Pauta Ayudantía 9 Álgebra Lineal

26 de mayo de 2022

Problema 1. Sean $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales y $S : \mathbf{U} \to \mathbf{V}, T : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ aplicaciones lineales. Pruebe que

1. $\mathrm{rg}(T \circ S) \leq \mathrm{rg}(T)$. Si S es sobreyectivo entonces $\mathrm{rg}(T \circ S) = \mathrm{rg}(T)$.
2. $\mathrm{rg}(T \circ S) \leq \mathrm{rg}(S)$. La igualdad se cumple si y solo si $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(S) = \{0\}$.

Demostración.

1. Notar que $S(\mathbf{U}) \leq \mathbf{V}$, y en consecuencia $T(S(\mathbf{U})) \leq T(\mathbf{V})$, de donde $\dim(T(S(\mathbf{U}))) \leq \dim(T(\mathbf{V}))$. Usando esto vemos que

$$\mathrm{rg}(T \circ S) = \dim(T(S(\mathbf{U}))) \leq \dim(T(\mathbf{V})) = \mathrm{rg}(T)$$

Suponemos a continuación que S es sobreyectivo. En primer lugar, siempre se cumple que $\mathrm{Im}(T \circ S) \subseteq \mathrm{Im}(T)$. Sea ahora $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T)$. Entonces existe $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Por hipótesis existe $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ tal que $S(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, y así $T(S(\mathbf{u})) = \mathbf{w}$ de donde vemos que $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}(T \circ S)$.

2. Dado que $S(\mathbf{U}) \leq \mathbf{V}$ es subespacio, por el teorema del rango se tiene que $\dim(T(S(\mathbf{U})) \leq \dim(S(\mathbf{U}))$, pues es claro que $\dim(\ker(S)) \leq \dim(\ker(T \circ S))$ y luego

$$\mathrm{rg}(S) = \dim(\mathbf{U}) - \dim(\ker(S)) \geq \dim(\mathbf{U}) + \dim(\ker(T \circ S)) = \mathrm{rg}(T \circ S)$$

($\Rightarrow$) A continuación, suponemos que $\mathrm{rg}(T \circ S) = \mathrm{rg}(S)$, aplicando el teorema del rango a $T \circ S$ y a S se observa que

$$\dim(\mathbf{U}) = \mathrm{rg}(T \circ S) + \dim\ker(T \circ S) = \mathrm{rg}(S) + \dim\ker(S)$$

Por la hipótesis deducimos que $\dim\ker(T \circ S) = \dim\ker(S)$. Ahora, como $\ker(S) \subseteq \ker(T \circ S)$ entonces es claro que $\ker(S) = \ker(T \circ S)$. Luego tenemos que

$$(T \circ S)(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \iff S(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Por lo tanto si $\mathbf{v} = S(\mathbf{u}) \in \mathrm{Im}(S) \cap \ker(T)$ entonces $T(\mathbf{v}) = T(S(\mathbf{u})) = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} = S(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, encontrando que $\mathrm{Im}(S) \cap \ker(T) = \{0\}$.
($\Leftarrow$) Suponemos ahora que $\mathrm{Im}(S) \cap \ker(T) = \{0\}$. Sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ base de $\mathrm{Im}(S) \leq \mathbf{V}$. Probaremos que $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es base de $\mathrm{Im}(T \circ S)$. Es claro que el conjunto anterior genera $\mathrm{Im}(T \circ S)$ pues genera $\mathrm{Im}(T)$. Para la independencia lineal considerar

$$\alpha_1 T(\mathbf{v}_1) + \ldots + \alpha_m T(\mathbf{v}_m) = T(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$$

Luego $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m \mathbf{v}_m \in \ker(T) \cap \mathrm{Im}(S) = \{0\}$ de donde deducimos que $\alpha_i = 0$ por independencia lineal de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$

□

Problema 2. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales sobre un cuerpo K, $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ lineal y $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ base de $\mathrm{Im}(T)$. Demuestre que existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, K)$ tales que

$$T(\mathbf{v}) = \varphi_1(\mathbf{v})\mathbf{w}_1 + \ldots + \varphi_n(\mathbf{v})\mathbf{w}_n \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$$

Demostración. Dado que $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ es base de $\mathrm{Im}(T)$, para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ existen únicos $\alpha_1^{\mathbf{v}}, \ldots, \alpha_n^{\mathbf{v}} \in K$ tales que

$$T(\mathbf{v}) = \alpha_1^{\mathbf{v}}\mathbf{w}_1 + \ldots + \alpha_n^{\mathbf{v}}\mathbf{w}_n$$

Por la unicidad de la combinación lineal podemos definir entonces las funciones

$$\varphi_i : \mathbf{V} \to K, \qquad \mathbf{v} \mapsto \varphi_i(\mathbf{v}) := \alpha_i^{\mathbf{v}}$$

para cada $1 \leq i \leq n$. Bastará para concluir entonces con probar que las funciones definidas son lineales. Para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ se tienen entonces las escrituras

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}) &= \varphi_1(\mathbf{u})\mathbf{w}_1 + \ldots + \varphi_n(\mathbf{u})\mathbf{w}_n \\ T(\mathbf{v}) &= \varphi_1(\mathbf{v})\mathbf{w}_1 + \ldots + \varphi_n(\mathbf{v})\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

