrow concavahaciaabajo$$

  Tambien se le llama punto de inflexión, a un punto c donde en este se hace un cambio de la concavidad. Por ejemplo si para $x < c$ $f''(x) > 0$ y para $x > c$ $f''(x) < 0$ tendremos que ese es un punto de inflexión(lo mismo de forma alrevez).

- Asintotas:

  - Horizontales: Sea L una asíntota horizontal de la función $f(x)$ se debe cumplir

    $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

  - Verticales: Un asíntota vertical en un punto $x = a$, es una tal que se cumpla

    $$\lim_{x\to\ a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

  - Oblicuas(no se veran en esta sección): una asíntota oblicua es una función del tipo $y = mx + n$, donde se cumple que

    $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

    $$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

Con todo esto, podemos empezar a hacer los ejercicios.

---

1. Sea $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ función real con dominio $\mathbb{R} - \{1\}$: Determine intervalos de crecimiento y decrecieminto.**(Control 2-2016-1)**

Solución: Tenemos que

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-a)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}$$

	$-\infty, 0$	$0, 1$	$1, 2$	$2, \infty$
$2x$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Por lo tanto f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2; \infty)$ y es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

2. Sea f función derivable y tal que $f'(x) < 0$; $x \in \mathbb{R}$: Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)$ donde

$$g(x) = f(x^2)$$

Solución: Para encontrar los intervalos solicitados, debemos primero derivar la función, donde debemos usar regla de la cadena

$$g(x) = 2x \cdot f(x^2)$$

Ahora para determinar los intervalos de monotonia, hagamos la tabla:

	$-\infty, 0$	$0, \infty$
$2x$	$-$	$+$
$f(x^2)$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$

Notamos finalmente que :

- Creciente: $x \in (-\infty, 0)$
- Decreciente: $x \in (0, \infty)$

3. Sea $f(x) = 1 + xe^x + e^{-x}$. Bosqueje el gráfico de f indicando explícitamente los intervalos de monotonía, concavidad y asíntotas. **(I2-2019-2)**

Solución: Observemos primero que f es continua en todo R, por lo tanto no tendra asintotas verticales, luego para asintotas horizontales:

$$\lim_{x \to \mp\infty} (1 + xe^x + e^{-x}) = \infty$$

por lo tanto tampoco tiene asíntotas horizontales.
Luego para las asintotas oblicuas(que son de la forma $y = mx + n$), veremos si existe viendo si tiene pendiente:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{(1 + ex + e^{-x})}{x} = e$$

Ahora teniendo el m, debemos calcular el n

$$n = \lim_{x\to\infty} (1 + ex + e^{-x}) - (ex) = 1$$

por lo tanto la recta $y = 1 + ex$ es una asíntota oblicua.
Por otra parte si vemos la otra asintota oblicua($x \to -\infty$):

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + ex + e^{-x}}{x} = -\infty$$

Entonces no tiene asíntotas oblicuas para el extremo izquierdo del gráfico.
Para estudiar la cóncavidad y monotonía derivamos la función obteniendo que

$$f'(x) = e - e^{-x} \qquad e \qquad f''(x) = e^{-x}$$

Ahora para estudiar la monotonia tendremos que:

$$f'(x) = e - e^{-x} > 0 \Rightarrow e > e^{-x}$$

Donde alfinal esto es una desigualdad de los exponentes, si aplicamos ln() en la desigualdad:

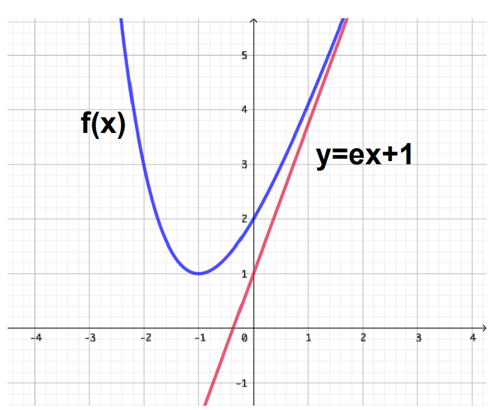
$$1 > -x$$

$$-1 < x$$

Con lo que tenemos que:

- Crecimiento $x \in (-1, \infty)$
- Decrecimiento $x \in (-\infty, -1)$

Finalmente la concavidad sera siempre hacia arriba, ya que $f''(x) > 0, \quad x \in \mathrm{R}$ Donde la grafica debe aproximarse a algo de este estilo:



4. Sea $f(x) = \dfrac{5x}{5x^4+3}$ **(I2-2010-1)**

   (a) Hallar los intervalos donde f es creciente y aquellos donde es decreciente.

   (b) Hallar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y aquellos donde es cóncava hacia abajo.

   (c) Encuentre los máximos y mínimos locales de f. Indique si posee máximos y mínimos absolutos y si existen encuéntrelos.

Solución:
a) Para encontrar los intervalos de crecimiento y decreciemiento, debemos derivar hacer la tabla

$$f'(x) = \frac{5(5x^4-3) - 5x\cdot(20x^3)}{(5x^4+3)^2} = \frac{15(1-5x^4)}{(5x^4+3)^2}$$

	$-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	$-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \infty$
$15(1-5x^4)$	$-$	$+$	$-$
$(5x^4+3)^2$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Ahora los intervalos de monotonia

- Creciente: $x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}})$
- Decreciente: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{5}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \infty)$

b)Nuevamente derivamos $f(x)$ y ocupar la tabla nuevamnte

$$f''(x) = \cdots\cdots = \frac{1500x^3(x^4-1)}{(5x^4+3)^3}$$

	$-\infty, -1$	$-1, 0$	$0, 1$	$1, \infty$
$1500x^3$	$-$	$-$	$+$	$-$
x^4-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$(5x^4+3)^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$

Por lo que ahora los intervalos de concavidad sera:

- Concava hacia arriba: $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$
- Concava hacia abajo: $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

c) Tenemos que para encontrar los minimos locales y maximos, debemos tener nuestros candidatos a estos que son:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

Ahora podemos ver en los cambios de signo, si es un maximo o minimo:

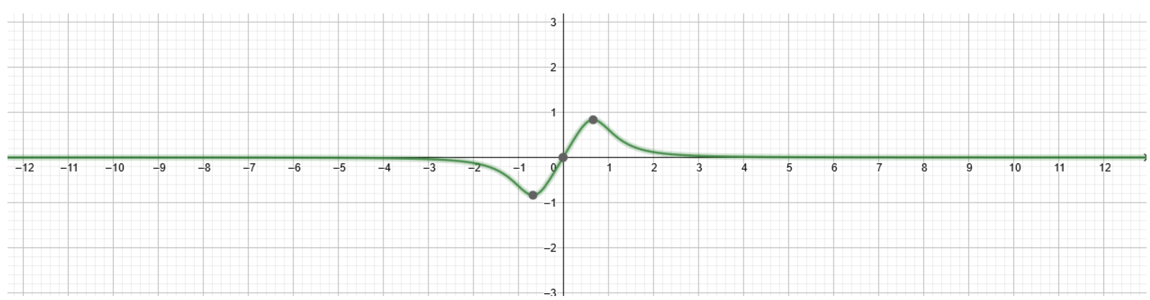
- Para x_1 notamos que
$$f'(x_1^-) < 0 \ \text{ y } \ f'(x_1^+) > 0$$
por lo que con esto comprobamos que es un minimo local. Pero este es ¿Este es absoluto o solo local?, para esto se puede dar explicacion, teniendo en cuenta que $f(x)$ es negativa en $x \in (-\infty, 0)$:

  - Por otro lado podemos ver que la asintota horizontal sera:
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$
Entonces descartamos la opción de la que la función no tengo minimo absoluto. Despues de esto, notamos que al tener un unico minimo local, esta es la unica opcion, ya que no hay cambios de monotonia en el intervalo de x antes del minimo local analizado, por lo que pasa a ser minimo absoluto.

- Para x_2 notamos que
$$f'(x_2^+) < 0 \ \text{ y } \ f'(x_2^-) > 0$$
por lo que con esto comprobamos que es un maximo local.Pero este es ¿Este es absoluto o solo local?, para esto se puede dar explicacion, teniendo en cuenta que $f(x)$ es positiva en $x \in (0, \infty)$:

  - Por otro lado podemos ver que la asintota horizontal sera:
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$
Entonces descartamos la opción de la que la función no tengo maximo absoluto. Despues de esto, notamos que al tener un unico maximo local, esta es la unica opcion, ya que no hay cambios de monotonia en el intervalo de x despues del maximo local analizado, por lo que pasa a ser maximo absoluto.

Una forma de ver esto de manera mas clara es mediante el grafico de $f(x)$



5. Sea f una función diferenciable en $(-\infty;\infty)$ tal que **(I2-2011-1)**

$$x^2 f(x) + \frac{f(x)^3}{3} = 9$$

(a) Determine $f'(x)$

(b) Encuentre los puntos críticos de f.

Solución:
a) Aca debemos derivar toda la ecuación en una primera instacia:

$$2xf(x) + x^2 f'(x) + f(x)^2 f'(x) = 0$$

Ahora debemos despejar $f'(x)$

$$f'(x)(x^2 + f(x)^2) = -2xf(x)$$

$$f'(x) = -\frac{2xf(x)}{x^2 + f(x)^2}$$

b) Finalmente los puntos criticos seran cuando:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, f(x) = 0$$

Pero notamos que en la ecuación inicial si reemplazamos con $f(x) = 0$ esto nos dara $0 = 9$ lo cual no es posible, por lo que $x = 0$ es el unico punto critico.

6. Analice (dominio, crecimiento, máximos y mínimo, concavidad y asíntotas) y realice el gráfico de la siguiente función: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$. **(I2-2011-TAV)**

Solución:
El dominio de $f(x)$ es

$$x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

Para encontrar los intervalos de monotonia, maximo y minimos debemos derivar la función

$$f'(x) = \frac{x(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})}{(\sqrt{x^2-4})^3}$$

Ahora debemos hacer la tabla a partir de los puntos criticos:

	$-\infty, -2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}, -2$	$2, 2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}, \infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 2\sqrt{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(\sqrt{x^2-4})^3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Con esto lo que tenemos es que la función:

- Crece: $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2, 2\sqrt{2})$
- Drece: $x \in (-2\sqrt{2}, -2) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$

Por otro lado los unicos puntos criticos son:

$$x_1 = -2\sqrt{2} \qquad x_2 = 2\sqrt{2}$$

Donde ambos puntos son minimos locales segun el criterio de analisis segun la primera derivada y la tabla.
Luego de esto para la concavidad necesitamos la segunda derivada que tendra por resultado:

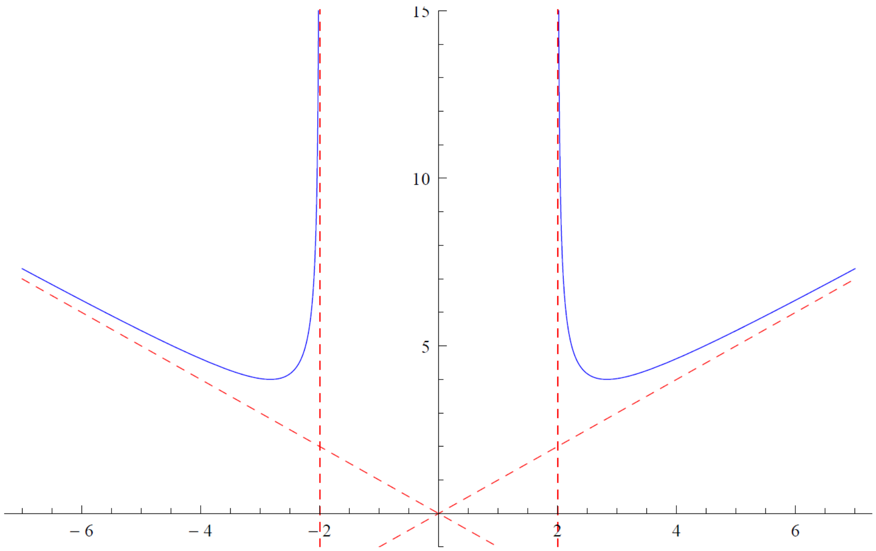
$$f''(x) = \frac{4x^2 + 32}{(\sqrt{x^2 - 4})^5}$$

Con esto notamos que $f''(x) > 0$ en todo el dominio de $f(x)$, por lo que la función es concava hacia arriba(convexa): $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.
Ahora debemos ver las asintotas de $f(x)$:

- verticales:
$$\lim_{x \to -2} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = \pm\infty$$
con esto $x = -2$ e $x = 2$ son asintotas verticales.
- Horizontales:
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$
Por lo tanto no hay asintotas horizontales
- Oblicuas:
-Para $x \to \infty$:
$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4} \cdot x} = 1$$
$$n = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$$
$y = x$ es una asintota oblicua.

-Para $x \to -\infty$:
$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4} \cdot x} = -1$$
$$n = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} - x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0$$
$y = -x$ es una asintota oblicua. Como conclusión tenemos que las asintotas oblicuas son:
$$y_1 = x \qquad y_2 = -x$$

Finalmente el grafico de la función sera:



7. Si a y b son números positivos, encuentre el máximo de la función $f(x) = x^a(1-x)^b$ en el intervalo $x \in [0,1]$.**(I2-2018-2)**

Solución: Para encontrar el maximo, primero debemos derivar la funcion:

$$f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1}$$

$$f'(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a - x(a+b))$$

Lo que debemos hacer ahora es $f'(x) = 0$, lo que nos lleva a

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = \frac{a}{a+b}$$

Ahora lo que debemos hacer es evaluar la función en cada uno dde los puntos y sabremos cual es el maximo de la función en el intervalo. Lo que resulta:

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(\cdot\frac{b}{a+b}\right)^b$$

Nótese que $0 < \dfrac{a}{a+b} < 1$, por lo que el punto crítico está en el interior del intervalo $[0,1]$. Comparando los valores de f en los tres puntos encontrados anteriormente, y como a y b son positivos, el valor máximo de f es:

$$x_3 = \frac{a}{a+b} \qquad f(x_3) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(\cdot\frac{b}{a+b}\right)^b$$

8. Considere la función **(I2-2018-2)**
$$f(x) = xe^{(1/x)}$$
   (a) Determine las asíntotas de f.
   (b) Determine intervalos de monotonía y, en caso de existir, los extremos locales de f.
   (c) Determine intervalos de concavidad y, en caso de existir, los puntos de inflexión

Solución:
a)Para las asintotas debemos verlas una por una:

- Verticales:
$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x}$$
Para este limite notamos que se forma $0\cdot\infty$, entonces debemos hacer es formar la forma en que logremos tener una forma de aplicar H'opital de la siguiente manera:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x}$$
el último de estos tiene la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$ luego por la regla del H'opital tenemos que
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2\cdot e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$
por lo tanto la recta $x = 0$ es asíntota vertical.
- Horizontales:
$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{1/x} = \pm\infty$$
- Oblicuas: Por otra parte tenemos que
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1$$
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} xe^{1/x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x}-1)$$
Ahora como tenemos al igual que en la asintot vertical un limite de la forma $0\cdot\infty$, formamos el limite para poder usar H'opital de $\dfrac{0}{0}$:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1/x^2\cdot e^{1/x}}{-1/x^2} = 1$$
por lo tanto $y = x+1$ es asíntota oblicua.

b) Para determinar la monotonia de una función debemos derivarla y ver los cambios de signo:
$$f'(x) = e^{1/x}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Los puntos criticos de la funcion:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

Ahora debemos hacer la tabla pero ver la monotonia:

	$-\infty, 0$	$0, 1$	$1, \infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
$e^{1/x}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

por lo tanto :

- Creciente en $x \in (-\infty, 0)$.
- Decreciente en $x \in (0, \infty)$.

Con esto tenemos que $x_1 = 0$ es un maximo local y $x_2 = 1$ un minimo local.
c) Determine intervalos de concavidad y, en caso de existir, los puntos de inflexión. Solución:

$$f''(x) = \frac{e^{1/x}}{x^3}$$

- cóncava hacia arriba en $x \in (0, 1)$.
- cóncava hacia abajo en $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

9. Determine los valores de a, b, $c \in \mathbb{R}$ de modo que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ posea un máximo local en $x = 3$, un mínimo local en $x = -1$ y un punto de inflexión en $(1, 11)$. **(I2-2017-2)**

Solución: Tenemos que $x = 3$, $x = -1$ determinan, el máximo y mínimo local, por lo tanto son puntos criticos que cumplen con:

$$f'(3) = f(-1) = 0$$

Entonces debemos derivar la $f(x)$, despues reemplazar los valores y igualarla a 0

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$27a + 6b + c = 0, 3a - 2b + c = 0$$

Ahora, tenemos 2 ecuaciones, pero 3 incognitas, tenemos dos formas de conseguir una tercera:

- Por enunciado se cumple que $f(1) = 11$, donde podemos formar:

$$a + b + c = 11$$

- Como sabemos que se cumple que el punto $(1, 11)$ es un punto de inflexión de f, lo que implica que

$$f''(x) = 6ax + 2b$$
$$f''(1) = 6a + 2b = 0$$

Con esto, logramos formar 3 ecuaciones con 3 incognitas de dos formas, por lo que al momento de resolverlos la solución es:

$$a = -1, b = 3, c = 9.$$

Es decir la función pedida es

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$$

notemos que $f(1) = 11$ y que $f''(x) = 6(-x + 1)$ luego

$$f''(3) = -12 < 0, f''(-1) = 12 > 0$$

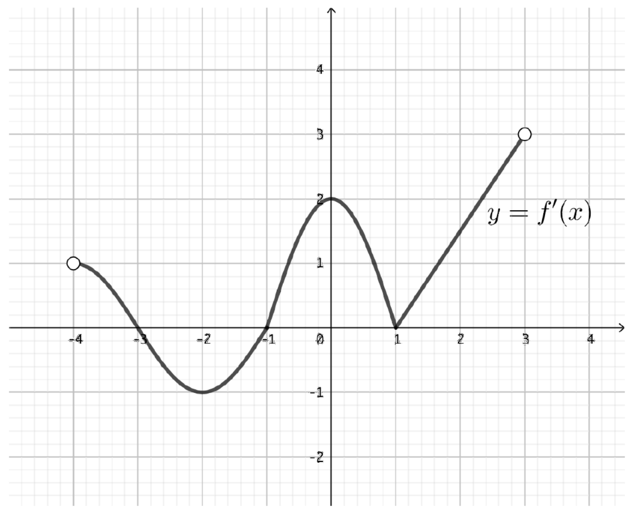
con lo cual se verifica que $x = 3$ y $x = -1$ determinan respectivamente valores máximos y minimos locales de f.

