Taller 1

Ejercicios sección 2.1

3. Considere un triángulo equilátero que se muestra en la figura 2.1. Se pueden identificar operaciones de rotación alrededor de un eje perpendicular a la figura que pasa por su baricentro $\star$ y, reflexiones respecto a planos, $\mathcal{X}_A$, $\mathcal{X}_B$ y $\mathcal{X}_C$– que dejan invariante la figura del triángulo. Adicionalmente, se puede definir la operación concatenación de rotaciones y reflexiones que dejan igualmente invariante al triángulo, tal y como mostramos en la mencionada figura 2.1. Note que lo ilustrado en la figura, puede esquematizarse como:

$$(A\ \alpha, B\ \beta, C\ \gamma) \quad \overrightarrow{\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}} \quad (A\ \gamma, B\ \alpha, C\ \beta) \quad \overrightarrow{\mathcal{X}_A} \quad (A\ \gamma, B\ \beta, C\ \alpha)\,.$$

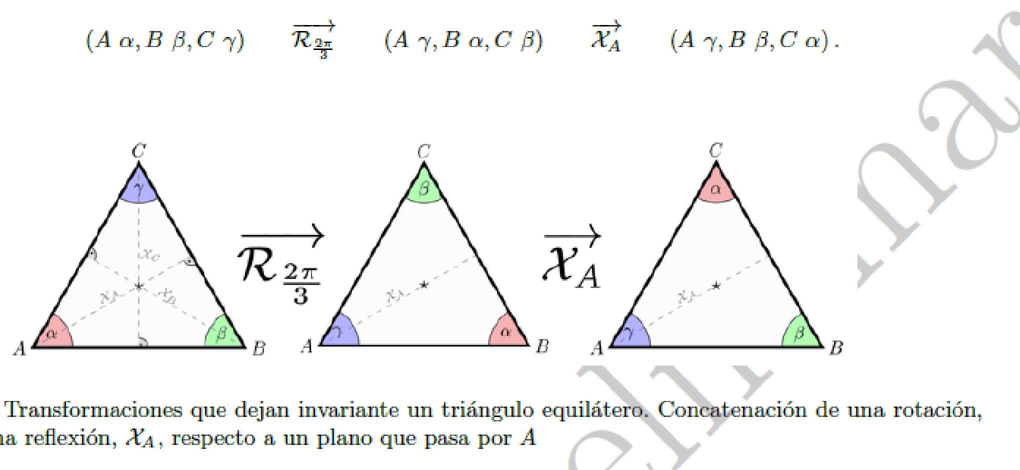

Figura 2.1: Transformaciones que dejan invariante un triángulo equilátero. Concatenación de una rotación, $\mathcal{R}_{\frac{2\pi}{3}}$ con una reflexión, $\mathcal{X}_A$, respecto a un plano que pasa por A

a) Construya la tabla de multiplicación para $\boldsymbol{G}_\triangle$, vale decir $\boldsymbol{G}_\triangle = \{\mathcal{I}, \{\mathcal{R}_i\}, \{\bar{\mathcal{R}}_j\}, \{\mathcal{X}_k\}\}$ y la operación es concatenación tal y como mostramos en la figura 2.1. Donde $\mathcal{I}$ es la operación identidad, $\{\mathcal{R}_i\}$ es un conjunto de rotaciones en sentido horario, mientras que $\{\bar{\mathcal{R}}_j\}$ es un conjunto de rotaciones en el sentido antihorario, y $\{\mathcal{X}_k\}$ el conjunto de las reflexiones que dejan invariante el triángulo.

b) Muestre que el conjunto de estas operaciones forman el grupo: $\boldsymbol{G}_\triangle$.

c) Identifique cada una de las $\mathcal{R}_i$ y $\bar{\mathcal{R}}_j$, y muestre además, que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo identifique las reflexiones y muestre que, cada una de las reflexiones y la identidad, $\{\mathcal{I}, \mathcal{X}_i\}$, forman también un subgrupo cíclico, pero de orden 2.

