

# Tensores y autovalores

Juan Sebastian Carrillo Rodríguez<sup>\*</sup>

Jonathan Stiven Gómez Zuluaga<sup>\*\*</sup>

Cristian Camilo Garcia Alarcon<sup>\*\*\*</sup>

*Universidad Industrial de Santander*

*Bucaramanga*

8 de septiembre de 2021

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Metodología</b>	<b>2</b>
<b>3. El experimento y los resultados</b>	<b>5</b>
<b>4. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>9</b>

## Resumen

En la actualidad es posible encontrar una cantidad muy diversificada de datos disponibles para su análisis por medio de internet, a su vez con la utilización de herramientas matemáticas y estadísticas se pueden interpretar diferentes conjuntos de información que en principio podrían parecer solo números al azar. Para mostrar esto se presentan ejemplos de ejercicios con respecto a datos de partículas con su ubicación y una aplicación de los concepto mas enfocada a un caso tomado de estadística basado en datos libres del banco mundial.

## 1. Introducción

Los diferentes momentos que pueden ser obtenidos de un conjunto de datos al representarlos como una función, permiten obtener información relevante de los mismos datos, con esto se hace referencia a términos como el valor total del sistema, promedio pesado de una variable o matriz de covarianza entre otros. cabe recalcar que este ejercicio de análisis de los datos tiene aplicación en

---

<sup>\*</sup> e-mail: [juan.carrillo3@correo.uis.edu.co](mailto:juan.carrillo3@correo.uis.edu.co)

<sup>\*\*</sup> e-mail: [jonathan2218424@correo.uis.edu.co](mailto:jonathan2218424@correo.uis.edu.co)

<sup>\*\*\*</sup> e-mail: [cristian2218442@correo.uis.edu.co](mailto:cristian2218442@correo.uis.edu.co)

diversas áreas tales como se presenta en los ejemplos dados durante el desarrollo de este artículo, análisis de partículas según su ubicación (x,y,z) en un plano cartesiano o análisis de variables enfocadas a la estadística en el área de las finanzas.

Para el desarrollo de los ejercicios propuestos, es necesario tener en cuenta algunas definiciones nombradas anteriormente:

$$|\bar{x}\rangle_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x\rangle_i \quad (1)$$

Donde  $N$  es el número de vectores que conforman el conjunto de datos y  $|\bar{x}\rangle_i$  es la media de los mismos.

$$\mu_0(v) = \sum_{i=1}^N |x\rangle_i \quad (2)$$

$\mu_0$  es el momento de orden cero que representa el valor total de la variable del sistema

$$\mu_1(v) = \sum_{i=1}^N v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle_i) \quad (3)$$

$\mu_1$  es el momento de orden uno que corresponde al promedio pesado de la variable

$$\mu_2(v) = \sum_{i=1}^N v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle_i)^2 \quad (4)$$

$\mu_2$  es el momento de orden dos que es la matriz de covarianza de la variable llevando la varianza a múltiples dimensiones

Generalmente los vectores que representan eventos dados en la cotidianidad no tienen una base ortogonal pero estos por medio de una transformación lineal pueden ser llevados a tener una base ortogonal [1].

## 2. Metodología

Para la primera parte de este artículo se tiene un sistema conformado por  $n$  partículas de masas distintas dispuestas en un volumen tal y como se muestra en la gráfica 1

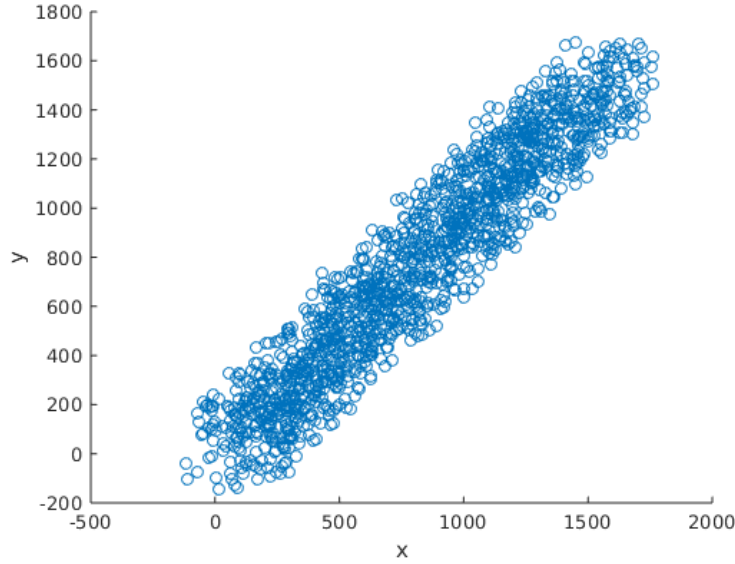


Figura 1: Se muestran las partículas ubicadas en el plano cartesiano en dos dimensiones (x,y)

