

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Introducción y Estabilidad

(S)cientific (C)omputing (T)eam II-2014
ILI-286 DI-UTFSM Chile

8 de septiembre de 2014

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Notación y más
- 3 Sistema de ODE
- 4 Métodos avanzados para ODE

Introducción

Definición

Ecuación Diferencial Ordinaria:^a:

Es una ecuación diferencial en donde la incognita es una función de una variable, generalmente $y(t)$ o $y(x)$.

^aOrdinary Differential Equation, ODE

- S ¿Por qué queremos hacer esto?
- P Porque queremos ver o reconstruir la función incognita
- S Ahh, ¿Y de que sirve eso?
- P Sirve para responder preguntas formuladas en la forma de un modelo Matemático
- S ¿Pero eso es complicado y tiene pocas aplicaciones?
- P No es simple, pero lo entenderemos en este curso! Y sí, tiene muchas aplicaciones! Pero tendremos tiempo de ver sólo algunas.

Problema de Valor Inicial

Initial Value Problem, IVP

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$$

$$y(0) = y_0$$

$$t \in [0, T]$$

Problema de Valor de Frontera

Boundary value Problem, BVP

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0$$

$$y(0) = y_0$$

$$y(1) = y_1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Initial Boundary Value Problem, IBVP

IVP

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, T]$$

+

BVP

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1, \quad 0 \leq x \leq 1$$

=

IBVP, la incognita en este caso es: $u(x, t)$

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

$$u(0, t) = g_1(t) \quad (2)$$

$$u(1, t) = g_2(t) \quad (3)$$

$$u(x, 0) = w(x) \quad (4)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

Introducción

Notación

$$\frac{d y(t)}{dt} = \frac{d y}{dt} = \dot{y}$$

Sistemas No-Autonomos versus Autonomos

- Sistema No-Autonomo: $\dot{y} = f(t, y)$
- Sistema Autonomo: $\dot{y} = f(y)$

Introducción

Ejemplo de Sistema No-Autonomo

- $\dot{y} = t y + t^3, \quad y(0) = 1$
- Solución: $y(t) = 3 \exp(t^2/2) - t^2 - 2$

Ejemplo de Sistema Autonomo

- $\dot{y} = c y (1 - y), \quad y(0) = y_0$
- Solución: $y(t) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{y_0}{1-y_0} \exp(c t)}$

Primer Método Numérico para ODEs

S ¿Y siempre podemos encontrar la solución exacta?

P No

S ¡!!!!!!¿Y que podemos hacer entonces?!!!!!!!

P Bueno, lo que podemos hacer es reconstruir la función $y(t)$ numéricamente

S Pero no se como hacer eso...

P ¿Estás seguro?

S veamos la siguiente diapositiva mejor...

P OK

Primer Método Numérico para ODEs

P Recuerde que tenemos $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ y $y(0) = y_0$, donde y_0 es conocido.

S OK

P Entonces, dado que conocemos $y(0)$, alguna idea de como encontrar $y(t_1)$, i.e. $y(t)$ en el tiempo t_1 .

S No

P ¿Y que tal si integramos ambos lados de la ecuación entre 0 y t_1 ?

S OK, ¿Cómo se hace eso?

P

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} \dot{y}(s) ds &= \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds \\ y(t_1) - y(0) &= \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds \\ y(t_1) &= y(0) + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds\end{aligned}$$

Primer Método Numérico para ODEs

P

$$\int_0^{t_1} \dot{y}(s) ds = \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds$$

$$y(t_1) - y(0) = \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds$$

$$y(t_1) = y(0) + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds$$

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds$$

- S OK, ahora veo que se despejo lo que se quiere encontrar en el lado derecho y conocemos el primer término del lado derecho.
- P ¡Excelente! Nótese que hasta este punto no se ha realizado ninguna aproximación. ¿Que paso puede venir ahora?
- S Me imagino que una aproximación de la integral.
- P Se imagina bien. ¿Qué tipo de aproximación sugeriría?
- S Creo que algo me hablaron de Cuadratura Gaussiana, sugiero esa.

Primer Método Numérico para ODEs

P ¿Está seguro?

S Ahora no se.

