**Profesor:** Michael Karkulik
**Ayudante:** Sebastián Fuentes

# Pauta Ayudantía 4 Álgebra Lineal

14 de abril de 2022

**Problema 1.** El objetivo de este problema es estudiar cómo se comportan los subespacios vectoriales bajo la unión. En la ayudantía pasada se probó que la unión de dos subespacios vectoriales es un subespacio si y solo si uno de ellos está contenido en el otro. Consideramos ahora $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre un cuerpo $K$ y subespacios $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3$.

1. Suponiendo que $|K| > 2$, pruebe que $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{U}_3 \leq \mathbf{V}$ si y solo si dos de ellos están contenidos en el tercero. **Sugerencia:** Para probar ($\Rightarrow$) suponga en primer lugar que $\mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_3$ o $\mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_3$. Luego suponga que lo anterior no se cumple y escoja $a, b \in K \neq \{0\}$ tales que $a - b = 1$. En base a la hipótesis, tome combinaciones lineales adecuadas y deduzca que $\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3 \subseteq \mathbf{U}_1$.

   *Demostración.* ($\Leftarrow$) Si $\mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_3 \subseteq \mathbf{U}_1$ entonces $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_1$ y por lo tanto es subespacio. Si las inclusiones son diferentes el argumento es análogo.
   ($\Rightarrow$) Suponer que $\mathbf{U} := \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{U}_3$ es subespacio. Si $\mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_3$ entonces $\mathbf{W} = \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{U}_3$ es subespacio, y por el criterio para dos subespacios visto en la ayudantía anterior se tiene que $U_1 \cup \mathbf{W}$ es subespacio si y solo si $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{W}$, lo cual significa que $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_3$ o bien $\mathbf{W} = \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{U}_3 \subseteq \mathbf{U}_1$.
   Suponer entonces que $\mathbf{U}_2 \subsetneq \mathbf{U}_3$ y $\mathbf{U}_3 \subsetneq \mathbf{U}_2$. Por lo tanto podemos elegir

   $$x \in \mathbf{U}_2 \setminus \mathbf{U}_3, \qquad y \in \mathbf{U}_3 \setminus \mathbf{U}_2$$

   Además elegimos $a, b \in K \setminus \{0\}$ tales que $a - b = 1$ (basta elegir $a \neq 0, 1$ y $b = a - 1$).
   Probamos a continuación que $ax + y, bx + y \in \mathbf{U}_1$. Suponemos entonces por contradicción que $ax + y \notin U_1$. Dado que $x \in \mathbf{U}_2, ax \in \mathbf{U}_2$ y luego $ax + y \in \mathbf{U}$. Si $ax + y \in \mathbf{U}_2$ entonces $(ax + y) - ax = y \in \mathbf{U}_2$ lo cual es una contradicción. De la misma forma se observa que $(ax + y) \notin \mathbf{U}_3$, de donde concluimos $ax + y \in \mathbf{U}_1$. Mediante el mismo argumento se tiene que $bx + y \in \mathbf{U}_1$.
   Como $\mathbf{U}_1$ es subespacio entonces

   $$(ax + y) - (bx + y) = (a - b)x = x \in \mathbf{U}_1$$

   Lo anterior significa que $\mathbf{U}_2 \setminus \mathbf{U}_3 \subseteq \mathbf{U}_1$. Ahora, tomando $x + ay, x + by$ y rehaciendo el argumento anterior se llega a la conclusión de que $\mathbf{U}_3 \setminus \mathbf{U}_2 \subseteq \mathbf{U}_1$.
   Si $\mathbf{U}_2 \cap \mathbf{U}_3 = \emptyset$ entonces se tiene el resultado pues $\mathbf{U}_2 \setminus \mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_2$ y $\mathbf{U}_3 \setminus \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_3$. Ahora, si $\mathbf{U}_2 \cap \mathbf{U}_3 \neq \emptyset$ se debe verificar que $\mathbf{U}_2 \cap \mathbf{U}_3 \subseteq \mathbf{U}_1$ para concluir pues esto implicaría que

   $$\mathbf{U}_2 = (\mathbf{U}_2 \setminus \mathbf{U}_3) \cup (\mathbf{U}_2 \cap \mathbf{U}_3) \subseteq \mathbf{U}_1 \qquad \mathbf{U}_3 = (\mathbf{U}_3 \setminus \mathbf{U}_2) \cup (\mathbf{U}_2 \cap \mathbf{U}_3) \subseteq \mathbf{U}_1$$

