Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 1 Álgebra Lineal

24 de marzo de 2022

§*1. Lógica*

Problema 1. El objetivo de este problema es probar que ciertas fórmulas proposicionales son tautologías, i.e., que siempre son verdad independientemente de la asignación de valores de las proposiciones. Si p, q, r, s son proposiciones lógicas, se presentan en primer lugar algunas tautologías cuya demostración es sencilla mediante tablas de verdad.

- (Asociatividad de $\wedge$) $[(p \wedge q) \wedge r) \iff [p \wedge (q \wedge r)]$
- (Asociatividad de $\vee$) $[(p \vee q) \vee r) \iff [p \vee (q \vee r)]$
- (Distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$) $[p \wedge (q \vee r)] \iff [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
- (Distributividad de $\vee$ con respecto a $\wedge$) $[p \vee (q \wedge r)] \iff [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Pruebe, con ayuda de las propiedades anteriores, que las siguientes proposiciones son tautologías

1. $(p \wedge q \Rightarrow r) \iff (p \wedge (\neg r) \Rightarrow \neg q)$
2. $(p \vee q \iff p \wedge r) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$

Demostración.

1. Utilizando la definición de $\Rightarrow$ se tiene que

$$\begin{aligned}
(p \wedge q \Rightarrow r) \iff (\neg(p \wedge q) \vee r) &\iff ((\neg p) \vee (\neg q) \vee r) \\
&\iff [((\neg p) \vee r) \vee (\neg q)] \\
&\iff [\neg((\neg p) \vee r) \Rightarrow (\neg q)] \\
&\iff [(p \wedge (\neg r) \Rightarrow (\neg q)]
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(p \vee q \iff p \wedge r) &\Rightarrow (p \vee q \Rightarrow p \wedge r) \wedge (p \wedge r \Rightarrow p \vee q) \\
&\Rightarrow (\neg(p \vee q)) \vee (p \wedge r)) \wedge ((\neg(p \wedge r)) \vee p \vee q) \\
&\Rightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee (p \wedge r)) \wedge ((\neg p) \vee (\neg r) \vee p \vee q) \\
&\Rightarrow (((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee p) \wedge (((\neg p) \wedge (\neg q)) \vee r) \\
&\Rightarrow (((\neg p) \vee p) \wedge ((\neg q) \vee p)) \wedge (((\neg p) \vee r)) \wedge ((\neg q) \vee r)) \\
&\Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \wedge ((\neg q) \vee r) \\
&\Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)
\end{aligned}$$

3. Utilizando propiedades conocidas se prueba que

$$\begin{aligned}
[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)] &\iff \neg[((\neg p) \vee q) \wedge ((\neg r) \vee s)] \vee [\neg(p \wedge r) \vee (q \wedge s)] \\
&\iff [\neg((\neg p) \vee q) \vee \neg((\neg r) \vee s)] \vee [((\neg p) \vee (\neg r)) \vee (q \wedge s)] \\
&\iff [(p \wedge (\neg q)) \vee (r \wedge (\neg s))] \vee (\neg p) \vee (\neg r) \vee (q \wedge s) \\
&\iff [(p \wedge (\neg q) \vee (\neg p)] \vee [(r \wedge (\neg s)) \vee (\neg r)] \vee (q \wedge s) \\
&\iff [(p \vee (\neg p)) \wedge ((\neg q) \vee (\neg p))] \vee [(r \vee (\neg r)) \wedge ((\neg s) \vee (\neg r))] \vee (q \wedge s) \\
&\iff (\neg q) \vee (\neg p) \vee (\neg s) \vee (\neg r) \vee (q \wedge s) \\
&\iff [(\neg q) \vee (q \wedge s)] \vee (\neg p) \vee (\neg s) \vee (\neg r) \\
&\iff [(\neg q \vee q) \wedge ((\neg q) \vee s)] \vee (\neg p) \vee (\neg s) \vee (\neg r) \\
&\iff (\neg q) \vee s \vee (\neg p) \vee (\neg s) \vee (\neg r)
\end{aligned}$$

Dado que $(\neg s) \vee s$ es siempre verdad y todos los conectores presentes son o, se concluye.

$\square$

Problema 2. En este problema se pretende probar (o refutar) algunas propiedades acerca de los cuantificadores universal y existencial.

1. Dada una proposición condicional $p(x)$, demuestre que $\exists y : [p(y) \Rightarrow \forall x : p(x)]$.
2. Demuestre que $[\exists x : p(x) \Rightarrow \forall x : q(x)] \Rightarrow \forall x : (p(x) \Rightarrow q(x))$
3. Muestre que la proposición $\forall x : (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (\exists x : p(x) \Rightarrow \forall x : q(x))$ es falsa.

