Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 3 Estructuras Algebraicas

28 de marzo de 2023

Problema 1.(Lema de Cauchy) Sea G un grupo finito y p un número primo que divide a $|G|$. Considere el conjunto

$$X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p | g_1 \cdots g_p = 1\}$$

Defina una acción de grupo conveniente de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en X y demuestre que G posee un elemento de orden p.

Problema 2. Sea G un grupo finito actuando sobre un conjunto finito X. Defina el conjunto

$$E := \{(g, x) \in G \times X | g \cdot x = x\}$$

y para cada $g \in G$ defina su conjunto de puntos fijos

$$\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X | g \cdot x = x\}$$

Demuestre que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = |X/G|$$

donde X/G denota el conjunto de órbitas de la acción $G \curvearrowright X$. ¿Qué significa lo anterior en el caso de acciones transitivas?

Problema 3. Sea G un grupo.

1. Suponga que G es finito y sea p el divisor primo minimal de $|G|$. Pruebe que todo subgrupo de G con índice p es normal.
2. Suponga ahora que G es infinito y que este posee un subgrupo estricto $H \leq G$ de índice finito. Demuestre que G no es simple.

Problema 4. Sea G grupo finito no trivial y $G \curvearrowright X$ una acción sobre un conjunto finito X. Suponga que para todo $g \in G \setminus \{e\}$ existe un único $x \in X$ tal que $g \cdot x = x$.

1. Defina $Y := \{x \in X | \mathrm{Stab}_G(x) \neq \{e\}\}$. Muestre que Y es estable bajo la acción de G.
2. Denote $n = |Y \setminus G|$ el número de órbitas de Y bajo la acción de G y una coleccion de elementos $y_1, \dots, y_n \in Y$, uno por cada órbita, y denote $m_i = |\mathrm{Stab}_G(y_i)|$. Definiendo el conjunto $Z = \{(g, x) \in (G \setminus \{e\}) \times X | g \cdot x = x\}$, demuestre que
$$1 - \frac{1}{|G|} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$
3. Deduzca que $n = 1$ y concluya que X tiene un único punto fijo bajo la acción de G.

Problema 5. Considere el cuerpo finito $G = \mathbb{F}_p$ con p primo y su espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)$. Demuestre que

$$|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_p)| = 1 + p + p^2 + \ldots + p^n$$