Hyperbolic PDEs

Método de Diferencias Finitas

(S)cientific (C)omputing (T)eam II-2014
ILI-286 DI-UTFSM Chile

6 de noviembre de 2014

Contenido

Hyperbolic PDE

Hyperbolic PDE

Llamaremos a una EDP hiperbólica cuando tiene la forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

y se cumple $B^2 - 4AC > 0$.
O bien, teniendo una forma más general, es posible reducirla a una caso equivalente al anterior.

Hyperbolic PDE

Características de EDP hiperbólicas:

- Se asocian con una evolución en el tiempo.
- Su evolución, en general, se asocian a ondas que se mueven.

Hyperbolic PDE

Formulación General de Ecuación de Ondas (en realidad una versión simplificada)

Sea $t \in [0, T_{max}]$ y $x \in [a, b]$.
¿Qué función $u(x, t)$ es solución de la siguiente EDP?

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t) \\
u(x, 0) &= f(x) \\
u_t(x, 0) &= g(x) \\
u(a, t) &= l(t) \\
u(b, t) &= r(t)
\end{aligned}$$

Hyperbolic PDE

Ejemplo típico de ecuaciones hiperbólicas

Ver otra pantalla.
El problema a resolver es:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) + c\,u_x(x,t) &= 0 \\
u(x,0) &= f(x)
\end{aligned}
$$

a es una constante positiva o negativa.

Diferencias Finitas

Diferencias Finitas

La idea central del método de Diferencias Finitas consiste en utilizar una grilla de valores discretos para las variables independientes (x y t). El problema continuo se reemplaza por un problema finito consistente en un número finito de equaciones involucrando los valores de *una aproximación* de la incógnita u (denotada por w_{ij}, w_{in} o w_{ik}).

Diferencias Finitas

Ya hemos visto que es posible utilizar diversas aproximaciones para reeemplazar la evaluación de la derivada.

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O\left(\Delta x^1\right) \\
&= \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O\left(\Delta x^1\right) \\
&= \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^2\right) \\
\frac{d^2 f}{dx^2}(x) &= \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)
\end{aligned}
$$

Diferencias Finitas

En el caso de la ecuación hiperbólica de ondas $u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$, aplicaremos para la derivada espacial

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

y la derivada temporal:

$$u_{tt}(x,t) = \frac{u(x, t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x, t-\Delta t)}{\Delta t^2} + O\left(\Delta t^2\right)$$

Diferencias Finitas para EDP Hiperbólicas

Aplicación

¿Como se aplica el método de diferencias finitas en nuestra EDP hiperbólica?

Diferencias Finitas para EDP Hiperbólicas

Discretizando $[a, b]$ de manera regular en $N_x + 1$ puntos, de manera que $\Delta x = \frac{b-a}{N_x}$ y se tiene

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\Delta x, i \in \{0, 1, 2, ..., N_x\}$$

También necesitamos definir una discretización para el intervalo $[0, T_{max}]$ de la variable temporal, $\Delta t = \frac{T_{max}}{N_t}$, de modo que

$$t_j = j\Delta t, j \in \{0, 1, 2, ..., N_t\}$$

Diferencias Finitas para EDP Hiperbólicas

No buscaremos resolver la ecuación en todos los puntos, sino únicamente en los puntos de nuestra discretización. Esto es, sólo nos interesan los valores:

$$w_{i,n} \approx u(x_i, t_n) \quad \begin{array}{l} i \in \{0, 1, 2, ..., N_x\}, \\ n \in \{0, 1, 2, ..., N_t\} \end{array}$$

Existen por tanto $(N_x + 1) \times (N_t + 1)$ incógnitas que debemos encontrar.

Diferencias Finitas para EDP Hiperbólicas

A diferencia de las ecuaciones elípticas, no resolveremos para todas las incógnitas simultáneramente, sino que haremos "evolucionar" la solución.

$$
\begin{array}{rl}
w_{0,0}, w_{1,0}, w_{2,0}, .., w_{N_x,0} & (t = t_0) \\
w_{0,1}, w_{1,1}, w_{2,1}, .., w_{N_x,1} & (t = t_1 = t_0 + \Delta t) \\
w_{0,2}, w_{1,2}, w_{2,2}, .., w_{N_x,2} & (t = t_2 = t_1 + \Delta t) \\
w_{0,3}, w_{1,3}, w_{2,3}, .., w_{N_x,3} & (t = t_3 = t_2 + \Delta t) \\
 & \vdots \\
w_{0,N_t}, w_{1,N_t}, w_{2,N_t}, .., w_{N_x,N_t} & (t = t_{N_t})
\end{array}
$$

