Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 13 Estructuras Algebraicas

20 de junio de 2023

Problema 1.

1. Sea S un subconjunto multiplicativamente cerrado de un anillo A, y sea M un módulo A generado finitamente. Demostrar que $S^{-1}M = 0$ si y sólo si existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

2. Sea $I \subseteq A$ ideal y $S = 1 + I$. Muestre que $S^{-1}I$ está contenido en el ideal de Jacobson de $S^{-1}A$.

Demostración. Suponer que $S^{-1}M = 0$ y sea $\{m_1, \dots, m_n\}$ un conjunto generador de M. Por hipótesis tenemos entonces que $\frac{m_i}{1} = 0$ en $S^{-1}M$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por definición de localización para cada $i = 1, \dots, n$ existe entonces $s_i \in S$ tal que $s_i m_i = 0$ en M. Definiendo $s := s_1 \cdots s_n \in S$ tenemos que $sM = 0$ pues dicho elemento anula un conjunto de generadores.
Suponemos ahora que existe $s \in S$ tal que $sM = 0$. Así, para cualquier $\frac{m}{t} \in S^{-1}M$ con $m \in M, t \in S$ tenemos que $\frac{m}{t} = \frac{sm}{st} = \frac{0}{st} = 0$ en $S^{-1}M$.
Sea $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$ con $a \in I, s \in S$. Recordemos la siguiente caracterización del ideal de Jacobson:

$$J(A) = \{a \in A \text{ tal que } 1 + ax \text{ es invertible } \forall x \in A\}$$

Debemos probar entonces que para cualquier $b/t \in S^{-1}A$ con $b \in A, t \in S$, $1 + (a/s)(b/t)$ es una unidad en $S^{-1}A$. Calculamos directamente:

$$1 + \frac{a}{s}\frac{b}{t} = 1 + \frac{ab}{st} = \frac{st + ab}{st}$$

Como $s, t \in S = 1 + I$ y $ab \in I$ vemos que $st, st + ab \in S$, así que por tanto $(st)/(st + ab) \in S^{-1}(A)$ es el inverso de $1 + (a/s)(b/t)$.

$\square$

Problema 2. Sea A un anillo, $f \in A$. Demuestre que:

$$A_f \cong A[X]/\langle fX - 1\rangle$$

donde A_f denota la localización de A en f.

Demostración. Definimos el morfismo de anillos:

$$\varphi : A[X] \twoheadrightarrow A_f, \quad X \mapsto \frac{1}{f}$$

el cual es claramente sobreyectivo pues si $\frac{a}{f^n} \in A_f$ entonces $\varphi(aX^n) = \frac{a}{f^n}$. Basta probar entonces que $\ker(\varphi) = \langle fX - 1\rangle$. La contención $\langle fX - 1\rangle \subseteq \ker(\varphi)$ es clara pues

$$\varphi(fX - 1) = f\frac{1}{f} - 1 = 0$$

Sea $P \in \ker(\varphi)$. Probaremos primero que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n P \in \langle fX - 1\rangle$. Tenemos que:

$$\varphi(P(X)) = P(1/f) = 0 \quad \text{en } A_f \quad \Rightarrow \quad f^n P(1/f) = 0 \text{ en } A, \quad n \geq \deg(P)$$

donde la conclusión se tiene simplemente de la definición de A_f. Escribiendo entonces $f^n P(X) = Q(fX)$ para cierto $Q \in A[X]$ (simplemente reacomodando los coeficientes multiplicándolos por f si fuera necesario), tenemos que:

$$Q(1) = f^n P(1/f) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(X) = (X - 1)R(X)$$

para cierto $R \in A[X]$. Llegamos entonces a que:

$$f^n P(X) = Q(fX) = (fX-1)R(fX) \in \langle fX - 1 \rangle$$

Ahora, notemos que $1 = fX - (fX-1)$, y elevando a n dicha expresión y escribiendo los términos de manera adecuada obtenemos:

$$1 = f^n X^n + R(X)(fX-1) \quad \Rightarrow \quad P(X) = X^n(f^n P(X)) + P(X)R(X)(fX-1) \in \langle fX-1 \rangle$$

con lo cual se concluye la demostración. □

Problema 3. El objetivo de este problema es estudiar cómo interactúan la localización y el producto tensorial. Sea A anillo, M, N $A-$módulos y $S \subseteq A$ conjunto multiplicativo. Muestre que

$$S^{-1}(M \otimes_A N) \cong (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}(A)} (S^{-1}N)$$

