Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 7 Álgebra Lineal

5 de mayo de 2022

Problema 1. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre K, $\mathbf{U} \leq \mathbf{V}$. Probar que toda aplicación lineal $S : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ puede ser extendida a una aplicación lineal $T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, es decir, T es lineal y $T = S$ en $\mathbf{U}$.

Problema 2. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal entre espacios vectoriales. Demuestre que

1. $T^2 = T \iff \operatorname{Im} T \subseteq \ker T$
2. $T^2 = T \Rightarrow V = \operatorname{Im} T \oplus \ker T$

Problema 3. Considere $\mathbf{V} = \mathbb{C}[X]_3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de los polinomios con coeficientes complejos de grado ≤ 3. Considere las siguientes aplicaciones definidas en dicho espacio:

$$u : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad P \mapsto P' + P'' + XP(0)$$
$$v : \mathbf{V} \to \mathbf{V}, \quad P \mapsto X^3P(0) - P'$$

Con respecto a las aplicaciones definidas:

1. Pruebe que u, v son aplicaciones lineales.
2. Determine los kernel de u, v. Encuentre bases para dichos espacios.
3. Determine las imágenes de u, v. Encuentre bases.
4. Encuentre la aplicación inversa en caso de existir.

Definición 1. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal. Decimos que un subespacio $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ es **invariante** bajo T si $T(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}$.

Problema 4. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Sea $\mathbf{W} = \operatorname{span}(\{\mathbf{v}, T(\mathbf{v}), T^2(\mathbf{v}), \ldots\})$ el subespacio generado por las potencias de $\mathbf{v}$ bajo T.

1. Mostrar que $\mathbf{W}$ es invariante.
2. Probar que $\mathbf{W}$ es el subespacio invariante por T más pequeño que contiene a $\mathbf{v}$, es decir, si $\mathbf{x} \in \mathbf{U} \leq \mathbf{V}$ y $T(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$ entonces $\mathbf{W} \leq \mathbf{U}$.

Problema 5. Sea $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal.

1. Pruebe que $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$ son invariantes bajo T.
2. Sea $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ invariante bajo T tal que $V = \operatorname{Im} T \oplus \mathbf{W}$. Demostrar $\mathbf{W} \subseteq \ker T$.