d) Considere las siguientes matrices:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Muestre que forman grupo bajo la multiplicación de matrices y que ese grupo es isomorfo a $\boldsymbol{G}_\triangle$.

e) Considere el conjunto de permutaciones de 3 objetos y la operación composición de permutaciones que discutimos como ejemplo en la sección 2.1.6. ¿ Es ese grupo isomorfo a $\boldsymbol{G}_\triangle$? Justifique su respuesta.

f) ¿Qué puede decir de las operaciones simetrías que dejan invariante un triángulo isósceles? ¿formarán grupo? ¿ y si el triángulo es escaleno, cuales son las operaciones de simetría que lo dejan invariente?

$\boxed{3}$ a-)

G_Δ	I	R_+	R_-	X_A	X_B	X_C
I	I	R_+	R_-	X_A	X_B	X_C
R_+	R_+	R_-	I	X_C	X_A	X_B
R_-	R_-	I	R_+	X_B	X_C	X_A
X_A	X_A	X_B	X_C	I	R_+	R_-
X_B	X_B	X_C	X_A	R_-	I	R_+
X_C	X_C	X_A	X_B	R_+	R_-	I

$$I = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$X_+\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$$X_-\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$X_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix}$$

$$X_B = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$X_C = \begin{pmatrix} A & B & C \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

b-) $G_\Delta = \{ I, R_+, R_-, X_A, X_B, X_C \}$

- Se forma un grupo por que: * Cerrada
  * Asociativa
  * Elemento neutro
  * Elemento inverso

- no es un grupo abeliano debido a que no es conmutativo.

Estas condiciones se pueden evidenciar en la tabla del inciso anterior

c-)

R_Δ	I	R_+	R_-
I	I	R_+	R_-
R_+	R_+	R_-	I
R_-	R_-	I	R_+

- Las rotaciones forman un subgrupo cíclico de orden 3

//

$X_{A\Delta}$	I	X_A
I	I	X_A
X_A	X_A	I

- Es un ejemplo de que las reflexiones forman un subgrupo cíclico de orden 2

//

d-) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

•	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

Observando la tabla de multiplicación se puede mostrar que se forma un grupo bajo la multiplicación de matrices y además es isomorfo a $G_\triangle$

e-) El grupo de permutaciones de 3 objetos es isomorfo al grupo $G_\triangle$ por que organizando los elementos se puede notar que las tablas de multiplicación de los grupos son iguales.

f-) Las operaciones simetrías que dejan invariante un triángulo isósceles no formarían un grupo al no ser cerrados.

10. Sea $\mathcal{P}_n$ el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i .$$

a) Demostrar que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real).

b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿$\mathcal{P}_n$ será un espacio vectorial? ¿Por qué?

c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathcal{P}_n$ es un subespacio vectorial?

1) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n - 1$.
2) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.
3) Todos los polinomios que tienen a x como un factor (grado $n > 1$).
4) Todos los polinomios que tienen a $x - 1$ como un factor.

$\boxed{10}$ a-) $P_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \qquad P_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

Grupo respecto a la suma

$$P_3(x) = P_1(x) + P_2(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i \quad \text{cerrado}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} (b_i + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i) x^i + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i + c_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + b_i + c_i) x^i \quad \text{Asociativo}$$

$P(x) = 0$ Elemento neutro $\qquad P_1(x) = x \; ; \; P_1^{-}(x) = -x$ Ejemplo de elemento inverso

Grupo respecto a la multiplicación

$$\alpha P(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha a_i) x^i \quad \text{cerrado}$$

$$\alpha \sum_{i=0}^{n-1} (\beta a_i) x^i = \beta \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha a_i) x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha \beta a_i) x^i = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha \beta a_i) x^i \quad \text{Asociativo}$$