Se obtienen los momentos descritos en las ecuaciones 2,3,4 y seguidamente se procede a calcular la matriz de transformación para pasar a la base de autovectores. A partir de la ecuación 4, de la cual obtenemos nuestro tensor de inercia y calculamos sus autovectores. Estos autovectores usados como columnas conforman la matriz transformación que nos permite pasar de la base de los autovectores a la base canónica. Haciendo uso de los siguientes teoremas[2]:

**Teorema 1** Sean  $B_1$  y  $B_2$  bases para un espacio vectorial  $V$ . Sea  $A$  una matriz de transición de  $B_1$  a  $B_2$  entonces para todo  $x \in V$

$$(x)_{B_2} = A(x)_{B_1} \quad (5)$$

**Teorema 2** Si  $A$  es la matriz de transición de  $B_1$  a  $B_2$  entonces  $A^{-1}$  es la matriz de transición de  $B_2$  a  $B_1$

Entonces, si conocemos la matriz  $A$  podemos utilizar su inversa para pasar de la base canónica a la base de autovectores.

Este mismo procedimiento puede aplicarse para los datos en 3 dimensiones, donde cambia la matriz definida por la ecuación 4 a un tamaño de  $3 \times 3$  pues en este caso se manejan tres variables  $(x, y, z)$  para la posición de la partícula, la distribución se muestra en la figura 2

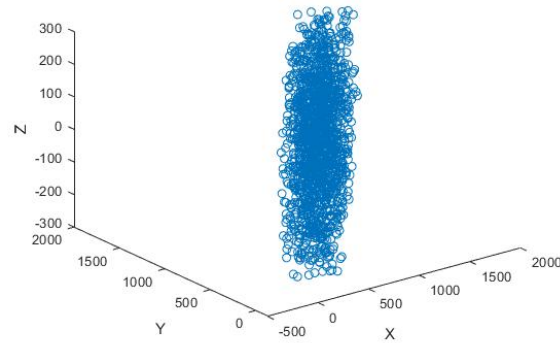


Figura 2: Se muestra la distribución de las partículas utilizando 3 dimensiones.

Por ultimo se presenta una aplicación diferente en el área de la economía, el Banco Mundial presenta estadísticas de datos económicos de casi todos los países, de los cuales se tiene el producto interno bruto de cada país (GDP) en los últimos 15 años. con estos datos buscamos calcular la matriz de covarianza en datos correspondientes a defensa, salud, educación, ciencia y tecnología en Colombia. Los datos recolectados se presentan en la figura 3

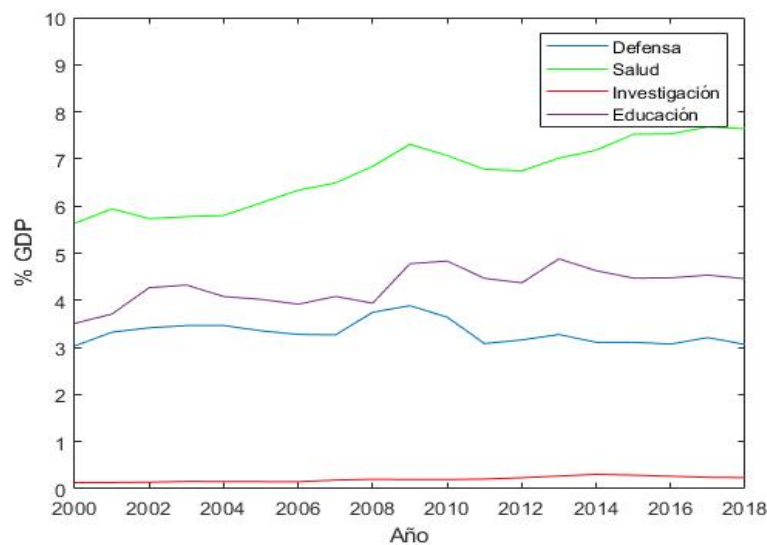


Figura 3: Se muestra la distribución de los GDP para defensa, salud, educación, ciencia y tecnología desde al año 2000 al 2018.

