Estudiantes:

Jonathan Stiven Gómez Zuluaga

Juan Sebastián Carrillo Rodríguez

Cristian Camilo García Alarcon

Taller 4

Ejercicio 1 de la sección 4.2.10

1. Considere los siguientes operadores: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ hermítico, $\mathbb{K} = -\mathbb{K}^\dagger$ antihermítico; $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^\dagger$ unitario, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos operadores genéricos. Pruebe las siguientes afirmaciones:

   a) En general:

      1) $\left(\mathbb{P}^\dagger\right)^{-1} = \left(\mathbb{P}^{-1}\right)^\dagger$.
      2) $\left(\mathbb{P}\mathbb{Q}\right)^{-1} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$
      3) Si $[\mathbb{P}, \mathbb{Q}] = 0$, entonces $\mathbb{P}(\mathbb{Q})^{-1} = (\mathbb{Q})^{-1}\mathbb{P}$
      4) $\left(\mathrm{e}^{\mathbb{P}}\right)^\dagger = \mathrm{e}^{\mathbb{P}^\dagger}$
      5) $\mathbb{P}\mathrm{e}^{\mathbb{Q}}\mathbb{P}^{-1} = \mathrm{e}^{\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}}$

   b) Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ también será un operador hermítico.

   c) Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\mathrm{e}^{i\mathbb{A}}$ es unitario.

   d) Si $\mathbb{K}$ es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{U}$ es también lo será. En particular eso se cumple para $\tilde{\mathbb{K}} = i\mathbb{A}$. Es decir, podemos construir un operador antihermítico a partir de uno hermítico.

   e) Dados dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, hermíticos, su composición $\mathbb{A}\mathbb{B}$, será hermítica *si y sólo si* $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmuntan.

   f) Si $\mathbb{S}$ es un operador real y antisimétrico[7] y $\mathbb{I}$ el operador unidad, pruebe:

      1) Los operadores $(\mathbb{I} - \mathbb{S})$ y $(\mathbb{I} + \mathbb{S})$ conmutan.
      2) El operador $(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})$ es simétrico, mientras que $(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$ es ortogonal.[8]

   g) Considere una matriz ortogonal de la forma $\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, encuentre la expresión para $\mathbb{S}$ que reproduce $\mathbb{R} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$.

a.1

$$(P^{+})^{-1} = (P^{-1})^{+}$$

$$(P^{+})^{-1} P^{+} = (P^{-1})^{+} P^{+}$$

$$= (P^{-1} P)^{+}$$

$$B \cdot B^{-1} = I$$

$$I = I^{+}$$

$$I = I \quad \checkmark$$

a.2

a) 2 $\rightarrow$ $(PQ) = QP$

- $PQ|x\rangle = |y\rangle$

$$Q|x\rangle = |c\rangle \quad (1)$$

$$P|c\rangle = |y\rangle \Rightarrow P^{-1}|y\rangle = |c\rangle \quad (2)$$

- $PQ|x\rangle = |y\rangle \Rightarrow (PQ)^{-1}|y\rangle = |x\rangle$

$|x\rangle = ?$

de (1)

$Q|x\rangle = |c\rangle \Rightarrow |x\rangle = Q^{-1}|c\rangle$

$$(PQ)^{-1}|y\rangle = Q^{-1}|c\rangle$$

de (2) remplaza $|c\rangle$

$$\checkmark \quad (PQ)^{-1}|y\rangle = Q^{-1}P^{-1}|y\rangle$$

a.3 y a.4

a

3 $[P, Q] = 0$

$\Updownarrow$

$PQ = QP$

$Q^{-1}P = PQ^{-1}$

$Q^{-1}PQ = PQ^{-1}Q\,I$

$\cancel{Q^{-1}Q}P = P\cancel{Q^{-1}Q}$

$P = P$ ✓

4 $(e^{P})^{\dagger} = e^{P^{\dagger}}$

$$e^{P} = I + P + \frac{P^{2}}{2} + \frac{P^{3}}{3!} \cdots$$

$$(e^{P})^{\dagger} = e^{P^{\dagger}}$$

$$\left(I + P + \frac{P^{2}}{2} + \frac{P^{3}}{3!}\right)^{\dagger} = I + P^{\dagger} + \frac{P^{2\dagger}}{2} + \frac{P^{3\dagger}}{3!}$$

$$I + P^{\dagger} + \frac{P^{2\dagger}}{2} + \frac{P^{3\dagger}}{3!} = \text{" " " "}$$

