EDP Parabólica

Método de Diferencias Finitas

(S)cientific (C)omputing (T)eam II-2014
ILI-286 DI-UTFSM Chile

26 de octubre de 2014

Contenido

EDP Parabólica

EDP Parabólica

Llamaremos a una EDP parabólica cuando tiene la forma

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$$

y se cumple $B^2 - 4AC = 0$.
O bien, teniendo una forma más general, es posible reducirla a una caso equivalente al anterior.

EDP Parabólica

Ejemplos de EDP parabólicas:

- Ecuación de Difusión

$$Au_{xx}(x,y) - u_y(x,y) = 0$$

- Ecuación de Advección-Difusión

$$Au_{xx}(x,y) - u_y(x,y) + bu_x(x,y) = 0$$

Claramente $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, las EDP son parabólicas.

EDP Parabólica

Características de EDP parabólicas:

- Se asocian con una evolución en el tiempo, además de cambios en el espacio.
- En general las soluciones son disipativas, es decir, los valores máximos disminuyen en el tiempo.

EDP Parabólica

Reescribiendo los ejemplos de EDP parabólicas en la notación tradicional:

- Ecuación de Difusión

$$u_t(x,t) = Du_{xx}(x,t)$$

- Ecuación de Advección-Difusión

$$u_t(x,y) = Du_{xx}(x,t) + bu_x(x,t)$$

$D > 0$ es llamado coeficiente de difusividad, y tiene unidades en $[m^2/s]$.

Sea $t \in [0, T_{max}]$ y $x \in [a, b]$.
¿Qué función $u(x, t)$ es solución de la siguiente EDP?

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= Du_{xx}(x,t) \\
u(x,0) &= f(x) \\
u(a,t) &= l(t) \\
u(b,t) &= r(t)
\end{aligned}
$$

Diferencias Finitas

Diferencias Finitas

La idea central del método de Diferencias Finitas consiste en utilizar una grilla de valores discretos para las variables independientes (x y t). El problema continuo se reemplaza por un problema finito consistente en un número finito de equaciones involucrando los valores de la incógnita u.

Diferencias Finitas

Ya hemos visto que es posible utilizar diversas aproximaciones para reeemplazar la evaluación de la derivada.

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx}(x) &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O\left(\Delta x^{1}\right) \\
&= \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O\left(\Delta x^{1}\right) \\
&= \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O\left(\Delta x^{2}\right) \\
\frac{d^2 f}{dx^2}(x) &= \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^{2}\right)
\end{aligned}$$

Diferencias Finitas

En el caso de la ecuación parabólica de calor $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$, aplicaremos para la derivada espacial

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

Diferencias Finitas

Mientras que para la derivada temporal tenemos varias opciones:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + O\left(\Delta x^1\right) \\
&= \frac{u(x,t) - u(x,t-\Delta t)}{\Delta t} + O\left(\Delta x^1\right) \\
&= \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t} + O\left(\Delta x^2\right)
\end{aligned}
$$

Las combinaciones de aproximaciones para u_t y u_{xx} dan lugar a esquemas numéricos de distintas propiedades.

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

Aplicación

¿Como se aplica el método de diferencias finitas en nuestra EDP parabólica?

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

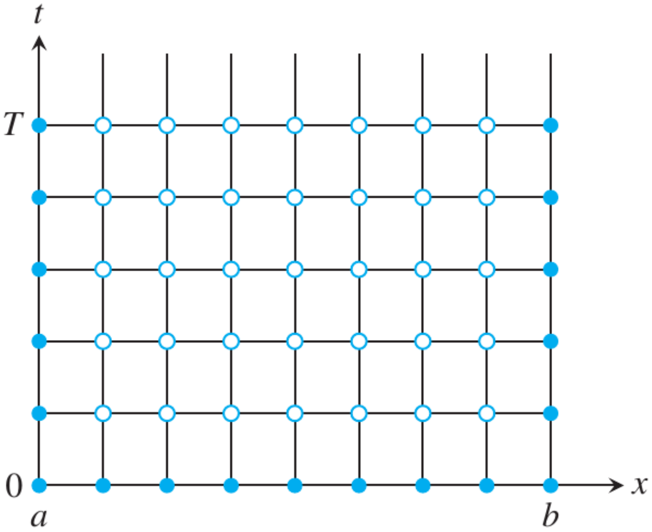
Discretizando $[a, b]$ de manera regular en $N_x + 1$ puntos, de manera que $\Delta x = \frac{b-a}{N_x}$ y se tiene

