

# Modelado de Objetos Autogravitantes

**Jonathan Stiven Gómez Zuluaga**<sup>\*</sup>  
**Cristian Camilo Garcia Alarcon**<sup>\*\*</sup>  
**Juan Sebastian Carrillo Rodríguez**<sup>\*\*\*</sup>  
*Universidad Industrial de Santander*  
*Bucaramanga*

30 de Noviembre de 2021

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>2</b>
<b>3. El experimento y los resultados</b>	<b>4</b>
<b>4. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>9</b>

## Resumen

Para entender o intuir las consecuencias de la anisotropía de las presiones en modelos estelares, tanto newtonianos como relativistas es necesario construir modelos, los cuales se ven afectados por diferentes parámetros involucrados. Las ecuaciones que describen estos modelos sirven para determinar los valores en los cuales se anula la presión radial y así encontrar el valor de la masa de la configuración. En pro de conseguir esta meta se supone una densidad y distribución de presiones radiales y tangenciales y así, basados en un espacio de parámetros que pueden ser variados, se observa el comportamiento del modelo planteado para la presión.

## 1. Introducción

En el proceso del modelado matemático se involucran diferentes pasos a seguir, inicialmente se debe hacer el correcto planteamiento del problema, que en este trabajo es el analizar un modelado de objetos autogravitantes anisótropos, un ejemplo complicado de esto sería el modelado de estrellas de

---

<sup>\*</sup> e-mail: jonathan2218424@correo.uis.edu.co  
<sup>\*\*</sup> e-mail: cristian2218442@correo.uis.edu.co  
<sup>\*\*\*</sup> e-mail: juan.carrillo3@correo.uis.edu.co

neutrones. la principal dificultad del planteamiento del problema radica en encontrar una forma o un modelo que permita describir esa determinada realidad o hecho que se está abordando, dando lugar a la formulación de ecuaciones y búsqueda de fenómenos físicos que intervienen. Seguidamente, en el avance de este planteamiento se pueden llegar a diferentes dificultades que se dan por los mismos fenómenos físicos o el problema inicial en cuestión, la complejidad de la realidad lleva consigo obstáculos que no permiten un abordaje del problema formulado. para superar esto en cierta medida, se deben proponer unas llamadas suposiciones simplificadoras, en donde se hace un moderado de los limites del problema y a su vez se busca hacer un abordaje de una forma más sencilla, que si bien no contempla todos los factores a tomar en cuenta, permiten en cierta medida replicar parte de la realidad del problema para llevarla a un modelo que represente de forma admisible lo que esta sucediendo en determinada situación.

Este modelo encontrado, en el caso particular del trabajo actual es basado en la búsqueda de la descripción del gradiente de presiones dentro de una configuración esférica utilizando ecuaciones diferenciales, ecuación 1.

$$\frac{dP(r)}{dr} = F(m(r), \rho(r), P(r), P_{\perp}(r)) \quad (1)$$

Donde  $P(r)$  es la presión radial;  $P_{\perp}(r)$ , presiones tangenciales;  $\rho(r)$ , la densidad de masa y  $m(r)$  es la masa contenida en una esfera de radio  $r$ ; Además se tiene la ecuación, 2 que relaciona la masa con la densidad.

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 Z(P(r), r) \quad (2)$$

luego se hace necesario aplicar restricciones físicas que dan lugar a la solución del sistema en concordancia con esas restricciones. Estas restricciones se presentan en forma de valores que no se pueden sobrepasar para no salirse de los limites de la razón física. En primera instancia tenemos que las presiones y densidades deben ser positivas para todo  $r$  dentro de la distribución,  $P(r) > 0$  y  $\rho(r) > 0$  y que sus gradientes sean negativas, ecuación 3:

$$\frac{dP(r)}{dr} \leq 0; \quad \frac{d\rho(r)}{dr} \leq 0; \quad (3)$$

Con esto se busca que las presiones y densidades decrezcan con  $r$  tiende a acercarse a la superficie de la esfera.

