

# Transformadas Discretas de fourier

Juan Sebastian Carrillo Rodríguez<sup>\*</sup>

Jonathan Stiven Gómez Zuluaga<sup>\*\*</sup>

Cristian Camilo Garcia Alarcon<sup>\*\*\*</sup>

*Universidad Industrial de Santander*

*Bucaramanga*

8 de septiembre de 2021

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Resultados</b>	<b>3</b>
2.1. Parte 1 . . . . .	3
2.2. Parte 2 . . . . .	15
<b>3. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>19</b>

## Resumen

En el área de tratamiento de señales se pueden encontrar herramientas muy útiles a la hora del análisis, un muy conocida es la Transformada de Fourier, una herramienta cuyos usos y aplicación se han propagado a lo largo de los años en diferentes y en trabajos realizados por investigadores de todo el mundo, debido a beneficios que proporciona al momento de analizar las propiedades de una señal. En este trabajo se muestran algunas de sus aplicaciones tanto en ejercicios teóricos, como en un problema extraído de la vida real, donde se evidencia la utilidad del análisis llevado a cabo en el dominio de las frecuencias, esto se lleva a cabo con la aplicación de la Transformada de Fourier a una señal que viene dada en el dominio del tiempo.

## 1. Introducción

La transformada de Fourier, cuya ecuación se muestra en la eq.1, es ampliamente utilizada en el mundo de tratamiento de señales, sus enfoques podrían darse en el análisis del espectro de las señales

---

<sup>\*</sup> e-mail: [juan.carrillo3@correo.uis.edu.co](mailto:juan.carrillo3@correo.uis.edu.co)

<sup>\*\*</sup> e-mail: [jonathan2218424@correo.uis.edu.co](mailto:jonathan2218424@correo.uis.edu.co)

<sup>\*\*\*</sup> e-mail: [cristian2218442@correo.uis.edu.co](mailto:cristian2218442@correo.uis.edu.co)

o en la reducción de ruido de una señal. La mayoría de las señales que se encuentran en el mundo real, captadas por medio de mediciones de instrumentos analíticos, se encuentran contaminadas con ruido. Esto dificulta la interpretación y modelado de las propiedades asociadas a estas señales, el ruido captado puede ser generado tanto por el instrumento utilizado como por agentes externos que afectan la medición.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw \quad (1)$$

Se muestra en la figura 1 el resultado de aplicar la ecuación 1 en su forma discreta a una señal pulso rectangular  $f(t)$  en el dominio del tiempo, da como resultado la transformada de Fourier de la misma señal  $F(w)$  que se encuentra en el dominio de las frecuencias

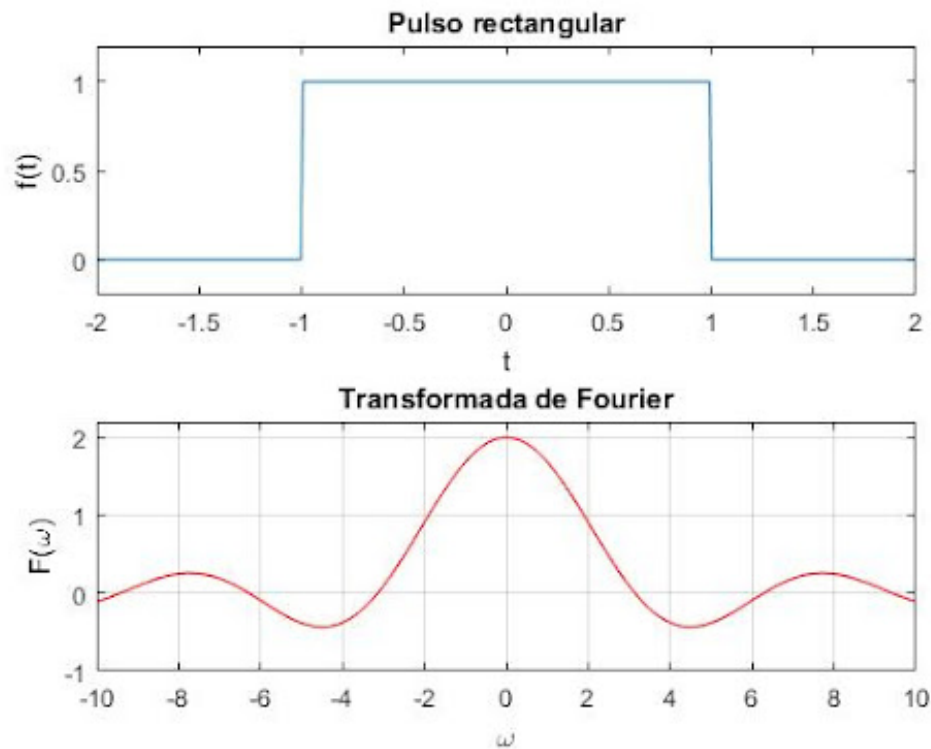


Figura 1: Transformada discreta de Fourier de la señal pulso rectangular.

En [1] muestran posibles filtrados de ruido en una señal y como hacerlo con Fourier, es decir un filtro de ruido utilizando la Transformada de Fourier. Este proceso consta de aplicar la Transformada de Fourier directa para obtener el espectro de frecuencias de la señal, una vez obtenido el espectro se eliminan las frecuencias altas del mismo puesto que estas frecuencias están en su mayoría relacionadas con el ruido. Finalmente se aplica la transformada inversa de Fourier para recuperar

la señal inicial pero con una reducción de ruido. esto puede ser entendido como la convolución de la transformada de Fourier de un señal con una función de apodización, donde luego de la convolución se aplica la transformada inversa. este proceso muestra buenos resultados y es aplicable en diferentes entornos de programación puesto que el algoritmo de (FFT) transformada rápida de Fourier se encuentra implementada en la mayoría de los lenguajes de programación de forma nativa.

Aunque es claro que este método no es el único para la reducción de ruido en una señal, en [2] se muestra que la auto correlación también puede ser utilizada para la reducción de ruido. Tanto la correlación cruzada y la auto correlación son útiles para encontrar patrones repetitivos en señales ruidosas. Seguidamente es posible utilizar Fourier para analizar los resultados de la reducción de ruido en la señal.

A continuación se muestran ejercicios para evidenciar conceptos básicos de la transformada de Fourier y su aplicación en la vida real en un problema con un evento visto desde varias antenas.

## 2. Resultados

Como primera parte se desarrollan ejercicios planteados para afianzar conceptos de la transformada de Fourier. Se llevan a cabo utilizando dos señales mostradas en la ecuación 2.

### 2.1. Parte 1

1) Considere las siguientes señales

$$y(t) = 3\cos(\omega t) + 5\cos(3\omega t) + 8\cos(7\omega t) , \quad y(t) = 3\sin(\omega t) + 2\sin(3\omega t) + 3\sin(8\omega t) \quad (2)$$

a) Implemente en cada caso la transformada analítica y discreta de fourier. Comparelas.

```
s = 3*cos(2*pi*t*f) + 5*cos(3*2*pi*t*f)+8*cos(7*2*pi*t*f); %Señal 1
s = 3*sin(2*pi*t*f) + 2*sin(3*2*pi*t*f)+3*sin(8*2*pi*t*f); %Señal 2
```

Figura 2: Señales implementadas, con  $f = 10Hz$ .

```
TFfuncionPar := pi ( 5 Dirac(k - 30) + 8 Dirac(k - 70) + 3 Dirac(k + 10) + 8 Dirac(k + 70) + 3 Dirac(k - 10) + 5 Dirac(k + 30) )
```

Figura 3: Transformada analítica de la primera señal.

$$TF_{funcionImpar} := 1\pi (-3 \text{Dirac}(k - 80) + 3 \text{Dirac}(k + 80) - 2 \text{Dirac}(k - 30) + 3 \text{Dirac}(k + 10) - 3 \text{Dirac}(k - 10) + 2 \text{Dirac}(k + 30))$$

Figura 4: Transformada analítica de la segunda señal.

