Ayudantía 6 Álgebra Lineal

28 de abril de 2022

Problema 1. Muestre que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq \mathbf{V}$ es una base del espacio vectorial $\mathbf{V}$ si y solo si

$$\mathbf{V} = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \mathbf{v}_n \rangle$$

Problema 2. Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial sobre K y $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ subespacios tales que $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ son bases de $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ respectivamente pruebe que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ es base de $\mathbf{V}$. Generalice esto para demostrar que

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(\mathbf{V}_i)$$

Problema 3. Considere el espacio vectorial $K^{n\times n}$ de las matrices $n\times n$ sobre el cuerpo K y los siguientes subespacios

$$\mathcal{S} = \{A \in K^{n\times n} : A = A^\top\} \qquad \mathcal{A} = \{A \in K^{n\times n} : A = -A^\top\}$$

Calcule $\dim(\mathcal{S})$ y $\dim(\mathcal{A})$.

Problema 4. El objetivo de este problema es estudiar cómo definir una estructura de espacio vectorial sobre un conjunto cociente (Ayudantía 1). Sea $\mathbf{V}$ espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K y $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}$ subespacio. Defina la siguiente relación

$$\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_2 \iff \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}$$

En relación a lo anterior, demuestre lo siguiente:

(a) Pruebe que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre $\mathbf{V}$.

La relación anterior define una partición sobre $\mathbf{V}$ cuyas clases de equivalencia son de la forma:

$$[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}' \in \mathbf{V} : \mathbf{v} \sim \mathbf{v}'\} = \{\mathbf{v}' \in \mathbf{V} : \mathbf{v} - \mathbf{v}' \in \mathbf{W}\} = \{\mathbf{v} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{W}\}$$

El conjunto de clases de equivalencia anteriores (conjunto cociente) se denotará como $\mathbf{V}/\mathbf{W}$. Defina a continuación las siguientes operaciones en $\mathbf{V}/\mathbf{W}$:

$$[\mathbf{v}_1] + [\mathbf{v}_2] := [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] \qquad \lambda \cdot [\mathbf{v}_1] := [\lambda \mathbf{v}_1] \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{V}, \forall \lambda \in K$$

(b) Verifique que las operaciones anteriores están bien definidas, i.e., no dependen del representante en cada clase de equivalencia.

Mediante cálculos directos se puede demostrar que $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas antes, donde el neutro viene dado por $[\mathbf{0}]$ y el inverso de $[\mathbf{v}] \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$ corresponde a $[-\mathbf{v}] \in \mathbf{V}/\mathbf{W}$. El espacio $\mathbf{V}/\mathbf{W}$ es conocido como el **espacio vectorial cociente** de $\mathbf{V}$ por $\mathbf{W}$.

(c) Pruebe que $\dim(\mathbf{V}/\mathbf{W}) = \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{W})$.
Sugerencia: Tome una base de $\mathbf{W}$, complétela en una base de $\mathbf{V}$ y en base a ella construya una de $\mathbf{V}/\mathbf{W}$.

(d) Considere $\mathbf{V} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{W} = \operatorname{span}((1,0))$ el *"eje X"*. Describa los elementos del espacio $\mathbf{V}/\mathbf{W}$.

(e) Considere $\mathbf{V} = K^{2\times 2}$ y $\mathbf{W} = \{A \in \mathbf{V} : a_{11} + a_{22} = 0\}$. Encuentre una base para $\mathbf{V}/\mathbf{W}$.