Esquema Explícito

Tomando la aproximación de la segunda derivada temporal:

$$u_{tt}(x,t) = \frac{u(x,t+\Delta t) - 2u(x,t) + u(x,t-\Delta t)}{\Delta t^2} + O\left(\Delta t^2\right)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

o utilizando la variable w_{in}

$$u_{tt}(x,t) = \frac{w_{i,n+1} - 2w_{i,n} + w_{i,n-1}}{\Delta t^2} + O\left(\Delta t^2\right)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n}}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

El esquema numérico

$$\frac{w_{i,n+1} - 2w_{i,n} + w_{i,n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n}}{\Delta x^2} \right)$$

puede reescribirse, $\sigma = \dfrac{c\Delta t}{\Delta x}$ (¡Este σ es diferente al utilizado en la ecuación de calor!), como

$$w_{i,n+1} = \sigma^2 w_{i+1,n} + (2 - 2\sigma^2) w_{i,n} + \sigma^2 w_{i-1,n} - w_{i,n-1}$$

Pero tenemos un problema... ¿Como se inicia el método para mantener el segundo orden de la aproximacón? ¡ver sketch de stencil!

- Problema: $u_t(x,0) = g(x)$
- Solución: $u_t(x,0) = \dfrac{w_{i,1} - w_{i,-1}}{2\Delta t} = g(x_i)$
- ¿Qué significa $w_{i,-1}$?
- Entonces: $w_{i,-1} = w_{i,1} - 2\Delta t\, g(x_i)$.
- ¿Cómo se utiliza?
- Considere $n = 0$:
  $w_{i,1} = \sigma^2 w_{i+1,0} + (2 - 2\sigma^2) w_{i,0} + \sigma^2 w_{i-1,0} - w_{i,-1}$
- ¿Cómo obtenemos $w_{i,-1}$?
- Reemplazando:
  $w_{i,1} = \sigma^2 w_{i+1,0} + (2 - 2\sigma^2) w_{i,0} + \sigma^2 w_{i-1,0} - (w_{i,1} - 2\Delta t\, g(x_i))$
- Despejando $w_{i,1}$, se encuentra:
  $w_{i,1} = \frac{\sigma^2}{2} w_{i+1,0} + (1 - \sigma^2) w_{i,0} + \frac{\sigma^2}{2} w_{i-1,0} + \Delta t\, g(x_i)$

Agregando notación vectorial:

$$\vec{w}_0 = \begin{bmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ \vdots \\ w_{N_x-1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_x-1}) \end{bmatrix},$$

antes de continuar, definamos la matriz tridiagonal A:

$$A = \begin{bmatrix} 2-2\sigma^2 & \sigma & 0 & \dots & 0 \\ \sigma^2 & 2-2\sigma^2 & \sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma^2 & 2-2\sigma^2 \end{bmatrix}$$

Diferencias Finitas para EDP Hiperbólicas

Esquema Explícito

El esquema numérico explícito para el primer paso es:

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{2} A \vec{w}_0 + \Delta t \begin{bmatrix} g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_{N_x-1}) \end{bmatrix} + \frac{\sigma^2}{2} \begin{bmatrix} w_{00} = l(t_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{N_x-1,0} = r(t_0) \end{bmatrix},$$

y para los subsiguientes pasos:

$$\vec{w}_{n+1} = A\,\vec{w}_n - \ \vec{w}_{n-1} + \sigma^2 \begin{bmatrix} l(t_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r(t_n) \end{bmatrix},$$

Ventajas

- Simple de programar.
- Bajo costo computacional.

Desventajas

- Método explícito requiere que $\dfrac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ para ser estable (CFL condition). **Ver SKETCH**
- Discretización temporal está condicionado a la discretización temporal.
- Error de aproximación: $O\left(\Delta t^2\right) + O\left(\Delta x^2\right)$

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

Preguntas

- ¿Qué tan bien funcionan los métodos? ¿Se puede tomar cualquier combinación de Δt y Δx?
- ¿Cómo se pueden implemetar de manera eficiente los métodos descritos?
- ¿Cómo se extienden los métodos para la ecuación de ondas en 2 dimensiones, $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$?
- ¿Cómo se podrían implementar otras condiciones de frontera (Neumann, Robin, Periodic)?
- ¿Qué pasaría si se trabajara en coordenadas cilíndricas o esféricas?
- ¿Cómo se podría aplicar el método de elementos finitos a la ecuación de ondas?

FIN