

AYUDANTÍA 12 ÁLGEBRA LINEAL

16 DE JUNIO DE 2022

Problema 1. Sean \mathbf{V}, \mathbf{W} espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que la aplicación

$$L : \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{W}^*, \mathbf{V}^*), \quad T \mapsto T^*$$

define un isomorfismo $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \cong \mathcal{L}(\mathbf{W}^*, \mathbf{V}^*)$.

Problema 2. Considere \mathbf{V}, \mathbf{W} espacios vectoriales de dimensión finita, y los isomorfismos naturales $\varphi_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^{**}$, $\varphi_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}^{**}$ entre un espacio y su bidual. Considere ahora $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ aplicación lineal. Demuestre que, bajo identificación con el bidual, T y su **doble traspuesta** $T^{**} : \mathbf{V}^{**} \rightarrow \mathbf{W}^{**}$ son iguales, esto es, se verifica la identidad $\varphi_{\mathbf{W}} \circ T = T^{**} \circ \varphi_{\mathbf{V}}$. En general, el hecho anterior se expresa diciendo que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{V}}} & \mathbf{V}^{**} \\ T \downarrow & & \downarrow T^{**} \\ \mathbf{W} & \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{W}}} & \mathbf{W}^{**} \end{array}$$

es un diagrama conmutativo.

Problema 3. Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ aplicaciones lineales.

1. Demuestre que ST y TS poseen los mismos valores propios.
2. Suponga ahora que S es un isomorfismo. Pruebe que T y STS^{-1} poseen los mismos valores propios. Encuentre una relación entre los valores propios de ambas aplicaciones.