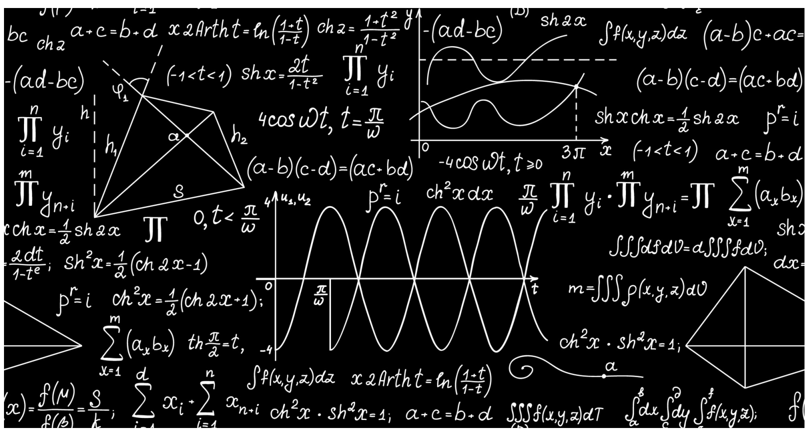
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas - Departamento de Matemática

Límites Cálculo I

Compilado de Ejercicios Resueltos



Sebastián Breguel, Alumno de Ingeniería Civil

sebabreguel@uc.cl

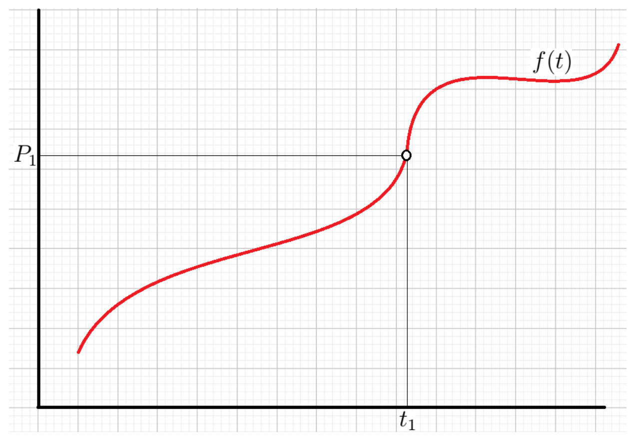
Contents

1 Límites y continuidad

1.1 Concepto de límite

Antes de iniciar a hacer cálculos números y demases, **me gustaría primero entregar una definición de un límite más bien teórico con un ejemplo cotidiano**.

• Imagínense que ustedes van marcando con una **línea de pintura** el camino que llevan por un recorrido x que es muy largo, en cierto punto ustedes se detienen habiendo recorrido el trayecto en un t tiempo, se dan cuenta que pueden llevar el camino trazado a una función $f(t)$. Al día siguiente se acuerdan que en un momento de tiempo t_1 no pudieron marcar un punto del camino que llamaremos P_1 y el profesor les pide estimar su posición en base al momento t_1 en que no pudieron marcar ese punto. **¿Cómo lo calcularían si la función presenta un problema en ese punto P_1?**



acá el problema es que la función $f(t)$, al igual que la pintura no nos logra entregar ese valor. En estos casos es cuando el cálculo de un límite toma una medida práctica, que vendría siendo finalmente la estimación de la posición en base a $f(t)$ nos dará finalmente ese punto en base al camino que nosotros estábamos recorriendo.

$$\lim_{t \to t_1} f(t) = P_1$$

enseguida pasando ya a una definición mas formal del límite sería la siguiente:

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad de a, entonces decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es l si podemos obtener valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a a l tomar x lo suficientemente cercano a a. Se anota matemáticamente como

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Definición: Sea $f(x)$ una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces se dice que $f(x)$ es una *forma indeterminada* si en $x = a$ si $f(a)$ es de la forma $0/0$, ∞/∞,0^∞, $\infty/0$, $0 \cdot \infty$, etc...

Leyes de los límites

Teorema: es importante recalcar que **la existencia de un límite** depende totalmente de que se cumpla la condición de que sus límites laterales convergen al mismo valor, es decir si

$$\lim_{x\to\ a^+} f(x) = \lim_{x\to\ a^-} f(x) = L \to \lim_{x\to\ a} f(x) = L$$

Algunas de las **propiedades de los límites**, que nos permiten ”jugar” con las expresiones se define como:

Sean $\alpha, \beta \ \in \mathbb{R}$ constantes y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- límite de una constante: $\lim_{x\to a} \alpha = \alpha$
- Homogeneidad: $\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha\mathbf{A}$
- Superposición: $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$
- Linealidad: $\lim_{x\to a}[\alpha f(x) \pm \beta g(x)] = \alpha\mathbf{A} \pm \beta\mathbf{B}$
- Producto: $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
- Cuociente: $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$, Si y solo si $B \neq 0$

Cambio de variable

Una técnica que es habitual en el curso es la sustitución. La idea detrás de realizar esta operación es siempre la misma: una expresión complicada de trabajar y/o analizar es reemplazada pertinente y correctamente por otra expresión mucho más sencilla de observar.

Teorema: Sean f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcioness tales que:
• $\lim_{x\to a} f(x) = l$ con $f(x) \neq l$ en una vecindad reducida de a entonces

$$u = f(x)$$

Entonces cuando $x \to a$ tendremos $u \to l$, finalmente nos queda

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \longrightarrow \lim_{u\to l} g(u) = M$$

fórmulas y propiedades útiles

Durante el desarrollo del curso y mas específicamente en la primera parte de límites, tendran que ocupar muchas fórmulas constantemente, donde la mayoria de estas son:

■ **Polinomios**

- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- $x^2 - (r+s)x + rs = (x-r)(x-s)$
- $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
- $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

Ahora mas como fórmulas generales para factorizar polinomios, cuando estos no son tan tipicos son dos

- $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{R}$
- $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad n:$ **Impar**

■ **Propiedades trigonométricas**

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\beta)\sin(\alpha)$
- $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a \mp b}{2}\right)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$
- $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
- $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

■ **límites notables**: son un conjunto de límites que es importante que sepan de "memoria" entendiendo el proceso que hay detras, pero saberlos puede hacerlos ganar una gran cantidad de tiempo.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{u\to 0} (1+u)^{(1/u)} = e$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{kx} - 1)}{x} = k\ln(a)$

1.2 Calculo de límites

1.2.1 raíces y polinomios

1. En este item deberán aplicar reglas básicas de la matemáticas para ir soltando la mano.

(a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$

(c) $\lim_{t \to 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

(d) $\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

Soluciones:
(1a**)** Para este ejercicio ocuparemos la fórmula de diferencia de cuadrados a nuestro favor, donde definiremos primero $a_1 = x^2; b_1 = 4$ y luego $a_2 = x; b_2 = 2.$ enseguida reemplazando en la fracción logramos lo siguiente:

$$\frac{x^4 - 16}{x - 2} = \frac{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}{x - 2} = \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{x - 2}$$

Finalmente con este resultado logramos notar que podremos simplificar la fracción al momento de evaluarlo en el límite y así lograr encontrar el resultado:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 4)(x + 2) = 8 \cdot 4 = 32$$

(1b**)** En este ejercicio deben lograr factorizar la fracción que a simple vista sale de rápida manera, es de la siguiente forma:

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$$

Ahora nos resultará mucho más fácil encontrar el valor del límite solicitado.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{1} = 1$$

(1c**)** En este caso para lograr simplificar la fracción de alguna manera, la elegida en este caso será la de ver el numerador de la fracción como una diferencia de cuadrados $(a^2 - b^2)$ para así lograr ampliar el numerador:

$$\frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}} = \frac{(3 - \sqrt{t})(3 + \sqrt{t})}{3 - \sqrt{t}}$$

Con esto logramos notar que podemos simplificar el límite y encontrar su valor:

$$\lim_{t \to 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}} = \lim_{t \to 9} \frac{(3 - \sqrt{t})(3 + \sqrt{t})}{3 - \sqrt{t}} = \lim_{t \to 9} 3 + \sqrt{t} = 6$$

(1d) en este ejercicio notamos una diferencia que ahora tenemos una resta de cubos, por lo que debemos ocupar esta fórmula para factorizar el numerador y lograr poder calcular el límite.

$$(2+h)^3 - 8 = ((2+h)-2)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4) = (h)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)$$

Luego podemos calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(h)((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{((2+h)^2 + 2(2+h) + 4)}{1} = 4 + 4 + 4 = 12$$

2. Ya se empiezan a requerir mayores habilidades como lo son racionalizaciones o el trabajo con valores absolutos.

(a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{2-|1-x|}$

(c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ **(I1-2012-1)**

(d) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{2x+6} - 4}{x-5}$

(e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x^2}$ **(I1-2016-tav)**

Soluciones:
(2a) Para resolver el ejercicio debemos factorizar el numerador que se nota fácilmente cual es:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x+1} = \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$

Con esto lograremos de manera fácil calcular el límite solicitado.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x-2}{1} = -3$$

(2b) Notamos que el límite se indefine, por lo que factorizamos en ambas partes de la fracción llegando a:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

enseguida sabiendo la factorización podemos obtener el valor simplificando la expresión.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{((x+2)} = \frac{1}{4}$$

(2c) Este límite es más fácil de notar ya que tenemos un fracción con una raíz solo en el denominador, por lo que seguimos el método de la racionalización para acomodar la fracción y luego aplicar el límite.

$$\frac{\sqrt{2x+6} - 4}{x-5} \cdot \frac{\sqrt{2x-6} + 4}{\sqrt{2x-6} + 4} = \frac{2x - 10}{(x-5)(\sqrt{2x-6} + 4)}$$

Enseguida aplicamos el límite a la expresión.

$$\lim_{x\to 5} \frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x+6}+4)} = \lim_{x\to 5} \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x+6}+4)} = \lim_{x\to 5} \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4}$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} = \frac{2}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{4}$$

(2d) En el caso de este límite notamos que tenemos un valor absoluto que nos puede causar problemas al momento de calcular el límite. Aunque notamos que en el punto no habría un cambio de signo, por lo que solo hace falta notar cuál sería el signo en el punto.

$$\frac{2x-6}{2-|1-x|} = \frac{2x-6}{2-(x-1)} = \frac{2x-6}{3-x} = \frac{2(x-3)}{-(x-3)}$$

Con esto notamos que podemos evaluar el límite de manera fácil.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{-(x-3)} = -2$$

(2e) En este ejercicio notamos que se debe racionalizar la fracción ya que arriba tenemos uno de los dos factores necesarios y si logramos racionalizarla, logramos simplificar el x^2 que está en el numerador para lograr evaluarlo en el límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+4-4}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

Con el límite de esta forma logramos notar que es posible evaluar el límite , ya que se simplifican ambos x^2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{0+4}+2} = \frac{1}{4}$$

3. Durante este ítem deberán aplicar factorizaciones y trabajo con valores absolutos en un nivel un poco más alto.

   (a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^4-1}{h}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|2x-7|-|2x-5|}{x-3}$ **(I1-2018-2)**

   (c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^3-a^3}{x^4-a^4}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\ln(x)}{|x-1|}$ **(I1-2018-1)**

Soluciones:
(3a**)** En este límite debemos ampliar el polinomio donde ocuparemos la base de $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ y así iremos ampliando el polinomio:

$$(1+h)^4-1=\left((1+h)^2+1\right)\left((1+h)^2-1\right)=\left((1+h)^2+1\right)((1+h)+1)((1+h)-1)$$

$$(1+h)^4-1=\left((1+h)^2+1\right)(2+h)(h)$$

Enseguida con esto podemos reemplazarlo en el límite y luego simplificar el término (h):

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+h)^4-1}{h}=\frac{((1+h)^2+1)(2+h)(h)}{h}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{((1+h)^2+1)(2+h)}{1}=\frac{(1+1)(2)}{1}=4$$

(3b**)** Para este ejercicio, tenemos dos valores absolutos donde además notamos que en el punto que se evalúa el límite no es en donde se hace el cambio de signo para el valor absoluto, por lo que es fácil notar los signos a cambiar:

$$\frac{|2x-7|-|2x-5|}{x-3}=\frac{-(2x-7)-(2x-5)}{x-3}=\frac{12-4x}{x-3}=\frac{-4(x-3)}{x-3}$$

Enseguida con esto de manera fácil podemos llegar al valor del límite

$$\lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}-4=-4$$

(3c**)** Enseguida notamos que en el denominador tenemos una diferencia de cubos y en el numerador una diferencia de cuadrados, donde ocupando las fórmulas entregadas la fracción termina de la siguiente manera:

$$\frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}=\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}$$

Llevando esto al límite y evaluándose logramos encontrar su valor

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x^4-a^4}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x^2+a^2)(x+a)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{(x^2+a^2)(x+a)}=\frac{3a^2}{(2a^2)(2a)}=\frac{3}{4a}$$

(3d) En el caso de este límite a diferencia del anterior donde teníamos un valor absoluto acá si cambia el signo de este en el punto a evaluar por lo que debemos separar la función en una función por partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\ln(x)}{-(x-1)} & x < 1 \\ \\ \dfrac{(x-1)\ln(x)}{(x-1)} & 1 \leq x \end{cases}$$

Enseguida lo que debemos hacer es calcular los límites laterales para que se cumpla:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

Ya que con esto, se asegura la existencia del límite.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)\ln(x)}{-(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)\ln(x)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1^-} -\ln(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln(x)$$

$$0 = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

Con esto se comprueba que el valor del límite es 0.

4. Ya llegado a este punto es cuando empiezan las preguntas tipo prueba difíciles, donde deben tener un buen manejo con cambios de variable, racionalizaciones y factorización.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt[3]{x-1} - 2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{\sqrt{x} - 1}}$ **(I1-2015-tav)**

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + x}{x - 1}$

Soluciones:
(4a) Notamos que en el numerador y denominador tienen raíces de segundo grado, por lo que debemos racionalizar ambas partes para poder reducir de alguna manera la expresión.

$$\frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} \cdot \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + 3}{\sqrt{4x+1} + 3} = \frac{(x^2 - x - 2)(\sqrt{4x+1} + 3)}{(4x-8)(x + \sqrt{x+2})}$$

Finalmente con esto logramos notar que en el numerador podríamos factorizar y llegar a reducir alguna expresión con el denominador

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x-2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x + \sqrt{x+2})} = \frac{(3)(6)}{4(2+2)} = \frac{18}{16}$$

(4b) Para este ejercicio al igual que el anterior notamos que tenemos ambos tipos de raíces tanto de segundo como de tercer grado. Pero a diferencia del anterior este es resolvible de una manera más fácil. Que es la de hacer una doble racionalización, tanto para el numerador($a^2 - b^2$) como para el denominador($a^3 - b^3$)

$$\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x-1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9}{(\sqrt[3]{x-1}-2)(\sqrt{x}+3)}$$

$$\frac{x-9}{(\sqrt[3]{x-1}-2)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + (\sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}{(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + \sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}$$

$$\frac{(x-9)(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + (\sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

luego de haber realizado esto podemos calcular el límite

$$\lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + (\sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

Reducimos términos y llegamos al valor del límite

$$\lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt[3]{(x-1)})^2) + (\sqrt[3]{x-1}) \cdot 2 + 4)}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{(2)^2 + (2) \cdot 2 + 4}{6} = 2$$

(4c) Notamos que tenemos una raíz en el Denominador de la fracción, por lo que primero intentaremos factorizar.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-1} - \sqrt{\sqrt{x}-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1}} = \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{x - \sqrt{x}}$$

Si vemos el resultado, seguimos teniendo un problema en el denominador pero si notamos al ojo este nos causaría un problema si racionalizamos nuevamente(quedaría un término x^2). Enseguida cómo es que seguimos el ejercicio entonces, tal vez si llegamos a bajar la expresión de grado podría resultar, por lo que procedemos a hacerlo.

