Estudiantes:

Jonathan Stiven Gómez Zuluaga

Juan Sebastian Carrillo Rodríguez

Taller #2

- Clase 6 Evaluación Asignación 1 y ejercicios

    i. Ejercicios 5 y 6 de la sección 2.3.8

    ii. Utilizando MAXIMA desarrollar el problema 3 de la sección 2.4.7

    iii. Ejercicios 6 y 7 de la Sección 3.1.6

Ejercicios sección 2.3

6. Utilizando **Maxima** reproduzca el ejemplo 3 que expusimos en la página 130. Es decir, suponga el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una de las posibles bases al conjunto $\{|\pi_i\rangle\} = \{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\}$, pero en este caso con el producto interno definido por: $\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; f(x)\; g(x)\sqrt{1-x^2}$. Encuentre la base ortogonal correspondiente. A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de segunda especie[23].

Este ejercicio se realizó en máxima, se encontró hasta el polinomio de grado 4.

(%i4) load("eigen")$
producto(f,g):=integrate((f·g)·(sqrt(1−t^2)), t, a, b);

(%o4) $\text{producto}(f,g):=\int_a^b f\, g\, \sqrt{1-t^2}\, dt$

(%i5) e:gramschmidt ([1, t, t^2,t^3,t^4], producto), a= −1, b=1;

(%o5) $\left[1, t, \frac{(2t-1)(2t+1)}{4}, \frac{t(2t^2-1)}{2}, \frac{(4t^2-2t-1)(4t^2+2t-1)}{16}\right]$

(%i6) e:expand(e);

(%o6) $\left[1, t, t^2-\frac{1}{4}, t^3-\frac{t}{2}, t^4-\frac{3t^2}{4}+\frac{1}{16}\right]$

(%i7) map(producto, [e[1], e[2], e[3]], [e[2], e[3], e[1]]), a= −1, b=1;

(%o7) $[0,0,0]$

5. Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2 y lo detallamos en la sección 4.4.9, una matriz hermítica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su traspuesta conjugada $(A^\dagger)^i_j \to (A^*)^j_i \equiv A^j_i$:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \mathbb{A}^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{cases} z_1^* = z_1 & \text{real} \\ z_4^* = z_4 & \text{real} \\ z_2^* = z_3 & \text{complejos} \end{cases} .$$

Entonces

a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.6 forman una base para ese espacio vectorial.

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a | b \rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de esa misma sección.

(5)

matrices de Pauli

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) $\quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- mostrar que son lineolmente independientes y generan la base

$a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 + d\sigma_0 = 0$

$a0 + b\cdot 0 + c1 + d1 = 0$
$a1 + b\cdot -i + c0 + d\cdot 0 = 0$
$a1 + bi + c0 + d0 = 0$
$a0 + b0 + c\,{-1} + d1 = 0$

$\det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{0 + 4i}$ ✓

lineolmente independiente

- matriz hermitica

$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} z_1^* = z_1 & \text{Real} \\ z_4^* = z_4 & \text{Real} \\ z_2^* = z_3 & \in \mathbb{C} \end{matrix}$

mostrar que A es una combinación lineal a matrices de pauli para mostrar que son base para A

tomando la matriz de ecuaciones planteada anteriormente

$c + d = z_1 \quad \wedge \{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$
$a + b(-i) = z_2$
$a + b(+i) = z_3 \quad \Rightarrow \begin{matrix} c + d = z_1 \to \text{real} ✓ \\ a + (-bi) = z_2 \to z_2^* = a + bi = z_3 ✓ \\ c + d = z_4 \to \text{real} ✓ \end{matrix}$
$-c + d = z_4$

Si es ✓

5.b

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \langle a|b\rangle \rightleftharpoons Tr(A^{+}B)$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \langle \sigma_1|\sigma_2\rangle \rightleftharpoons Tr(\sigma_1^{+}\sigma_2)$

$$\sigma_1^{+}\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix}$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle \rightleftharpoons Tr(\sigma_1^{+}\sigma_2) = z_1 + z_3$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle \rightleftharpoons j - j = 0 \quad \boxed{\text{Ortogonal}}$$

$$\sigma_2^{+}\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \sigma_2|\sigma_3\rangle \rightleftharpoons Tr(\sigma_2^{+}\sigma_3) = z_1 + z_3$$

$$\langle \sigma_2|\sigma_3\rangle \rightleftharpoons Tr(\sigma_2^{+}\sigma_3) = 0 + 0 = 0 \quad \boxed{\text{Ortogonal}}$$

Se muestran 2 ejemplos para evidenciar que con el producto punto definido las matrices de Pauli son ortogonales

Ejercicios sección 2.4.7

3. Considere el espacio vectorial, $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$, de funciones reales, continuas y continuamente diferenciables definidas en el intervalo $[-1,1]$. Es claro que una posible base de este espacio de funciones la constituye el conjunto de monomios $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\}$ por cuanto estas funciones son linealmente independientes.

   a) Si suponemos que este espacio vectorial está equipado con un producto interno definido por $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)g(x)$, muestre que esa base de funciones no es ortogonal.

   b) Utilizando la definición de producto interno $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)g(x)$ ortogonalize la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\}$ y encuentre los 10 primeros vectores ortogonales, base para $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$. Esta nueva base de polinomios ortogonales se conoce como los polinomios de Legendre.

   c) Modifique un poco la definición de producto interno $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)g(x)\sqrt{(1-x^2)}$ y ortogonalize la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots\}$ y encuentre otros 10 primeros vectores ortogonales base para el mismo $\mathcal{C}^{\infty}_{[-1,1]}$. Esta nueva base de polinomios ortogonales se conoce como los polinomios de Chebyshev.

   d) Suponga la función $h(x) = \mathrm{sen}(3x)(1-x^2)$:

      1) Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de monomios y de polinomios de Legendre, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
      2) Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de monomios y de polinomios de Chebyshev, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
      3) Expanda la función $h(x)$ en términos de la base de polinomios de Legendre y de Chebyshev, grafique, compare y encuentre el grado de los polinomios en los cuales difieren las expansiones.
      4) Estime en cada caso el error que se comete como función del grado del polinomio (o monomio) de la expansión.