✓

a.5

9) 5

$$Pe^{Q}P^{-1} = e^{PQP^{-1}}$$

$$P(I\ Q + \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^3}{3!}\ldots)\,P^{-1} = I + PQP^{-1} + \frac{(PQP^{-1})^2}{2}\ldots$$

$$PIP^{-1} + PQP^{-1} + \frac{PQ^2P^{-1}}{2}\ldots = I + PQP^{-1} + \frac{PQP^{-1}PQP^{-1}}{2}\ldots$$

$$PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

$$I + PQP^{-1} + \frac{PQP^{-1}PQP^{-1}}{2} = I + PQP^{-1} + \frac{PQP^{-1}PQP^{-1}}{2}$$

b

b) $A = A^+$ hermítico

U unitario $\qquad U^{-1} = U^+$

$\tilde{A} = U^{-1} A U$ $\qquad$ hermítico?

$\tilde{A} = U^{-1} A U \qquad AU = B$

$\tilde{A} = U^{-1} B$

$(\tilde{A})^+ = (U^{-1} B)^+$

$\tilde{A}^+ = B^+ (U^{-1})^+$

$\tilde{A}^+ = (AU)^+ (U^{-1})^+$

$\tilde{A}^+ = U^+ A^+ (U^{-1})^+$

A hermítico $\qquad A = A^+$

$= U^+ A (U^{-1})^+$

U unitario

$U^{-1} = U^+$

$= U^{-1} A (U^+)^+$

$\tilde{A}^+ = U^{-1} A U = A \longrightarrow$ ✓ hermítico

c

c) A hermítico $\Rightarrow$ e^{iA} $\rightarrow$ unitario

unitario $\quad$ e $U^+ = U^{-1}$

$$U^+ = (e^{iA})^+ = e^{-iA^+}$$

$$A = A^+$$

$$U^+ = e^{-iA}$$

[redacted]

$$UU^+ = U e^{-iA}$$

$$UU^+ = e^{iA} e^{-iA} = I$$

si U es unitario $=$ $UU^+ = I$

$\Rightarrow$ e^{iA} es unitario

d

d) $K \to$ antihermítico

$\bar{K} = U^{-1} K U \quad \to$ antihermítico?

$(\bar{K})^+ = (U^{-1} K U)^+$

$B = KU$

$(\bar{K})^+ = (U^{-1} B)^+$

$= B^+ (U^{-1})^+$

$= B^+ (U^+)^+ \qquad U \to$ unitario $\quad U^+ = U^{-1}$

$= (KU)^+ (U)$

$= U^+ K^+ U$

$= U^{-1} K^+ U \qquad K$ antihermítico $\quad K = -K^+$

$-K = K^+$

$(\bar{K})^+ = -U^{-1} K U$

$-(K)^+ = U^{-1} K U = K$ ✓

e

e) A y B hermiticas

AB hermitica $\iff$ A y B conmutan

$A^{+} = A$

$B^{+} = B$

$(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$ B y A hermiticos

$(AB)^{+} = BA$ si B y A conmutan

✓ $(AB)^{+} = AB$

f.1

f) 1

$(I - S)(I + S) = (I + S)(I - S)$

$I(I - S) + S(I - S) = II - IS + IS - SS$

$II - IS + (SI - SS) = \quad '' \quad ''$

$I - S + (S - SS) = I - S + S - SS$ ✓

f.2

f) ② $S \rightarrow$ antisimétrico $\rightarrow S^t = -S$

$(I-S)(I+S) \rightarrow$ simetrico?

