

Estudiantes:

Jonathan Stiven Gómez Zuluaga

Juan Sebastian Carrillo Rodríguez

Taller 1

Ejercicios sección 2.1

3. Considere un triángulo equilátero que se muestra en la figura 2.1. Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro \star y, reflexiones respecto a planos, \mathcal{X}_A , \mathcal{X}_B y \mathcal{X}_C que dejan invariante la figura del triángulo. Adicionalmente, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triángulo, tal y como mostramos en la mencionada figura 2.1. Note que lo ilustrado en la figura, puede esquematizarse como:

$$(A \alpha, B \beta, C \gamma) \quad \xrightarrow{\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}} \quad (A \gamma, B \alpha, C \beta) \quad \xrightarrow{\mathcal{X}_A} \quad (A \gamma, B \beta, C \alpha).$$

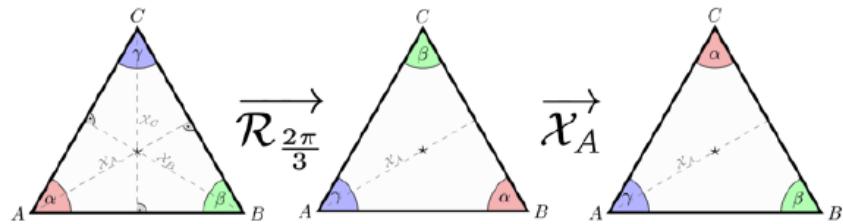


Figura 2.1: Transformaciones que dejan invariante un triángulo equilátero. Concatenación de una rotación, $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}$ con una reflexión, \mathcal{X}_A , respecto a un plano que pasa por A

- a) Construya la tabla de multiplicación para G_Δ , vale decir $G_\Delta = \{\mathcal{I}, \{\mathcal{R}_i\}, \{\bar{\mathcal{R}}_j\}, \{\mathcal{X}_k\}\}$ y la operación es concatenación tal y como mostramos en la figura 2.1. Donde \mathcal{I} es la operación identidad, $\{\mathcal{R}_i\}$ es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que $\{\bar{\mathcal{R}}_j\}$ es un conjunto de rotaciones en el sentido antihorario, y $\{\mathcal{X}_k\}$ el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triángulo.
- b) Muestre que el conjunto de estas operaciones forman el grupo: G_Δ .
- c) Identifique cada una de las \mathcal{R}_i y $\bar{\mathcal{R}}_j$, y muestre además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, $\{\mathcal{I}, \mathcal{X}_i\}$, forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.
- d) Considere las siguientes matrices:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a G_Δ .

- e) Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.1.6. ¿Es ese grupo isomorfo a G_Δ ? Justifique su respuesta.
- f) ¿Qué puede decir de las operaciones simetrías que dejan invariante un triángulo isósceles? ¿formarán grupo? y si el triángulo es escaleno, cuales son las operaciones de simetría que lo dejan invariante?

3 a)

G_Δ	\mathcal{I}	R_+	R_-	X_A	X_B	X_C	
\mathcal{I}	\mathcal{I}	R_+	R_-	X_A	X_B	X_C	
R_+	R_+	R_-	\mathcal{I}	X_C	X_A	X_B	
R_-	R_-	\mathcal{I}	R_+	X_B	X_C	X_A	
X_A	X_A	X_B	X_C	\mathcal{I}	R_+	R_-	
X_B	X_B	X_C	X_A	R_-	\mathcal{I}	R_+	
X_C	X_C	X_A	X_B	R_+	R_-	\mathcal{I}	

$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$

$X_I(\frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$

$X_{-}(-\frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$

$X_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix}$

$X_B = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

$X_C = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix}$

$$b-1) G_D = \{ I, R+, R-, X_A, X_B, X_C \}$$

- Se forma un grupo por que es * cerrado

* Asociativa

* Elemento neutro

* Elemento inverso

- no es un grupo abeliano debido a que no es commutativo.

Estas condiciones se pueden evidenciar en la tabla del inciso anterior

c-)	R_D	I	$R+$	$R-$	\parallel	X_D	I	X_A
	I	I	$R+$	$R-$		I	I	X_A
	$R+$	$R+$	$R-$	I		X_A	X_A	I
	$R-$	$R-$	I	$R+$	\parallel	- Es un ejemplo de que las rotaciones forman un Subgrupo cíclico de orden 2		
-	Las rotaciones forman un Subgrupo cíclico de orden 3				\parallel			

$$d) \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

*	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Observando la tabla de multiplicación se puede mostrar que se forma un grupo bajo la multiplicación de matrices y que éste es isomorfo a 6Δ .

e) El grupo de permutaciones de 3 objetos es isomorfo al grupo 6Δ porque organizando los elementos se puede notar que las tablas de multiplicación de los grupos son iguales.

f) Las operaciones simétricas que sigan invierte un triángulo isósceles no forman un grupo al no ser cerradas.