10. Verdadero o falso:

-Si las gráficas de las funciones f, g tienen puntos de inflexión en $x = a$ entonces la función $f \cdot g$ posee un punto de inflexión en $x = a$ **(I2-2017-2)**

Falso, ya que podemos considerar las funciones $f(x) = x^3, g(x) = -x^3$. Ambas funciones poseen un punto de inflexión en $x = 0$ sin embargo $f(x) \cdot g(x) = -x^6$ en $x = 0$ no.

11. Sea f una función derivable en $]-4,3[$ y tal que el gráfico de su derivada es el de la figura adjunta.**I2-2019-2** Determine dónde se alcanzan los extremos locales de f y los puntos de



inflexión. NOTA: Para referirse a un punto de la grafica de f cuya abscisa sea a, escriba $(a, f(a))$.

Teniendo el grafico de $f'(x)$ tenemos que ver cuales son los candidatos a ser puntos extremos, estos seran donde suceda que $f'(x) = 0$ y vemos que esto sucede para:

$$f'(-3) = f'(-1) = f'(1) = 0$$

Con esto tenemos que $x = -3, x = -1$ y $x = 1$ son posibles puntos donde se obtienen los extremos locales. Ahora llegando al siguiente paso haremos la tecnica de la tabla:

	$-\infty, -3$	$-3, -1$	$-1, 1$	$1, \infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

Con esto podemos concluir lo siguiente:

- $x = -3$ es un extremo local, máximo.
- $x = -1$ es un extremo local, mínimo.
- $x = 1$ es solamente un punto crítico.

Luego de esto tenemos los puntos de Inflexión, que son cuando se cumple que $f''(x) = 0$ donde esto se cumple en los puntos de $x = -2$ e $x = 0$.

3.5 L'Hópital

Durante la sección de limites, muchas veces se encontraron con limites que al ser evaluados daban $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Por lo que ahora veremos la regla de L'hopital para evaluar de forma mas rapida este tipo de problemas, esta regla se basa en que si tengo:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Uno puede derivar $f(x)$ y $g(x)$ para nuevamente evaluar el limite. En caso de no llegar a un valor y quedar de una forma indeterminada $0/0$ o ∞/∞, se puede ocupar L'Hopital hasta que se llegue a un valor constante(Siempre que al evaluar la fracción quede como una de las dos formas indeterminadas que se permiten usar L'Hopital).

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=...=C$$

Tip, muchas veces se encontraran con limites que al evaluarse, son de la forma

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=0\cdot\infty$$

Por lo que aca no podemos usar L'Hopital, pero si usamos algebra podremos llegar a una forma indeterminada que nos permita usar la L'Hopital:

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Donde notamos que aca si podemos usar L'Hopital, a pesar de que en un principio no se podia usar logramos adaptar el limite de tal forma de poder usar la regla. Tambien pueden encontrarse con otro tipo de problemas, pero siempre intentar de llevar a una forma de fracción que al evaluarse de $0/0$ o ∞/∞.

---

1. Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot(x))^{\sin(x)}$ **(I2-2010-1)**

   Para este ejercicio, no es aplicar L'Hopital directamente, primero debemos aplicar algebra para asi, lograr formar la fracción que al evaluarse se indetermine. Para esto nos basaremos en la siguiente regla:

   $$1=e^{\ln(1)}$$

   Ahora:

   $$\cot(x)^{\sin(x)}=e^{\ln(\cot(x)^{\sin(x)})}=e^{\sin(x)\cdot\ln(\cot(x))}$$

   Con esto tendremos que

   $$\lim_{x\to 0}(\cot(x))^{\sin(x)}=\lim_{x\to 0^+}e^{\sin(x)\cdot\ln(\cot(x))}$$

   Por leyes de los limites podemos hacer:

   $$\lim_{x\to 0^+}e^{\sin(x)\cdot\ln(\cot(x))}=e^{\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\cdot\ln(\cot(x))}$$

Entonces resolveremos el limite y luego elevaremos a e el valor. Notamos que sucede un caso familiar al Tip explicado al principio de la sección, por lo que la usaremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\cdot\ln(\cot(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot(x))}{1/\sin(x)}$$

Ocupamos la regla de L'Hopital y notamos que podemos evaluarlo llegando a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{-\cot(x)}\cdot\csc^2(x)}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x)\cdot\csc(x)}{\cot(x)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Finalmente este valor debemos elevarlo a e y asi tendremos el valor del limite solicitado inicialmente:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot(x))^{\sin(x)} = e^0 = 1$$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)^2}{1-\cos(3x)}$ **(I2-2015-1)**

A diferencia del limite anterior aca debemos llegar y aplicar la regla de L'Hopital ya que al evaluarlo este es de la forma 0/0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)^2}{1-\cos(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}\cdot 3\sin(3x)}$$

Con esto notamos que si evaluamos, nuevamente tendremos 0/0 entonces aplicamos L'Hopital nuevamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}3\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3\cdot(3\cos(3x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\cdot\sin(3x))}$$

Notamos que en este caso si es posible evaluar el limite y llegar a un valor que seria:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3\cdot(3\cos(3x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\cdot\sin(3x))} = \frac{2}{9}$$

3. Determine todos los valores de a y b de modo que se cumpla: **(I2-2021-1)**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)}{x^2} + \frac{2}{x} + b\right) = -3$$

Primero tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(ax)+2x+bx^2}{x^2}\right)$$

Se indetermina de la forma 0/0, por lo que podemos usar la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a\cos(ax)+2+2bx}{2x}\right)$$

Aca notamos que el denominador de la fracción se va a 0 entonces con el numerador debe suceder lo mismo para asi lograr ocupar L'Hopital nuevamente, evaluamos el numerador donde nos da:

$$\lim_{x\to 0} a\cos(ax)+2+2bx = a+2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

Con podemos usar nuevamente L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-2\cos(-2x)+2+2bx}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-4\sin(-2x)+2b}{2}\right)$$

Es bastante obvio que ahora el denominador no se indefinira, por lo que ahora evaluamos el limite y lo igualamos al valor que nos pedian que cumpliera inicialmente:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-4\sin(-2x)+2b}{2}\right) = \frac{2b}{2} = -3$$

Dondde con esto tendremos que

$$b = -3$$

Rescribiendo el limite inicial, hubiera sido de la forma:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(-2x)}{x^2}+\frac{2}{x}-3\right) = -3$$

4. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ **(I2-2015-1)**

Para este ejercicio debemos usar la propiedad de $1 = e^{\ln(1)}$ con el fin de poder usar la propiedad de los logaritmos:

$$x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^{\ln(x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}})} = e^{\dfrac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}}$$

Luego de esto podemos usar las leyes de los limites que nos permiten

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}}$$

Aca tenemos un limite que es de la forma de $\dfrac{\infty}{\infty}$, donde con esto podemos usar L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x\cdot e^x}$$

Este es nuevamente indeterminado, solo que de la forma $\dfrac{0}{0}$, por lo que podemos aplciar L'Hopital nuevamente y notamos que si se puede evaluar el limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x + xe^x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Con este resultado, debemos elevarlo a e y tendremos el valor del limite inicial:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\dfrac{1}{\ln(e^x-1)}} = e$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$ **(I2-2016-1)**

Notamos que tal como el Tip incial tenemos un limite de la forma de $0\cdot\infty$, por lo que debemos hacer un juego de algebra de la siguiente manera:

$$e^{-x}\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{1/e^{-x}} = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

Con esto tendremos el limite de la forma de ∞/∞, por lo que podemos usar L'Hopital y veremos que nos da un valor:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}e^x} = 0$$

6. $\lim_{x\to 0}\left(\cot(x)-\frac{1}{x}\right)$ **(I2-2016-1)** y **(I2-2017-1)**

Para este ejercicio debemos desarollar las fracciones de la siguiente manera:

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)}-\frac{1}{x}=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$$

Donde notamos ahora que si lo llevamos al limite este de es la forma de $0/0$, por lo que podemos aplciar L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

Nuevamente tenemos un limite de la forma $0/0$, aplicamos L'Hopital y lograremos evaluar el limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)-x\cos(x)}{2\cos(x)-x\cos(x)}=\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot(x)-\frac{1}{x}\right)=0$$

7. Calcular $\lim_{x\to 0^+}(\sin(x))^{\tan(x)}$ **(I2-2011-1)**

Para este ejercicio debemos usar la propiedad de $1=e^{\ln(1)}$ con el fin de poder usar la propiedad de los logaritmos:

$$\sin(x)^{\tan(x)}=e^{\ln(\sin(x)^{\tan(x)})}=e^{\tan(x)\cdot\ln(\sin(x))}$$

Ahora llevandolo al limite notamos que tendremos un limite como el del tip, por lo que debemos hacer algebra en este:

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin(x))^{\tan(x)}=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin(x))}{1/\tan(x)}}$$

Con esto, notamos que tenemos un limite de la forma ∞/∞ entonces aplicamos L'Hopital y lo evaluamos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{-\csc^2(x)}=\lim_{x\to 0^+}\cos(x)\cdot\sin(x)=0$$

Finalmente el valor del limite inicial, sera:

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin(x))^{\tan(x)}=e^0=1$$

8. $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)$ **(I2-2017-2)**

Desarrolamos la resta, de tal forma de dejarla como una sola fracción

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x\sin(x)+\sin(x)-x}{x\sin(x)}$$

De esta manera es mas facil notar que es un limite de la forma de $0/0$, aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\sin(x)+3x\cos(x)+\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

Nuevamente aplicamos L'Hopital, ya que es de la forma de $0/0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{6\cos(x)-3x\sin(x)-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}$$

Logramos ver que ahora no se indetermina y es posibl evaluar el limite, dando como resultado:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{6\cos(x)-3x\sin(x)-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = \frac{6}{2} = 3$$

9. Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(2\arctan(x^2)-\pi)$ **(I2-2011-tav)**

Nuevamente debemos jugar con el algebra, ya que tenemos un limite de la forma de $\infty\cdot 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\arctan(x^2)-\pi}{1/x^2}$$

Con esto tenemos un limite de la forma $0/0$, donde aplicando L'Hopital llegamos a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x}{1+x^4}}{\dfrac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-8x^4}{1+x^4}$$

Donde en este caso, no es necesario Ocupar L'Hopital para calcular el valor del limite:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-8x^4}{1+x^4}\cdot\frac{\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{1}{x^4}} = -8$$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$ **(I2-2018-1)**

Para este ejercicio debemos usar la propiedad de $1 = e^{\ln(1)}$ con el fin de poder usar la propiedad de los logaritmos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^b x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}\right]}$$

Por leyes de los limites y la propiedades de los logaritmos podemos hacer lo siguiente:

$$e^{\lim_{x\to\infty} bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}$$

Notemos que el limite es $\infty \cdot 0$, entonces haremos lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{1/bx}$$

Ahora tenemos un limite de la forma de $0/0$ aplicando L'Hopital llegamos a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{1/bx} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\dfrac{-a}{x^2}}{\dfrac{-1}{bx^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{abx^2}{x(x+a)}$$

Con esto tenemos un limite, que es resolvible de la forma clasica vista en la primera sección que seria:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{abx}{x+a}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = ab$$

Finalmente debemos elevar este resultado y tendremos el valor el limite inicial:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$$

11. Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)-x}{\arcsin(x)-x}$ **(I2-2012-1)**

Este limite es de la forma de $0/0$, aplicando L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\arcsin(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}$$

Reescribimos el resultado

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x) - 1) \cdot \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$$

Notamos que este limite nuevamente es de la forma de $0/0$, entonce aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(-\sin(x) \cdot \sqrt{1 - x^2}) - (\cos(x) - 1) \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)(1 - x^2) - (\cos(x) - 1)x}{x}$$

Debemos aplicar nuevamente L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)(1 - x^2) + 2x\sin(x) + x\sin(x) - (\cos(x) - 1)}{1}$$

Finalmente podemos evaluar el limite y llegar al valor:

$$\lim_{x\to 0} x^2\cos(x) - 2\cos(x) + 3x\sin(x) + 1 = -2 + 1 = -1$$

12. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} xe^{1/x}$ **(I2-2018-2)**

Es de la forma de $0 \cdot \infty$ por lo que debemos usar algebra para lograr aplicar L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{1/x}$$

Aplicando L'Hopital, podemos evaluar el limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(-1/x^2) \cdot e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{1/x} = \infty$$

13. $\lim\limits_{x\to 5} \tan\left(\frac{\pi x}{10}\right) \ln\left(2 - \frac{x}{5}\right)$ **(I2-2012-TAV)**

A primera vista, notamos que el limite es de la forma $0 \cdot \infty$, por lo que haciendo lo siguiente:

$$\lim_{x\to 5} \tan\left(\frac{\pi x}{10}\right) \ln\left(2 - \frac{x}{5}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{\ln\left(2-\frac{x}{5}\right)}{\cot(\frac{\pi x}{10})}$$

Con esto, tenemos un limite de la forma $0/0$ que nos permite usar L'Hopital:

$$\lim_{x\to 5} \frac{\ln\left(2-\frac{x}{5}\right)}{\cot(\frac{\pi x}{10})} = \lim_{x\to 5} \frac{\dfrac{5}{10-x} \cdot \dfrac{-1}{5}}{-\csc^2\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)\left(\dfrac{\pi}{10}\right)}$$

Este limite final es posible evaluarlo llegando a:

$$= \lim_{x\to 5} \frac{\dfrac{1}{10-x}}{\csc^2\left(\dfrac{\pi x}{10}\right)\left(\dfrac{\pi}{10}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{1 \cdot \frac{\pi}{10}} = \frac{2}{\pi}$$

El cual sera el valor del limite solicitado

14. Determine todos los valores de $a \in \mathrm{R}$ tales que:**(I2-2019-1)**

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$$

Para este ejercicio debemos usar la propiedad de $1 = e^{\ln(1)}$ con el fin de poder usar la propiedad de los logaritmos:

$$\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e^{\ln\left[\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x\right]} = e^{x\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}$$

Con esto tenemos que el limite es de la forma de $\infty \cdot 0$ entonces con algebra se podra llegar a una forma de $0/0$ y aplicar L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{2a}{(x+a)^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax^2}{(x-a)(x+a)}$$

Notamos que este ultimo limite es calculable por las tecnicas de la sección de limites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2ax^2}{(x-a)(x+a)} \cdot \frac{1/x^2}{1/x^2} = -2a$$

Con esto elevamos a e el valor del limite y lo igualamos con la condición inicial:

$$e^{-2a} = e \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin(x)}}{x^3}$ **(I2-2013-1)**

El limite es de la forma de 0/0 por lo que aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a)a^x - \ln(a)\cos(x)a^{\sin(x)}}{3x^2}$$

Nuevamente es de la forma de 0/0 por lo que aplicamos L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(a)a^x - \ln^2(a)\cos^2(x)a^{\sin(x)} + \ln(a)\sin(x)a^{\sin(x)}}{6x}$$

Nuevamente es de la forma de 0/0, aplicamos L'Hopital y lograremos evaluar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln^3(a)a^x - \ln^3(a)\cos^3(x)a^{\sin(x)} + 3\ln^2(a)\sin(x)\cos(x)a^{\sin(x)} + \ln(a)\cos(x)a^{\sin(x)}}{6}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin(x)}}{x^3} = \frac{\ln(a)}{6}$$

16. Calcule $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)}$ **(I2-2018-TAV)**

Este limite es de la forma de 0/0, por lo que por L'Hopital:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x/2)/2 - \sin(x)}{2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x/2)/2 - \sin(x)}{\sin(2x) - \sin(x)}$$

Nuevamente el limite es de la forma indeterminada de 0/0 entonces por L'Hopital:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{-\sin(x/2)/4 - \cos(x)}{2\cos(2x) - \cos(x)}$$

Ahora podemos evaluar el limite:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{-\sin(x/2)/4 - \cos(x)}{2\cos(2x) - \cos(x)} = \frac{-1/4 + 1}{3} = \frac{1}{4}$$

17. $\lim_{x\to 0} \frac{e^h - (1+h)}{h^2}$ **(I2-2017-2)**

Este limite es de la forma de 0/0, donde si aplicamos L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^h - (1+h)}{h^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^h - 1}{2h}$$

Donde aca podemos volver a usar L'Hopital ya que es de la forma 0/0

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^h - 1}{2h} = \lim_{x\to 0} \frac{e^h}{2}$$

Evaluando llegamos al resultado que es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2}$$

3.6 Optimización

Dentro de esta sección se les plantearan problemas que deben modelar mediante ecuaciones y funciones, donde aca deben lograr encontrar puntos máximos y mínimos para esta función que plantearon. Como recomendación les digo que hagan los siguientes pasos:

1. **Comprender que es lo que me estan pidiendo**, donde pueden plantearse algunas preguntas como: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?

2. **Hacer un diagrama/dibujo del problema** puede llegar a ser util para identificar ecuaciones y la función a modelar.

3. **Asignar variables o parametros** a ciertas cosas, como lo pueden ser la altura h, area como A, etc...

4. **Llevar estas variables a una función**, final que tenga una variable que debe ser la variable que buscamos maximizar o minimizar.

5. **Aplicar las tecnicas explicadas en la sección de máximos y mínimos**, aplicandola para llegar a la solución pedida.