$A = (I-S)(I+S)$

$A^t = (I+S)^t(I-S)^t$

$A^t = (I^t+S^t)(I^t-S^t)$

$A^t = (I^tI - I^tS^t) + S^tI^t - S^tS^t$

$= I - S^t + S^t - S^tS^t$ $\qquad S^t = -S$

$= II - IS + SI - SS$

$A^t = (I+S)(I-S) = A$ ✓

f.2 continuación

$(I-S)(I+S)^{-1}$

$(I-S)(I^{-1}+S^{-1})$

$II + IS - SI - SS^{-1}$

$I + S - S - SS^{-1}$

$SS^{-1} = I$

$\cancel{I} + \cancel{S} - \cancel{S} - \cancel{I} = 0$

g

Ejercicio de la sección 4.3.9

2. Considere ahora el espacio vectorial $\mathbf{P}_{(t)\,4}$ de polinomios en t de grado 4, definidos en el intervalo $[-1,1]$. Esto es $|f\rangle_t \leftrightarrow \sum_{n=0}^{4} a_n t^n$ y este espacio está equipado con un producto interno de la forma $\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Considere además para este espacio vectorial un operador lineal representado por $\mathbb{T} = \mathrm{e}^{\mathbb{D}} \equiv \exp(\mathbb{D})$, donde $\mathbb{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Claramente, podemos encontrar dos bases para ese espacio vectorial: $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ y la base de polinomios de Legendre $\{P_0, P_1, P_2, P_3, P_4\}$

(a). Considere el polinomio $|f\rangle_t \leftrightarrow f(t) = 5t + 3t^2 + 4t^3$. Encuentre la expresión de este polinomio en término de las bases arriba mencionadas. ¿Cuál es la matriz de transformación de las componentes de ese vector entre ambas bases?

(b). Construya un proyector sobre el subespacio $\mathbf{P}_{(t)\,2}$, de polinomios de grado 2 y encuentre la proyección de $|f\rangle_t$ en ese subespacio. Discuta las diferencias y semejanzas entre las proyecciones de $|f\rangle_t$ en ese subespacio expresado en las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{P_0, P_1, P_2\}$.

(c). Para $\mathbf{P}_{(t)\,4}$, construya el operador inverso $\mathbb{T}^{-1}$, el adjunto del operador $\mathbb{T}^{\dagger}$ y precise si $\mathbb{T}$, es Hermítico o unitario.

(d). ¿Cuáles son las representaciones matriciales de $\mathbb{T}$ en $\mathbf{P}_{(t)\,4}$, para cada una de las bases mencionadas? ¿Cómo transforman las representaciones? Compruebe que la traza y el determinante de ambas representaciones matriciales coinciden.

(e). ¿Cuáles son las representaciones matriciales de $\mathbb{T}^{-1}$ y $\mathbb{T}^{\dagger}$ en $\mathbf{P}_{(t)\,4}$ para cada una de las bases mencionadas ? ¿Cómo transforman esas representaciones?

A $\quad |F\rangle_t \leftrightarrow F(t) = 5t + 3t^2 + 4t^3$

$|e_i\rangle = [\,|1,0,0,0,0\rangle, |0,1,0,0,0\rangle, |0,0,1,0,0\rangle, |0,0,0,1,0\rangle, |0,0,0,0,1\rangle\,]$

$|P_i\rangle = [\,|1,0,0,0,0\rangle, |0,1,0,0,0\rangle, |-0{,}5, 0, 1{,}5, 0, 0\rangle, |0, -\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0\rangle, |\frac{3}{8}, 0, -\frac{30}{8}, 0, \frac{35}{4}\rangle\,]$

$F(t) = 0 \times e_0 + 5 \times e_1 + 3 \times e_2 + 4 \times e_3 + 0 \times e_4$

$F(t) = 1 \times P_0 + \frac{37}{5} \times P_1 + 2 \times P_2 + \frac{8}{5} P_3 + 0 \times P_4$

$$M_{EP} = M^{-1}_{PE}$$

$$M_{PE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 & 0 & 0{,}375 \\ 0 & 1 & 0 & -1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 & -3{,}75 \\ 0 & 0 & 0 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8{,}75 \end{bmatrix}$$

(B)

$$P_{|e(t)_2\rangle} |f(t)\rangle = \langle e_0 | f(t)\rangle e_0 + \langle e_1 | f(t)\rangle e_1 + \langle e_2 | f(t)\rangle e_2$$

donde $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt$

$$P_{|e(t)_2\rangle} |f(t)\rangle = 2 \times e_0 + \frac{74}{15} e_1 + \frac{6}{5} e_2$$

$$P_{|P(t)\rangle} |f(t)\rangle = \langle P_0 | f(t)\rangle P_0 + \langle P_1 | f(t)\rangle P_1 + \langle P_2 | f(t)\rangle P_2$$

$$P_{|P(t)\rangle} |f(t)\rangle = 2 \times P_0 + \frac{74}{15} P_1 + \frac{4}{3} P_2$$

