UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

**Profesor:** Michael Karkulik
**Ayudante:** Sebastián Fuentes

# Ayudantía 10 Álgebra Lineal

2 de junio de 2022

**Problema 1.** Considere la aplicación lineal $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), p \mapsto xp$ definida en los espacios de polinomios reales. Considere las bases siguientes bases de los espacios anteriores

$$\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}, \mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2\}, \qquad \mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}, \mathcal{D} = \{1, -x, x^2, x^2 - x^3\}$$

Con respecto a las bases anteriores

1. Encuentre la matriz de $f$ con respecto a las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$.
2. Encuentre la matriz de $f$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

**Problema 2.** Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre un cuerpo $K$. En la ayudantía 8 se estudiaron polinomios de aplicaciones lineales, definiendo para $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal y para cada $P \in K[X]$ una aplicación lineal $P(T)$.

1. Demuestre que para todo $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ existe un polinomio $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tal que $P(T) = 0$.

Así como podemos componer polinomios con aplicaciones lineales, podemos también hacerlo con matrices. Para $P \in K[X], A \in K^{n\times n}$ definimos

$$P(A) := a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$

2. Encuentre $P \in \mathbb{R}[X]$ no nulo tal que $P(A) = 0$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. Demuestre que si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es base de $\mathbf{V}$ y $P \in K[X]$, entonces

$$A^{P(T)}_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = P(A^T_{\mathcal{B},\mathcal{B}})$$

**Problema 3.** Sea $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de $\mathbf{V}$. Demuestre que la matriz de la aplicación $A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ es triangular superior si y solo si $A^f_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ es triangular inferior donde $\mathcal{C} = \{e_n, \ldots, e_1\}$.

**Problema 4.** Sea $\mathbf{V}$ espacio vrctorial de dimensión $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal. Sea $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ subespacio de dimensión $\dim(\mathbf{W}) = m$ y supongamos que $\mathbf{W}$ es invariante bajo $f$, es decir, $f(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}$. Demuestre que existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ tal que la matriz $A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ de la aplicación es triangular superior por bloques

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde $A \in K^{m\times m}$. Generalice la idea anterior para probar que si $\mathbf{V} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbf{V}_k$ y además $f(\mathbf{V}_k) \subseteq \mathbf{V}_k$ para todo $k = 1, \ldots, p$ entonces para $\mathcal{B}_j$ base respectiva de $\mathbf{V}_j$ se tiene que

$$A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_p \end{array}\right)$$

donde $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ es la base obtenida como la unión de bases de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ donde $A_j \in K^{n_j \times n_j}$ con $n_j = \dim(\mathbf{V}_j)$.