Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 5 Álgebra Lineal

21 de abril de 2022

Problema 1. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre K.

1. Demuestre que si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$ es linealmente independiente entonces todo $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{A}$ es linealmente independiente.
2. Pruebe que si $\mathbf{A}$ es linealmente dependiente entonces todo $\mathbf{S} \supseteq \mathbf{A}$ es linealmente dependiente.
3. Demuestre que si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$ es un conjunto generador de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{S} \supseteq \mathbf{A}$ entonces $\mathbf{S}$ es también generador de $\mathbf{V}$.

Problema 2. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre K. Pruebe que $\mathbf{V}$ es de dimensión infinita si y sólo si existe una sucesión de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \in \mathbf{V}$ tales que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ es linealmente independiente para todo $n \in \mathbb{N}$.
Considere ahora $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ junto con las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar de matrices. Muestre que el conjunto $\{e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}\}$ es linealmente independiente para todo $n \in \mathbb{N}$. Deduzca que el espacio vectorial $C(\mathbb{R})$ de las funciones a valores reales continuas es de dimensión infinita.

Problema 3. El objetivo de este problema es probar algunas propiedades acerca del subespacio generado por un conjunto $\mathbf{A}$. Considere $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre K y $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{V}$ subconjuntos.

1. Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, muestre que $\operatorname{span}(\mathbf{A}) \subseteq \operatorname{span} \mathbf{B}$.
2. Pruebe que $\operatorname{span}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}(\operatorname{span}(\mathbf{A}))$.
3. $\operatorname{span}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \subseteq \operatorname{span}(\mathbf{A}) \cap \operatorname{span}(\mathbf{B})$

Problema 4. Sean $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ linealmente independientes en $\mathbf{V}$ y $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Pruebe que si $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_n + \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente entonces $\mathbf{w} \in \operatorname{span}(\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\})$.

Problema 5. El objetivo de este problema es demostrar la existencia de un subespacio conocido como **subespacio complementario**. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita, $\mathbf{W}_1$ subespacio de $\mathbf{V}$. Decimos que $\mathbf{W}_2 \leq \mathbf{V}$ es subespacio complementario de $\mathbf{W}_1$ si $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$. Pruebe que todo subespacio de $\mathbf{V}$ posee un complementario.