P Veamos que ocurre si utilizamos Cuadratura Gaussiana:

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds$$
$$y(t_1) \approx y_0 + \sum_{i=1}^n w_i f(s_i, y(s_i))$$

¿Detecta algún problema?

S A ver, los w_i son conocidos, los s_i son los ceros del polinomio de Legendre de orden n (después de aplicar el cambio de variable respectivo) y también conozco $f(t, y)$ dado que la descripción del problema lo entrega. No veo ningún problem. ¡Sigamos adelante!

P Wait wait. Casi todo lo que usted menciona está correcto, sin embargo hay algo que usted no conoce.

S Profesor, creo que usted esta equivocado.

P Puede ser, veamos. Por simplicidad, usemos la Cuadratura Gaussiana más pequeña, i.e. midpoint rule.

Primer Método Numérico para ODEs

P Entonces la integral se aproxima de la siguiente forma:

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds$$

$$y(t_1) \approx y_0 + (t_1 - 0) f\left(\frac{t_1 + 0}{2}, y\left(\frac{t_1 + 0}{2}\right)\right)$$

$$y(t_1) \approx y_0 + t_1 f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right)$$

S Pero, ¿Cuál es el problema?

P El problema es que sólo conocemos $y(0)$, t_1 y $f(t, y)$ y no conocemos $y(t_1/2)$.

S Ah, ahora entiendo.

P ¿Que sugiere ahora?

S Lo único que conocemos es $y(0)$, usemos eso entonces.

P ¡Excelente!, veamos que ocurre.

Primer Método Numérico para ODEs

P Reemplazando, obtenemos:

$$y(t_1) = y_0 + \int_0^{t_1} f(s, y(s)) ds$$

$$y(t_1) \approx y_0 + t_1 f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right)$$

$$y(t_1) \approx y_0 + t_1 f(0, y(0))$$

S ¿Y qué significa eso? Dado que nosotros realizamos la derivación con el punto medio.

P Buen punto, en realidad al hacer esa modificanci3n lo que realmente estamos haciendo es utilizar el punto *izquierdo* de la integral para aproximar la integral y no el punto medio.

S Ah, ahora s3.

P En resumen y considerando que estamos *avanzando* en forma general desde el tiempo t_i al tiempo t_{i+1} :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, y(t_i))$$

Primer Método Numérico para ODEs

- P En resumen y considerando que estamos *avanzando* en forma general desde el tiempo t_i al tiempo t_{i+1} :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, y(t_i))$$

- S ¿Eso significa que obtenemos el valor exacto en el tiempo $y(t_{i+1})$?

- P Buen punto, la respuesta es **no**.

- S Entonces, ¿Qué es lo que obtenemos?

- P Lo que se obtiene es lo que llamamos una aproximación numérica. La notación que usaremos es la siguiente:

Método de Euler

- $y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$
- Donde: $h = t_{i+1} - t_i$ y y_0 = Dato Inicial.

Ejemplo usando el método de Euler

Utilizando la ODE No-Autonoma

- $\dot{y} = t y + t^3, \quad y(0) = 1$
- Solución: $y(t) = 3 \exp(t^2/2) - t^2 - 2$

Solución numérica obtenida:

i	t_i	$y(t_i)$	y_i	$e_i = y(t_i) - y_i $
0	0	1	1	0
1	0.2000	1.0206	1.0000	0.0206
2	0.4000	1.0899	1.0416	0.0483
3	0.6000	1.2317	1.1377	0.0939
4	0.8000	1.4914	1.3175	0.1739
5	1.0000	1.9462	1.6306	0.3155

Orden del método

El método de Euler es de primer orden, i.e. $\mathcal{O}(h)$.

Un poco de teoría

Definición

Una función $f(t, y)$ es *Lipschitz continua* en la variable y en el rectángulo $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ si existe una constante L (llamada la *constante de Lipschitz*) que satisface:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

para cada (t, y_1) y (t, y_2) en S .

