UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 11 Álgebra Lineal

9 de junio de 2022

Problema 1. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ una aplicación lineal sobreyectiva. Demuestre que existe un subespacio $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ tal que la restricción $T|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to \mathbf{W}, \mathbf{u} \mapsto T(\mathbf{u})$ es un isomorfismo.

Demostración. Sea $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ base de $\mathbf{W}$. Como T es sobreyectivo, existen $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ tales que $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Vemos entonces que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes pues si $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ aplicando T

$$T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_n T(\mathbf{v}_n) = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$$

y por independencia lineal de $\mathbf{W}$ deducimos que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Definimos entonces $U := \operatorname{span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y notamos que la restricción $T|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ es un isomorfismo pues mapea una base de $\mathbf{U}$ en una base de $\mathbf{W}$. □

Problema 2. Sea $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ base del espacio vectorial $\mathbf{V}$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ su base dual. Probar que si $\psi \in \mathbf{V}$ entonces

$$\psi = \psi(\mathbf{v}_1)\varphi_1 + \ldots + \psi(\mathbf{v}_n)\varphi_n$$

Demostración. Como $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es base de $\mathbf{V}^*$, para todo $\varphi \in \mathbf{V}^*$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$$

Podemos evaluar la identidad anterior en $\mathbf{v}_1$ para observar que

$$\varphi(\mathbf{v}_1) = \alpha_1 \underbrace{\varphi_1(\mathbf{v}_1)}_{=1} + \ldots + \alpha_n \underbrace{\varphi_n(\mathbf{v}_n)}_{=0} = \alpha_1$$

en donde hemos utilizado la definición de base dual. Repitiendo el mismo proceso para $\mathbf{v}_i$ vemos que

$$\varphi(\mathbf{v}_i) = \alpha_1\varphi_1(\mathbf{v}_i) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(\mathbf{v}_i) = \alpha_i$$

□

Problema 3. Considere las bases canónicas $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \mathcal{C} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\mathcal{C}^* = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ sus bases duales respectivas. Definimos la aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y, z) \mapsto (4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$$

Con respecto a esta aplicación

1. Encuentre las bases duales mencionadas.
2. Calcule $T^*(\varphi_1), T^*(\varphi_2)$. Escríbalos como combinación lineal de ψ_1, ψ_2, ψ_3. Escriba la matriz de T^* en las bases canónicas duales.
3. Obtenga la matriz de T^* a partir de la matriz de T.
4. Considere la base $\mathcal{D} = (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$ y encuentre la matriz de cambio de base entre las bases duales $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{D}^*$
5. Defina la base $\mathcal{E} = (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Encuentre la matriz de cambio de base entre $\mathcal{C}^*$ y $\mathcal{E}^*$.
6. Encuentre la matriz de T^* en las bases $\mathcal{D}^*$ y $\mathcal{E}^*$.

Solución.

1. De manera general, si consideramos $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces podemos definir la aplicación lineal
$$\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$
la cual claramente verifica $\varphi_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$, deduciendo que corresponde a la base dual.

2. Notando que $T^* : (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$ y utilizando lo anterior, vemos que
$$\begin{aligned} T^*(\varphi_1)(x,y,z) &= (\varphi_1 \circ T)(x,y,z) = \varphi_1(4x+5y+6z, 7x+8y+9z) = 4x+5y+6z \\ T^*(\varphi_2)(x,y,z) &= (\varphi_2 \circ T)(x,y,z) = \varphi_1((4x+5y+6z, 7x+8y+9z) = 7x+8y+9z \end{aligned}$$
Utilizando el Problema 2 escribimos:
$$\begin{aligned} T^*(\varphi_1) &= T^*(\varphi_1)(1,0,0)\psi_1 + T^*(\varphi_1)(0,1,0)\psi_2 + T^*(\varphi_1)(0,0,1)\psi_3 = 4\psi_1 + 5\psi_2 + 6\psi_3 \\ T^*(\varphi_2) &= T^*(\varphi_2)(1,0,0)\psi_1 + T^*(\varphi_2)(0,1,0)\psi_2 + T^*(\varphi_2)(0,0,1)\psi_3 = 7\psi_1 + 8\psi_2 + 9\psi_3 \end{aligned}$$
Encontramos entonces la matriz
$$\Phi_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}(T^*) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Evaluando la base canónica en forma sencilla se observa que
$$\Phi_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
y el **Teorema 126** afirma que $\Phi_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}(T^*) = \Phi_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(T)^\top$.

