Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 6 Álgebra Lineal

28 de abril de 2022

Problema 1. Muestre que si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbf{V}$ es una base del espacio vectorial $\mathbf{V}$ entonces

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \mathbf{v}_n \rangle$$

Demostración. Para $n = 1$ el resultado es obvio. Suponer que es verdad para cierto n. Sea $\mathbf{V}$ de dimensión $\dim(\mathbf{V}) = n + 1$ y $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ base de $\mathbf{V}$. Definimos $\mathbf{U} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ y $\mathbf{W} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_{n+1})$. Claramente $\mathbf{U} + \mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$, pero además $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ contiene una base de $\mathbf{V}$ de donde $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{V}$. Por la fórmula de dimensión

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) - \dim(\mathbf{U}) - \dim(\mathbf{W}) = n + 1 - n - 1 = 0$$

de donde $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{0\}$ y así $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. La conclusión se sigue de la hipótesis inductiva pues como $\dim(\mathbf{U}) = n$ entonces $\mathbf{U} = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \mathbf{v}_n \rangle$. □

Problema 2. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita sobre K y $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n \leq \mathbf{V}$ en suma directa. Demuestre que

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathbf{V}_i)$$

Demostración. Probamos por inducción. Para $n = 1$ el resultado es obvio. Suponer que es cierto para algún n. Sea $\mathbf{V} = \mathbf{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{U}_{n+1}$. Definimos $\mathbf{W} := \mathbf{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{U}_n$. Se tiene por lo tanto que entonces que $\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{U}_{n+1}$ y $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}_{n+1} = \{\mathbf{0}\}$, i.e., $\dim(\mathbf{W} \cap \mathbf{U}_{n+1}) = 0$. Del **Problema 1** y la hipótesis de inducción tenemos que

$$\dim(\mathbf{W} + \mathbf{U}_{n+1}) = \dim(\mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U}_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \dim(\mathbf{U}_i)$$

concluyendo así la demostración. □

Problema 3. Considere el espacio vectorial $K^{n\times n}$ de las matrices $n\times n$ sobre el cuerpo K y los siguientes subespacios

$$\mathcal{S} = \{A \in K^{n\times n} : A = A^\top\} \qquad \mathcal{A} = \{A \in K^{n\times n} : A = -A^\top\}$$

Calcule $\dim(\mathcal{S})$ y $\dim(\mathcal{A})$.

Demostración. Notar que toda matriz simétrica se puede descomponer como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \ldots$$

Las matrices de la descomposición anterior claramente generan y además son l.i. (pues no es posible escribir ninguna de ellas en términos de las otras) por lo tanto son base de $\mathcal{S}$. Además hay tantas matrices de las anteriores como entradas en la parte superior de la matriz, es decir, $\dim(\mathcal{S}) = n(n+1)/2$. Dado que en la ayudantía anterior mostramos que $K^{n\times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$, del **Problema 3** deducimos que

$$\dim(\mathcal{A}) = \dim(K^{n\times n}) - \dim(\mathcal{S}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

□

Problema 4. El objetivo de este problema es estudiar cómo definir una estructura de espacio vectorial sobre un conjunto cociente (Ayudantía 1). Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ subespacio. Defina la siguiente relación

$$\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2 \iff \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}$$

En relación a lo anterior, demuestre lo siguiente:

(a) Pruebe que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre $\mathbf{V}$.

La relación anterior define una partición sobre $\mathbf{V}$ cuyas clases de equivalencia son de la forma:

$$[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}' \in \mathbf{V} : \mathbf{v} \sim \mathbf{v}'\} = \{\mathbf{v}' \in \mathbf{V} : \mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathbf{W}\} = \{\mathbf{v} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{W}\}$$

El conjunto de clases de equivalencia anteriores (conjunto cociente) se denotará como $\mathbf{V}/\mathbf{W}$. Defina a continuación las siguientes operaciones en $\mathbf{V}/\mathbf{W}$:

$$[\mathbf{v}_1] + [\mathbf{v}_2] := [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] \qquad \lambda \cdot [\mathbf{v}_1] := [\lambda \mathbf{v}_1] \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}, \forall \lambda \in K$$

(b) Verifique que las operaciones anteriores están bien definidas, i.e., no dependen del representante en cada clase de equivalencia.

Mediante cálculos directos se puede demostrar que $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas antes, donde el neutro viene dado por $[\mathbf{0}]$ y el inverso de $[\mathbf{v}] \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$ corresponde a $[-\mathbf{v}] \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$. El espacio $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ es conocido como el **espacio vectorial cociente** de $\mathbf{V}$ por $\mathbf{W}$.

(c) Pruebe que $\dim(\mathbf{V}/\mathbf{W}) = \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{W})$.
Sugerencia: Tome una base de $\mathbf{W}$, complétela en una base de $\mathbf{V}$ y en base a ella construya una de $\mathbf{V}/\mathbf{W}$.

(d) Considere $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{W} = \operatorname{span}((1,0))$ el *"eje X"*. Describa los elementos del espacio $\mathbf{V}/\mathbf{W}$.

(e) Considere $\mathbf{V} = K^{2\times 2}$ y $\mathbf{W} = \{A \in \mathbf{V} : a_{11} + a_{22} = 0\}$. Encuentre una base para $\mathbf{V}/\mathbf{W}$.