Demostración.

1. Suponer en primer lugar que $(\forall x)p(x)$ es verdad. Entonces la proposición $p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)$ es verdadera $\forall y$. En particular entonces se cumple que $\exists x$ tal que se tiene la conclusión.
   Por otro lado, suponer que no se tiene $(\forall x)p(x)$, i.e., $\exists y : \neg p(y)$ Para dicho y particular se cumple que $p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)$ es verdad pues $p(y)$. Se tiene nuevamente entonces que la proposición es verdadera.
2. Basta emplear las propiedades conocidas

$$\begin{aligned}
[\exists x : p(x) \Rightarrow \forall x : q(x)] &\iff [(\neg \exists x : p(x)) \vee \forall x : p(x)] \\
&\iff [\forall x : (\neg p(x)) \vee \forall x : p(x)] \\
&\Longrightarrow \forall x : [(\neg p(x)) \vee q(x)] \\
&\Longrightarrow \forall x : (p(x) \Rightarrow q(x))
\end{aligned}$$

3. Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, y $x \in \mathbb{Z}$. Definimos las proposiciones $p(x) :=$ "x es divisible por 4" y $q(x) :=$ "x es divisible por 2". Claramente la proposición $\forall x : [p(x) \Rightarrow q(x)]$ es correcta pues todo múltiplo de 4 es divisible por 2, pero la conclusión no lo es pues se estaría afirmando que si existe un múltiplo de 4 entonces todo entero es mútiplo de 2.

$\square$

§2. *Conjuntos*

Definición 1. Sean A, B conjuntos. Se define su diferencia simétrica como $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Problema 2. El objetivo de este problema es probar algunas propiedades básica sobre conjuntos, involucrando diferencias simétricas y conjuntos potencia. Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que

1. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
2. $(A\Delta B) = (B\Delta A)$
3. $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
4. $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$
5. $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$
6. $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathcal{P}(A)} X = A$
7. $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$
8. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

9. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Dé un ejemplo donde la contención sea estricta. Concluya que
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \iff (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$$

Demostración.

1. En forma directa se prueba que
$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &\iff x \in (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &\iff [x \in A \wedge x \in B^c] \vee [x \in A \wedge x \in C^c] \\ &\iff x \in A \wedge [x \in B^c \vee x \in C^c] \\ &\iff x \in A \wedge x \in (B^c \cup C^c) \\ &\iff x \in A \wedge x \in (B \cap C)^c \\ &\iff x \in A \setminus (B \cap C) \end{aligned}$$

2. Esta proposición es obvia por la simetría de la definición de $A\Delta B$ pues $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A$.

3. Fácilmente se prueba que $(A\Delta B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$. Usando esto se tiene que
$$\begin{aligned} (A\Delta B)\Delta C &= [(A\Delta B) \cap C^c] \cup [C \cap (A\Delta B)^c] \\ &= [((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap C^c] \cup [C \cap ((A \cap B) \cup (A^c \cap B^c))] \\ &= (A \cap B^c \cap C^c) \cup (B \cap A^c \cap C^c) \cup (C \cap A \cap B) \cup (C \cap A^c \cap B^c) \\ &= [A \cap \underbrace{[(B^c \cap C^c) \cup (B \cap C)]}_{=(B\Delta C)^c}] \cup [\underbrace{[(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)]}_{=B\Delta C} \cap A^c] \\ &= [A \cap (B\Delta C)^c] \cup [(B\Delta C) \cap A^c] = A\Delta(B\Delta C) \end{aligned}$$

4. Aplicando la propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión
$$\begin{aligned} (A \cap B)\Delta(A \cap C) &= [(A \cap B) \cap (A \cap C)^c] \cup [(A \cap B)^c \cap (A \cap C)] \\ &= [A \cap B \cap (A^c \cup C^c)] \cup [(A^c \cup B^c) \cap A \cap C] \\ &= [A \cap B \cap C^c] \cup [B^c \cap A \cap C] \\ &= A \cap [(B \cap C^c) \cup (C \cap B^c)] = A \cap (B\Delta C) \end{aligned}$$

5. Aplicando $A\Delta$ sobre la igualdad $A\Delta B = A\Delta C$ se obtiene
$$\begin{aligned} A\Delta B = A\Delta C &\Longrightarrow A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C) \\ &\Longrightarrow (A\Delta A)\Delta B = (A\Delta A)\Delta C \\ &\Longrightarrow \emptyset\Delta B = \emptyset\Delta C \\ &\Longrightarrow B = C \end{aligned}$$