   Sea entonces $v \in \mathbf{U}_2 \cap \mathbf{U}_3$ y escoger $w \in \mathbf{U}_2 \setminus \mathbf{U}_3 \subseteq \mathbf{U}_1$. Entonces $v + w \notin \mathbf{U}_2 \cap \mathbf{U}_3$ pues sino $(v + w) - v = w \in \mathbf{U}_3$. Esto significa que $v + w \in \mathbf{U}_1$ pues $v + w \in \mathbf{U}_2$ (ya que $u, v \in \mathbf{U}_2$ y $\mathbf{U}_2$ es subespacio) y como $v + w \notin \mathbf{U}_3$ se obtiene $v + w \in \mathbf{U}_2 \setminus \mathbf{U}_3 \subseteq \mathbf{U}_1$. Por lo tanto $v + w \in \mathbf{U}_1$ y entonces $v = (v + w) - w \in \mathbf{U}_1$. Se concluye entonces la demostración. $\square$

2. Para $|K| = 2$ dé un contraejemplo para el criterio anterior.

   *Demostración.* Considere $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ el cuerpo de enteros módulo 2 y $\mathbf{V} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. En dicho espacio vectorial definimos los subespacios $\mathbf{U}_1 = \operatorname{span}(0, 1), \mathbf{U}_2 = \operatorname{span}(1, 0), \mathbf{U}_3 = \operatorname{span}(1, 1)$. Notamos que $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2 \cup \mathbf{U}_3 = \mathbf{V}$ por lo que su unión es claramente subespacio, pero ninguno de los subespacios está contenido en otro. $\square$

**Problema 2.** Considere $K^{n \times n}$ el espacio vectorial de matrices de tamñano $n \times n$ sobre un cuerpo $K$ y los siguientes suconjuntos de dicho espacio:

- $\mathcal{S} = \{A \in K^{n \times n} : A = A^\top\}$

- $\mathcal{A} = \{A \in K^{n\times n} : A = -A^\top\}$
- $\mathcal{T}_l = \{A \in K^{n\times n} : a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}$
- $\mathcal{T}_u = \{A \in K^{n\times n} : a_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$

Respecto a los subconjuntos anteriores:

1. Demuestre que son subespacios vectoriales.
2. Pruebe que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_l = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_u$ y $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Explique de qué forma son las matrices en $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_u$
3. Para $n = 2$ encuentre conjuntos generadores de cada subespacio.

*Demostración.* Denotaremos por $0_{n\times n}$ a la matriz cuyas entradas son todas $0 \in K$. Por definición es claro que $0_{n\times n}$ pertenece a todos los subconjuntos del enunciado, así que basta verificar que estos son cerrados bajo la suma y el producto por escalar.

