Ayudantía 12 Estructuras Algebraicas

13 de junio de 2023

Problema 1. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y V, W $\mathbb{K}-$espacios vectoriales. Construya una aplicación lineal inyectiva

$$\Phi : V^* \otimes_{\mathbb{K}} W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, W)$$

Determine cuándo esta aplicación es un isomorfismo.

Problema 2. El objetivo de este problema es estudiar cómo interactúa el producto tensorial de módulos con el producto y suma directa. Consideremos entonces A un anillo y M un $A-$módulo y $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección arbitraria de $A-$módulos.

1. Demuestre que la suma directa conmuta con el producto tensorial, ie,

$$M \otimes_A \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\right) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} (M \otimes_A N_i)$$

2. Considere $M = \mathbb{Z}, N_i = \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ con $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y muestre que en este caso el producto tensorial y el producto directo no conmutan.

Problema 3. El objetivo de este problema es comprender un caso en que el producto tensorial es 0, y encontrar condiciones bajo las cuales esto no sucede. El siguiente punto da un ejemplo de esta situación.

1. Sea A un anillo y $\mathbb{K} = \mathrm{Fr}(A)$ su cuerpo de fracciones. Muestre que $(\mathbb{K}/A) \otimes_A (\mathbb{K}/A) = 0$.

La meta a continuación es probar el siguiente criterio: si A es un anillo local y sean M, N $A-$módulos finitamente generados. Demuestre que si $M \otimes_A N = 0$ entonces $M = 0$ o bien $N = 0$. Para ello siga los siguientes pasos.

2. Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A. Utilice la exactitud del producto tensorial para demostrar que existe un morfismo sobreyectivo $M \otimes_A N \twoheadrightarrow (M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N)$ y deduzca que $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_A (N/\mathfrak{m}N) = 0$.
3. Denote por $\mathbb{K} = A/\mathfrak{m}$ el cuerpo residual de A. Use la propiedad universal del producto tensorial para concluir que $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_{\mathbb{K}} (N/\mathfrak{m}N) = 0$.
4. Concluya empleando el Lema de Nakayama.

Problema 4. El objetivo de este problame es introducir el álgebra tensorial de un $A-$módulo y probar propiedades básicas. Sea $A-$anillo y M un $A-$módulo. Para cada $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ definimos la $k-$ésima potencia tensorial de M como $\mathcal{T}^k(M) := M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$ donde hay k factores. Definimos el *álgebra tensorial* de M como:

$$\mathcal{T}(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(M)$$

donde por convención definimos $\mathcal{T}^0(M) := A$.

1. Muestre que $\mathcal{T}(M)$ es una $A-$álgebra tal que $\mathcal{T}^i(M)\mathcal{T}^j(M) \subseteq \mathcal{T}^{i+j}(M)$.
2. (Propiedad Universal) Demuestre que para toda $A-$álgebra B y todo morfismo de $A-$módulos $\varphi : M \to B$, existe un único morfismo de $A-$álgebras $\Phi : \mathcal{T}(M) \to B$ tal que $\Phi|_M = \varphi$.
3. (Functorialidad) Sea $\varphi : M \to N$ morfismo de $A-$módulos. Pruebe que existe un único morfismo de $A-$álgebras $\mathcal{T}(\varphi)$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "i_M"] & N \arrow[d, hook, "i_N"] \\
\mathcal{T}(M) \arrow[r, "\mathcal{T}(\varphi)"'] & \mathcal{T}(N)
\end{tikzcd}
$$

y más aún, si $\psi : N \to P$ es otro morfismo de $A-$módulos entonces $\mathcal{T}(\psi \circ \varphi) = \mathcal{T}(\psi) \circ \mathcal{T}(\varphi)$.