10. Sea \mathcal{P}_n el conjunto de todos los polinomios de grado n , en x , con coeficientes reales:

$$[p_n] \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i.$$

- a) Demostrar que \mathcal{P}_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).
- b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿ \mathcal{P}_n será un espacio vectorial? Por qué?
- c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de \mathcal{P}_n es un subespacio vectorial?
 - 1) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.
 - 2) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
 - 3) Todos los polinomios que tienen a x como un factor ($\text{grado } n > 1$).
 - 4) Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como un factor.

$$10 \quad a) \quad P_1(x) = \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i \quad P_2(x) = \sum_{i=0}^{n_2} b_i x^i$$

$$\boxed{\text{Grupo}} \quad P_3(x) = P_1(x) + P_2(x) = \sum_{i=0}^{n_1+n_2} (a_i + b_i) x^i \quad \text{cerrado}$$

$$\begin{array}{l} \text{respecto} \\ \text{a} \\ \text{a la suma} \end{array} \quad \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n_2} (b_i + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{n_1} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=0}^{n_2} c_i x^i \\ \sum_{i=0}^{n_1+n_2} (a_i + b_i + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{n_1+n_2} (a_i + b_i + c_i) x^i \quad \text{Asociativo}$$

$$P(x) = 0 \quad \text{elemento neutro} \quad P_1(x) = x \quad ; \quad P_1^{-1}(x) = -x \quad \text{ejemplo de elemento inverso}$$

grupo respectivo a la multiplicación

$$\alpha P(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n_1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n_1} (\alpha a_i) x^i \quad \text{cerrado}$$

$$\alpha \sum_{i=0}^{n_1} (\beta a_i) x^i = \beta \sum_{i=0}^{n_1} (\alpha a_i) x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n_1} (\alpha \beta a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n_1} (\alpha \beta a_i) x^i \quad \text{Asociativo}$$

$\alpha = 1$ elemento neutro

$$\alpha = 2 ; \quad \alpha^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{ejemplo elemento inverso}$$

b-) si los a_i son enteros $P_n = \sum_{i=0}^{n_1}$ es un espacio vectorial

porque

- Ya se mostró que es cerrado para la suma

- La suma de enteros es commutativa

- La suma de enteros es asociativa

- Existe un único elemento neutro $P(x) = 0$

- Existe elemento simétrico para cada elemento

- se mostró que es cerrado bajo el producto por un numero

- se cumplen las demás propiedades

C-) Los números $\boxed{1} + \boxed{2}$ forman subespacios vectoriales porque tienen un único elemento neutro y además cumplen con todos los propiedades. Los números $\boxed{3} + \boxed{4}$ no poseen un único elemento neutro por tanto no pueden formar subespacios vectoriales.

Ejercicios sección 2.2

2. Considerando estas definiciones de producto interno en \mathcal{P}_n :

$$a) \quad \langle q_n | p_n \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx, \quad b) \quad \langle q_n | p_n \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

- a) Encuentre los ángulos en el "triángulo" formado por los vectores: $|x_1\rangle = 1, |x_2\rangle = t, |x_3\rangle = 1 - t$.
- b) Encuentre la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en \mathcal{P}_3 :
 - 1) $|x_1\rangle = 1; |x_2\rangle = x$.
 - 2) $|x_1\rangle = 2x; |x_2\rangle = x^2$.
- c) Desarrollemos el problema

Este ejercicio se realizó haciendo uso de la herramienta Máxima.

a)

```

P1: 1;P2:t;P3:1-t;
(%o18) 1
(%o19) t
(%o20) 1-t

→ 'integrate((P1·P2),t,-1,1)/(sqrt('integrate((P1·P1),t,-1,1))·sqrt('integrate((P2·P2),t,-1,1)));
(%o22) 
$$\frac{\int_{-1}^1 t \, dt}{\sqrt{2} \sqrt{\int_{-1}^1 t^2 \, dt}}$$


→ ev(%,integrate);
(%o23) 0

→ acos(%),numer;
(%o24) 1.570796326794897

→ 'integrate((P1·P3),t,-1,1)/(sqrt('integrate((P1·P1),t,-1,1))·sqrt('integrate((P3·P3),t,-1,1)));
(%o33) 
$$\frac{\int_{-1}^1 1-t \, dt}{\sqrt{2} \sqrt{\int_{-1}^1 (1-t)^2 \, dt}}$$


→ ev(%,integrate);
(%o34) 
$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$


→ acos(%),numer;
(%o35) 0.5235987755982989

→ 'integrate((P2·P3),t,-1,1)/(sqrt('integrate((P2·P2),t,-1,1))·sqrt('integrate((P3·P3),t,-1,1)));
(%o36) 
$$\frac{\int_{-1}^1 (1-t) \, dt}{\sqrt{\int_{-1}^1 (1-t)^2 \, dt} \sqrt{\int_{-1}^1 t^2 \, dt}}$$


→ ev(%,integrate);
(%o37) - 
$$\frac{1}{2}$$


→ acos(%),numer;
(%o38) 2.094395102393196