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\Delta x, i \in \{0, 1, 2, ..., N_x\}$$

También necesitamos definir una discretización para el intervalo $[0, T_{max}]$ de la variable temporal, $\Delta t = \frac{T_{max}}{N_t}$, de modo que

$$t_j = j\Delta t, j \in \{0, 1, 2, ..., N_t\}$$

Diferencias Finitas para EDP Parabólica



Diferencias Finitas para EDP Parabólica

No buscaremos resolver la ecuación en todos los puntos, sino únicamente en los puntos de nuestra discretización. Esto es, sólo nos interesan los valores:

$$\begin{aligned} w_{i,n} = u(x_i, t_n) \quad & i \in \{0, 1, 2, ..., N_x\}, \\ & n \in \{0, 1, 2, ..., N_t\} \end{aligned}$$

Existen por tanto $(N_x + 1) \times (N_t + 1)$ incógnitas que debemos encontrar.

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

A diferencia de las ecuaciones elípticas, no resolveremos para todas las incógnitas simultáneramente, sino que haremos "evolucionar" la solución.

$$
\begin{aligned}
w_{0,0}, w_{1,0}, w_{2,0}, .., w_{N_x,0} &\quad (t = t_0) \\
w_{0,1}, w_{1,1}, w_{2,1}, .., w_{N_x,1} &\quad (t = t_1 = t_0 + \Delta t) \\
w_{0,2}, w_{1,2}, w_{2,2}, .., w_{N_x,2} &\quad (t = t_2 = t_1 + \Delta t) \\
w_{0,3}, w_{1,3}, w_{2,3}, .., w_{N_x,3} &\quad (t = t_3 = t_2 + \Delta t) \\
&\vdots \\
w_{0,N_t}, w_{1,N_t}, w_{2,N_t}, .., w_{N_x,N_t} &\quad (t = t_{N_t})
\end{aligned}
$$

Esquema Explícito

Tomando la aproximación “adelantada” de la derivada temporal:

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + O\left(\Delta x^1\right)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

Keywords: Forward Difference Method, Explicit Euler Method, Forward Time and Centered Space, etc.

Se obtiene la siguiente aproximación

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} = D\frac{u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}$$

lo cual en nuestros puntos de discretización $(i\Delta x, n\Delta t)$ es

$$\frac{w_{i,n+1}-w_{i,n}}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta x^2}(w_{i+1,n}-2w_{i,n}+w_{i-1,n})$$

El esquema numérico

$$\frac{w_{i,n+1} - w_{i,n}}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta x^2}(w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n})$$

puede reescribirse, $\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$, como

$$\begin{aligned} w_{i,n+1} &= w_{i,n} + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n}) \\ &= \sigma w_{i+1,n} + (1 - 2\sigma)w_{i,n} + \sigma w_{i-1,n} \end{aligned}$$

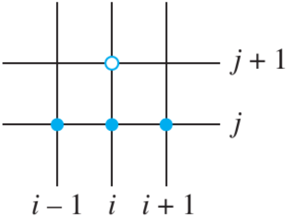
Diferencias Finitas para EDP Parabólica

Esquema Explícito

El esquema explícit para la ecuación de calor es:

$$
\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}
$$

$$
w_{i,n+1} = \sigma w_{i+1,n} + (1 - 2\sigma) w_{i,n} + \sigma w_{i-1,n}
$$



El esquema numérico explícito es por tanto:

$$\begin{bmatrix} w_{0,0} \\ w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ \vdots \\ w_{N_x,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_x}) \end{bmatrix},$$

y para $n \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} w_{0,n+1} \\ w_{1,n+1} \\ w_{2,n+1} \\ \vdots \\ w_{N_x,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 1-2\sigma & \sigma & \dots & 0 \\ 0 & \sigma & 1-2\sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{0,n} \\ w_{1,n} \\ w_{2,n} \\ \vdots \\ w_{N_x,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l(t_{n+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(t_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Ventajas

- Simple de programar.
- Bajo costo computacional.

