Introducción a Método de Elementos Finitos

Finite Element Method (FEM)

(S)cientific (C)omputing (T)eam II-2014
ILI-286 DI-UTFSM Chile

10 de octubre de 2014

Contenido

Otro método para resolver Elliptic PDE (Partial Differential Equations) y más

FEM

En esta primera revisión[a] de FEM se entregará una visión global del método, ventajas y desventajas. La principal razón de discutir FEM es que es un método muy popular en la Ingeniería. FEM esta conectado con términos como *variational formulation*, *weak formulation* y *Galerkin formulation*.

[a] ¡Habrán otras en cursos superiores!

The Greatest Trick in 1D!

1. $\displaystyle\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

P Considere $F(x) = u(x)v(x)$, ¿Qué obtiene?

S $\displaystyle\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

P Por favor expanda el lado izquierdo de la ecuación.

S $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

P Ahora mueva el primer término del lado izquierdo al lado derecho.

S $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

2. $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$

The Greatest Trick in 2D and more! — Gauss' Formulas [Salsa, PDE in Action]

- Ω es un dominio acotado y suave.
- $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a $\partial\Omega$
- $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales de clase $C^1(\bar{\Omega})$
- ϕ y ξ son funciones reales de clase $C^1(\bar{\Omega})$
- dA es un elemento de área en $\partial\Omega$.

The Greatest Trick in 2D and more! — Gauss' Formulas [Salsa, PDE in Action]

1. $\displaystyle\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dA$ (Divergence Theorem)
2. $\displaystyle\int_\Omega \Delta\phi\,d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\,dA = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}\,dA$
3. $\displaystyle\int_\Omega \phi\nabla\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}\phi\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,dA - \int_\Omega \nabla\phi\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x}$
   (Integration by parts!)
4. $\displaystyle\int_\Omega \phi\,\Delta\xi\,d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}\phi\partial_{\mathbf{n}}\xi\,dA - \int_\Omega \nabla\phi\cdot\nabla\xi\,d\mathbf{x}$
   (Green's first identity)
5. $\displaystyle\int_\Omega (\phi\,\Delta\xi - \xi\,\Delta\phi)\,d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega}(\phi\partial_{\mathbf{n}}\xi - \xi\partial_{\mathbf{n}}\phi)\,dA$
   (Green's second identity)

Espacio de funciones cuadrado integrables

$L^2[a, b]$

El espacio infinito dimensional de funciones $L^2[a, b]$ se define como:

$$L^2[a, b] = \left\{ \text{funciones } y(x) \text{ en } [a, b] \,\middle|\, \int_a^b y(x)^2 dx < \infty \right\}$$

El cual tiene asociado el siguiente *producto interno* (Inner Product):

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)\, y_2(x) dx$$

Inner Product

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1(x)\, y_2(x) dx$$

Con las siguientes propiedades usuales:

1. $\langle y_1, y_1 \rangle \geq 0$
2. $\langle \alpha y_1 + \beta y_2, z \rangle = \alpha \langle y_1, z \rangle + \beta \langle y_2, z \rangle$, para escalares α y β
3. $\langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_2, y_1 \rangle$

Dos funciones y_1 y y_2 son ortogonales en $L^2[a, b]$ si $\langle y_1, y_2 \rangle = 0$.

Integrando

ODE $$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\,\frac{du(x)}{dx}\right)+r(x)u(x)=f(x)$$

con $u(0)=u(1)=0$ en $0<x<1$.

- Ahora usaremos The Greatest Trick in 1D!
  $$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\,\frac{du(x)}{dx}\right)v(x)+r(x)u(x)v(x)=f(x)v(x)$$
- Integrando
  $$\int_0^1-\frac{d}{dx}\left(a(x)\,\frac{du(x)}{dx}\right)v(x)+r(x)u(x)v(x)dx=\dots$$
  $$\dots\int_0^1 f(x)v(x)dx$$
- Integrando por partes el primer término
  $$\int_0^1-\frac{d}{dx}\left(a(x)\,\frac{du(x)}{dx}\right)v(x)dx=\dots$$
  ver siguiente diapositiva!

Seguimos Integrando

$$\int_0^1 -\frac{d}{dx}\left(a(x)\,\frac{du(x)}{dx}\right) v(x)dx = \ldots$$

$$-a(x)\,\frac{du(x)}{dx}v(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 a(x)\,\frac{du(x)}{dx}v'(x)dx$$

- ¿Qué hacemos con $a(x)\,\dfrac{du(x)}{dx}v(x)$?
- Eliminemoslo ¿Cómo?
- Correcto, $v(0) = v(1) = 0$. Entonces
$$\int_0^1 -\frac{d}{dx}\left(a(x)\,\frac{du(x)}{dx}\right) v(x)dx = \int_0^1 a(x)\,\frac{du(x)}{dx}v'(x)dx$$
- ¿Se entiende la razón de agregar un $-$ (menos) delante del primer término de la ecuación diferencial?
- Entonces la formulación variacional es:

$$\int_0^1 a(x)\,\frac{du(x)}{dx}v'(x)dx + \int_0^1 r(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Formulación clásica y formulación débil

- $-\dfrac{d}{dx}\left(a(x)\,\dfrac{du(x)}{dx}\right) + r(x)u(x) = f(x)$
  con $u(0) = u(1) = 0$ en $0 < x < 1$.
- $$\int_0^1 a(x)\,\frac{du(x)}{dx}v'(x)dx + \int_0^1 r(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$
- ¿Qué se ha ganado y perdido con la formulación débil?
  Ganado: Bajar los requerimientos de derivadas en $u(x)$.
  Perdido: El sentido clásico.
- ¿Que le paso a las condiciones de borde en la formulación débil?
  Se incluyen en el espacio de funciones a utilizar.

