Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 10 Álgebra Lineal

2 de junio de 2022

Problema 1. Considere la aplicación lineal $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), p \mapsto xp$ definida en los espacios de polinomios reales. Considere las bases siguientes bases de los espacios anteriores

$$\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}, \mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2\}, \qquad \mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}, \mathcal{D} = \{1, -x, x^2, x^2 - x^3\}$$

Con respecto a las bases anteriores

1. Encuentre la matriz de f con respecto a las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$.
2. Encuentre la matriz de f con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

Demostración.

1. Para calcular dicha matriz debemos obtener las coordenadas de las imágenes de $\mathcal{A}$ bajo f en la base $\mathcal{C}$. Calculamos entonces que

$$\begin{aligned} f(1) &= x = 0(1) + 1(x) + 0(x^2) + 0(x^3) \\ f(x) &= x^2 = 0(1) + 0(x) + 1(x^2) + 0(x^3) \\ f(x^2) &= x^3 = 0(1) + 0(x) + 0(x^2) + 1(x^3) \end{aligned}$$

deduciendo entonces que

$$A^f_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Recordamos que el cambio de base corresponde a la matriz de la identidad en las bases respectivas, por lo que calculamos las coordenadas de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} 1 &= 1(1) + 0(x) + 0(x^2) \\ x - 1 &= (-1)(1) + 1(x) + 0(x^2) \\ (x-1)^2 &= 1(1) + (-2)(x) + 1(x^2) \end{aligned}$$

Así la matriz cambio de base queda

$$C_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz de cambio de base entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Para ello vemos que

$$\begin{aligned} 1 &= 1(1) + 0(-x) + 0(x^2) + 0(x^2 - x^3) \\ x &= 0(1) + (-1)(-x) + 0(x^2) + 0(x^2 - x^3) \\ x^2 &= 0(1) + 0(-x) + 1(x^2) + 0(x^2 - x^3) \\ x^3 &= 0(1) + 0(-x) + 1(x^2) + (-1)(x^2 - x^3) \end{aligned}$$

y así la matriz es

$$C_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, encontramos que la matriz de T en las bases $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ corresponde a

$$\begin{aligned} A^f_{\mathcal{B},\mathcal{D}} &= C_{\mathcal{C},\mathcal{D}} A_{\mathcal{A},\mathcal{C}} C_{\mathcal{B},\mathcal{A}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Problema 2. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita $\dim(\mathbf{V}) = n$ sobre un cuerpo K. En la ayudantía 8 se estudiaron polinomios de aplicaciones lineales, definiendo para $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal y para cada $P \in K[X]$ una aplicación lineal $P(T)$.

1. Demuestre que para todo $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ existe un polinomio $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tal que $P(T) = 0$.

Así como podemos componer polinomios con aplicaciones lineales, podemos también hacerlo con matrices. Para $P \in K[X], A \in K^{n\times n}$ definimos

$$P(A) := a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$

2. Encuentre $P \in \mathbb{R}[X]$ no nulo tal que $P(A) = 0$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Demuestre que si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es base de $\mathbf{V}$ y $P \in K[X]$, entonces

$$A^{P(T)}_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = P(A^T_{\mathcal{B},\mathcal{B}})$$

Demostración.

1. Consideremos las $n^2 + 1$ aplicaciones lineales $id_{\mathbf{V}}, T, T^2, \ldots, T^{n^2}$. Como sabemos que $\dim(L(\mathbf{V})) = n^2$, las aplicaciones anteriores deben ser linealmente independendientes, y por lo tanto existirán $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2}$ no todos nulos tales que

$$\alpha_0 \operatorname{id}_{\mathbf{V}} + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_{n^2} T^{n^2} = 0$$

   Basta entonces definir $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_{n^2} X^{n^2}$.

2. Utilizando la idea de la demostración anterior, consideramos las primeras cuatro potencias de $\mathcal{A}$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 22 & 39 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 22 & 39 \\ 78 & 139 \end{pmatrix}$$

   Tomando una combinación lineal de I_n, A, A^2, A^3, A^4 igual a 0, se encuentra que los coeficientes verifican las ecuaciones $a + 2b + 6c + 22e = 0, b + 3c + 11d + 39e = 0, a + 3b + 11c + 39d + 139e = 0$. Tomando $d = e = 0$ y $c = 1$ encontramos entonces que $a = -2, b = -3$ de donde deducimos la relación $A^2 - 3A - 2I = 0$.