Hay semejanzas en las proyecciones por que $e_0 = P_0$ y $e_1 = P_1$

Ejercicios de la sección 4.6.6

4. Si un operador lineal $\mathbb{A}$ tiene un autovector $|v_0\rangle$ con autovalor λ_0. Demuestre que $|v_0\rangle$ es también un autovector del operador $\mathbb{A}^2$ con autovalor λ_0^2.

Ejercicio 4 4.6.6

$$\begin{aligned} A^2(|v_0\rangle) &= A(A(|v_0\rangle)) \\ &= A(\lambda |v_0\rangle) \\ &= \lambda A(|v_0\rangle) \\ &= \lambda^2 |v_0\rangle \end{aligned}$$

En general

$$\begin{aligned} A^k(|v_0\rangle) = A(A^{k-1}(|v_0\rangle)) &= A(\lambda^{k-1}|v_0\rangle) \\ &= \lambda^{k-1} A(|v_0\rangle) \\ &= \lambda^k |v_0\rangle \end{aligned}$$

5. Aun si un operador lineal $\mathbb{A}$ no tiene autovectores el operador $\mathbb{A}^2$ puede llegar a tenerlos. Demuestre que si $\mathbb{A}^2$ tiene un autovector con un autovalor no degenerado $\lambda_0 = \mu^2$, entonces $\mathbb{A}$ tiene un autovector.

(5) $A^2|V_0\rangle = \lambda_0 |V_0\rangle$

$A^2|V_0\rangle = u^2|V_0\rangle \rightarrow A(A|V_0\rangle) = u(u|V_0\rangle)$

sí $A|V_0\rangle \neq u|V_0\rangle$ entonces $A(A|V_0\rangle) = A^2|V_0\rangle \neq u(u|V_0\rangle)$,

por tanto, $A|V_0\rangle = u|V_0\rangle$ y $|V_0\rangle$ es autovector de A

6. Encuentre los autovalores y autovectores de las siguientes matrices:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y la matriz $\mathbb{E} = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$. Verifique si los autovectores son ortogonales entre ellos.

```
A:matrix([1,3,-1],[3,4,-2],[-1,-2,2]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
B:matrix([1,0,0],[-3,1,0],[4,-7,1]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

```
C:matrix([0,0,1,0],[0,0,0,1],[1,0,0,0],[0,1,0,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
D:matrix([0,1,0,0],[1,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,1,0]);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
E:matrix([1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,0,-1]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

0.1.1 Para A

```
eVe_A:eigenvectors(A);
```

$$[\left[[3-\sqrt{15},\sqrt{15}+3,1],[1,1,1]\right],[\left[\left[1,-\frac{3\sqrt{15}-5}{10},\frac{\sqrt{15}-5}{10}\right]\right],\left[\left[1,\frac{3\sqrt{15}+5}{10},-\frac{\sqrt{15}+5}{10}\right]\right],[[1,1,3]]]$$
$$]$$

```
innerproduct(first(second(eVe_A)).second(second(eVe_A)), [1,1,1]);
```

$$0$$


```
innerproduct(first(second(eVe_A)).third(second(eVe_A)), [1,1,1]);
```

$$0$$

```
innerproduct(second(second(eVe_A)).third(second(eVe_A)), [1,1,1]);
```

$$0$$

0.1.2 Para B

```
eVe_B:eigenvectors(B);
```

$$\left[\left[[1],[3]\right],\left[\left[[0,0,1]\right]\right]\right]$$

0.1.3 Para C

```
eVe_C:eigenvectors(C);
```

$$[\left[[-1,1],[2,2]\right],$$
$$\left[\left[[1,0,-1,0],[0,1,0,-1]\right],\left[[1,0,1,0],[0,1,0,1]\right]\right]]$$

```
innerproduct(first(first(second(eVe_C))),second(first(second(eVe_C))));
```