En las figuras 6 y 8 se pueden ver las transformadas discretas de Fourier para las dos señales de la ecuación 2. Comparando con las transformadas analíticas halladas en maple (figura 3 y 4) se ve que están ubicadas en las mismas frecuencias.

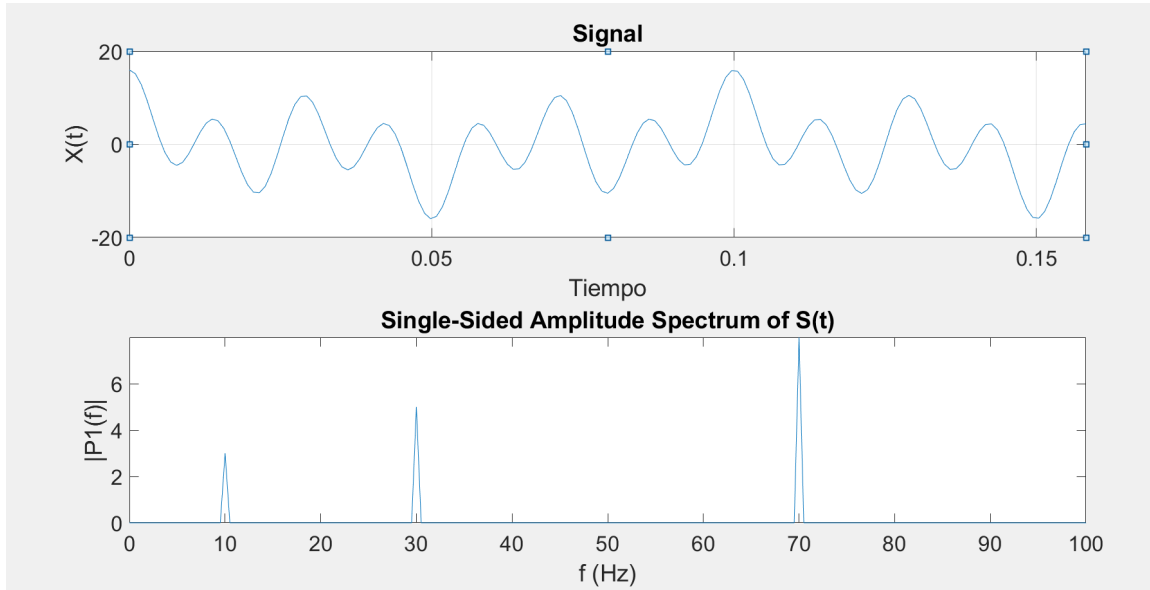


Figura 5: Transformada discreta de Fourier de la primera señal.

- b) Muestre para cuáles casos recupera una transformada real o imaginaria.

En la figura 3 se ve que es puramente real esto se debe a que la señal número uno está formada por un señal par ( $\cos()$ ).

De forma similar la figura 4 se ve que es imaginario pura debido a que la señal número dos es impar ( $\sin()$ ).

- c) Encuentre las distintas componentes para el espectro de potencias y muestre que las frecuencias tienen los valores esperados (no sólo las proporciones)

Para la primera señal se puede ver que las componentes frecuenciales están donde se esperan: 10, 30, 70 Hz. En el caso de la señal dos también la frecuencia está donde se espera 10, 30, 80 Hz.

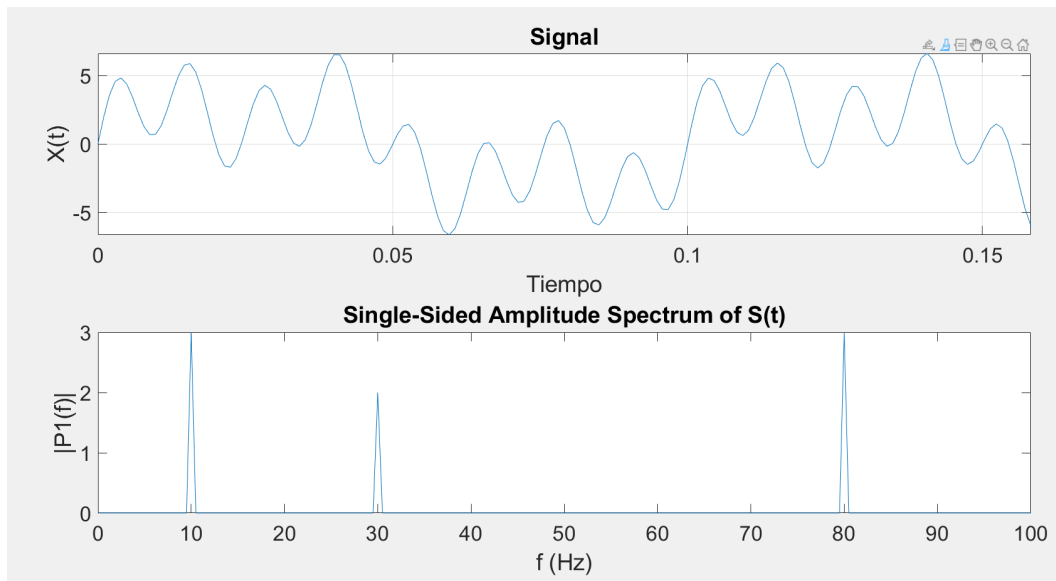


Figura 6: Transformada discreta de Fourier de la segunda señal.

