Pauta Ayudantía 8 Álgebra Lineal

12 de mayo de 2022

Problema 1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal.

1. Si $S : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ es una aplicación lineal que conmuta con T, esto es, $ST = TS$, entonces $\ker(S)$ es un subespacio invariante bajo T.

Para un polinomio $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in K[X]$ defina la aplicación lineal

$$P(T) := a_0 \operatorname{id}_V + a_1T + a_2T^2 + \ldots + a_nT^n$$

Esto nos permite definir una función

$$\varphi_T : K[X] \to \mathcal{L}(\mathbf{V}), \qquad P \mapsto P(T)$$

2. Verifique que la función φ_T está bien definida y muestre que es lineal
3. Muestre que para todo $P \in K[X]$, $\ker(P(T))$ es invariante bajo T.
4. Pruebe que si $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ es un subespacio invariante bajo T y $P \in K[X]$, entonces $\mathbf{W}$ es invariante bajo $P(T)$.

Demostración.

1. Suponemos que S, T conmutan y sea $\mathbf{v} \in \ker S$, ie, $S(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Luego $S(T(\mathbf{v})) = T(S(\mathbf{v})) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ de donde obtenemos que $T(\mathbf{v}) \in \ker(T)$, teniendo así la conclusión.
2. Dado que la composición de aplicaciones lineales es lineal, deducimos que T^n es lineal para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, como $P(T)$ es una suma de aplicaciones lineales también es lineal, y la aplicación φ_T está bien definida pues $P(T) \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ para todo P. Para verificar que es lineal sea $\lambda \in K, P, Q \in K[X]$. Entonces si escribimos $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ y $Q(X) = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX_n$ (asumimos que son del mismo pues sino definimos todos los coeficientes cero desde el principal) vemos que

$$\begin{aligned}\varphi_T(\alpha P + Q) &= (\alpha a_0 + b_0) + (\alpha a_1 + b_1)X + \ldots + (\alpha a_n + b_n)X^n \\ &= \alpha(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n) \\ &= \alpha\varphi_T(P) + \varphi_T(Q)\end{aligned}$$

3. Gracias al punto 1. basta notar que para todo $P \in K[X]$, se tiene que T y $P(T)$ conmutan.
4. Sea $\mathbf{W}$ subespacio invariante bajo T. Entonces si $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ se tiene que

$$P(T)(\mathbf{v}) = a_0 \operatorname{id}(\mathbf{v}) + a_1T(\mathbf{v}) + a_2T^2(\mathbf{v}) + \ldots + a_nT^n(\mathbf{v}) \in \mathbf{W}$$

pues como $\mathbf{W}$ es invariante bajo T se tiene que $T^n(\mathbf{v}) \in \mathbf{W}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y luego $P(T)(\mathbf{v})$ es combinación lineal de elementos en $\mathbf{W}$. Así $P(T)(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}$.

□

Problema 3. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal. Se definen los siguientes subespacios vectoriales.

$$\mathbf{V}_+ = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : T\mathbf{v} = \mathbf{v}\} \qquad \mathbf{V}_- = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : T\mathbf{v} = -\mathbf{v}\}$$

Pruebe que, en efecto, los conjuntos anteriores son subespacios. Demuestre que si $T^2 = \operatorname{id}$, donde id denota la aplicación identidad en $\mathbf{V}$, entonces $\mathbf{V} = \mathbf{V}_+ \oplus \mathbf{V}_-$.

Demostración. Probamos primero que $\mathbf{V}_+$ es subespacio. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_+, \alpha \in K$. Luego

$$T(\alpha\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \Rightarrow \alpha\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_+$$

de donde se concluye. El caso de $\mathbf{V}_-$ es análogo.
Suponemos ahora que $T^2 = \text{id}$. Claramente $\mathbf{V}_+ \cap \mathbf{V}_- = \{0\}$ pues

$$T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} = -\mathbf{v} \Rightarrow 2\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Basta entonces con probar que $\mathbf{V}_+ + \mathbf{V}_- = \mathbf{V}$. Consideramos entonces $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y descomponemos como sigue

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{v} + \frac{1}{2}T(\mathbf{v}) - \frac{1}{2}T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + T(\mathbf{v})) + \frac{1}{2}(\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))$$

Notamos ahora que

$$T\left(\frac{1}{2}(\mathbf{v} + T(\mathbf{v}))\right) = \frac{1}{2}(T(\mathbf{v}) + \underbrace{T(T(\mathbf{v}))}_{=\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}(T(\mathbf{v}) + \mathbf{v}) \Rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{v} + T(\mathbf{v})) \in \mathbf{V}_+$$
$$T\left(\frac{1}{2}(\mathbf{v} - T(\mathbf{v}))\right) = \frac{1}{2}(T(\mathbf{v}) - \underbrace{T(T(\mathbf{v}))}_{=\mathbf{v}}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{v} - T(\mathbf{v})) \Rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{v} - T(\mathbf{v})) \in \mathbf{V}_-$$

Concluimos entonces que $\mathbf{V}_+ \oplus \mathbf{V}_- = \mathbf{V}$. □

Problema 4. Sean $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo K con $\dim(\mathbf{U}) = m$ y $\dim(\mathbf{V}) = n$. Sobre el producto cartesiano de conjuntos $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ se definen las siguientes operaciones:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \quad \alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v), \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}, \alpha \in K$$

en donde las sumas y productos correspondientes a las de los espacios respectivos. El producto $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ junto con las operaciones definidas posee entonces estructura de espacio vectorial sobre K. Con respecto a este espacio pruebe lo siguiente:

1. Verifique que $\{\mathbf{0}_U\} \times \mathbf{V}$ es subespacio vectorial de $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.
2. Demuestre que $\dim(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = \dim(\mathbf{U}) + \dim(\mathbf{V})$.
3. Considere $T : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ función. Se define el **grafo** de T como el conjunto

$$G = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{U} \times \mathbf{V} : T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\} \subseteq \mathbf{U} \times \mathbf{V}$$

   Demuestre que T es una aplicación lineal si y solo si G es subespacio vectorial de $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.
4. Sea $T : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal. Demuestre que $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = G \oplus (\{0\} \times \mathbf{V})$.