Desventajas

- Método explícito requiere que $\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$ para ser estable.
- Discretización temporal está condicionado a la discretización temporal.
- Error de aproximación: $O\left(\Delta t\right) + O\left(\Delta x^2\right)$

Esquema Implícito

Tomando la aproximación "atrasada" de la derivada temporal:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \frac{u(x,t) - u(x,t-\Delta t)}{\Delta t} + O\left(\Delta x^{1}\right) \\
u_{xx}(x,t) &= \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^{2}\right)
\end{aligned}
$$

Keywords: Backwards Difference Method, Implicit Euler Method, Backward Time and Centered Space, etc.

Se obtiene la siguiente aproximación

$$\frac{u(x,t) - u(x,t-\Delta t)}{\Delta t} = D\frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}$$

lo cual en nuestros puntos de discretización $(i\Delta x, n\Delta t)$ requiere

$$\frac{w_{i,n} - w_{i,n-1}}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta x^2}(w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n})$$

El esquema numérico

$$\frac{w_{i,n} - w_{i,n-1}}{\Delta t} = \frac{D}{\Delta x^2}(w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n})$$

es

$$w_{i,n+1} - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(w_{i+1,n+1} - 2w_{i,n+1} + w_{i-1,n+1}) = w_{i,n}$$

y puede reescribirse, usando $\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$, como

$$-\sigma w_{i+1,n+1} + (1 + 2\sigma)w_{i,n+1} - \sigma w_{i-1,n+1} = w_{i,n}$$

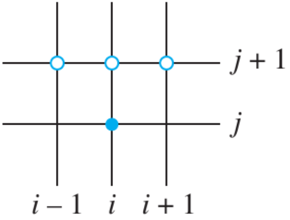
Diferencias Finitas para EDP Parabólica

Esquema Implícito

El esquema explícit para la ecuación de calor es:

$$\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$-\sigma w_{i+1,n+1} + (1+2\sigma) w_{i,n+1} - \sigma w_{i-1,n+1} = w_{i,n}$$



El esquema numérico implícito es por tanto:

$$\begin{bmatrix} w_{0,0} \\ w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ \vdots \\ w_{N_x,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_x}) \end{bmatrix},$$

y para $n \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma & 1+2\sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{0,n+1} \\ w_{1,n+1} \\ w_{2,n+1} \\ \vdots \\ w_{N_x,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{0,n} \\ w_{1,n} \\ w_{2,n} \\ \vdots \\ w_{N_x,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l(t_{n+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(t_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

Esquema Implícito

Ventajas

- Método implícito es incodicionalmente estable.
- Discretización temporal no está condicionado a la discretización temporal.

Desventajas

- Requiere resolver un sistema lineal en cada paso temporal.
- Error de aproximación: $O\left(\Delta t\right) + O\left(\Delta x^2\right)$.

Esquema Leap Frog

Tomando la aproximación de segundo orden de la derivada temporal:

$$u_t(x,t) = \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t} + O\left(\Delta x^2\right)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + O\left(\Delta x^2\right)$$

Keywords: Leap Frog Method.

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

Se obtiene la siguiente aproximación

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t-\Delta t)}{2\Delta t}=D\frac{u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}$$

lo cual en nuestros puntos de discretización $(i\Delta x, n\Delta t)$ requiere

$$\frac{w_{i,n+1}-w_{i,n-1}}{2\Delta t}=\frac{D}{\Delta x^2}(w_{i+1,n}-2w_{i,n}+w_{i-1,n})$$

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

El esquema numérico

$$\frac{w_{i,n+1} - w_{i,n-1}}{2\Delta t} = \frac{D}{\Delta x^2}(w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n})$$

puede reescribirse como

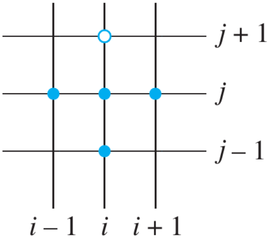
$$w_{i,n+1} = \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}(w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n}) + w_{i,n-1}$$

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

El esquema Leap Frog para la ecuación de calor es:

$$\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$w_{i,n+1} = 2\sigma w_{i+1,n} - 4\sigma w_{i,n} + 2\sigma w_{i-1,n} + w_{i,n-1}$$



Ventajas

- Error de aproximación: $O\left(\Delta t^2\right) + O\left(\Delta x^2\right)$

Desventajas

- Requiere resolver un sistema lineal en cada paso temporal.
- Requiere mantener 3 instantes tiempos en memoria.
- Es incondicionalmente inestable: en pocas palabras, muy rápidamente deja de funcionar correctamente.
- No utilicen este método.

