Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 3 Álgebra Lineal

7 de abril de 2022

Problema 1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ números reales. Considere el conjunto $\mathcal{S}(a,b)$ de sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales que verifican la relación de recurrencia

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Demuestre que $\mathcal{S}(a,b)$ posee estructura de $\mathbb{R}-$espacio vectorial junto con las operaciones usuales

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(a,b)$$

Demostración. Verificamos en primer lugar que el conjunto de todas las sucesiones reales, denotado por $\mathbf{V}$, es un espacio vectorial con las operaciones definidas.

1. **Asociatividad:** Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{V}$. Utilizando la asociatividad de la suma en $\mathbb{R}$ vemos que

$$\begin{aligned}((u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) + (w_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= ((u_n + v_n) + w_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u_n + (v_n + w_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + ((v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}})\end{aligned}$$

2. **Neutro:** Denotemos como $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión tal que $u_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces es claro que dicha sucesión es el neutro pues

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (0)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + 0)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0 + u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} + (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{V}$$

3. **Inverso:** Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{V}$. Considerando entonces $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión tal que $v_n = -u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ vemos que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n + u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

4. **Conmutatividad:** Basta notar que por la conmutatividad de la suma en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n + u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{V}$$

Verificamos ahora las propiedades del producto.

1. Sean $\alpha \in \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{V}$. Entonces por las propiedades del producto de números reales

$$\begin{aligned}\alpha((u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= \alpha(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\alpha(u_n + v_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\alpha u_n + \alpha v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\alpha v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \alpha(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{V}$. Gracias a la distributividad del producto con la suma en $\mathbb{R}$ verificamos que se cumple

$$(\alpha + \beta)(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((\alpha + \beta)u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n + \beta u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\beta u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

3. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{V}$. Entonces por la asociatividad del producto en $\mathbb{R}$
$$(\alpha\beta)(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((\alpha\beta)u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha(\beta u_n))_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(\beta u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(\beta(u_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

4. Basta notar que
$$1(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbf{V}$$

Hemos probado así que las sucesiones reales conforman un espacio vectorial con las operaciones definidas en el enunciado. Por lo tanto, las propiedades probadas se heredan al subconjunto $\mathcal{S}(a,b)$. Para terminar, se debe ver que $\mathcal{S}(a,b)$ contiene al vector $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ y es cerrado bajo suma y producto. Es claro que $(0)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(a,b)$ pues la relación de recurrencia se verifica trivialmente. Sean ahora $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(a,b)$. Entonces
$$u_{n+2} + v_{n+2} = (au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n) = a(u_{n+1} + u_n) + b(v_{n+1} + v_n)$$
y así $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(a,b)$. De forma similar, si $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces
$$\alpha u_{n+2} = \alpha(au_{n+1} + bu_n) = a(\alpha u_{n+1}) + b(\alpha u_n)$$
y en consecuencia $\alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(a,b)$. $\square$

Problema 2. Sea K un cuerpo y $\mathbf{V}$ un $K-$espacio vectorial. Pruebe que la condición de existencia de neutro para la suma vectorial es equivalente al hecho de que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Suponemos en primer lugar que $\mathbf{V}$ verifica todas las propiedades de espacio vectorial y probemos que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. En efecto, se tiene que utilizando distributividad del producto escalar con respecto a la suma de K y la existencia de elemento inverso
$$0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v} \Rightarrow 0\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = 0$$
($\Longleftarrow$) Suponemos ahora que $\mathbf{V}$ verifica todas las propiedades de espacio vectorial a excepción de la existencia de elemento inverso, y en su lugar suponemos que se cumple $0\mathbf{v} = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Probamos entonces la existencia de elemento inverso como sigue. Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Entonces empleando distributividad y el hecho que $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v} = (1 + (-1))\mathbf{v} = 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{v} = v + (-1)v$$
de donde $(-1)\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ resulta ser el inverso de $\mathbf{v}$. $\square$

Problema 3. Sea K un cuerpo, $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre K y S un conjunto.