1. Verificamos a continuación el criterio de subespacio para cada uno de los subconjuntos del enunciado:
   - Probemos en primer lugar que $(A+B)^\top = A^\top + B^\top \ \forall A, B \in K^{n\times n}$. En efecto
   $$((A+B)^\top)_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^\top)_{ij} + (B^\top)_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$
   Por lo tanto, usando la propiedad demostrada previamente si $A, B \in \mathcal{S}$ entonces $(A+B)^\top = A^\top + B^\top = A + B$ y así $A + B \in \mathcal{S}$.
   Similarmente, si $\alpha \in K, A \in K^{n\times n}$ notamos que
   $$((\alpha A)^\top)_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha(A)_{ji} = \alpha(A^\top)_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$
   y por lo tanto $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$. De esta propiedad obtenemos entonces que para $\alpha \in K, A \in \mathcal{S}$ entonces $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top = \alpha A$ y así vemos que $\alpha A \in \mathcal{S}$, deduciendo que $\mathcal{S}$ es subespacio.
   - Usaremos las propiedades de la traspuesta probadas en el punto anterior. Sean $\alpha \in K, A, B \in \mathcal{A}$. Luego
   $$(A+B)^\top = A^\top + B^\top = -A + (-B) = -(A+B) \Rightarrow A + B \in \mathcal{A}$$
   y similar vemos que $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top = \alpha(-A) = -(\alpha A)$ lo que significa $\alpha A \in \mathcal{A}$.
   - Sean $A, B \in \mathcal{T}_l$. Es claro entonces que si $i < j$ se tiene que $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} = 0 + 0 = 0$ de donde $A + B \in \mathcal{T}_l$. Además para $\alpha \in K$ es claro que $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij} = \alpha 0 = 0$ cuando $i > j$, y en consecuencia $\alpha A \in \mathcal{T}_l$.
   - Ídem al punto anterior.
2. Veamos a continuación que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_l = \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_u$. Sea $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_l$. Lo anterior quiere decir que $A^\top = A$ y además $A_{ij} = 0$ siempre que $i < j$. Vemos entonces que $A_{ij} = (A^\top)_{ij} = A_{ji} = 0$ siempre que $i > j$, deduciendo así que $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_u$. Notamos además que si $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}_u$, entonces $A_{ij} \neq 0$ únicamente cuando $i = j$, por lo que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}_l$ es el conjunto de matrices diagonales de tamaño $n \times n$ sobre $K$.
   Ahora probamos $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Esto es claro pues si $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$ entonces $A = A^\top = -A^\top$, es decir,
   $$A_{ij} = -A_{ij} \Rightarrow A_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$
3. Finalmente, tomando $n = 2$ encontramos generadores para cada uno de los subespacios.
   - Sea $A \in \mathcal{S}$. Entonces existen $a, b \in K$ tales que
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:C}$$
   por lo que $\mathcal{S} = \operatorname{span}(\{B, C\})$.

- Similar a lo hecho anteriormente si $A \in \mathcal{A}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:D}$$

  se tiene que $\mathcal{A} = \mathrm{span}(\{D\})$.
- Si $A \in \mathcal{T}_l$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:E} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:F} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:G}$$

  y así $\mathcal{T}_l = \mathrm{span}(\{E, F, G\})$.
- Notando que $\mathcal{T}_u = \{A^\top : A \in \mathcal{T}_l\}$ es claro que $\mathcal{T}_u = \mathrm{span}(\{E^\top, F^\top, G^\top\})$.

□

**Problema 3.** Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre $K$ y $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \leq \mathbf{V}$ subespacios. Pruebe que las siguientes dos condiciones son equivalentes:

1. Para todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existen únicos $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.
2. $\mathbf{V} = \mathrm{span}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ y $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 = \{0\}$

*Demostración.* ((1) $\Rightarrow$ (2)) Suponemos en primer lugar que (1) es verdad. En primer lugar, es obio que $\mathbf{V} = \mathrm{span}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ pues cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ es combinación lineal de elementos en $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$. Por otro lado, si $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 \neq \emptyset$ entonces existe $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$ y se tendría que $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{w} + (-\mathbf{w})$ lo cual contradice la hipótesis ya que existen dos escrituras para $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ como suma de elementos en $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$.
((2) $\Rightarrow$ (1)) Dado que $\mathbf{V} = \mathrm{span}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ se tiene que todo $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se escribe como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ para ciertos $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}_2$, por lo que solo hay que probar que dicha representación es única. Suponer que $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ admite dos representaciones de la forma anterior, es decir, existen $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1 \in \mathbf{V}_1$ y $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 \in \mathbf{V}_2$ tales que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$. Entonces $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2) = 0$ de donde $\mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1 = -(\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2)$ y así deducimos que $\mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2 \in \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$ y así $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$. Se sigue también que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$.

□

La condición del Problema 3 se conoce como **suma directa** y se denota como $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_2$.

**Problema 4.** Considerando los subespacios del Problema 2 demuestre que $K^{n \times n} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$[1].

*Demostración.* Notar que toda matriz $A \in K^{n \times n}$ se puede descomponer en la siguiente forma

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top)$$

y observamos que

$$\left(\frac{1}{2}(A + A^\top)\right)^\top = \frac{1}{2}(A + A^\top)^\top = \frac{1}{2}(A^\top + A) = \frac{1}{2}(A^\top + A) \Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathcal{S}$$

De manera similar se verifica que $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathcal{A}$. Dado que en el problema 2 se probó que $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$ se tiene el resultado. □

[1] Observe que esto solo se cumple cuando $|K| > 2$.