---

1. De todos los rectángulos de diagonal $2\sqrt{2}$, determine el perímetro máximo que pueden tener estos. **(I2-2016-1)**

Definimos x e y como los lados del rectángulo, donde notamos que la diagonal estaría dada por:

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2}) = 8 \tag{15}$$

y la fórmula que nosotros buscamos maximizar es $P(x, y) = 2x + 2y$. Por lo que tenemos de despejar una variable respecto a la otra con la ecuación (15), donde lo hacemos de la siguiente manera:

$$y = \sqrt{8 - x^2} \Longleftrightarrow P(x) : 2x + 2 \cdot \sqrt{8 - x^2}$$

Por lo que ahora procedemos a derivar nuestra función $P(x)$ respecto a x y buscando sus puntos críticos:

$$P^{'}(x) = 2 + \frac{-2x}{\sqrt{8 - x^2}} = \frac{2\sqrt{8 - x^2} - 2x}{\sqrt{8 - x^2}} \longrightarrow P^{'}(x) = 0$$

Notamos que los valores cuando se cumple lo anterior es en $x = (\pm 2, \pm 2\sqrt{2})$, eliminamos inmediatamente 2, que son los valores negativos ya que no está en el dominio de nuestra función. Enseguida para comprobar cuál de los dos puntos un máximo ocupamos el método de la segúnda derivada:

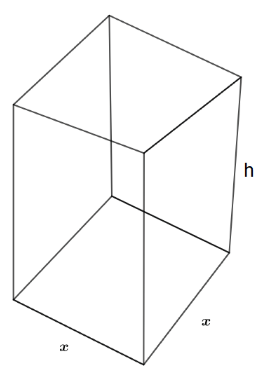
$$P^{''}(x) = \frac{-16}{(8 - x^2)3/2} < 0$$

Como es menor a 0 para x $\in \mathbb{R}$, por lo que tenemos que $P(x)$ es una función cóncava hacia abajo, por lo que el máximo absoluto de la función será en $x = 2$, por lo que calculamos y y el perímetro:

$$(2)^2 + y^2 = 8 \longrightarrow y = 2; \quad P(2,2) = 8$$

2. Se necesita construir una caja de base cuadrada, sin tapa, que debe tener un volumen de $32000cm^3$.**(I2-2021-1)**

Primero con los datos que nos entregan debemos hacer un dibujo/diagrama de la situación:



Con este dibujo/diagrama podemos realizar la siguiente relación, junto con la función que queremos minimizar (definimos x=lado de la base, h=altura):

$$A(x,h) = x^2 + 4xh; \quad V(x,h) = x^2 \cdot h = 32000$$

Enseguida para dejar el área solo en función de una variable despejamos h de $V(x,h)$: $h = \dfrac{32000}{x^2}$. Lo cual lo remplazamos en la función de área, donde luego de esto tenemos que derivar y encontrar sus puntos críticos:

$$A(x) = x^2 + \frac{(4x)32000}{x^2} \longrightarrow A^{'}(x) = 2x - \frac{128000}{x^2} = 0$$

$$2x^3 = 128000 \longrightarrow x = 40$$

Teniendo el único punto critico procedemos a ver si es un máximo o mínimo, mediante la segúnda derivada:

$$A^{''}(x) = 2 + \frac{256000}{x^3}; \quad A^{''}(40) = 2 + 4 > 0$$

Con lo que podemos concluir que es un mínimo. Ahora solo queda calcular h, con los valores de x:

$$h = \frac{32000}{40^2} = 20; \quad x = 40$$

3. Se debe construir un contenedor rectangular sin tapa de $10m^3$. La longitud de su base es dos veces el ancho. El material para la base cuesta 10 por metro cuadrado y el material para los costados cuesta 6 por metro cuadrado. Encuentre cuál es el menor costo que puede tener dicho. $(I3 - 2018 - TAV)$

Notamos que podemos escribir el volumen con la siguiente fórmula:

$$V(x,h) = 2x^2h = 10 \longrightarrow h = \frac{5}{x^2}$$

Junto con que el Costo (Área·costo por metro) se puede expresar de la siguiente manera, y remplazando el despeje de h llegamos a :

$$C(x,h) = 20x^2 + 6 \cdot (4xh + 2xh) \longrightarrow C(x) = 20x^2 + \frac{180}{x}$$

Por lo que ahora derivamos $C(x)$ y buscamos sus puntos críticos:

$$C^{'}(x) = 40x - \frac{180}{x^2} \longrightarrow C^{'}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

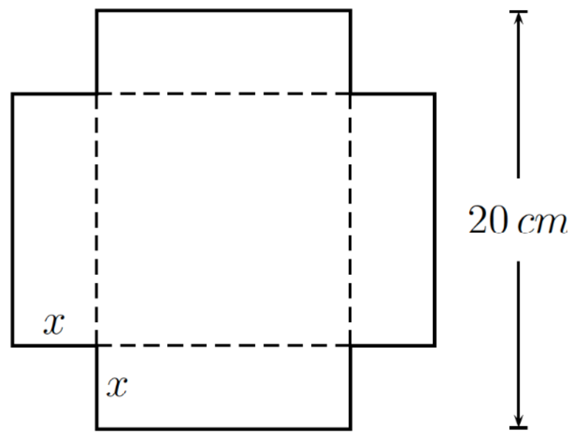
Comprobamos que es un punto mínimo con la segúnda derivada:

$$C^{''}(x) = 40 + \frac{369}{x^3} \longrightarrow C^{''}(\sqrt[3]{\frac{9}{2}} > 0$$

Por lo que Con esto comprobamos que es un punto mínimo y el costo sería:

$$C(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}) = 20(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}^2 + \frac{180}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}}}$$

4. Una lámina cuadrada tiene $20cm$ de lado. En sus esquinas se recortan cuadrados iguales y se doblan los bordes resultantes en un ángulo recto hacia arriba, formando una caja. ¿Cuál es el recorte que produce la caja de volumen máximo?



Lo que debemos hacer acá es primero definir la función que nos determinaría el volumen, lo cual lo hacemos definiendo también los lados que tendría nuestra caja:

$$V = x^2 * y$$

Ahora y lo debemos dejar expresado en forma de x, lo que podemos hacer debido a que se cumple la siguiente ecuación:

$$2x + y = 20 \rightarrow y = 20 - 2x$$

Por lo que ahora teniendo el volumen procedemos a derivarlo:

$$V(x) = x^2(20 - 2x) \rightarrow V'(x) = 40x - 6x$$

Enseguida lo que debemos hacer es identificar los dos x que nos darían $V'(x) = 0$ que serían $x = 0$ y $x = \frac{20}{3}$. **¿Pero cómo logramos identificar cuáles son los puntos máximos y mínimos?**, podemos hacerlo mediante el método de la segúnda derivada(También pude ocupar el método de la tabla, viendo el signo de la primera derivada) y ver su signo para estos valores:

$$V''(x) = 40 - 12x \rightarrow V''(0) = 40,\ V''(\frac{20}{3}) < 0$$

Con esto llegamos a la conclusión de que el punto $x = 0$ es un mínimo y el $x = \frac{20}{3}$ siendo este el recorte necesario.

5. Determine el punto sobre la recta $y = 2x + 3$ que está más cerca del origen.

Acá lo que debemos hacer es minimizar finalmente la función distancia que es:

$$D = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2}$$

Pero notamos que al final maximizar la función D, equivalente a maximizar la función:

$$D \to f(x, y) = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2$$

Por lo que procedemos a hacer esto, donde $(x_o, y_o) = (0, 0)$, pero ahora debemos dejar la variable y respecto a x lo que hacemos remplazando la recta que nos dan:

$$f(x, y) = (x)^2 + (y)^2 \to f(x) = x^2 + (2x + 3)^2$$

Finalmente encontrar el mínimo derivamos la función y encontramos su punto mínimo:

$$f^{'}(x) = 2x + 2 \cdot 2(2x + 3) \to f^{'}(x) = 0 \to x = \frac{-6}{5}$$

Para ver si es un punto mínimo, lo haremos con la segúnda derivada:

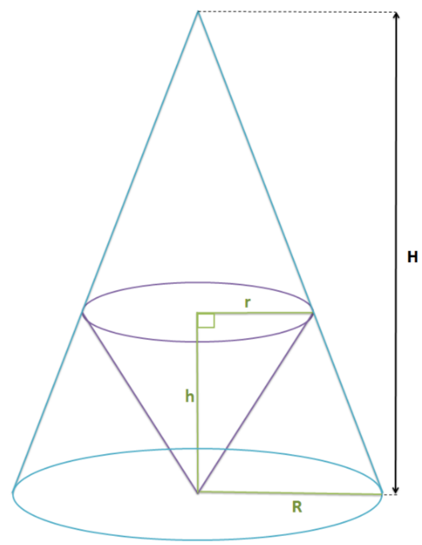
$$f^{''}(x) = 2 + 4 > 0 \to x = \frac{-6}{5} \leftrightarrow min$$

Por lo que la distancia mínima sería:

$$D = \sqrt{\left(\frac{-6}{5}\right)^2 + \left(2\left(\frac{-6}{5}\right) + 3\right)^2} \to D = \sqrt{\frac{117}{5}}$$

6. Un cono recto de altura h está inscrito en otro cono recto de mayor tamaño cuya altura es de H de manera que su vértice está en el centro de la base del cono más grande. Determine la altura h que maximiza el volumen del cono inscrito. **(I3-2018-2)**

Debemos primero realizar un diagrama de la situación para lograr hacer el análizis correcta:



Ahora debemos hacer alguna relación con las variables que tenemos y la función que queremos maximizar:

$$V(h,r) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Como tenemos dos variables debemos dejar un en expresión de las otras, por lo que hacemos thales, entre el triángulo que se forma del triángulo grande y el pequeño quedándonos la siguiente relación:

$$\frac{r}{H-h} = \frac{R}{H} \rightarrow h = \frac{H(R-r)}{R}$$

Enseguida remplazamos en V y derivamos para ver el valor máximo:

$$V(r) = \frac{\pi H(R-r)}{3R} \rightarrow V^{'}(h) = \frac{\pi Hr(2R-3r)}{3R}$$

$$V^{'}(r) = 0 \rightarrow r = 0, r = \frac{2R}{3}$$

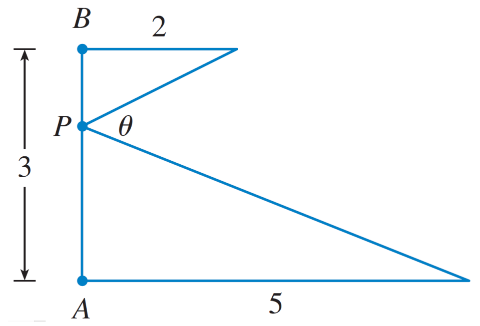
Ahora para ver si es un punto máximo vemos la segúnda derivada:

$$V^{''}(r) = \frac{\pi H(2R-6r)}{3R} \rightarrow V^{''}(0) > 0, V^{''}(\frac{2R}{3}) < 0$$

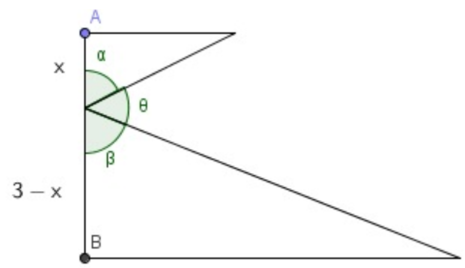
Por lo que notamos que es un punto máximo es con $r = \dfrac{2R}{3}$ y remplazando en la relación de Thales llegamos a:

$$h = \frac{H}{3}$$

7. ¿Cuánto debe medir el segmento AP de modo que se maximice el ángulo θ?.



Primero dividimos los ángulos que comparte θ, donde nos quedaría:



Enseguida notamos que se cumple la siguiente ecuación:

$$180^o = \theta + a + b \to \theta = 180 - a - b$$

Pero notamos que debemos dejar θ, en alguna expresión por lo que según podemos analizar cada triángulo llegamos a:

$$\tan(a) = \frac{2}{x} \to a = \arctan\frac{2}{x} \quad ; \tan(b) = \frac{5}{3-x} \to b = \arctan\frac{5}{3-x}$$

Remplazando esto en la ecuacioń llegamos a una función de θ que debemos derivar para ver máximo dependiendo de x:

$$\theta(x) = 180 - \frac{2}{x} - \frac{5}{3-x} \to \theta'(x) = -\left(\frac{1}{1+\frac{4}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^2}\right) - \left(\frac{1}{1+\frac{25}{(3-x)^2}} \cdot \frac{5}{(3-x)^2}\right)$$

Ahora igualamos a 0 la derivada para ver cuáles son sus puntos máximos:

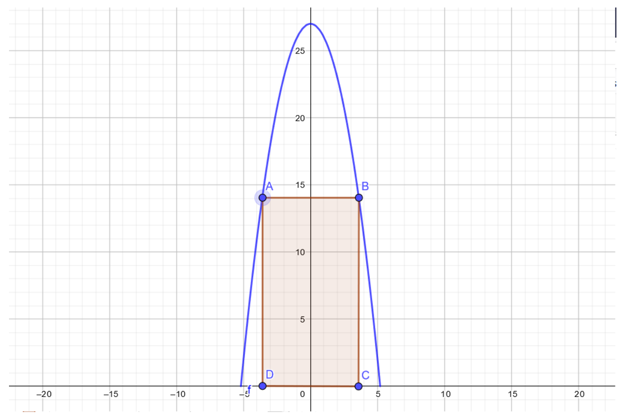
$$\theta'(x) = \frac{2}{x^2+4} - \frac{5}{9-6x+x^2+25} = 0 \to 5x^2 + 20 = 2x^2 - 12x + 68$$

$$3x^2 + 12x - 48 = 0$$

Acá les darán dos soluciones ($x \approx -6.472, 2.72$), deben tomar la positiva ya que el ángulo también debe serlo.

8. Hallar el área del rectángulo más grande con base inferior en el eje X y vértices superiores en la parábola $y = 27 - x^2$. **(I2-2017-1)**

Acá lo que primero, es hacer un bosquejo de la gráfica y el eje X:



Enseguida sabemos la ecuación de área:

$$A(x, y) = 2xy$$

pero debemos dejarla en x, por lo que remplazamos la función:

$$A(x) = 2x(27 - x^2) = 54x - 2x^3; \quad 0 < x < 3\sqrt{3}$$

Notar que tomamos el intervalo de x, ya que $y > 0$. Ahora procedemos a maximizar la función, por lo que derivando y calculamos sus puntos críticos:

$$A^{'}(x) = 54 - 6x^2 = 0 \longrightarrow A^{'}(x) = 0\,;\; x = 3$$

Enseguida comprobamos con la segúnda derivada:

$$A^{''}(x) = -12x \longrightarrow A^{''}(0) = 0,\; A^{''}(3) < 0$$

Por lo $x = 3$ es donde tendrá área máxima:

$$A(3) = 54(3) - 2(3^3) = 108$$

9. Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono de altura h y radio basal r. **(I2-2009-2)**

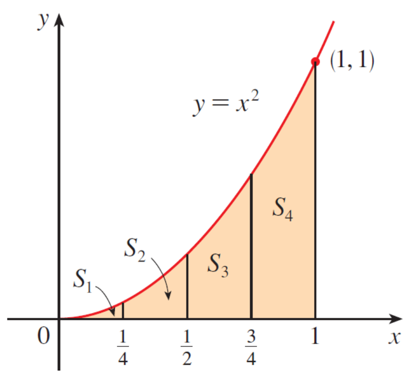
10. Determine las dimensiones del trapecio de área máxima que puede ser inscrito en un semicírculo de radio r. **(I2-2013-tav)**

4 Integrales

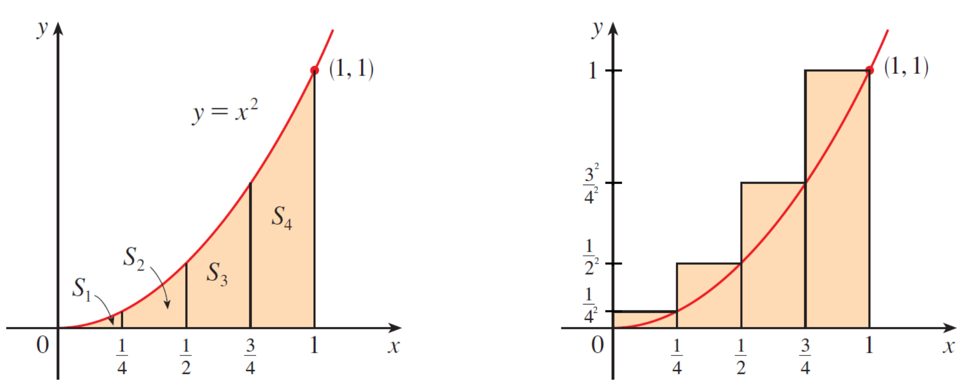
Antes de inciar esta sección es importante explicar algunas cosas y dar definiciones importantes:

- **Definición Antiderivada:** Una función F recibe el nombre de antiderivada de f sobre un intervalo I, si
$$F'(x) = f(x)$$
para todo x en I.