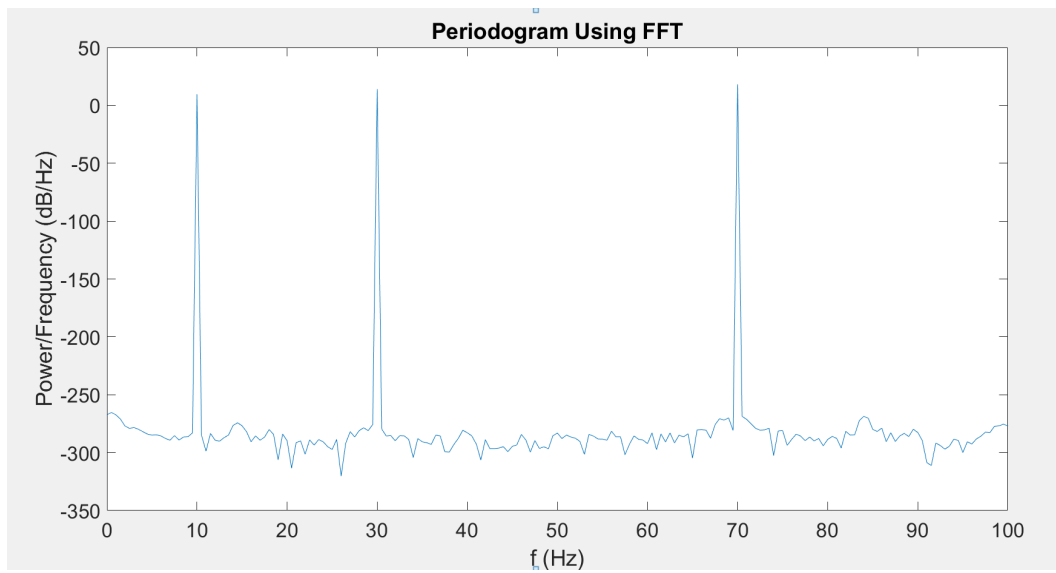


Figura 7: Espectro de potencia de la señal número uno

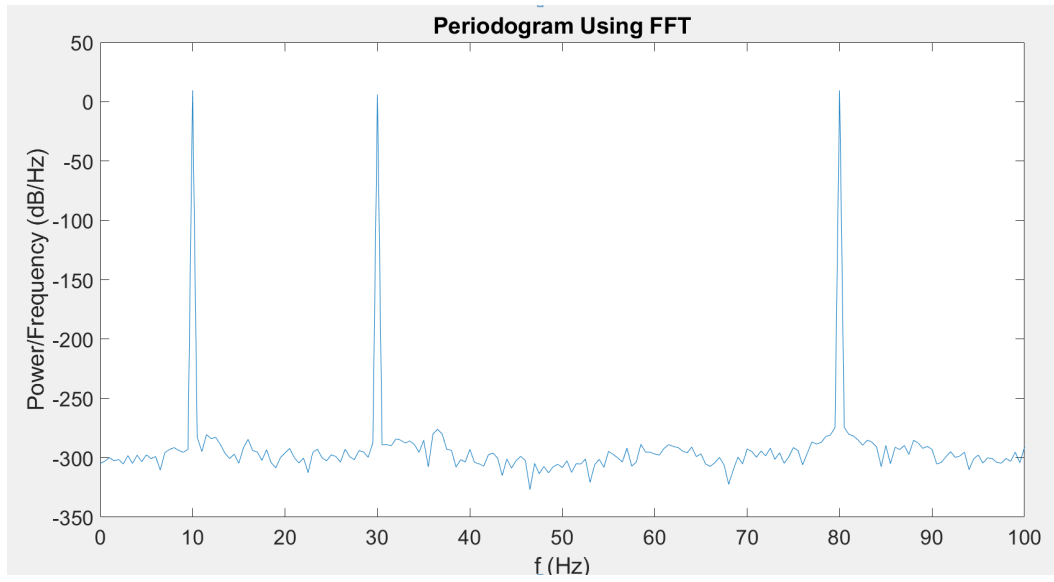


Figura 8: Espectro de potencia de la señal número dos.

- d) Experimente los efectos de elegir diferentes valores del tamaño de paso  $h$  y de ampliar el período de medición  $T = Nh$ .

Como ejemplo se tomara la primera señal.

$$y(t) = 3\cos(2\pi ft) + 5\cos(3 * 2\pi ft) + 8\cos(7 * 2\pi ft) \quad (3)$$

la frecuencia máxima de la señal anterior es 70 Hz, el teorema de Nyquist dice que la frecuencia de muestreo debe ser como mínimo el doble de la frecuencia máxima. Por lo anterior se harán algunas variaciones en la frecuencia de muestres  $F_s$  para ver los efectos.

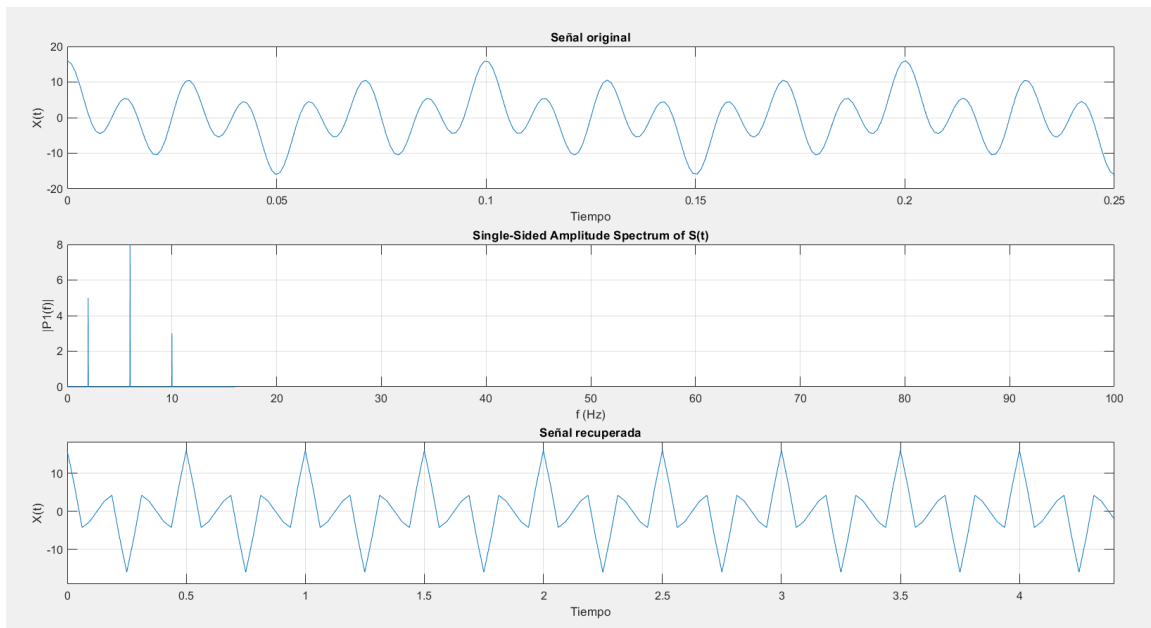


Figura 9: Espectro y señal obtenida al muestrear la señal original a 25 Hz.

En la figura 9 se puede ver que al muestrear a una frecuencia de 32 Hz solo se obtiene se la señal original el componente de 10 Hz ( primer termino ecuación 3)

En la figura 10 se puede ver que al muestrear a un frecuencia de 128 Hz solo pasan dos componente de la señal original (10 y 30 Hz).

Finalmente se puede ver en las figuras 11 y 12 muestreadas a 256 y 512 Hz respectivamente, que recuperamos la totalidad de las frecuencias de la señal original.

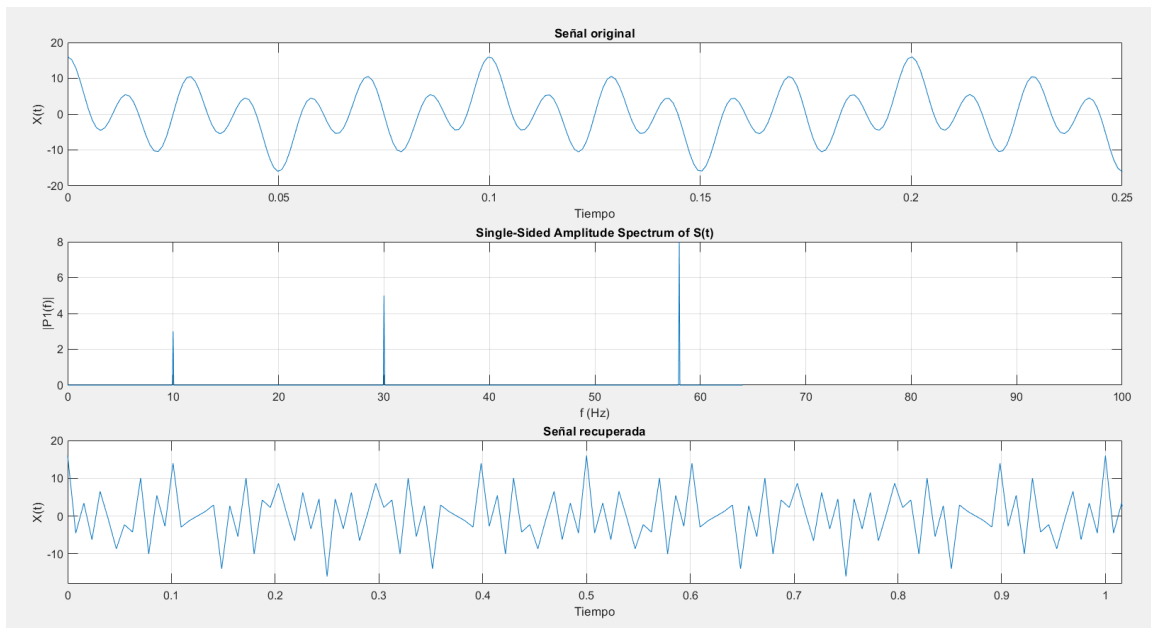


Figura 10: Espectro y señal obtenida al muestrear la señal original a 128 Hz.