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{x - \sqrt{x}} = \frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

Luego de haber bajado de grado la fracción creemos que ahora es más fácil de racionalizar:

$$\frac{(x-1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}(x-1)}$$

Finalmente notamos que la expresión es reducible($x-1$) y lograremos reemplazar el límite.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x-1} + \sqrt{\sqrt{x}-1})}{\sqrt{x}} = \frac{2 \cdot 0}{1} = 0$$

(4d) Este ejercicio debemos iniciarlo, no por la forma típica, sino que debemos pensar en algun cambio de variable que nos facilite hacer la resta, ya que al trabajar con raíces todo es un poco más complicado. Para simplificar llegamos a hacer el cambio de variable:

$$u = \sqrt{x}; \quad u \to 1 \quad x \to 1$$

Enseguida reemplazando esto, notamos que se hace mucho más fácil

$$\lim_{u \to 1} \frac{1}{u-1} - \frac{u+u^2}{u^2-1} = \lim_{u \to 1} \frac{u+1-u-u^2}{u^2-1}$$

Finalmente nos quedaría:

$$\lim_{u \to 1} \frac{1-u^2}{u^2-1} = \lim_{u \to 1} \frac{-(u^2-1)}{u^2-1} = -1$$

5. Llegado a este punto es cuando terminamos con las preguntas mas difíciles de toda esta subsección, donde se necesita un analizis mas alla de los clasíco, Suerte!

   (a) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$

   (b) $\lim_{x\to3} \frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}} - 1}{x-3}$ **(I1-2019-tav)**

   (c) $\lim_{x\to1} \frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3}$ **(I1-2015-1)**

   (d) $\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[7]{x}}$

Soluciones:

(5a) Este ejercicio es de alta dificultad, ya que notamos que tenemos una fracción de segundo y tercer grado. Por lo que no sabemos cual es la mejor manera de tratar esto es ver cada raíz por separado, **Pero primero debemos sumar 0:**

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^3+x+1} + 1 - 1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - 1 - (\sqrt[3]{x^3+x+1} - 1)}{x}$$

Reordenando llegamos a

$$\underbrace{\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x}}_{\beta}$$

Por lo que ahora es más fácil de ver lo que hay que hacer, qué sería racionalizar cada fracción y así llegar al valor del límite :

$$\alpha = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \lim_{x\to0} \frac{x^2+x}{(x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

$$\alpha = \lim_{x\to0} \frac{x(x+1)}{(x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = \lim_{x\to0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}-1}{x} \cdot \frac{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}$$

$$\beta = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2+1)}{(x)(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)}$$

$$\beta = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+1)}{(\sqrt[3]{(x^3+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^3+x+1}+1)} = \frac{1}{3}$$

Ahora juntando ambos valor y volviendo al límite original:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x+1}+1-1}{x} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

5b.- La forma de afrontar este ejercicio es un poco más difícil que la típica, ya que lo normal sería juntar la fracción para luego racionalizar quedándonos algo como esto

$$\frac{\frac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}}{x-3} = \frac{\frac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}}{x-3} = \frac{\frac{2\sqrt{x+1}-(x+1)}{x+1}}{x-3}$$

Pero según vemos por este método es un poco difícil continuar ya que el problema sigue existiendo. Por lo tanto seguiremos un método nuevo y bastante peculiar, que es el de racionalizar toda la fracción de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1}{x-3}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1}{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1} = \frac{\frac{4}{x+1}-1}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \frac{\frac{3-x}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)}$$

Enseguida con esto notamos que si es posible simplificar la fracción al momento de evaluar el límite y así podemos calcularlo:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{(3-x)}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{-(x-3)}{x+1}}{(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x+1)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1\right)} = \frac{-1}{(4)(\frac{2}{2}+1)} = \frac{-1}{(4)(2)} = \frac{1}{-8}$$

(5c) En este ejercicio será necesario aplicar un conocimiento mayor/diferente que en los ejercicios que hemos resuelto, ya que es necesario saber sobre división de polinomios para poder factorizar ambas partes de la fracción, ya que ambas se vuelven 0. Con esto logramos saber que $(x-1)$ es un factor de ambos polinomios, por lo que procedemos a hacer la división de polinomios:

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^4+2x^3-4x^2+4x-4 & (x-1)=x^3+3x^2+4 \\
x^4-x^3 \qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-\ 3x^3-3x+4x-4 & \\
3x^3-3x \qquad\quad & \\
\hline
-\ 4x-4 & \\
4x-4 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Por lo que la primera factorisación nos quedaría:

$$x^4+2x^3-4x^2+4x-4=(x-1)(x^3+3x^2+4)$$

Enseguida el polinomio del denominador lo dividimos por el factor:

$$
\begin{array}{r|l}
-\ x^4+0+0+2x-3 & (x-1)=x^3+x^2+x+3 \\
x^4-x^3 \qquad\qquad\quad & \\
\hline
-\ x^3-0+\quad x-3 & \\
x^3-x^2 \qquad\quad & \\
\hline
-\ x^2+2x-3 & \\
x^2-x \qquad & \\
\hline
-\ 3x-3 & \\
3x-3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Quedándonos la factorización de la siguiente manera:

$$x^4+0+0+2x-3=(x-1)(x^3+x^2+x+3)$$

Por lo que ahora si es posible calcular el límite :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3-3x^2+4x-4}{x^4+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+3x^2+4)}{(x-1)(x^3+x^2+x+3)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2+4}{x^3+x^2+x+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

(5d) acá lo que debemos hacer es intentar factorizar de alguna manera ambas partes de la fracción por el factor $(x+1)$,El único método que se nos ocurre es mediante la **Racionalizacion** de ambas partes.
Para saber esto debemos saber la siguiente propiedad del triángulo de pascal para factorización de suma de elevados impares son:

$$(a^3+b^3) = (a+b)(a^2+ab+b^2)$$

$$(a^5+b^5) = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

$$(a^7+b^7) = (a+b)(a^6-a^5b^1+a^4b^2-a^3b^3+b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$$

Por lo que ahora sabiendo esto aplicamos la racionalización para el numerador como para el denominador:

$$\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[7]{x}} \cdot \frac{(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \cdot \frac{(1-\sqrt[7]{x}+\sqrt[7]{x^2}-\sqrt[7]{x^3}+\sqrt[7]{x^4}-\sqrt[7]{x^5}+\sqrt[7]{x^6})}{(1-\sqrt[7]{x}+\sqrt[7]{x^2}-\sqrt[7]{x^3}+\sqrt[7]{x^4}-\sqrt[7]{x^5}+\sqrt[7]{x^6})}$$

$$\frac{(1+x)(1-\sqrt[7]{x}+\sqrt[7]{x^2}-\sqrt[7]{x^3}+\sqrt[7]{x^4}-\sqrt[7]{x^5}+\sqrt[7]{x^6})}{(1+x)(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

Enseguida con esto podemos simplificar la fracción y aplicar el límite

$$\lim_{x\to\ -1} \frac{1+x}{1+x} \frac{(1-\sqrt[7]{x}+\sqrt[7]{x^2}-\sqrt[7]{x^3}+\sqrt[7]{x^4}-\sqrt[7]{x^5}+\sqrt[7]{x^6})}{(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$$

$$\lim_{x\to\ -1} \frac{(1-\sqrt[7]{x}+\sqrt[7]{x^2}-\sqrt[7]{x^3}+\sqrt[7]{x^4}-\sqrt[7]{x^5}+\sqrt[7]{x^6})}{(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} = \frac{7}{3} \qquad \square$$

1.2.2 Trigonometricos

1. Calcular los siguientes límite s

(a) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$ **(I1-2011-2)**

(c) $\lim_{x\to 3}(x-3)\csc(\pi x)$ **(I1-2017-1)**

(d) $\lim_{x\to\pi/4} \frac{2\sin(x)-\sqrt{2}}{4x-\pi}$ **(I1-2017-2)**

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(4x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

(1a**)** En este ejercicio notamos que es del tipo $\frac{0}{0}$, por lo que debemos hacer un cambio de variable para poder calcular este límite. El cambio es un poco notorio debido al denominador de la fracción donde sería:

$$u = x-\pi \to x = u+\pi$$

$$x\to\pi \qquad u\to 0$$

Enseguida aplicando esto en el límite nos queda:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u+\pi)}{u}$$

Para resolver el límite , debemos usar la fórmula de suma de angulos dándonos:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)(-1)+(0)\cos(u)}{u} \lim_{u\to 0} -\frac{\sin(u)}{u}$$

Finalmente notamos que llegamos al resultado de uno de los límites notables que nosotros sabemos, por lo que podemos calcularlo:

$$\lim_{u\to 0} -\frac{\sin(u)}{u} = -1$$

(1b**)** Este límite en específico podemos llevar gran parte de este a un límite notable, junto con una simplificación simple que sería

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x-\sin(x)}{x}}{\frac{x+\sin(x)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}}$$

Luego de esto podemos aplicar las reglas de los límites y hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}1-\dfrac{\sin(x)}{x}}{\lim_{x\to 0}1+\dfrac{\sin(x)}{x}}$$

Para terminar ocupamos otra regla de los límites que nos permite:

$$\frac{\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}}{\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(1c**)** La resolución de este ejercicio es mediante un cambio de variable que es bastante obvio, ya que si escribimos el límite notamos que es de la forma $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{\sin(\pi x)}$$

Enseguida haciendo el cambio de variable

$$u=x-3\to u+3=x$$

$$x\to 3 \qquad u\to 0$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin(\pi x)}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin(\pi(u+3))}$$

El problema más común es una vez llegando a este punto, debido a no saber que hacer con él $\sin(\pi(u+3))$, pero primero aprovechamos de su periodicidad haciendo

$$\sin(u\pi+3\pi)=\sin(u\pi+\pi)$$

luego de esto ocuparemos la siguiente propiedad

$$\sin(u+\pi)=-\sin(u)\to\sin(u\pi+\pi)=-\sin(u\pi)$$

Reemplazamos esto en el límite

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin(\pi(u+3))}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{-\sin(u\pi)}$$

Finalmente solo debemos seguir el método para llegar al límite notable

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{-\sin(u\pi)}\cdot\frac{\pi}{\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{u\pi}{(-\pi)\sin(u\pi)}=-\frac{1}{\pi}$$

(1d) Debemos abordar este ejercicio desde el cambio de variable, donde tenemos dos opciones de cambios de variable los cuales son

$$u_1 = x - \frac{\pi}{4} \quad o \quad u_2 = 4x - \pi$$

$$u_1 + \frac{\pi}{4} = x \qquad o \qquad \frac{u_2 + \pi}{4} = x$$

En mi caso elijo u_1, ya que me es más fácil trabajar el denominador y el sin con las propiedades de suma de ángulos.

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi} = \lim_{u \to 0} \frac{2\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{4u}$$

$$\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(u)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(u) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(u)$$

Recordamos que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\lim_{u \to 0} \frac{2\left(\frac{\sin\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right) - \sqrt{2}}{4u} = \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u) + \sqrt{2}\cos(u) - \sqrt{2}}{4u}$$

Enseguida factorizamos y separamos la suma en la siguiente manera:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{4u} + \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\cos(u) - 1)}{u}$$

Finalmente notamos que el primer y segundo término son límites notables que sabemos, los que son 1 y 0.

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{4u} + \lim_{u \to 0} \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{(\cos(u) - 1)}{u} = \frac{\sqrt{2}}{4} + 0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(1e) Partimos de la premisa de que debemos ocupar si o si la expresión del límite notable:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

Por lo que debemos separar el límite en dos de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{1} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin(4x)}$$

Enseguida debemos lograr llevarlo al límite notable ambas fracciones y nos dará el resultado:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x)}{1} \cdot \frac{7x}{7x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(4x)}{1} \cdot \frac{4x}{4x}\right)^{-1} = \lim_{x \to 0} 7x \frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{4x\sin(4x)}{4x}\right)^{-1}$$

Ya con esto podemos aplicar el límite notable y encontrar el valor final del límite solicitado:

$$\lim_{x\to 0} 7x\frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{4x\sin(4x)}{4x}\right)^{-1} = \lim_{x\to 0} 7x \cdot (4x)^{-1} = \lim_{x\to 0} \frac{7x}{4x} = \frac{7}{4}$$

(1f) Este límite se parece mucho a uno de los límites notables que nosotros sabemos, pero por eso mismo es importante saber el desarrollo para llegar al valor.
Primero notamos que en el numerador tenemos $1 - \cos(x)$, lo cual si lo vemos de cierta manera es uno de los términos de la suma por su diferencia, por lo que multiplicamos por el faltante que sería

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{(\sin^2(x))(1+\cos(x))}$$

Usando la propiedad: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \to \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ y reemplazando en el límite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{(\sin^2(x))(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

.

2. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x}$ **(I1-2019-2)**

   (b) $\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x^2-x-2)}{x+1}$ **(I1-2014-1)**

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)+\sin(\pi x)}{\sin(ex)+\sin(4x)}$ **(I1-2018-1)**

   (d) $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\tan(4x)}{2x-\pi}$ **(I1-2019-1)**

   (e) $\lim_{x\to \pi/3} \frac{1-2\cos(x)}{\sin(x-\pi/3)}$

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)}$ **(I1-2010-2)**

(2a) El límite , debe ser analizado desde la visión de la siguiente propiedad:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} \tag{1}$$

Siendo u cualquier cosa, por lo que hacemos la siguiente operación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x}$$

Luego de esto podemos por regla de límites hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Donde notamos que ambos límites nos terminarían dando 1, ya que ambos se pueden adoptar y llevar a la forma de (1). Por lo que el valor final sería:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

(2b) A pesar de parecer complicado, este límite es bastante fácil por qué debemos llevarlo a tal forma de poder hacer el cambio de variable y llegar al límite notable.
Enseguida que sabemos que debemos hacer eso, primero factorizamos el polinomio que está dentro del sin, el cual sabemos que tiene como uno de los factores $x + 1$, ya que se hace 0 cuando $x \to -1$.