   ¿Qué puede concluir respecto a la expansión en una u otra base?

a)

```
(%i142) load("eigen")$
        producto(f,g):=integrate((f·g), t, a, b);
```

(%o142) $\text{producto}(f,g) := \int_a^b f\,g\,\mathrm{d}t$

```
(%i143) e:[1, t, t^2,t^3,t^4];
```

(%o143) $[1, t, t^2, t^3, t^4]$

```
(%i144) map(producto, [e[1], e[2], e[3],e[4],e[5]], [e[3],e[4], e[2], e[5],e[1]]), a= −1, b=1;
```

(%o144) $\left[\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, 0, 0, \frac{2}{5}\right]$

Se puede evidenciar que al realizar el producto interno entre los vectores no se cumple la condición necesaria para que sean ortogonales:

Se denomina un conjunto **ortogonal** de vectores $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle \cdots, |e_n\rangle\}$ si:

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \, \| |e_j\rangle \|^2 , \quad i,j = 1,2,3,\cdots,n \quad \text{y con} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

b)

```
(%i175) v:gramschmidt ([1, t, t^2,t^3,t^4,t^5,t^6,t^7,t^8,t^9], producto), a= -1, b=1;
```

$$\text{(\%o175)} \quad [1, t, \frac{3t^2-1}{3}, \frac{t(5t^2-3)}{5}, \frac{35t^4-30t^2+3}{35}, \frac{t(63t^4-70t^2+15)}{63}, \frac{231t^6-315t^4+105t^2-5}{231}, \frac{t(429t^6-693t^4+315t^2-35)}{429}, \frac{6435t^8-12012t^6+6930t^4-1260t^2+35}{6435}, \frac{t(12155t^8-25740t^6+18018t^4-4620t^2+315)}{12155}]$$

```
(%i182) a: -1$ b:1$
h : [v[1]/sqrt(producto(v[1], v[1])), v[2]/sqrt(producto(v[2], v[2])), v[3]/sqrt(producto(v[3], v[3])), v[4]/sqrt(producto(v[4], v[4])),
  v[5]/sqrt(producto(v[5], v[5])), v[6]/sqrt(producto(v[6], v[6])), v[7]/sqrt(producto(v[7], v[7])), v[8]/sqrt(producto(v[8], v[8])),
v[9]/sqrt(producto(v[9], v[9])), v[10]/sqrt(producto(v[10], v[10]))];
```

$$\text{(\%o182)} \quad [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}\,t}{\sqrt{2}}, \frac{3\sqrt{5}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)}{2^{3/2}}, \frac{5\sqrt{7}\left(t^3-\frac{3t}{5}\right)}{2^{3/2}}, \frac{105\left(t^4-\frac{6t^2}{7}+\frac{3}{35}\right)}{2^{7/2}}, \frac{63\sqrt{11}\left(t^5-\frac{10t^3}{9}+\frac{5t}{21}\right)}{2^{7/2}},$$
$$\frac{231\sqrt{13}\left(t^6-\frac{15t^4}{11}+\frac{5t^2}{11}-\frac{5}{231}\right)}{2^{9/2}}, \frac{429\sqrt{15}\left(t^7-\frac{21t^5}{13}+\frac{105t^3}{143}-\frac{35t}{429}\right)}{2^{9/2}}, \frac{6435\sqrt{17}\left(t^8-\frac{28t^6}{15}+\frac{14t^4}{13}-\frac{28t^2}{143}+\frac{7}{1287}\right)}{2^{15/2}},$$
$$\frac{12155\sqrt{19}\left(t^9-\frac{36t^7}{17}+\frac{126t^5}{85}-\frac{84t^3}{221}+\frac{63t}{2431}\right)}{2^{15/2}}]$$

```
(%i185) map(producto, [h[1], h[2], h[3],h[4],h[5]], [h[3],h[4], h[2], h[5],h[1]]), a= -1, b=1;
        map(producto, [h[1], h[2], h[3],h[4],h[5]], [h[1],h[2], h[3], h[4],h[5]]), a= -1, b=1;
(%o184) [0,0,0,0,0]
(%o185) [1,1,1,1,1]
```

Para este ejercicio se puede observar el proceso para ortogonalizar la base, el resultado obtenido se normaliza para cumplir con las 2 propiedades mostradas anteriormente e ilustradas en máxima en las salidas 184 y 185.

c)

```
(%i186) producto(f,g):=integrate((f·g)·(sqrt(1−t^2)), t, a, b);
```

$$\text{(\%o186)}\quad \operatorname{producto}(f,g):=\int_a^b f\,g\,\sqrt{1-t^2}\,dt$$

```
(%i187) v:gramschmidt ([1, t, t^2,t^3,t^4,t^5,t^6,t^7,t^8,t^9], producto), a= −1, b=1;
```

$$\text{(\%o187)}\quad [1,t,\frac{(2t-1)(2t+1)}{4},\frac{t(2t^2-1)}{2},\frac{(4t^2-2t-1)(4t^2+2t-1)}{16},\frac{t(2t-1)(2t+1)(4t^2-3)}{16},$$
$$\frac{(8t^3-4t^2-4t+1)(8t^3+4t^2-4t-1)}{64},\frac{t(2t^2-1)(8t^4-8t^2+1)}{16},\frac{(2t-1)(2t+1)(8t^3-6t-1)(8t^3-6t+1)}{256},$$
$$\frac{t(4t^2-2t-1)(4t^2+2t-1)(16t^4-20t^2+5)}{256}]$$

```
(%i190) a: −1$ b:1$
h : [v[1]/sqrt(producto(v[1], v[1])), v[2]/sqrt(producto(v[2], v[2])), v[3]/sqrt(producto(v[3], v[3])), v[4]/sqrt(producto(v[4], v[4])),
  v[5]/sqrt(producto(v[5], v[5])), v[6]/sqrt(producto(v[6], v[6])), v[7]/sqrt(producto(v[7], v[7])), v[8]/sqrt(producto(v[8], v[8])),
v[9]/sqrt(producto(v[9], v[9])), v[10]/sqrt(producto(v[10], v[10]))];
```

$$\text{(\%o190)}\quad [\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\frac{2^{3/2}\,t}{\sqrt{\pi}},\frac{\sqrt{2}(2t-1)(2t+1)}{\sqrt{\pi}},\frac{2^{5/2}\,t(2t^2-1)}{\sqrt{\pi}},\frac{\sqrt{2}(4t^2-2t-1)(4t^2+2t-1)}{\sqrt{\pi}},\frac{2^{3/2}\,t(2t-1)(2t+1)(4t^2-3)}{\sqrt{\pi}},$$
$$\frac{\sqrt{2}(8t^3-4t^2-4t+1)(8t^3+4t^2-4t-1)}{\sqrt{\pi}},\frac{2^{7/2}\,t(2t^2-1)(8t^4-8t^2+1)}{\sqrt{\pi}},\frac{\sqrt{2}(2t-1)(2t+1)(8t^3-6t-1)(8t^3-6t+1)}{\sqrt{\pi}},$$
$$\frac{2^{3/2}\,t(4t^2-2t-1)(4t^2+2t-1)(16t^4-20t^2+5)}{\sqrt{\pi}}]$$