6. En primer lugar, es claro que
$$A \subseteq \bigcup_{X \in \mathcal{P}(A)} X$$
pues $A \in \mathcal{P}(A)$. Por otro lado, notemos que
$$x \in \bigcup_{X \in \mathcal{P}(A)} X \Rightarrow \exists X \in \mathcal{P}(A) : x \in X \Rightarrow x \in X \subseteq A \Rightarrow x \in A$$

7. Supongamos en primera instancia que $A = B$. Entonces se verifica
$$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A \iff X \subseteq B \iff X \in \mathcal{P}(B)$$
y se concluye que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.
Por otro lado, asumiendo que $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, se observa que
$$x \in A \iff \{x\} \in \mathcal{P}(A) \iff \{x\} \in \mathcal{P}(B) \iff \{x\} \subseteq B \iff x \in B$$

8. Por definicion de conjunto potencia se tiene que

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\iff X \in P(A) \wedge X \in \mathcal{P}(A) \\ &\iff X \subseteq A \wedge X \subseteq B \\ &\iff \forall x \in X : x \in A \wedge \forall x \in X : x \in B \\ &\iff \forall x \in X : x \in A \cap B \\ &\iff X \subseteq A \cap B \\ &\iff X \in \mathcal{P}(A \cap B) \end{aligned}$$

9. Basta notar que

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\iff X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B) \\ &\iff X \subseteq A \vee X \subseteq B \\ &\implies X \subseteq A \cup B \\ &\implies X \in \mathcal{P}(A \cup B) \end{aligned}$$

Para observar que los conjuntos no son necesariamente iguales basta tomar $A = \{x\}, B = \{y\}$ y notar que $\{x, y\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
Para la conclusión suponer primero sin pérdida de generalidad que $A \subseteq B$ (el otro caso es análogo). Entonces $A \cup B = B$ y por la parte 7. se tiene que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(B)$. Por otro lado, como $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.
Para probar la otra implicación se procederá por contradicción. Suponer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ pero que $A \subsetneq B \wedge B \subsetneq A$. La última afirmación significa que $\exists a \in A$ tal que $a \notin B$ y asimismo $\exists b \in B$ tal que $b \notin A$. Notar que $\{a, b\} \subseteq A \cup B$ y por lo tanto $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ pero $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, lo cual corresponde a una contradicción con la hipótesis.

□

§3. *Relaciones y funciones*

Problema 3. Sea A conjunto y $B \subseteq A$. Considere la función

$$f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A), \qquad X \mapsto X \Delta B$$

Demuestre que f es biyectiva y encuentre su función inversa.

Demostración. Probaremos en primer lugar que f es inyectiva. Sean $X, Y \in \mathcal{P}(A)$. Luego

$$f(X) = f(Y) \iff X \Delta B = Y \Delta B \Rightarrow X = Y$$

gracias a las propiedades vistas anteriormente. Para la sobreyectividad notar que si $Y \in \mathcal{P}(A)$, entonces tomando $X = Y \Delta B$ se obtiene

$$f(X) = X \Delta B = (Y \Delta B) \Delta B = Y \Delta (B \Delta B) = Y \Delta \emptyset = Y$$

Se ha probado así que f es biyectiva. Para encontrar la función inversa, basta notar que

$$(f \circ f)(X) = f(X \Delta B) = (X \Delta B) \Delta B = X \Delta (B \Delta B) = X = id_{\mathcal{P}(A)}(X)$$

y por lo tanto $f^{-1} = f$. □

Definición 3.1 (Clase de equivalencia)**.** Sea A conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$. Para cada $a \in A$ se define su clase de equivalencia como

$$[a]_{\mathcal{R}} := \{b \in A : a\mathcal{R}b\}$$

Problema 4. El objetivo de este ejercicio es probar propiedades básicas que verifican las relaciones de equivalencia. Sea $\mathcal{R}$ una relación sobre un conjunto A.

1. Pruebe que para todo $a \in A, a \in [a]_{\mathcal{R}}$. En particular, $[a]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
2. Pruebe que si $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ entonces $a \in [b]_{\mathcal{R}}$. Además, en este caso tenemos que $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.
3. Demuestre que para todos $a, b \in A$ ya sea $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$ o bien $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$. En particular, A es la unión disjunta de las clases $[a]_{\mathcal{R}}$.
4. Demuestre que toda partición de A[1] viene dada por una **única** relación de equivalencia.
5. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$ como $a\mathcal{R}b \iff f(a) = f(b)$. Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Defina a continuación $A^* = \{[a]_{\mathcal{R}} : a \in A\}$ como el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ y pruebe que A^* y B están en biyección.