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$$

Luego de esto reemplazandolo en el límite sabemos por lo que debemos amplificar ambas partes de la fracción:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sin((x+1)(x-2))}{x+1} \cdot \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-2)\sin((x+1)(x-2))}{(x+1)(x-2)}$$

Finalmente podríamos hacer un cambio de variable como $u = x + 1$ y reemplazarlo en la fracción, pero esto no es necesario, lo que importa es entender que siempre que suceda algo parecido como que el sin sea acompañado por algo, abajo debe estar lo mismo y ahí se puede reducir como 1. Con esto llegamos a:

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x-2)\sin((x+1)(x-2))}{(x+1)(x-2)} = (-3)\cdot 1 = -3$$

(2c) La manera de enfrentar este ejercicio es en base a las propiedades de los límites que nos permiten hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) + \sin(\pi x)}{\sin(ex) + \sin(4x)} = \frac{\lim_{x\to 0}\sin(2x) + \lim_{x\to 0}\sin(\pi x)}{\lim_{x\to 0}\sin(ex) + \lim_{x\to 0}\sin(4x)}$$

Donde ahora llevamos un límite que parecía de cierta manera bastante raro a cuatro límites que por sí solos son bastante simples que los podemos llevar al límite notable conocido. Por lo que trabajamos cada límite por separado y luego los evaluamos

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{1}\cdot\frac{2x}{2x} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\pi x)}{1}\cdot\frac{\pi x}{\pi x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ex)}{1}\cdot\frac{ex}{ex} + \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{1}\cdot\frac{4x}{4x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 2x\frac{\sin(2x)}{2x} + \lim\limits_{x\to 0}\pi x\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}{\lim\limits_{x\to 0} ex\frac{\sin(ex)}{ex} + \lim\limits_{x\to 0}4x\frac{\sin(4x)}{4x}}$$

Después de esto tratamos cada límite por sí solo, donde cada uno nos dará 1 y luego podemos hacer un proceso inverso al inicial que sería lo siguiente:

$$\frac{\lim_{x\to 0} 2x\cdot 1 + \lim_{x\to 0} ex \cdot 1}{\lim_{x\to 0} ex\cdot 1 + \lim_{x\to 0} 4x\cdot 1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+\pi x}{ex+4x}$$

Finalmente podemos factorizar por x y luego reducirlo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(2+\pi)}{x(e+4)} = \frac{2+\pi}{e+4}$$

(2d) acá lo que se debe hacer es un cambio de variable, ya que de esa forma logramos deshacernos del polinomio y ocupando propiedades trigonométricas. Recordar que es posible hacer dos cambios de variable.

$$u_1 = x - \frac{\pi}{2} \quad o \quad u_2 = 2x - \pi$$

$$x \to \frac{\pi}{2} \qquad u \to 0$$

En este caso, elegiremos u_2, ya que al momento de reemplazar x en el numerador se nos hace más fácil al reemplazarlo

$$2x = u + \pi \to 4x = 2u + 2\pi$$

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan(4x)}{2x-\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u+2\pi)}{u}$$

Enseguida es cuando se nos genera el problema, ya que la forma más esperable de seguir desarrollando el ejercicio sería desarrollando la tangente como $\frac{\sin}{\cos}$, pero hay una forma mucho más fácil en la que es necesario aplicar la siguiente propiedad de la tangente:

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi), \quad k \in \mathbb{R}$$

Notamos que en este caso $k = 2$, por lo que podemos proceder a resolver el límite y luego llevarlo a un límite notable que deberíamos saber

$$\lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u+2\pi)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(2u)}{u} \cdot \frac{2}{2} = \lim_{u\to 0} 2\frac{\tan(2u)}{2u} = 2$$

(2e) La forma en que llevaremos este ejercicio, será mediante un cambio de variable

$$u = x - \frac{\pi}{3} \to u + \frac{\pi}{3} = x$$

$$x \to \frac{\pi}{3} \qquad u \to 0$$

Donde nos quedaría:

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{1-2\cos(x)}{\sin(x-\pi/3)} = \lim_{u\to 0} \frac{1-2\cos\left(u+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin(u)}$$

Ocupamos la fórmula de suma de ángulos

$$1 - 2\cos(u + \frac{\pi}{3}) = 1 - 2\left(\cos(u)\cos(\frac{\pi}{3}) - \sin(u)\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 1 - 2\left(\frac{\cos(u)}{2} - \frac{\sin(u)\sqrt{3}}{2}\right)$$

Finalmente reemplazamos en el límite , donde debemos separar en dos límites uno notable y otro que es una simplificación, con lo que llegamos al valor del límite.

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)+\sin(u)\sqrt{3}}{\sin(u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)}{\sin(u)}+\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)\sqrt{3}}{\sin(u)}=0+\sqrt{3}$$

(2f) Partimos el límite , donde la principal dificultad es racionalizar la expresión para luego calcularlo como un límite notable

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}=\frac{x^2+x}{\sin(4x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$$

Luego de esto debemos factorizar el numerador, amplificar la fracción por 4 y luego reducir la expresión y calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{\sin(4x)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}\cdot\frac{4}{4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin(4x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{4(\sqrt{x^2+x+1}+1)}=\frac{1}{8}$$

3. (a) $\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{\sin^2(x)}$ **(I1-2015-1)**

   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(5x)}$ **(I1-2011-2)**

   (c) $\lim_{x\to -2}\frac{\tan(\pi x)}{x+2}$ **(I1-2009-2)**

   (d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x)}$ **(I1-2016-1)**

   (e) $\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^3-2x^2-3x}$

   (f) $\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/4}$ **(I1-2018-2)**

(3a) Notamos que este ejercicio es muy parecido al 1a, ya que el cambio de variable que se tiene que hacer es el mismo, y el resultado de hecho será el mismo pero con unas diferencias. Primero empezaremos haciendo lo siguientes ocupando las propiedades de las potencias y fracciones:

$$\frac{(x-\pi)^2}{\sin^2(x)} = \left(\frac{x-\pi}{\sin(x)}\right)^2 = \left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2}$$

Enseguida esto lo llevamos al límite , donde aplicando propiedades podemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2} = \left(\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-pi}\right)^{-2}$$

Luego calculamos el valor el límite de la siguiente manera:

$$u = x-\pi \to x = u+\pi$$

$$x\to\pi \qquad u\to 0$$

Enseguida aplicando esto en el límite nos queda:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u+\pi)}{u}$$

Para resolver el límite , debemos usar la fórmula de suma de ángulos dándonos:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)\cos(\pi)+\sin(\pi)\cos(u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)(-1)+(0)\cos(u)}{u}\lim_{u\to 0}-\frac{\sin(u)}{u}$$

Notamos que llegamos al resultado de uno de los límites notables que nosotros sabemos, por lo que podemos calcularlo:

$$\lim_{u\to 0}-\frac{\sin(u)}{u} = -1$$

Finalmente debemos aplicar la potencia para encontrar el valor del límite solicitado:

$$\left(\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi}\right)^{-2} = (-1)^{-2} = 1$$

(3b) Al igual que en el ejercicio anterior debemos racionalizar la fracción para luego llegar a un límite notable por otro valor

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin(5x)}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{x}{\sin(5x)(\sqrt{x+4}+2)}$$

Para terminar amplificamos por 5 y llegamos al valor del límite evaluando

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{5\sin(5x)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{5(2+2)} = \frac{1}{20}$$

(3c) acá debemos realizar el siguiente cambio de variable

$$u = x + 2 \to u - 2 = x$$

$$x \to -2 \qquad u \to 0$$

Llevando esto al límite nos queda

$$\lim_{x \to -2} \frac{\tan(\pi x)}{x+2} = \lim_{u \to 0} \frac{\tan(\pi(u-2))}{u}$$

Enseguida debemos aplicar la propiedad de la tangente y luego podemos reducir el límite notable

$$\lim_{u \to 0} \frac{\tan(\pi(u) - 2\pi)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\tan(\pi u)}{u} \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{\pi \tan(\pi u)}{\pi u} = \pi$$

(3d) A simple vista, este ejercicio parece muy fácil, ya que si primero racionalizamos y luego ocupamos la propiedad $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ es bastante simple pero hay un paso que es importante recordar. Partimos por racionalizar y ocupar la propiedad

$$\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sin(x)} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos(x)}}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{\sqrt{\sin^2(x)}}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x))}}$$

Después de este paso por favor, tener mucho cuidado, ya que el típico error es asumir algo que es falso.

$$\sqrt{\sin^2(x)} \neq \sin(x) \to \sqrt{\sin^2(x)} = |\sin(x)| \checkmark$$

Reemplazamos esto en el límite y es evidente ahora que el problema es el valor absoluto, ya que se produce el cambio en el punto donde evaluamos. llevando esta expresión a una función a tramos nos quedaría de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} & x < 0 \\ \\ \dfrac{\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} & 0 \leq x \end{cases}$$

Finalmente debemos evaluar los límites laterales para determinar si existe o no $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Con estos resultados podemos determinar que como los límites laterales son distintos, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

(3e) En este ejercicio lo único que debemos factorizar el denominador de la fracción en base al factor $(x-3)$:

$$\frac{\sin(x-3)}{x^3-2x^2-3x} = \frac{\sin(x-3)}{x(x-3)(x+1)}$$

Enseguida podemos simplificar la expresión con el límite notable y evaluarlo

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x(x-3)(x+1)} = \frac{1}{3(4)} = \frac{1}{12}$$

(5a) El problema acá, presenta una dificultad en el punto donde debemos decidir que hacer con el valor absoluto, el cual luego de analizarlo notamos que no debes hacer ningún cambio y luego notamos que es posible reducir el límite , ya que es un límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{(0+1)1}{2} = \frac{1}{2}$$

(3f) Para la resolución de este ejercicio, debemos hacer un cambio de variable, el cual se basara en tratar dejar de manera simple el denominador

$$u = x - \frac{\pi}{4} \to u + \frac{\pi}{4} = x$$

$$x \to \frac{\pi}{4} \qquad u \to 0$$

Haciendo el cambio de variable y luego tenemos que hacer uso de las fórmulas de suma de ángulos

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/4} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u+\frac{\pi}{4}) - \sin(u+\frac{\pi}{4})}{u}$$

$$\sin(u+\frac{\pi}{4}) = \sin(u)\cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(u)\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}$$

$$\cos(u+\frac{\pi}{4}) = \cos(u)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(u)\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}$$

usando esto en el límite nos queda

$$\lim_{u\to 0} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2} + \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right)}{u}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\left(\frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\sin(u)}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2} - \frac{\sqrt{2}\cos(u)}{2}\right)}{u}$$

Finalmente notamos que se nos reduce la expresión y calcular el límite es fácil

$$\lim_{u\to 0} \frac{-\sqrt{2\sin(u)}}{u} = -\sqrt{2}$$

4. Analice el siguiente límite dependiendo de los casos de a y b. CHONWEREIN

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(ax)}{x+\sin(bx)}$$

(4) Este ejercicio se tiene que enfrentar, presentándose ante supuestos y luego con casos más generales.

- Caso 1: $a=0$ y $b=0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$
- Caso 2: $a\neq 0$ y $b=0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(ax)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{a\sin(ax)}{ax} = 1-a$$
- caso 3: $a=0$ y $b\neq 0$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\frac{\sin(bx)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\frac{b\sin(bx)}{bx}} = \frac{1}{1+b}$$
Ahora tenemos dos casos posibles, dependiendo de los posibles valores de b.
$$\frac{1}{1+b}\begin{cases} \textbf{no existe} & b=-1 \\ \dfrac{1}{1+b} & b\neq -1 \end{cases}$$
- caso 4: $a\neq 0$, $b\neq 0$ y $b\neq -1$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(ax)}{x+\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{a\sin(ax)}{ax}}{1+\frac{b\sin(bx)}{bx}} = \frac{1-a}{1+b}$$
- caso 5: $a\neq 0$, $a\neq 1$ y $b=-1$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(ax)}{x-\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{a\sin(ax)}{ax}}{1-\frac{\sin(x)}{x}} = \pm\infty, \textbf{No existe}$$
- caso 6: $a=1$ y $b\neq -1$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x-\sin(x)} = 1$$
Con esto tenemos cubiertos todos los casos para a y b.

5. Existen los siguientes límites? calcúlese; en caso contrario, explique por qué no existe/n.

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2}$ **(I1-2016-2)** (b) $\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(x)|}{x^2+x}$ **(I1-2015-2)**

(5a**)** El problema acá, presenta una dificultad en el punto donde debemos decidir qué hacer con el valor absoluto, el cual luego de analizarlo notamos que no debes hacer ningún cambio y luego notamos que es posible reducir el límite , ya que es un límite notable

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)(1-\cos(x))}{x^2} = \frac{(0+1)1}{2} = \frac{1}{2}$$

(5b**)** Para saber si existe o no el límite solicitado, debemos hacerla una función por partes, ya que esta cambia en el punto solicitado

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin(x)}{x^2+x} & x < 0 \\ \\ \dfrac{\sin(x)}{x^2+x} & 0 \leq x \end{cases}$$

Ahora para que el límite que nos piden exista, los límites laterales deben ser iguales, por lo que los calculamos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = 1$$

Finalmente notamos que no se cumple que los límites laterales sean iguales. por lo que el límite solicitado no existe.

6. Determine, justificadamente, el valor de **(I1-2019-1)**

$$\lim_{x\to -\pi} \sin(\sin(x)+x)$$

(6**)** Para el cálculo de este límite , debemos aplicar una de las propiedades que nos permite

$$\lim_{x\to -\pi} \sin(\sin(x)+x) = \sin(\sin(\lim_{x\to -\pi} x) + \lim_{x\to -\pi} x)$$

Esto lo podemos hacer ya que sin y x son funciones continuas. Dándonos finalmente

$$\sin(\sin(-\pi)-\pi) = \sin(0-\pi) = 0$$

7. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{\cos(x-1)} - \sqrt{\cos(x-1)})}{\sin^2(x-1)}$

Hint: revisar el ejercicio 5a de la sección anterior

(7) Antes de seguir el **Hint** haremos un cambio de variable para que el ejercicio sea más fácil visualmente

$$u = x-1 \qquad x\to 1, \quad u\to 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{\cos(x-1)} - \sqrt{\cos(x-1)}}{\sin^2(x-1)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - \sqrt{\cos(u)}}{\sin^2(u)}$$

Ahora con esta expresión es más notorio los pasos que debemos seguir, tomando como referencia el ejercicio 5a, partiendo por agregar $-1+1$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1 - \sqrt{\cos(u)} + 1}{\sin^2(u)} = \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} - \frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)}$$

Notamos que el paso que debemos seguir es ahora racionalizar cada expresión por separado

$$\frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1}{\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)}$$

$$\frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)} \cdot \frac{\sqrt{\cos(u)} + 1}{\sqrt{\cos(u)} + 1} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt{\cos(u)} + 1)}$$

Ahora con ambas expresiones racionalizadas podemos calcular el límite por separado de cada una de ellas. Notamos que ambas expresiones se pueden llevar al uso de dos límites notables.