```

b)

```

(%i19) x1:2·x;x2:x^2;
(%o18) 2 x
(%o19) x2

(%i20) sqrt('integrate(((x1-x2)^2),x,-1,1))=sqrt(integrate(((x1-x2)^2),x,-1,1));
(%o20) √ ∫ (2 x - x2)2 dx = √ 46
           -1                      15

(%i21) 'integrate((x1·x2),x,-1,1)/(sqrt('integrate((x1·x1),x,-1,1))·sqrt('integrate((x2·x2),x,-1,1)));
(%o21) ∫ x3 dx
           -1
      √ ∫ x2 dx √ ∫ x4 dx
           -1           -1

(%i22) ev(%,integrate);
(%o22) 0

(%i23) acos(%),numer;
(%o23) 1.570796326794897

```

$\rightarrow \text{x1 : 1; x2 : } x;$
 (%o1) 1
 (%o2) x
 $\rightarrow \text{sqrt(integrate(((x1-x2)^2),x,-1,1))=sqrt(integrate(((x1-x2)^2),x,-1,1));}$
 (%o5) $\sqrt{\int_{-1}^1 (1-x)^2 dx} = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{3}}$
 ~~$\rightarrow \text{integrate((x1\cdot x2),x,-1,1)/(sqrt(integrate((x1\cdot x1),x,-1,1))\cdot sqrt(integrate((x2\cdot x2),x,-1,1)))}$~~
 (%o6) $\frac{\int_{-1}^1 x dx}{\sqrt{2} \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx}}$
 $\rightarrow \text{ev}(\%, \text{integrate});$
 (%o7) 0
 $\rightarrow \text{acos}(\%), \text{numer};$
 (%o8) 1.570796326794897

[2]

	a) $\langle g_n p_n \rangle = \int_{-1}^1 p_n(x) g(x) dx$	b) $\langle q_n p_n \rangle = \int_0^1 r_n(x) g(x) dx$
--	---	--

a-)

(1)	a	b	
X	X_{1, X₂}	1.57	0.5236
X	X_{1, X₃}	0.5236	0.5236
X	X_{2, X₃}	2.094	1.048

b-)

	a	b	
1	1,633	1,57	0,577
2	1,7512	1,57	0,73
			0,2527

3. Sea E' un subespacio euclíadiano de dimensión k , $E' \subset E$, y sea $|v\rangle$ un vector que no necesariamente es un elemento de E' . Podemos plantearnos el problema de representar $|v\rangle$ de la forma: $|v\rangle = |g\rangle + |h\rangle$; donde $|g\rangle \in E'$ y $|h\rangle$ es ortogonal a E' . La existencia de la expansión anterior nos muestra que el espacio total E , de dimensión n , es la suma directa de los subespacios E' y su complemento ortogonal E^\perp de dimensión $n - k$.

Encuentre el vector $|v\rangle$, como la suma del vector $|g\rangle$, expandido por los vectores $|g_i\rangle$, y el vector perpendicular $|h\rangle$ cuando:

a) $|h\rangle = (5, 2, -2, 2)$, $|g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha)$, $|g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0)$.

b) $|h\rangle = (-3, 5, 9, 3)$, $|g_1\rangle = (1, 1, 1, \gamma)$, $|g_2\rangle = (2\eta, -1, 1, 1)$, $|g_3\rangle = (2, -7\delta, -1, -1)$.

3 a) $|h\rangle = (5, 2, -2, 2)$ $|g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha)$ $|g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0)$

$$\langle h | g_1 \rangle = 0 \rightarrow 5(2) + 2(1) - 2(1) + 2(-\alpha) = 0$$

\alpha = 5

$$\langle h | g_2 \rangle = 0 \rightarrow 5(1) + 2(\beta) - 2(3) + 3(0) = 0$$

\beta = 1/2

$$v = h + g_1 + g_2 = \boxed{(8, \frac{3}{2}, 2, -3)}$$

b) $|h\rangle = (-3, 5, 9, 3)$ $|g_1\rangle = (1, 1, 1, \gamma)$ $|g_2\rangle = (2\eta, -1, 1, 1)$ $|g_3\rangle = (2, -7\delta, -1, -1)$