Orden de un método

Asuma que $f(t, y)$ tiene una constante de Lipschitz L para la variable y y el valor $y(t_1)$ de la solución del problema de valor inicial $\dot{y} = f(t, y)$, $y(0) = y_0$ en $t = [0, T]$, en el tiempo t_1 y es aproximada por y_1 por un paso de un ODE solver con error local de truncamiento $e_1 \leq C h^{k+1}$, para una constante C y $k \geq 1$. Entonces, para cada $a < t_i < b$, el solver tiene error de truncamiento:

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{C h^k}{L} (\exp(L(t_i - a)) - 1))$$

Finalmente si un ODE solver satisface la ecuación previa, se le llama de orden k .

Convergencia del método de Euler - un paso

- Considere que se aplica un paso del método de Euler para $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_i) = y_i$.
- Esto significa $y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$.
- Ahora considere el valor exacto en el tiempo $y(t_{i+1})$.
- ¿Cómo se obtiene eso?
- ¡Fácil!, $y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + \dot{y}(t_i) h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2}$.
- Ahora utilizando la ecuación original en el tiempo t_i obtenemos $\dot{y}(t_i) = f(t_i, y(t_i))$. Reemplazando en la expansión anterior:
$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i)) h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2}$$
- Considerando que este es un análisis de un paso, i.e. $y(t_i) = y_i$, finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) - y_{i+1} &= y(t_i) + f(t_i, y(t_i)) h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2} - y_i - h f(t_i, y_i) \\ &= y(t_i) - y_i + f(t_i, y(t_i)) h - f(t_i, y_i) h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2} \\ &= \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

- Por lo tanto, el método es de **primer** orden.

Convergencia del método de Euler - general

- Considere que se aplica un paso del método de Euler para $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_i) = y_i$.
- Esto significa: $y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$.
- Omitiendo pasos repetidos: $y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + \dot{y}(t_i) h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2}$.
- Ahora utilizando la ecuación original en el tiempo t_i obtenemos $\dot{y}(t_i) = f(t_i, y(t_i))$. Reemplazando en la expansión anterior:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i)) h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2}$$

- Calculando la diferencia, obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) - y_{i+1} &= y(t_i) + f(t_i, y(t_i)) h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2} - y_i - h f(t_i, y_i) \\ &= y(t_i) - y_i + (f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)) h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

- En este caso utilizamos la propiedad que $f(t, y)$ es Lipschitz:
 $|f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)| \leq L |y(t_i) - y_i|$. Reemplazando,

$$|y(t_{i+1}) - y_{i+1}| \leq |y(t_i) - y_i| + L |y(t_i) - y_i| h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2}$$

Convergencia del método de Euler - general

- En este caso utilizamos la propiedad que $f(t, y)$ es Lipschitz:
 $|f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)| \leq L |y(t_i) - y_i|$. Reemplazando,

$$|y(t_{i+1}) - y_{i+1}| \leq |y(t_i) - y_i| + L |y(t_i) - y_i| h + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2}$$

$$|y(t_{i+1}) - y_{i+1}| \leq (1 + L h) |y(t_i) - y_i| + \ddot{y}(c) \frac{h^2}{2}$$

- (Omitiendo pasos) Obtenemos:

$$|y(t_{i+1}) - y_{i+1}| \leq \frac{C h}{L} (\exp(L t_i) - 1) = \mathcal{O}(h)$$

- Por lo tanto, nuevamente concluimos que el método es de **primer** orden.

Un poco más de teoría

Linear Stability Analysis

Considere el siguiente problema: $\dot{y} = \lambda y$, $y(0) = 1$. Donde la solución viene dada por: $y(t) = \exp(\lambda t)$.

P Apliquemos el método de Euler a este problema:

$$y_{i+1} = y_i + \lambda h y_i$$

$$y_{i+1} = (1 + \lambda h) y_i$$

$$y_{i+1} = (1 + \lambda h)^{i+1} y_0$$

Considerando que $\Re(\lambda) < 0$ y $h > 0$, ¿Que condición debe ocurrir para que la aproximación numérica reproduzca el comportamiento original de la solución exacta del problema?

S Analicemos, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, entonces la solución numérica debe decaer a medida que i aumenta. Por lo tanto necesitamos $|1 + \lambda h| < 1$.

P ¡Excelente!

S ¿Qué significa esto?

P Dado que $\lambda \in \mathbb{C}$, considere $\lambda h = x + i y$, donde $i = \sqrt{-1}$.