4. De manera directa se deduce que
$$\Phi_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$
Notando que $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^* = \mathrm{id}_{(\mathbb{R}^2)^*}$ obtenemos
$$\Phi_{\mathcal{B}^*,\mathcal{D}^*}(\mathrm{id}_{(\mathbb{R}^2)^*}) = \Phi_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^\top = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. De manera directa vemos que
$$\Phi_{\mathcal{E},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
y utilizando nuevamente el **Teorema 126**
$$\Phi_{\mathcal{C}^*,\mathcal{E}^*}(\mathrm{id}_{(\mathbb{R}^2)^*}) = \Phi_{\mathcal{E},\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Utilizando las propiedades conocidas acerca de los cambios de base calculamos:
$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{D}^*,\mathcal{E}^*}(T^*) &= \Phi_{\mathcal{C}^*,\mathcal{E}^*}(\mathrm{id}_{(\mathbb{R}^3)^*})\Phi_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}(T^*)\Phi_{\mathcal{D}^*,\mathcal{B}^*}(\mathrm{id}_{(\mathbb{R}^2)^*}) \\ &= \Phi_{\mathcal{C}^*,\mathcal{E}^*}(\mathrm{id}_{(\mathbb{R}^3)^*})\Phi_{\mathcal{B}^*,\mathcal{C}^*}(T^*)[\Phi_{\mathcal{B}^*,\mathcal{D}^*}(\mathrm{id}_{(\mathbb{R}^2)^*})]^{-1} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -30 \\ 3 & -21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Problema 4. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión $\dim(V) = n$ y V^* su espacio dual.

1. Muestre que $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in V^*$ son linealmente independientes si y solo si
$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} \ker(\varphi_i)\right) = n - m$$

2. Utilice lo anterior para concluir que toda base $\mathcal{C}$ de V^* posee una **base predual**, es decir, existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$, donde $\mathcal{B}^*$ denota la base dual.

Demostración.

1. Por el teorema del rango, es claro que para todo $\varphi \in \mathbf{V}^* \setminus \{\mathbf{0}\}$ se cumple que $\dim(\ker(\varphi)) = n - 1$. Ahora, notamos que para cualquier $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ subespacio tenemos que
$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{U} \cap \ker(\varphi)) &= \dim(\mathbf{U}) + \dim(\ker(\varphi)) - \dim(\mathbf{U} + \ker(\varphi)) \\ &\geq \dim(\mathbf{U}) + (n-1) - n \\ &= \dim(\mathbf{U}) - 1\end{aligned}$$
En base a lo anterior, intersectando de manera sucesiva podemos ver que
$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} \ker(\varphi_i)\right) \geq n - m$$
Denotamos $k := \dim(\bigcap_i \ker(\varphi_i))$. Suponiendo que $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ son linealmente independientes podemos extender a una base $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_n$ de $\mathbf{V}^*$. Notemos a continuación que, como $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es base, se verifica
$$\ker(\varphi_1) \cap \ldots \cap \ker(\varphi_n) = \{\mathbf{0}\}$$
Por otro lado, por la propiedad demostrada al principio, intersectando en forma sucesiva
$$\dim((\ker(\varphi_1) \cap \ldots \cap \ker(\varphi_m)) \cap \ker(\varphi_{m+1} \cap \ldots \cap \ker(\varphi_n))) \geq k - (n - m)$$
Vemos entonces que $k - n + m \leq 0$ y así $k = n - m$.

2. Gracias a la propiedad anterior tenemos que
$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i)\right) = 0, \qquad \dim\left(\bigcap_{i=2}^{n} \ker(\varphi_i)\right) = 1$$
Lo anterior entonces significa que
$$\ker(\varphi_1) \subsetneq \ker(\varphi_2) \cap \ldots \cap \ker(\varphi_n)$$
y luego podemos encontrar $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}$ de tal forma que $\varphi_1(\mathbf{v}_1) = 1$ y $\varphi_i(\mathbf{v}_1) = 0$ para $2 \leq i \leq n$. Repitiendo el proceso para cada i encontramos $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ verificando la condición de base dual.

□