3. En cátedra se demostró que (Lema 104), fijada la base $\mathcal{B}$, la aplicación $\Phi_{\mathcal{B}} : L(\mathbf{V}) \to K^{n\times n}, f \mapsto A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ que asocia a cada aplicación lineal su matriz en la base $\mathcal{B}$ es un isomorfismo. Esto significa que dadas $f, g \in L(\mathbf{V}), \alpha \in K$ entonces $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\alpha f + g) = \alpha\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) + \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$.
   Por otro lado, se probó que la matriz de una composición (Lema 105) viene dada por la relación

$$\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g \circ f) = \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) \cdot \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$$

   Lo anterior dice que en particular tomando $f = g = T$ se tiene que $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T^2) = (\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))^2$ e inductivamente vemos que

$$\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T^n) = (\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Sea ahora $P \in [X]$ dado por $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots a_2X^n$. Utilizando las propiedades mencionadas anteriormente tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(p(T)) &= \Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(a_0 \operatorname{id}_V + a_1T + a_2T^2 + \ldots + a_nT^n) \\
&= a_0\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\operatorname{id}_{\mathbf{V}}) + a_1\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) + a_2\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T^2) + \ldots + a_n(\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T^n)) \\
&= a_0I_n + a_1\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) + a_2(\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))^2 + \ldots + a_n(\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))^n \\
&= p(\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T))
\end{aligned}$$

□

Observación 1. La demostración del punto 1. del problema anterior también vale para matrices.

Problema 3. Sea $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ base de $\mathbf{V}$. Demuestre que la matriz de la aplicación $A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ es triangular superior si y solo si $A^f_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ es triangular inferior donde $\mathcal{C} = \{e_n, \ldots, e_1\}$.

Demostración. Para un vector base tenemos la escritura

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha^i_j e_j = \alpha^i_1 e_1 + \ldots \alpha^i_n e_n$$

y por definición entonces la columna i-ésima de $A^f_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ corresponde al vector $(\alpha^i_1 \quad \ldots \quad \alpha^i_n)^\top$. Ahora, en la base $\mathcal{C}$ escribimos

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta^i_j e_{n-j} = \beta^i_1 e_n + \ldots + \beta^i_n e_1$$

y por unicidad de las combinaciones lineales deducimos que $\beta^i_j = \alpha^i_{n-j}$ para todo $j = 1, \ldots, n$ y para todo $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto las columnas de $A^f_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ corresponden a las columnas de $A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ invertidas tanto vertical como horizontalmente, y así vemos que $A^f_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ es triangular inferior. □

Problema 4. Sea $\mathbf{V}$ espacio vrctorial de dimensión $\dim(\mathbf{V}) = n$ y $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal. Sea $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ subespacio de dimensión $\dim(\mathbf{W}) = m$ y supongamos que $\mathbf{W}$ es invariante bajo f, es decir, $f(\mathbf{W}) \subseteq \mathbf{W}$. Demuestre que existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{V}$ tal que la matriz $A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ de la aplicación es triangular superior por bloques

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

donde $A \in K^{m\times m}$. Generalice la idea anterior para probar que si $\mathbf{V} = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathbf{V}_k$ y además $f(\mathbf{V}_k) \subseteq \mathbf{V}_k$ para todo $k = 1, \ldots, p$ entonces para $\mathcal{B}_j$ base respectiva de $\mathbf{V}_j$ se tiene que

$$A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c:c:c} A_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & A_p \end{array}\right)$$

donde $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_p)$ es la base obtenida como la unión de bases de $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ donde $A_j \in K^{n_j \times n_j}$ con $n_j = \dim(\mathbf{V}_j)$.

Demostración. Consideremos $\{e_1, \ldots, e_m\}$ base de $\mathbf{W}$ y completémosla en una base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Como $\mathbf{W}$ es invariante bajo f se tendrá entonces que $f(e_k) \in \mathbf{W}$ para todo $1 \leq k \leq m$. Notar que la matriz $A^f_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = (a_{jk})_{j=1,k=1}^{n,n}$ se define como

$$f(e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j$$

Entonces de la condición de invariancia de $\mathbf{W}$ deducimos que para $i = 1, \ldots, m$ se tiene que

$$f(e_k) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} e_j \Rightarrow a_{jk} = 0 \quad \forall j > k$$

de donde se obtiene entonces que la matriz de la aplicación tendrá la forma señalada pues para los primeros k vectores de la base sus imágenes serán combianciones lineales de los primeros k vectores.
Ahora, en el caso en que tenemos una suma directa en subespacios invariantes y bases como en el enunciado, por la misma idea anterior tendremos que, dado un vector base perteneciente a $\mathbf{V}_k$, entonces su imagen pertenecerá también a $\mathbf{V}_k$ y será entonces combinación lineal de los vectores base $\mathcal{B}_k$, deduciendo la forma diagonal de la matriz. Detallamos esta idea como sigue: si $\mathcal{B}_j = \{\mathbf{v}_1^j, \ldots, \mathbf{v}_{n_j}^j\}$ es la base de $\mathbf{V}_j$ entonces se tiene que para cada $i \in \{1, \ldots, n_j\}$

$$f(\mathbf{v}_i) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n_k} a_{li} \mathbf{v}_l^k = \sum_{l=1}^{n_j} a_{li} \mathbf{v}_l^j \Rightarrow \alpha_{li} \neq 0 \quad \text{si} \quad n_1 + \ldots + n_{j-1} < l < n_1 + \ldots + n_{j+1}$$

□