Un poco más de teoría

- P Dado que $\lambda \in \mathcal{C}$, considere $\lambda h = x + i y$, donde $i = \sqrt{-1}$.
Reemplazando, obtenemos:

$$\begin{aligned} |1 + \lambda h| &= |1 + x + i y| \\ &= |(1 + x) + i y| \\ &= \sqrt{(1 + x)^2 + y^2} < 1 \end{aligned}$$

Realizando un sketch...el sketch es un círculo unitario centrado en $(-1, 0)$ del plano complejo y su región de estabilidad esta dentro del círculo.

- S Ah, ¿Y que significa eso?
- P Para $\lambda \in \mathcal{R}$ y $\lambda < 1$, significa que tenemos solo un conjunto de h que podemos usar y que cumplan con $|1 + \lambda h| < 1$.
- S ¿Cuales son?
- P En este caso se necesita que $-2 < \lambda h < 0$, o $0 < h < \frac{-2}{\lambda}$.
- S Interesante, esto quiere decir que λ restringe el h que uno puede utilizar y que uno no puede definir h a priori.
- P ¡Correcto!

Ahora empieza algo incluso más interesante

P Considere el problema:

$$\dot{y}_1 = 2y_1 + y_2$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + 3y_2$$

S Uff, ¿Y que hacemos ahora?

P Lo mismo..., considere la siguiente representación matricial.

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

o mejor $\dot{\vec{y}}(t) = \vec{F}(t, \vec{y})$

S ¿Qué significa eso?

P Significa que ahora la función $y(t)$ se convierte en el vector $\vec{y}(t)$ que cambia en el tiempo.

S ¿Y cómo se usaría el método de Euler en ese caso?

P Igual que antes, pero se hace el algebra con vectores:

$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h \vec{F}(t_i, \vec{y}_i)$. Donde h sigue significando que el paso en el tiempo y sigue siendo un escalar.

Métodos avanzados para ODE

Para todos los métodos indicados, se considera una condición inicial $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ dada.

Backward Euler

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h \vec{F}(t_i, \vec{y}_{i+1})$$

¡Donde tenemos que resolver para \vec{y}_{i+1} en cada iteración!

Midpoint rule — Runge-Kutta de segundo orden

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{y}_i + \frac{h}{2} \vec{F}(t_i, \vec{y}_i) \\ \vec{y}_{i+1} &= \vec{y}_i + h \vec{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \vec{k}_1\right)\end{aligned}$$

¡Esto es lo que dijimos anteriormente que no se podía hacer!, i.e. $y(t_1) \approx y_0 + t_1 f\left(\frac{t_1}{2}, y\left(\frac{t_1}{2}\right)\right)$. La aproximación utilizada en este caso fue estimar $y\left(\frac{t_1}{2}\right)$ con el método de Euler tradicional (también conocido como Forward Euler).

Métodos avanzados para ODE

Para todos los métodos indicados, se considera una condición inicial $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ dada.

¡Runge-Kutta de cuarto orden!, más conocido como RK4

$$\vec{k}_1 = \vec{F}(t_i, \vec{y}_i)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \vec{y}_i + \frac{h}{2}\vec{k}_1\right)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \vec{y}_i + \frac{h}{2}\vec{k}_2\right)$$

$$\vec{k}_4 = \vec{F}(t_i + h, \vec{y}_i + h\vec{k}_3)$$

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{h}{6} \left(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4 \right)$$

RK4 es uno de los métodos más populares existentes. Recuerde que cuarto orden significa $e_i = \mathcal{O}(h^4)$, i.e. si el h disminuye a la mitad el error disminuye 16 veces!!

Algunas preguntas para discutir en clases

- ¿Que es un estado estacionario de un sistema dinámico?
- ¿Podemos usar h dinámico el resolver numéricamente?
- ¿Cómo encuentro aproximaciones numéricas de los sistemas dinámicos de la diapositiva 8?
- ¿Cómo se aplica la teoría de estabilidad lineal a sistemas de ODE?
¿Que es λ es ese caso?
- ¿Cuál es la región de estabilidad de Backward Euler?
- ¿Cuál es la región de estabilidad de RK4?
- ¿Como utilizo Backward Euler?
- ¿Como utilizo RK4?
- ...