Esquema de Crank-Nicolson

Es posible combinar los métodos explítos e implícitos, si consideramos:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} + O\left(\Delta x^1\right) \\
u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2}\frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{u(x+\Delta x,t+\Delta t) - 2u(x,t+\Delta t) + u(x-\Delta x,t+\Delta t)}{\Delta x^2}
\end{aligned}
$$

Keywords: Crank-Nicolson Method.

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

Esquema de Crank Nicholson

Se obtiene la siguiente aproximación

$$\frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t} = \frac{D}{2}\frac{u(x+\Delta x,t)-2u(x,t)+u(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} + \frac{D}{2}\frac{u(x+\Delta x,t+\Delta t)-2u(x,t+\Delta t)+u(x-\Delta x,t+\Delta t)}{\Delta x^2}$$

lo cual en nuestros puntos de discretización $(i\Delta x, j\Delta t)$ requiere

$$\frac{w_{i,n+1}-w_{i,n}}{\Delta t} = \frac{D}{2\Delta x^2}\Big(w_{i+1,n+1} - 2w_{i,n+1} + w_{i-1,n+1} + w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n}\Big)$$

El esquema numérico

$$\frac{w_{i,n+1} - w_{i,n}}{\Delta t} = \frac{D}{2\Delta x^2}\Big(\quad w_{i+1,n+1} - 2w_{i,n+1} + w_{i-1,n+1} \\ + w_{i+1,n} - 2w_{i,n} + w_{i-1,n}\Big)$$

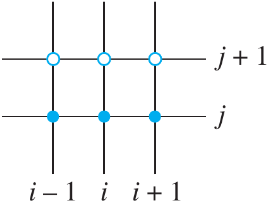
Puede reescribirse, utilizando $\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ como

$$-\sigma w_{i+1,n+1} + (2+2\sigma)w_{i,n+1} - \sigma w_{i-1,n+1} = \sigma w_{i+1,n} + (2-2\sigma)w_{i,n} + \sigma w_{i-1,n}$$

El esquema de Crank-Nicolson para la ecuación de calor es:

$$\sigma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$-\sigma w_{i+1,n+1} + (2+2\sigma)w_{i,n+1} - \sigma w_{i-1,n+1} = \sigma w_{i+1,n} + (2-2\sigma)w_{i,n} + \sigma w_{i-1,n}$$



El esquema numérico Crank-Nicolson para la ecuación de calor es:

$$\begin{bmatrix} w_{0,0} \\ w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ \vdots \\ w_{N_x,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N_x}) \end{bmatrix},$$

y para $n \geq 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & 2+2\sigma & -\sigma & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma & 2+2\sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{0,n+1} \\ w_{1,n+1} \\ w_{2,n+1} \\ \vdots \\ w_{N_x,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma & 2-2\sigma & \sigma & \dots & 0 \\ 0 & \sigma & 2-2\sigma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{0,n} \\ w_{1,n} \\ w_{2,n} \\ \vdots \\ w_{N_x,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l(t_{n+1}) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ r(t_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Ventajas

- Método implícito es incodicionalmente estable.
- Error de aproximación: $O\left(\Delta t^2\right) + O\left(\Delta x^2\right)$.
- Discretización temporal no está condicionado a la discretización temporal.

Desventajas

- Requiere resolver un sistema lineal en cada paso temporal.

Diferencias Finitas para EDP Parabólica

Preguntas

- ¿Qué tan bien funcionan los métodos? ¿Se puede tomar cualquier combinación de Δt y Δx?
- ¿Cómo se pueden implemetar de manera eficiente los métodos descritos?
- ¿Cómo se extienden los métodos para la ecuación de calor en 2 dimensiones, $u_t = D(u_{xx} + u_{yy})$?
- ¿Cómo se podrían implementar otras condiciones de frontera (Neumann, Robin)?
- ¿Qué cambios son necesarios para resolver otras EDP parabólicas, como la ecuación de difusión advección?
- ¿Qué pasaría si se trabajara en coordenadas cilíndricas o esféricas?

Diferencias Finitas para EDP Parabólica