De manera similar para $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi_1(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w}_1 + \ldots \varphi_n(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w}_n$$

Por linealidad de T

$$\varphi_1(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w}_1 + \ldots \varphi_n(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w}_n = T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = (\varphi_1(\mathbf{u}) + \varphi_1(v))\mathbf{w}_1 + \ldots + (\varphi_n(\mathbf{u}) + \varphi_n(\mathbf{v}))\mathbf{w}_n$$

Como las combinaciones lineales son únicas para una base, se deduce que $\varphi_i(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi_i(\mathbf{u}) + \varphi_i(\mathbf{v})$ para cada $1 \leq i \leq n$. De manera totalmente similar se prueba que $\varphi_i(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\varphi_i(\mathbf{v})$ para $\lambda \in K$. $\square$

Problema 3. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineal. Muestre que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{V} = \ker(T^k) \oplus \mathrm{Im}(T^k)$$

Demostración. Notamos en primer lugar que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $\ker(T^k) \subseteq \ker(T^{k+1})$, lo cual se prueba fácilmente por inducción. Se obtiene así una cadena de subespacios

$$\ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \ldots \subseteq \ker(T^k) \subseteq \ker(T^{k+1}) \subseteq \ldots$$

Como $\mathbf{V}$ es dimensión finita, la cadena anterior debe estabilizarse para algún k, es decir, debe existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\ker(T^k) = \ker(T^{k+m})$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Probamos entonces que para dicho k se tiene la descomposición deseada. Gracias al teorema del rango sabemos que

$$\dim(\mathbf{V}) = \dim\ker(T^k) + \dim(\mathrm{Im}(T^k))$$

por lo que únicamente bastará con probar que $\ker(T^k) \cap \mathrm{Im}(T^k) = \{\mathbf{0}\}$. Sea $\mathbf{v} \in \ker(T^k) \cap \mathrm{Im}(T^k)$. Entonces $T^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ y al mismo tiempo existe $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tal que $T^k(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. Aplicando T^k a la identidad anterior obtenemos que $T^{2k}(\mathbf{u}) = T^k(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, y por la condición encontrada al comienzo se deduce $\mathbf{u} \in \ker(T^{2k}) = \ker(T^k)$ y en consecuencia $\mathbf{v} = T^k(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. $\square$

Problema 4. Considere el espacio de matrices reales $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y la aplicación $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

$$T(X) = AX + XA, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con respecto a la aplicación definida

1. Pruebe que es una aplicación lineal.
2. Encuentre bases de $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
3. Determine si T es inyectiva/sobreyectiva.
4. Pruebe que $\mathbb{R}^{2\times 2} = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

Demostración.

1. Considere $\lambda \in \mathbb{R}, X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Entonces vemos que

$$\begin{aligned} T(\lambda X + Y) &= A(\lambda X + Y) + (\lambda X + Y)A \\ &= \lambda AX + AY + \lambda XA + YA \\ &= \lambda(AX + XA) + (AY + YA) = \lambda T(X) + T(Y) \end{aligned}$$

probando que T es lineal.

2. Calculamos en primer lugar $\ker(T)$. Notamos entonces que por definición

$$\begin{aligned} X \in \ker(T) &\iff T(X) = \mathbf{0} \\ &\iff AX + XA = \mathbf{0} \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{12} & x_{11} \\ x_{22} & x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x_{21} = -x_{12} \\ x_{22} = -x_{11} \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto deducimos que una matriz en $X \in \ker(T)$ se escribe como

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ -x_{12} & -x_{11} \end{pmatrix} = x_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

obteniendo que

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es base de $\ker(T)$. Por lo tanto $\dim(\ker(T)) = 2$ y como $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, por el teorema del rango se infiere que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$. Bastará entonces encontrar dos matrices linealmente independientes que pertenezcan a $\mathrm{Im}(T)$ para obtener una base. Si tomamos $X = I_2$ entonces $T(I_2) = 2A$, y por lo tanto $A \in \mathrm{Im}(T)$. Tomando $X = A$ se tiene que $T(A) = 2A^2$ y así $A^2 \in \mathrm{Im}(T)$. Ahora, por verificación directa se observa que $A^2 = I_2$, y así $I_2 \in \mathrm{Im}(T)$. Dado que el conjunto $\{I_2, A\}$ es linealmente independiente, se concluye que es base de $\mathrm{Im}(T)$.

3. La aplicación T no es inyectiva pues $\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$. Tampoco es inyectiva pues como la aplicación está definida entre espacios de igual dimensión inyectividad y sobreyectividad son equivalentes.

4. Probamos en primer lugar que $\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. Gracias a las bases encontradas si $X \in \mathrm{Im}(T) \cap \ker(T)$ entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$X = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

encontrando que $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_1 = -\beta_1, \alpha_2 = -\beta_2$, relaciones de las cuales se deduce que $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$.
Ahora, por la fórmula de dimensión se tiene que

$$\begin{aligned} \dim(\ker(T) + \mathrm{Im}(T)) &= \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) - \dim(\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T)) \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

concluyendo así que $\mathbb{R}^{2\times 2} = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

$\square$