$\alpha = 1$ Elemento neutro $\qquad \alpha = 2 \; ; \; \alpha^{-} = \frac{1}{2}$ Ejemplo elemento inverso

b-) si los a_i son enteros $P_n = \sum_{i=0}^{n-1}$ es un espacio vectorial porque:

- Ya se mostró que es cerrado para la suma
- La suma de enteros es conmutativa
- La suma de enteros es asociativa
- Existe un único elemento neutro $P(x) = 0$
- existe elemento simetrico para cada elemento
- Ya se mostró que es cerrado bajo el producto por un numero
- se cumplen las demas propiedades

C-) los numerales $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ forman subespacios vectoriales porque tienen un único elemento neutro y además cumplen con todas las propiedades. Los numerales $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$ no poseen un único elemento neutro por tanto no pueden formar subespacios vectoriales

Ejercicios sección 2.2

2. Considerando estas definiciones de producto interno en $\mathcal{P}_n$:

$$a) \quad \langle q_n | p_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x \,, \qquad b) \quad \langle q_n | p_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x \,.$$

   a) Encuentre los ángulos en el "triángulo" formado por los vectores: $|x_1\rangle = 1, |x_2\rangle = t, |x_3\rangle = 1 - t$.

   b) Encuentre la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en $\mathcal{P}_3$:

      1) $|x_1\rangle = 1; \quad |x_2\rangle = x$.

      2) $|x_1\rangle = 2x; \quad |x_2\rangle = x^2$.

   c) Desarrollemos el problema

Este ejercicio se realizó haciendo uso de la herramienta Máxima.

a)

```
P1: 1;P2:t;P3:1−t;
```
(%o18) 1

(%o19) t

(%o20) $1-t$

```
'integrate((P1·P2),t,−1,1)/(sqrt('integrate((P1.P1),t,−1,1))·sqrt('integrate((P2·P2),t,−1,1)));
```
(%o22) $$\frac{\int_{-1}^{1} t\,dt}{\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt}}$$

```
ev(%,integrate);
```
(%o23) 0

```
acos(%),numer;
```
(%o24) 1.570796326794897

```
'integrate((P1·P3),t,−1,1)/(sqrt('integrate((P1·P1),t,−1,1))·sqrt('integrate((P3·P3),t,−1,1)));
```
(%o33) $$\frac{\int_{-1}^{1} 1-t\,dt}{\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1} (1-t)^2\,dt}}$$

```
ev(%,integrate);
```
(%o34) $$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
acos(%),numer;
```
(%o35) 0.5235987755982989

```
'integrate((P2·P3),t,−1,1)/(sqrt('integrate((P2·P2),t,−1,1))·sqrt('integrate((P3·P3),t,−1,1)));
```
(%o36) $$\frac{\int_{-1}^{1} (1-t)\,t\,dt}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (1-t)^2\,dt}\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\,dt}}$$

```
ev(%,integrate);
```
(%o37) $$-\frac{1}{2}$$

```
acos(%),numer;
```
(%o38) 2.094395102393196

b)

(%i19) x1: 2·x;x2:x^2;

(%o18) $2\,x$

(%o19) x^2

(%i20) sqrt('integrate(((x1−x2)^2),x,−1,1))=sqrt(integrate(((x1−x2)^2),x,−1,1));

(%o20) $$\sqrt{\int_{-1}^{1}(2\,x-x^2)^2\,dx}=\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{15}}$$

(%i21) 'integrate((x1·x2),x,−1,1)/(sqrt('integrate((x1·x1),x,−1,1))·sqrt('integrate((x2·x2),x,−1,1)));

(%o21) $$\frac{\int_{-1}^{1}x^3\,dx}{\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2\,dx}\,\sqrt{\int_{-1}^{1}x^4\,dx}}$$

(%i22) ev(%,integrate);

(%o22) 0

(%i23) acos(%),numer;

(%o23) 1.570796326794897