0

```
innerproduct(first(second(second(eVe_C))),second(second(second(eVe_C))));
```

0

0.1.4 Para D

```
eVe_D:eigenvectors(D);
```

$$[\left[[-1,1],[2,2]\right],$$
$$\left[\left[[1,-1,0,0],[0,0,1,-1]\right],\left[[1,1,0,0],[0,0,1,1]\right]\right]]$$

```
innerproduct(first(first(second(eVe_D))),second(first(second(eVe_D))));
```

0

```
innerproduct(first(second(second(eVe_D))),second(second(second(eVe_D))));
```

0

0.1.5 Para E

```
eigenvalues(E);
```

$$\left[[-1,1],[2,2]\right]$$

```
eigenvectors(E);
```

$$[\left[[-1,1],[2,2]\right],$$
$$\left[\left[[0,0,1,0],[0,0,0,1]\right],\left[[1,0,0,0],[0,1,0,0]\right]\right]]$$

8. Construimos un sistema con tres partículas, de masa m_i rígidamente unidas, colocadas en tres puntos distintos de la siguiente forma:

$$m_1 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad m_2 = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad m_3 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a). Encuentre la matriz del tensor de inercia.

(b). Diagonalize esa matriz y encuentre los ejes principales de inercia.

```
coord:matrix([1,1,−2],[−1,−1,0],[1,1,2]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
mat: matrix(
 [0,0,0],
 [0,0,0],
 [0,0,0]
);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
cor:transpose(coord);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
cov(x,y):=block([],
   xbar: mean(x),
   ybar: mean(y),
   sumar : m·(x−xbar)·(y−ybar),
   add:0,
   for i  : 1 thru length(sumar) do
      add: add + sumar[i],
   return(add)
);
```

```
tensorIner(cor):=block([],
      for i  : 1 thru 3 do
        for j  : 1 thru 3 do
              mat[i,j]:cov(cor[i],cor[j]),
   return(mat)
)$
```

```
matTensor:tensorIner(cor);
```

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{40}{9}\right] & \left[\frac{40}{9}\right] & [0] \\ \left[\frac{40}{9}\right] & \left[\frac{40}{9}\right] & [0] \\ [0] & [0] & [8] \end{pmatrix}$$

Parte b

```
matTensorIner:matrix([40/9,40/9,0],[40/9,40/9,0],[0,0,8]);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{40}{9} & \frac{40}{9} & 0 \\ \frac{40}{9} & \frac{40}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

```
eigenvectors(matTensorIner);
```

$$\left[\left[\left[\frac{80}{9},0,8\right],[1,1,1]\right],\left[[[1,1,0]],\left[[1,-1,0]\right],[[0,0,1]]\right]\right]$$

```
echelon(matTensorIner);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Las matrices de Pauli :

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

las hemos visto en varios momentos de estas notas: como cuaterniones en los ejercicios 2.2.4 y como operadores lineales en los ejercicios 4.7.6.

(a). Muestre si las matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$, conjuntamente con la matriz identidad, $\mathbf{I}$ forman un grupo respecto a la siguiente operación:

$$\boldsymbol{\sigma}_j \odot \boldsymbol{\sigma}_k \equiv \boldsymbol{\sigma}_j \boldsymbol{\sigma}_k = i\epsilon_{jkm}\boldsymbol{\sigma}^m + \delta_{jk}\mathbf{I} \quad \text{con } j,k,m = x,y,z$$

donde ϵ_{jkm} es el símbolo de Levi-Civita y $i = \sqrt{-1}$.

(b). Muestre si las matrices de Pauli $\boldsymbol{\sigma}_x, \boldsymbol{\sigma}_y, \boldsymbol{\sigma}_z$, conjuntamente con la matriz identidad $\mathbf{I}$ son linealmente independientes.

(c). ¿Las matrices de Pauli forman base para un espacio vectorial de matrices complejas 2×2? ¿Por qué? Si forman una base exprese la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

en términos de esa base.

(d). Derive la expresión general para $[\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_k]$.

