Ayudantía 1 Álgebra Lineal

24 de marzo de 2022

§1. *Lógica*

Problema 1. El objetivo de este problema es probar que ciertas fórmulas proposicionales son tautologías, i.e., que siempre son verdad independientemente de la asignación de valores de las proposiciones. Si p, q, r, s son proposiciones lógicas, se presentan en primer lugar algunas tautologías cuya demostración es sencilla mediante tablas de verdad.

- (Asociatividad de $\wedge$) $[(p \wedge q) \wedge r) \iff [p \wedge (q \wedge r)]$
- (Asociatividad de $\vee$) $[(p \vee q) \vee r) \iff [p \vee (q \vee r)]$
- (Distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$) $[p \wedge (q \vee r)] \iff [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
- (Distributividad de $\vee$ con respecto a $\wedge$) $[p \vee (q \wedge r)] \iff [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

Pruebe, con ayuda de las propiedades anteriores, que las siguientes proposiciones son tautologías

1. $(p \wedge q \Rightarrow r) \iff (p \wedge (\neg r) \Rightarrow \neg q)$
2. $(p \vee q \iff p \wedge r) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$

Problema 2. En este problema se pretende probar (o refutar) algunas propiedades acerca de los cuantificadores universal y existencial.

1. Dada una proposición condicional $p(x)$, demuestre que $\exists y : [p(y) \Rightarrow \forall x : p(x)]$.
2. Demuestre que $[\exists x : p(x) \Rightarrow \forall x : q(x)] \Rightarrow \forall x : (p(x) \Rightarrow q(x))$
3. Muestre que la proposición $\forall x : (p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow (\exists x : p(x) \Rightarrow \forall x : q(x))$ es falsa.

§2. *Conjuntos*

Definición 1. Sean A, B conjuntos. Se define su diferencia simétrica como $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Problema 2. El objetivo de este problema es probar algunas propiedades básica sobre conjuntos, involucrando diferencias simétricas y conjuntos potencia. Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que

1. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
2. $(A \Delta B) = (B \Delta A)$
3. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
4. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
5. $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$
6. $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathcal{P}(A)} X = A$
7. $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$
8. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
9. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Dé un ejemplo donde la contención sea estricta. Concluya que

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \iff (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$$

§3. Relaciones y funciones

Problema 3. Sea A conjunto y $B \subseteq A$. Considere la función

$$f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A), \qquad X \mapsto X \Delta B$$

Demuestre que f es biyectiva y encuentre su función inversa.

Definición 2 (Clase de equivalencia). Sea A conjunto y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en A. Para cada $a \in A$ se define su **clase de equivalencia** como

$$[a]_{\mathcal{R}} := \{b \in A : a\mathcal{R}b\}$$

Problema 4. El objetivo de este ejercicio es probar propiedades básicas que verifican las relaciones de equivalencia. Sea $\mathcal{R}$ una relación sobre un conjunto A.

1. Pruebe que para todo $a \in A, a \in [a]_{\mathcal{R}}$. En particular, $[a]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
2. Pruebe que si $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ entonces $a \in [b]_{\mathcal{R}}$. Además, en este caso tenemos que $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$.
3. Demuestre que para todos $a, b \in A$ ya sea $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$ o bien $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \emptyset$. En particular, A es la unión disjunta de las clases $[a]_{\mathcal{R}}$.
4. Demuestre que toda partición de A[1] viene dada por una **única** relación de equivalencia.
5. Sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A como $a\mathcal{R}b \iff f(a) = f(b)$. Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Defina a continuación $A^* = \{[a]_{\mathcal{R}} : a \in A\}$ como el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{R}$ y pruebe que existe una función biyectiva $f : A^* \to B$.

Definición 3. Sea $f : A \to B$ función entre A, B conjuntos. Se dice que $g : B \to A$ es una **inversa por la izquierda** de f si $g \circ f = id_A$ donde $id_A : A \to A, x \mapsto x$ es la identidad en el conjunto A. Del mismo modo, se dice que $h : A \to B$ es **inversa por la derecha** si $f \circ h = id_B$.

Problema 5. En este problema se analizarán algunas propiedades relativas a funciones. Sea $f : A \to B$ función, $X \subseteq A, Y \subseteq B$.

1. Pruebe que $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. Además pruebe que f es inyectiva si y solo si $X = f^{-1}(f(X))$ para todo $X \subseteq A$.
2. Demuestre que $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$. Demuestre también que f es sobreyectiva si y solo si $Y = f(f^{-1}(Y))$ para todo $Y \subseteq B$.
3. Pruebe que f es inyectiva si y solo si posee inversa por la izquierda. Pruebe también que si f posee una inversa por la derecha entonces es sobreyectiva[2].
4. Pruebe que si f posee inversa por izquierda y por derecha entonces es biyectiva y $h = g = f^{-1}$.

[1] Una partición de un conjunto A es una colección $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A tales que $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j \in I, i \neq j$.

[2] En realidad también se puede probar que si f es sobreyectiva entonces posee inversa por la derecha. Sin embargo, dicha demostración pasa por utilizar el **Axioma de elección**, un famoso axioma de la teoría de conjuntos. La clave de ello es notar que si f es sobreyectiva entonces el conjunto $f^{-1}(y)$ es no vacío para cada $y \in B$. Luego el axioma de elección nos permite elegir un $x \in f^{-1}(y)$ para cada $y \in B$ y de esta forma construir la inversa deseada.