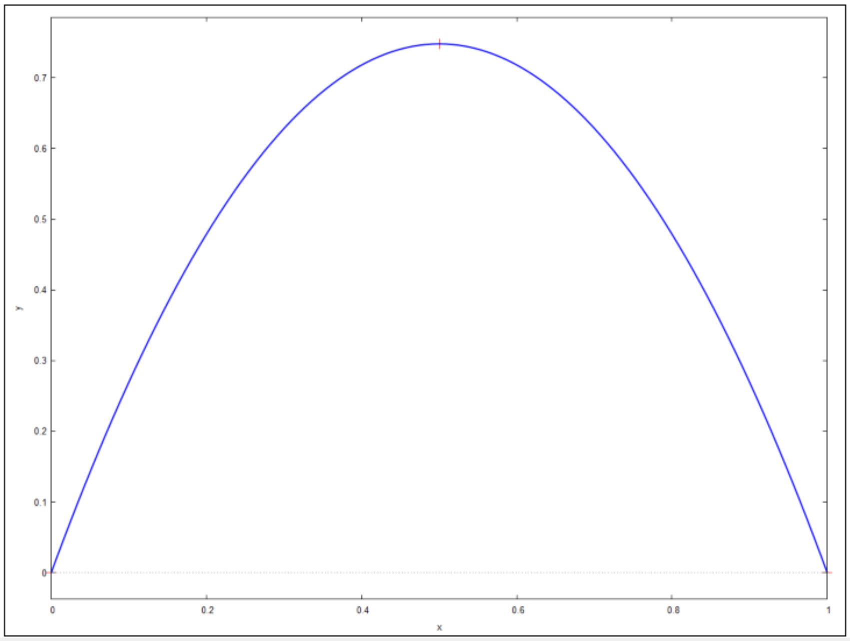
```
(%i192) map(producto, [h[1], h[2], h[3],h[4],h[5]], [h[3],h[4], h[2], h[5],h[1]]), a= −1, b=1;
map(producto, [h[1], h[2], h[3],h[4],h[5]], [h[1],h[2], h[3], h[4],h[5]]), a= −1, b=1;
(%o191) [0,0,0,0,0]
(%o192) [1,1,1,1,1]
```

Para este ejercicio se cambió la definición del producto interno (salida 186) y posteriormente se encontró la base ortogonal además de comprobarlos con las salidas 191 y 192.

d) 1. Caso 3 puntos

```
(%i10) load (orthopoly)$
f:C0+C1·legendre_p(1,x)+C2·legendre_p(2,x)$
f:expand(%);
```

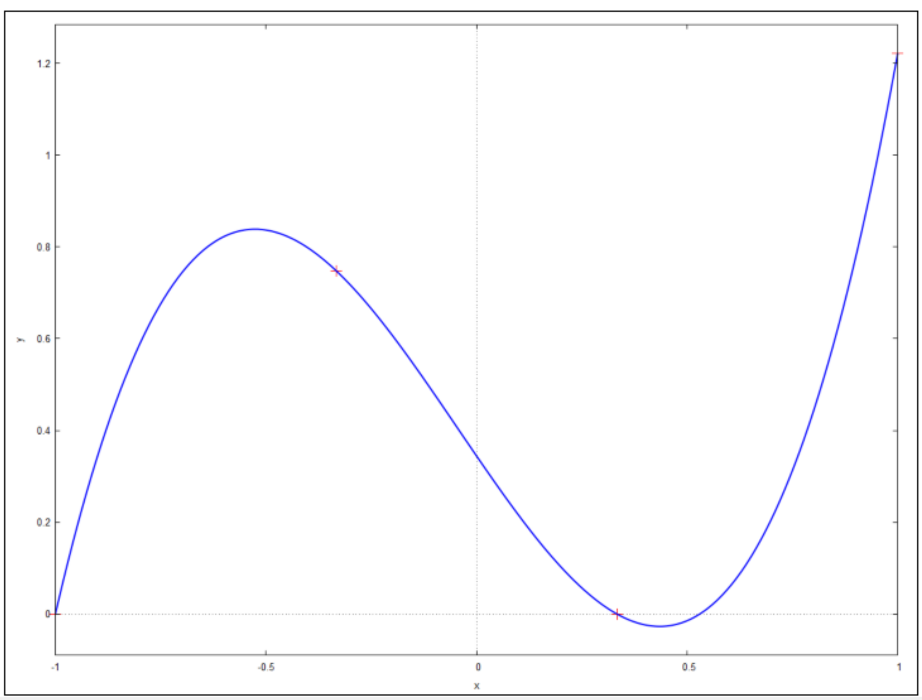
$$\text{(\%o10)}\quad \frac{374\,x}{125}-\frac{374\,x^2}{125}$$



Caso 4 puntos

```
(%i11) load (orthopoly)$
       f:C0+C1·legendre_p(1,x)+C2·legendre_p(2,x)+C3·legendre_p(3,x)$
       f:expand(%);
```