```
→ x1 : 1; x2 : x;
```
(%o1) 1

(%o2) x

```
→ sqrt('integrate(((x1−x2)^2),x,−1,1))=sqrt(integrate(((x1−x2)^2),x,−1,1));
```
(%o5) $$\sqrt{\int_{-1}^{1}(1-x)^2\,dx}=\frac{2^{3/2}}{\sqrt{3}}$$

```
→ 'integrate((x1·x2),x,−1,1)/(sqrt('integrate((x1·x1),x,−1,1))·sqrt('integrate((x2·x2),x,−1,1)));
```
(%o6) $$\frac{\int_{-1}^{1}x\,dx}{\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2\,dx}}$$

```
→ ev(%,integrate);
```
(%o7) 0

```
→ acos(%),numer;
```
(%o8) 1.570796326794897

$\boxed{2.}$

a) $\langle g_n | p_n \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,g(x)\,dx$ b) $\langle g_n | p_n \rangle = \int_{0}^{1} p(x)\,g(x)\,dx$

a-)

$\measuredangle$ \ $\langle \rangle$	a	b
$\measuredangle X_1, X_2$	1.57	0.5236
$\measuredangle X_1, X_3$	0.5236	0.5236
$\measuredangle X_2, X_3$	2.094	1.048

b-)

	a		b	
	d	$\measuredangle$	d	$\measuredangle$
1	1,633	1,57	0.577	0.5236
2	1,7512	1,57	0.73	0.2527

3. Sea $\boldsymbol{E}'$ un subespacio euclidiano de dimensión k, $\boldsymbol{E}' \subset \boldsymbol{E}$, y sea $|v\rangle$ un vector que no necesariamente es un elemento $\boldsymbol{E}'$. Podemos plantearnos el problema de representar $|v\rangle$ de la forma: $|v\rangle = |g\rangle + |h\rangle$; donde $|g\rangle \in \boldsymbol{E}'$ y $|h\rangle$ es ortogonal a $\boldsymbol{E}'$. La existencia de la expansión anterior nos muestra que el espacio total $\boldsymbol{E}$, de dimensión n, es la suma directa de los subespacios $\boldsymbol{E}'$ y su complemento ortogonal $\boldsymbol{E}^{\perp}$ de dimensión $n-k$.

   Encuentre el vector $|v\rangle$, como la suma del vector $|g\rangle$, expandido por los vectores $|g_i\rangle$, y el vector perpendicular $|h\rangle$ cuando:

   a) $|h\rangle = (5, 2, -2, 2)$, $|g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha)$, $|g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0)$.

   b) $|h\rangle = (-3, 5, 9, 3)$, $|g_1\rangle = (1, 1, 1, \gamma)$, $|g_2\rangle = (2\eta, -1, 1, 1)$, $|g_3\rangle = (2, -7\delta, -1, -1)$.

$\boxed{3}$ a-) $|h\rangle = (5, 2, -2, 2)$ $|g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha)$ $|g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0)$

$\langle h | g_1 \rangle = 0 \rightarrow 5(2) + 2(1) - 2(1) + 2(-\alpha) = 0$

$\boxed{\alpha = 5}$

$\langle h | g_2 \rangle = 0 \rightarrow 5(1) + 2(\beta) - 2(3) + 3(0) = 0$

$\boxed{\beta = 1/2}$

$v = h + g_1 + g_2 = \boxed{\left(8, \frac{7}{2}, 2, -3\right)}$

b-) $|h\rangle = (-3, 5, 9, 3)$ $|g_1\rangle = (1, 1, 1, \gamma)$ $|g_2\rangle = (2\eta, -1, 1, 1)$ $|g_3\rangle = (2, -7\delta, -1, -1)$

$\langle h | g_1 \rangle = -3(1) + 5(1) + 9(1) + 3\gamma = 0$

$\boxed{\gamma = \frac{-11}{3}}$

$\langle h|g_2\rangle = -3(2n) + 5(-1) + 9(1) + 3(1) = 0$

$$\boxed{n = \frac{7}{6}}$$

$\langle h|g_3\rangle = -3(2) + 5(-1\delta) + 9(-1) + 3(-1) = 0$

$$\delta = -\frac{78}{35}$$

$v = h + g_1 + g_2 + g_3 = \left(\frac{7}{3}, \frac{43}{5}, 10, -\frac{2}{3}\right)$

Ejercicios sección 2.3