I.

$$\lim_{u\to 0} = \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)} \cdot \frac{u^2}{u^2}$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sin^2(u)} \frac{\cos(u) - 1}{u^2} \frac{1}{(\sqrt[3]{\cos^2(u)} + \sqrt[3]{\cos(u)} + 1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+1+1)} = \frac{1}{6}$$

II.

$$\lim_{u\to 0} \frac{\cos(u) - 1}{\sin^2(u)(\sqrt{\cos(u)} + 1)} \frac{u^2}{u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{u^2}{\sin^2(u)} \frac{\cos(u) - 1}{u^2} \frac{1}{(\sqrt{\cos(u)} + 1)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{4}$$

Enseguida si juntamos ambos valores y los restamos en el orden correcto, llegamos al valor del límite

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos(u)} - 1}{\sin^2 u} - \frac{\sqrt{\cos(u)} - 1}{\sin^2(u)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$$

8. Analize el valor del siguiente límite dependiendo de los valores de a.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan(x)} - \sqrt{1+\sin(x)})}{x^a}$$

(8) Para lograr analizar el valor del límite dependiendo de a, debemos primero racionalizar la expresión

$$\frac{\sqrt{1+\tan(x)} - \sqrt{1+\sin(x)}}{x^a} \cdot \frac{\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}}$$

$$\frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Ahora si seguimos desarrollando la expresión

$$\frac{\frac{\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{\cos(x)}}{x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Finalmente cuando tengamos que evaluar el límite podemos hacer las siguientes separaciones, donde podemos notar dos límites notables

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \frac{1}{x^{a-3}\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

Enseguida debemos ponernos en los posibles casos, donde les recomiendo partir analizando en el punto de cambio que vendría siendo $a = 3$.
Caso 1: $a = 3$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \frac{1}{\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+1)} = \frac{1}{4}$$

Caso 2: $a < 3$.
Para este caso, si les es muy difícil verlo a la primera, pueden probar con algun número, como yo lo haré con $a = 1$, en cual notamos que solo podríamos formas uno de los dos límites notables quedándonos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)} + \sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

Caso 3: $3 < a$.
Si sigue siendo muy difícil analizarlo con solo variables, pueden probar con algún número, como yo lo haré con $a = 4$, quedándonos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \frac{1}{x\cos(x)\left(\sqrt{1+\tan(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \infty = \textbf{No existe}$$

Con esto llegamos a la siguiente conclusión

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{\cos(x)x^a\left(\sqrt{1+\tan(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)} \begin{cases} 0, & si\ a < 3 \\ \frac{1}{4}, & si\ a = 3 \\ \textbf{no existe}, & si\ 3 < a \end{cases}$$

9. **Propuesto para ustedes:**

$\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sqrt{-\cos(x)}}{\cos(2x)-\sin(x/2)}$ (Respuesta: $-2/15$)

1.2.3 límites al infinito

En esta sección se hablará de infinitos, donde aprenderemos que hay infinitos mas grandes que otros, como por ejemplo x y $2x$, uno es el doble del otro, mientras que por ejemplo x y x^2 al infinito su diferencia es abismal, por lo que en esta sección aprenderemos a categorizar estas diferencias al infinito.

Definición: Sean f, g dos funciones de polinomios $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se cumple que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Va a depender del grado de los polinomios $f(x)$ y $g(x)$, Donde M es el grado de $f(x)$ y N el de $g(x)$. Donde tenemos 3 posibles casos

- Caso 1: $M > N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$
- Caso 2: $M = N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a, \quad a \in \mathbb{R}$
- Caso 3: $M < N$, se produce que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

•**Tip general:**, para esta sección, cuando tenga por ejemplo $\infty - \infty$ intentar llevarlo a alguna forma donde se pueda hacer la comparación(Como alguna fracción) o alguna fórmula que junte los términos para así poder compararlos.

Resolver los siguientes ejercicios:

1. (a) $\displaystyle\lim_{x\to\ -\infty}(x + \sqrt{x^2+2x})$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(x - \sqrt{x^2-1})$ **(I1-2013-tav)**

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5^x - 3^x + 1}{5^x + 3^x + 2}$ **(I1-2017-2)**

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+n^2} - \sqrt{n}}{n}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin(2x)}{4x+1}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x+7)\cos(x^2) - \sin(4-x^3)}{x-\pi}$

(1a) Se denota que el problema termina siendo la siguiente operación

$$-\infty + \infty$$

Por lo que para dejarlo en una expresión donde pueda haber comparación, debemos racionalizar ocupando la fórmula que se usó en el para lograr reducir la expresión y poder aplicar el límite

$$\lim_{x\to\ -\infty}(x+\sqrt{x^2+2x}) = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+2x})}{1}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2+2x}}{x-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{x^2-x^2-2x}{x-\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2x}{x-\sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2}{1-\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+2x}}$$

Enseguida cuando ingresemos el $1/x$ a la raíz debemos multiplicar por -1 la raíz para que el número final nos de positivo

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2}{1-(-\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}})} = \lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2x}{x^2}}}$$

Ahora podemos evaluar el límite

$$\lim_{x\to\ -\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2x}{x^2}}} = -1$$

(1b) Acá debemos intentar racionalizar la expresión, ya que notamos que tenemos $\infty-\infty$ y llevándolo a una fracción es la manera que tenemos para lograr hacer una comparación eficiente. Pero notamos que tenemos una x afuera, por lo que debemos dejarla fuera de la racionalización.

$$\frac{x(x-\sqrt{x^2-1})}{1}\cdot\frac{(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{x+1}{(x+\sqrt{x^2-1})}$$

Ahora notamos que podemos aplicar el límite , ya que tanto denominador como numerador tienen el mismo máximo exponente(1).Por lo que debemos multiplicar por el mayor exponente arriba y abajo que en este caso sería $\frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}{(x+\sqrt{x^2-1})\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

Recordamos que si $1\leq n$ se cumple

$$\lim_{x\to\infty^{\pm}}\frac{1}{x^n} = 0$$

(1c) En este ejercicio, a pesar de que tenemos $\frac{\infty}{\infty}$, notamos que podemos hacer una comparación amplificando por $\frac{1}{5^x}$ y así nos quedará lo siguiente:

$$\frac{5^x - 3^x + 1}{5^x + 3^x + 2} \cdot \frac{\frac{1}{5^x}}{\frac{1}{5^x}} = \frac{\frac{5^x}{5^x} - \frac{3^x}{5^x} + \frac{1}{5^x}}{\frac{5^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x} + \frac{2}{5^x}} = \frac{1 - \frac{3^x}{5^x} + \frac{1}{5^x}}{1 + \frac{3^x}{5^x} + \frac{2}{5^x}}$$

Luego de esto si aplicamos el límite, tenemos el problema de qué hacer con el $\frac{3^x}{5^x}$, pero notamos que podemos hacer lo siguiente

$$\frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

y según sabemos $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $|a| < 1$, donde este sería nuestro caso, por lo que podemos ocupar esto y tendremos el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{3^x}{5^x} + \frac{1}{5^x}}{1 + \frac{3^x}{5^x} + \frac{2}{5^x}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1$$

(1d) Para este ejercicio, notamos que si m y n fueran el valor del grado del polinomio que hay en el numerador y el denominador de la fracción, notamos que estos son iguales($m = n = 1$) por lo que según sabemos podemos aplicar la siguiente operación:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+n^2} - \sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}} - \sqrt{\frac{n}{n^2}}}{\frac{n}{n}} = \frac{0 + 1 - \sqrt{0}}{1} = 1$$

(1e) Para este ejercicio, es importante hacer la comparación de grado del polinomio del numerador y denominador de la función.

$$f(x) = x + \sin(2x) \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = 4x + 1 \longrightarrow n = 1$$

Notamos que sucede que $m = n$, por lo que podemos aplicar la propiedad de amplificar por $\frac{1}{x}$ la fracción para finalmente calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin(2x)}{4x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{\sin(2x)}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+0}{4+0} = 4$$

(1f) Este ejercicio debe ser mirado desde un análisis de los posibles valores del numerador de la fracción, ya que según sabemos sucede que

$$|\sin(u)| \leq 1 \qquad |\cos(u)| \leq 1$$

Entonces como $\sin(u)$ y $\cos(u)$ son números menores a 1, por lo que en el límite terminan siendo insignificantes. Además si nosotros consideramos el numerador como un polinomio, notamos que este es de grado 0, mientras que el denominador de grado 1 Por lo que según la definición entregada en el inicio de la sección

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x+7)\cos(x^2) - \sin(4-x^3)}{x-\pi} = 0$$

---

2. (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$ **(I1-2010-2)**

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x(x-\sqrt{x^2-13})$ **(I1-2013-tav)**

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3}+x\cos^2(x)} (I1-2014-1)$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ **(I1-2014-tav)**

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2})$ **(I1-2009-2)**

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+5x})$ **(Control 1-2018-1)**

(2a) Si hacemos caso a la definición entregada al principio de la sección

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}-1 \longrightarrow m = \frac{2}{2} = 1$$

$$g(x) = x \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$, entonces podemos amplificar por $1/x$ la fracción, luego evaluar el límite y nos dara el valor.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}$$

Ahora es cuando es muy posible cometer un error, pero debemos notar que al ingresar a la raíz el x ya que hay que tener en cuenta que x tiende a **menos infinito**, por lo que se haría de la siguiente forma

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = -\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}$$

Esto lo hacemos, debido a que como $x \to -\infty$ la expresión nos daría un número negativo antes de ingresarlo a la raíz, por lo que colocamos un signo negativo a la expresión y así cambia su valor. Seguimos desarrollando la expresión

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}}{1} = \frac{-\sqrt{1+0+0} - 0}{1} = -1$$

(2b) A diferencia del ejercicio anterior, no es tan fácil lograr hacer una comparación "visual" porque debemos llevarlo a la forma de una fracción mediante la racionalización de la siguiente manera:

$$\frac{x(x - \sqrt{x^2-13})}{1} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2-13}}{x + \sqrt{x^2-13}} = \frac{x(x^2 - x^2 + 13)}{x + \sqrt{x^2-13}} = \frac{13x}{x + \sqrt{x^2-13}}$$

En seguida es notorio que es posible hacer una comparación del grado en la fracción

$$f(x) = 13x \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = x + \sqrt{x^2-13} \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$ podemos calcular el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{13x}{x + \sqrt{x^2-13}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{13x}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2-13}{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{13}{1 + \sqrt{1 - \frac{13}{x^2}}} = \frac{13}{1+1} = \frac{13}{2}$$

(2c) Si seguimos el proceso de comparación de la fracción procedemos a ver los grados de los polinomios

$$f(x) = x^{5/3} + 1 \longrightarrow m = 5/3$$

$$g(x) = x^{5/3} + x\cos^2(x) \longrightarrow n = 5/3$$

Tenemos que $m = n$, por lo que podemos hacer

$$\frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3} + x\cos^2(x)} \cdot \frac{x^{-5/3}}{x^{-5/3}} = \frac{1 + x^{-5/3}}{1 + x^{-2/3}\cos^2(x)}$$

Ahora si aplicamos el límite nos da

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + x^{-5/3}}{1 + x^{-2/3}\cos^2(x)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

(2d) Siguiendo el metodo de la definición del inicio de la sección, buscamos el grado de cada polinomio

$$f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \longrightarrow n = \frac{1}{2}$$

En la fracción se presenta que los grados de ambos polinomios es $m = n = \frac{1}{2}$, por lo que seguimos el metodo clasíco

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} = 1$$

(2e**)** Tenemos una expresión que no es identificable de manera visual ni matemática, ya que es de la forma

$$\infty - \infty$$

Ahora esta expresión es llevable a una expresión para lograr hacer una comparación y calcular el límite, de la siguiente manera

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$\frac{x^2+2x+3-x^2-x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}$$

$$f(x) = x+1 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2} \longrightarrow n = 1$$

$$m = n$$

Como los grados son iguales amplificamos por $\frac{1}{x}$.

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x^2}}}$$

Finalmente podemos aplicar el límite a la fracción

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0+0}} = \frac{1}{2}$$

(2f**)** Al igual que el ejercicio anterior, se debe resolver mediante la racionalización.

$$\frac{\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+5x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}} = \frac{-2x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}}$$

Ahora podemos usar

$$f(x) = -2x \longrightarrow m = 1$$
$$g(x) = \sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x} \longrightarrow n = 1$$

Como los grados son iguales y al igual que en el ejercicio 2a, al momento de amplificar la fracción debemos colocar un signo negativo en ambas fracciones.

$$\frac{-2x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+5x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{-2x}{x}}{-\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}}\right)} = \frac{-2}{-\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}$$

Luego de esto aplicamos el límite a la fracción y nos dará el resultado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2}{-\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)} = \frac{-2}{-(1+1)} = 1$$

---

3. (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x)$ **(I1-2019-1)**
   (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$ **(I1-2015-2)**
   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)}$ **(I1-2016-1)**
   (e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x-5}{|x^2+2x-3|}$ **(I1-2019-2)**
   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+2x-1}$ **(I1-2014-2)**

(3a) Es posible en este ejercicio, lograr hacer una comparación en la fracción siguiendo la definición de la sección

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} \longrightarrow m = 1$$
$$g(x) = x-1 \longrightarrow n = 1$$

Como $m = n$, es posible calcular el límite mediante la amplificación de x^{-m}.

$$\frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

Finalmente es posible aplicar el límite a la expresión

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1-0} = 1$$

(3b) Notamos que tenemos un límite de la forma

$$\infty - \infty$$

Entonces para llevarlo a una forma que sea fácil su interpretación racionalizamos

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

Luego de esto es posible aplicar el criterio del grado de los polinomios

$$f(x) = x+1 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+x+1}+x \longrightarrow n = 1$$

Como en el ejercicio anterior, amplificamos por x^{-1}

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Finalmente aplicamos el límite y obtenemos el valor

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{1}{2}$$

(3c) Podemos hacer de manera inmediata la comparación de los polinomios

$$f(x) = x+2 \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{9x^2+1} \longrightarrow n = 1$$

Debido a que $m = n$, amplificamos por x^{-n}

$$\frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}$$

Para terminar evaluamos el límite y nos da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1+0}{\sqrt{9+0}} = \frac{1}{3}$$

(3d)
En este límite, aplicamos la multiplicación por $\frac{1}{x^n}$ con n el mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin(x)}{x+\sin(x)} \frac{\cdot\frac{1}{x}}{\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

(3e) Lo que debemos hacer ver el signo del polinomio del valor absoluto, para identificar si se debe locar un signo antes o no, donde se observa:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2+2x-3 = \infty$$

Por lo que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x-5}{|x^2+2x-3|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}$$

Con esto, aplicamos lo mismo que en el ejercicio anterior, solo que ahora con $n=2$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+4/x-5/x^2}{1+2/x-3/x^2} = \frac{1+0-0}{1+0-0} = 1$$

(3f)Tenemos una expresión que no es identificable de manera visual ni matemática, ya que es de la forma

$$\infty - \infty$$

Ahora esta expresión es llevable a una expresión para lograr hacer una comparación y calcular el límite mediante la racionalización

$$\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-1}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$\frac{x^2+x-1-x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

En seguida es posible aplicar la definición para hacer la comparación

$$f(x) = -x \longrightarrow m = 1$$

$$g(x) = \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1} \longrightarrow n = 1$$

Como tenemos que $m = n$ iguales amplificamos por $\dfrac{1}{x}$.