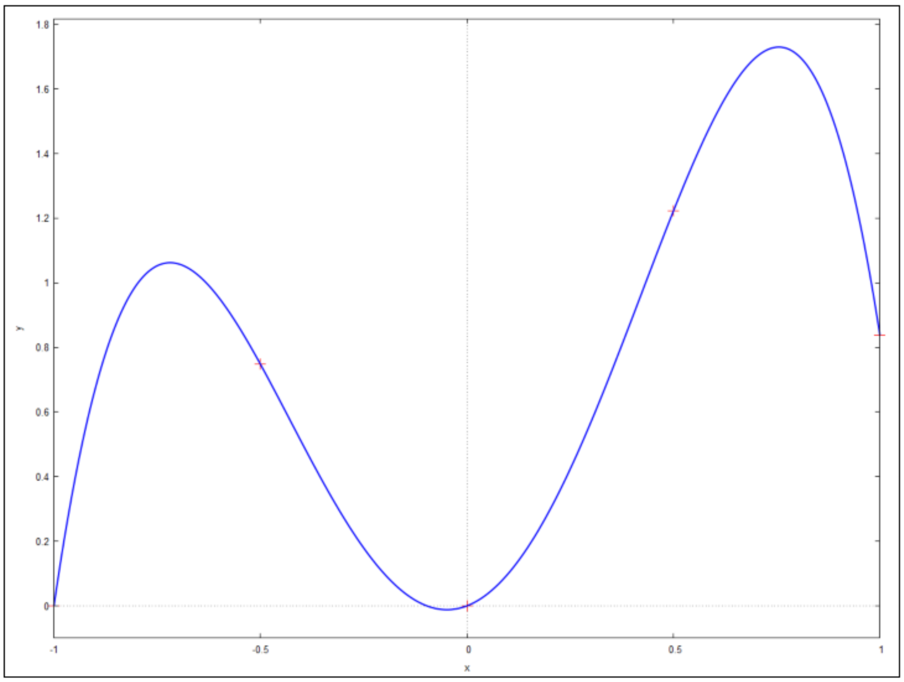
(%o11) $$\frac{15597\,x^{3}}{8000}+\frac{2133\,x^{2}}{8000}-\frac{10709\,x}{8000}+\frac{551}{1600}$$



Caso 5 puntos

```
(%i12) load (orthopoly)$
f:C0+C1·legendre_p(1,x)+C2·legendre_p(2,x)+C3·legendre_p(3,x)+C4·legendre_p(4,x)$
f:expand(%);
```

(%o12) $-\frac{3521\,x^4}{750}-\frac{11\,x^3}{150}+\frac{15341\,x^2}{3000}+\frac{1477\,x}{3000}$



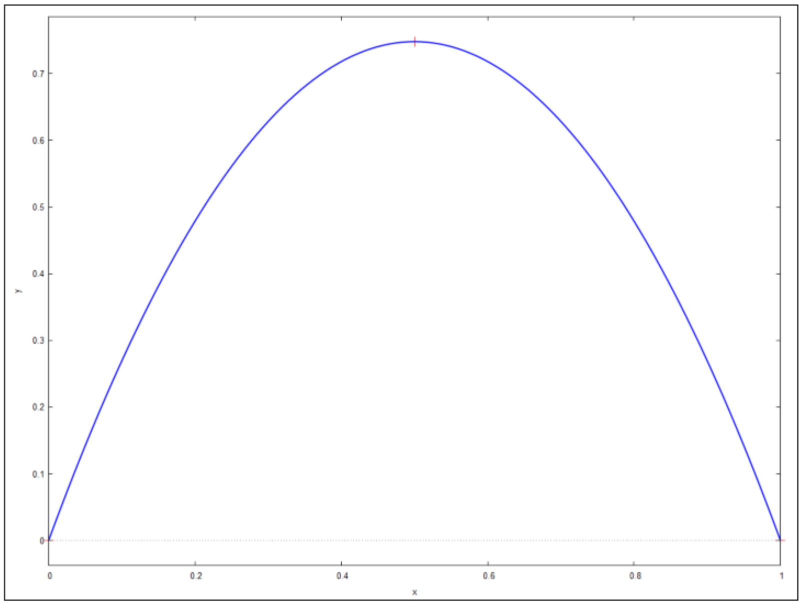
2. caso 3 puntos

```
(%i5) [C0,C1,C2]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3])];
```

(%o5) $\left[-\frac{187}{125},\frac{374}{125},-\frac{187}{125}\right]$

```
(%i8) load (orthopoly)$
f:C0+C1·chebyshev_t(1,x)+C2·chebyshev_t(2,x)$
f:expand(%);
```

(%o8) $\frac{374\,x}{125}-\frac{374\,x^2}{125}$



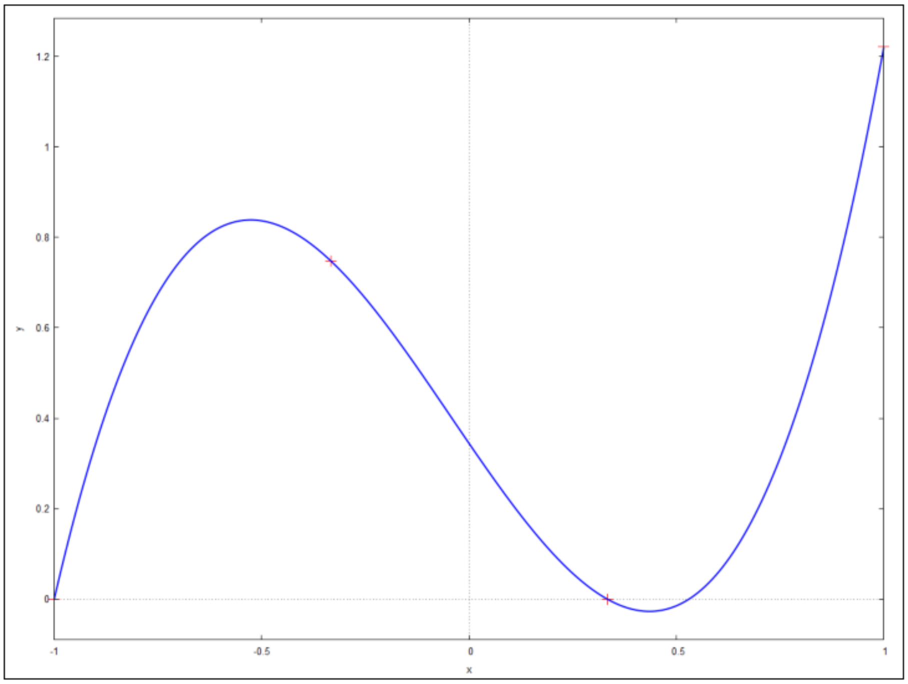
Caso 4 puntos:

(%i6) [C0,C1,C2,C3]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4])];

(%o6) $$\left[\frac{1909}{4000},\frac{983}{8000},\frac{531}{4000},\frac{3897}{8000}\right]$$

(%i9) load (orthopoly)$
f:C0+C1·chebyshev_t(1,x)+C2·chebyshev_t(2,x)+C3·chebyshev_t(3,x)$
f:expand(%);

(%o9) $$\frac{3897\,x^3}{2000}+\frac{531\,x^2}{2000}-\frac{2677\,x}{2000}+\frac{689}{2000}$$



Caso 5 puntos:

