Pauta Ayudantía 12 Álgebra Lineal

16 de junio de 2022

Problema 1. Sean $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita. Demuestre que la aplicación

$$L : \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \to \mathcal{L}(W^*, \mathbf{V}^*), \qquad T \mapsto T^*$$

define un isomorfismo $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \cong \mathcal{L}(\mathbf{W}^*, \mathbf{V}^*)$.

Demostración. En primer lugar, se debe probar la linealidad de L. Para ello basta con notar que la aplicación traspuesta verifica que $(\lambda T + S)^* = \lambda T^* + S^*$ pues si $\varphi \in \mathbf{W}^*$ entonces

$$(\lambda T + S)^*(\varphi) = \varphi \circ (\lambda T + S) = \lambda\varphi \circ T + \varphi \circ S = \lambda T^*(\varphi) + S^*(\varphi)$$

Ahora, usando los resultados conocidos sobre dimensiones

$$\dim(\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})) = \dim(\mathbf{V}) \dim(\mathbf{W}) = \dim(\mathbf{V}^*) \dim(\mathbf{W}^*) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{W}^*, \mathbf{V}^*))$$

es decir, los espacios en donde está definida L poseen la misma dimensión, y por el **Corolario 87** bastará probar que es inyectiva para concluir.
Para ello podemos establecer el hecho que $T = \mathbf{0} \iff T^* = \mathbf{0}$. Si $T = 0$ la conclusión es obvia pues $T^*(\varphi) = \varphi \circ T = \mathbf{0}$ para todo $\varphi \in \mathbf{W}^*$. Ahora, suponemos que $T^* = \mathbf{0}$ y escojamos una base $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ de $\mathbf{W}$. Para $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ podemos escribir entonces $T(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{w}_k$ y podemos definir una aplicación lineal $\varphi \in \mathbf{W}^*$ tal que $\varphi(\mathbf{w}_k) = \alpha_k$ para cada $1 \leq k \leq n$. Vemos que

$$0 = T^*(\varphi)(\mathbf{v}) = \varphi(T(\mathbf{v})) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{w}_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi(\mathbf{w}_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2$$

deduciendo entonces que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ y en consecuencia $T = \mathbf{0}$. □

Problema 2. Considere $\mathbf{V}, \mathbf{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita, y los isomorfismos naturales $\varphi_{\mathbf{V}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}^{**}, \varphi_{\mathbf{W}} : \mathbf{W} \to \mathbf{W}^{**}$ entre un espacio y su bidual. Considere ahora $T \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ aplicación lineal. Demuestre que, bajo identificación con el bidual, T y su **doble traspuesta** $T^{**} : \mathbf{V}^{**} \to \mathbf{W}^{**}$ son iguales, esto es, se verifica la identidad $\varphi_{\mathbf{W}} \circ T = T^{**} \circ \varphi_{\mathbf{V}}$. En general, el hecho anterior se expresa diciendo que

$$\begin{tikzcd} \mathbf{V} \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{V}}"] \arrow[d, "T"'] & \mathbf{V}^{**} \arrow[d, "T^{**}"] \\ \mathbf{W} \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{W}}"] & \mathbf{W}^{**} \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

Demostración. Para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ denotaremos $\varphi_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) = J_{\mathbf{v}}$, donde $J_{\mathbf{v}}(f) = \langle f, \mathbf{v} \rangle = f(\mathbf{v})$ (definición de $\varphi_{\mathbf{V}}$) y lo mismo para $\varphi_{\mathbf{W}}$. Notamos que para $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$

$$(T^{**} \circ \varphi_{\mathbf{V}})(\mathbf{v}) = T^{**}(\varphi_V(\mathbf{v})) = T^{**}(J_{\mathbf{v}}) = J_{\mathbf{v}} \circ T^* \in \mathbf{W}^{**}$$

y por otro lado

$$(\varphi_W \circ T)(\mathbf{v}) = \varphi_{\mathbf{W}}(T(\mathbf{v})) = J_{T(\mathbf{v})} \in \mathbf{W}^{**}$$

Para concluir entonces se debe probar la igualdad entre funcionales $J_{\mathbf{v}} \circ T^* = J_{T(\mathbf{v})}$. Para ello tomamos $g \in \mathbf{W}^*$ y vemos que

$$(J_{\mathbf{v}} \circ T^*)(g) = J_{\mathbf{v}}(T^*(g)) = (T^*(g))(\mathbf{v}) = (g \circ T)(\mathbf{v}) = g(T(\mathbf{v})) = J_{T(\mathbf{v})}(g)$$

□

Problema 3. Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathbf{V})$ aplicaciones lineales.

1. Demuestre que ST y TS poseen los mismos valores propios.
2. Suponga ahora que S es un isomorfismo. Pruebe que T y STS^{-1} poseen los mismos valores propios. Encuentre una relación entre los valores propios de ambas aplicaciones.

Demostración.

1. Sea λ valor propio de ST, y suponemos en primera instancia que $\lambda \neq 0$. Por definición existe $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $ST(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, y definiendo $\mathbf{w} := T(\mathbf{v})$ vemos que
$$S(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow TS(\mathbf{w}) = T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{w}$$
Si probamos entonces que $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ λ será valor propio de TS. Dado que asumimos $\lambda \neq 0$ entonces $ST(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ de donde evidentemente $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$.
Suponemos ahora que $\lambda = 0$, es decir, $\ker(ST) \neq \{\mathbf{0}\}$. Queremos probar entonces que $\ker(TS) \neq \{\mathbf{0}\}$. Suponemos por contradicción que lo anterior no se cumple. Como $TS : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lo anterior significa que TS es invertible, y esto a su vez significa que T es sobreyectivo y S es inyectivo. Por lo tanto ambos son invertibles y así ST lo es, obteniendo una contradicción.
Hemos probado así que todo valor propio de ST es valor propio de TS. Esto concluye la demostración, pues basta intercambiar T, S y rehacer la demostración.

2. Sea λ valor propio de T. Entonces existe $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Como S es un isomorfismo, existe $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ tal que $S(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$, y se tiene que $S^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$. Tenemos entonces que
$$(S^{-1}TS)(\mathbf{u}) = S^{-1}(T(S(\mathbf{u}))) = S^{-1}(T(\mathbf{v})) = S^{-1}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda S^{-1}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u}$$
Vemos entonces que λ es un valor propio de $S^{-1}TS$ con vector propio asociado $S^{-1}(\mathbf{v})$.
Sea ahora λ valor propio de $S^{-1}TS$, i.e., existe $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ no nulo tal que $(S^{-1}TS)(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Usando que S es invertible podemos notar que
$$S^{-1}(TS(\mathbf{v})) = \lambda S^{-1}(S(\mathbf{v})) \Rightarrow TS(\mathbf{v}) = \lambda S(\mathbf{v})$$
de donde vemos que λ es valor propio de T con vector propio $S(\mathbf{v})$.

□