### 3. El experimento y los resultados

Para el caso de las partículas en dos dimensiones el tensor de inercia (momento de orden 2,  $\mu_2$ ) es de tamaño  $2 \times 2$  y se muestra en la figura 4, los momentos encontrados son:  $\mu_0 = 4627$  ;  $\mu_1 = [17774 \ 4850.6]$

```
M2 = 2x2
      9.586e+08  9.1177e+08
      9.1177e+08  9.6367e+08
```

Figura 4: Tensor de inercia para datos de partículas en dos dimensiones.

A partir del tensor de inercia se encuentran los valores propios y vectores propios , estos vectores propios son las columnas de la matriz de transformación. Cuando se pasa a la base de autovectores se obtiene una distribución nueva de los datos como se muestra en la figura 5

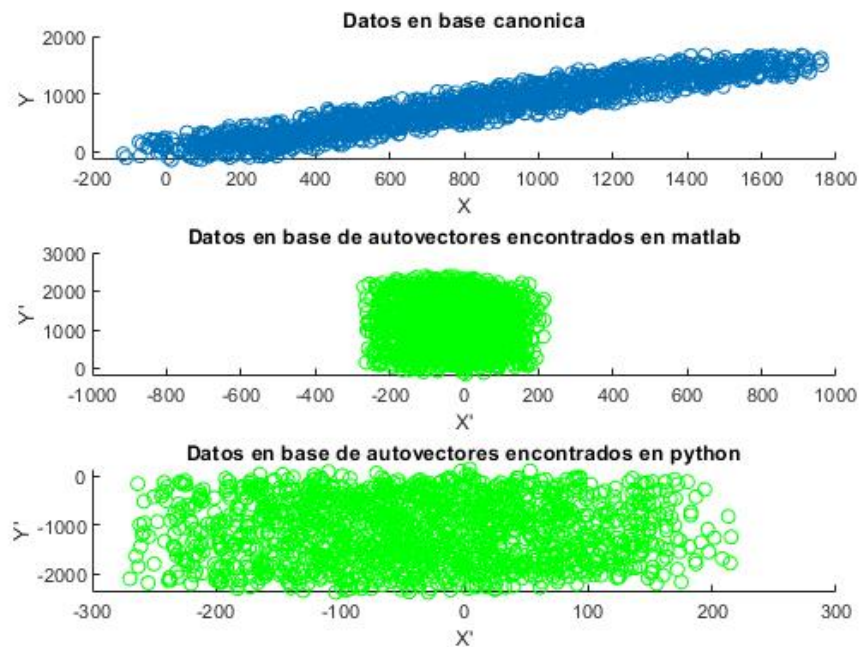


Figura 5: Distribución de las partículas en 2 dimensiones en la base canónica y la base de autovalores.

En esta figura se presentan 2 distribuciones de datos en diferentes bases de autovectores debido a que al realizar el procedimiento en Matlab 6 y en Python 7 se obtuvieron los mismos autovalores

pero distintos autovectores. Estos resultados se presentan a continuación junto con las respectivas matrices de transformación desde la base canónica a las diferentes bases de autovectores.

```
Autovectores = 2x2
    -0.70809    0.70612
     0.70612    0.70809

M_transEB = 2x2
    -0.70809    0.70612
     0.70612    0.70809
```

Figura 6: Resultados obtenidos al realizar el procedimiento en Matlab.

```
Autovectores_p = 2x2
    -0.70809    -0.70612
     0.70612    -0.70809

M_transEB = 2x2
    -0.70809    0.70612
    -0.70612   -0.70809
```

Figura 7: Resultados obtenidos al realizar el procedimiento en Python.