Demostración. Definimos la aplicación:

$$\varphi : (S^{-1}M) \times (S^{-1}N) \to S^{-1}(M \otimes_A N), \quad \left(\frac{m}{s}, \frac{n}{t}\right) \mapsto \frac{m \otimes n}{st}$$

que es claramente $S^{-1}A$-bilineal, pues si consideramos $\frac{a}{s'} \in S^{-1}A$ tenemos que:

$$\varphi\left(\frac{a}{s'} \cdot \frac{m}{s}, \frac{n}{t}\right) = \varphi\left(\frac{am}{s's}, \frac{n}{t}\right) = \frac{(am) \otimes n}{s'st} = \frac{a(m \otimes n)}{s'st} = \frac{a}{s'} \cdot \frac{m \otimes n}{st} = \frac{a}{s'}\varphi\left(\frac{m}{s}, \frac{n}{t}\right)$$

y el caso para la otra coordenada es análogo. En el caso de la suma la demostración es similar (ejercicio). Por la propiedad universal del cociente φ induce el morfismo de $S^{-1}A-$módulos:

$$\psi : (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}(A)} (S^{-1}N) \to S^{-1}(M \otimes_A N), \quad \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} \mapsto \frac{m \otimes n}{st}$$

Para ver que este morfismo es de hecho un isomorfismo podemos construir su inversa de manera directa. Dicha inversa viene dada por:

$$\chi : S^{-1}(M \otimes_A N) \to (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}(A)} (S^{-1}N), \quad \frac{m \otimes n}{s} \mapsto \frac{1}{s}\left(\frac{m}{1} \otimes \frac{n}{1}\right)$$

La idea para construir esta inversa es notar que un elemento de $S^{-1}(M \otimes_A N)$ es una fracción cuyo numerador es un tensor $m \otimes n$ con $m \in M, n \in N$, y su denominador es $s \in S \subseteq A$. Por lo tanto, dado que disponemos de un único escalar simplemente lo dejamos fuera, y cada elemento del tensor lo vemos dentro de su localización respectiva (como una fracción de denominador 1). Vemos que:

$$\chi \circ \psi\left(\frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t}\right) = \chi\left(\frac{m \otimes n}{st}\right) = \frac{1}{st}\left(\frac{m}{1} \otimes \frac{n}{1}\right) = \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t}$$

y similar:

$$\psi \circ \chi\left(\frac{m \otimes n}{s}\right) = \psi\left(\frac{1}{s}\left(\frac{m}{1} \otimes \frac{n}{1}\right)\right) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{m}{1} \otimes \frac{n}{1}\right) = \frac{1}{s} \cdot \frac{m \otimes n}{1} = \frac{m \otimes n}{s}$$

así que ψ, χ son morfismos inversos. □

Problema 4. Sea A un anillo, $S \subseteq A$ multiplicativo. Sea A un anillo y sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ ideal primo. Demuestre que

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p})$$

donde $\mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p})$ denota el cuerpo de fracciones del anillo cociente $A/\mathfrak{p}$.

Demostración. Consideremos en primer lugar la proyección al cociente $\pi : A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$. Definimos entonces el morfismo:

$$\varphi : A_{\mathfrak{p}} \mapsto \mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p}), \quad \frac{a}{s} \mapsto \frac{\pi(a)}{\pi(s)}$$

Probamos a continuación que este morfismo está bien definido, es decir, que dadas dos fracciones equivalentes en $A_{\mathfrak{p}}$ estas generan el mismo valor bajo φ y que efectivamente toma valores en $\mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p})$. Esto último se debe simplemente al hecho de que para $\frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}}$ siempre $s \notin \mathfrak{p}$, así que $\pi(s) \neq 0$. Sean $a, a' \in A, s, s' \in \mathfrak{p}$ tales que $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ en $A_{\mathfrak{p}}$. Por definición existe $t \in S$ tal que $t(as' - a's) = 0$ y luego aplicando π obtenemos que $\pi(t)(\pi(a)\pi(s') - \pi(a')\pi(s)) = 0$ en $A/\mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es primo sabemos que $A/\mathfrak{p}$ es un dominio así que como $\pi(t) \neq 0$ llegamos a:

$$\pi(a)\pi(s') = \pi(a')\pi(s) \text{ en } A/\mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi(a)}{\pi(s)} = \frac{\pi(a')}{\pi(s')} \text{ en } \mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p})$$

por lo que φ está bien definida. Dado que la proyección π es sobreyectiva, se tiene directamente que φ es sobreyectiva pues tanto numerador como denominador puede alcanzar cualquier valor. Para finalizar probemos que $\ker(\varphi) = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Sea $\frac{a}{s} \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, es decir, $a \in \mathfrak{p}$. Entonces $\pi(a) = 0$, así que $\varphi(\frac{a}{s}) = 0$ y así $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subseteq \ker(\varphi)$. Ahora, dado que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ tenemos de hecho la igualdad y por lo tanto obtenemos un isomorfismo $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p})$. □

