Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 7 Álgebra Lineal

5 de mayo de 2022

Problema 1. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre K, $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$. Probar que toda aplicación lineal $S : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ puede ser extendida a una aplicación lineal $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, es decir, T es lineal y $T = S$ en $\mathbf{U}$.

Demostración. Sea $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ base de $\mathbf{U}$. Podemos entonces completar en una base $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbf{V}$. Definimos entonces

$$T\mathbf{u}_k = S\mathbf{u}_k, \qquad T\mathbf{u}_j = \mathbf{0}_\mathbf{W} \qquad 1 \leq k \leq m, m+1 \leq j \leq n$$

Por teorema visto en clases existe una única aplicación lineal que verifica las condiciones anteriores. Es claro que T es una extensión de S pues si $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{u}_m \in \mathbf{U}$ entonces

$$\begin{aligned} T\mathbf{u} &= T(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{u}_m) \\ &= \alpha_1 T(\mathbf{u}_1) + \ldots + \alpha_m T(\mathbf{u}_m) \\ &= \alpha_1 S(\mathbf{u}_1) + \ldots + \alpha_m S(\mathbf{u}_m) \\ &= S(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots \alpha_m\mathbf{u}_m) = S\mathbf{u} \end{aligned}$$

□

Problema 2. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal entre espacios vectoriales. Demuestre que

1. $T^2 = \mathbf{0} \iff \operatorname{Im} T \subseteq \ker T$
2. $T^2 = T \Rightarrow V = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$

Demostración.

1. $(\Rightarrow)$ Suponemos en primer lugar que $T^2 = \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} T$. Por definición existe $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ tal que $T(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$. Aplicando T a la identidad anterior $T(T(\mathbf{w})) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ donde la última igualdad viene de la hipótesis $T^2 = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\mathbf{v} \in \ker T$ y así $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.
   $(\Leftarrow)$ Suponer que $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$. Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, por definición $T(\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} T$ y luego $T(\mathbf{v}) \in \ker T$. Lo anterior se traduce en que $T(T(\mathbf{v})) = T^2(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ deduciendo que $T^2 = \mathbf{0}$.

2. Suponer que $T^2 = T$. Probaremos que $\mathbf{V} = \operatorname{Im} T + \ker T$ y $\operatorname{Im} T \cap \ker T = \{0\}$. Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Por hipótesis

   $$T(T(\mathbf{v})) = T(\mathbf{v}) \Rightarrow T(T(\mathbf{v})) - T(\mathbf{v}) = T(T(\mathbf{v}) - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

   es decir, $T(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \in \ker T$. Por lo tanto tenemos que

   $$\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{v} - T(\mathbf{v})}_{\in \ker T} + \underbrace{T(\mathbf{v})}_{\in \operatorname{Im} T} \in \operatorname{Im} T + \ker T$$

   deduciendo así que $\mathbf{V} = \operatorname{Im} T + \ker T$.
   Por otro lado, si $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} T \cap \ker T$ entonces $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ y además existe $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ tal que $T(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$, de donde $T(T(\mathbf{w})) = \mathbf{0} = T(\mathbf{w})$ y así $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, deduciendo $\operatorname{Im} T \cap \ker T \subseteq \{0\}$. La otra inclusión es trivial pues $\operatorname{Im} T$ y $\ker T$ son subespacios.

□

Problema 3. Considere $\mathbf{V} = \mathbb{C}[X]_3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de los polinomios con coeficientes complejos de grado ≤ 3. Considere las siguientes aplicaciones definidas en dicho espacio:

$$\begin{aligned} u : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, &\quad P \mapsto P' + P'' + XP(0) \\ v : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, &\quad P \mapsto X^3 P(0) - P' \end{aligned}$$

Con respecto a las aplicaciones definidas:

1. Pruebe que u, v son aplicaciones lineales.
2. Determine los kernel de u, v. Encuentre bases para dichos espacios.
3. Determine las imágenes de u, v. Encuentre bases.
4. Encuentre la aplicación inversa en caso de existir.

Demostración.

1. Sean $\alpha \in \mathbb{C}, P, Q \in \mathbf{V}$. Basta entonces notar que

$$\begin{aligned} u(\alpha P + Q) &= (\alpha P + Q)' + (\alpha P + Q)'' + X(\alpha P + Q)(0) \\ &= \alpha P' + Q' + \alpha P'' + Q'' + \alpha X P(0) + XQ(0) \\ &= \alpha(P' + P'' + XP(0)) + (Q' + Q'' + XQ(0)) \\ &= \alpha u(P) + u(Q) \end{aligned}$$

y similar para v

$$\begin{aligned} v(\alpha P + Q) &= X^3(\alpha P + Q)(0) - (\alpha P + Q)' \\ &= \alpha X^3 P(0) + X^3 Q(0) - \alpha P' - Q' \\ &= \alpha(X^3 P(0) - P') + (X^3 Q(0) - Q') \\ &= \alpha v(P) + v(Q) \end{aligned}$$

2. Veamos en primer lugar el kernel de u. Considere $P = aX^3 + bX^2 + cXd \in \mathbf{V}$.

$$\begin{aligned} u(aX^3 + bX^2 + cX + d) &= 3aX^2 + 2bX + c + 6aX + 2b + dX \\ &= 3aX^2 + (2b + 6a + d)X + (2b + c) \end{aligned}$$

Por lo tanto si $P \in \ker u$ se deberá cumplir que $a = 0$ y $c = d = -2b$, es decir,

$$\ker u = \{bX^2 - 2bX - 2b \in \mathbf{V} : b \in \mathbb{C}\} = \operatorname{span}(\{X^2 - 2X - 2\})$$

Para v se tiene que

$$v(aX^3 + bX^2 + cX + d) = dX^3 - 3aX^2 - 2bX - c$$

de donde es claro que $\ker v = \{\mathbf{0}\}$.