El mismo procedimiento se aplica para las partículas en tres dimensiones. los momentos encontrados se muestran a continuación:  $\mu_0 = 4627$  ;  $\mu_1 = [17774 \ 4850.6 \ 2036.2]$  El tensor de inercia se muestra en la figura 8 y los datos con la transformación por el cambio de base se muestran en la figura 9

```
M2 = 3x3
    9.586e+08    9.1177e+08   -7.1342e+06
    9.1177e+08    9.6367e+08   -1.9275e+06
   -7.1342e+06   -1.9275e+06    1.0184e+08
```

Figura 8: Tensor de inercia de las partículas en 3 dimensiones.

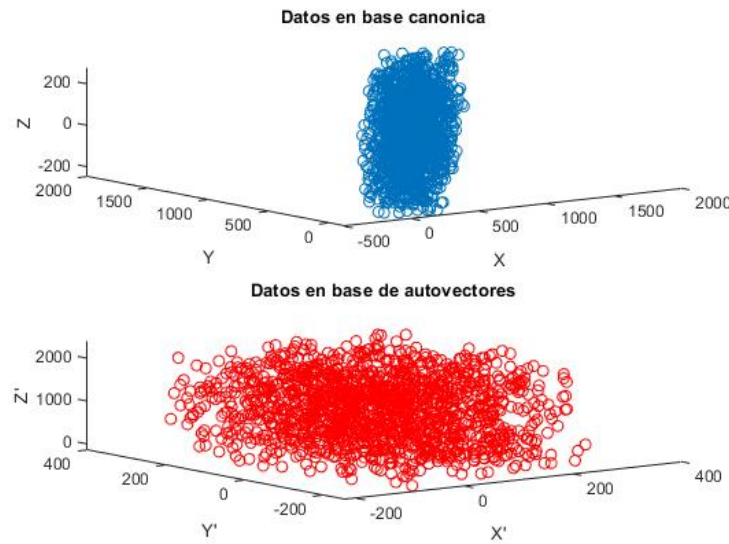


Figura 9: Distribución de las partículas en 3 dimensiones en la base canónica y la base de autovectores.

Estos resultados se obtuvieron después de hallar los autovectores y la respectiva matriz de transformación [10](#) entre la base canónica y la base los autovectores.

```
Autovectores = 3x3
    0.70653    -0.046906    0.70613
   -0.70423     0.051869    0.70808
    0.069839     0.99755   -0.003615

M_transEB = 3x3
    0.70653    -0.70423    0.069839
   -0.046906     0.051869    0.99755
    0.70613     0.70808   -0.003615
```

Figura 10: Autovectores y matriz de transformación

Por último para el caso de las estadísticas presentadas por el banco mundial tenemos que la matriz de covarianza se muestra en la figura [11](#), la matriz de correlación en la figura [12](#) y se calculan los autovectores y estos se muestran en la figura [13](#)

```
Matriz_covarianza = 4x4
      0.058759   -0.02211   -0.0046039   0.011529
      -0.02211    0.4985    0.033259    0.18453
      -0.0046039  0.033259  0.0030872   0.014446
      0.011529    0.18453    0.014446    0.14183
```

Figura 11: Matriz de covarianza de los datos adquiridos del Banco Mundial.