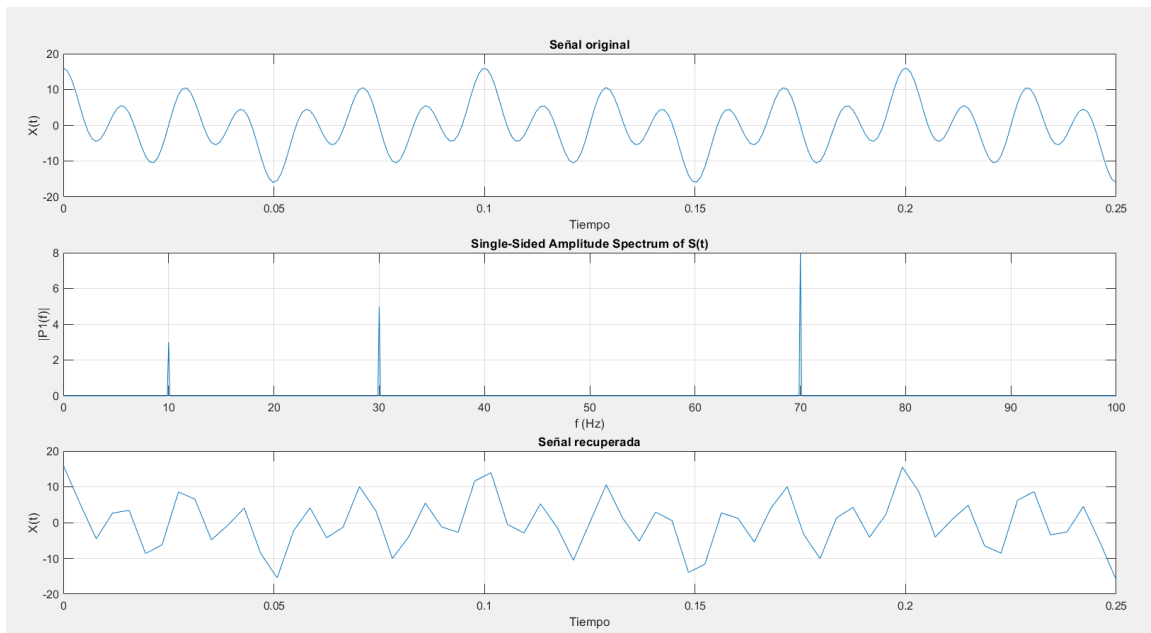


Figura 11: Espectro y señal obtenida al muestrear la señal original a 256 Hz.



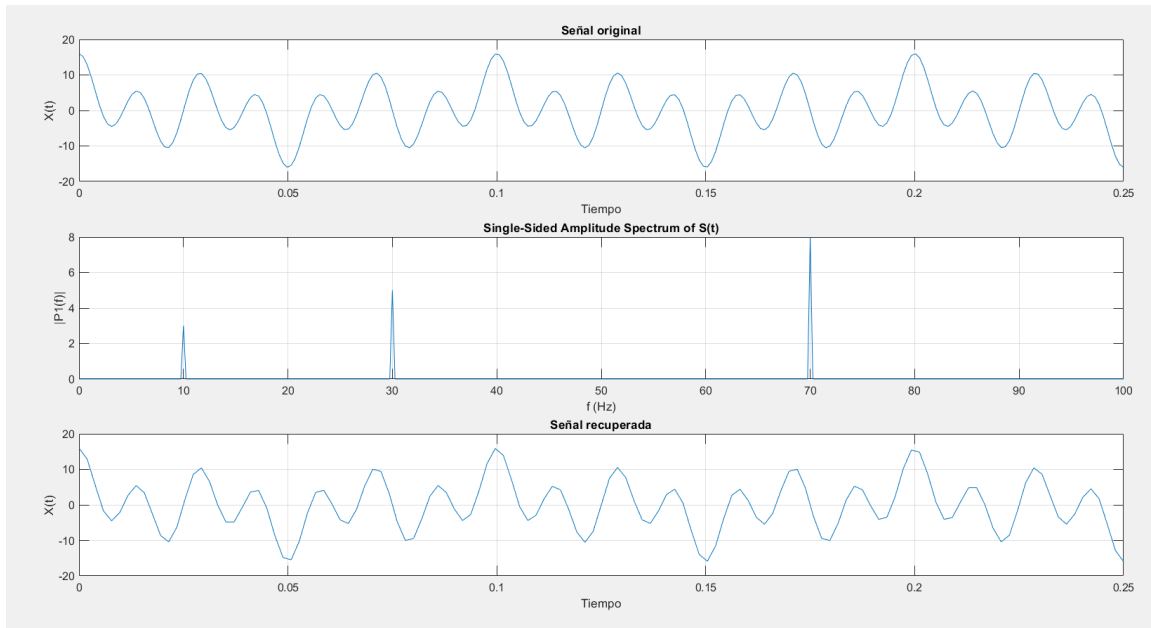


Figura 12: Espectro y señal obtenida al muestrear la señal original a 512 Hz.

2) Considere ahora la siguiente señal

$$y(t_i) = \frac{10}{10 - 9\sin(t_i)} + \alpha(2R_i - 1) \quad \text{con } 0 \leq R_i \leq 1 \quad (4)$$

donde  $R_i$  es un número aleatorio y  $\alpha$  un parámetro de control. Use este parámetro  $\alpha$  para simular tres tipos de ruido: alto, medio y bajo. En el caso del ruido alto, la señal se pierde. En los otros dos casos puede ser identificada

a) Grafique su señal ruidosa, su transformada de fourier (analítica) y su espectro de potencia.

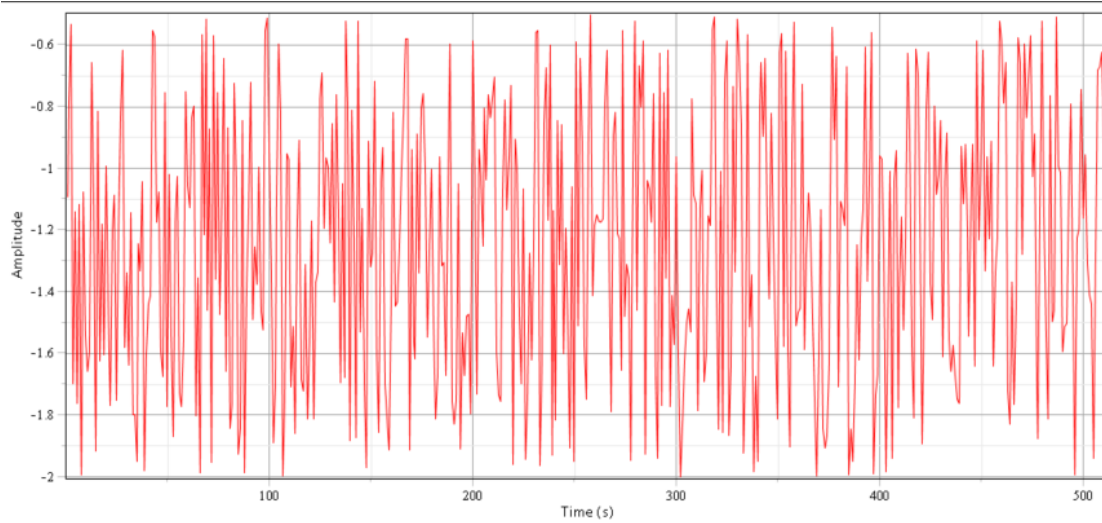


Figura 13: señal de ruido para un  $\alpha = 0,5$ .