Demostración.

(a) Verificamos a continuación las propiedades de relación de equivalencia:

1. **Reflexiva:** Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, se tiene que $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}$ pues $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \in \mathbf{W}$ pues $\mathbf{W}$ es subespacio.
2. **Simétrica :** Si $\mathbf{v}, \mathbf{W} \in \mathbf{V}$ son tales que $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ entonces $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Como $\mathbf{W}$ es subespacio $\mathbf{w} - \mathbf{v} = -(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in \mathbf{W}$ y entonces $\mathbf{w} \sim \mathbf{v}$.
3. **Transitiva:** Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ tales que $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$. Por definición $\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathbf{W}$ y luego $\mathbf{u} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in \mathbf{W}$, es decir, $\mathbf{u} \sim \mathbf{w}$.

(b) Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{V}$ tales que $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{w}_1$ y $\mathbf{v}_2 \sim \mathbf{w}_2$. Esto significa que existen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{W}$ tales que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{y}$. Luego vemos que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{x}) + (\mathbf{w}_2 + \mathbf{y}) = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + \underbrace{(\mathbf{x} + \mathbf{y})}_{\in \mathbf{W}} \Rightarrow (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \sim (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$$

Por lo tanto

$$[\mathbf{v}_1] + [\mathbf{v}_2] := [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] = [\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2] =: [\mathbf{w}_1] + [\mathbf{w}_2]$$

i.e., la suma está bien definida.
Sean ahora $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}$ tales que $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2$ y $\lambda \in K$. Existe entonces $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{x}$ y por ende $\lambda \mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2 + \lambda \mathbf{x}$. Como $\mathbf{W}$ es subespacio $\lambda \mathbf{x} \in \mathbf{W}$ y así $\lambda \mathbf{v}_1 \sim \lambda \mathbf{v}_2$. Esto prueba entonces que

$$\lambda[\mathbf{v}_1] := [\lambda \mathbf{v}_1] = [\lambda \mathbf{v}_2] =: \lambda[\mathbf{v}_2]$$

(c) Sea $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ base de $\mathbf{W}$ y extendemos a una base $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$. En este caso $\dim(\mathbf{V}) = n+m$ y $\dim(\mathbf{W}) = n$. Probaremos que $\{[\mathbf{v}_1], \ldots, [\mathbf{v}_m]\}$ es una base de $\mathbf{V}/\mathbf{W}$. Para la independencia lineal suponer que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ tales que

$$\alpha_1[\mathbf{v}_1] + \ldots + \alpha_m[\mathbf{v}_m] = [\mathbf{0}]$$

Utilizando la definición de las operaciones en $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ se tiene que

$$[\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m] = [\mathbf{0}]$$

y lo anterior implica que $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m \in \mathbf{W}$. Como $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ es base de $\mathbf{W}$ existen escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ de tal forma que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots \alpha_m\mathbf{v}_m - (\beta_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{w}_n) = \mathbf{0}$$

Por independencia lineal entonces $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$ deduciendo que $\{[\mathbf{v}_1], \ldots, [\mathbf{v}_m]\}$ es linealmente independiente en $\mathbf{V}/\mathbf{W}$.
Para ver que es un generador sea $[\mathbf{v}] \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$. Como $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es base de $\mathbf{V}$ entonces

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n + \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m$$

y pasando al cociente se tiene que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v}] &= [\alpha_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n + \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m] \\
&= [\alpha_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n] + [\beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_m\mathbf{v}_m] \\
&= \beta_1[\mathbf{v}_1] + \ldots + \beta_m[\mathbf{v}_m]
\end{aligned}$$

deduciendo entonces que $\mathrm{span}(\{[\mathbf{v}_1], \ldots, [\mathbf{v}_m]\})$.

(d) Recordar que $(x, y), (x', y') \in \mathbf{V}$ definen la misma clase de equivalencia en $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ si y solo si $(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y') \in \mathbf{W}$. Esto significa que $y - y' = 0$, i.e., $y = y'$. Por lo tanto, las clases en $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ están determinadas únicamente por la coordenada y. En particular en toda clase $[\mathbf{v}] \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$ existe un único $(0, y) \in \mathbf{V}$ tal que $[\mathbf{v}] = [(0, y)]$. Como $[(0, y)] = \{(0, y) + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{W}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^2\}$ entonces vemos que los elementos de $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ corresponden a las rectas horizontales de $\mathbb{R}^2$.

(e) Notar que toda matriz $A \in \mathbf{W}$ se puede escribir como sigue

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{D}$$

es decir, las matrices B, C, D son una base para $\mathbf{W}$, por lo que $\dim(\mathbf{W}) = 3$. Notando que la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es tal que $\{B, C, D, E\}$ es base de $\mathbf{V}$, para $A \in \mathbf{V}$ podemos escribir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (a + d)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y pasando al cociente

$$[A] = a[B] + b[C] + c[D] + (a + d)[E] = (a + d)[E]$$

en donde hemos utilizado que $B, C, D \in \mathbf{W}$ y por lo tanto son $\mathbf{0}$ en $\mathbf{V}/\mathbf{W}$. Así, $\{[E]\}$ es base de $\mathbf{V}/\mathbf{W}$.

$\square$