Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 3 Álgebra Lineal

7 de abril de 2022

Problema 1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ números reales. Considere el conjunto $\mathcal{S}(a,b)$ de sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales que verifican la relación de recurrencia

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Demuestre que $\mathcal{S}(a,b)$ posee estructura de $\mathbb{R}-$espacio vectorial junto con las operaciones usuales

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \alpha(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(a,b)$$

Problema 2. Sea K un cuerpo y $\mathbf{V}$ un $K-$espacio vectorial. Pruebe que la condición de existencia de neutro para la suma vectorial es equivalente al hecho de que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Problema 3. Sea K un cuerpo, V un $K-$espacio vectorial y S un conjunto.

1. Pruebe que si se tiene una función $f : V \to S$ biyectiva, esta induce una estructura de $K-$espacio vectorial sobre S dada por

$$v \oplus w = f(f^{-1}(v) + f^{-1}(w)) \qquad \lambda \otimes v = f(\lambda f^{-1}(v)), \qquad \forall \lambda \in K, v, w \in S$$

2. Considere $S = \mathbb{R}^+$. Pruebe que S es un espacio vectorial con las operaciones

$$v \oplus w = vw \qquad \lambda \otimes v = v^\lambda, \qquad \forall \lambda \in K, v, w \in S$$

3. Demuestre que $S = \mathbb{R}$ junto con las operaciones

$$v \oplus w = v + w + 1 \qquad \lambda \otimes v = \lambda v + \lambda - 1, \qquad \forall \lambda \in K, v, w \in S$$

Problema 4. Sea $\mathbf{V}$ un $K-$espacio vectorial sobre un cuerpo K, y $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2$ subespacios vectoriales de $\mathbf{V}$. Demuestre que $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ es subespacio si y solo si $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W}_2$ o $\mathbf{W}_2 \subseteq \mathbf{W}_1$.