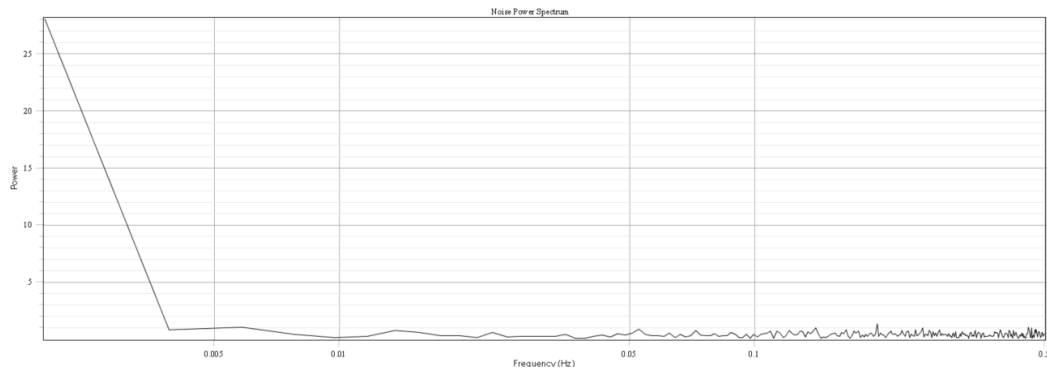


Figura 14: Espectro de potencia de la señal de ruido, calculado en Maple (Analítica).

- b) Calcule la función de auto correlación  $A(\tau)$  y su transformada de Fourier  $A(\omega)$

Para este caso para calcular la señal de auto correlación se puede hacer uso del teorema de Wiener - Kinchin, que dice que la densidad espectral de potencia de una función es la transformada de Fourier de la auto correlación. También se puede calcular la señal de auto correlación como la inversa de la FFT de la señal por la conjugada de la FFT de la misma señal.

$$s = IFFT(FFT(y) \cdot \text{conj}(FFT(y))) \quad (5)$$

Usando la ecuación 5 se obtiene la tercera señal en la figura 15, se puede ver que esta señal ya no presenta ruido pero fue desplazada con respecto a la original.

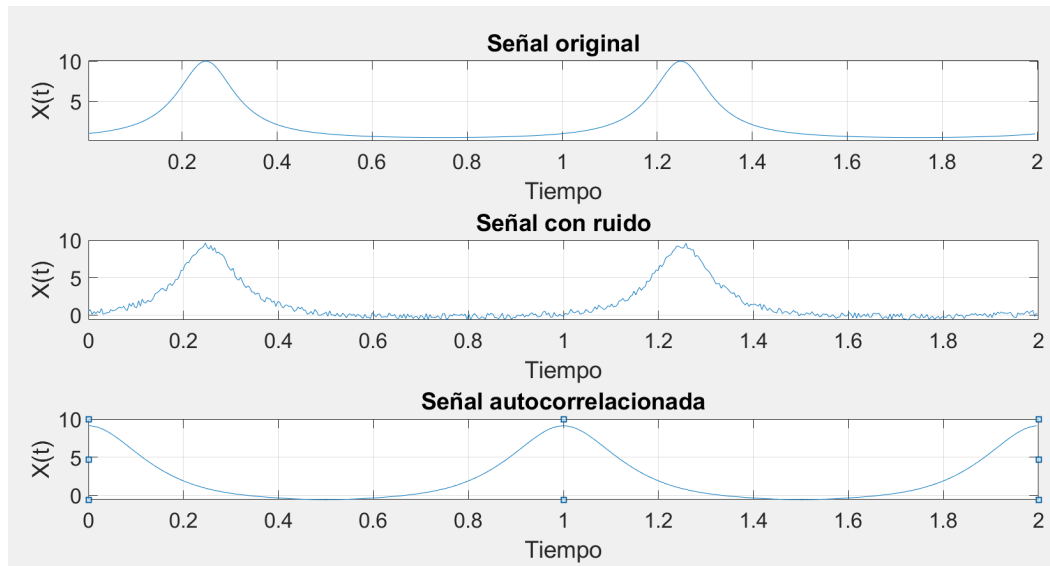


Figura 15: Señal original, señal con ruido y resultado de auto correlacionar la señal con ruido.

Otra forma de calcular la auto-correlación para reducir el ruido de la señal es usando la función `xcorr()` de Matlab, esta función permite calcular la correlación cruzada entre dos señales pero como se calculara la correlación cruzada de la señal con ruido con ella misma se obtendrá la auto-correlación.

En la figura 16 se puede ver como el proceso de auto-correlación desfasa la señal y le cambia la amplitud, pero el ruido es eliminado, en cuanto al amplitud del espectro (figura 17) se conservan las mayorías de frecuencias especialmente las más relevantes.

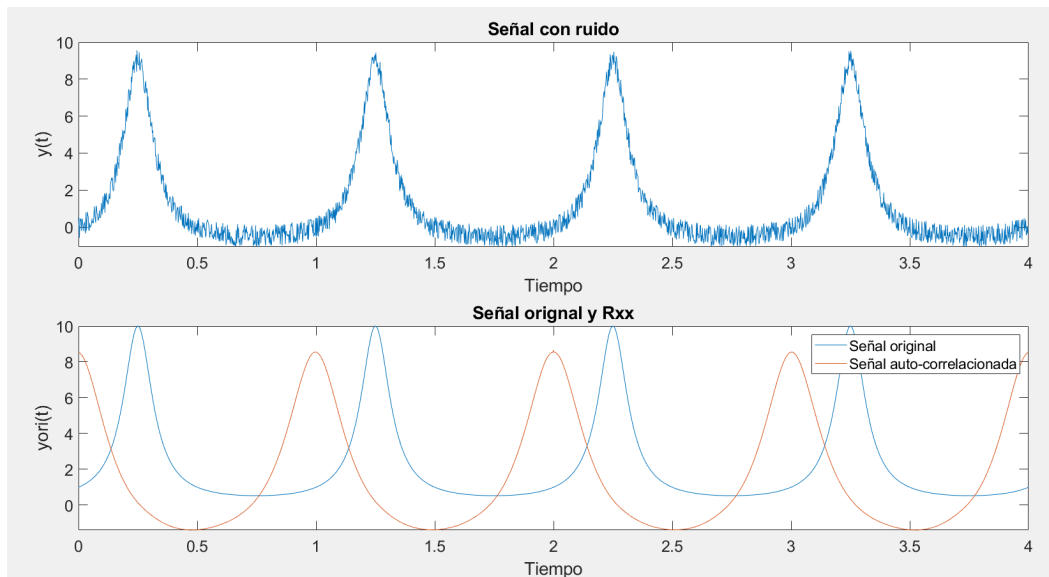


Figura 16: Señal original, señal con ruido y resultado de auto correlación la señal con ruido usando *xcros*.