(%i7)

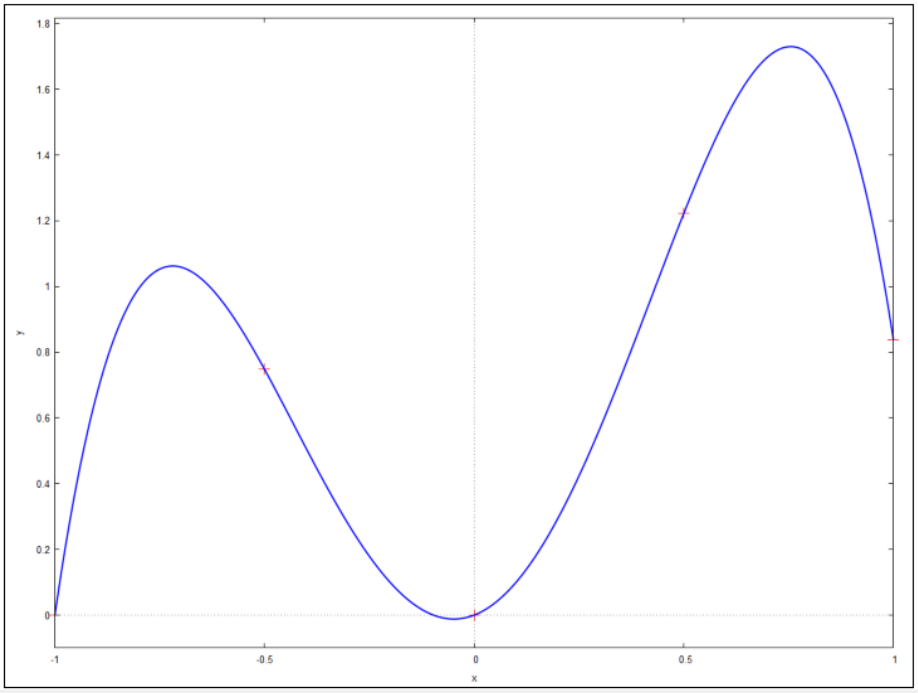
```
[C0,C1,C2,C3,C4]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4]),rhs(%[5])];
```

(%o7) $\left[\frac{2389}{3000}, \frac{164}{375}, \frac{419}{2000}, -\frac{11}{600}, -\frac{3521}{6000}\right]$

(%i10)

```
load (orthopoly)$
f:C0+C1·chebyshev_t(1,x)+C2·chebyshev_t(2,x)+C3·chebyshev_t(3,x)+C4·chebyshev_t(4,x)$
f:expand(%);
```

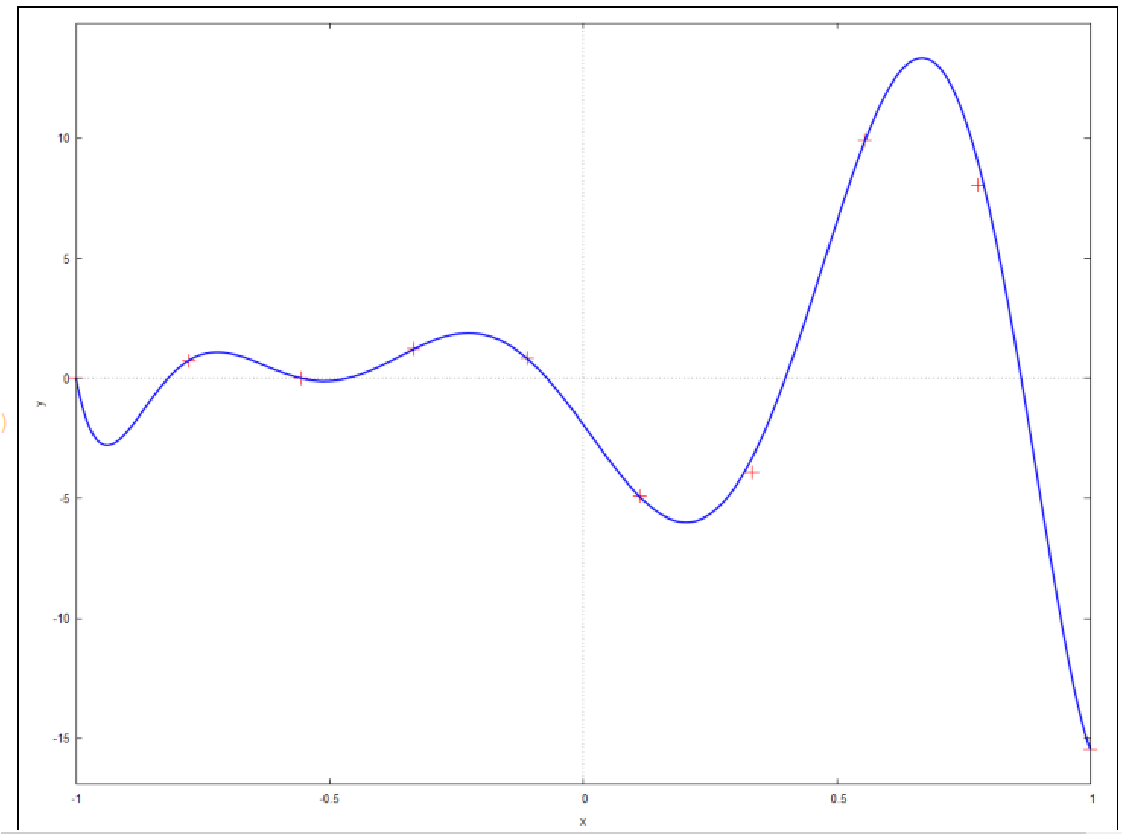
(%o10) $-\frac{3521\,x^4}{750}-\frac{11\,x^3}{150}+\frac{15341\,x^2}{3000}+\frac{1477\,x}{3000}$