- ¿Como podemos encontrar el area bajo la curva de una función?, Esta pregunta es facil de resolver para ejercicios donde se forman figuras geometricas conocidas, pero para funciones como $f(x) = x^2$ notamos que es mas dificil encontrar el area bajo la curva para el intervalo $x = [0, 1]$. Donde, podremos ver que si lo graficamos seria algo como esto: Ahora una

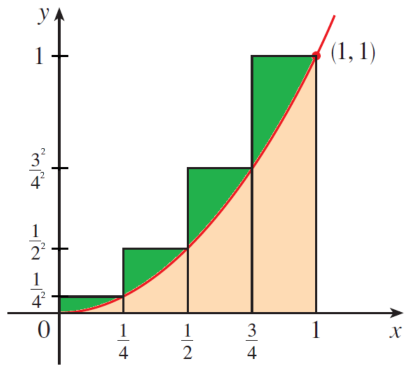


manera mas facil de resolver el problema del area, es representando el area bajo la curva como una suma del area de cierta cantidad de rectangulos entre cierto intervalo de la función x^2. Donde la altura para estos rectangulos puede ser tomada por dos criterios: el punto extremo derecho o izquierda, donde esto vendria siendo el valor de $f(x)$ para el valor de x en el extremo izquierdo del rectangulo y de igual manera para el derecho. En este caso el area lo dejamos como 4 rectangulos, con el metodo del punto extremo derecho: de la siguiente manera:

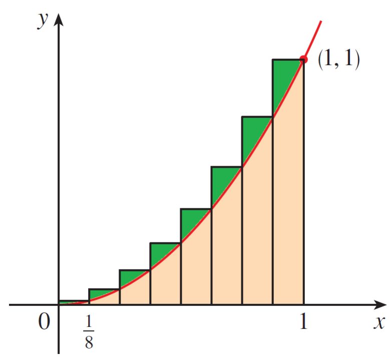


(a) (b)

Notamos que al ver esto, la forma de resolver el problema nos genera un error del area original que queriamos, que vendria dada por la sección que ahora es de color verde:

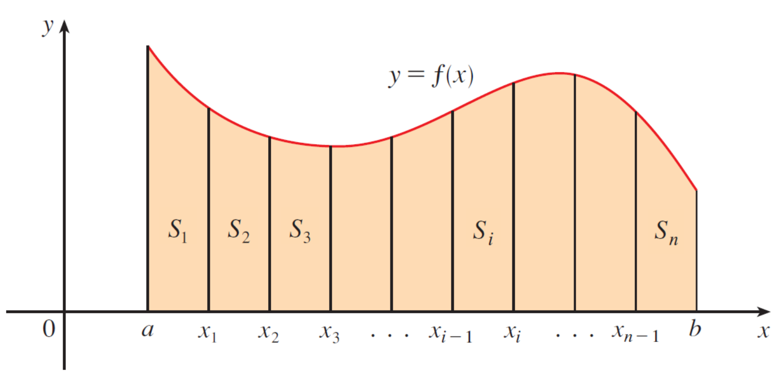


Si lo hacemos con una partición de 8 rectangulos para el area, donde si incluimos el error quedaria:



Donde es notorio que el error es menor, por que este viene dado por la cantidad de rectangulos y su ancho con el que representemos el area. Con esto mientras mayor sea la cantidad de rectangulos, mejor sera la aproximación con el area original, por lo que si tomamos como n el numero de rectangulos tendremos el siguiente caso:

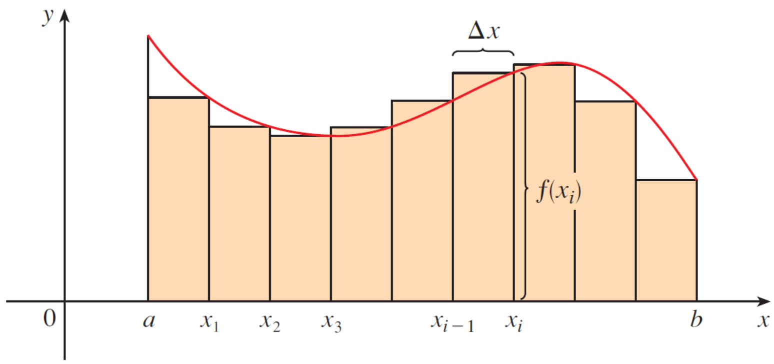
– Si denotamos S como la región del area bajo la curva de una función $y = f(x)$ en el intervalo $x \in (a, b)$, podemos hacer n particiones de esta región de la siguiente manera:



Con esto podemos denotar que si queremos que cada intervalo dentro de S sea igual podemos establecer:

$$\Delta = \frac{b-a}{n}$$

Luego haciendo la aproximación del area, por el metodo de los rectangulos con la aproximación por el extremo derecho, este graficamente sera:



Con esto tendremos que el area de S sera:

$$f(x_1) \cdot \delta x + f(x_2) \cdot \Delta + ... + f(x_n) \cdot \Delta x$$

Finalmente junto con que mientras mayor fuera el numero de particiones menor seria el error de la particion, tendremos la siguiente definición:
El área A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Donde esta ultima expresión se denotame como la **Suma de Riemann**

Esto nos lleva a una segunda definición y a un teorema que son:

- **Integral definida** Si f es una función continua definida para$a \leq x \leq b$ divida el intervalo a, b en n subintervalos de igual ancho. Haga que $x_0 = a, x_1, ...x_n = b$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1*, x_2*, ..., ...x_n*$ como los puntos muestras en estos subintervalos, de modo x_i*que se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f , desde a hasta b**, es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i*)\Delta x$$

  siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$

- **Teorema**: Si f es integrable entre $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i*) \cdot \Delta x$$

  Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_i = a + i\Delta x$$

4.1 Sumás de Riemann

1. Calcule el siguiente Límite:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \tag{16}$$

Primero debemos lograr identificar tanto nuestro $\triangle(x)$, por lo que reescribimos (16):

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n*1/n^2}{(n^2+k^2)*1/n^2}=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

Enseguida logramos identificar nuestro $\triangle(x)=\frac{k^2}{n^2}$, con b=1 y a=0. Por lo que podemos reescribir la primera sumatoria (1) como:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}$$

Donde nuestro $f(x)$ es continua en x $\in$ [0,1], por lo que ahora procedemos a calcularla:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

2. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n+2}{n}}+\cdots\sqrt{\frac{n+n}{n}}) \tag{17}$$

Lo que debemos hacer acá llevar el límite a una sumatoria:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)$$

Como en el ejercicio anterior procedemos a identificar $\triangle(x)$. Pero hay dos interpretaciones:

$$\triangle_1(x)=\sqrt{\frac{k}{n}};\quad f_1(x)=\sqrt{1+x}\quad o\quad \triangle_2\,(x)=\sqrt{1+\frac{k}{n}};\quad f_2(x)=\sqrt{x}$$

Solución 1: Teniendo elegido $\triangle_1(x)$ y $f_1(x)$, $b=1$ y $a=0$ llegando a:

$$\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

Solución 2: Teniendo elegido $\triangle_2(x)$ y $f_2(x)$, $b=2$ y $a=1$ llegando a:

$$\int_1^2\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(x)^{\frac{3}{2}}|_1^2=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

3. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{(1+n)/n} + e^{(2+n)/n} + \cdots + e^{(n+n)/n}\right) \tag{18}$$

Como en los ejercicios 1 y 2 debemos hacer el límite una sumatoria y luego reordenarla para encontrar así una expresión para llegar a una integral, donde esto sería:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(e^{(1+\frac{k}{n})}\right)$$

Llegando a $\triangle(x) = 1 + \dfrac{k}{n}$, con b=2 y a=1, y identificando $f(x) = e^x$, donde la reescribimos como integral:

$$\int_1^2 e^x \mathrm{d}x = e^x|_1^2 = e^2 - e^1$$

4. Escriba el siguiente límite como una suma de Riemann y calcule el valor de la respectiva integral definida:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5n^3k + \sqrt{7}k^4}{2n^5} \tag{19}$$

Para desarrollar este problema hay dos maneras o resolviendo la sumatoria en una sola o gracias a las propiedades de las sumatorias sepárarlo en dos y luego sumarlas. Acá realizaremos la segúnda por temás de comodidad:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5n^3k + \sqrt{7}k^4}{2n^5} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5n^3k}{2n^5}}_{c} + \underbrace{\lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{7}k^4}{2n^5}}_{d}$$

Para cada sumatoria identificamos respectivamente:

$$\triangle_c(x) = \frac{k}{n},\ f_c(x) = x \quad y \quad \triangle_d(x) = \frac{k^4}{n^4},\ f_d(x) = x^4$$

Enseguida llevándolo a las integrales llegamos a:

$$c = \frac{5}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}; \quad d = \frac{\sqrt{7}}{2}\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x \longrightarrow c = \frac{5}{2}\left(\frac{x^2}{2}|_0^1\right); \quad d = \frac{\sqrt{7}}{2}\left(\frac{x^5}{5}|_0^1\right)$$

Sumando c y d llegamos a:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{1-0}{2}\right) + \frac{\sqrt{7}}{2}\left(\frac{1-0}{5}\right) = \underbrace{\frac{5}{4}}_{c} + \underbrace{\frac{\sqrt{7}}{10}}_{d}$$

5. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{na}+\frac{1}{na+b}+\frac{1}{na+2b}+\cdots+\frac{1}{na+(n-1)b}\right) \tag{20}$$

Llevamos el límite a la siguiente sumatoria:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{na+(k-1)b}$$

Reordenando llegamos a:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{(na+(k-1)b)\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a+\frac{(k-1)}{n}b}\right)\frac{1}{n}$$

Donde logramos identificar $\triangle(x)=\dfrac{k-1}{n}$ $\quad y \quad$ $f(x)=\dfrac{1}{a+bx}$. Donde ahora llevamos todo esto a una integral:

$$\int_0^1\frac{1}{a+bx}\mathrm{d}x=\frac{\ln(a+bx)}{b}|_0^1=\frac{\ln(b+a)-\ln(a)}{b}$$

6. Escriba el siguiente límite como una suma de Riemann y calcule el valor de la respectiva integral definida: **(I3-2019-TAV)**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}} \tag{21}$$

Notamos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{(\sqrt{n^2+kn})\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$$

Identificamos a $\triangle(x)=\dfrac{k}{n}$ $\quad y \quad$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. Donde ahora llevamos todo esto a una integral:

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{1+x}|_0^1=2\sqrt{2}-2$$

7. Calcular el siguiente límite: **Control 3 2017-1**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^3}+\frac{(n+2)^2}{n^3}+\cdots\frac{(n+n)^2}{n^3}\right) \tag{22}$$

Llevando a una sumatoria el límite (7) y lo reordenaremos:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(n+k)^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}(1+\frac{k}{n})^2$$

Enseguida con la sumatoria ordenada llegamos a que $\triangle(x)=1+\frac{k}{n}$, $f(x)=x^2$, con b=2 y a=1. Ocupando todo esto lo llevamos a (7) a:

$$\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}|_1^2=\frac{8-1}{3}$$

4.2 Cotas

Algunas propiedas de Comparación de las integrales nos dicen lo siguiente:

1. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Demostrar las siguientes desigualdades:

1. **(I3-2014-2)**

$$3 \leq \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\mathrm{d}x \leq 5 \tag{23}$$

Notamos que la función $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x^2+2}$ es estrictamente Decreciente en el intervalo de x $\in$ [0,2], por lo que procedemos a aplicar Donde logramos notar lo siguiente:

$$b = 2; \quad a = 0; \quad m = f(2) = \frac{9}{6}; \quad M = f(0) = \frac{5}{2}$$

Por lo que Ahora remplazando logramos demostrar lo solicitado:

$$\frac{9}{6}2 \leq \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\mathrm{d}x \leq \frac{5}{2}2 \longrightarrow 3 \leq \int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\mathrm{d}x \leq 5 \quad \blacksquare$$

2. $(I3-2018-2)$

$$2 \leq \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x}_{\alpha} \leq 2\sqrt{2} \tag{24}$$

Para este ejercicio identificamos $f_1(x) = \sqrt{1+x^2}$, la cual es una función par, por lo que(10) es equivalente a plantear:

$$2 \leq \underbrace{\int_0^1 2\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x}_{\beta} \leq 2\sqrt{2}$$

Donde ahora $f_2(x) = 2\sqrt{1+x^2}$ es una función creciente en x $\in$ [0,1], por lo que llegamos a la conclusión de:

$$b = 1; \quad a = 0; \quad m = f(0) = 2; \quad M = f(1) = 2\sqrt{2}$$

Remplazando y teniendo en cuenta que $\alpha = \beta$:

$$(1-0)2 \leq 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \leq (1-0)2\sqrt{2} \longrightarrow 2 \leq 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{2} \quad \blacksquare$$

3.

$$\frac{3\pi}{9+\pi^2} \leq \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{2\pi}{3} \tag{25}$$

Notamos que nuestra $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ es una función par, por lo que la ecuación (13) es equivalente a:

$$\frac{3\pi}{9+\pi^2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Ahora para encontrar m y M, debemos hacer un análizis a la nuestra $f(x)$, la cual notamos que es una función decreciente ya que $\cos(x)$ y $\dfrac{1}{1+x^2}$ son funciones decrecientes en el intervalo de x $\in$ [0,3], por lo que llegamos a la siguiente conclusión:

$$b = \frac{\pi}{3}; \quad a = 0; m = f(\frac{\pi}{3}) = 2\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\pi^2}{9}}; \quad M = f(0) = 2\frac{1}{1+0}$$

Lo cual lo remplazamos en la propiedad conocida llegando a:

$$\frac{(\frac{\pi}{3}-0)2\frac{1}{2}}{1+\frac{\pi^2}{9}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{(\frac{\pi}{3}-0)2}{1} \iff \frac{3\pi}{9+\pi^2} \leq \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{2\pi}{3}\blacksquare$$

4.

$$\frac{4}{5} \leq \int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq 4 \tag{26}$$

Acá se repite el proceso del ejercicio anterior, donde notamos que nuevamente $f(x)$ es decreciente en el intervalo que se reestablecerá x∈[0,2], reescribimos la ecuación (14):

$$\frac{4}{5} \leq \int_0^2 \frac{2\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq 4$$

Junto con los valores que concluimos:

$$b = 2; \quad a = 0; \quad m = f(2) = \frac{2}{1+4}; \quad M = f(0)\frac{2}{1+0}$$

Remplazando en la propiedad ya conocida:

$$\frac{(2-0)2}{5} \leq \int_0^2 \frac{2\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq \frac{(2)2}{1} \iff \frac{4}{5} \leq \int_{-2}^2 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \leq 4\blacksquare$$

5. $(I3 - 2019 - TAV)$

$$\underbrace{\frac{2}{5}}_{\alpha} \leq \arctan(2) + \frac{\pi}{4} \leq \underbrace{3}_{\beta} \tag{27}$$

Como notamos que esta desigualdad no es tan obvia como el resto, por lo que analizaremos α y β por separado. Primero analizamos la función $f(x) = \arctan(2) + \frac{\pi}{4}$, con α:

$$\arctan(2) + \frac{\pi}{4} \geq \arctan(2) = \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

También siguiendo el análisis:

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \geq \int_0^2 \frac{1}{5}\mathrm{d}x = \frac{2}{5} \Longleftrightarrow \arctan(2) + \frac{\pi}{4} \geq \frac{2}{5}$$

Ya habiendo demostrado la primera parte de la desigualdad, procedemos a hacer lo mismo con el lado derecho:

$$\arctan(2) + \frac{\pi}{4} = \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_{-1}^2 \mathrm{d}x = 3 \blacksquare$$

6. $(I3 - 2018 - TAV)$

$$\frac{1}{14} \leq \int_1^3 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \leq 1 \tag{28}$$

Para este ejercicio identificamos $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$, la cual es una función decreciente para x $\in$ [1,3]. Con lo que concluimos:

$$b = 3; \quad a = 1; \quad m = f(3) = \frac{1}{28}; \quad M = f(1) = \frac{1}{2}$$

Remplazando:

$$\frac{3-1}{28} \leq \int_1^3 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \leq \frac{3-1}{2} \longrightarrow \frac{1}{14} \leq \int_1^3 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x \leq 1 \quad \blacksquare$$

7. $(I3-2017-2)$

$$\frac{3}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5}\mathrm{d}x \leq \frac{3}{5} \tag{29}$$

Para este ejercicio identificamos $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$, la cual es una función decreciente para x $\in$ [0,3]. Con lo que concluimos:

$$b = 3; \quad a = 0; \quad m = f(3) = \frac{1}{8}; \quad M = f(0) = \frac{1}{5}$$

Remplazando:

$$\frac{3-0}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5}\mathrm{d}x \leq \frac{3-0}{5} \iff \frac{3}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5}\mathrm{d}x \leq \frac{3}{5} \quad \blacksquare$$

Analizar cual integral es la que tiene mayor valor o si son iguales:

1. $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\mathrm{d}x, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x \tag{30}$$

Este ejercicio es básícamente hacer un análizis de las funciones de cada integral tomando $f(x) = \cos(x) \quad y \quad g(x) = \cos^2(x)$, donde debemos analizar correctamente cómo se comportan las funciones en cada intervalo. Acá notamos que tanto $f(x)$ como $g(x)$ son funciones positivas (en el intervalor x $\in [-\pi, \pi]$ y pares, por lo que ahora queda hacer el análizis de cual es mayor, donde en este caso es $g(x)$ ya que se cumple:

$$|f(x)| \leq 1 \quad y \quad |g(x)| \leq 1$$

Junto con esto a una función ser el cuadrado del otro y ser menores a 1 ambos, llegamos a la conclusión:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\mathrm{d}x \geq \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x$$

2. $$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x, \int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \tag{31}$$

Al igual que en el ejercicio anterior esto se trata de un análizis de ambas funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Para resolver esto aplicaremos cosas que nosotros deberíamos saber con anterioridad para x $\in$ [0,1]:

$$x^2 \leq x \iff \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x}$$

Con lo que concluimos que:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

4.3 Teorema Fundamental del Cálculo

Antes de empezar esta nueva sección, debemos dar a conocer algunas propiedades de las integrales:

- $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b cdx = c(b-a)$ c una constante
- $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$ c una constante
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x) - \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x) = \int_a^c f(x)dx$

Teorema Fundamental del Calculo:

- **Parte 1**: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces la función g definida por
$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leq x \leq b$$
es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $g'(x) = f(x)$
- **Parte 2**: Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
donde F es una antiderivada de $f(x)$, es decir una función tal que $F'(x) = f(x)$.

Tambien por otro lado, podemos tener una función $g(x)$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \int_{h(x)}^{j(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

Si ademas tenemos que $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ tendremos que $g(x)$

$$g(x) = F(j(x)) - F(h(x))$$

Al momento de derivadar $g(x)$, tendremos que usar la regla de la cadena de la siguiente manera:

$$g'(x) = F'(j(x))\cdot j'(x) - F'(h(x))h'(x) = f(j(x))\cdot j'(x) - f(h(x))\cdot h'(x)$$

Tip: Cuando les presenten una integral en la forma de que $g(x)$, lo que deben hacer es en cuentas resumidas es evaluar la función $f(t)$ en cada extremo y multiplicarlo por la derivada de la función de cada extremo. Esto mismo proceso se hace en la parte 1 del teorema que es:

$$g'(x) = f(x)\cdot(x)' - f(a)\cdot(a)' = f(x)$$

1. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\int_1^{x-1} f(t)\mathrm{d}t = \int_2^{x} \sin(t^2)\mathrm{d}t \tag{32}$$

Para este ejercicio podemos derivar a ambos lados, gracias a que f es continua y por TFC nos queda:

$$f(x-1) = \sin(x^2)$$

Enseguida haciendo el cambio de variable $u = x-1$, remplazamos:

$$f(u) = \sin((u+1)^2) \Longrightarrow f(x) = \sin((x+1)^2)$$

2. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\int_1^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t = \int_{x+1}^{x^2+1} e^{t^2}\mathrm{d}t + C \tag{33}$$

(a) Calcule el Valor de C.

(b) Determine $f(1)$.

(a) Para calcular C lo que hacemos es remplazar $x=1$, y así nos quedó:

$$\int_1^{1^2} xf(t)\mathrm{d}t = \int_{1+1}^{1^2+1} e^{t^2}\mathrm{d}t + C \Longrightarrow 0 = C$$

Por lo que $C = 0$

(b) Para encontrar $f(1)$ reescribimos la ecuación (18) y luego aplicamos TFC:

$$x\int_1^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x+1}^{x^2+1} e^{t^2}\mathrm{d}t + C \Longrightarrow \int_1^{x^2} f(t)\mathrm{d}t + x\cdot(2x)f(x^2) = (2x)\cdot e^{(x^2+1)^2} - (1)\cdot e^{(x+1)^2}$$

Enseguida si remplazamos $x=1$ llegamos a:

$$\int_1^{1^2} f(t)\mathrm{d}t + 1\cdot(2\cdot 1)f(1^2) = (2\cdot 1)\cdot e^{(1^2+1)^2} - (1)\cdot e^{(1+1)} \Longrightarrow 0 + 2\cdot f(1) = 2\cdot e^4 - e^4$$

Por lo que finalmente:

$$f(1) = \frac{e^4}{2}$$

3. Sea f un función no nula, y de clase C^1 (Derivadas continuas y existentes) tal que: .

$$\int_1^{x^3} t\cdot f'(t)\mathrm{d}t = \int_1^{x} t^5\cdot f(t^3)\mathrm{d}t; \quad f(3) = 2e \tag{34}$$

Determine $f(x)$.