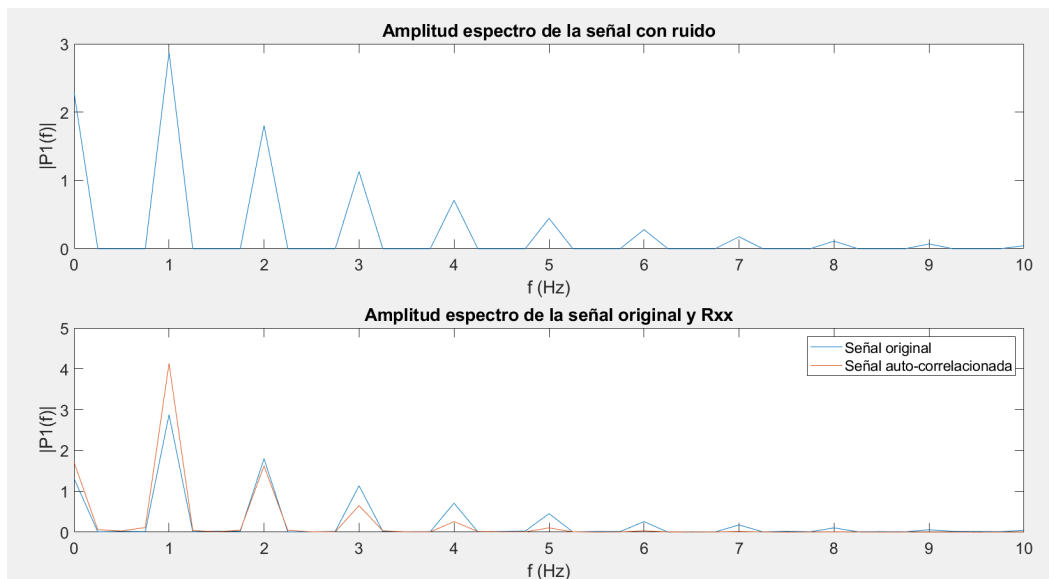


Figura 17: Señal original, señal con ruido y resultado de auto correlación la señal con ruido usando *xcros*.

c) Compare la transformada discreta de Fourier de  $A(\tau)$  con el verdadero espectro de potencia

y discuta la eficacia de la reducción del ruido mediante el uso de la función de autocorrelación.

En cuanto al espectro de la señal auto correlacionada se observa que se conservan las frecuencias dominantes con respecto al espectro de la señal original, pero en cuanto amplitud si hay variaciones

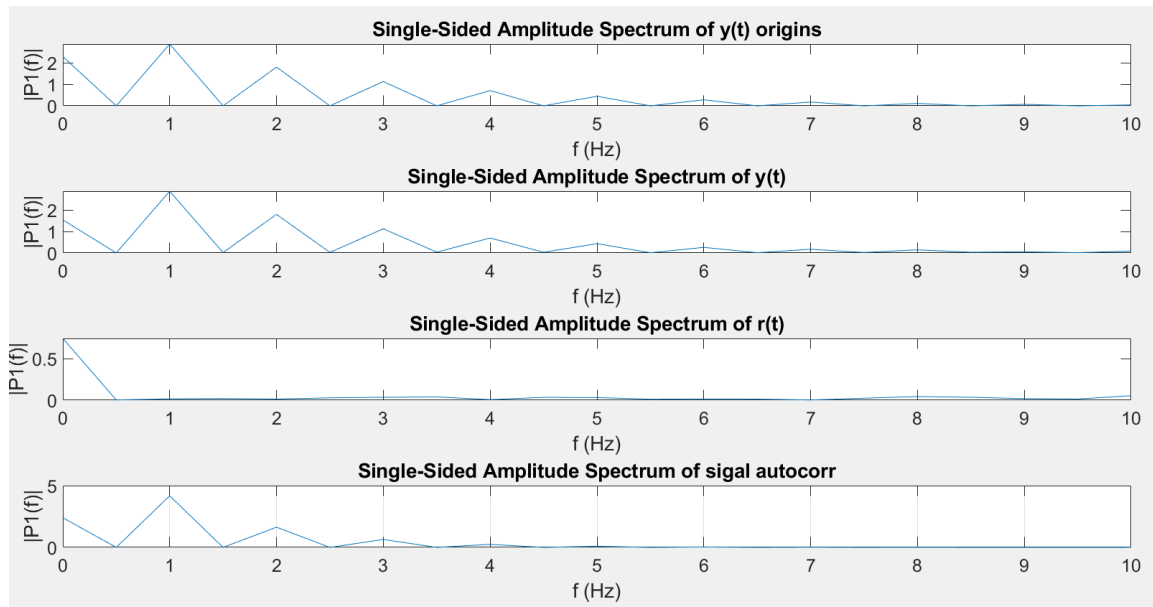


Figura 18: Espectro de amplitud de la diferentes señales

d) ¿Para cuáles valores de  $\alpha$  se pierde toda la información en la entrada?

Para valores de  $\alpha$  mayores a 3 se empieza a ver afectado tanto el espectro de potencias como la señal en tiempo.

En la figura 19 se puede ver como el ruido envuelve totalmente la señal y es imposible recuperar la señal original realizando la auto correlación. Esto mismo sucede en el espectro de potencia (figura 20) donde el espectro de  $y(t)$  se empieza a ver más dominado por la amplitud del ruido, esto se agrava a medida que se aumenta el valor del  $\alpha$