$$\frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+2x-1}{x^2}}}$$

Finalmente podemos aplicar el límite a la fracción

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0-0}} = \frac{-1}{2}$$

---

4. (a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x-10}-\sqrt{x^2-2x+1})$ **(I1-2016-2)**
   (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ **(I1-2016-tav)**
   (c) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x})$ **(I1-2018-2)**
   (d) $\lim_{x\to\infty} x\tan\left(\dfrac{6}{x}\right)$ **(I1-2019-tav)**
   (e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin(x^2)}{x^2+\sin(x)}$ **(Control1-2017-1)**
   (f) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}+x+5$**(Control1-2018-1)**
   (g) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2e^x-e^{-3x}}{e^x+4e^{-x}}$**(Control1 2018-2)**

(4a) Empezamos identificando que debemos racionalizar la expresión para lograr resolverla, por lo que procedemos:

$$\frac{\sqrt{x^2+x-10}-\sqrt{x^2-2x+1}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x-10}+\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{x^2+x-10}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

$$\frac{3x-11}{\sqrt{x^2+x-10}+\sqrt{x^2-2x+1}}$$

Ahora con esto aplicamos el límite y también la división por el mayor exponente que sería x

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-11}{\sqrt{x^2+x-10}+\sqrt{x^2-2x+1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-11/x}{\sqrt{1+1/x-10/x^2}+\sqrt{1-2/x+1/x^2}} = \frac{3-0}{1+1} = \frac{3}{2}$$

(4b) Para este ejercicio, es importante ver que sucede con el valor absoluto, pero es evidente que $x-1>0$ para todo $1<x$, por lo que: podemos aplicar el límite de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

(4c) Al igual que en el ejercicio 4a debemos racionalizar, por lo que:

$$\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}$$

Ahora con esto, aplicamos el criterio del máximo exponente para hacer la division:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}\frac{\cdot\frac{1}{x}}{\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+1/x}+\sqrt{1/x}}=\infty$$

(4d) Este ejercicio implica una mayor dificultad, ya que muy pocas veces se ve una tan en un límite de $x\to\infty$. Entonces lo que haremos será tratar de separar las partes de la tangente para lograr intentar trabajar con el sin y el cos por separado

$$x\tan\left(\frac{6}{x}\right)=x\cdot\frac{\sin\left(\frac{6}{x}\right)}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}$$

Trabajando con el límite, notamos que podríamos separalo en dos, ocupando las leyes de los límites que nos permiten:

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\sin\left(\frac{6}{x}\right)}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\left(\frac{6}{x}\right)}_{\alpha}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}$$

Calculamos el primer límite por separado, ocupando un cambio de variable $u=\frac{6}{x}$

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\left(\frac{6}{x}\right)=\lim_{u\to 0}6\frac{\sin(u)}{u}=6$$

Jutando esto en el límite general llegamos a

$$6\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}=6\cdot\frac{1}{1}=6$$

(4e) En este ejercicio, es normal intentar de realizar algo con los $\sin(x)$, pero recordar que el valor de este va entre -1 y 1, por lo que es despreciable al infinito, importando solamente los x e x^2. Por lo que ocuparemos el criterio del mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x^2)}{x^2+\sin(x)}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+\sin(x^2)/x^2}{1+\sin(x)/x^2}=\frac{0+0}{1+0}=0$$

(4f) Este límite es algo peculiar, ya que se debe racionalizar para lograr solucionarlo, pero notamos que en este caso ambas raíces sería $\sqrt{x^2+2x}$ y $x+5$. Entonces se realiza de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt{x^2+2x}+x+5}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x}-(x+5)}{\sqrt{x^2+2x}-(x+5)} = \frac{-8x-25}{\sqrt{x^2+2x}-x-5}$$

Ahora aplicando el límite en estas expresiones, debemos seguir la técnica del máximo exponente:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-8x-25}{\sqrt{x^2+2x}-x-5} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Notamos que hay un problema, ya que para introducir el x a la raíz, debemos colocar un signo negativo a esta, ya que $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-8-25/x}{-\sqrt{1+2/x}-1-5/x} = \frac{-8}{-1-1} = 4$$

(4g) Para esta expresion, a diferencia de los polinomios clásicos, debemos tratar como si fueran los exponentes, entonces la forma más practica de manejar esto, es multiplicar por 1 partido el valor que aumenta de manera más rápida, que sería $1/e^x$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x-e^{-3x}}{e^x+4e^{-x}} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-e^{-4x}}{1+4e^{-2x}} = 2$$

5. A continuación se muestra una igualdad, encuentre el valor de a para que esta igualdad se cumpla:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x) = 2 \quad \textbf{(I1-2013-2)}$$

(5) Debemos buscar el valor del límite, en función de a, por lo que racionalizamos la expresión:

$$\frac{\sqrt{x^2+ax+1}-x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+ax+1}+x}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} = \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x}$$

Aplicamos el límite a la expresion, dividiendo por el mayor exponente:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a+1/x}{\sqrt{1+a/x+1/x^2}+1} = \frac{a}{2}$$

Con esto sabemos que el valor de a debe ser:

$$a = 4$$

1.2.4 Teorema del sandiwch

1. Sea f una función que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < f(x) < \frac{10x-21}{2x}, \qquad 1 < x$$

Calcular $\lim\limits_{x\to\ 0^+} f(1/x)$

Solucion
Primero notamos que debemos hacer un cambio de variable, ya que la desigualdad esta respecto a x no $1/x$:

$$u = 1/x; \quad x = 0^+ \to u = \infty$$

Y debido a que cumple la condición de $1 < x$ podemos calcular el límite solicitado como

$$\frac{5\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1} < f(u) < \frac{10u-21}{2u}$$

$$\lim_{u\to\ \infty} \frac{5\sqrt{u}}{\sqrt{u}-1} < \lim_{u\to\ \infty} f(u) < \lim_{u\to\ \infty} \frac{10u-21}{2u},$$

$$\lim_{u\to\ \infty} \frac{5\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}}}{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}} < \lim_{u\to\ \infty} f(u) < \lim_{u\to\ \infty} \frac{10\frac{u}{u} - \frac{21}{u}}{2\frac{u}{u}},$$

$$5 < f(u) < 5$$

Por lo que con esto tenemos que se llega a que

$$\lim_{x\to\ 0^+} f(1/x) = \lim_{u\to\infty} f(u) = 5$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$(Control 1- 2018-2)

3. $\lim\limits_{x\to\ \infty} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) - \sin(x) = 0$

4. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ **(I1-2016-tav)**

5. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ **(I1-2019-1)**

6. $\lim\limits_{x\to 0} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ **(I1-2014-TAV)**

8. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{(sin(1/x))}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)\cdot\sin(\frac{1}{x})$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]$ **(I1-2019-2)**

(2) Para iniciar a resolver el límite es mejor primero analizar las partes de la función a evaluar, donde notamos que primero tenemos $\cos(x)$ que es una función que al infinito no sabemos su valor, pero si sabemos que se cumple la siguiente desigualdad

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad / \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Enseguida bien con esto podemos aplicar el límite en todas las partes de la desigualdad:

$$\lim_{x\to\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Finalmente si analizamos los límites conocemos el valor de los extremos ya que $\lim_{x\to\infty} \ln(1/x) = 0$, entonces nos quedaría los siguiente

$$-\ln(1) \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq \ln(1)$$

$$-0 \leq \lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Y por teomera del sandiwch queda demostrado que el límite da 0. ■

(3) Este ejercicio supone una mayor dificultad debido a que tenemos la resta de dos valores insiertos, pero podríamos recurrir a la siguiente fórmula

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

siendo

$$a = x + \frac{1}{x}, \qquad b = x$$

$$\sin(x + \frac{1}{x}) - \sin(x) = 2\sin\left(\frac{x + \frac{1}{x} - x}{2}\right)\cos\left(\frac{x + \frac{1}{x} + x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x + \frac{1}{x}}{2}\right)$$

Ahora proseguimos ocupando Teorema del Sandiwch, donde según sabemos el $\cos(\alpha)$ con α siendo cualquier valor cumple:

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

Enseguida remplazando α por $\dfrac{2x+\frac{1}{x}}{2}$:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right) \leq 1$$

$$-2\sin\left(\frac{1}{2x}\right) \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right) \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Aplicando el límite en toda la desigualdad

$$\lim_{x\to\infty} -2\sin\left(\frac{1}{2x}\right) \leq \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right) \leq \lim_{x\to\infty} 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$0 \leq 2\sin\left(\frac{1}{2x}\right)\cos\left(\frac{2x+\frac{1}{x}}{2}\right) \leq 0$$

Por lo que según el teorema del Sandwich:

$$\lim_{x\to\ \infty} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) - \sin(x) = 0$$

(4) Al momento de tratar de resolver este ejercicio, es algo clasíco intentar de ver como podria comportarse el $\sin(1/x)$, pero aca no debemos caer en eso y primero establescamos que valores puede tomar este:

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$$

Si multiplicando x^2 a ambos lados tendremos:

$$-x^2 \leq x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Aplicamos el límite

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Por lo que finalmente tendremos que:

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(5) Al igual que en ejercicio anterior, debemos establecer en que internvalo se mueve el $\sin(\frac{2\pi}{x})$ y no confundirse con el 2π:

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$$

Ahora al igual que antes:

$$-\sqrt{x^3+2x^2} \leq \sqrt{x^3+2x^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \leq \sqrt{x^3+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} -\sqrt{x^3+2x^2} \leq \lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2}$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) \leq 0$$

Por lo que finalmente tendremos que:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 0$$

(6) En este caso, es mas dificil notar de que manera podria comportarse la tan por lo que tenemos dos opciones que son:
1. Trabajar la tangete como $\dfrac{\sin(1/x)}{\cos(1/x)}$
2. Trabajar la tangente solo en su intervalo
Donde aca es mas fácil la segúnda opción, ya que sigue la misma modalidad de los otros ejercicios:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

Multiplicamos por x a ambos lados

$$-\frac{x \cdot \pi}{2} \leq x \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{x \cdot \pi}{2}$$

Aplicamos el límite

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x \cdot \pi}{2} \leq \lim_{x\to 0} x \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \pi}{2}$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Por lo que el límite que nos piden sería finalmente:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(7) Este ejercicio implica una doble dificultad, ya que tendremos que saber que ocurre con el primer factor, para luego ver que sucede con el cos, por lo que primero se intentara resolver solo el límite de el primer factor.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}$$

Si nos fijamos, podemos identificar un límite notable como lo sería:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{8}$$

Por lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8} = 0$$

Con esta información, podemos aplicarlo, para seguir con el metodo de los ejercicios anteriores:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8} \leq \left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}$$

Aplicando el límite a la desigualdad

$$-\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8} \leq \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Entonces tendremos que

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(8) En este caso, se parece a los anteriores, solo que ahora tenemos el $\sin(1/x)$ como una potencia, por lo que primero debemos establecer la desigualdad y luego de esto, aplicarla como una potencia, de la siguiente manera:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$2^{-1} \leq 2^{(\sin(1/x))} \leq 2$$

De esta manera, podemos seguir resolviendo el ejercicio de la misma manera que los anteriores

$$x^2 \cdot 2^{-1} \leq x^2 \cdot 2^{(\sin(1/x))} \leq x^2 \cdot 2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{-1} \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{(\sin(1/x))} \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2$$
$$0 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{(\sin(1/x))} \leq 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot 2^{(\sin(1/x))} = 0$$

(9) A pesar de que en este ejercicio, nos encontramos ante una multiplicación de identidades trigonometricas, de igual manera podemos aplicar el teorema del sandiwch, ya que uno de estos, esta de forma que no genera problemas en el punto a evaluar. Por lo que seguimos el proceso de los ejercicios anteriores:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Ahora al igual que antes:

$$-\sin(x) \leq \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \sin(x)$$

$$-\lim_{x\to 0} \sin(x) \leq \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} \sin(x)$$
$$0 \leq \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Por lo que finalmente tendremos que:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

(10) Este ejercicio, es el mas dificil de la sección, y esto se debe a que presenta la función parte entera. Empezamos por ahi, donde notamos que la funciónparte entera se comporta de la siguiente manera:

$$u - 1 \leq [u] \leq u; \qquad u = \frac{1}{x}, \text{para } u > 0$$

Siguiendo el metodo de los ejercicios anteriores:

$$x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) \leq x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) \leq \lim_{x\to 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{1}{x}$$
$$1 \leq \lim_{x\to 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

11. Demuestre que si $f(x)$ satisface que $-x^2 + 3x \leq f(x) - \sin(x) \leq x^4 + 3x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 4$

(11) Aca para lograr resolver el ejercicio, primero debemos formar la función que es parte del límite solicitado, la cual definiremos como:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Por lo que debemos llegar a esta función a partir de la desigualdad, lo cual se hace de la siguiente manera:

$$-x^2 + 3x \leq f(x) - \sin(x) \leq x^4 + 3x$$
$$-x^2 + 3x + \sin(x) \leq f(x) \leq x^4 + 3x + \sin(x)$$
$$-x + 3 + \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq x^3 + 3 + \frac{\sin(x)}{x}$$

Con la función $g(x)$ formada, se puede aplicar el límite a la desigualdad llegando a

$$\lim_{x \to 0} -x + 3 + \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \to 0} g(x) \leq \lim_{x \to 0} x^3 + 3 + \frac{\sin(x)}{x}$$

$$0 + 3 + 1 \leq \lim_{x \to 0} g(x) \leq 0 + 3 + 1$$

Por lo que tendremos por teorema del Sandiwch que

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

1.2.5 Repaso

1. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{|x|}(1-\cos(x))$**(Control 1- 2019-1)**
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\cos(3x)}{x+14}$
3. $\lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$
4. $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x\pi)(1-\cos(x))}{x^2\sin(x)}$
6. $\lim_{x\to\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ **(I1-2016-tav)**
7. $\lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x}(I1-2018-2)$
8. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin(x))}{2x-\pi}$**(Control1-2016-1)**
9. $\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)}{|x-1|}\sin(x-1)$**(Control 1-2018-2)**
10. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)}$ **(I1-2011-2)**
11. $\lim_{x\to\infty} \frac{1-e^x}{1+2e^x}$ **(I1-2019-2)**
12. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

    Hint: Usar $u = \sqrt[12]{x}$
13. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x})$ **(I1-2018-2)**
14. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos(x)))}{\cos(x)}$ **(I1-2015-tav)**
15. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot(x)} - \frac{\pi}{2\cos(x)}\right)$ **(I1-2013-tav)**

(1) En este caso tenemos que además de una identidad trigonometrica, también esta presente un valor absoluto, donde este cambia de signo en el punto que nos piden calcular el límite. Por lo que evaluamos los límites laterales, donde debe cumplirse:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{|x|}(1-\cos(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{|x|}(1-\cos(x))$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{-x}(1-\cos(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x}(1-\cos(x)) \to \lim_{x\to 0^-} -2\cdot(1-\cos(x)) = \lim_{x\to 0^+} 2(1-\cos(x))$$

Evaluando llegamos a:

$$-2\cdot 0 = 2\cdot 0 = 0$$

Por lo que el valor del límite solicitado es 0.

