Estudiantes:

Jonathan Stiven Gómez Zuluaga

Juan Sebastián Carrillo Rodríguez

Taller 3

Ejercicios sección 3.2.11

2. Dados los tensores:

$$R^i_j = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 2 & 5/2 & 3 \\ 7/2 & 4 & 9/2 \end{pmatrix}, \quad T^i = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre:

a) La parte simétrica S^i_j y antisimétrica A^i_j de R^i_j.

b) $R_{kj} = g_{ik} R^i_j$, $R^{ki} = g^{jk} R^i_j$, $T_j = g_{ij} T^i$ ¿Qué se concluye de estos cálculos?

c) $R^i_j T_i$, $R^i_j T^j$, $R^i_j T_i T^j$.

d) $R^i_j S^j_i$, $R^i_j A^j_i$, $A^j_i T^i$, $A^j_i T^i T_j$.

e) $R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l$, $(R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l) T_i$, $(R^i_j - 2\delta^i_j R^l_l) T_i T^j$.

4. Suponga que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Demuestre que:

(a). $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$.

(b). $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$.

¿Cómo cambian las fórmulas anteriores si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$?

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)(A+B) =$

$A(A+B) + B(A+B) =$

$AA + AB + BA + BB =$ $/AB = BA/$

$A^2 + 2AB + B^2$ ✓

b) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(A+B)(A+B)(A+B) =$

$(A(A+B) + B(A+B))(A+B) =$

$A(AA + AB + BA + BB) + B(AA + AB + BA + BB) =$

$A^3 + A^2B + A^2B + AB^2 + BA^2 + BA^2 + B^2A + B^2A + B^3 =$

$/AB = BA/$

$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 =$ ✓

ahora $AB \neq BA$

a) $(A+B)^2 = AA + AB + BA + BB$

$A^2 + AB + BA + B^2$

b $(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + \ldots$

$\ldots + B^2A + B^3$

$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$

Ejercicios sección 4.1.6

5. Suponga que un operador $\mathbb{L}$ puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_- \mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demostrar que:

$$\text{Si} \quad \mathbb{L}\,|x\rangle = \lambda\,|x\rangle \quad \text{y} \quad |y\rangle = \mathbb{L}_+\,|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}\,|y\rangle = (\lambda+1)\,|y\rangle$$

y, del mismo modo, demuestre que:

$$\text{Si} \quad \mathbb{L}\,|x\rangle = \lambda\,|x\rangle \quad \text{y} \quad |z\rangle = \mathbb{L}_-\,|x\rangle \quad \text{entonces} \quad \mathbb{L}\,|z\rangle = (\lambda-1)\,|z\rangle\ .$$

Por ello es costumbre denominar a $\mathbb{L}_+$ y $\mathbb{L}_-$ los operadores de "subidas" y de "bajada" respectivamente, ya que ellos construyen otros vectores con autovalores mayores (menores) en una unidad al vector operado.

$L = L_- L_+ \qquad [L_-, L_+] = I$

$L_- L_+ - L_+ L_- = I$

- si $L|x\rangle = \lambda|x\rangle$ y $|y\rangle = L_+|x\rangle$ entonces $L|y\rangle = (\lambda+1)|y\rangle$

* $L|x\rangle = \lambda|x\rangle$

$L_- L_+|x\rangle = \lambda|x\rangle$

$\boxed{L_-|y\rangle = \lambda|x\rangle}$

* $[L_-, L_+] = I$

$[L_-, L_+]|y\rangle = |y\rangle$

$L_- L_+|y\rangle - L_+ L_-|y\rangle = |y\rangle$

$L|y\rangle = L_+ L_-|y\rangle + |y\rangle$

$L|y\rangle = L_+ \lambda|x\rangle + |y\rangle$

$L|y\rangle = \lambda L_+|x\rangle + |y\rangle$

$L|y\rangle = \lambda|y\rangle + |y\rangle$

$\boxed{L|y\rangle = (\lambda+1)|y\rangle}$

* Si $L|x\rangle = \lambda|x\rangle$ y $|z\rangle = L_-|x\rangle$ entonces $L|z\rangle = (\lambda-1)|z\rangle$