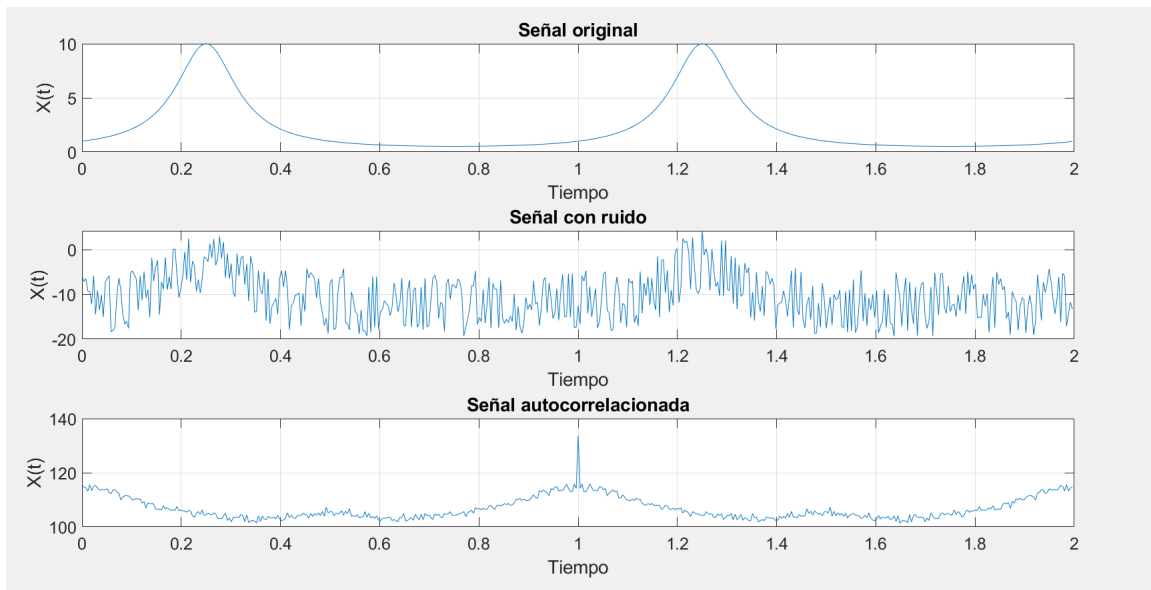


Figura 19: Espectro de amplitud de la diferentes señales

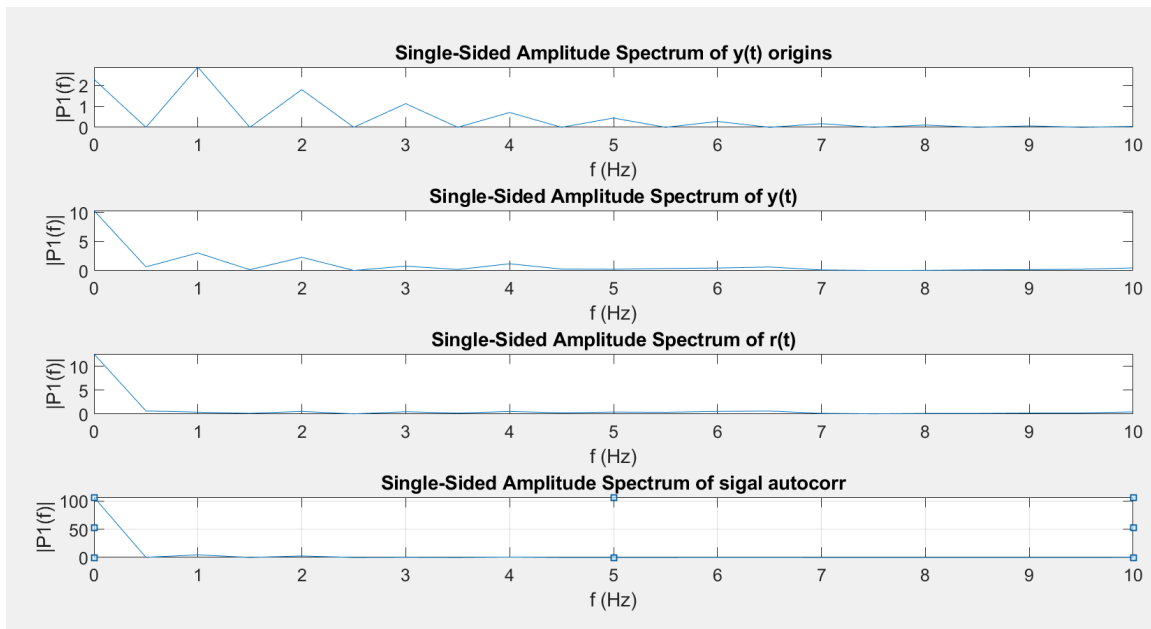


Figura 20: Espectro de amplitud de la diferentes señales

## 2.2. Parte 2

Los datos se encuentran dentro de varios archivos .txt, cada uno de estos archivos es un trace que contiene medidas de varias antenas. Por ejemplo se describirá el proceso para uno de estos archivos (trace). Primero dentro de un archivo .xlsx en cada hoja se encuentra cada trace, tomando como ejemplo la hoja 2 que contiene los datos *Trace\_EVT1272065836.908173614\_908.2.txt* lo primero que se hace es extraer la longitud de las tramas de datos correspondientes a cada antena. Las antenas que contiene este archivo son las siguientes:

- R9PLT
- R9RSR
- R9GLG
- R9AZL
- R9AEP
- R9JNN
- R9MRC

Obteniendo la señal para cada antena tenemos las siguientes señales.

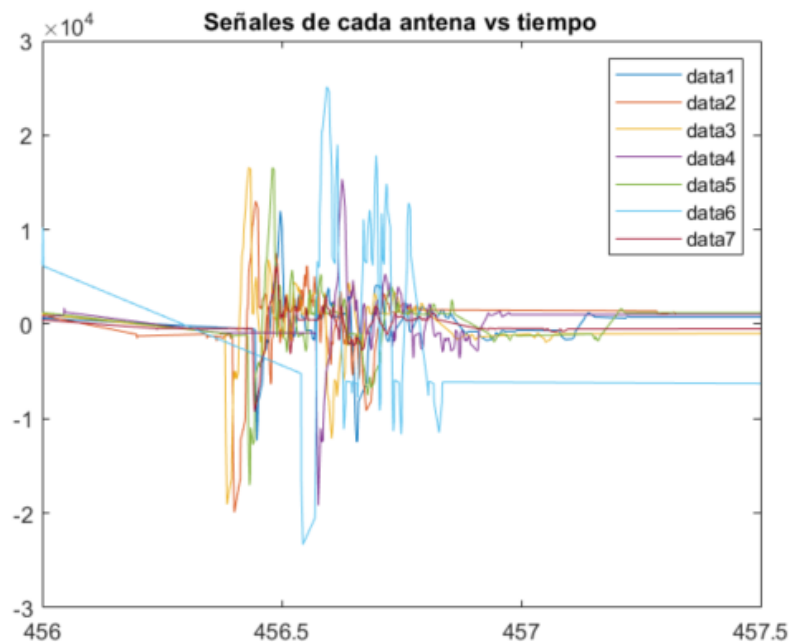


Figura 21: Señales de cada antena del *Trace\_EVT1272065836.908173614\_908.2.txt*.

Una vez se tienen los datos de cada antena por separado se procede a calcular la transformada de Fourier de cada una. En la figura 22 se puede ver esta transformada para cada una de las antenas encontradas dentro de este trace.

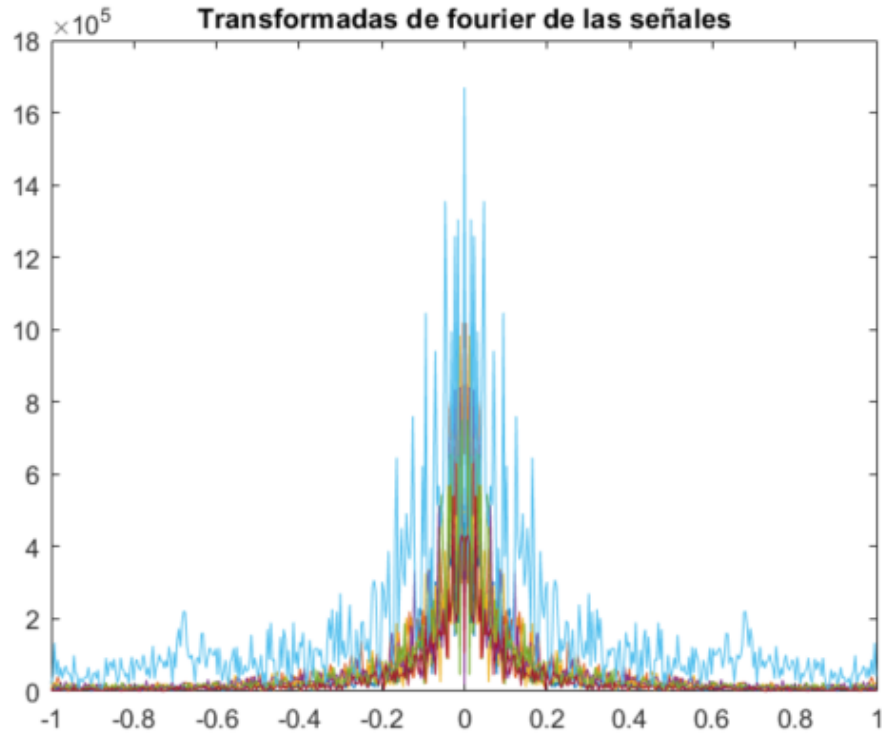


Figura 22: Trasformadas de Fourier de las señales del *Trace\_EVT1272065836.908173614\_908.2.txt*.

El proceso descrito anteriormente se repite para el resto de trace, en total son 5 archivos. En el cuadro 1 se puede ver el nombre y la cantidad de antenas encontradas para cada archivo.

Archivo	Número de Antenas	Antenas
Trace_EVT1272065836.908173614_908.2.txt	7	R9PLT-R9RSR -R9GLG-R9AZL-R9AEP-R9JNN-R9MRC
Trace_EVT1272070257.318228291_318.2.txt	3	R9VCT-R9VRY-R9CRT
Trace_EVT1272070496.820081490_820.1.txt	7	R9PLT-R9JNN-R9RSR-R9NDJ-R9GLG-R9AEP-R9MRC
Trace_EVT1272070710.480088004_480.1.txt	5	R9BHB-R9NDJ-R9CRN-R9JNN-R9AZL
Trace_EVT1272071343.694072075_694.1.txt	5	R9BHB-R9JNN-R9AZL-R9CRN-R9NDJ

Cuadro 1: Resumen de antenas encontradas para cada Trace de datos.

Para la segunda parte en el desarrollo de este proyecto, se plantea el análisis de eventos como señales por medio de Fourier. Estos eventos serán señales captadas por antenas, en el conjunto de datos recopilados se cuenta con un total de 7 antenas y 5 eventos donde cada evento fue captado por al menos una antena o varias de ellas. La idea principal es comparar los valores que reciben y



registran las antenas por medio de Fourier.