Al f ser una función continua y C^1, podemos derivar y por TFC queda:

$$(3x^2) \cdot (x^3) \cdot f^{'}(x^3) = x^5 \cdot f(x^3) \Longrightarrow 3 \cdot f^{'}(x^3) = f(x^3); \quad x \neq 0$$

Enseguida primero hacemos el cambio de variable $u = x^3$, quedándonos:

$$3 \cdot f^{'}(u) = f(u)$$

y ahora sea $y = f(u)$ podemos remplazar de la siguiente manera:

$$3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = y \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{d}u$$

Notamos que tenemos diferenciales a ambos lados, por lo que aplicamos la integral a ambos lados de tal manera que nos queda:

$$\ln(|y|) = \frac{1}{3}u + C \Longrightarrow y = K \cdot e^{\frac{1}{3}u} \quad ; K \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Finalmente con la información inicial de $f(3) = 2e$, remplazamos para determinar K y así llegar a $f(x)$

$$f(3) = 2e = ke \Longrightarrow k = 2$$

$$f(x) = 2e^{\frac{x}{3}}$$

4. Encuentre una función f y constante C tal que:

$$6 + \int_c^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{x}, \quad 0 < x \tag{35}$$

Para encontrar C, tenemos un problema ya que no conocemos $f(t)$, por lo que podemos fácilitar las cosas si remplazamos $x = C$:

$$6 + \int_c^x \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t = 2\sqrt{C} \Longleftrightarrow \sqrt{C} = 3$$

$$C = 9$$

Enseguida teniendo ya el valor de C, para encontrar $f(t)$ derivamos y por TFC llegamos a:

$$0 + \frac{f(x)}{x^2} - 0 = \frac{2}{2\sqrt{x}} \Longleftrightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

5. Sabiendo que:

$$\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = e^{x^2}(x+1) \tag{36}$$

Calcular el valor de $f(1)$.

Para encontrar el valor solicitador, derivamos a ambos lados y por TFC nos queda:

$$f(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot (x+1) + e^{x^2}$$

Remplazando $x = 1$:

$$f(1) = 2e^1(2) + e^1$$
$$f(1) = 3e$$

6. Sea f una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$, continua. Si:

$$\int_0^{x^5} f(u)\mathrm{d}u = \int_1^{x+1} x^5 \cdot f(t)\mathrm{d}t \quad ; 0 < x \tag{37}$$

Y también:

$$f(2) = f^{'}(2) = 1$$

Determine $f^{'}(1)$.

Primero reescribimos la ecuación de la siguiente manera, para luego derivar ocupando TFC:

$$\int_0^{x^5} f(u)\mathrm{d}u = x^5 \int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t \Longrightarrow 5x^4 \cdot f(x^5) = 5x^4 \cdot \int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t + x^5 \cdot f(x+1)$$

Notamos que un logramos llegar a lo solicitado, por lo que debemos derivar nuevamente, pero también podemos reducir un poco la ecuación:

$$5 \cdot f(x^5) = 5 \cdot \int_1^{x+1} f(t)\mathrm{d}t + x \cdot f(x+1) \Longrightarrow 25x^4 \cdot f^{'}(x^5) = 5 \cdot f(x+1) + f(x+1) + x \cdot f^{'}(x+1)$$

$$25x^4 \cdot f^{'}(x^5) = 6 \cdot f(x+1) + x \cdot f^{'}(x+1)$$

Ahora si remplazamos $x = 1$, y con la información que nos da el enunciado, lograremos llegar a lo solicitado:

$$25 \cdot 1^4 \cdot f^{'}(1^5) = 6 \cdot f(1+1) + 1 \cdot f^{'}(1+1) \Longrightarrow 25f^{'}(1) = 6 + 1$$

$$f^{'}(1) = \frac{7}{25}$$

7. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\int_1^{x} \sin(x + t^2)\mathrm{d}t = \int_1^{x^3} f(t)\mathrm{d}t \tag{38}$$

Determinar $f(1)$.

Para este ejercicio notamos que la primera integral debemos sepárarla y esto lo haremos ocupando la fórmula: $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

$$\int_1^x \sin(x)\cos(t^2) + \cos(x)\sin(t^2)\mathrm{d}t = \int_1^{x^3} f(t)\mathrm{d}t$$

Lo cual es equivalente a:

$$\sin(x)\cdot\int_1^x \cos(t^2)\mathrm{d}t + \cos(x)\cdot\int_1^x \sin(t^2)\mathrm{d}t = \int_1^{x^3} f(t)\mathrm{d}t$$

Enseguida teniendo estas expresiones y como f es una función continua derivamos la ecuación, dándonos por TFC:

$$\cos(x)\cdot\int_1^x \cos(t^2)\mathrm{d}t + \sin(x)\cdot\cos(x^2) - \sin(x)\cdot\int_1^x \sin(t^2)\mathrm{d}t + \cos(x)\sin(x^2) = 3x^2\cdot f(x^3)$$

Finalmente podemos remplazar $x = 1$ en toda la ecuación dándonos:

$$\cos(1)\cdot\int_1^1 \cos(t^2)\mathrm{d}t + \sin(1)\cos(1) - \sin(1)\cdot\int_1^1 \sin(t^2)\mathrm{d}t + \cos(1)\sin(1) = 3\cdot f(1)$$

$$2\sin(1)\cos(1) = 3\cdot f(1) \Longrightarrow f(1) = \frac{2\sin(1)\cos(1)}{3}$$

8. Sea f función continua en $\mathbb{R}$, tal que: $(I3-2017-1)$

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = xe^{2x} - \int_0^x e^{-t}f(t)\mathrm{d}t \tag{39}$$

Encuentre $f(x)$

Lo que debemos hacer para calcular $f(x)$ es derivar respecto a x, donde por TFC nos da:

$$f(x) = e^{2x} + 2x\cdot e^{2x} - e^{-x}f(x) = e^{2x}(1+2x) - e^{-x}f(x)$$

Ahora se despeja $f(x)$ y tendremos nuestro resultado:

$$f(x) + e^{-x}f(x) = e^{2x}(1+2x) \Longrightarrow f(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{1+e^{-x}}$$

9. Si se cumple para $a > 1$: $(I3-2016-2)$

$$\int_a^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x^3(\ln(x) - \frac{1}{3}) \tag{40}$$

Encontrar $f(x)$.

Lo que debemos hacer para calcular $f(x)$ es derivar respecto a x, donde por TFC nos da:

$$2xf(x^2) = 3x^2(\ln(x) - \frac{1}{3}) + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2\ln(x) - x^2 + x^2 = 3x^2\ln(x)$$

$$f(x^2) = \frac{3x\ln(x)}{2}$$

Lo que es equivalente a:

$$f(x) = \frac{3\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})}{2}$$

10. Demuestre que si f es continua en R, entonces:

$$\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \tag{41}$$

Acá para demostrar la ecuación (26) la reordenamos y luego la derivamos:

$$x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x f(u)u\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \Longrightarrow \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \blacksquare$$

11. Si se cumple:

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = \cos(x) - \frac{1}{2} \tag{42}$$

Determinar c y $f(x)$

Para encontrar c remplazamos $x = c$:

$$\int_c^c f(t)\mathrm{d}t = \cos(c) - \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos(c) = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{\pi}{3}$$

Enseguida derivando la ecuación por TFC llegamos a:

$$f(x) = -\sin(x)$$

12. Sean:$(I3-2016-1)$

$$F(x)=\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad y \quad G(x)=\int_x^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \tag{43}$$

(a) Desmuestre que $F^{'}(x)=G^{'}(x)$ y consecuentemente $F(x)=G(x)$.

(b) Usar la parte (a) para llegar a:

$$\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}, \quad x>0 \tag{44}$$

(a) Primero debemos demostrar que $F^{'}(x)?=G^{'}(x)$, por lo que derivamos ambas funciones y luego las igualamos:

$$F^{'}=\left((-\frac{1}{x^2})\cdot\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\right)=\frac{-1}{1+x^2}\Longleftrightarrow G^{'}(x)=\frac{-1}{1+x^2}\ \blacksquare$$

Como tenemos dos funciones donde sus derivadas son iguales están siguen la relación de $F(x)=G(x)+C$, donde para encontrar esta constante C remplazamos en $x=1$:

$$F(1)=G(1)+C$$

$$\int_1^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_1^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t+C\rightarrow 0=0+C\longrightarrow C=0$$

$$F(x)=G(x)\ \blacksquare$$

(b) Para esta parte y para llegar a lo solicitado lo más fácil es integrar cada función por separado y luego juntarlas:

$$F(x)=\arctan(x)|_1^{\frac{1}{x}}=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}; \quad G(x)=\arctan(x)|_x^1=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$$

Y debido a lo demostrado en la parte **(a)**:

$$F(x)=G(x)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$$

$$\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}, \quad x>0$$

13. Encontrar una función f y una constante C tal que: $(Ex - 2009 - 1)$

$$\int_c^{x^2} \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log\frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1}{2}\log 2; \quad 0 < x < 1 \tag{45}$$

Primero para encontrar las dos cosas solicitadas, partimos buscando el valor de c, donde lo que hacemos es tomar $x = \sqrt{c}$:

$$\int_c^{c} \frac{f(t)}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log\frac{1+c}{1-c} - \frac{1}{2}\log 2 \longrightarrow 0 = \frac{1}{2}\log\frac{1+c}{1-c} - \frac{1}{2}\log 2$$

$$\log\frac{1+c}{1-c} = \log 2 \longrightarrow \frac{1+c}{1-c} = 2$$

$$1 + c = 2 - 2c \longrightarrow c = \frac{1}{3}$$

Luego de esto para encontrar f, ocupamos TFC derivando la ecuación (31) y nos queda:

$$\frac{2xf(x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)\cdot(1-x^2)}$$

Ahora solo queda hacer el despeje de $f(x^2)$ y hacer un cambio de variable $u = x^2$:

$$f(x^2) = \frac{(2x)(1+x^2)}{(2x)(1+x^2)\cdot(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x^2)}$$

$$f(u) = \frac{1}{(1-u)} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{1-x}$$

14. Si se tiene una función $F(x)$: $(I3 - 2009 - 1)$

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad ; 0 < x \tag{46}$$

Demostrar que $F(x)$ es una función constante y encontrar el valor de esta.

Primero debemos demostrar que $F(x)$, debemos llegar a que la derivada de esta función es 0, ya que es una función constante:

$$F^{'}(x) = \frac{1}{1+x^2} - \left((-\frac{1}{x^2})\cdot\frac{-1}{1+(\frac{1}{x})^2}\right) \Longleftrightarrow \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \blacksquare$$

Ya habiendo demostrado que F(x) es un valor constante, mediante su derivada, Enseguida debemos encontrar el valor de esta constante, por lo que remplazamos en $x = 1$:

$$F(1) = \int_1^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{1}}^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$$

15. Dada una función $f(x)$: $(I3 - 2014 - 1)$

$$f(x) = \int_0^x g(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \tag{47}$$

Comprobar que esta satisface la siguiente ecuación diferencial: $f^{''}(x) + f(x) = g(x)$

Al igual que en el ejercicio 6 de esta sección reordenamos $f(x)$:

$$f(x) = \sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t - \cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

Ahora para comprobar lo solicitado debemos derivar dos veces la ecuación:

$$f^{'}(x) = \cos(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \sin(x)g(x)\cos(x) + \sin(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t - \cos(x)g(x)\sin(x)$$

$$f^{'}(x) = \cos(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \sin(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

Derivando nuevamente:

$$f^{''}(x) = -\sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \cos^2(x)g(x) + \cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t + \sin^2(x)g(x)$$

$$f^{''}(x) = -\sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t + g(x)$$

Ya teniendo lo solicitado procedemos a comprobar la ecuación diferencial:

$$f^{''}(x) + f(x) = g(x)$$

$$(\sin(x) - \sin(x))\int_0^x g(t)\cos(t)\mathrm{d}t + (\cos(x) - \cos(x))\int_0^x g(t)\sin(t)\mathrm{d}t + g(x) = g(x)$$

$$g(x) = g(x)\ \blacksquare$$

16. Sea $f(x)$ una función continua y positivia, tal que:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = e^x + \arctan(x) + a \tag{48}$$

Determinar a y $f(x)$.

Lo que hacemos para calcular a remplazamos con $x = 0$ en la desigualdad:

$$\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = e^0 + \arctan(0) + a \iff a = -1$$

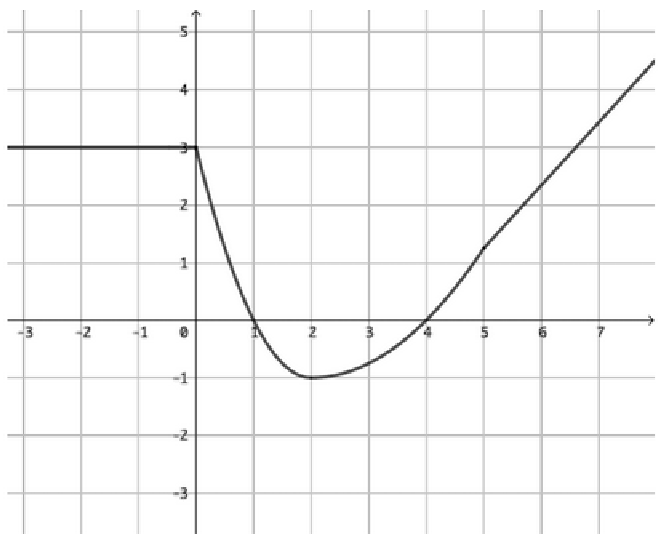
Enseguida para encontrar $f(x)$ debemos derivar a ambos lados y por TFC llegando a:

$$f(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2}$$

17. Calcular:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3)\mathrm{d}t}{x^4} \tag{49}$$

Notamos que el límite es de la forma de $\frac{0}{0}$, por lo que podemos aplicar l'Hopital y por TFC tenemos:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3)\mathrm{d}t}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

18. Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ donde f es una función: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico es el siguiente:



(a) Determine $g^{'}(x)$ en terminos de f.

(b) Determine intervalos de monotia y puntos críticos de g.

(c) Determine intervalos de concavidad y puntos de inflexión de g.

(a) Es evidente que en este ejercicio se debe simplemente derivar $g(x)$ ocupando TFC, por lo que $g^{'}(x) = f^{'}(x)$.
(b) Primero notamos que encontrar los puntos críticos es cuando $g(x) = 0$, donde son $x = (1, 4)$. Junto con esto debemos ahora definir los intervalos donde $g(x) > 0$ y $g(x) < 0$ que serían:
$$\text{Creciente } g(x) > 0,\ x \in (-\inf, 1) \cup (4, \inf); \quad \text{Decreciente } g(x) < 0,\ x \in (1, 4)$$
(c) Enseguida debemos analizar a $f^{'}(x)$, donde primero $g^{'}(x) = 0$ para $x = 2$ que sería un punto de inflexión. Finalmente analizando el gráfico llegamos a:
$$\text{Concavidad } \cup,\ g^{'}(x) > 0,\ x \in (2, \inf); \quad \text{Concavidad } \cap,\ g(x) < 0,\ x \in (1, 4)$$

19. Sea $F(x)$ la siguiente función:($Control\, 2 - 2018 - 1$):

$$F(x) = \int_{1}^{x^2} (1 - e^{t^2-1})\mathrm{d}t$$

Demostrar que $F(x)$ es creciente para x $\in$(-∞,-1).

Para demostrar que $F(x)$ es creciente debemos, derivar la función y por TFC:

$$F^{'}(x) = 2x(1 - e^{x^4-1})$$

Enseguida lo que debemos probar es lo siguiente para x $\in$(-∞,-1):

$$2x(1 - e^{x^4-1}) > 0$$

dado que $2x < 0$ para x $\in$ (-∞,-1), se debe cumplir que $(1 - e^{x^4-1}) < 0$:

$$(1 < e^{x^4-1}) \iff 1 < x^4$$

Y como esta última se cumple para los valores de x, queda demostrado que $F(x)$ es creciente para x $\in$(-∞,-1).

20. Calcular:

$$lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (2 + t^2 + \sin^2(t))^{100} \arctan(t)\mathrm{d}t}{1 - \cos(x)} \tag{50}$$

Acá notamos que tenemos una fracción de tipo $\dfrac{0}{0}$ por lo que podemos hacer uso de la tecnia de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (2 + t^2 + \sin^2(x))^{100} \arctan(x)\mathrm{d}t}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(2 + x^2 + \sin^2(x))^{100} \arctan(x)}{\sin(x)}$$

Notamos que nuevamente tenemos una fracción de tipo $\dfrac{0}{0}$, por lo que debemos aplicar nuevamente l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2 + x^2 + \sin^2(x))^{100} \arctan(x)}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{100(2x + 2\sin(x)\cos(x))(2 + x^2 + \sin^2(x))^{99} \arctan(x) + \dfrac{(2 + x^2 + \sin^2(x))^{100}}{1 + x^2}}{\cos(x)} = 2^{100}$$

4.4 Integrales indefinidas y la Regla de sustitución

En la sección anterior vimos la integrales definidas(los extremos sobre los cuales se evalua), pero en esta sección veremos mas en detalle integrales indefinidas y la regla de la sustitución sobre estas(tambien sirve para definidas).