Demostración.

1. Sean $(\mathbf{0}, \mathbf{v}_1), (\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) \in \{\mathbf{0}\} \times \mathbf{V}, \lambda \in K$. Luego notamos que

$$\lambda(\mathbf{0}, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{v}_1) + (\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in \{0\} \times \mathbf{V}$$

2. Sean $\mathscr{B}_1\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $\mathscr{B}_2\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bases de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ respectivamente. Se probará que el conjunto

$$\mathscr{B} = \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{0}_V), \ldots, (\mathbf{u}_m, \mathbf{0}_V), (\mathbf{0}_U, \mathbf{v}_1), \ldots, (\mathbf{0}_U, \mathbf{v}_n)\} \tag{1}$$

   En primer lugar vemos al independencia lineal. Consideramos

$$\alpha_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{0}_V) + \ldots + \alpha_m(\mathbf{u}_m, \mathbf{0}_V) + \beta_1(\mathbf{0}_U, \mathbf{v}_1) + \ldots + \beta_n(\mathbf{0}_U, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_V)$$

Notemos entonces que

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(\mathbf{u}_1,\mathbf{0}_V)+\ldots+\alpha_m(\mathbf{u}_m,\mathbf{0}_V)+\beta_1(\mathbf{0}_U,\mathbf{v}_1)+\ldots+\beta_n(\mathbf{0}_U,\mathbf{v}_n)=\\
&=(\alpha_1\mathbf{u}_1,\mathbf{0}_V)+\ldots+(\alpha_m\mathbf{u}_m,\mathbf{0}_V)+(\mathbf{0}_U,\beta_1\mathbf{v}_1)+\ldots+(\mathbf{0}_U,\beta_n\mathbf{v}_n)=\\
&=(\alpha_1\mathbf{u}_1+\ldots+\alpha_m\mathbf{u}_m,\beta_1\mathbf{v}_1+\ldots+\beta_n\mathbf{v}_n)=(\mathbf{0}_U,\mathbf{0}_V)
\end{aligned}$$

Por la independencia lineal de $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ se deduce que todos los escalares son nulos.
Sea $(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbf{U}\times\mathbf{V}$. Luego, como $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ son bases existen $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_n\in K$ tales que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u},\mathbf{v})&=(\alpha_1\mathbf{u}_1+\ldots+\alpha_m\mathbf{u}_m,\beta_1\mathbf{v}_1+\ldots+\beta_n\mathbf{v}_n)\\
&=(\alpha_1\mathbf{u}_1+\ldots+\alpha_m\mathbf{u}_m,\mathbf{0}_V)+(\mathbf{0}_U,\beta_1\mathbf{v}_1+\ldots+\beta_n\mathbf{v}_n)\\
&=\alpha_1(\mathbf{u}_1,\mathbf{0}_V)+\ldots+\alpha_m(\mathbf{u}_m,\mathbf{0}_V)+\beta_1(\mathbf{0}_U,\mathbf{v}_1)+\ldots+\beta_n(\mathbf{0}_U,\mathbf{v}_n)
\end{aligned}$$

Concluimos así que $\mathscr{B}$ es base de $\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ y por lo tanto $\dim(\mathbf{U}\times\mathbf{V})=m+n$.

3. ($\Rightarrow$) Suponemos en primer lugar que T es lineal. Sean $(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1),(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2)\in G,\lambda\in K$. Por definición $T(\mathbf{u}_1)=\mathbf{v}_1$ y $T(\mathbf{u}_2)=\mathbf{v}_2$ y luego vemos que

$$\lambda(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_1)+(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_2)=(\lambda\mathbf{u}_1,\lambda T(\mathbf{u}_1))+(\mathbf{u}_2,T(\mathbf{u}_2))=(\lambda\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,T(\lambda\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2))\in G$$

Por lo tanto G es subespacio.
($\Leftarrow$) Suponemos ahora que G es subespacio. Esto significa que para todos $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbf{U},\lambda\in K$ se tiene que

$$\lambda(\mathbf{u}_1,T(\mathbf{u}_1))+(\mathbf{u}_2,T(\mathbf{u}_2))=(\lambda\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,\lambda T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2))\in G$$

Por definición del grafo entonces se tiene que $T(\lambda\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)=\lambda T(\mathbf{u}_1)+T(\mathbf{u}_2)$.

4. Notemos que todo vector $(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbf{U}\times\mathbf{V}$ puede ser escrito como

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{u},T(\mathbf{u}))+(\mathbf{0}_U,\mathbf{v}-T(\mathbf{u}))$$

donde $(\mathbf{u},T(\mathbf{u}))\in G,(\mathbf{0}_U,\mathbf{v}-T(\mathbf{u}))\in\{\mathbf{0}_U\}\times\mathbf{V}$. Resta entonces ver que $G\cap\{0\}\times\mathbf{V}$, y esto es claro del hecho que $T(\mathbf{0}_U)=\mathbf{0}_V$ por linealidad.

$\square$