Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 15 Álgebra Lineal

21 de julio de 2022

Problema 1. Sea $\mathbb{C}^{n\times n}$ el espacio de matrices complejas $n \times n$ y $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sin valores propios comunes.

1. Sea P_A el polinomio característico de A. Pruebe que $P_A(B)$ es una aplicación lineal invertible.

Considere ahora $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $AM = MB$.

2. Muestre que $A^k M = MB^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.
3. Deduzca que $MP_A(B) = 0$ y concluya que $M = 0$
4. Demuestre que $f(M) = AM - BM$ define un automorfismo de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Problema 2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Encuentre la forma de Jordan de A en función del
2. Encuentre una **base de Jordan**, ie, una matriz P tal que $A = PJP^{-1}$.

Problema 3. Sea $\mathbf{V}$ un espacio con producto interno.

1. Demuestre la **identidad del paralelogramo**:

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2) \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

2. Pruebe la **fórmula de polarización**[1]:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2}{4} \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

3. Sea $S \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ inyectivo y defina $\langle S(\mathbf{u}), S(\mathbf{v})\rangle_S$. Pruebe que $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ define un producto interno en $\mathbf{V}$.

Problema 4. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita y $P \in \mathcal{L}(V)$ verificando que $P^2 = P$. Demuestre que existe $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ tal que $P = P_U$ (ie, P es una proyección ortogonal) si y solo si P es autoadjunto.

Definición. Sea $\mathbf{V}$ un espacio con producto interno. Decimos que $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ es una isometría de $\mathbf{V}$ si $\|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Problema 5. Sea $\mathbf{V}$ espacio con producto interno y $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$.

1. Demuestre que T es una isometría si y solo si $\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

[1] Notar que la fórmula de polarización nos permite escribir el producto interno en términos de la norma. Esto permite demostrar que, de hecho, todo espacio vectorial normado cuya norma verifica la identidad del paralelogramo es un espacio con producto interno, donde dicho producto viene dado por la fórmula de polarización.

2. Si T es un automorfismo, pruebe que T es una isometría si y solo si $T^{-1} = T'$.
3. Demuestre que T es isometría si y solo si T' es una isometría.

Considere ahora un subespacio $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ y defina la **simetría ortogonal** como

$$S_{\mathbf{U}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \qquad S_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) := 2P_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$$

4. Demuestre que $S_{\mathbf{U}}$ define un automorfismo isométrico y autoadjunto en $\mathbf{V}$.
5. Muestre que $S_{\mathbf{U}^\perp} = -S_{\mathbf{U}}$.

Problema 6. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial complejo con producto interno de dimensión finita. Demuestre que toda aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ normal posee una **raíz cuadrada**, ie, existe $S \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ tal que $T = S^2$.