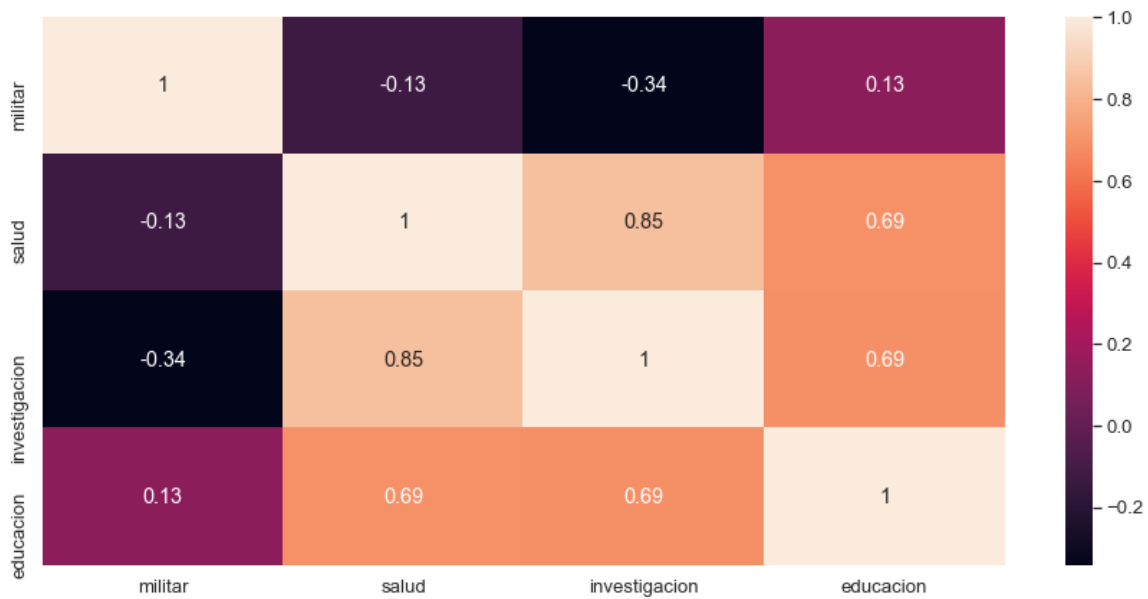


Figura 12: Matriz de correlación de los datos adquiridos del Banco Mundial.

Los datos que se presentan hacen parte de estadísticas correspondientes a defensa, salud, educación, ciencia y tecnología desde al año 2000 al 2018, siendo ciencia y tecnología un mismo ítem. Se tienen 4 variables por lo que la matriz de covarianza es de tamaño  $4 \times 4$

En cuanto a la matriz de correlación nos muestra que la relación lineal entre el porcentaje de GDP gastado en defensa y los demás ítem analizados es muy mínima, esto debido a que los valores son cercanos a cero, mientras que los demás ítem expuestos poseen entre sí coeficientes más cercanos a 1 que indican una posible relación lineal entre ellos.



```

Autovectores = 4x4
-0.070973    0.74884    -0.65822    -0.030959
 0.045476    0.28195     0.27265     0.91875
-0.99528    -0.069345    0.025462    0.062989
 0.04816    -0.59577    -0.70126     0.38856

Autovalores = 4x4
0.00054021    0          0          0
0          0.041688    0          0
0          0          0.080378    0
0          0          0          0.57957

```

Figura 13: Autovectores de la matriz generada por los datos del banco mundial.

Los vectores que después de la transformación conservan su dirección son conocidos como autovectores y el factor por el cual se escalan o reducen son los autovalores.

A continuación se presenta la matriz de transformación para pasar de la base canónica a la base de los autovectores: [14](#)

```

Matriz_transformacion = 4x4
-0.070973    0.74884    -0.65822    -0.030959
 0.045476    0.28195     0.27265     0.91875
-0.99528    -0.069345    0.025462    0.062989
 0.04816    -0.59577    -0.70126     0.38856

```

Figura 14: Matriz de transformación.

Geométricamente los autovalores significan los escalados de los ejes principales (direcciones de los autovectores), siendo el primero el que mayor longitud tiene. En términos de la varianza el primer autovalor se corresponde al mayor valor de varianza explicada y así sucesivamente con el resto de autovalores. Esta explicabilidad de varianza es importante en áreas por ejemplo financieras o economía puesto permiten agrupar las variables por aquellas más representativas.

En cuanto a los autovectores geométricamente representan los ejes principales, en términos de la varianza representan las direcciones donde se maximiza o minimiza la varianza.

## 4. Conclusiones y Recomendaciones

Cuando se tienen datos que cambian con respecto a una o más variables, el cálculo de una matriz de varianza y covarianza se muestra como una fuente de información relevante de los datos. Partiendo de esto como se mostró en los ejercicios desarrollados, es posible mediante una matriz de transformación hacer una transformación lineal a los datos de tal forma que la varianza de los

datos en la nueva base sea mínima. para esto es importante el calculo de los diferentes momentos mencionados en el desarrollo del articulo. Se puede ver para el caso de los datos del banco mundial que a medida que se introducen más variables aumenta la complejidad para entender como se comportan unos con otros, una posible solución para reducir esta complejidad puede ser el método de componentes principales (*Principal Component Analysis, PCA*), con este método se busca reducir la dimensionalidad condensando la información en solo una pocas componentes.

## Referencias

- [1] Stephen H Friedberg, Arnold J Insel, and Lawrence E Spence. *Algebra lineal*. Publicaciones Cultural, 1982.
- [2] S Grossman et al. *Matemáticas 4: Algebra lineal*. McGraw-Hill, 2011.