## 2. Metodología

En este trabajo se tratan dos posibles casos para distintas intensidades de campo gravitatorio u consideraremos los casos newtonianos y relativistas

**Modelando objetos autogravitantes newtonianos anisótropos** Para el modelo Newtoniano las ecuaciones que describen el equilibrio hidrostático en esferas autogravitantes son:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G m(r) \rho(r)}{r^2} + 2 \frac{P_{\perp}(r) - P(r)}{r} \quad (4)$$

y

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (5)$$

Donde  $G$  es una constante llamada constante de gravitación universal. A las ecuaciones 8 y 9, las llamamos ecuaciones de estado que proveen las características físicas del problema

**Modelando objetos autogravitantes relativistas anisótropos** Este es el otro caso a tratar y presenta las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{G m(r) \rho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{m(r)c^2}\right) \left(1 - 2\frac{Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} + 2\frac{P_{\perp}(r) - P(r)}{r} \quad (6)$$

y

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (7)$$

La diferencia entre los modelos relativista y newtoniano es notoria al observar las ecuaciones 8 y 13, así mismo se observa que las definiciones de masa, ecuaciones 9 y 14 en ambos modelos es la misma.

Un desarrollo a tomar en cuenta para llevar todo a términos más sencillos es el de la adimensionalización, consta que eliminar las dimensiones dadas en las ecuaciones con el fin de tener valores iniciales como números fijos y no depender de constantes con sus propias métricas dadas para cada caso al que se va a aplicar el modelo. En la figura 1 se muestran los cambios de variable con los parámetros característicos del sistema.

$$\frac{P}{P_0} \rightarrow \tilde{P}, \quad \frac{P_{\perp}}{P_0} \rightarrow \tilde{P}_{\perp}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \rightarrow \tilde{\rho}, \quad \frac{m}{M} \rightarrow \tilde{m}, \quad y \quad \frac{r}{R} \rightarrow \tilde{r}.$$

Figura 1: cambios de variable para adimensionalizar.

Donde  $M$  y  $R$  son la masa total y el radio de la configuración y  $P_0$  y  $\rho_0$  son la presión y densidad central.

Otro motivo para adimensionalizar es que se suelen trabajar con cantidades cuyos valores numéricos difieren en muchos órdenes de magnitud entonces se aumenta la posibilidad de que existan mayores errores numéricos.

Una vez las ecuaciones se encuentran adimensionalizadas, se puede proceder a buscar una solución a los sistemas de ecuaciones por medio de métodos numéricos como runge-kutta para visualizar el comportamiento del sistema

### 3. El experimento y los resultados

Para el primer caso, el caso newtoniano, donde se deben integrar las ecuaciones 8 y 9, se abordó el problema por 2 métodos, runge-kutta y el método de euler para hacer una comparativa de los resultados.

Las ecuaciones adimensionalizadas a integrar fueron:

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{r}} = -(2C_n - \frac{\mu}{\sigma}) \frac{\tilde{m}}{\tilde{r}^2} \quad (8)$$

y

$$\frac{d\tilde{m}}{d\tilde{r}} = 3\eta \tilde{r}^2 \tilde{\rho} \quad (9)$$

$$\tilde{\rho} = (1 - B \tilde{r}^2) \quad (10)$$

donde los parámetros son:

$$\mu = \frac{MG}{Rc^2} \quad \kappa = \frac{P_0}{\rho_0 c^2} \quad \sigma = \frac{P_c}{\rho_c} \quad \eta = \frac{\rho_0}{\langle \rho \rangle} \quad \langle \rho \rangle = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} \quad (11)$$

Para esta prueba se toma en cuenta que los valores iniciales del sistema son  $m_0 = 0$  y  $P_0 = 1$ , debido a que la masa en  $r = 0$  es 0 y la presión inicial, al estar adimensionalizado es 1. Los parámetros utilizados fueron:

$$\mu = 0,2 \quad \eta = 0,5 \quad \sigma = 0,45 \quad (12)$$

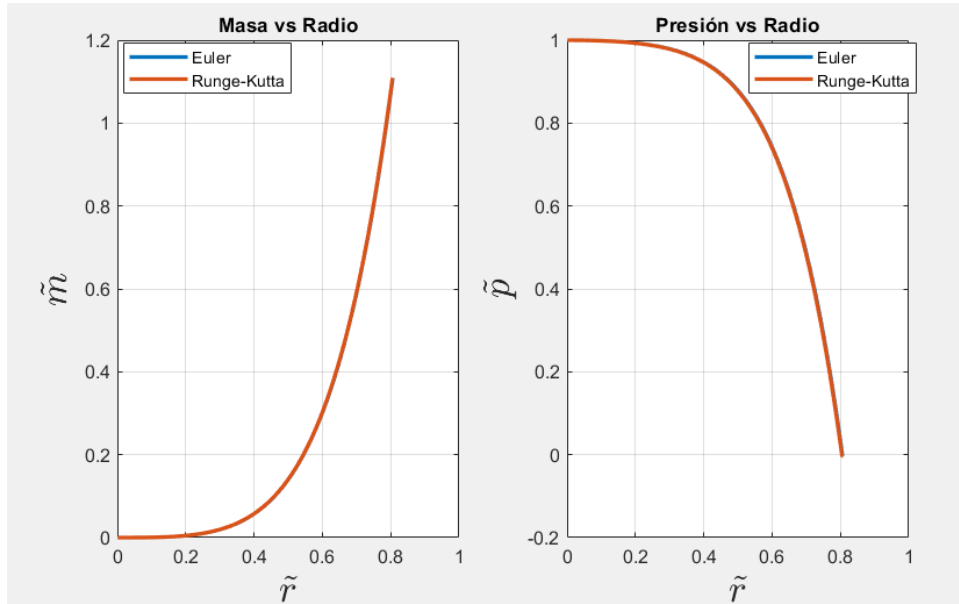


Figura 2: Comparación de Runge-Kutta y Euler caso newtoniano.

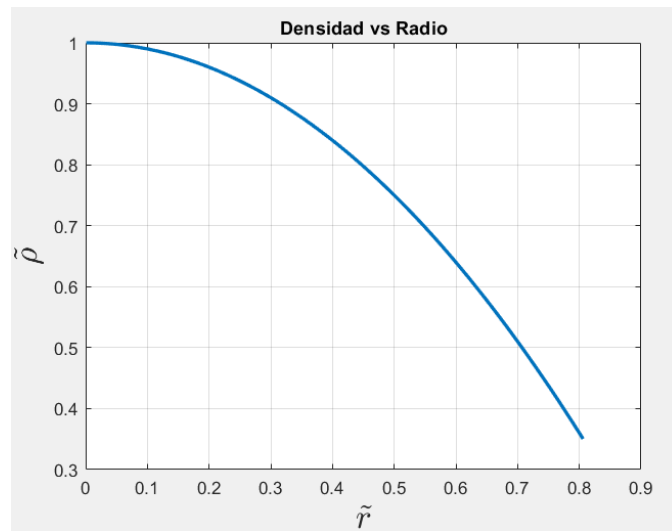


Figura 3: Curva de densidad.

Como se puede apreciar ambos métodos ofrecen una curva similar tanto para la masa como para la presión, si se mira la diferencia que hay entre las dos en los resultados para masa, se encuentra la gráfica 4.

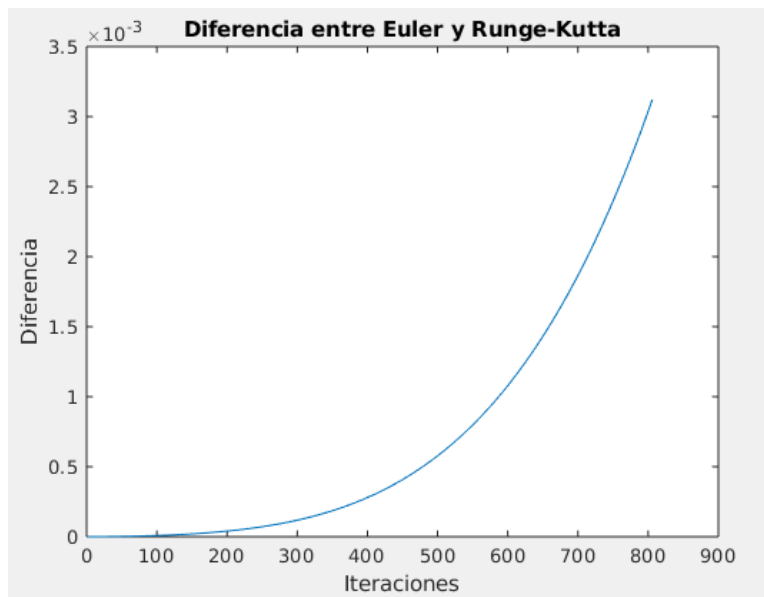


Figura 4: Diferencia entre los métodos utilizados.

En donde vemos que la diferencia entre los dos resultados es del orden de  $10^{-3}$  incrementando a medida que aumenta el numero de iteraciones.