$L^2[0,1]$(En realidad $H_0^1([0,1])$)

- Sea $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_{n+1}(x)$ una base finita del espacio infinito dimensional $L^2[0,1]$.
- La idea: $u(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i\, \phi_i(x)$. Ver imagen.
- Y $v(x) = \phi_k(x)$, para $k = 1 : n$
- $$\underbrace{\int_0^1 a(x)\, \frac{du(x)}{dx} v'(x)dx}_{(a)} + \underbrace{\int_0^1 r(x)u(x)v(x)dx}_{b} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)dx}_{(c)}$$

(a)

(b) $$\int_0^1 a(x)\, \frac{d}{dx} \left(\sum_{i=0}^{n+1} c_i\, \phi_i(x) \right) \phi_k'(x)dx = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \int_0^1 a(x)\; \phi_i'(x)\phi_k'(x)$$

$$\int_0^1 r(x) \left(\sum_{i=0}^{n+1} c_i\, \phi_i(x) \right) \phi_k(x)dx = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \int_0^1 r(x)\phi_i(x)\phi_k(x)dx$$

(c) $$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx$$

¿Cómo se obtienen las integrales?

- $\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{if } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{if } x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- $\displaystyle\int_0^1 \phi_i(x)\phi_{i+1}(x)dx = \frac{\Delta x}{6}$
- $\displaystyle\int_0^1 (\phi_i(x))^2 dx = \frac{2\Delta x}{3}$
- $\displaystyle\int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)dx = -\frac{1}{\Delta x}$
- $\displaystyle\int_0^1 (\phi_i'(x))^2 dx = \frac{2}{\Delta x}$

A really fast introduction to FEM in 2D

PDE $-\Delta u(x,y) + r(x,y)u(x,y) = f(x,y)$ en Ω
con $u(\partial\Omega) = 0$.

- $L^2[a,b] = \left\{ \text{funciones}\, u(x,y)\, \text{en}\, \Omega \,\middle|\, \int_\Omega u(x,y)^2 dA < \infty \right\}$

  Ahora usaremos The Greatest Trick in 2D!

- Multiplicando por una test function e Integrando

$$\int_\Omega -\Delta u\, v\, dA + \int_\Omega r\, u\, v\, dA = \int_\Omega f\, v\, dA$$

- Integrando por *partes* el primer término (Green's first identity!)

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dA - \int_{\partial\Omega} v \partial_{\mathbf{n}} u\, dS + \int_\Omega r\, u\, v\, dA = \int_\Omega f\, v\, dA$$

Resumiendo

- $\int_\Omega -\Delta u\, v\, dA + \int_\Omega r\, u\, v\, dA = \int_\Omega f\, v\, dA$
- $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dA - \int_{\partial\Omega} v \partial_{\mathbf{n}} u\, dS + \int_\Omega r\, u\, v\, dA = \int_\Omega f\, v\, dA$
Las 2 ecuaciones integrales anteriores son iguales.
- Nuevamente, ¿Qué hacemos con $\int_{\partial\Omega} v \partial_{\mathbf{n}} u\, dS$?
- Lo hacemos desaparecer definiendo $v(\partial\Omega) = 0$. ¡Otra cosa sería si tuviéramos $\partial_{\mathbf{n}} u$!
- Entonces:
- $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dA + \int_\Omega r\, u\, v\, dA = \int_\Omega f\, v\, dA$

FEM en 2D

- $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dA + \int_\Omega r\, u\, v \, dA = \int_\Omega f\, v\, dA$
- $u(x,y) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \,\phi_i(x,y)$
- $v(x,y) = \phi_k(x,y)$ para $k = 1 : n$
- El procedimiento es el mismo al anterior pero ¡Lo que cambia son las integrales!
- $\int_\Omega \phi_i(x,y)\phi_{i+1}(x,y) dA = ?$
- $\int_\Omega (\phi_i(x,y))^2 dA = ?$
- $\int_\Omega \nabla\phi_i(x,y) \cdot \nabla\phi_j(x,y) dA = ?$
- $\int_\Omega \|\nabla\phi_i'(x)\|^2 dA = ?$
- Ver sketch

Preguntas

- Determine explicitamente el sistema de ecuaciones lineales para $y''(x) = y + f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$.
- Obtenga una fila del sistema de ecuaciones lineales en 2D para el problema mencionado anteriormente. Deje expresado las integrales que no puede calcular, ¡pero asegúrese de que sea lineal con respecto a las incógnitas!
- Realice un sketch de un mallado en un dominio circular. ?' Qué puede decir de las condiciones de borde?
- Si se diera como data $\partial_{\mathbf{n}} u = g(\cdot)$ en $\partial\Omega$. ¿Cómo se modifica la matriz?
- ¿Qué ocurriría si la frontera de dividiera en 2 partes, donde en la primera se entregara Dirichlet data (nula por simplicidad) y la otra Neumann data?