1. Pruebe que si se tiene una función $f : \mathbf{V} \to S$ biyectiva con inversa $f^{-1} : S \to \mathbf{V}$, entonces el conjunto S posee estructura de espacio vectorial sobre K dada por las operaciones
$$v \oplus w = f(f^{-1}(v) + f^{-1}(w)) \qquad \alpha \odot v = f(\alpha f^{-1}(v)), \qquad \forall \alpha \in K, v, w \in S$$

   Demostración. Debemos probar en primer lugar que $(S, \oplus)$ es un grupo abeliano.

   a) **Asociatividad:** Sean $u, v, w \in S$. Entonces
$$\begin{aligned}(u \oplus v) \oplus w &= f(f^{-1}(u \oplus v) + f^{-1}(w)) \\ &= f[f^{-1}(f[f^{-1}(u) + f^{-1}(v)]) + f^{-1}(w)] \\ &= f([f^{-1}(u) + f^{-1}(v)] + f^{-1}(w)] \\ &\overset{(*)}{=} f(f^{-1}(u) + [f^{-1}(v) + f^{-1}(w)]) \\ &= f(f^{-1}(u) + f^{-1}(f[f^{-1}(v) + f^{-1}(w)]) \\ &= f(f^{-1}(u) + f^{-1}(v \oplus w)) \\ &= u \oplus (v \oplus w)\end{aligned}$$

   ($*$) La suma en $\mathbf{V}$ es asociativa.

b) **Neutro:** Sea $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ su elemento neutro. Notamos entonces que

$$v \oplus f(\mathbf{0}) = f(f^{-1}(u) + f^{-1}(f(\mathbf{0}))) = f(f^{-1}(u) + \mathbf{0}) = f(f^{-1}(u)) = u \qquad \forall v \in S$$

y de manera similar se observa que $f(\mathbf{0}) \oplus v = v$.

c) **Inverso:** Sea $v \in S$ y denotemos $-v = f(-f^{-1}(v))$. Entonces se cumple

$$\begin{aligned} v \oplus (-v) = f(f^{-1}(v) + f^{-1}(-v)) &= f[f^{-1}(v) + f^{-1}(f(-f^{-1}(v)))] \\ &= f[f^{-1}(v) - f^{-1}(v)] = f(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

y similarmente $(-v) \oplus v = f(\mathbf{0})$

d) **Conmutatividad:** Basta utilizar la conmutatividad de la suma en $\mathbf{V}$

$$v \oplus w = f(f^{-1}(v) + f^{-1}(w)) = f(f^{-1}(w) + f^{-1}(v)) = w \oplus v \qquad \forall v, w \in S$$

Así, se tiene que $(S, \oplus)$ es un grupo abeliano. Se verifican ahora las propiedades de $\odot$

a) Sean $\alpha \in K, v, w \in S$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha \odot (v \oplus w) = f(\alpha f^{-1}(v \oplus w)) &= f[\alpha f^{-1}(f[f^{-1}(v) + f^{-1}(w)])] \\ &= f[\alpha f^{-1}(v) + \alpha f^{-1}(w)] \\ &= f[f^{-1}(f(\alpha f^{-1}(v))) + f^{-1}(f(\alpha f^{-1}(w)))] \\ &= f[f^{-1}(\alpha \odot u) + f^{-1}(\alpha \odot v)] \\ &= (\alpha \odot u) \oplus (\alpha \odot v) \end{aligned}$$

b) Sean $\alpha, \beta \in K, v \in S$. Verificamos entonces que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \odot v = f[(\alpha + \beta) f^{-1}(v)] &= f(\alpha f^{-1}(v) + \beta f^{-1}(v)) \\ &= f[f^{-1}(f[\alpha f^{-1}(v)]) + f^{-1}(f[\beta f^{-1}(v)]]) \\ &= f[f^{-1}(\alpha \odot v) + f^{-1}(\beta \odot v)] \\ &= (\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot v) \end{aligned}$$