Para el segundo caso, el caso relativista, donde se deben integrar las ecuaciones 13 y 14, se abordó el problema por 2 métodos, runge-kutta y el método de euler para hacer una comparativa de los resultados.

$$\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{r}} = - \left( 2C_n - \frac{\mu}{\sigma} \right) \frac{\tilde{m}}{\tilde{r}^2} \tilde{\rho} \left( 1 + \kappa \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} \right) \left( 1 + 3\eta\kappa \frac{\tilde{P}\tilde{r}^3}{\tilde{m}} \right) \left( 1 - 2\mu \frac{\tilde{m}}{\tilde{r}} \right)^{-1} \quad (13)$$

y

$$\frac{d\tilde{m}}{d\tilde{r}} = 3\eta \tilde{r}^2 \tilde{\rho} \quad (14)$$

$$\tilde{\rho} = (1 - B \tilde{r}^2) \quad (15)$$

Para esta prueba se toma en cuenta que los valores iniciales del sistema son  $m_0 = 0$  y  $P_0 = 1$ , debido a que la masa en  $r = 0$  es 0 y la presión inicial, al estar adimensionalizado es 1. Los parámetros utilizados fueron:

$$\mu = 0,2 \quad \eta = 0,5 \quad \sigma = 0,45 \quad \kappa = 0,3 \quad (16)$$

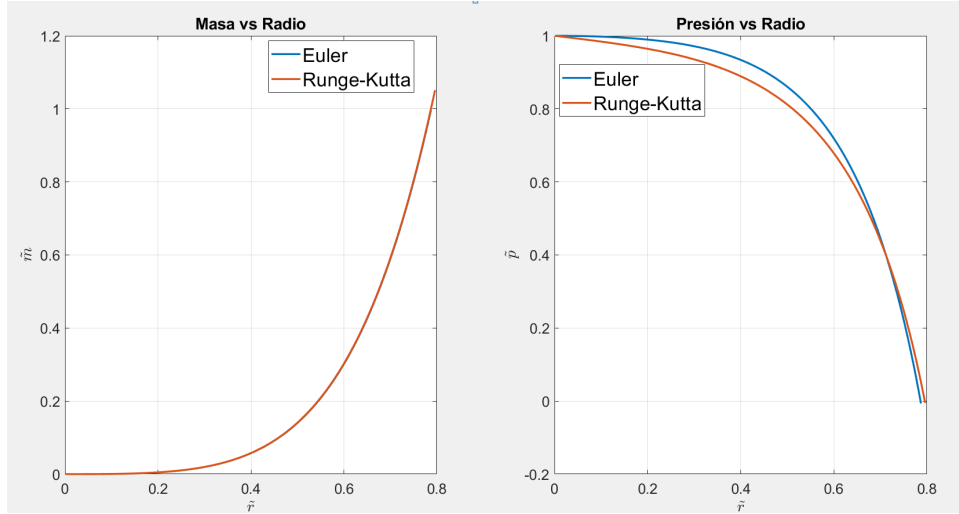


Figura 5: Comparación de Runge-Kutta y Euler caso relativista.

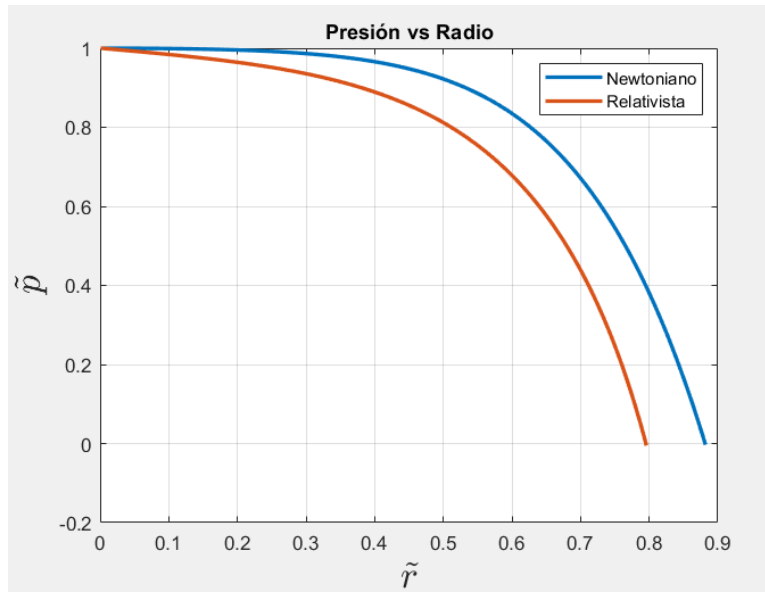


Figura 6: Comparación caso newtoniano y caso relativista.