Integral indefinida: En estas integrales, donde no hay que evaluar la antiderivada de la función en cuestión se denotan de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ y C una constante.
La siguiente tabla tiene las integrales indefinidas que deberian saber:

- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
- $\int k\,dx = kx + C$
- $\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln|a|} + C$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
- $\int \sec^2(x) = \tan(x) + C$
- $\int \csc^2(x) = -\cot(x) + C$
- $\int \sec(x)\tan(x) = \sec(x) + C$
- $\int \csc(x)\cot(x) = -\csc(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$
- $\int -\frac{1}{1+x^2}dx = \cot^-1(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x) + C$
- $\int -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \csc^-1(x) + C$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arcsec}(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C$
- $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + C$
- $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + C$

La Regla de sustitución:

- En Integrales Indefinidas: Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

- En <u>Integrales definidas</u>: Si tenemos $g'(x)$ una función $[a,b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$ entonces

$$x = a \to u = g(a) \qquad x = b \to u = g(b)$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

1. Calcule las siguientes integrales:

(a) $\int \sqrt{\cot(x)} \csc^2(x) \mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{e^x}{e^x+1} \mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{x}{1+x^4} \mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{2-x^2}{(x^3-6x+1)^5} \mathrm{d}x$ $(I3-2014-TAV)$

(e) $\int \tan(x)\ln(\cos(x)) \mathrm{d}x$ $(I3-2017-1)$

(f) $\int \frac{x^3+x}{(x^4+1)} \mathrm{d}x$ $(I3-2016-1)$

(g) $\int \frac{2\cos(x)\sin(x)}{(1+\cos^2(x))} \mathrm{d}x$ $(I3-2019-1)$

(a) Notamos que dentro de la integral tenemos la función y también su derivada por lo que podemos hacer el cambio de variable:

$$u = \cot(x); \quad du = -\csc^2(x)dx$$

Remplazando notamos que llegamos a:

$$\int \sqrt{u}\mathrm{d}u = -\frac{2u^{3/2}}{3} + C = -\frac{2\cot(x)}{3} + C$$

(b) Al igual que en el ejercicio (a) logramos identificar una función y su derivada, por lo que hacemos el cambio de variable:

$$u = e^x + 1; \quad \mathrm{d}u = e^x \mathrm{d}x$$

Remplazamos:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln(u) + C = \ln(e^x+1) + C$$

(c) A diferencia de los otros ejercicios, en este no es tan directo, pero notamos que si $u = x^2$ tenemos la derivada en la parte de arriba por lo que remplazando llegamos a:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\arctan(u)}{2} + C = \frac{\arctan(x^2)}{2} + C$$

(d) En este ejercicio notamos a simple vista que la función de abajo tiene por derivada la parte de arriba de la fracción por lo que hacemos:

$$u = x^3 - 6x + 1; \quad \mathrm{d}u = 3x^2 - 6\mathrm{d}x$$

y Enseguida remplazando tenemos que:

$$\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^5} = \frac{-1}{12u^4} + C = \frac{-1}{12(x^3 - 6x + 1)} + C$$

(e) Tomamos $u = \ln\cos(x); \to \mathrm{d}u = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x$, notamos que logramos remplazarlo en la integral por lo que nos da:

$$\int \tan(x)\ln(\cos(x))\mathrm{d}x \Longrightarrow \int -u\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u^2 + C$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\cos(x))^2 + C$$

(f) Primero para trabajar la integral la separamos en dos:

$$\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{x^3}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{x}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}x}_{I_2}$$

Calculando I_1, tomamos $u = x^4 + 1; \quad \mathrm{d}u = 4x^3$:

$$\int \frac{x^3}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{ln(u)}{4} + C\frac{x^4 + 1}{4} + C_1$$

Luego notamos que I_2 es una integral calculada en **(c)** que es:

$$I_2 = \frac{\arctan(x^2)}{2} + C_2$$

Por lo que:

$$\int \frac{x^3 + x}{(x^4 + 1)}\mathrm{d}x = \frac{ln(u)}{4} + \frac{x^4 + 1}{4} + C_1 + \frac{\arctan(x^2)}{2} + C_2$$

(g) En este ejercicio notamos que es similar al **(d)** ya que tiene la deriva y la función, por lo que hacemos:

$$u = 1 + \cos^2(x) \to \mathrm{d}u = 2\cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

Remplazando llegamos a:

$$\int \frac{2\cos(x)\sin(x)}{(1 + \cos^2(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln(u) + C = \ln(1 + \cos^2(x)) + C$$

2. Demostrar:
$$\int_0^1 x^m(1-x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n(1-x)^m \mathrm{d}x \tag{51}$$

Lo que debemos hacer acá es desde la premisa de la primera integral llegar a la segúnda, donde lo que haremos será hacer un cambio de variable con $u = x - 1$:

$$u = 1 - x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x; \quad x = 0 \to u = 1; \quad x = 1 \to u = 0$$

Enseguida remplazando todo esto en la integral, cambiando los límites de integración y aplicando las propiedades de las integrales llegamos a:

$$-\int_1^0 (1-u)^m u^n \mathrm{d}u = \int_0^1 (1-u)^m u^n \mathrm{d}u$$

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n \mathrm{d}x \blacksquare$$

Hay que recordar que en el último paso podemos remplazar x como u ya que estamos en una integral definida.

3. Sea f una función continua y par, definida en $\mathbb{R}$, tal que:

$$\int_a^b x \cdot f(x)\mathrm{d}x = C$$

Determinar el valor de:
$$\int_{-a}^{-b} x \cdot f(x)\mathrm{d}x \tag{52}$$

Con la información dada, notamos que las dos integrales son casí identifica excepto por los límites de integración por lo que planteamos:

$$u = -x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x; \quad x = -a \to u = a; \quad x = -b \to u = b$$

Ahora llegamos a:
$$\int_a^b -u \cdot f(-u) \cdot -\mathrm{d}u = \int_a^b u \cdot f(-u)\mathrm{d}u$$

Enseguida como sabemos que $f(x)$ es una función par:

$$\int_a^b u \cdot f(-u)\mathrm{d}u = \int_a^b u \cdot f(u)\mathrm{d}u$$

Donde esta integral la conocemos del enunciado por lo que:

$$\int_{-a}^{-b} x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b u \cdot f(u)\mathrm{d}u = C$$

4. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica, con periodo T $\in \mathbb{R}$. Tal que:

$$\int_{T-a}^{T} f(x)\mathrm{d}x = C$$

Determinar el valor de:

$$\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x \tag{53}$$

Notamos que la diferencia entre los límites de integración entre la primera y segúnda integral son idénticos(a), y junto con eso como $f(x)$ tiene periodo T, planteamos:

$$u = T - x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x; \quad x = T - a \to u = a; \quad x = T \to u = 0$$

Enseguida remplazando todo esto en la integral y debidos a su periocidad:

$$\int_{a}^{0} f(T+u)\cdot \mathrm{d}u = \int_{0}^{a} f(u)\mathrm{d}u = C$$

5. Calcular:

$$\int_{e^{-1}}^{e} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\mathrm{d}x \tag{54}$$

Notamos que hay una gran similitud entre las dos integrales, por lo que intentamos de llegar de una a la otra, ya que el cálculo directo de cada una resultaría muy difícil.

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\mathrm{d}x; \quad u = e^x; \quad \mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$$

Remplazando esto y cambiando los límites de integración llegamos a:

$$\int_{e^{-1}}^{e} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x$$

Notamos que desde la segúnda integral llegamos a la primera por lo que:

$$\int_{e^{-1}}^{e} \frac{x}{x^3+1}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{3x}+1}\mathrm{d}x = 0$$

6. Calcular:
$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^6+x^3+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x \tag{55}$$

Este ejercicio es muy parecido al anterior, por lo que deberíamos intentar algo similar, desde la primera integral:

$$u = x^3; \quad \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x => \frac{\mathrm{d}u}{3u^{2/3}} = \mathrm{d}x$$

Remplazando en la integral y haciendo el cambio en los límites de integración llegamos a:

$$\int_1^8 \frac{u\mathrm{d}u}{3u^{2/3}(u^2+u+1)} = \int_1^8 \frac{u^{1/3}\mathrm{d}u}{3(u^2+u+1)}$$

Se ve evidenciado que la primera integral es igual a la segúnda integral:

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^6+x^3+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = 0$$

7. Si f es una función continua y $a \in \mathbb{R}$, calcular:
$$\int_{-a}^{a} (f(x) - f(-x))\mathrm{d}x \tag{56}$$

Para resolver esta integral, la separamos en dos integrales de la siguiente manera:

$$I_1 = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x; \quad I_2 = \int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

Ahora haciendo un cambio de variable en I_2 con $u = -x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ y remplazando llegamos a:

$$\int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{-a} f(u)\cdot -\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} f(u)\mathrm{d}u$$

Con lo que notamos que $I_1 = I_2$ por lo que:

$$\int_{-a}^{a} (f(x) - f(-x))\mathrm{d}x = 0$$

8. Si tenemos $f(x) = \frac{x-3}{2x}$ demuestre que se cumple:

$$\int_1^3 \frac{f^{'}(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)^2} = \frac{\pi}{4} \tag{57}$$

Hint: no intente calcular la integral remplazando, sino por medio de una sustitución.

Siguiendo el consejo hacemos el cambio de variable $u = f(x); \mathrm{d}u = f^{'}(x)\mathrm{d}x$:

$$\int_1^3 \frac{f^{'}(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$\arctan(x)|_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \blacksquare$$

9. Si f es una función continua para x $\in$ [0,π], demuestre la siguiente ecuación:

$$\underbrace{\int_0^\pi xf\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x}_{I_1} = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x \tag{58}$$

Hint: usar $u = \pi - x$

Siguiendo el consejo planteamos el cambio de variable $u = \pi - x; \quad \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ en I_1(**no olvide cambiar los límites de integración**):

$$I_1 = \int_0^\pi xf(\sin(x))\mathrm{d}x = \int_\pi^0 (\pi - u)f(\sin(\pi - u)) \cdot -\mathrm{d}u = \int_0^\pi (\pi - u)f(\sin(\pi - u)) \cdot \mathrm{d}u$$

Ahora con esto, notamos que debemos usar la fórmula de $\sin(\alpha + \beta)$:

$$\int_0^\pi (\pi - u)f(\sin(\pi - u)) \cdot \mathrm{d}u = \int_0^\pi (\pi - u)f(\sin(\pi)\cos(u) - \cos(\pi)\sin(u))\mathrm{d}u$$

Como sabemos que $\sin(\pi) = 0$ y $\cos(\pi) = -1$, podemos remplazar esto:

$$I_1 = \int_0^\pi (\pi - u)f(\sin(u))\mathrm{d}u \Longleftrightarrow \pi\int_0^\pi f(\sin(u))\mathrm{d}u - \int_0^\pi uf(\sin(u))\mathrm{d}u$$

Y debido a que estamos en integrales definidas, las variables son mutativas, por lo todas las u las podemos remplazar or una x:

$$I_1 = \int_0^\pi xf(\sin(x))\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x - \int_0^\pi xf(\sin(x))\mathrm{d}x$$

Finalmente tenemos todo en la misma variable por lo que podríamos representarlo con la siguiente ecuación:

$$I_1 = \pi\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x - I_1 \Longleftrightarrow 2I_1 = \pi\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x$$

$$I_1 = \int_0^\pi xf(\sin(x))\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))\mathrm{d}x \blacksquare$$

10. Calcular la siguiente integral indefinida: **wolfram**

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x \tag{59}$$

Notamos que este es un ejercicio clásíco, solo que acá se aplica una regla de la cadena, por lo que podemos aplicar el ejemplo clásíco de igual manera:

$$u = \arctan(\sqrt{x}); \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+(\sqrt{x})^2)}\mathrm{d}x$$

Aplicando el camio de variable llegamos a:

$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x = \int \frac{2u}{1}\mathrm{d}u = u^2 + C = (\arctan(\sqrt{x}))^2 + C$$

11. Demostrar que si f es una función continua e integrable sobre [-a,a]. Entonces si f impar demostrar que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{60}$$

Primero analizamos cada caso de a:

• Para $a = 0$:

$$\int_0^0 f(x)dx = 0$$

• Para $a \neq 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$$

Enseguida debemos demostrar que $I_1 = -I_2$ por lo que trabajaremos con I_1, haciendo un cambio de variable con $u = -x$; $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$ quedándonos:

$$I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-x)\cdot -\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

Ahora como $f(x)$ es impar podemos hacer lo siguiente:

$$I_1 = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x \Longleftrightarrow I_1 = -I_2$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x}_{I_2} = -I_2 + I_2 = 0 \blacksquare$$

5 Aplicaciones de Integrales

5.1 Área entre curvas

1. Calcule el Área entre las siguientes curvas Región plana acotada por la/s curvas:

   (a) $y = x^2$, el eje x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 3$.

   (b) $y = 5x - x^2$ e $y = x$.

   (c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ y el eje x

   (d) $y = 10x - x^2$ e $y = 3x - 8$

   (e) $y^2 = x$ e $y = 3x - 10$

   (f) $y = \cos(x)$ e $y = \sin(x)$, entre $x = 0$ y $x = \pi$

(a) Notamos que tenemos los límites de integración con las ordenadas de x que se nos da y también la función por lo que lo remplazamos:

$$\int_1^3 x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

(b) Para encontrar los puntos donde estas curvas se intersectan debemos resolver la siguiente ecuacion:

$$5x - x^2 = x; \longrightarrow x = 1, x = 4$$

Por lo que lo llevamos a la siguiente integral:

$$\int_1^4 (5x - x^2) - (x)\mathrm{d}x = (\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_1^4 = \frac{32}{3}$$

(c) Al igual que en el ejercicio anterior debemos igualar las función y encontrar los puntos:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x; \longrightarrow x = 0, x = 2, x = 4$$

Ahora notamos que vamos a tener dos integrales, pero tenemos que ver que función esta arriba de cual:

$$x < x^3 - 6x^2 + 9x \longrightarrow x = (0, 2)$$
$$x > x^3 - 6x^2 + 9x \longrightarrow x = (2, 4)$$

Por lo que las integrales nos quedan de la siguiente manera:

$$\underbrace{\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 9x) - (x)\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (x) - (x^3 - 6x^2 + 9x)\mathrm{d}x}_{I_2}$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{7x^2}{2}\Big|_0^2 + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{7x^2}{2}\Big|_2^4\right) = 12$$

(d) Repetimos el proceso estándar de igualar las dos curvas:

$$10x - x^2 = 3x - 8; \longrightarrow x = 8, x = 1$$

Ahora es evidente que la función que es mayor, es $y = 10x - x^2$, por lo que la integral queda:

$$\int_{-1}^{8} (10x - x^2) - (3x + 8)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{8} 7x - x^2 - 8\mathrm{d}x = \frac{7x}{2} - \frac{x^3}{3} - 8x|_{-1}^{8} = \frac{243}{2}$$

(e) En este ejercicio se hace más dificíl que los anteriores ya que tenemos una función con y^2, por lo que lo que debemos hacer es dejar y en función de x, por lo que despejamos la segúnda función:

$$y = 3x - 10 \rightarrow \frac{y + 10}{3}$$

Por lo que ahora igualamos los x, llegamos a:

$$y^2 = \frac{y + 10}{3}; \longrightarrow y = \frac{-5}{3}, y = 2$$

Enseguida lo llevamos a la integral clásíca solo que ahora respecto a y, también hay que ver cual función es mayor a la otra por lo que buscamos para el mismo y cual x es mayor, probamos en $y = 0$:

$$y^2 = 0 = x; \quad 0 = 3x - 10 \rightarrow x = \frac{10}{3}$$

Con esto concluimos que la segúnda función es mayor por lo que nos queda:

$$\int_{\frac{-5}{3}}^{2} \frac{y + 10}{3} - y^2\mathrm{d}y = \frac{1331}{162}$$

(f) Como ahora nos delimitan las ordenadas de x y sabiendo como se comportan las funciones $\cos(x)$ e $\sin(x)$ debemos analizar como hacer el proceso típico de igualar funciones:

$$\sin(x) = \cos(x) \longrightarrow x = \frac{\pi}{4} + K\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Con esto tenemos que se encuentran en $x = \frac{\pi}{4}$, y previamente sabemos que para el intervalo limitado se da lo siguiente:

$$\sin(x) < \cos(x) \rightarrow x \in (0, \frac{\pi}{4}); \quad \cos(x) < \sin(x) \rightarrow x \in (\frac{\pi}{4}, \pi)$$

Teniendo esto dividimos en dos integrales el proceso:

$$\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x)) - (\sin(x))\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin(x)) - (\cos(x))\mathrm{d}x}_{I_2} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}$$

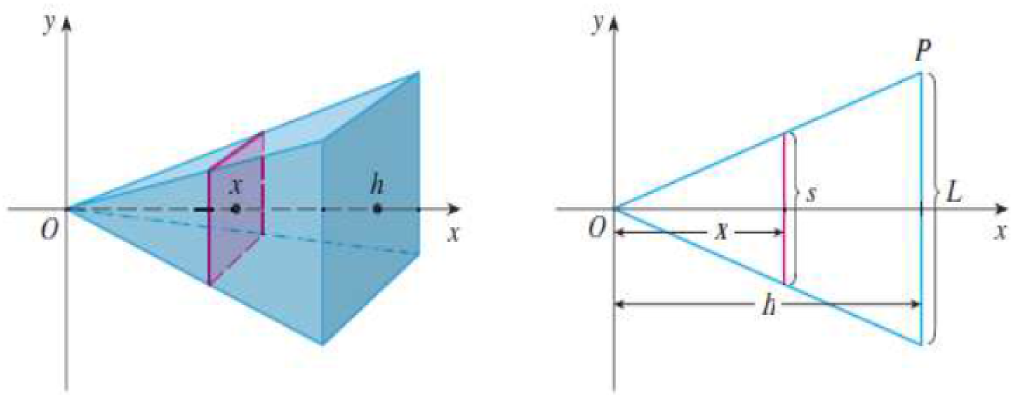
5.2 Volúmenes

1. Demostrar que el volumen de una pirámide cuya base es cuadrada de lado L, cuya curva es h, es $\dfrac{L^2h}{3}$ $(I3-2018-1)$

Para lograr demostrar lo solicitado lo que haremos será calcular el volumen que según sabemos se hace por la siguiente fórmula:

$$\int A = V$$

Pero en este caso la función A es un poco problemática debido a que el área no es constante y depende del largo de la base por lo que hacemos el siguiente análisis:



Donde lo que haremos será hacer la siguiente relación para dejar todo en función del eje x, así poder integrar respecto a esa función y hacinedo por thales la siguiente relación:

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{L} \longrightarrow s = \frac{xL}{h}$$

Enseguida también notamos que el área de la base y la relación que hicimos debería darnos:

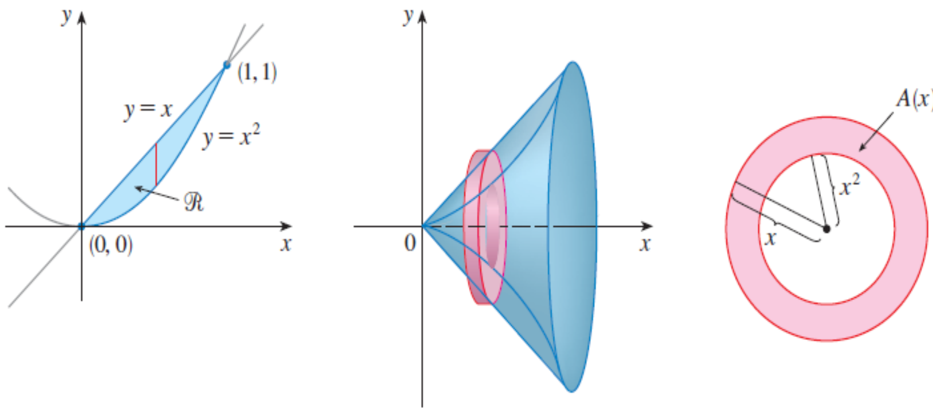
$$A(x) = s^2 = \frac{L^2x^2}{h^2}$$

Por lo que ahora integrando respecto a x tendremos el volumen:

$$V = \int_0^h A(x)\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{L^2x^2}{h^2}\mathrm{d}x = \frac{L^2h}{3} \blacksquare$$

2. Calcule el Volumen del sólido de revolución de un sólido al girar la región encerrada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$ en torno a la recta $y = 2$ $(I3 - 2015 - 1)$

Primero debemos hacer un análisis de la sección tranversal que notamos que seguiría el siguiente dibujo:



Donde la sección tendría como radio interior $r_1 = 2 - x$ y $r_2 = 2 - x^2$.
Por lo que el área va a estar dada por:

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

Y llevando esto al cálculo de volúmenes, debemos encontrar en que puntos de x debe ser por lo que debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$x = x^2; \longrightarrow x = 0, x = 1$$

Por lo que el volumen va a ser:

$$V = \int_0^1 A(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2\mathrm{d}x = \frac{8\pi}{15}$$

3. Determinar el volumen de un sólido generado al rotar la región $y = x^3$, $y = 6$ y $x = 0$ en torno al eje x.

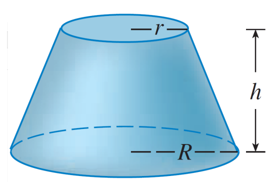
Primero debemos analizar de que tomaremos como nuestra sección tranversal y sus radios. Pero al ser respecto al eje y el radio debe estar respecto a y quedándonos:

$$x = \sqrt[3]{y} \longrightarrow A(y) = \pi\sqrt[3]{y}^2 - 0$$

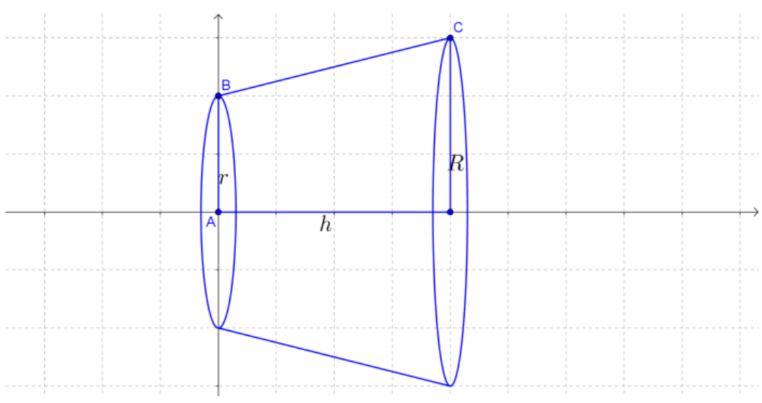
Y dado que los puntos de intersección son finalmente $y = 0$ e $y = 6$, llegamos a la siguiente integral:

$$V = \int_0^6 A(y)\mathrm{d}y = \int_0^6 \pi\sqrt[3]{y^2}\mathrm{d}y = \pi\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5}|_0^6 = \frac{3\pi 6^{\frac{5}{3}}}{5}$$

4. Calcular el volumen del sólido de un "cono circular" cuya altura es h , base inferior R y radio superior r



acá debemos hacer un análisis similar al del ejercicio **1**, por lo que hacemos lo siguiente:



Por lo que el radio de la sección tranversal va a ser la recta $\overline{BC}$, que calcularemos remplazando en la clasíca fórmula:

$$y = mx + n \longrightarrow y = \frac{R - r}{h}(x) + r$$

Con lo que ahora remplazamos esto en la fórmula para el volumen:

$$V = \int_0^h A(x)\mathrm{d}x = \int_0^h \pi(\frac{R-r}{h}x + r)^2 \mathrm{d}x$$

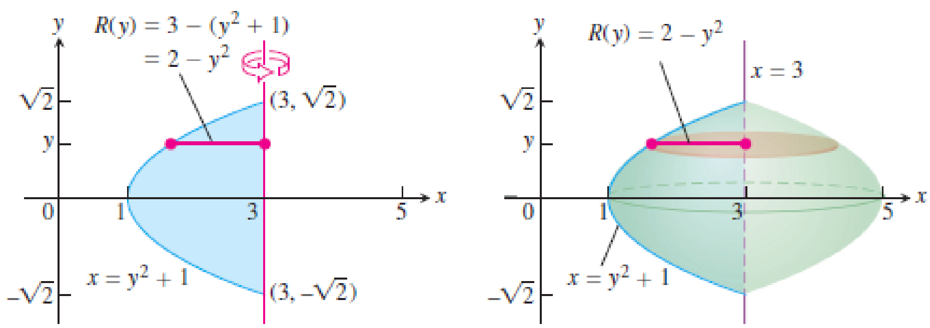
$$\int_0^h \pi(\frac{R-r}{h}x + r)^2 \mathrm{d}x \longrightarrow u = \frac{R-r}{h}x + r;\ \mathrm{d}u = \frac{R-r}{h}\mathrm{d}x$$

Ahora remplazando esto en la integral y cambiando los límites de integración llegamos a:

$$V = \int_0^h \frac{\pi h(u)^2}{R-r}\mathrm{d}u = \frac{\pi h}{R-r}(R^3 - r^3) \equiv \frac{\pi h}{3}(R^2 + 2Rr + r^2)$$

5. Determinar el volumen del sólido al hacer girar respecto a $x = 3$ la región comprendida entre la parabola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$. $(I3 - 2017 - 2)$

Haciendo el análisis respectivo de la secciońtranversal podemos llegar al siguiente dibujo:



Con esto logramos identifica que el área ede la sección tranversal es:

$$A(y) = \pi(2 - y^2)^2$$

Y remplazando en la fórmula del volumen identificando que los límites son $y = \pm\sqrt{2}$

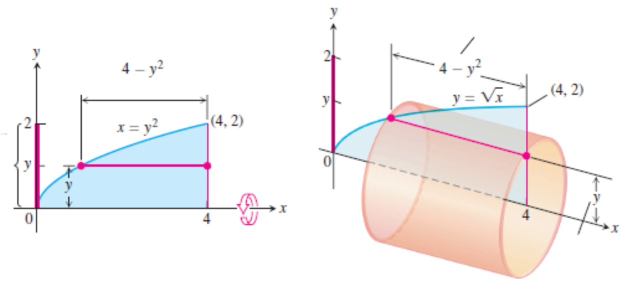
$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} A(y)\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi(2 - y^2)^2 \mathrm{d}y$$

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi(4 - 4y^2 + y^4)\mathrm{d}y = \pi\left(4y - \frac{4y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$V = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}$$

6. Calcule el volumen de la región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x y la recta $x = 4$ que se hace girar respecto al eje x.

acá ocuparemos el método de capas cilindricas, para analizar mejor la situación vemos el bosquejo de la situación:



Con el bosquejo notamos que los límites de integración son $y = 0$ e $y = 2$, donde remplazando esto en la fórmula de capas cilindricas tenemos:

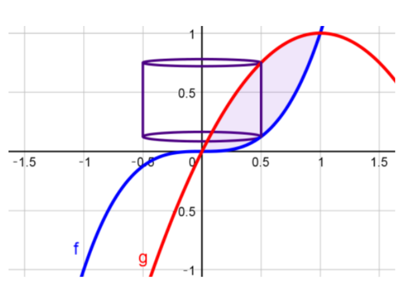
$$V = \int_0^2 2\pi(radio)(altura)\mathrm{d}y = \int_0^2 2\pi(y)(4-y^2)\mathrm{d} = 8\pi$$

7. Calcule el Volumen que se genera al rotar respecto al eje y, la región delimitada por $y = x^3$ e $y = 2x - x^2$.

Para saber que límites ponerle a la integral del volumen primero debemos resolver esta ecuación:

$$x^3 = 2x - x^2 \longrightarrow x = 0, x = 1$$

Enseguida debemos lograr identificar cual es el radio y altura, para fácilitar la situación revisamos el bosquejo:

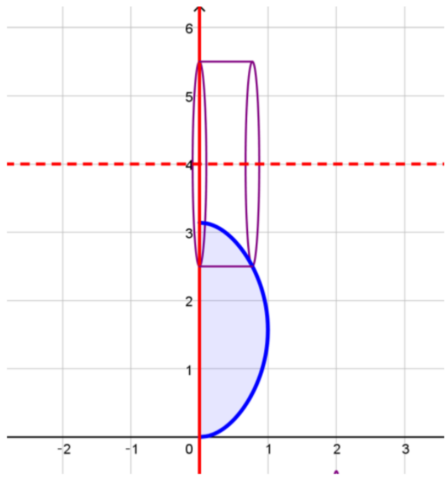


Ahora es fácil notar que el radio= x y la altura=$2x - x^2 - x^3$, remplazanado en la integral:

$$V = \int_0^1 2\pi(x)(2x - x^2 - x^3)\mathrm{d}x = \frac{13\pi}{30}$$

8. Plantear la integral que representaria el volumen de la región que se ubica entre el eje y, la curva $x = \sqrt{\sin(y)}$ para $y \in [0, 2]$, si se hace girar respecto a $y = 4$

Lo que se debe hacer primero en este caso es hacer un bosquejo de la función, $x = \sqrt{\sin(y)}$, ya que es un poco difícil de analizar a simple vista, el cual sería:



Con el bosquejo logramos identificar fácilmente cual es el radio=$\sqrt{\sin(y)}$ y la altura=$(4-y)$, donde también en el enunciado tenemos el intervalo de integración:

$$V = \int_0^{\pi} 2\pi(4-y)(\sqrt{\sin(y)}\mathrm{d}y$$

9. Exprese el Volumen de la región entre las curvas $y = x^2\ln(x)$ e $y = 2ln(x)$, que se hace girar respecto a $x = -1$.

Primero debemos ver las cordenerdas del eje x, donde se intersectan que sería resolver:

$$x^2\ln(x) = 2\ln(x); \longrightarrow x = 1, x = \sqrt{2}$$

acá también logramos notar que la fución que es más grande en el intervalo es la función $y = 2\ln(x)$, donde llegamos a la conclusión:

$$radio = (2\ln(x) - x^2\ln(X);\ altura = x - (traslacion) = x + 1$$

Enseguida remplazando en la fórmula de la integral llegamos a:

$$V = \int_1^{\sqrt{2}} 2\pi(x+1)(2\ln(x) - x^2\ln(x))\mathrm{d}x$$

también se puede usar la fórmula de secciones tranversales

6 Tecnicas de Integración

6.1 Integración por partes

1. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int \ln(x)\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^1 xe^{7x}\mathrm{d}x$ $(I4-2018-TAV)$

(c) $\int x\arctan(x)\mathrm{d}x$ $(Ex-2018-2)$

(d) $\int e^{-x}\ln(1+e^x)\mathrm{d}x$ $(Ex-2017-2)$

(e) $\int_1^e x^5\ln(x)^2\mathrm{d}x$

(f) $\int x\sec(x)\tan(x)\mathrm{d}x$

(g) $\int x^2e^x\mathrm{d}x$

(h) $\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x$

(i) $\int \frac{x\cos(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x$

(j) $\int x\arctan(x)\mathrm{d}x$

(a) Integrando por partes tomamos:

$$u=\ln(x)\longrightarrow du=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$dv=\mathrm{d}x\longrightarrow v=x$$

Donde nos queda:

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln(x)}-\int \mathrm{d}x$$

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x=\frac{x}{\ln(x)}-x+C$$

(b) Integrando por partes tomamos:

$$u=x\quad\longrightarrow\quad du=\mathrm{d}x$$
$$dv=e^{7x}\mathrm{d}x\;\longrightarrow\;v=\frac{e^{7x}}{7}$$

Remplazando nos da:

$$\int_0^1 xe^{7x}\mathrm{d}x=\frac{xe^{7x}}{7}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{e^7x}{7}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 xe^{7x}\mathrm{d}x=\frac{xe^{7x}}{7}\Big|_0^1-\frac{e^7x}{49}\Big|_0^1=\frac{1\cdot e^7}{7}-\left(\frac{e^7}{49}-\frac{1}{49}\right)$$

(c) Integrando por partes tomamos:

$$u = \arctan(x) \quad \longrightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$dv = x\mathrm{d}x \ \longrightarrow \ v = \frac{x^2}{2}$$

Remplazando llegamos a:

$$\int x\arctan(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2\arctan(x)}{2} - \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x}_{I1}$$

$$I1 = \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$I1 = x - \arctan(x) + C$$

Ahora juntando llegamos a:

$$\int x\arctan(x)\mathrm{d}x = \frac{x^2\arctan(x)}{2} + x - \arctan(x) + C$$

(d) Integrando por partes tomamos:

$$u = \ln(1+e^x) \quad \longrightarrow \quad du = \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

$$dv = e^{-x}\mathrm{d}x \ \longrightarrow \ v = -e^{-x}$$

Remplazando llegamos a:

$$\int e^{-x}\ln(1+e^x)\mathrm{d}x = e^{-x}\cdot\ln(1+e^x) + \underbrace{\int \frac{e^x\cdot e^{-x}}{1+e^x}\mathrm{d}x}_{I2}$$

Calculamos $I2$, donde tomamos :

$$I2 = \int \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x = \int \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$$

$$I2 = x - \ln(1+e^x) + C$$

Juntamos la integral con lo anterior calculado dándonos:

$$\int e^{-x}\ln(1+e^x)\mathrm{d}x = e^{-x}\cdot\ln(1+e^x) + x - \ln(x) + C$$

(e) Integrando por partes tomamos:

$$u = \ln(x)^2 \quad \longrightarrow \quad du = \frac{2\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$$
$$dv = x^5\mathrm{d}x \longrightarrow v = 5x^4$$

Enseguida remplazando llegamos a:

$$\int_1^e x^5 \ln(x)^2 \mathrm{d}x = 10\frac{\ln(x)x^4}{x}|_1^e - \underbrace{\int \frac{10\ln(x)x^4}{x}\mathrm{d}x}_{I3}$$

Notamos que nuevamente debemos integrar por partes dándonos:

$$u = \ln(x) \quad \longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$dv = x^3\mathrm{d}x \longrightarrow v = 3x^2$$

$$I3 = 4x^3\ln(x) - \int \frac{3x^2}{x}\mathrm{d}x = 3x^2\ln(x) - \frac{3x^2}{2}$$

Juntando llegamos a:

$$\int_1^e x^5 \ln(x)^2 \mathrm{d}x = 10\frac{\ln(x)x^4}{x} - 10\left(3x^2\ln(x) - \frac{3x^2}{2}\right)|_1^e$$

(f) Integrando por partes tomamos:

$$u = x^2 \quad \longrightarrow \quad du = 2x\mathrm{d}x$$
$$dv = e^x\mathrm{d}x \longrightarrow v = e^x$$

$$\int x^2e^x\mathrm{d}x = x^2e^x - \underbrace{\int 2xe^x\mathrm{d}x}_{I4}$$

Notamos que nuevamente debemos integrar por partes, donde tomamos:

$$u = 2x \quad \longrightarrow \quad du = 2\mathrm{d}x$$
$$dv = e^x\mathrm{d}x \longrightarrow v = e^x$$

$$I4 = 2xe^x - \int 2e^x\mathrm{d}x = 2xe^x - 2e^x$$

Ahora juntando las integrales llegamos a:

$$\int x^2e^x\mathrm{d}x = x^2e^x - (2xe^x - 2e^x)$$

(h) Para este caso nombremos como $I4$ a integral solicitada, Enseguida Integrando por partes tomamos:

$$u = cos(x) \longrightarrow du = -\sin(x)\mathrm{d}x$$
$$dv = e^x\mathrm{d}x \longrightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x = e^x \cos(x) + \int \sin(x)e^x$$

Notamos que debemos integrar por partes nuevamente la $I5$ Tomando:

$$u = \sin(x) \longrightarrow du = \cos(x)\mathrm{d}x$$
$$dv = e^x\mathrm{d}x \longrightarrow v = e^x$$

$$I5 = \int \sin(x)e^x\mathrm{d}x = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\mathrm{d}x$$

Ahora notamos que tenemos la misma integral en ambos ya que $I4 = I5$

$$\underbrace{\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x}_{I4} = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \underbrace{\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x}_{I4}$$

$$2\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x = e^x \cos(x) + e^x \sin(x)$$

$$\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x = \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2}$$

(i) Antes de integrar por partes debemos notar que:

$$\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \cot(x) \cdot \csc(x)$$

Enseguida integrando por partes hacemos:

$$u = x \longrightarrow du = \mathrm{d}x$$
$$dv = \cot(x) \cdot \csc(x)\mathrm{d}x \longrightarrow v = -\csc(x)$$

Ahora reemplazando:

$$\int \frac{x\cos(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = -\csc(x)x - \int -\csc(x)\mathrm{d}x = -\csc(x)x - (\ln(|\tan(x/2)|))$$

2. Demostrar la siguiente ecuación para $n > 1$: $(Ex - 2019 - 1)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x$$

Para empezar la demostración, tomamos:

$$\begin{aligned} u = \sin^{n-1}(x) &\longrightarrow du = (n-1)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \\ dv = \sin(x)\mathrm{d}x &\longrightarrow \quad v = -\cos(x) \end{aligned}$$

con lo que remplazando llegamos a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \underbrace{-\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{\alpha} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)\cdot -\cos(x)\mathrm{d}x}_{\theta}$$

Enseguida calculamos cada una por separado, primero partimos por α:

$$\alpha = --\cos(x)\cdot\sin^{n-1}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (-0\cdot 1) - (-1\cdot 0) = 0$$

Ahora para hacer la demostración necesitamos lograr alguna forma de que θ, junto con la integral inicial lleguen a ser la ecuación por lo que haremos algo con $\cos^2(x)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)(1-\sin^2(x))\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n}(x)\mathrm{d}x$$

Enseguida retomamos la primera integral y hacemos un despeje:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n}(x)\mathrm{d}x$$

$$n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x$$

Finalmente notamos que debemos hacer un despeje y llegamos a lo solicitado:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x \quad \blacksquare$$