Caso 10 puntos legendre:

```
(%i3) ev(h(x),x=[0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5]),numer;
(%o3) [0.0 , 0.7481212399530408 , 0 , 1.221912647081371 , 0.8382464945967776 , − 4.92449987806738 , − 3.296947881934053 , 9.896577299681288 , 8.048593770006525 , − 15.47285021111187 ]

(%i25) ecu1:C0+C1·legendre_p(1,−1) +C2·legendre_p(2,−1) +C3·legendre_p(3,−1) +C4·legendre_p(4,−1) +C5·legendre_p(5,−1) +C6·legendre_p(6,−1) +C7·legendre_p(7,−1) +C8·legendre_p(8,−1) +C9·legendre_p(9,−1) =0$
ecu2:C0+C1·legendre_p(1,−7/9) +C2·legendre_p(2,−7/9) +C3·legendre_p(3,−7/9) +C4·legendre_p(4,−7/9) +C5·legendre_p(5,−7/9) +C6·legendre_p(6,−7/9) +C7·legendre_p(7,−7/9) +C8·legendre_p(8,−7/9) +C9·legendre_p(9,−7/9) =0.748$
ecu3:C0+C1·legendre_p(1,−5/9) +C2·legendre_p(2,−5/9) +C3·legendre_p(3,−5/9) +C4·legendre_p(4,−5/9) +C5·legendre_p(5,−5/9) +C6·legendre_p(6,−5/9) +C7·legendre_p(7,−5/9) +C8·legendre_p(8,−5/9) +C9·legendre_p(9,−5/9) =0$
ecu4:C0+C1·legendre_p(1,−1/3) +C2·legendre_p(2,−1/3) +C3·legendre_p(3,−1/3) +C4·legendre_p(4,−1/3) +C5·legendre_p(5,−1/3) +C6·legendre_p(6,−1/3) +C7·legendre_p(7,−1/3) +C8·legendre_p(8,−1/3) +C9·legendre_p(9,−1/3) =1.222$
ecu5:C0+C1·legendre_p(1,−1/9) +C2·legendre_p(2,−1/9) +C3·legendre_p(3,−1/9) +C4·legendre_p(4,−1/9) +C5·legendre_p(5,−1/9) +C6·legendre_p(6,−1/9) +C7·legendre_p(7,−1/9) +C8·legendre_p(8,−1/9) +C9·legendre_p(9,−1/9) =0.838$
ecu6:C0+C1·legendre_p(1,1/9) +C2·legendre_p(2,1/9) +C3·legendre_p(3,1/9) +C4·legendre_p(4,1/9) +C5·legendre_p(5,1/9) +C6·legendre_p(6,1/9) +C7·legendre_p(7,1/9) +C8·legendre_p(8,1/9) +C9·legendre_p(9,1/9) =−4.924$
ecu7:C0+C1·legendre_p(1,1/3) +C2·legendre_p(2,1/3) +C3·legendre_p(3,1/3) +C4·legendre_p(4,1/3) +C5·legendre_p(5,1/3) +C6·legendre_p(6,1/3) +C7·legendre_p(7,1/3) +C8·legendre_p(8,1/3) +C9·legendre_p(9,1/3) =−3.297$
ecu8:C0+C1·legendre_p(1,5/9) +C2·legendre_p(2,5/9) +C3·legendre_p(3,5/9) +C4·legendre_p(4,5/9) +C5·legendre_p(5,5/9) +C6·legendre_p(6,5/9) +C7·legendre_p(7,5/9) +C8·legendre_p(8,5/9) +C9·legendre_p(9,5/9) =9.897$
ecu9:C0+C1·legendre_p(1,7/9) +C2·legendre_p(2,7/9) +C3·legendre_p(3,7/9) +C4·legendre_p(4,7/9) +C5·legendre_p(5,7/9) +C6·legendre_p(6,7/9) +C7·legendre_p(7,7/9) +C8·legendre_p(8,7/9) +C9·legendre_p(9,7/9) =9.048$
ecu10:C0+C1·legendre_p(1,1) +C2·legendre_p(2,1) +C3·legendre_p(3,1) +C4·legendre_p(4,1) +C5·legendre_p(5,1) +C6·legendre_p(6,1) +C7·legendre_p(7,1) +C8·legendre_p(8,1) +C9·legendre_p(9,1) =−15.472$

linsolve([ecu1,ecu2,ecu3,ecu4,ecu5,ecu6,ecu7,ecu8,ecu9,ecu10], [C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9]);

(%i29) load (orthopoly)$
f:C0+C1·legendre_p(1,x)+C2·legendre_p(2,x)+C3·legendre_p(3,x)+C4·legendre_p(4,x)+C5·legendre_p(5,x)+C6·legendre_p(6,x)+C7·legendre_p(7,x)+C8·legendre_p(8,x)+C9·leg
f:expand(%);
```

(%o29)
$$-\frac{48006659853\,x^{9}}{286720000}+\frac{68630822181\,x^{8}}{286720000}+\frac{7356383469\,x^{7}}{14336000}-\frac{4781847069\,x^{6}}{10240000}-\frac{11949617097\,x^{5}}{20480000}+\frac{4801623381\,x^{4}}{20480000}+\frac{3714088149\,x^{3}}{14336000}-\frac{907233687\,x^{2}}{71680000}-\frac{8326199069\,x}{286720000}-\frac{15741793}{8192000}$$