(2) Para este caso, donde tenemos un límite al infinito, aplicamos la misma tecnica que nos recomendaron de los grados de cada parte de la fracción, donde notamos que los grados son

$$M = 1, \quad N = 1$$

Por lo que si aplicamos la tecnica de la división por el mayor exponente nos quedaría:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\cos(3x)}{x+14}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{\cos(3x)}{x}}{1+\frac{14}{x}}$$

Ahora aplicando esto, podemos notar que el $\cos(3x)$ es un número entre -1 y 1, por lo que sucedera lo mismo que con el número 14. Aplicando el límite tendremos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{\cos(3x)}{x}}{1+\frac{14}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

(3) Aca debemos racionalizar, donde tenemos dos opciones que son:
1. Expander el polinomio del numerador
2.Racionalizar el denominador
En este caso tomeramos la primera opción, que se hace de la siguiente manera:

$$x^2-81 = (x+9)(x-9) = (x+9)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)$$

Llevando esto al límite:

$$\lim_{x\to 9}\frac{(x+9)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9}(x+9)(\sqrt{x}+3)$$

Aplicando el límite tendremos:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3} = 18\cdot 6 = 108$$

(4) Debmos racionalizar la expresiónpara así, luego lograr simplificar el denominador de la fracción que es la parte que genera el problema. Procediendo a esto tendremos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2-t}-\sqrt{2}}{t}\cdot\frac{\sqrt{2-t}+\sqrt{t}}{\sqrt{2-t}+\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{-t}{(t)\cdot(\sqrt{2-t}+\sqrt{2})}$$

Con esto se puede calcular el valor del límite de manera simple, ya que simplificamos el numerador con un factor del denominador

$$\lim_{t\to 0}\frac{-1}{(\sqrt{2-t}+\sqrt{2})} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

(5) Como vemos tenemos muchos cosas que componen la función, pero nosotros para resolverlo, debemos pensar primero, que cosa nos sirven y que límite notables puedo identificar aca. Primero notamos que la fracción debemos sepárarla en lo siguiente:

$$\frac{(1-\cos(x))}{x^2}\cdot\frac{\sin(x\pi)}{\sin(x)}$$

Aca identificamos que tenemos un límite notable y existe la posibilidad de formar dos mas, por lo que debemos amplificar por πx la segúnda fracción y luego sepárarlas de la siguiente manera:

$$\frac{(1-\cos(x))}{x^2}\cdot\frac{\sin(x\pi)}{x\pi}\cdot\frac{x\pi}{\sin(x)}$$

Con esto podemos aplicar el límite y aplicar los límites notables de las siguientes maneras:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))}{x^2}\cdot\frac{\sin(x\pi)}{x\pi}\cdot\frac{x\pi}{\sin(x)}=\pi\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\pi)}{x\pi}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\pi)(1-\cos(x))}{x^2\sin(x)}=\frac{\pi}{2}$$

(6) Notar que este límite es llevable a un límite notable mediante un cambio de variable que sería:

$$u=\frac{1}{x^2},\quad x^2=\frac{1}{u}$$
$$x\to\infty;\qquad u\to 0$$

Con esto tendremos que

$$\lim_{x\to\infty}x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}=1$$

(7) Recordamos la sección anterior, que la función parte entera funciona de la siguiente manera:

$$x-1\leq[x]\leq x;\text{para } 0<x$$

Por lo que si multiplicamos por $\frac{1}{x}$ y aplicamos el límite tendremos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}\leq\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}$$

$$1\leq\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}\leq 1$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$$

(8) Es evidente que para ser resuelto, este ejercicio, requiere de un cambio de variable y también de luego saber aplicar fórmulas de suma/resta de angulos. Primero el cambio de variable es:

$$u=x-\pi/2\qquad x=u+\pi/2$$
$$x\to\pi/2\qquad u=\to 0$$

Aplicando esto en el límite nos queda

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\sin(u+\pi/2)}{2u}$$

Trabjamos la suma de angulos de la siguiente manera:

$$\sin(u+\pi/2)=\sin(u)\cos(\pi/2)+\sin(\pi/2)\cos(u)=\cos(u)$$

Reemplazando se tiene

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)}{2u}$$

Finalmente, notamos que tenemos uno de los límites notables, por lo que es fácil saber el resultado:

$$\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)}{u}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

(9) Descata de este ejercicio, la presencia del valor absoluto, y sobre todo que en el punto donde se evalua, se genera el cambio en el valor absoluto. Por lo que, debemos ver si los límites laterales existen, para así encontrar el valor de este.

Primero notamos que el denominador se divide de la siguiente manera:

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & x\geq 1\\ \\ 1-x, & x<1\end{cases}$$

Por lo que la función podria definirse de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x^2-1)}{x-1}\sin(x-1), & x\geq 1\\ \\ \dfrac{(x^2-1)}{1-x}\sin(x-1), & x<1\end{cases}$$

Para el calculo del límite, se vera si los laterales son iguales:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2-1)}{x-1}\sin(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)}{1-x}\sin(x-1)$$

factorizamos las diferencias de cuadrados:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\sin(x-1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{1-x}\sin(x-1)$$

Aca se nota que podremos generar el límite notable usando el siguiente cambio de variable:

$$u=x-1;\quad u=1-x$$

$$x\to 1;\quad u\to 0$$

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{(u)(u+2)}{u}\sin(u) = \lim_{u\to 0^+} \frac{(u)(u+2)}{-u}\sin(u)$$

Ahora ocupando las leyes de los límites, las que nos permiten realizar lo siguiente:

$$\lim_{u\to 0^-} (u)(u+2)\cdot \lim_{u\to 0^-} \frac{\sin(u)}{u} = \lim_{u\to 0^+} (u)(u+2)\cdot \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin(u)}{-u}$$

Usando los límites notables y evaluando, llegamos a:

$$0\cdot(2)\cdot 1 = 0\cdot 2\cdot -1$$

$$0 = 0$$

Por lo que el límite si existe y es:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)}{|1-x|}\sin(x-1) = 0$$

(10) Nuevamente nos encontramos con un valor absoluto, solo que además, debemos racionalizar la fracción para así llevarlo a un límite notable, por lo que primero racionalizamos:

$$\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)}\cdot\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{-x}{\sin(|x|)\cdot(1+\sqrt{x+1})}$$

Luego de esto realizamos, igual que antes descomponemos el valor absoluto en rangos:

$$\sin(|x|) = \begin{cases} \sin(x), & x \geq 0 \\ -\sin(x), & x < 0 \end{cases}$$

Lo llevamos a una función por partes:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sin(x)\cdot(1+\sqrt{x+1})}, & x \geq 0 \\ \dfrac{x}{\sin(x)\cdot(1+\sqrt{x+1})}, & x < 0 \end{cases}$$

Es mas fácil que en el ejericio anterior aplicar el límite y notar el resultado:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{\sin(x)\cdot(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)\cdot(1+\sqrt{x+1})}$$

Ocupamos las leyes de los límites

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{\sin(x)} \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\cdot(1+\sqrt{x+1})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cdot(1+\sqrt{x+1})}$$

Finalmente aplicamos el límite

$$-1 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \to \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Por lo que se concluye que el límite no existe.

(11) En estos casos donde tenemos límites al infinito, pero no polinomios comunes, debemos establecer la divisiónen este caso por e^x, donde nos quedaría:

$$\frac{1-e^x}{1+2e^x} \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} = \frac{1/e^x - 1}{1/e^x + 2}$$

Por lo que si aplicamos el límite nos dara el resultado:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{0-1}{0+2} = \frac{-1}{2}$$

(12) Siguiendo el tip realizamos el cambio de variable donde nos quedaría:

$$\sqrt[3]{x} = u^4; \quad \sqrt[4]{x} = u^3$$

Por lo que reemplazando en el límite de la fracción, notamos que debemos expander el polinomio de la siguiente manera:

$$\frac{u^4-1}{u^3-1} = \frac{(u^2+1)(u^2-1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \frac{(u^2+1)(u+1)(u-1)}{(u-1)(u^2+u+1)}$$

Al aplicar el límite, notamos que esta forma de expresar estos polinomios nos permite resolver el límite de manera fácil

$$\lim_{u\to 1} \frac{(u^2+1)(u+1)(u-1)}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim_{u\to 1} \frac{(u^2+1)(u+1)}{(u^2+u+1)}$$

Evaluando nos da

$$\frac{2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

(13) Debemos racionalizar y luego aplicar la división por x^2

$$\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1/x^2+1/x^3}+\sqrt{1/x^3}}$$

Aplicando el límite notamos que hay un problema, que es que nos queda:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1/x^2+1/x^3}+\sqrt{1/x^3}} = \frac{1}{0}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1/x^2+1/x^3}+\sqrt{1/x^3}} = \infty$$

(14**)** Notamos que aca podemos hacer el siguiente cambio de variable

$$u = \cos(x)$$

$$x \to \frac{\pi}{2}; \quad u \to 0$$

Con esto tendremos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos(x)))}{\cos(x)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\sin(u))}{u}$$

Debemos poder formar un límite notable, entonces amplificamos la fracción de la siguiente expresión:

$$\frac{\sin(\sin(u))}{u} \cdot \frac{\sin(u)}{\sin(u)}$$

Para luego ocupando las leyes de los límites hacer lo siguiente

$$\underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\sin(u))}{\sin(u)}}_{\alpha} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u}$$

Por lo que para calcular α, hacemos el siguiente cambio de variable:

$$z = \sin(u)$$

$$u \to 0; \quad z \to 0$$

Entonces nos quedarían, solamente dos límites notables multiplicados entre si, que serían:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

(15**)** Primero para ver como resolver este ejercicio, primero juntamos la resta en una sola fracción de la siguiente manera:

$$\frac{x}{\cot(x)} - \frac{\pi}{2\cos(x)} = \frac{2x\sin(x)-\pi}{2\cos(x)}$$

Esto es reducible a la sigueinte expresión:

$$\frac{x\sin(x)-\pi/2}{\cos(x)}$$

Ahora si realizamos el siguiente cambio de variable, que nos permite dejar todo tal cual estaba:

$$u = x - \frac{\pi}{2}; \quad x = u + \frac{\pi}{2}$$

$$x \to \frac{\pi}{2}; \quad u \to 0$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{(u + \pi/2)\sin(u + \pi/2)}{cos(u + \pi/2)}$$

Aca debemos usar las propiedades de cos y sin, que puede ser por suma de angulos o mas rapido son:

$$\sin(u + \pi/2) = \cos(u); \quad \cos(u + \pi/2) = -\sin(u)$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{(u + \pi/2)\cos(u) - \pi/2}{-sin(u)}$$

Finalmente de aca en adelante debemos separar en fracciones de la siguiente manera:

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{-\sin(u)} + \frac{\pi/2(\cos(u) - 1}{-\sin(u)}$$

Para desarrollar la segúnda fracción, se hace mediante la amplificaciónde u, para poder aplicar límites notables:

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{-\sin(u)} + \frac{\pi/2(\cos(u) - 1}{-\sin(u)} \cdot \frac{u}{u}$$

Reacomodamos para luego evaluar el límite

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{-\sin(u)} + \frac{\pi/2(\cos(u) - 1}{-u} \cdot \frac{u}{\sin(u)} = -1 + 0 \cdot 1 = -1$$

Por lo que:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cot(x)} - \frac{\pi}{2\cos(x)} = -1$$

16. Determine cual es valor que debe tener a para que se cumpla lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x-a)} - x = \frac{a}{2}$$

(16) Primero deberemos racionalizar:

$$\frac{\sqrt{x(x-a)} - x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x(x-a)} + x}{\sqrt{x(x-a)} + x} = \frac{-ax}{\sqrt{x(x-a)} + x}$$

Para aplicar el límite, debemos primero dividir por el mayor exponente que sería x

$$\frac{-ax}{\sqrt{x(x-a)} + x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{-a}{\sqrt{1 - a/x} + 1}$$

Evaluando el límite nos da:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-a}{\sqrt{1 - a/x} + 1} = \frac{-a}{2}$$

Finalmente para que se cumpla lo solicitado, el unico valor que permitiria esto sería

$$a = 0$$

1.3 asíntotas verticales y horizontales

Dentro de las asíntotas, veremos 3 durante el tramo del curso, las cuales serán:

- Horizontales: Sea L una asíntota horizontal de la función $f(x)$ se debe cumplir

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$$

- Verticales: Un asíntota vertical en un punto $x = a$, es una tal que se cumpla

$$\lim_{x\to\ a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

- Oblicuas(no se veran en esta sección): una asíntota oblicua es una función del tipo $y = mx+n$, donde se cumple que

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$$

1. Determine las asíntotas verticales y horizontales de

(a) $f(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3 - x}$

(b) $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x^2-3x+6}}{3-3x}$ **(I1-2020-2)**

(c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x+3}{5-x}$

(e) $f(x) = \dfrac{3x^2+7x+2}{x^2-x-6}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x^3-x}$

(g) $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2+x-2}$

(h) $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x-5}$

(i) $f(x) = x\sin(1/x)$

(j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3}$

(k) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+4x+3}$

(l) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

(m) $f(x) = \dfrac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2}$ **(I1-2018-1)**

(n) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$

Solución:
(1a)
• Para esto partiendo por las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$, pero como notamos que se comporta de igual manera para ambos extremos, lo calculamos juntos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2-\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x})^2}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{(2-0)\cdot(1)^2}{1-0} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 2$ es una asíntota horizontal.

• Ahora para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3 - x} = \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)}$$

Con esto logramos notar que tenemos 3 posibles candidatos que son $x = -1, 0, 1$, por lo que debemos ver si existe el límite en ese punto o es una asíntota

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = 0$ e $x = 1$ son asíntotas verticales pero $x = -1$ no.

(1b) En este caso a diferencia del ejercicio anterior, tenemos una raíz, lo cual nos genera un problema si esque quisieramos calcular los límites al $\pm\infty$ juntos. Por lo que haremos el calculo por separado:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Ahora **es la parte mas importante** del calculo de este límite, ya que al entrar el $\frac{1}{x}$ a la raíz, se le introduce un signo negativo produciendo lo siguiente:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - (-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{6}{x^2}})}{\frac{3}{x} - \frac{3x}{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2/x + \sqrt{1 - 3/x + 6/x^2}}{3/x - 3} = \frac{0 + \sqrt{1 - 0 + 0}}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

Por otro lado, para el ∞ es el mismo procedimiento solo, que en la raíz, si se queda como resta:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x} == \lim_{x\to \infty} \frac{2/x - \sqrt{1 - 3/x + 6/x^2}}{3/x - 3} = \frac{0 + \sqrt{1 - 0 + 0}}{0 - 3} = \frac{1}{3}$$

Finalmente tenemos un solo candidato de asíntota vertical, que sería $x = 3$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x} = \frac{-1}{12}$$

Entonces las **asíntotas horizontales** serían: $y = \pm\frac{1}{3}$ la **asíntota vertical**

(1c)
• Primero viendo las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

• Enseguida para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción, donde tenemos doss candidatos $x = \pm 1$.

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \pm\infty$$

Con esto llegamos a que $y = 1$ es asíntota horizontal y $x = -1, 1$ son asíntotas verticales.

(1d)
• Para las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{5-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{5}{x}-1} = \frac{2+0}{0-1} = -2$$

• Para las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que esta es clara, ya que, es el unico factor del denominador

$$\lim_{x\to 5^{\pm}} \frac{2x+3}{5-x} = \pm\infty$$

Con esto llegamos a que $y = -2$ es asíntota horizontal y $x = 5$ son asíntotas verticales.