6. Utilizando **Maxima** reproduzca el ejemplo 3 que expusimos en la página 130. Es decir, suponga el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\}$, pero en este caso con el producto interno definido por: $\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)\sqrt{1-x^2}$. Encuentre la base ortogonal correspondiente. A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de segunda especie[23].

Este ejercicio se realizó en máxima, se encontró hasta el polinomio de grado 4.

(%i4) load("eigen")$
producto(f,g):=integrate((f·g)·(sqrt(1−t^2)), t, a, b);

(%o4) $\mathrm{producto}(f,g):=\int_a^b f\,g\sqrt{1-t^2}\,dt$

(%i5) e:gramschmidt ([1, t, t^2,t^3,t^4], producto), a= −1, b=1;

(%o5) $\left[1, t, \frac{(2t-1)(2t+1)}{4}, \frac{t(2t^2-1)}{2}, \frac{(4t^2-2t-1)(4t^2+2t-1)}{16}\right]$

(%i6) e:expand(e);

(%o6) $\left[1, t, t^2-\frac{1}{4}, t^3-\frac{t}{2}, t^4-\frac{3t^2}{4}+\frac{1}{16}\right]$

(%i7) map(producto, [e[1], e[2], e[3]], [e[2], e[3], e[1]]), a= −1, b=1;

(%o7) [0,0,0]

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2 y lo detallamos en la sección 4.4.9, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)^i_j \to (A^*)^j_i \equiv A^j_i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real} \\ z_4^* = z_4 & \text{real} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos} \end{cases} .$$

Entonces

a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.6 forman una base para ese espacio vectorial.

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \rightleftharpoons \text{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

(5)

matrices de Pauli

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- mostrar que son lineolmente independients y generan la base

$a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 + d\sigma_0 = 0$

$a0 + b\cdot 0 + c1 + d1 = 0$
$a1 + b\cdot -i + c0 + d\cdot 0 = 0$
$a1 + b\,i + c0 + d0 = 0$
$a0 + b0 + c\,{-1} + d1 = 0$

$$\det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{0 + 4i}$$

lineolmente independient.

- matriz hermitica

$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} z_1^* = z_1 & \text{Real} \\ z_4^* = z_4 & \text{Real} \\ z_2^* = z_3 & \in \mathbb{C} \end{matrix}$

mostrar que A es una combinación lineal de matrices de pauli para mostrar que son base para A

tomando la matriz de ecuaciones planteada anteriormente

$c + d = z_1 \qquad \wedge \ \{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$
$a + b(-i) = z_2$
$a + b(+i) = z_3$
$-c + d = z_4$

$\Rightarrow c + d = z_1 \to \text{real}$ ✓
$a + (-bi) = z_2 \to z_2^* = a + bi = z_3$ ✓
$c + d = z_4 \to \text{real}$ ✓

Si es ✓

6. $\langle a|b\rangle = Tr(A^{+}B)$

base ortogonal $\quad b \in B \quad B \to$ base

$\langle A^{+}|b\rangle = 0$

$A \cdot \sigma_0$
$A \ \sigma_1$
$A \ \sigma_2$
$A \ \sigma_3$
$A \ \sigma_4$

$$\begin{matrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} z_2 & z_1 \\ z_4 & z_3 \end{matrix}$$

$Tr(A^{+}B) = z_2 + z_3$

$= a + bi + a - bi \boxed{= 2a}$ no da 0

la base no es ~~ortogonal~~ ortogonal

no es ortogonal