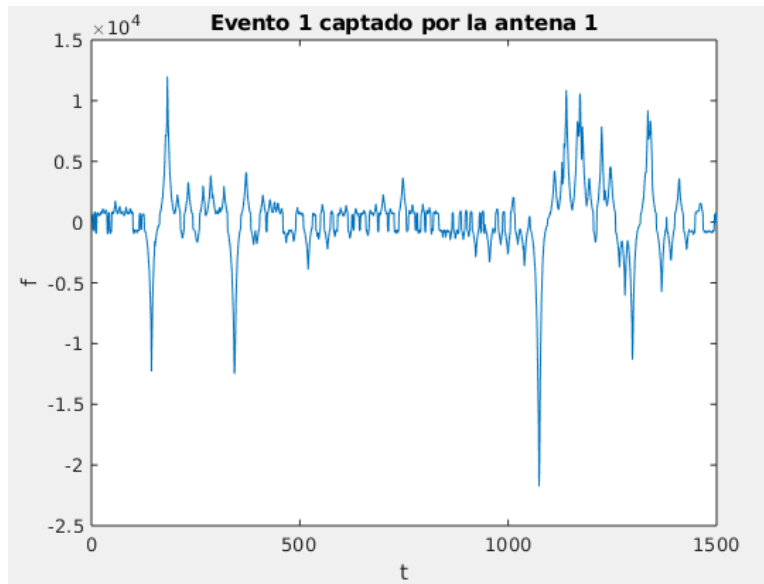


Figura 23: Señal recibida por la antena 1 en un evento.

En la figura 23, se evidencia la representación de una señal captada por una antena, esta señal es llevada al dominio de las frecuencias por medio de la Transformada Discreta de Fourier, para obtener una representación mostrada en la figura 24

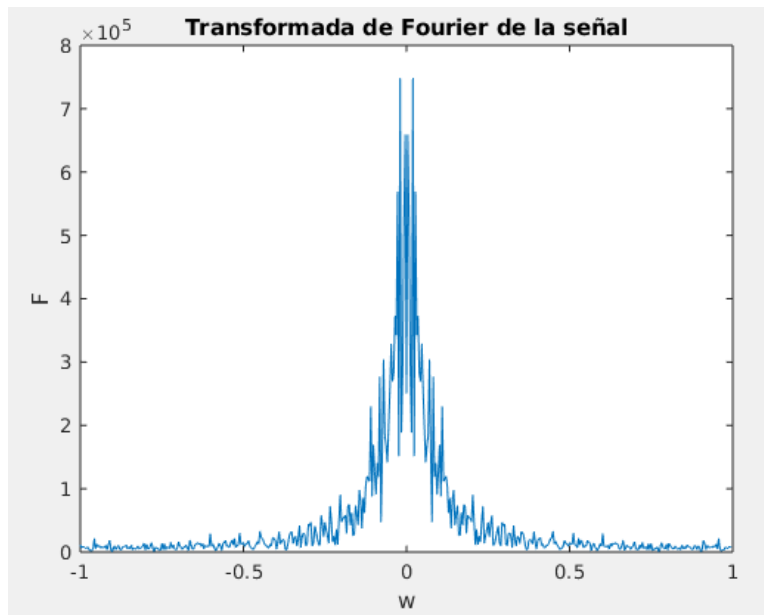


Figura 24: Señal recibida por la antena 1 en un evento.

Si se miran las señales captadas de un mismo evento por diferentes antenas, se espera encontrar que las señales conserven su identidad espectral debido a que son el mismo evento, a modo de ejemplo en la figura 25 se muestra la Auto-correlación de una misma señal captada por 3 antenas diferentes

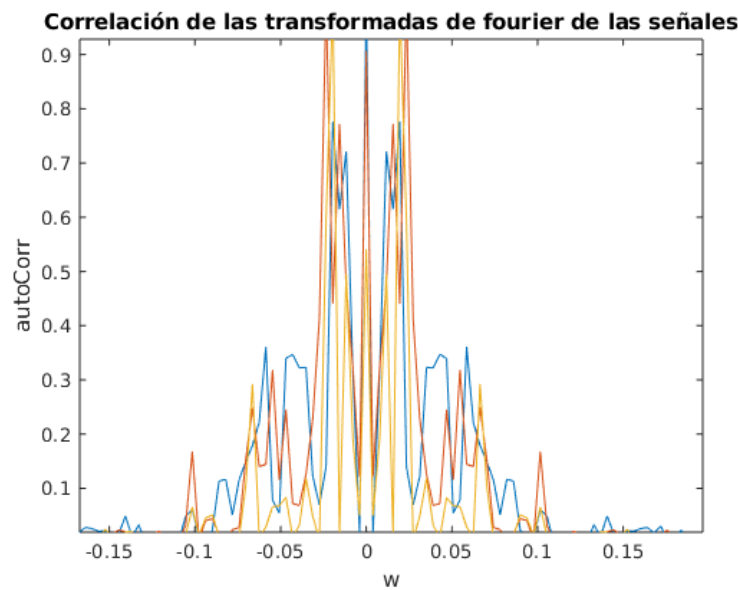


Figura 25: Señal de un evento recibida en varias antenas dominio de las frecuencias.

En orden de encontrar una similitud presentada entre los espectros de las diferentes señales se calcula el promedio de la diferencia entre las auto correlaciones de las señales, y se obtiene la matriz mostrada en la figura 26 donde se evidencia que los valores obtenidos son cercanos a cero, lo que a su vez significa una similitud entre los espectros captados por la señal. con esto podemos intuir que el espectro de las señal se conserva aun siendo captada por diferentes receptores.

0	0.0879	0.0890
0.0879	0	0.0775
0.0890	0.0775	0

Figura 26: promedio de las diferencias entre las auto correlaciones mostradas en 25.

### 3. Conclusiones y Recomendaciones

La transformada de Fourier es una fuerte herramienta ampliamente utilizada en el mundo del tratamiento de señales, esta permite obtener información que no es visible en el dominio del tiempo. En el trabajo realizado se evidencia su aplicación en ejercicios artificiales, con funciones descritas para dicha finalidad y también se muestra su utilidad en ejercicios o problemas que se pueden encontrar en la vida real. De cualquier modo, lo visto en ambas secciones descritas en el trabajo,

puede ser aplicado en las dos practicas, es decir tanto en ejercicios artificiales como en problemas extraídos de un entorno mas real. Se encontró que el espectro de frecuencias de una señal se mantiene aunque la misma señal sea recibida por diferentes antenas, así mismo se mostró la posibilidad de reducir el ruido con auto correlación y su posterior análisis en el dominio de las frecuencias utilizando la Transformada de Fourier, cabe agregar como dato extra que al tener un evento que es captado por dos antenas diferentes, los tiempos registrados podrían no ser exactamente iguales, es decir, las variaciones presentadas por la señal podrían no estar en el mismo punto de tiempo. Para corregir esto se puede recurrir a un desplazamiento de la señal, aunque como estas están siendo analizadas en el dominio de las frecuencias, encontramos que al desplazar una función en el tiempo, su espectro de frecuencias solo se ve afectado en la fase mas no en la magnitud del espectro, por lo tanto no se hace necesario realizar el desplazamiento mencionado.

## Referencias

- [1] Eduardo O Cerqueira, Ronei J Poppi, Lauro T Kubota, and Cesar Mello. Utilização de filtro de transformada de fourier para a minimização de ruídos em sinais analíticos. *Química Nova*, 23:690–698, 2000.
- [2] Eduardo O Cerqueira, Ronei J Poppi, and Fransisco Kubota, Cañadas Quesada. Separación de fuentes sonoras emitidas por el corazón y pulmones en un ser humano aplicado al diagnostico de enfermedades cardiovasculares. ., 23:1–20, 2016.