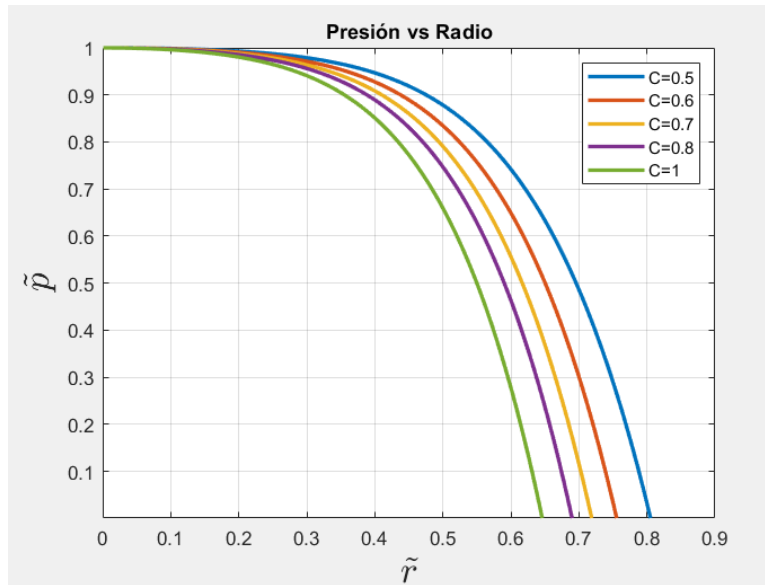


Figura 7: Comportamiento al variar  $C$  (intensidad de la anisotropía).

La variación de las constantes utilizadas para la integración, afectan la curva obtenida en la solución de las ecuaciones diferenciales, podemos observar para el caso newtoniano en la masa, lo

que sucede si variamos  $\eta$  desde 0,1 hasta 0,5, es que se obtienen 5 curvas diferentes, ver figura 8.