Demostración.

1. Sea $a \in A$. Como $\mathcal{R}$ es reflexiva, se tiene que $a\mathcal{R}a$ y por lo tanto $a \in [a]_{\mathcal{R}}$ por definición de clase de equivalencia.
2. Sea $b \in [a]_{\mathcal{R}}$. Lo anterior significa que $a \sim b$ y por simetría $b\mathcal{R}a \Rightarrow a \in [b]_{\mathcal{R}}$. Notar además que si $x \in [a]_{\mathcal{R}}$ entonces $a\mathcal{R}x$ y por simetría $x\mathcal{R}a$. Como además $a\mathcal{R}b$ por transitividad $x\mathcal{R}b$ y así $x \in [b]_{\mathcal{R}}$, de donde $[a]_{\mathcal{R}} \subseteq [b]_{\mathcal{R}}$. Análogamente se prueba que $[b]_{\mathcal{R}} \subseteq [a]_{\mathcal{R}}$.
3. Si existe $x \in [a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}}$, entonces $a\mathcal{R}x$ y $b\mathcal{R}x$. Por simetría $x\mathcal{R}b$ y luego por transitividad $a\mathcal{R}b$. Esto significa que $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ y por la propiedad anterior $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$. Gracias a las propiedades probadas es claro que

$$A = \bigcup_{a \in A} [a]_{\mathcal{R}}$$

   donde las clases son disjuntas, por lo que en efecto $\mathbb{R}$ define una partición de A.

4. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una partición del conjunto A. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A de tal forma que $x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I$ tal que $x, y \in A_i$. Veamos que es relación de equivalencia. Es claro que $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in A$, puesto que $x \in A_i$ para un único $i \in I$. Ahora, si $x\mathcal{R}y$ entonces $x, y \in A_i$ para algún $i \in I$, y esto es exactamente $y\mathcal{R}x$. Finalmente, si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ entonces existen $i, j \in I$ de tal forma que $x, y \in A_i$ y $y, z \in A_j$. Pero entonces $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ y luego $A_i = A_j$, por lo que $x, z \in A_i \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
   Para demostrar la unicidad, suponer que existen $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ dos relaciones de equivalencia sobre A que dan lugar a la misma partición $\{A_i\}_{i \in I}$. Entonces, probar que dichas relaciones son iguales corresponde a probar que, dado $x \in A$, se tiene que $x\mathcal{R}_1y \iff x\mathcal{R}_2y$. Sea entonces $x \in A$ y $[x]_{\mathcal{R}_1}$ su clase de equivalencia en $\mathcal{R}_1$, y $[x]_{\mathcal{R}_2}$ su clase en $\mathcal{R}_2$. Entonces $[x]_{\mathcal{R}_1} = A_i$ para cierto $i \in I$ pues $\mathcal{R}_1$ determina la partición $\{A_i\}_{i \in I}$, y asimismo $[x]_{\mathcal{R}_2} = A_j$ para algún $j \in I$. Como $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición y $x \in A_i \cap A_j$ entonces $[x]_{\mathcal{R}_1} = [x]_{\mathcal{R}_2}$, de donde se concluye que $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.
5. Claramente se tiene la reflexividad pues para $x \in A, f(x) = f(x)$ y por lo tanto $x\mathcal{R}x$.
   Para $x, y \in A$ es claro que

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

   Finalmente, para $x, y, z \in A$ se tiene que

$$(x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow (f(x) = f(y)) \wedge (f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

   Por lo tanto $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
   Definimos la función $g : A^* \to B$ mediante la regla $[x]_{\mathcal{R}} \mapsto f(x)$. Notemos que esta función está bien definida pues por definición de $\mathcal{R}$ si $y \in [x]_{\mathcal{R}}$ entonces $f(x) = f(y)$ y luego $[y] \mapsto f(y) = f(x)$. Ahora, gracias a la propiedad 3. se tiene que g es inyectiva pues si $f(x) \neq f(y)$ entonces $x \not\mathcal{R} y$ y por lo tanto $[x] \neq [y]$. Además g es sobreyectiva pues como f lo es, para $y \in B$ dado existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Luego es claro que $g([x]) = f(x) = y$.

[1] Una partición de un conjunto A es una colección $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A tales que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j \in I, i \neq j$.

$\square$

Definición 3.2. Sea $f : A \to B$ función entre A, B conjuntos. Se dice que $g : B \to A$ es una **inversa por la izquierda** de f si $g \circ f = id_A$ donde $id_A : A \to A, x \mapsto x$ es la identidad en el conjunto A. Del mismo modo, se dice que $h : A \to B$ es **inversa por la derecha** si $f \circ h = id_B$.