$$\langle h | g_1 \rangle = -3(1) + 5(1) + 9(1) + 3\gamma = 0$$

\gamma = -\frac{11}{3}

$$\langle h | y_2 \rangle = -3(2n) + 5(-n) + 9(n) + 3(n) = 0$$

$$\boxed{n = \frac{7}{6}}$$

$$\langle h | y_3 \rangle = -3(z) + 5(-\frac{1}{3}z) + 9(-z) + 3(-z) = 0$$

$$z = -\frac{18}{35}$$

$$V = h + g_1 + g_2 + g_3 = \left(\frac{7}{3}, \frac{43}{5}, 10, -\frac{2}{3} \right)$$

Ejercicios sección 2.3

6. Utilizando Maxima reproduzca el ejemplo 3 que expusimos en la página 130. Es decir, suponga el espacio de polinomios, \mathcal{P}^n , de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{\pi_i\} = \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$, pero en este caso con el producto interno definido por: $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 dx f(x) g(x) \sqrt{1-x^2}$. Encuentre la base ortogonal correspondiente. A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de segunda especie²³.

Este ejercicio se realizó en máxima, se encontró hasta el polinomio de grado 4.

```
(%i4) load("eigen")$  
producto(f,g):=integrate((f·g)·(sqrt(1-t^2)), t, a, b);  
  
(%o4) producto(f,g):=integrate(f g sqrt(1-t^2), t, a, b)  
  
(%i5) e:gramschmidt ([1, t, t^2,t^3,t^4], producto), a=-1, b=1;  
(%o5) [1,t,(2 t-1)(2 t+1)/4,t^2 (2 t^2-1)/2,t^3 (4 t^2-2 t-1)(4 t^2+2 t-1)/16]  
  
(%i6) e:expand(e);  
(%o6) [1,t,t^2-1/4,t^3-t/2,t^4-3 t^2/4+1/16]  
  
(%i7) map(producto, [e[1], e[2], e[3]], [e[2], e[3], e[1]]), a=-1, b=1;  
(%o7) [0,0,0]
```

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2 y lo detallamos en la sección 4.4.9, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)_j^i \rightarrow (A^*)_i^j \equiv A_i^j$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \text{ es decir } \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real} \\ z_3^* = z_4 & \text{real} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos} \end{cases}.$$

Entonces

- Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.6 forman una base para ese espacio vectorial.
- Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a | b \rangle = \text{Tr}(A^\dagger B)$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

(5) matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

* mostrar que son linealmente independientes y generan lo deseado

$$a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 + d\sigma_0 = 0$$

$$\begin{array}{l} a0 + b0 + c1 + d1 = 0 \\ a1 + b(-i) + c0 + d0 = 0 \\ a1 + b(i) + c0 + d0 = 0 \\ a0 + b0 + c(-1) + d1 = 0 \end{array}$$

det $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4i$ ✓

linealmente independientes

* matriz hermitiana

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} z_1^* = z_1 \text{ real} \\ z_4^* = z_4 \text{ real} \\ z_2^* = z_3 \in \mathbb{C} \end{array}$$

mostrar que A es una combinación lineal de matrices de Pauli para matrices que son matrices Pauli A

tomando la matriz de ecuaciones planteada anteriormente

$$\begin{array}{l} c+d = z_1 \quad 1 \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ a+bi = z_2 \\ a+bi = z_3 \\ -c+d = z_4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} c+d = z_1 \rightarrow \text{real} \quad \checkmark \\ a+bi = z_2 \rightarrow z_2^* = a+bi = z_3 \quad \checkmark \\ c+d = z_4 \rightarrow \text{real} \quad \checkmark \end{array}$$

sí es ✓

5.6

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \langle a | b \rangle \hat{=} \text{Tr}(A^\dagger B)$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \quad \langle V_1 | V_2 \rangle \hat{=} \text{Tr}(V_1^\dagger V_2)$$

$$V_1^\dagger V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$$

$$\langle V_1 | V_2 \rangle \hat{=} \text{Tr}(V_1^\dagger V_2) = z_1 + z_3$$

$$\langle V_1 | V_2 \rangle \hat{=} j - j = 0 \quad \boxed{\text{Orthogonal}} \quad \text{Prinsvera}$$

$$V_2^\dagger V_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle V_2 | V_3 \rangle \hat{=} \text{Tr}(V_2^\dagger V_3) = z_1 + z_3$$

$$\langle V_2 | V_3 \rangle \hat{=} \text{Tr}(V_2^\dagger V_3) = 0 + 0 = 0 \quad \boxed{\text{Orthogonal}}$$