(1e) • Pimero calculamos las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+7x+2}{x^2-x-6} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}} = \frac{3+0+0}{1-0-0} = 3$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 3$ es una asíntota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{3x^2+7x+2}{x^2-x-6} = \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

Con esto logramos notar que tenemos 2 posibles candidatos que son $x = -2, 3$.

$$\lim_{x\to-2^\pm} \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to-2^\pm} \frac{(3x+1)}{(x-3)} = \frac{-6+1}{-5} = 1$$

$$\lim_{x\to3^\pm} \frac{(3x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = 3$ es asíntotas verticales, pero $x = -2$ no.

(1f)

• Las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-6x+5}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{x-\dfrac{1}{x}} = \frac{1-0+0}{\infty-0-0} = 0$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x^3-x} = \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)}$$

Ahora de manera mas evidente tenemos 3 candidatos que son $x = -1, 0, 1$.

$$\lim_{x\to0^\pm} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to-1^\pm} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to1^\pm} \frac{(x-1)(x-5)}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to1^\pm} \frac{(x-5)}{x(x+1)} = \frac{1-5}{1(2)} = -2$$

Con esto concluimos que $x = 0$ e $x = -1$ son asíntotas verticales pero $x = 1$ no.

(1g)

• Partimos por calcular **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1+0-0} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 3$ es una asíntota horizontal.

• Mientras que **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2} = \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)}$$

Con esto logramos notar que tenemos hay dos candidatos $x = -2, 1$, por lo que debemos ver si existe el límite en ese punto o es una asíntota

$$\lim_{x\to-2^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to1^{\pm}} \frac{(2x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = -2$ e $x = 1$.

(1h)

• Calculamos las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2e^x}{e^x-5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\dfrac{5}{e^x}} = \frac{2}{1-0} = 2$$

Por lo que con esto concluimos que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

• Enseguida para el tema de las **asíntotas verticales**, nosotros notamos que estas se ven cuando logramos factorizar el denominador de la fracción, acá notamos altiro que es cuando se produce $e^x = 5 \to x = \ln(5)$

$$\lim_{x\to\ln(5)} \frac{2e^x}{e^x-5} = \pm\infty$$

Con esto concluimos que $x = \ln(5)$ es asíntotas vertical.

(1i) • Partimos con las **asíntotas horizontales**, donde debemos calcular el límite al $\pm\infty$, donde aca primero moveremos el x y luego haremos un cambio de varible $u = 1/x$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin(1/x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin(1/x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u} = 1$$

• Para analizar la **asíntota vertical**, notamos que en el $x = 0$ no es continua.

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$$

El límite notamos que es posible resolver mediante el **Teorema del Sandiwch**.

$$-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$$

$$-x \leq x\sin(1/x) \leq x$$

$$-\lim_{x\to 0} x \leq \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) \leq \lim_{x\to 0} x$$

$$-0 \leq \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) \leq 0 \longrightarrow \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$$

Con esto se concluye que la función no tiene asíntotas ni verticales ni horizontales. $\square$

(1j)

• Se inicia por el calculo de las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+0+0}}{1-0+0} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = -\frac{\sqrt{1+0+0}}{1-0+0} = -1$$

Concluimos que las asíntotas son $y = \pm 1$. **Es importante entender que en el segúndo límite se le colca un** 0 **ya que** $x \to -\infty$.

• Para las **asíntotas verticales**,debemos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2-4x+3} = \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x = 1, 3$.

$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 3^\pm} \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{(x-3)(x-1)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye las asíntotas verticales son $x = 1$ e $x = 3$.

(1k)

• Para las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}==\frac{\sqrt{1+0-0}}{1+0+0}1$$

Por lo que con esto concluimos que $y=1$ es una asíntota horizontal.

• Por otro lado **asíntotas verticales** debemos factorizar la función para verlo de una manera mas evidente

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+3}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}$$

Enseguida para ver la discontinuidad debemos analizar el límite en los puntos de $x=-1,-3$

$$\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to-3^{\pm}}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}=\pm\infty$$

Con esto se concluye que la función tiene como asíntotas verticales $x=-1$ e $x=-3$.

(1l)

• En el calculo de las **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{1+0-0}}{1-0}=1$$

Con esto se llegamos a que $y=1$ es una asíntota horizotal.

• En el caso de**asíntotas verticales**, factorizamos el denominador de la fracción

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x=\pm1$.

$$\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{(x+3)}{(x+1)}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{(x+3)}{(x+1)}=\frac{4}{2}=2$$

Con esto se concluye la asíntota vertical es $x=-1$, y $x=1$ no es una asíntota vertical.

(1m)
• Se empezara por el calculo de **asíntotas horizontales**, debemos ver el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2} = \frac{\frac{(1-1/\sqrt[3]{x})}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-0}{\infty}}}{1-0+0} = 0$$

Por lo que con esto concluimos que $y=0$ es una asíntota horizontal.
notar que consideramos igual para $\pm\infty$ ya que la raíz de grado $1/3$ por lo que admite números negativos

• Para el calculo de las **asíntotas verticales** debemos factorizar la función para verlo de una manera mas evidente

$$\frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2} = \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Enseguida para ver la discontinuidad debemos analizar el límite en los puntos de $x=1,2$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Para este límite debemos recordar que $a^3-b^3=(a^2-b^2)(a+ab+b)$ con $a=\sqrt[3]{x}, b=1$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)} \frac{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^{2/3}(x-1)}{(x-1)(x-2)} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{x^{2/3}}{x-2)} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{(-1)(3)}$$

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)(x-2)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye que la función tiene como asíntotas verticales $x=2$, y $x=1$ no es una asíntota ya que su límite existe.

(1n)
• Empezando por las **asíntotas horizontales**, se debe calcular el límite al $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+0}}{2-0-0} = \frac{1}{2}$$

Con esto se llegamos a que $y = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota horizotal.

• Para las **asíntotas verticales**, debemos factorizar el denominador de la fracción

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2-3x-2} = \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)}$$

Ahora que tenemos factorizada la función vemos el límite en $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{-1}{2}^{\pm}} \frac{x^2+1}{(x-2)(2x+1)} = \pm\infty$$

Con esto se concluye que las asíntotas verticales son $x = 2$ y $x = -\dfrac{1}{2}$. vertical.

2. Encuentre el valor de a y b para que se cumpla el siguiente límite :

$$\lim_{x\to\infty} ax + b - \frac{x^3+1}{x^2+1} = 0$$

Solución: En este ejercicio en el que nos piden encontrar valores para que algo se cumpla, partamos por lo mas simple que es llevar todo a una misma expresión llegando a suma de fracciones:

$$\frac{(ax)(x^2+1) + b(x^2+1) - x^3 - 1}{x^2+1} = \frac{ax^3 + ax + bx^2 + b - x^3 - 1}{x^2+1}$$

Enseguida si lo llevamos al límite , para que el límite sea 0 necesitamos que el exponente del denominador sea mayor al del numerador, esto partiremos factorizando cada expresión:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(a-1) + bx^2 + ax + b - 1}{x^2+1}$$

Ahora notamos que necesitamos que $a - 1 = 0$ y $b = 0$, para que el exponente mayor lo tenga el denominador(x^2) y si escribimos esto en el límite inicial sería:

$$\lim_{x\to\infty} x - \frac{x^3+1}{x^2+1} = 0$$

3. Determine el valor de $p \in \mathbb{R}$ de manera que que la función:

$$f(x) = \frac{x^6 + (1+x^2)^3}{x^p}$$

tenga una asíntota horizontal.

Solución
Notemos que para que la función tenga una asíntota horizontal es cuando $x \to -\infty$ y el límite de la función es una valor fijo, entonces pensemos lo que pasa si $x \to \infty$, notemos que $x \neq 0$ por lo tanto podemos dividir el numerado y denominador por x^6

$$\frac{(x^6 + (1+x^2)^3) \cdot 1/x^6}{\frac{x^p}{x^6}}$$

notemos que en el numerado todos los elementos que tengan un grado menor que 6 van a tender a ser 0, por lo tanto sobreviven dos elementos, por lo tanto ya tengo un valor fijo en el numerador, mientras tanto en el denominador tengo que obtener un valor fijo por lo tanto $P = 6$

1.4 Continuidad

Continuidad de una Función

Definición: Sea f una función $\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, entonces f se dice continua en $x \in \mathbb{D}$, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

○ Por lo que, es necesario que se cumplan tres premisas

1. $f(a)$ está definido ($a \in \mathbb{D}$)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

○ también se dice que una función $f$es **continua desde la derecha en un número** a si se cumple

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua desde la Izquierda en a** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Por otro lado durante el curso se nos preguntaran caracteristicas sobre una función que no es continua que se reducen a dos casos:

- Discontinuidad reparable: aquella discontinuidad no esencial, donde es posible calcular el límite en cierto punto $x = a$, pero $a \notin \mathbb{D}$ de la función.

  Un ejemplo claro es $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Basta definir la función como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

- Discontinuidad no reparable: aquella discontinuidad para la cual no existe una función $g(x)$ continua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq x_0$. Es decir, no se puede "reparar" la discontinuidad asígnándole un valor en el punto. Se puede deber a dos causas

  1. Límites laterales no coinciden. Ejemplo: $\dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$.
  2. La función diverge en el punto. Ejemplo:

1. Determine todos los números reales $a|$ y b para los cuales la siguiente función es continua sobre todo $\mathbb{R}$. Justifique, para los valores encontrados, por qué la función es continua sobre todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & x<1 \\ x^2+bx & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x-2a & 2<x \end{cases}$$

La forma de proceder en este ejercicio esque para asegurar la continuidad de la función, debemos igualar los límites laterales para $x = 1$ e $x = 2$.
Partiendo por $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} ax + 2 = \lim_{x \to 1^+} x^2 + bx$$

$$a + 2 = 1 + b \to a + 1 = b$$

Donde obtenemos nuestra primera ecuación. $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 + bx = \lim_{x \to 2^+} 3x - 2a$$

$$4 + 2b = 6 - 2ab + a = 1$$

Con esta segúnda ecuación que obtenemos, llegmaos al sistema de ecuaciones

$$a + 1 = b \tag{2}$$

$$a + b = 1 \tag{3}$$

Este tiene o por solucion

$$a = 0; \qquad b = 1$$

Por lo que la función inicial termina siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x<1 \\ x^2+x & 1 \leq x \leq 2 \\ 3x & 2<x \end{cases}$$

2. ¿Que valores a y b deben tener para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a + \dfrac{\sin(bx)}{x} & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ ax + b\cos(x) & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Nos piden que la función sea continua en $\mathbb{R}$, por lo que debemos hacer que los límites laterales en $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$ deben ser iguales, donde llegaremos a un sistema de ecuaciones

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + a + \frac{\sin(bx)}{x} = \lim_{x \to 0^+} x$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + a + \frac{b\sin(bx)}{bx} = 0$$

$$0 + a + b = 0 \longrightarrow a = -b$$

Enseguida para $x = \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} ax + b\cos(x)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2} + 0$$

Por lo tanto para que sea continua debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a = -b \tag{4}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a\pi}{2} \tag{5}$$

$$a = 1; \qquad b = -1$$

Quedándonos finalmente $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 + \dfrac{\sin(-x)}{x} & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ x - \cos(x) & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}(x \neq 0)$ **(I1-2012-1)**

   (a) Es posible definir $f(0)$ de modo que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

   (b) Demuestre que, dado cualquier número $a \in (0, 1/2)$ hay algun valor x_0 para el cual $f(x_0) = a$.

Solución:
Lo que debemos hacer acá es calcular el límite para $x = 0$ en el que notamos que debemos racionalizar para lograr calcularlo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{(x)(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{2}$$

Con esto llegamos a la conclusión que deberiamos definir $f(x)$ de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

4. Sea **(I1-2011-2)**

$$f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$$

Demuestre que no existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in \text{Dom } f$.

Solución
Para que exista una función $F(x) = f(x)$ se debe dar que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$, pero notamos que hay un problema en $x = 1$, donde se debe dar al menos que exista el límite de $f(x)$. Para el calculo del límite notamos que debemos hacer un cambio en la parte de abajo de la fracción, debido a la presencia del valor absoluto, por lo que nos quedarían de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{-(x-1)} = -2$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = 2$$

Como los límites laterales no son continuos, no es posible que existe un $F(x)$ tal que $F(x) = f(x)$.

5. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ mx+n & 1 \leq x \end{cases}$$

Determine condiciones sobre m y n de manera que f sea continua en $x = 1$.

Solución
acá lo que debemos hacer es que los límites laterales deben ser continuas y luego el valor del límite debe ser igual al de la función en $x = 1$, por lo que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} x^2+1 = \lim_{x\to 1^+} mx+n$$

$$2 = m+n$$

Con lo que llegamos a la conclusión que debe darse que $m+n=2$ $\square$

6. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-[x]}+x & x>1 \\ x-[x] & x<1 \end{cases}$$

es posible definirla en $x = 1$, de modo que sea continua en dicho punto? **(I1-2014-1)**

Solución
Para lograr realizar lo que nos piden, se verifica primero que los límites laterales coincidan dando el mismo valor.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} x-[x] = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-[x]}+x$$

$$1-0 = 0+1$$

$$1 = 1$$

Con esto llegamos a que los límites laterales efectivamente dan lo mismo, por lo que la función deberia definirse con ese valor para $x = 1$ quedando como

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-[x]}+x & x>1 \\ 1 & x=1 \\ x-[x] & x<1 \end{cases}$$

7. Analice las discontinuidades de la función

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{x - x^2}$$

Solución:
Primero debemos notar cuales son los puntos donde se produce una discontinuidad

$$f(x) = \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)}$$

Habiendo factorizado la función notamos que son $x = 0, 1$, ahora debemos calcular los límites para decir si esa discontinuidad es removible o no.

- $x = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x + \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{x(1-x)} \frac{\pi}{\pi} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\pi x)}{\pi x} \frac{\pi}{1-x} = -\pi
\end{aligned}$$

- $x = 1$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi(x+1))}{x(1-x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x + \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x - \pi)}{x(1-x)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi(x-1))}{x(1-x)} \cdot \frac{-\pi}{-\pi} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-\sin(\pi(x-1))}{\pi(x-1)} \cdot \frac{-\pi}{x} = -\pi
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que tanto $x = 0$ como $x = 1$ son **discontinuidades removibles**, ya que sus límites existen.

8. Encuentre los valores de a y b que hacen que f sea continua en todo $\mathbb{R}$: **(I1-2015-2)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & x \geq 3 \end{cases}$$

Solución:
Para asegurar la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$ por lo que los límites laterales en $x = 2$ e $x = 3$ deben ser lo mismo, pues en el resto de los puntos f es continua por propiedades de las funciones continuas.

