Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 9 Álgebra Lineal

26 de mayo de 2022

Definición 1 (rango de una aplicación lineal)**.** *Considere* $\mathbf{V}$ *espacio vectorial y* $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *apliciación lineal. Definimos el rango de* T *como* $\mathrm{rg}(T) := \dim(\mathrm{img}(T))$.

Problema 1. Sean $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita y $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}, T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ aplicaciones lineales. Pruebe que

1. $\mathrm{rg}(T \circ S) \leq \mathrm{rg}(T)$. Si S es sobreyectivo entonces $\mathrm{rg}(T \circ S) = \mathrm{rg}(T)$.
2. $\mathrm{rg}(T \circ S) \leq \mathrm{rg}(S)$. La igualdad se cumple si y solo si $\ker(T) \cap \mathrm{img}(S) = \{0\}$.

Problema 2. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo K, $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ lineal y $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ base de $\mathrm{rg}(T)$. Demuestre que existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, K)$ tales que

$$T(\mathbf{v}) = \varphi_1(\mathbf{v})\mathbf{w}_1 + \ldots + \varphi_n(\mathbf{v})\mathbf{w}_n \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

Problema 3. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal. Muestre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{V} = \ker(T^k) \oplus \mathrm{img}(T^k)$$

Problema 4. Considere el espacio de matrices reales $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y la aplicación $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$T(X) = AX + XA, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con respecto a la aplicación definida

1. Pruebe que es una aplicación lineal.
2. Encuentre bases de $\ker(T)$ e $\mathrm{img}(T)$.
3. Determine si T es inyectiva/sobreyectiva.
4. Pruebe que $\mathbb{R}^{2\times 2} = \ker(T) \oplus \mathrm{img}(T)$.