3. Gracias al cálculo anterior tenemos que

$$u(aX^3 + bX^2 + cX + d) = a(3X^2 + 6X) + b(2X + 2) + c + dX$$

deduciendo que

$$\operatorname{Im} u \subseteq \operatorname{span}(\{3X^2 + 6X, 2X + 2, X, 1\})$$

Notamos sin embargo que el conjunto anterior no es linealmente independiente pues $2X + 2$ es combinación lineal de X y 1. Ahora, por el teorema del rango $\dim(\mathbf{V}) = 4 = \dim(\operatorname{Im}(u)) + \dim(\ker(u))$ y así $\dim(\operatorname{Im}(u)) = 3$. Por lo tanto $\{3X^2 + 6X, X, 1\}$ es base de $\operatorname{Im} u$.
En el caso de v, se tiene que

$$v(aX^3 + bX^2 + cX + d) = dX^3 - 3aX^2 - 2bX - c$$

de donde deducimos que $\operatorname{Im} v = \mathbf{V}$.

4. Dado que la aplicación $\mathbf{v}$ es biyectiva, podemos encontrar su inversa.
   Considerar $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{V}$. Entonces $v^{-1}(P) = \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$ debe ser tal que

$$v(\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta) = \delta X^3 - 3\alpha X^2 - 2\beta X - \gamma = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

   Encontramos entonces que $\alpha = -b/3, \beta = -c/2, \gamma = -d, \delta = a$ y por lo tanto

$$v^{-1}(P) = \frac{-b}{3}X^3 - \frac{c}{2}X^2 - dX + a$$

□

Definición 1. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal. Decimos que un subespacio $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ es **invariante** bajo T si $T(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}$.

Problema 4. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Sea $\mathbf{W} = \operatorname{span}(\{\mathbf{v}, T(\mathbf{v}), T^2(\mathbf{v}), \ldots\})$ el subespacio generado por las potencias de $\mathbf{v}$ bajo T.

1. Mostrar que $\mathbf{W}$ es invariante.
2. Probar que $\mathbf{W}$ es el subespacio invariante por T más pequeño que contiene a $\mathbf{v}$, es decir, si $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ y $T(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$ entonces $\mathbf{W} \leq \mathbf{U}$.

Demostración.

1. Sea $\mathbf{w} \in \mathbf{W}$. Entonces existen escalares tales que

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v} + \alpha_2 T(\mathbf{v}) + \ldots + \alpha_{n+1} T^n(\mathbf{v})$$

   Aplicando T obtenemos que

$$T(\mathbf{w}) = \alpha_1 T(\mathbf{v}) + \alpha_2 T^2(\mathbf{v}) + \ldots + \alpha_{n+1} T^{n+1}(\mathbf{v}) \in \mathbf{W}$$

   obteniendo que $\mathbf{W}$ es invariante bajo T.

2. De manera inductiva se prueba que si $\mathbf{U}$ es un subespacio invariante bajo T que contiene a $\mathbf{v}$, entonces $T^n(\mathbf{v}) \in \mathbf{U}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$.
   En efecto, para $n = 0$ es obvio pues $T^n(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \in \mathbf{U}$, y suponiendo que $T^n(\mathbf{v}) \in \mathbf{U}$, entonces $T^{n+1}(\mathbf{v}) = T(T^n(\mathbf{v})) \in \mathbf{U}$ pues es invariante. Por lo tanto se obtiene directamente que $\mathbf{W} \leq \mathbf{U}$.

□

Problema 5. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal.

1. Pruebe que $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$ son invariantes bajo T.
2. Sea $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ invariante bajo T tal que $V = \operatorname{Im} T \oplus \mathbf{W}$. Demostrar $\mathbf{W} \subseteq \ker T$.

Demostración.

1. Basta notar que si $\mathbf{v} \in \ker T$, entonces $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ y luego $T(T(\mathbf{v})) = T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ por linealidad, deduciendo que $T(\ker T) \subseteq \ker T$. Similarmente, si $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} T$ existe $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ tal que $\mathbf{v} = T(\mathbf{w})$, y luego $T(\mathbf{v}) = T(T(\mathbf{w})) \in \operatorname{Im} T$ pues es la imagen de $T(\mathbf{w})$. Así también se tiene que $T(\operatorname{Im} T) \subseteq \operatorname{Im} T$.
2. En la Ayudantía 5 vimos la existencia del subespacio complementario, por lo que efectivamente existe $\mathbf{W}$ tal que $\mathbf{V} = \operatorname{Im} T \oplus \mathbf{W}$. Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$. Entonces como $\mathbf{W}$ es invariante $T(\mathbf{v}) \in \mathbf{W}$. Ahora, como $\operatorname{Im} T$ está en suma directa con $\mathbf{W}$ entonces $\operatorname{Im} T \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\}$, y dado que $T(\mathbf{v}) \in \mathbf{W}$, se tiene que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, por lo que $\mathbf{v} \in \ker T$.

□