

Ayudantía 10 Estructuras Algebraicas

**Profesor:** Pedro Montero

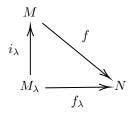
Ayudante: Sebastián Fuentes

30 de mayo de 2023

**Problema 1.** Sea A anillo y M un A-módulo finitamente generado. El objetivo de este problema es mostrar que todo endomorfismo  $u: M \to M$  sobrevectivo es un isomorfismo. Para ello proceda como sigue:

- 1. Utilice u para definir una estructura de A[X]-módulo sobre M tal que M = IM para  $I = \langle X \rangle$ .
- 2. Considere  $\varphi = \mathrm{id}_M : M \to M$  y encuentre  $P(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_{n-1} X + c_n$  en A[X] tal que  $P(\varphi)$  y  $c_i \in I^j$ .
- 3. Calcule  $P(\varphi)(m)$  para  $m \in M$  y concluya que u es inyectiva.

**Problema 2.** Sea A un anillo y  $\{M_{\lambda}\}_{{\lambda}\in\Lambda}$  una familia arbitraria de A-módulos. Decimos que un A-módulo M es suma directa de la familia  $\{M_{\lambda}\}_{{\lambda}\in\Lambda}$  si existen morfismos de A-módulos  $i_{\lambda}:M_{\lambda}\to M$  verificando la siguiente propiedad universal: para todo A-módulo N y toda colección de morfismos  $f_{\lambda}: M_{\lambda} \to N$ , existe un único morfismo de A-módulos  $f:M\to N$  tal que para cada  $\lambda\in\Lambda$  el siguiente diagrama conmuta:



- 1. Muestre que la suma directa es única módulo un único isomorfismo.
- 2. Demuestre que la suma directa definida en cátedra, es decir,

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda:=\{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda\text{ tal que }m_\lambda=0\text{ salvo finitos }\lambda\in\Lambda\}$$

es una suma directa de  $\{M_{\lambda}\}_{{\lambda}\in\Lambda}$  en el sentido anterior.

3. Concluya que la suma directa verifica  $\operatorname{Hom}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_{\lambda},N\right)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}\operatorname{Hom}\left(M_{\lambda},N\right)$ .

**Problema 3.** Sea A un anillo, M un A-módulo finitamente generado y  $\varphi: M \twoheadrightarrow A^n$  morfismo sobreyectivo de A-módulos. Demuestre que  $\ker(\varphi)$  es finitamente generado.

**Problema 4.** Sean A, B anillos locales con ideales maximales  $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$ , respectivamente. Sea  $f: A \to B$  un morfismo de anillos. Decimos que f es un morfismo local si  $f^{-1}(m_B) = m_A$ . Sean  $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$  anillos locales noetherianos y  $f: A \to B$  morfismo local. Suponga que:

- 1.  $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$  es un isomorfismo.
- 2.  $\mathfrak{m}_A \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$  es sobreyectivo.
- 3. B es un A-módulo finitamente generado. Demuestre que f es sobrevectiva.