Problema 5. En este problema se analizarán algunas propiedades relativas a funciones. Sea $f : A \to B$ función, $X \subseteq A, Y \subseteq B$.

1. Pruebe que $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. Además pruebe que f es inyectiva si y solo si $X = f^{-1}(f(X))$ para todo $X \subseteq A$.
2. Demuestre que $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$. Demuestre también que f es sobreyectiva si y solo si $Y = f(f^{-1}(Y))$ para todo $Y \subseteq B$.
3. Pruebe que f es inyectiva si y solo si posee inversa por la izquierda. Pruebe también que si f posee una inversa por la derecha entonces es sobreyectiva[2].
4. Pruebe que si f posee inversa por izquierda y por derecha entonces es biyectiva y $h = g = f^{-1}$.

Demostración.

1. Si $x \in X$ entonces $f(x) \in f(X)$ por definición, y asimismo $x \in f^{-1}(f(X))$ por definición de preimagen, de donde $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. Suponer ahora que f es inyectiva y sea $x \in f^{-1}(f(X))$. Por definición $y = f(x) \in f(X)$ y luego existe un $x' \in X$ de tal forma que $y = f(x') = f(x)$. Como f es inyectiva $x' = x$ y por ende $x \in X$. Por lo tanto se obtiene que $f^{-1}(f(X)) = X$ en este caso.
   Suponer ahora que vale la igualdad $X = f^{-1}(f(X))$ para todo $X \subseteq A$. Sean $x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$. Entonces $x' \in f^{-1}(f(\{x\}))$, y por hipótesis $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, deduciendo que $x = x'$.
2. Sea $y \in f(f^{-1}(Y))$. Por lo tanto existe $x \in f^{-1}(Y)$ verificando $y = f(x)$. Como $x \in f^{-1}(Y)$ entonces $f(x) = y \in Y$ de donde se obtiene el resultado. Suponiendo ahorxa que f es sobreyectiva, para $y \in Y$ se tiene que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por definición entonces $x \in f^{-1}(Y)$ y entonces $y = f(x) \in f(f^{-1}(Y))$.
   Suponer ahora que $Y = f(f^{-1}(Y))$ para todo $Y \subseteq B$. Notar que siempre se tiene que $f^{-1}(B) = A$ y luego $f(f^{-1}(B)) = f(A) = B$, concluyendo que f es sobreyectiva.
3. Sea f inyectiva, i.e., para cada $y \in f(A)$ existe un único $x \in A$ de tal forma que $y = f(x)$. Definimos $g(y) = x$. Se define así una función $g : f(A) \to A$ que por construcción cumple $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. Para definir g en todo B basta fijar $x_0 \in A$ y definir $g(y) = x_0$ para $y \in B \setminus f(A)$. Recíprocamente, si existe $g : B \to A$ verificando $g \circ f = id_A$ entonces para $x, x' \in A$ se tiene que $f(x) = f(x') \Rightarrow x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$ y así f es inyectiva.
   Suponer ahora que f posee una inversa por derecha $g : B \to A$. Entonces para cada $y \in B$ se tiene que $x = g(y)$ verifica $f(x) = f(g(y)) = y$ y así f es sobreyectiva.
4. Suponer que f posee inversas por ambos lados, denotadas g, h. Entonces por lo anterior f es inyectiva y sobreyectiva, y en consecuencia biyectiva. Así, debe existir una función inversa $f^{-1} : B \to A$. Sea $y \in B$ y $x = f^{-1}(y)$. Entonces

   $$g(y) = g(f(x)) = id_A(x) = x$$

   y además

   $$f(h(y)) = i_B(y) = y$$

   de donde

   $$h(y) = f^{-1}(f(h(y))) = f^{-1}(y) = x$$

   lo cual significa que $x = f^{-1}(y) = g(y) = h(y)$ para todo $y \in B$ y se desprende entonces que $g = h = f^{-1}$.

$\square$

[2]En realidad también se puede probar que si f es sobreyectiva entonces posee inversa por la derecha. Sin embargo, dicha demostración pasa por utilizar el **Axioma de elección**, un famoso axioma de la teoría de conjuntos. La clave de ello es notar que si f es sobreyectiva entonces el conjunto $f^{-1}(y)$ es no vacío para cada $y \in B$. Luego el axioma de elección nos permite elegir un $x \in f^{-1}(y)$ para cada $y \in B$ y de esta forma construir la inversa deseada.