(e). Suponga ahora que $\boldsymbol{\sigma}_z$ actúa de la siguiente forma: $\boldsymbol{\sigma}_z\left|+\right\rangle = \left|+\right\rangle$, $\boldsymbol{\sigma}_z\left|-\right\rangle = -\left|-\right\rangle$, con:

$$\left|+\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|-\right\rangle \leftrightarrows \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre la expresión para los autovalores y autovectores de las otras matrices de Pauli:

$$\boldsymbol{\sigma}_x\left|+\right\rangle_x = \lambda_{+x}\left|+\right\rangle_x\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_x\left|-\right\rangle_x = \lambda_{-x}\left|-\right\rangle_x\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_y\left|+\right\rangle_y = \lambda_{+y}\left|+\right\rangle_y\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_y\left|-\right\rangle_y = \lambda_{-y}\left|-\right\rangle_y\,.$$

(f). Muestre que cualquier representación matricial de un operador genérico $\mathbb{M}$ puede ser expresado como combinación lineal de las matrices de Pauli.

(g). El polinomio característico para ese operador genérico $\mathbb{M}$ se puede expresar como

$$P_\lambda = \lambda^2 - \lambda\mathrm{Tr}(\mathbb{M}) + \det|\mathbb{M}|\,.$$

Donde los λ son sus autovalores.

a) $\sigma_j \odot \sigma_k \equiv \sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkm}\sigma^m + \delta_{jk} I$ con $j,k,m = x,y,z$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$\epsilon_{jkm} = \begin{cases} +1 & \text{si } (j,k,m) \text{ es } (1,2,3),(2,3,1) \text{ o } (3,1,2) \\ -1 & \text{si } (j,k,m) \text{ es } (3,2,1),(1,3,2) \text{ o } (2,1,3) \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

$$\sigma_x \odot \sigma_y = i\epsilon_{xym}\sigma^m + \overset{0}{\cancel{\delta_{xy}}} I$$

$$= i(\overset{0}{\cancel{\epsilon_{xyx}}}\sigma^x + \overset{0}{\cancel{\epsilon_{xyy}}}\sigma^y + \overset{1}{\cancel{\epsilon_{xyz}}}\sigma^z)$$

$$\sigma_x \odot \sigma_y = i\sigma^z$$

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma^z = -\sigma_y\sigma_x$$

De manera similar encontramos

$$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$$

$$\sigma_z\sigma_x = -\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$$

En resumen las matrices de pauli bajo la operación no constituyen un Grupo dado que

$$\exists\, \sigma_x\sigma_y \in P \;/\; \sigma_x\cdot\sigma_y \notin P$$

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z \qquad \sigma_y\sigma_x = -i\sigma_z$$
$$\sigma_y\sigma_z = i\sigma_x \qquad \sigma_z\sigma_y = -i\sigma_x$$
$$\sigma_z\sigma_x = i\sigma_y \qquad \sigma_x\sigma_z = -i\sigma_y$$

Ejercicio 12 4.6.6

b) $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 + C_4 = 0$$

$$C_1 - C_2 i = 0$$

$$C_1 + C_2 i = 0$$

$$-C_3 + C_4 = 0$$

$C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$

Por lo tanto son linealmente independiente c)

Si son base, primero son linealmente independientes

$$c_0 I + c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_3 \sigma_z = 0$$

$$c_i = 0 \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

Toda matriz compleja 2x2 se puede representar como combinación lineal

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = c_0 I + c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_3 \sigma_z$$

$$= c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3 = c_0 + c_3$$
$$i = c_1 - i c_2$$
$$5 = c_1 + i c_2$$
$$1 = c_0 - c_3$$

$$c_0 = 2, \quad c_1 = \frac{5+i}{2}, \quad c_2 = \frac{-1-5i}{2}$$
$$c_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & i \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{5+i}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{-1-5i}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

f)

$$M = \begin{pmatrix} M^1_1 & M^1_2 \\ M^2_1 & M^2_2 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^1_1 = \alpha_0 + \alpha_3$$

$$M^1_2 = \alpha_1 - i\alpha_3$$

$$M^2_1 = \alpha_1 - i\alpha_3$$

$$M^2_2 = \alpha_0 - \alpha_3$$

por lo tanto

$$\forall M \in SU(2) \quad \exists \alpha_i \in C \,/\, M = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \sigma_i$$

SU(2) grupo unitario de segundo orden