- $[L_-, L_+] = I$

  $[L_-, L_+]|x\rangle = |x\rangle$

  $L_-L_+|x\rangle - L_+L_-|x\rangle = |x\rangle$

  $L|x\rangle = |x\rangle + L_+L_-|x\rangle$

  $L|x\rangle = |x\rangle + L_+|z\rangle$; por def. $L|x\rangle = \lambda|x\rangle$

  $\lambda|x\rangle = |x\rangle + L_+|z\rangle$

  $\boxed{(\lambda-1)|x\rangle = L_+|z\rangle}$

- $L|z\rangle = L_-L_+|z\rangle$

  $L|z\rangle = L_-(\lambda-1)|x\rangle$

  $L|z\rangle = (\lambda-1)L_-|x\rangle$

  $L|z\rangle = (\lambda-1)|z\rangle$

```
Ri_j:matrix([1/2,1,3/2],[2,5/2,3],[7/2,4,9/2]);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{7}{2} & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

```
g_ik :matrix([1,0,0],[0,−1,0],[0,0,1]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
R_ij:g_ik.Ri_j;/*R_ij=g_ik.Rk_j*/;
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} & -3 \\ \frac{7}{2} & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

```
S_ij:(1/2)·(R_ij+transpose(R_ij))/*S_ij=0.5(R_ij+R_ji)*/;
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

```
Si_j: S_ij.invert(g_ik)/*Si_j=S_kj.gik*/;
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

```
A_ij:(1/2)·(R_ij−transpose(R_ij))/*A_ij=0.5(R_ij-R_ji)*/;
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \\ 1 & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Ai_j: A_ij.invert(g_ik)/*A*i_j=A_kj.gik*/;

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

/*Parte b;;

R_kj:g_ik.Ri_j;

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} & -3 \\ \frac{7}{2} & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Rki : invert(g_ik).Ri_j;
Rki : transpose(Ri_j.invert(g_ik));

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} & -3 \\ \frac{7}{2} & 4 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{2} \\ -1 & -\frac{5}{2} & -4 \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

/*Las matrices presentan los mismo resultados debido a que g_ij=gij=g_ik=gik=gjk=g_jk;;;

Ti:matrix([1/3],[2/3],[1]);

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
T_j:transpose(Ti).g_ik;/*T_j = g_ij.*Ti*/;
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

```
/*Parte C;;
transpose(Ti).Ri_j;/*T_i.Ri_j*/
```

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

```
Ri_j.T_j;
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
transpose(Ti).Ri_j.transpose(T_j);/*T_i.Ri_j.Tj*/
```

$$\frac{14}{3}$$

```
/*Parte D;;
load ("nchrpl")$
mattrace(Ri_j.transpose(Si_j));
```

$$\frac{153}{4}$$

```
mattrace(Ri_j.transpose(Ai_j));
```

$$-27$$

```
transpose(Ai_j).Ti;
```

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

```
T_j.transpose(Ai_j).transpose(Ti);/*T_j.Aj_i.Ti*/
```

$$0$$

```
/*Parte e;;
;;;;;;
deltai_j:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
RI_I:matrix([1/2],[5/2],[9/2]);
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

```
Ri_j−2·(deltai_j.mattrace(Ri_j));
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{29}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{25}{2} & 3 \\ \frac{7}{2} & 4 & -\frac{21}{2} \end{pmatrix}$$

```
O_j:transpose(Ti).(Ri_j−2·(deltai_j.mattrace(Ri_j)));
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

```
(transpose(Ti).(Ri_j−2·(deltai_j.mattrace(Ri_j)))).transpose(T_j);
```

$$-\frac{16}{3}$$