Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 8 Álgebra Lineal

12 de mayo de 2022

Problema 1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre K y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal.

1. Si $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es una aplicación lineal que conmuta con T, esto es, $ST = TS$, entonces $\ker(S)$ es un subespacio invariante bajo T.

Para un polinomio $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in K[X]$ defina la aplicación lineal

$$P(T) := a_0 \operatorname{id}_V + a_1T + a_2T^2 + \ldots + a_nT^n$$

donde $T^k := \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{\text{k veces}}$. Esto nos permite definir una función

$$\varphi_T : K[X] \to \mathcal{L}(\mathbf{V}), \qquad P \mapsto P(T)$$

2. Verifique que la función φ_T está bien definida y muestre que es lineal
3. Muestre que para todo $P \in K[X]$, $\ker(P(T))$ es invariante bajo T.
4. Pruebe que si $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ es un subespacio invariante bajo T y $P \in K[X]$, entonces $\mathbf{W}$ es invariante bajo $P(T)$.

Problema 2. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal. Se definen los siguientes subespacios vectoriales.

$$\mathbf{V}_+ = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : T\mathbf{v} = \mathbf{v}\} \qquad \mathbf{V}_- = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : T\mathbf{v} = -\mathbf{v}\}$$

Pruebe que, en efecto, los conjuntos anteriores son subespacios. Demuestre que si $T^2 = \operatorname{id}$, donde id denota la aplicación identidad en $\mathbf{V}$, entonces $\mathbf{V} = \mathbf{V}_+ \oplus \mathbf{V}_-$.

Problema 3. Sean $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo K con $\dim(\mathbf{U}) = m$ y $\dim(\mathbf{V}) = n$. Sobre el producto cartesiano de conjuntos $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ se definen las siguientes operaciones:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \quad \alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v), \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}, \alpha \in K$$

en donde las sumas y productos correspondientes a las de los espacios respectivos. El producto $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ junto con las operaciones definidas posee entonces estructura de espacio vectorial sobre K. Con respecto a este espacio pruebe lo siguiente:

1. Verifique que $\{\mathbf{0}_U\} \times \mathbf{V}$ es subespacio vectorial de $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.
2. Demuestre que $\dim(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V})$.
3. Considere $T : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ función. Se define el **grafo** de T como el conjunto

   $$G = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{U} \times \mathbf{V} : T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\} \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{V}$$

   Demuestre que T es una aplicación lineal si y solo si G es subespacio vectorial de $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.
4. Sea $T : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal. Demuestre que $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = G \oplus (\{0\} \times \mathbf{V})$.