Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 4 Álgebra Lineal

14 de abril de 2022

Problema 1. El objetivo de este problema es estudiar cómo se comportan los subespacios vectoriales bajo la unión. En la ayudantía pasada se probó que la unión de dos subespacios vectoriales es un subespacio si y solo si uno de ellos está contenido en el otro. Consideramos ahora $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo K y subespacios $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$.

1. Suponiendo que $|K| > 2$, pruebe que $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{U}_3 \leq \mathbf{V}$ si y solo si dos de ellos están contenidos en el tercero. **Sugerencia:** Para probar ($\Rightarrow$) suponga en primer lugar que $\mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_3$ o $\mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_3$. Luego suponga que lo anterior no se cumple y escoja $a, b \in K \neq \{0\}$ tales que $a - b = 1$. En base a la hipótesis, tome combinaciones lineales adecuadas y deduzca que $\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3 \subseteq \mathbf{U}_1$.
2. Para $|K| = 2$ dé un contraejemplo para el criterio anterior.

Problema 2. Considere $K^{n\times n}$ el espacio vectorial de matrices de tamñano $n \times n$ sobre un cuerpo K y los siguientes suconjuntos de dicho espacio:

- $\mathcal{S} = \{A \in K^{n\times n} : A = A^\top\}$
- $\mathcal{A} = \{A \in K^{n\times n} : A = -A^\top\}$
- $\mathcal{T}_l = \{A \in K^{n\times n} : a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$
- $\mathcal{T}_u = \{A \in K^{n\times n} : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$

Respecto a los subconjuntos anteriores:

1. Demuestre que son subespacios vectoriales.
2. Pruebe que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_l = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_u$ y $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Explique de qué forma son las matrices en $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_u$
3. Para $n = 2$ encuentre conjuntos generadores de cada subespacio.

Problema 3. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre K y $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \leq \mathbf{V}$ subespacios. Pruebe que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

1. Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existen únicos $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.
2. $\mathbf{V} = \operatorname{span}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ y $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{0\}$

La condición del Problema 3 se conoce como **suma directa** y se denota como $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$.

Problema 4. Considerando los subespacios del Problema 2 demuestre que $K^{n\times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$[1].

[1] Observe que esto solo se cumple cuando $|K| > 2$.