

# Primer parcial

## Tabla de contenidos

<b>Recomendaciones generales</b>	<b>1</b>
<b>Lab 1: Sumatorias, productorias y optimización</b>	<b>2</b>
Sumatorias y productorias . . . . .	2
Sumatorias . . . . .	2
Propiedades de la sumatoria . . . . .	2
Algunas identidades importantes . . . . .	3
Errores por evitar (sumatorias) . . . . .	3
Productorias . . . . .	4
Propiedades de la productoria . . . . .	4
Errores por evitar (productorias) . . . . .	5
Ejercicio . . . . .	6
Optimización . . . . .	6
Optimización con restricción de igualdad . . . . .	6
Optimización con restricción de desigualdad . . . . .	6
<b>Lab 2</b>	<b>7</b>

## Listado de Figuras

## Listado de Tablas

## Recomendaciones generales

- 
-

# Lab 1: Sumatorias, productorias y optimización

## Sumatorias y productorias

Considere una secuencia de objetos  $\{x_i\}_{i=1}^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  para los cuales están definidas la suma y la multiplicación.

Para trabajar con muchos términos se usan puntos suspensivos:

- $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n,$
- $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n.$

Cuando esta notación es poco conveniente, se usan las notaciones  $\Sigma$  (sumatoria) y  $\Pi$  (productoria).

## Sumatorias

Sean  $k, n \in \mathbb{N}$  tales que  $k \leq n$ . Definimos la notación Sigma ( $\Sigma$ ) así:

$$\sum_{i=k}^n x_i = x_k + x_{k+1} + \dots + x_{n-1} + x_n.$$

$i$ : Índice de la sumatoria	$k$ : Primer término
$x_i$ : Argumento de la sumatoria	$n$ : Último término

## Propiedades de la sumatoria

Sean  $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n$  secuencias de objetos  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $k \leq j \leq n$ ; y  $c$  una constante (cualquier objeto que no varíe conforme aumenta el contador).

### 1. Sumatoria de constantes

$$\sum_{i=k}^n c = \underbrace{c + c + \dots + c}_{n-k+1 \text{ veces}} = (n - k + 1)c.$$

### 2. Distributividad

$$\sum_{i=k}^n c x_i = c \sum_{i=k}^n x_i.$$

### 3. Eliminación de términos

$$\sum_{\substack{i=k \\ i \neq j}}^n x_i = \sum_{i=k}^n x_i - x_j.$$

### 4. Cambio de índice

$$\sum_{i=k}^n x_i = \sum_{t=k}^n x_t.$$

### 5. Asociatividad (linealidad en la suma)

$$\sum_{i=k}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=k}^n x_i + \sum_{i=k}^n y_i.$$

## Algunas identidades importantes

### 1. Suma de Gauss

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

### 2. Suma de cuadrados

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

### 3. Suma de cubos

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

## Errores por evitar (sumatorias)

No sobredefinir índices:

$$\sum_{i=k}^n \left( \sum_{i=k}^n x_{i\ell} \right) \quad (\text{incorrecto}) \quad \sum_{i=k}^n \left( \sum_{\ell=k}^n x_{i\ell} \right) \quad (\text{correcto})$$

En general, las siguientes no son ciertas:

- Recíprocos

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{x_i} \neq \frac{1}{\sum_{i=k}^n x_i}$$

- Productos

$$\sum_{i=k}^n x_i y_i \neq \left( \sum_{i=k}^n x_i \right) \left( \sum_{i=k}^n y_i \right),$$

- Potencias

$$\sum_{i=k}^n x_i^c \neq \left( \sum_{i=k}^n x_i \right)^c.$$

## Productorias

Sean  $k, n \in \mathbb{N}$  tales que  $k \leq n$ . Definimos la notación Pi ( $\Pi$ ) así:

$$\prod_{i=k}^n x_i = x_k \cdot x_{k+1} \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot x_n.$$

$i$  : Índice de la productoria                       $k$  : Primer término

$x_i$  : Argumento de la productoria               $n$  : Último término

## Propiedades de la productoria

Sean  $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_i\}_{i=1}^n$  secuencias de objetos,  $j$  tal que  $k \leq j \leq n$ ; y  $c$  constante (cualquier objeto que no varíe conforme aumenta el contador).

### 1. Productoria de constantes

$$\prod_{i=k}^n c = \underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n-k+1 \text{ veces}} = c^{n-k+1}.$$

### 2. Constante por término

$$\prod_{i=k}^n (c x_i) = c^{n-k+1} \prod_{i=k}^n x_i.$$

### 3. Eliminación de un término

$$\prod_{\substack{i=k \\ i \neq j}}^n x_i = \frac{\prod_{i=k}^n x_i}{x_j}.$$

4. Cambio de índice

$$\prod_{i=k}^n x_i = \prod_{t=k}^n x_t.$$

5. Conmutatividad (producto término a término)

$$\prod_{i=k}^n (x_i y_i) = \left( \prod_{i=k}^n x_i \right) \left( \prod_{i=k}^n y_i \right).$$

6. Cociente de productos (si  $y_i \neq 0$  para todo  $i$ )

$$\prod_{i=k}^n \frac{x_i}{y_i} = \frac{\prod_{i=k}^n x_i}{\prod_{i=k}^n y_i}.$$

7. Potencia de productoria

$$\prod_{i=k}^n x_i^c = \left( \prod_{i=k}^n x_i \right)^c.$$

8. Base constante elevada a  $x_i$

$$\prod_{i=k}^n c^{x_i} = c^{\sum_{i=k}^n x_i}.$$

**Errores por evitar (productorias)**

No sobredefinir índices:

$$\prod_{i=k}^n \left( \prod_{i=k}^n x_{i\ell} \right) \quad (\text{incorrecto}) \quad \prod_{i=k}^n \left( \prod_{\ell=k}^n x_{i\ell} \right) \quad (\text{correcto})$$

En general, las siguientes no son ciertas:

$$\prod_{i=k}^n (x_i + y_i) \neq \prod_{i=k}^n x_i + \prod_{i=k}^n y_i,$$

$$\prod_{i=k}^n (x_i - y_i) \neq \prod_{i=k}^n x_i - \prod_{i=k}^n y_i.$$

### 💡 Tip

En caso de olvidar alguna propiedad, desarrolle la productoria o sumatoria para 2-3 elementos y observe si incumple alguna propiedad.

## Ejercicio

Simplifique al máximo, usando las propiedades:

1.  $\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i \neq j}^n x_i}$
2.  $\sum_{i=1}^n \left[ x_i \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{x_j} \right) \right]$
3.  $x_j^2 \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n \frac{P_j x_j}{P_i}$
4.  $\prod_{j=2}^n \frac{P_j}{\prod_{i=1}^n P_i^{1/n}}$
5.  $\sum_{i=1}^n (i^2 + i + 1)$
6.  $\log \left( \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha_i}}{i} \right)$

## Optimización

### Optimización con restricción de igualdad

Encuentre el máximo de  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 3 \ln(x_2) \quad \text{sujeto a} \quad 100 = 2x_1 + x_2.$$

### Optimización con restricción de desigualdad

Un consumidor obtiene utilidad de cerveza  $x_1$  y limonada  $x_2$ :

$$U(x_1, x_2) = x_1^{3/4} x_2^{1/4}.$$

Por recomendación médica, el individuo tiene estrictamente prohibido gastar más de una fracción  $k \in [0, 1]$  de su ingreso **en cervezas**. Encuentre el óptimo del consumidor y desarrolle los casos según el valor de  $k$ .

## Lab 2