6.2 Integrales Trigonométricas

Evalue las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \cos^3(x)\sin(2x)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x \ (Ex-2015-2)$
3. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\mathrm{d}x \ (Ex-2018-2)$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x)\sec^4(x)\mathrm{d}x \ (I4-2019-TAV)$
5. $\displaystyle\int \cos(8x)\sin(5x)\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \sec^3(x)\mathrm{d}x$

(a) Lo que tenemos que hacer acá es primero ocupar la propiedad de $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$:

$$\int \cos^3(x)\sin(2x)\mathrm{d}x = \int \cos^3(x)2\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x \to 2\int \cos^4(x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

Enseguida con la propiedad aplicada podemos hacer una sustitucion:

$$u = \cos(x) \to \mathrm{d}u = -\sin(x)\mathrm{d}x$$

Remplazando llegamos a:

$$2\int \cos^4(x)\sin(x)\mathrm{d}x = 2\int -u^4\mathrm{d}u = -2\left(\frac{u^5}{5}\right) + C = \frac{-2\cos^5(x)}{5} + C$$

(b) En este caso se debe ocupar dos propiedades que son:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}; \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Por lo que ocupando estas propiedades llegamos a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2(2x)\mathrm{d}x$$

Notamos que debemos ocupar la propiedad del $\cos^2(x)$:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos^2(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)\mathrm{d}x$$

finalmente nos da:

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos(4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(u-\frac{\sin(4x)}{4}\right)|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(u-\frac{\sin(4x)}{4}\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

(c) Para este ejercicio debemos tratar de formar de alguna manera que lo de abajo sea la función y arriba sea la derivada, por lo que hacemos:

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+(\cos^2(x))^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+(1-\sin(x)^2)^2}\mathrm{d}x$$

Con la integral escrita de esta manera, notamos que podemos hacer el cambio de variable:

$$u = \sin^2(x); \qquad \mathrm{d}u = 2\sin(x)\cos(x)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+(1-\sin(x)^2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2(u^4+(1-u^2))}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{4u^4-4u^2+2}\mathrm{d}u$$

Ahora reajustamos la parte inferior de la fraccion:

$$\int \frac{1}{4u^2-4u+2}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(4u^2-4u+1)+1}\mathrm{d}u$$

Enseguida notamos que podemos hacer una factorización y luego hacer una sustitucion:

$$\int \frac{1}{(4u^2-4u+1)+1}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(2u-1)^2+1}\mathrm{d}u \longrightarrow v = 2u-1;\ \mathrm{d}v = 2\mathrm{d}u$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(v)^2+1}\mathrm{d}c$$

Finalmente notamos que la integral es parecida a una integral conocida, por lo que la calculamos:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(v)^2+1}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\arctan(v)+C = \frac{\arctan(2u-1)}{2}+C = \frac{\arctan(2\sin^2(x)-1)}{2}+C$$

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^4(x)+\cos^4(x)}\mathrm{d}x = \frac{\arctan(2\sin^2(x)-1)}{2}+C$$

(d) En este ejercicio usaremos propiedad de $\sec^2(x) = \tan^2(x)+1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x)\sec^4(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x)\sec^2(x)(1+\tan^2(x)\mathrm{d}x$$

Luego de esto notamos que si hacemos el cambio de variable $u = \tan(x)$, tenemos la derivada ahí mismo, por lo que nos queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^4(x)\sec^2(x)(1+\tan^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{3}} u^4(1+u^2)\mathrm{d}u$$

Ahora integrando y calculando llegamos a:

$$\int_0^{\sqrt{3}} u^4(1+u^2)\mathrm{d}u = \left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^7}{7}\right)|_0^{\sqrt{3}} = \frac{198}{5}$$

(e) acá ocupamos la siguiente propiedad:

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\sin(A-B) + \sin(A+B)\right)$$

Enseguida remplazándolo en la integral:

$$\int \cos(8x)\sin(5x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\sin(3x) + \sin(13x)\right)\mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\left(\frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(13x)}{13}\right) + C$$

(f) Primero reescribimos la integral:

$$\int \sec^3(x)\mathrm{d}x = \int \sec^2(x)\sec(x)\mathrm{d}x \tag{61}$$

Ahora notamos que podemos integrar por partes tomando:

$$u = \sec(x) \quad \longrightarrow du = \sec(x)\cdot\tan(x)\mathrm{d}x$$
$$dv = \sec^2(x)\mathrm{d}x \longrightarrow v = \tan(x)$$

Quedándonos:

$$\int \sec^2(x)\sec(x)\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\tan(x) - \int \tan(x)\cdot\tan(x)\sec(x)\mathrm{d}x$$

Enseguida ocupando la identidad $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$:

$$\sec(x)\cdot\tan(x) - \int(\sec^2(x) - 1)\sec(x)\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\tan(x) - \underbrace{\int \sec^3(x) - \sec(x)\mathrm{d}x}_{\phi}$$

Ahora si calculamos ϕ por separado:

$$\phi = \underbrace{\int \sec^3(x)}_{\beta} - \underbrace{\int \sec(x)\mathrm{d}x}_{\gamma} = \underbrace{\int \sec^3(x)}_{\beta} - \underbrace{\ln(|\sec(x) + \tan(x)|)}_{\gamma}$$

Notamos que podemos identificar primero que la integral solicitada(β) inicialmente y además debemos calcular la otra integral que es:
Enseguida remplazando todo en la ecuación (47):

$$\int \sec^3(x)\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\tan(x) - \int \sec^3(x) + \ln(|\sec(x) + \tan(x)|)$$

$$2\int \sec^3(x)\mathrm{d}x = \sec(x)\cdot\tan(x) + \ln(|\sec(x) + \tan(x)$$

$$\int \sec^3(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\sec(x)\cdot\tan(x) + \ln(|\sec(x) + \tan(x)\right)$$

6.3 Sustitución Trigonométrica

Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\ (Ex-2015-2)$

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x\ (Ex-2017-2)$

4. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{5+4x-x^2}\mathrm{d}x\ (Ex-2018-1)$

5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x\ (I4-2018-TAV)$

6. $\displaystyle\int \sqrt{2x+x^2}\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$

1. Primero lo que acá debemos hacer es notar que debemos usar la identidad de:

$$1+\tan^2(x)=\sec^2(x)$$

Por lo que debemos hacer el cambio de variable:

$$x=\tan(u); \qquad \mathrm{d}x=\sec^2(u)\mathrm{d}u$$

$$x=1\to u=\frac{\pi}{4}; \qquad x=\sqrt{3}\to\frac{\pi}{3}$$

Quedándonos:

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan(2)}\sqrt{1+\tan^2(u)}\sec^2(u)\mathrm{d}u=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^3(u)\mathrm{d}u$$

Notamos que esta integral fue calculada en la sección Integrales Trigonométricas, que es:

$$\int \sec^3(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\sec(x)\cdot\tan(x)+\ln(|\sec(x)+\tan(x)\right)$$

Por lo que:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^3(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\sec(u)\cdot\tan(u)+\ln(|\sec(u)+\tan(u)\right)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1}{2}\left((2\cdot\sqrt{3}+\ln|2+\sqrt{3})-(\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot 1+\ln(\frac{2}{\sqrt{2}}+1))\right)$$

2. Para esta integral debemos hacer el siguiente cambio de variable

$$x = \cos(u); \qquad \mathrm{d}x = -\sin(u)\mathrm{d}u$$

Enseguida si remplazamos esto en la integral nos queda:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{-\sin(u)}{\cos^2(u)\sqrt{1-\cos^2(u)}}\mathrm{d}u$$

Donde notamos que nos queda la siguiente integral reordenando:

$$\int \frac{-\sin(u)}{\cos(u)^2\sin(u)}\mathrm{d}u = \int -\sec^2(u)\mathrm{d}u = -\tan(u) + C$$

Ahora recordamos que debemos remplazar el cambio de variable por lo que reacodomás $\tan(u)$:

$$-\tan(u) + C = -\left(\frac{sin(u)}{\cos(u)}\right) + C$$

Enseguida notamos que llegamos a:

$$-\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + C$$

3. En esta integral tomamos:

$$x = 2\sin(t); \qquad \mathrm{d}x = 2\cos(t); \qquad x = 1 \to t = \frac{\pi}{6}; \qquad x = 2 \to t = \frac{\pi}{2}$$

Remplazando en la integral nos quedaría:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)\cdot\sqrt{4-(2\sin(t))^2}}{(2\sin(t))^2}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2(t))}{4\sin^2(t)}\mathrm{d}t$$

Donde finalmente llegamos a:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2(t))}{4\sin^2(t)}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2(t)\mathrm{d}t$$

acá ocupamos la propiedad de $1 + \cot^2(t) = \csc^2(t)$:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2(t) - 1\mathrm{d}t$$

Enseguida estas dos integrales son conocidas por lo que nos queda finalmente:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2(t) - 1\mathrm{d}t = (-\cot(t) - u)\,|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

4. En este ejercicio notamos que tenemos un problema ya que no es tan obvio el cambio de variable que se debe hacer. En este caso se debe tratar de llevar la integral a un caso más general, por lo que trataremos de completar los cuadrado y ahí hacer un cambio de variable.

$$5+4x-x^2=-(x^2-4x-5)=-(x^2-4x-5+9)+9=-(x^2-4x+4)+9$$

$$-(x^2-4x-4)+9=-(x-2)^2+9$$

Por lo que al escribirlo en la integral nos queda:

$$\int_1^3 \sqrt{5+4x-x^2}\mathrm{d}x=\int_1^3 \sqrt{9-(x-2)^2}\mathrm{d}x$$

Ahora notamos que debemos llegar a una forma que nos quede $\sqrt{a^2-\cos(t)}$(también puede ser $\sin(t)$), por lo que el cambio de variable que debemos hacer es:

$$x-2=u; \quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}u; \quad x=1\to t=-1; \quad x=3\to u=1$$

Quedándonos:

$$\int_1^3 \sqrt{9-(x-2)^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 \sqrt{9-(u)^2}\mathrm{d}u$$

Nuevamente debemos hacer un cambio de variable solo que ahora es más obvio:

$$u=3\sin(t); \quad \mathrm{d}u=3\cos(t)\mathrm{d}t; \quad u=-1\to t=-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right); \quad u=1\to t=\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{9-(u)^2}\mathrm{d}u=\int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} 3\cos(t)\sqrt{9-(3\sin(t))^2}\mathrm{d}t=\int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} 9\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Enseguida notamos que para resolver esta integral debemos usar la siguiente propiedad:

$$\cos^2(t)=\frac{1+\cos(2t)}{2}$$

Por lo que

$$\int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} 9\cos^2(t)\mathrm{d}t=9\int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t$$

Finalmente nos da:

$$9\int_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t=9\left(\frac{u}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right)\Big|_{-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)}=9\arcsin(\frac{1}{3})+2\sqrt{2}$$

$$\int_1^3 \sqrt{5+4x-x^2}\mathrm{d}x=9\arcsin(\frac{1}{3})+2\sqrt{2} \quad \square$$

5. En esta integral tomamos:

$$x = 2\sin(t); \qquad \mathrm{d}x = 2\cos(t); \qquad x = 1 \to t = \frac{\pi}{6}; \qquad x = 2 \to t = \frac{\pi}{2}$$

Remplazando en la integral nos quedaría:

$$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)4\sin^2(t)}{\sqrt{4-(2\sin(t))^2}}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)4\sin^2(t))}{2\cos^2(t)}\mathrm{d}t$$

Donde finalmente llegamos a:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)4\sin^2(t))}{2\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2(t)\mathrm{d}t$$

acá ocupamos la propiedad de $\sin^2(t) = \dfrac{1-\sin(2t)}{2}$:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4(\frac{1-\sin(2t))}{2}\mathrm{d}t$$

Ahora estas dos integrales son conocidas por lo que nos queda finalmente:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin(2t)}{2}\mathrm{d}t = 4\left(\frac{u}{2} + \frac{\cos(2t)}{4}\right)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

6. acá lo que debemos hacer es completar el cuadrado haciendo lo siguiente:

$$\sqrt{2x+x^2} = \sqrt{x^2+2x+1-1} = \sqrt{(x+1)^2-1}$$

$$\int \sqrt{2x+x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x+1)^2-1}\mathrm{d}x$$

Por lo que Enseguida hacemos el cambio de variable:

$$x+1 = \sec(t); \qquad \mathrm{d}x = \sec(t)\tan(t)\mathrm{d}t$$

$$\int \sqrt{(x+1)^2-1}\mathrm{d}x = \int \sqrt{(\sec(t))^2-1}\sec(t)\tan(t)\mathrm{d}t$$

Donde ocupamos la propiedad de $tan^2(t) = \sec^2(t) - 1$:

$$\int \sqrt{(\sec(t))^2-1}\sec(t)\tan(t)\mathrm{d}t = \int \tan^2(t)\sec(t)\mathrm{d}t = \int (\sec^2(t)-1)\sec(t)\mathrm{d}t$$

dándonos

$$\int \sec^3(t) - \sec(t)\mathrm{d}t$$

Finalmente debemos calcular las integrales pero notamos que estas integrales fueron calcula en la sección Integrales Trigonométricas en (61) Por lo que podemos remplazar los resultados:

$$\int \sec^3(t) - \sec(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sec(t)\cdot\tan(t) + \ln(|\sec(t)+\tan(t)) - \ln(|\sec(t)+\tan(t)|)\right.$$

$$\int \sec^3(t) - \sec(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\sec(t)\cdot\tan(t) - \ln(|\sec(t)+\tan(t))\,|\right)$$

Ahora debemos llevar todo a la variable respecto a x ocupando

$$x+1 = \sec(t) \to t = \operatorname{arcsec}(x+1)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sec(t)\cdot\tan(t) - \ln(|\sec(t)+\tan(t))\,|\right) = \frac{1}{2}\sec(arcsec(x+1))\cdot\tan(arcsec(x+1)) -$$

$$-\frac{1}{2}\ln(|\sec(arcsec(x+1)) + \tan(arcsec(x+1))|)$$

Haciendo la sustituciones

$$\frac{1}{2}(x+1)\cdot\tan(arcsec(x+1)) - \frac{1}{2}\ln(|x+1+\tan(arcsec(x+1))|)$$

Enseguida notamos que tenemos un problemás para calcular $\tan(arcsec(x+1))$. Si usamos la siguiente propiedad $\tan(t) = \sqrt{(x+1)^2-1}$, finalmente nos daría

$$\int \sqrt{2x+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x+1)\cdot\sqrt{(x+1)^2-1} - \frac{1}{2}\ln(|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}|) \qquad \square$$

7. En esta integral notamos que debemos hacer un cambio de variable:

$$u = x^2 \qquad \mathrm{d}u = 2x\cdot\mathrm{d}x$$

Quedándonos:

$$\int x\sqrt{1-x^4}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}x$$

Enseguida es más obvio la sustitución trigonométrica que debemos hacer

$$u = \sin(t) \qquad \mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1}{2}\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2}\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Finalmente usamos la siguiente propiedad:

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right) + C$$

Ahora recordemos que $u = \sin(t)$ por lo que $t = \arcsin(u)$, remplazamos y nos da

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin(u)}{2} + \frac{2u)}{4}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin(x^2)}{2} + \frac{2(x)^2}{4}\right) + C$$

8. Lo que notamos acá es que la única opción que tenemos es calcular el cuadrado de la parte inferior de la fracción:

$$\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (1 - 2x + x^2)} = \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

Remplazando esto en la integral notamos que podemos hacer un cambio de variable

$$u = x - 1; \qquad \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\mathrm{d}u$$

Enseguida notamos que esta integral esta dentro de las conocidas por lo que la calculamos y luego cambiamos la variable

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\mathrm{d}u = \arcsin(u) + C = \arcsin(x-1) + C \qquad \square$$

6.4 Fracciones Parciales

1. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)(x^2+4)}\mathrm{d}x(I4-2019-TAV)$
3. $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\mathrm{d}x(Ex-2017-2)$
4. $\displaystyle\int_4^5 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x(Ex-2018-TAV)$
5. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)(x-1)}\mathrm{d}x(Ex-2015-2)$
6. $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+5}{(x^2+5)(x+3)}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2+2x+2}{(x)(x^2+2x+1)}\mathrm{d}x\ (Ex-2018-2)$

1. En este ejercicio debemos identificar los factores por los que podemos llegar a separar la fracción parcial. Notamos que son $(1-x)(1+x)=1-x^2$, por lo que ahora procedemos a hacer la separacion:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}$$

Donde llegmoas al sistema de ecuaciones que no da

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{A+Ax+B-Bx}{(1-x)(1+x)}$$

$$A+B=1$$
$$A-B=0$$

$$A=B\rightarrow A=\frac{1}{2};\quad B=\frac{1}{2}$$

Por lo que ahora podemos resolver la integral de la siguiente manera

$$\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(-\ln(1-x)+\ln(1+x))$$

2. Primero debemos resolver el problema ocupando fracciones parciales de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(x+3)(x^2+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x+3)}{(x+3)(x^2+4)}$$

$$\frac{Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C}{(x+3)(x^2+4)}$$

Con esto llegamos al siguiente sistema de ecuaciones

$$1 = Ax^2+4A+Bx^2+3Bx+Cx+3C$$

$$\begin{aligned} A \ + B \ &= 0 \\ 3B + C \ &= 0 \\ 4A + 3C &= 1 \end{aligned}$$

dándonos

$$A = \frac{1}{13}; \qquad B = \frac{-1}{13}; \qquad C = \frac{3}{13}$$

Por lo que nos daría:

$$\int \frac{1}{(x+3)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \frac{1}{13}\left(\underbrace{\int \frac{1}{(x+3)}\mathrm{d}x}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{x}{(x^2+4)}\mathrm{d}x}_{I_2} + \underbrace{\int \frac{3}{(x^2+4)}\mathrm{d}x}_{I_3}\right)$$

$I_1 = \int \frac{1}{(x+3)}\mathrm{d}x = \ln(|x+3|) + C_1$
$I_2 = \int \frac{x}{(x^2+4)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(|x^2+4|) + C_2$
$I_3 = \int \frac{3}{(x^2+4)}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C_3$

Ahora si hacemos $C_1 + C_2 + C_3 = C$

$$\int \frac{1}{(x+3)(x^2+4)}\mathrm{d}x = \ln(|x+3|) + \frac{1}{2}\ln(|x^2+4|) + \frac{3}{2}\arctan(\frac{x}{2}) + C \qquad \square$$