Ayudantía 14 Álgebra Lineal

4 de julio de 2022

Problema 1. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un automorfismo.

1. Muestre que si λ es valor propio de T, entonces $1/\lambda$ es valor propio de T^{-1}. Pruebe también que $\mathbf{V}_\lambda(T) = \mathbf{V}_{1/\lambda}(T^{-1})$.
2. Demuestre que si T es diagonalizable entonces T^{-1} es diagonalizable.
3. Pruebe que si T es diagonalizable entonces T^n es diagonalizable para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre K, $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal y $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ vector propio asociado al valor propio λ. Demuestre que $P(T)(\mathbf{v}) = P(\lambda)\mathbf{v}$ para todo polinomio $P \in K[X]$.

1. Si $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ vector propio asociado al valor propio λ probar que $P(T)(\mathbf{v}) = P(\lambda)\mathbf{v}$ para todo polinomio $P \in K[X]$, ie, $P(\lambda)$ es vector propio de $P(T)$ y $\mathbf{V}_\lambda(T) = \mathbf{V}_{P(\lambda)}(P(T))$.
2. Si $S \in \mathcal{L}(V)$ es invertible pruebe que $P(STS^{-1}) = SP(T)S^{-1}$.

Problema 3. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial y $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ aplicación lineal. Decimos que T es **nilpotente** si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = \mathbf{0}$. En base a esta definición

1. Si T es nilpotente, pruebe que 0 es su único valor propio.
2. Si T es nilpotente y diagonalizable entonces $T = 0$.
3. Demuestre que $\mathrm{id}_{\mathbf{V}} - T$ es invertible y que
$$(\mathrm{id}_{\mathbf{V}} - T)^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbf{V}} + T + T^2 + \ldots + T^{n-1}$$

Problema 4. Considere la sucesión de Fibonacci definida por

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \qquad F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

Considere la aplicación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y) = (y, x + y)$.

1. Muestre que $T^n(0, 1) = (F_n, F_{n+1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
2. Encuentre una base de $\mathbb{R}^2$ de vectores propios de T.
3. Deduzca la fórmula
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$