PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

Ayudantía 5 - MAT1610

1. Determine los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2}\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{x}\right)$

   b) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\tan(4x)}{2x-\pi}$

   Solución:

a) Observamos que la función $x \mapsto \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ es acotada en $\mathbb{R}^*$ y que $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3+2x^2} = 0$. Entonces por el teorema del Sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 0. \tag{1}$$

b) Por cambio de variable $u = 2x-\pi$, tenemos que $4x = 2u+2\pi$ ypor lo tanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(4x)}{2x-\pi} = \lim_{u\to 0}\frac{\tan(2u+2\pi)}{u} \tag{2}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\tan(2u)}{u} \tag{3}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2u)}{2u}\,\frac{2}{\cos(2u)} \tag{4}$$

$$= 2. \tag{5}$$

2. a) Determine, justificadamente, el valor de

$$\lim_{x\to -\pi} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)+x)$$

   b) Demuestre que la ecuación

$$\ln(x) = 3-2x$$

   tiene, al menos, una raíz real.

   Solución.

a) La función $x \mapsto \operatorname{sen}(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\pi} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x) + x) &= \operatorname{sen}\left(\lim_{x \to -\pi} (\operatorname{sen}(x) + x) \right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(\lim_{x \to -\pi} x \right) + x \right) \\
&= \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(-\pi) + \pi \right) \\
&= \operatorname{sen}(0 - \pi) \\
&= \operatorname{sen}(-\pi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) Sea $h(x) = \ln(x) + 2x - 3$. Observe que la función h es continua en $[1, e]$ porque es suma de funciones continuas en todo $\mathbb{R}^{+*}$. Además observamos que $h(1) = -1 < 0$ y $h(e) = 2e - 2 > 0$ y por el TVI tenemos que existe $c \in (1, e)$ tal que $h(c) = 0$. Es decir c es solución de la ecuación.

3. Determine, todos los números reales de a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} a[|x|] - b & \text{si } x < 1 \\ -2x^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$
NOTA: $[|x|] :=$ parte entera de x

Solución:
Para que f sea continua en $x = 1$ se debe cumplir que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = -2 + b$$

Observe que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -b$ y que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -2 + b$ por lo tanto $-2 + b = -b$, obteniendo que $b = 1$ y la continuidad no depende del valor de a, por lo que a puede tomar cualquier valor real.

4. Derive las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2 e^x \cos(x)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{e^x \operatorname{sen}(x)}$

c) $f(x) = 7e^{-x}$

Solución:

a) $f'(x) = 2xe^c \cos(x) + x^2 e^x \cos(x) - x^2 e^x \operatorname{sen}(x)$

b) $f'(x) = \dfrac{(2x + 1)e^x \operatorname{sen}(x) - (x^2 + x)(e^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x))}{e^{2x} \operatorname{sen}^2(x)}$

c) $f'(x) = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)' = \dfrac{0e^x - e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$

5. Sea f una función continua y derivable en $x = 2$ tal que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$ es $y = 3x - 1$. Determine $f(2)$, $f'(2)$ y el valor de

$$\lim_{x\to 2} \frac{(f(x))^2 - 25}{x - 2}$$

Solución:

Observe que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente $f'(2)$ y pasa por el punto $(2, f(2))$, obteniendo que $f'(2) = 3$ y que $f(2) = 5$. Por otra parte, de la definición de derivada, tenemos que

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$$

y que, por ser f continua en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 5$$

por lo tanto, usando álgebra de límites, tenemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{(f(x))^2 - 25}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} \cdot \lim_{x\to 2}(f(x) + 5) = 3 \cdot 10 = 30$$