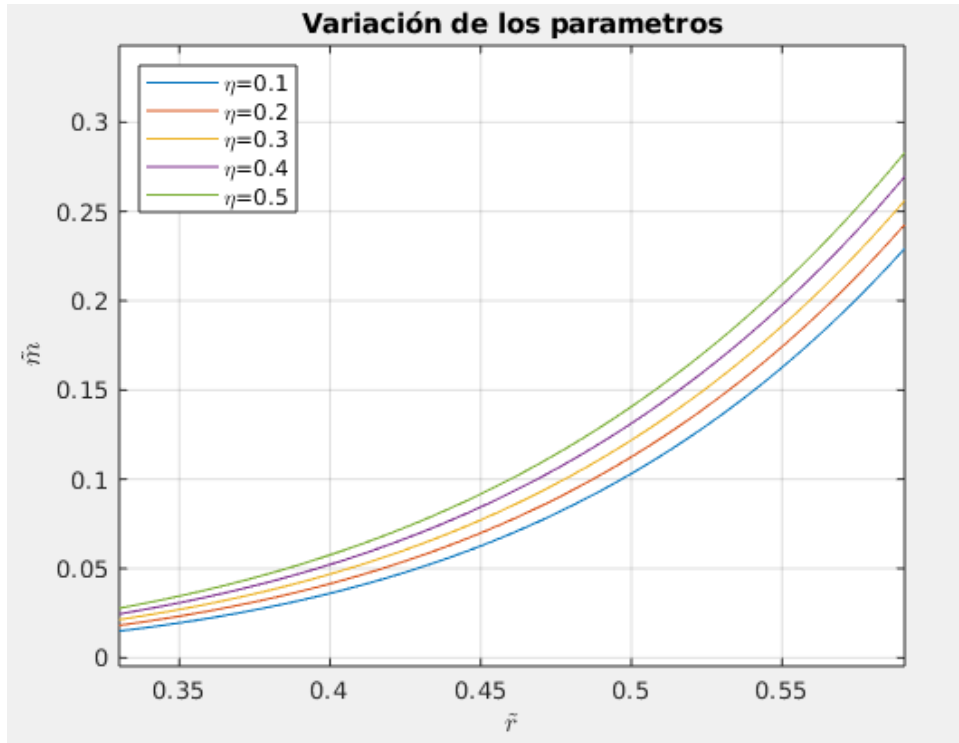
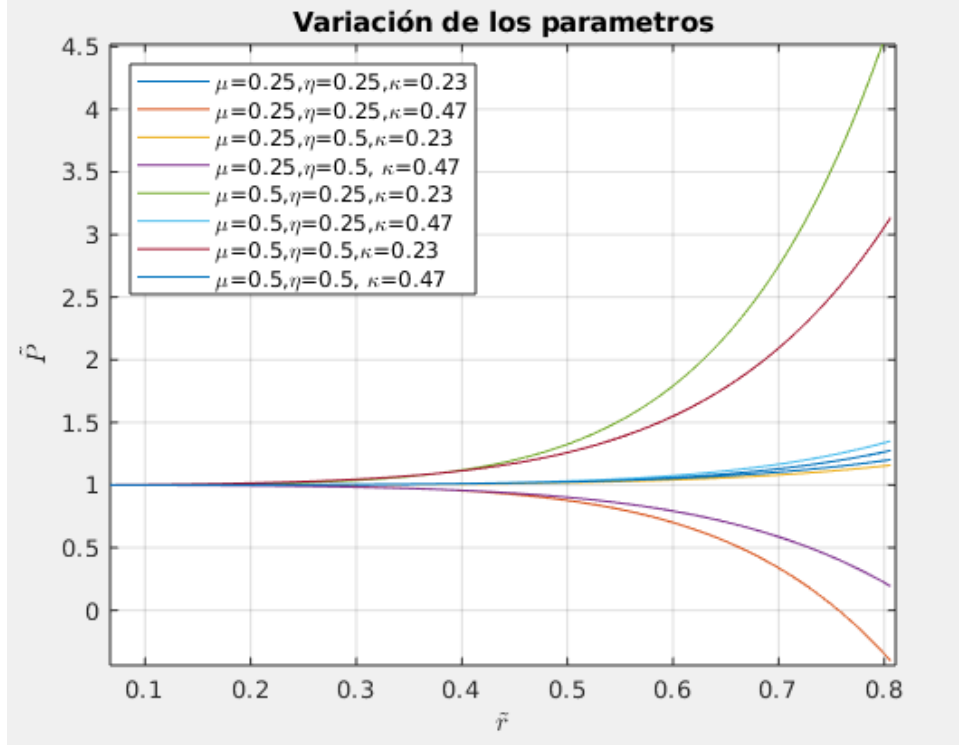


Figura 8: Comportamiento al variar  $\eta$ .

Del mismo modo para la presión se pueden observar los cambios en la curva al aplicar variaciones en los parámetros que tienen las ecuaciones diferenciales donde algunas de las curvas están superpuestas para la presión según el modelo newtoniano, figura 9.




 Figura 9: Comportamiento al variar  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ .

Es claro que dependiendo de los parámetros las curvas pueden tomar diferentes formas, pero no todas estas soluciones a las ecuaciones diferenciales siguen las normas planteadas en un principio llamadas condiciones de estabilidad, por ejemplo en este caso particular la presión debe ser positiva para todo  $r$  y decrecer para satisfacer las condiciones impuestas por la física, ver ecuación 3. Por lo tanto algunas de las curvas mostradas en la figura 9 no deben ser tomadas en cuenta entre las posibles soluciones.

## 4. Conclusiones y Recomendaciones

La construcción de modelos estelares para intuir o entender las consecuencias de la anisotropía de las presiones, presenta un problema que puede ser modelado por medio de ecuaciones diferenciales, tanto para el caso newtoniano como para el caso relativista, se encontró que estos modelos, como un sistema de ecuaciones diferenciales, pueden ser solucionados por medio de métodos numéricos para encontrar las curvas que representan el comportamiento del sistema, cabe resaltar el proceso que debe llevarse a cabo para poder aplicar los métodos numéricos, la dependencia de estas soluciones de unos parámetros puestos y unas condiciones que limitan los resultados obtenidos. Más allá de encontrar una solución del sistema de ecuaciones es necesario plantear un entendimiento acerca de

las soluciones encontradas, pues no todas las soluciones son viables siguiendo las leyes de la física, como pudo observarse en las gráficas presentadas.

## Referencias