- Para $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} x + 2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax^2 - bx + 3 = 4a - 2b + 3$$

Con esto llegamos a

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$4 = 3 + 4a - 2b$$

$$1 = 4a - 2b \tag{6}$$

- Analogamente, para $x = 3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} ax^2 - bx + 3 = 9a - 3b + 3$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2x - a + b = 6 - a + b$$

Lo cual nos obliga a cumplir

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$$9a - 3b + 3 = 6 - a + b$$

$$3 = 10a - 4b \tag{7}$$

Ahora juntando ambas ecuaciones llegamos a un sistema donde tenemos

$$1 = 4a - 2b$$

$$3 = 10a - 4b$$

$$a = b = \frac{1}{2}$$

9. Determine todos los valores de a para los que la función **(I1-2018-2)**

$$f(x) = \begin{cases} |x+a| & x \geq a \\ x^2+1 & x < a \end{cases}$$

es continua en todo R

Para asegurar la continuidad debe susceder que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to a^-} |x+a| = \lim_{x \to a^+} x^2+1$$

Notamos que aca finalmente se cumplira que:

$$2|a| = a^2+1$$

Con esto tenemos que

$$0 = a^2 - 2|a| + 1$$

Luego se puede factorizar de la siguiente manera gracias a que: $|a^2| = a^2$

$$0 = (|a|-1)^2 \rightarrow a = 1 \quad y \quad a = -1$$

Donde tendremos finalmente con esto, tendremos que tenemos dos opciones que son:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$$

y como segunda opción:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| & x \geq -1 \\ x^2+1 & x < -1 \end{cases}$$

10. Considere la función **(I1-2019-1)**

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\ \cos(bx) + a & x < 0 \end{cases}$$

(a) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es continua en $x = 0$?

(b) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es derivable en $x = 0$?

a) Para que la función f sea continua en 0, los límites laterales tiene que ser iguales a $f(0) = b$. como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = b$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 + a$ entonces$1 + a = b$. Así la funciónf es continua para $a \in \mathbb{R}$ y para $b = a + 1$.

b) Para que f sea una función derivable en 0 el límite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(h)}{h}$ tiene que existir. Calculamos los límites laterales

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{ah + (a+1)\sqrt{h+1} - (a+1)}{h} = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}$$

de la misma manera

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\cos((a+1)h) + a - (a+1)}{h} = 0$$

Entonces la función f es derivable en = si tenemos $\frac{3}{2}a + \frac{1}{2} = 0$ o sea $a = -\frac{1}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$. Con esto nos quedaría finalmente $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{x+1} & x \geq 0 \\[2ex] \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) - \dfrac{1}{3} & x < 0 \end{cases}$$

11. Encuentre los valores de a y b de manera que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$. **(I1-2019-tav)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x < -1 \\ ax+b, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

Notar que para $x < -1$ la función racional esta siempre definida a al igual que el polinimio $ax + b$ entre $-1 < x < 0$. además, si $x > 0$,$\sin(1/x)$ es continua, por lo que dicho tramo también lo es. En conclusión, para cualquier a y b, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Ahora analizamos en $x = -1$ y en $x = 0$. Para que sea continua en dichos puntos, los límites laterales tienen que coincidir:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} x+1 = 0$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} ax+b = -a+b$$

de donde obtenemos que $a = b$: Por otro lado, para todo $x \neq 0$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \to -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\lim_{x\to0^+} x^2 \leq \lim_{x\to0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to0^+} x^2$$

$$0 \leq \lim_{x\to0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

$$\lim_{x\to0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} ax+b = b$$

lo que implica que $b = 1$ y por la ecuación anterior $a = 1$. En conclusión, para que f sea continua en $\mathbb{R}$, a y b deben ser 1. Donde $f(x)$ finalmente sería: función sea continua en todo $\mathbb{R}$. **(I1-2019-tav)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x < -1 \\ x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

12. Considere la función **(I1-2019-2)**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\sin(ax)}{x} + \cos(ax), & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ e^{a/x} + 2, & x < 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de $a > 0$ la función f es continua en $x = 0$?

Partamos por establecer que los límites laterales deben ser iguales al valor de $f(0)$ por lo que podemos establecer los siguiente:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

Enseguida remplazando en los puntos, primero por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} a\frac{\sin(ax)}{x} \cdot \frac{a}{a} + \cos(ax) = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} a^2\frac{\sin(ax)}{ax} + \cos(ax) = a^2 + 1 = 2$$

Por lo que nos quedaría

$$a^2 + 1 = 2 \longrightarrow a^2 = 1$$

Con esto tenemos la posibilidad de que $a = \pm 1$, pero podemos salir de la duda calculando el límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} + 2 = 2$$

Notamos que no queda otra opción que $\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} = 0$, donde esto solo sucede cuando $0 < a$, ya que si a fuera un número negativo tendriamos $\lim_{x\to 0^-} e^{a/x} = \infty$. Estos valores se deben a que si el límite viene por el 0 por la izquierda viene siendo un número negativo, lo que produce una $e^{-\infty} = 0$. Por lo que $a = 1$, donde nos queda la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} + \cos(x), & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ e^{1/x} + 2, & x < 0 \end{cases}$$

13. Determine el (los) valor(es) $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$ $(Control 1-2016-1)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|(1-\cos(x))}{x^2}, & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Solución: Para encontrar el valor para que a sea continua en $x = 0$, debemos encontrar los valores de los limites laterales, para despues igualarlo al valor de a:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x| \cdot \sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x \cdot (1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-(1-\cos(x))}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x| \cdot \sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot (1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 0$$

Ahora tenemos que el valor de:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Por lo que se debe cumplir lo siguiente para que la función sea continua en el $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \rightarrow a = 0$$

14. Determine si el $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe ($Control\ 1 - 2016 - 1$)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+\sqrt[3]{x-9}}{x-1}, & x < 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{12x-12}, & x > 1 \end{cases}$$

Solución

Para ver si el limite existe, debemos calcular los limites lateras y si estos son iguales, el limite en $x = 1$ existe y ese sera su valor.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{12x-12}$$

este limite es de facil resolucion, ya que solamente factorizamos por 12 en el denominador y luego aplicamos el limite notable

$$\frac{1}{12}\lim_{x\to 1+} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = \frac{1}{12}$$

Luego de esto calculamos el otro limite lateral racionalizando

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2+\sqrt[3]{x-9}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(2+\sqrt[3]{x-9})(4-2\cdot\sqrt[3]{x-9}+(\sqrt[3]{x-9})^2)}{(x-1)(4-2\sqrt[3]{x-9}+(\sqrt[3]{x-9})^2)}$$

Ahora podemos reducir el denominador y evaluar el limite

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)(4-2\sqrt[3]{x-9}+(\sqrt[3]{x-9})^2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{4-2\sqrt[3]{x-9}+(\sqrt[3]{x-9})^2} = \frac{1}{12}$$

Notamos que ambos valores, dan lo mismo por lo que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{12}$$

1.5 Teorema del Valor Intermedio

Teorema: Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = N$.

1. Sea f una función continua en $[0, 2]$ tal que $f(0) = f(2)$. Demuestre que existe $x_1 \in [0, 1]$ tal que $f(x_1) = f(x_1 + 1)$ **(I1-2013-1)**

   Hint: Considere usar la función $g(x) = f(x + 1) - f(x)$ en el intervalor $[0, 1]$

   Solución: Primero lo que debemos hacer es seguir el Hint y tomar en cuenta la función $g(x) = f(x+1) - f(x)$, la cual la podemos usar ya que es una resta de funciones continuas donde lo que se tiene que hacer es lograr demostrar que existe un $g(c) = 0$, $c \in [0, 1]$.

   Enseguida Tomamos $g(0) = f(1) - f(0)$ y $g(1) = f(2) - f(1)$, acá debemos considerar 3 posibles casos

   - Caso 1: Si $f(1) < f(0)$, $g(0) < 0$ y por ende $f(1) < f(2)$ dando así $g(1) > 0$, donde con esto queedaría demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
   - Caso 2: Si $f(1) > f(0)$, $g(0) > 0$, entonces $f(1) > f(2)$ dándonos $g(1) < 0$, donde con esto quedaría demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
   - Caso 3: Si $f(1) = f(0)$, $g(0) = 0$,por lo tanto $f(1) = f(2)$ dando así $g(1) = 0$, donde con esto quedaría demostrado que existe un $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$. ■

2. Sea f una función continua tal que: **(I1-2013-2)**

   - máximo $f(x) :\in [a, b] = a^2$ y Minimo $f(x) :\in [a, b] = b^2$

   Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c^2$.

   acá se debe primero crear una función auxiliar con la información dada, donde podríamos recurrir a
   $$g(x) = f(x) - x^2$$
   Ocupamos esto ya que así podemos usar los extremos del intervalo para usar **TVI**.
   $$g(a) = f(a) - a^2 \leq 0$$
   $$g(b) = f(b) - b^2 \geq 0$$
   Con esto queda demostrado que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c^2$. ■

3. Demuestre que las curvas definidas por $f(x) = 10x^3 + x^2 + 5x - 11$ y $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10$ se intersectan en algun punto $x_0 > 0$.**(I1-2014-1)**

acá consideremos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = 8x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Primero notamos que esta función es un polinomio por lo que es continua en $\mathbb{R}$, por lo que debemos hacer es demostrar que en un intervalor $[0, a]$, con $a \geq 1$. Por lo que ahora si elegimos $a = 1$ y evaluando een los extremos llegamos a

$$h(0) = -1 < 0$$
$$h(1) = \ 2 > 0$$

Por lo que con esto queda demostrado que las curvas se intersectan en un punto $x_0 \in [0, 1]$, el cual cumple con $x_0 > 0$. ■

4. Demuestre que existe al menos una solución real de la ecuación

$$\sqrt[3]{x} = 1 - x$$

en el intervalo $]0, 1[$ **(I1-2014-2)**

Solución
Definiendo la función auxiliar

$$f(x) = (1 - x) - (\sqrt[3]{x})$$

Dado que f(x) es función continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular en $]0, 1[$ ahora si evaluamos en los extremos del intervalo

$$f(0) = 1 > 0$$
$$f(1) = -1 < 0$$

Entonces por el Teorema del Valor Intermedio, f toma el valor cero en el intervalo $]0, 1[$ con $c \in]0, 1[$ y esa es una solución a esta ecuación.

5. Demuestre que, por lo menos, hay dos soluciones reales distintas de la ecuación **(I1-2014-TAV)**
$$\cos^2(x) - 3x^2 = -\sin(x)$$

Solución Definamos
$$f(x) = (-\sin(x)) - (\cos^2(x) - 3x^2)$$
Notamos que esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que podemos aplicar el TVI. Buscamos valores $x_1; x_2$ reales y distintos tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Como f es continua, con miras a usar el Teorema del Valor Intermedio, notamos que
$$f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 3\frac{\pi^2}{4} - 1 > 0$$
$$f(0) = -\sin(0) - \cos^2(0) + 3 \cdot 0^2 = -1 < 0$$
$$f(x) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 = 3\frac{\pi^2}{4} + 1 > 0$$
As, por el teorema del valor intermedio, existe$x_1 \in (\frac{-\pi}{2}; 0)$ tal que $f(x_1) = 0$, y existe $x_2 \in (0; \frac{\pi}{2})$ tal que $f(x_2) = 0$. Las que serían nuestras dos soluciones. ■

6. Sea f una función continua en $[1; 6]$ tal que $f(2) = 1$ y $f(3) = 6$: Demuestre que existe $c \in (2; 3)$ tal que $f(c) = c$: **(I1-2015-1)**

Si consideramos la función auxiliar
$$h(x) = f(x) - x$$
Donde notamos que es una función continua en el intervalo $x \in [2, 3]$, por lo que podemos evaluar en los bordes
$$h(2) = 1 - 2 < 0$$
$$h(3) = 6 - 3 > 0$$
Y con esto según el TVI queda demostrado que existe un $c \in (2; 3)$ tal que $f(c) = c$. ■

7. Demuestre que el polinomio $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 2$ tiene por lo menos dos raíces reales. **(I1-2015-tav)**

Solución
Sabemos que p es una función continua, y vemos que $p(-1) = -1$, $p(0) = 2$ y $p(3) = -25$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existen $x_1 in(-1; 0)$ y $x_2 \in (0; 3)$ tales que $p(x_1) = p(x_2) = 0$.

8. Demuestre que la ecuación $\sin(x) + x = x^2$ tiene al menos una solución real. **(I1-2016-tav)**

Solucion se define como $f(x) = \sin(x) + x - x^2$, donde $f(x)$ es una función continua para todos los reales, por ser un polinomio y una función trigonometrica continua en R. Ahora se tomamos:

$$f(\pi/4) > 0 \qquad f(\pi/2) < 0$$

Con esto demostramos que existe un $c \in (\pi/4, \pi/2)$ que cumple con $f(c) = 0$, lo que equivale a la ecuación solicitada.

9. Dadas las funciones f y g continuas en $[a; b]$;tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$; demuestre que existe un número c tal que $f(c) = g(c)$: **(I1-2017-1)**

Solucion
Definimos una función auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Luego h es continua en $[a; b]$ porque f y g lo son, además:

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) < 0$$

Luego $c \in (a; b)$ tal que $h(c) = 0$ Con esto queda demostrado que existe un c tal que $h(c) = 0$ lo que implicaria

$$h(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c) \quad \blacksquare$$

10. Demuestre que la ecuación $\ln(x) = 3 - 2x$ tiene por lo menos una solución real **(I1-2017-2)** e **(I1-2019-1)**

Solución
Para probar que la ecuación pedida tiene al menos una solución real considerarems la siguiente función continua

$$h(x) = \ln(x) - 3 + 2x.$$

Notamos que

$$h(e) = 1 - 3 + 2e > 0, \qquad h(1) = -1 < 0$$

luego el Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe un punto $x_0 \in (1, e)$ tal que $h(x_0) = 0$. Por lo tanto tal x_0 es una solución de la ecuación dada.

11. Sea g una función continua en $[-1; 2]$ tal que $g(-1) > 1$ y que $g(2) < 4$. Demuestre que existe $c \in (-1; 2)$ tal que $g(c) = c^2$. **(I1-2018-2)**

Solución
Si $h(x) = g(x) - x^2$, tenemos que h es continua en $[-1; 2]$, además $h(-1) = g(-1) - 1 > 0$ y $h(2) = g(2) - 4 < 0$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio tenemos que existe $c \in (-1; 2)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, tal que $g(c) = c^2$.

12. Sea $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Muestre que existe $c \in]-1; 4[$ tal que $f(c) = 2$. **(I1-2019-tav)**

Solución
Como f es un polinomio, entonces es continua en todo R. Además notamos que $f(-1) = 4$ y $f(0) = 0$. Ya que $0 < 2 < 4$, el Teorema del Valor Intermedio implica que existe $c \in]-1; 0[C] - 1; 4[$ tal que $f(c) = 2$.

13. Demuestre que si $h(x) = x^2 + 7sen(x)$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(c) = 50$.**(I1-2019-2)**

Solución
Considere la función $f(x) = x^2 + 7\sin(x) - 50$ y observe que f es continua en $[0; 10]$, además evaluando vemos que $f(0) = -50$ y que $f(10) = 50 + 7sen(10) > 48 > 0$, por lo tanto por TVI tenemos que, existe $c \in [0; 10]$ tal que $f(c) = 0$, lo que equivale a que, existe $c \in [0; 10]$ con $h(c) = 50$.