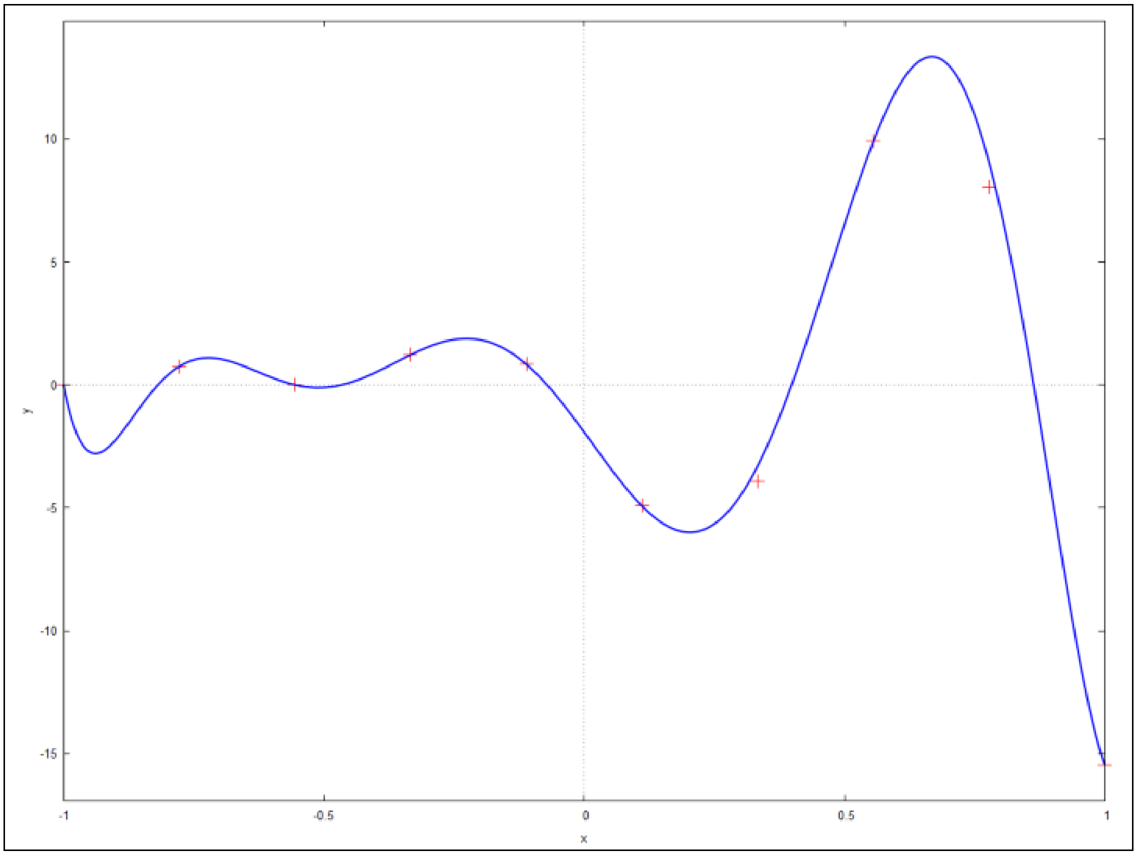
Caso 10 puntos chevisheb

```
(%i13) ecu1:C0+C1·chebyshev_t(1,−1) +C2·chebyshev_t(2,−1) +C3·chebyshev_t(3,−1) +C4·chebyshev_t(4,−1) +C5·chebyshev_t(5,−1) +C6·chebyshev_t(6,−1) +C7·chebyshev_t(7,−1) +C8·chebyshev_t(8,−1) +C9·chebyshev_t(9,−1) =0$
ecu2:C0+C1·chebyshev_t(1,−7/9) +C2·chebyshev_t(2,−7/9) +C3·chebyshev_t(3,−7/9) +C4·chebyshev_t(4,−7/9) +C5·chebyshev_t(5,−7/9) +C6·chebyshev_t(6,−7/9) +C7·chebyshev_t(7,−7/9) +C8·chebyshev_t(8,−7/9) +C9·chebyshev_t(9,−7/9) =0.748$
ecu3:C0+C1·chebyshev_t(1,−5/9) +C2·chebyshev_t(2,−5/9) +C3·chebyshev_t(3,−5/9) +C4·chebyshev_t(4,−5/9) +C5·chebyshev_t(5,−5/9) +C6·chebyshev_t(6,−5/9) +C7·chebyshev_t(7,−5/9) +C8·chebyshev_t(8,−5/9) +C9·chebyshev_t(9,−5/9) =0$
ecu4:C0+C1·chebyshev_t(1,−1/3) +C2·chebyshev_t(2,−1/3) +C3·chebyshev_t(3,−1/3) +C4·chebyshev_t(4,−1/3) +C5·chebyshev_t(5,−1/3) +C6·chebyshev_t(6,−1/3) +C7·chebyshev_t(7,−1/3) +C8·chebyshev_t(8,−1/3) +C9·chebyshev_t(9,−1/3) =1.222$
ecu5:C0+C1·chebyshev_t(1,−1/9) +C2·chebyshev_t(2,−1/9) +C3·chebyshev_t(3,−1/9) +C4·chebyshev_t(4,−1/9) +C5·chebyshev_t(5,−1/9) +C6·chebyshev_t(6,−1/9) +C7·chebyshev_t(7,−1/9) +C8·chebyshev_t(8,−1/9) +C9·chebyshev_t(9,−1/9) =0.838$
ecu6:C0+C1·chebyshev_t(1,1/9) +C2·chebyshev_t(2,1/9) +C3·chebyshev_t(3,1/9) +C4·chebyshev_t(4,1/9) +C5·chebyshev_t(5,1/9) +C6·chebyshev_t(6,1/9) +C7·chebyshev_t(7,1/9) +C8·chebyshev_t(8,1/9) +C9·chebyshev_t(9,1/9) =−4.924$
ecu7:C0+C1·chebyshev_t(1,1/3) +C2·chebyshev_t(2,1/3) +C3·chebyshev_t(3,1/3) +C4·chebyshev_t(4,1/3) +C5·chebyshev_t(5,1/3) +C6·chebyshev_t(6,1/3) +C7·chebyshev_t(7,1/3) +C8·chebyshev_t(8,1/3) +C9·chebyshev_t(9,1/3) =−3.297$
ecu8:C0+C1·chebyshev_t(1,5/9) +C2·chebyshev_t(2,5/9) +C3·chebyshev_t(3,5/9) +C4·chebyshev_t(4,5/9) +C5·chebyshev_t(5,5/9) +C6·chebyshev_t(6,5/9) +C7·chebyshev_t(7,5/9) +C8·chebyshev_t(8,5/9) +C9·chebyshev_t(9,5/9) =9.897$
ecu9:C0+C1·chebyshev_t(1,7/9) +C2·chebyshev_t(2,7/9) +C3·chebyshev_t(3,7/9) +C4·chebyshev_t(4,7/9) +C5·chebyshev_t(5,7/9) +C6·chebyshev_t(6,7/9) +C7·chebyshev_t(7,7/9) +C8·chebyshev_t(8,7/9) +C9·chebyshev_t(9,7/9) =9.048$
ecu10:C0+C1·chebyshev_t(1,1) +C2·chebyshev_t(2,1) +C3·chebyshev_t(3,1) +C4·chebyshev_t(4,1) +C5·chebyshev_t(5,1) +C6·chebyshev_t(6,1) +C7·chebyshev_t(7,1) +C8·chebyshev_t(8,1) +C9·chebyshev_t(9,1) =−15.472$

linsolve([ecu1,ecu2,ecu3,ecu4,ecu5,ecu6,ecu7,ecu8,ecu9,ecu10], [C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9]);
rat: replaced -0.748 by -187/250 = -0.748

(%i14) [C0,C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9]:[rhs(%[1]),rhs(%[2]),rhs(%[3]),rhs(%[4]),rhs(%[5]),rhs(%[6]),rhs(%[7]),rhs(%[8]),rhs(%[9]),rhs(%[10])];
```