c) Sean $\alpha, \beta \in K, v \in S$. Entonces

$$\begin{aligned} (\alpha\beta) \odot v = f((\alpha\beta) f^{-1}(v)) &= f(\alpha(\beta f^{-1}(v))) \\ &= f(\alpha f^{-1}[f(\beta f^{-1}(v))]) \\ &= f(\alpha f^{-1}[\beta \odot v]) \\ &= \alpha \odot (\beta \odot v) \end{aligned}$$

d) Sea $1 \in K$ el elemento neutro de $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. Entonces se tiene que

$$1 \odot v = f(1 f^{-1}(v)) = f(f^{-1}(v)) = v \qquad \forall v \in S$$

Hemos probado así todas las propiedades que debe satisfacer un espacio vectorial, por lo que se concluye la demostración. $\square$

2. Considere $S = \mathbb{R}^+$. Pruebe que S es un espacio vectorial con las operaciones

$$v \oplus w = vw \qquad \alpha \odot v = v^\alpha, \qquad \forall \alpha \in K, v, w \in S$$

Demostración. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$, la cual es biyectiva. Verifiquemos entonces que dicha función induce las operaciones deseadas. En efecto,

$$v \oplus w = f(f^{-1}(v) + f^{-1}(w)) = \exp(\ln(v) + \ln(w)) = \exp(\ln(v)) \exp(\ln(w)) = uv \qquad \forall v, w \in S$$

y además

$$\alpha \odot v = f(\alpha f^{-1}(v)) = \exp(\alpha \ln(v)) = \exp(\ln(v^{\alpha})) = v^{\alpha}$$

Así, por el ejercicio anterior se tiene que las operaciones definidas dotan a $\mathbb{R}^+$ de estructura de espacio vectorial pues encontramos una función que induce dichas operaciones. $\square$

3. Demuestre que $S = \mathbb{R}$ es un espacio vectorial junto con las operaciones

$$v \oplus w = v + w + 1 \qquad \alpha \odot v = \alpha v + \alpha - 1, \qquad \forall \alpha \in K, \forall v, w \in S$$

Demostración. Consideremos ahora la función biyectiva $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - 1$, cuya inversa es claramente $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$. Entonces se observa que

$$v \oplus w = g(g^{-1}(u) + g^{-1}(v)) = g((u + 1) + (v + 1)) = g(u + v + 2) = u + v + 1 \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\alpha \odot v = g(\alpha g^{-1}(v)) = g(\alpha(v + 1)) = g(\alpha v + \alpha) = \alpha v + \alpha - 1 \qquad \forall \alpha \in K, v \in \mathbb{R}$$

Se concluye entonces por la parte 1. $\square$

Problema 4. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ subespacios vectoriales de $\mathbf{V}$. Demuestre que $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ es subespacio si y solo si $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W}_2$ o $\mathbf{W}_2 \subseteq \mathbf{W}_1$.

Demostración. ($\Longleftarrow$) Si $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W}_2$, entonces $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_1$ es subespacio, de donde se obtiene el resultado. Si $\mathbf{W}_2 \subseteq \mathbf{W}_1$ entonces $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_2$ y la conclusión es análoga.
($\Longrightarrow$). Denotemos $\mathbf{W} := \mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$. Suponer por contradicción que $\mathbf{W}$ es subespacio pero $\mathbf{W}_1 \subsetneq \mathbf{W}_2$ y $\mathbf{W}_2 \subsetneq \mathbf{W}_1$. Lo anterior quiere decir que existen $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}_1 \setminus \mathbf{W}_2$ y $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2 \setminus \mathbf{W}_1$. Ahora, como $\mathbf{W}$ es subespacio entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}$. Esto significa que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_1$ o $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_1$. Luego $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (-\mathbf{v}_1) \in \mathbf{W}_1$ pues $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_1$ y $-\mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}_1$, de donde deducimos que $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_1$, lo cual es una clara contradicción. $\square$