(%o14)
$$\left[-\frac{1186963417}{1468006400},-\frac{43758097531}{36700160000},-\frac{3004357707}{917504000},-\frac{75843379413}{18350080000},-\frac{7720520427}{1310720000},-\frac{71344810449}{18350080000},\frac{336992643}{917504000},\frac{22350105549}{10485760000},\frac{68630822181}{36700160000},-\frac{48006659853}{73400320000}\right]$$

```
(%i22) load (orthopoly)$
f:C0+C1·chebyshev_t(1,x)+C2·chebyshev_t(2,x)+C3·chebyshev_t(3,x)+C4·chebyshev_t(4,x)+C5·chebyshev_t(5,x)+C6·chebyshev_t(6,x)+C7·chebyshev_t(7,x)+C8·chebyshev
f:expand(%);
```

(%o22)
$$-\frac{48006659853\,x^{9}}{286720000}+\frac{68630822181\,x^{8}}{286720000}+\frac{7356383469\,x^{7}}{14336000}-\frac{4781847069\,x^{6}}{10240000}-\frac{11949617097\,x^{5}}{20480000}+\frac{4801623381\,x^{4}}{20480000}+\frac{3714088149\,x^{3}}{14336000}-\frac{907233687\,x^{2}}{71680000}-\frac{8326199069\,x}{286720000}-\frac{15741793}{8192000}$$



Ejercicios sección 3.1.6

6. En el caso 3D tenemos que si $\{\mathbf{e}_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) no necesariamente ortogonal, entonces, demuestre que:

   a)
   $$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)}, \quad i,j,k = 1,2,3 \text{ y sus permutaciones cíclicas}$$

   b) si los volumenes: $V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$ y $\tilde{V} = \mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)$, entonces $V\tilde{V} = 1$.

   c) ¿Qué vector satisface $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i = 1$? Demuestre que $\mathbf{a}$ es único.

   d) Encuentre el producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que están representados en un sistema de coordenadas oblicuo: Dada la base: $\mathbf{w}_1 = 4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{w}_2 = 3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{w}_3 = 2\mathbf{k}$. Entonces encuentre:

1) Las bases recíprocas $\{\mathbf{e}^i\}$.
2) Las componentes covariantes y contravariantes del vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

a-) $e^i = \dfrac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$ $i,j,k = 1,2,3$ y sus permutaciones cíclicas

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{e^1/\alpha}{e_1 \cdot \frac{e^1}{\alpha}} = \frac{\alpha e^1}{\alpha} = e^1$$

$$e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{e_2 (e_3 \times e_1)} = \frac{e^2/\alpha}{e_2 \cdot \frac{e^2}{\alpha}} = \frac{\alpha e^2}{\alpha} = e^2$$

$$e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{e_3 (e_1 \times e_2)} = \frac{e^3/\alpha}{e_3 \cdot \frac{e^3}{\alpha}} = \frac{\alpha e^3}{\alpha} = e^3$$

b-) si $V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$, y $\tilde{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$, entonces $V\tilde{V} = 1$

Partiendo de $e^1 = \alpha (e_2 \times e_3)$ y $\alpha e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = 1$

$$V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = \frac{1}{\alpha} \qquad \tilde{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3) = e^1 \cdot \alpha e_1 = \alpha$$

$$V\tilde{V} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$$

c-) Que vector satisface $a \cdot e^i = 1$. Demuestre que a es único

$\{|e^i\rangle\}$ es una base recíproca por tanto cumple que

$$e_i e^j = \delta_i^j \quad \text{siendo} \quad \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

por tanto, la única forma que $a \cdot e^i = 1$ es que $a = e_i$ y es la única opción que suceda.

d-) Dada la base $w_1 = 4i + 2j + k$, $w_2 = 3i + 3j$, $w_3 = 2k$. Encuentre

- la base $\{e^i\}$

$$e^i = \frac{w_j \times w_k}{w_i \cdot (w_j \times w_k)} = V$$

$i = j_1 k_2 - k_1 j_2$

$j = -(i_1 k_2 - k_1 i_2)$

$k = i_1 j_2 - j_1 i_2$

$$V = w_1 \cdot (w_2 \times w_3) = [4i \;\; 2j \;\; k] \cdot ([\;\; 3i \;\; 3j] \times [\;\;\; 2k])$$

$$= [4i \;\; 2j \;\; k] \cdot [6i \; -6j]$$

$$= 24 - 12 + 0 = \boxed{12}$$

$V = 12$

$$e^1 = \frac{w_2 \times w_3}{V} = \frac{1}{6}[6i - 6j] = [i - j]$$

$$e^2 = \frac{w_3 \times w_1}{V} = \frac{1}{6}[4i - 8j] = \left[\frac{2}{3} i - \frac{4}{3} j\right]$$

$$e^3 = \frac{w_1 \times w_2}{V} = \frac{1}{6}[-3i + 3j + 6k] = \left[-\frac{1}{2} i + \frac{1}{2} j + k\right]$$

7. Considere una vez más el espacio vectorial de matrices hermíticas 2×2 y la definición de producto interno $\langle a \, | b \rangle \rightleftharpoons \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^\dagger \mathbb{B})$ que introdujimos en los ejercicios de la sección 2.2.6. Hemos comprobado que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ –presentadas tambien en los ejercicios de la sección 2.2.6– forman base para ese espacio (ver ejercicios sección 2.3.8). Encuentre entonces la base dual asociada a las base de Pauli y, adicionalmente dado un vector genérico en este espacio vectorial, encuentre también su 1-forma asociada.

7. $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

hallar $\{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$

$\sigma^0 \to \langle \sigma^0 | \sigma_0 \rangle \rightleftharpoons Tr(\sigma^{0+}\sigma_0) = 1$

$B^0 = \sigma_0^+ \sigma^0 \to b_1^0 + b_3^0 = 1$

$\sigma_0^+ \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \to z_1 + z_4 = 1$

$B^1 = \sigma_1^+ \sigma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \to z_3 + z_2 = 0$

$B^2 = \sigma_2^+ \sigma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -jz_3 & -jz_4 \\ jz_1 & jz_2 \end{pmatrix} \to -jz_3 + jz_2 = 0$

$B^3 = \sigma_3^+ \sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_3 & -z_4 \end{pmatrix} \to z_1 - z_4 = 0$

$z_1 = z_4 \quad z_3 = z_2$

$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}j \\ \frac{1}{2}j & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$