Problema 5. El objetivo de este problema es estudiar el concepto de **soporte** de un módulo. Sea A un anillo, M un módulo A. El soporte de M, denotado por $\mathrm{Supp}(M)$, se define como el conjunto de ideales primos $\mathfrak{p}$ de A tal que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

1. Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ es una sucesión exacta, entonces $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'')$.
2. Sea $\{M_\lambda\}$ una colección de $A-$módulos, $S \subseteq A$ multiplicativo. Demuestre que la suma directa y la localización conmutan, ie,
$$S^{-1}\left(\bigoplus M_\lambda\right) \cong \bigoplus S^{-1}M_\lambda$$
Use esto para probar que si $M = \sum M_\lambda$, entonces $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup \mathrm{Supp}(M_\lambda)$.
3. Si M es finitamente generado, entonces $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{ann}(M))$ (y por lo tanto es un subconjunto cerrado de $\mathrm{Spec}(A)$.
4. Si M, N son finitamente generados, entonces $\mathrm{Supp}(M \otimes_A N) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N)$

Demostración.

1. Sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(M)$. Dado que la localización es exacta, obtenemos la sucesión exacta:
$$0 \to M'_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}} \to M''_{\mathfrak{p}} \to 0$$
Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M')$ por definición $M'_{\mathfrak{p}} \neq 0$, y dado que $M'_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow M_{\mathfrak{p}}$ es inyectivo, entonces $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ y $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$. Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M'')$, de manera similar como $M''_{\mathfrak{p}} \neq 0$ y $M_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow M''_{\mathfrak{p}}$ es sobreyectivo, entonces $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Hemos probado entonces que $\mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'') \subseteq \mathrm{Supp}(M)$.
Si suponemos que $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'')$ entonces la sucesión exacta en localización se reduce a $0 \to 0 \to M_{\mathfrak{p}} \to 0 \to 0$, y claramente $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M)$, de lo que se sigue la conclusión.
2. Por exactitud tenemos que las inclusiones $M_\lambda \hookrightarrow M$ inducen morfismos sobreyectivos $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}} \subseteq M_{\mathfrak{p}}$, de donde tenemos que si $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}} \neq 0 \Rightarrow M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, es decir, $\bigcup \mathrm{Supp}(M_\lambda) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$. Demostramos ahora que la localización conmuta con la suma directa. Para ello notamos que:
$$S^{-1}\left(\bigoplus M_\lambda\right) \cong S^{-1}A \otimes_A \left(\bigoplus M_\lambda\right) \cong \bigoplus \left(S^{-1}A \otimes_A M_\lambda\right) \cong \bigoplus S^{-1}M_\lambda$$
Ahora, por definición tenemos un morfismo sobreyectivo $\bigoplus M_\lambda \twoheadrightarrow \sum M_\lambda = M$, el cual por lo tanto permite inducir un morfismo $\bigoplus (M_\lambda)_{\mathfrak{p}} \twoheadrightarrow M_{\mathfrak{p}}$, y por lo tanto si $(M_\lambda)_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo λ entonces $M_{\mathfrak{p}} = 0$, es decir, $\mathrm{Supp}(M) \subseteq \bigcup \mathrm{Supp}(M_\lambda)$.

3. Notemos en primer lugar que, para $m \in M$ tenemos que $\frac{m}{1} = 0$ en $M_{\mathfrak{p}}$ si y solo si existe $a \in S = A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $am = 0$. Sea $m_1, \ldots, m_n \in M$ un conjunto de generadores de M. Para cada generador podemos considerar su anulador $\operatorname{ann}(m_i) = \{a \in A : am_i = 0\}$ el cual es claramente un ideal de A, y dado que los m_i son generadores tenemos que:

$$\operatorname{ann}(M) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{ann}(m_i)$$

pues si $\in A$ anula a todos los generadores anulará cualquier elemento de M. Observamos entonces que:

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \quad &\iff \quad \exists i, \quad \frac{m_i}{1} \neq 0 \text{ en } M_{\mathfrak{p}} \\ &\iff \quad \exists i, \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{ann}(m_i) \\ &\iff \quad \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{ann}(m_i) = \operatorname{ann}(M) \end{aligned}$$

en donde hemos usado que $\mathfrak{p}$ es primo[1] y la idea comentada al comienzo de que un elemento es zero en $M_{\mathfrak{p}}$ si y solo no hay elementos fuera de $\mathfrak{p}$ que lo anulen.

4. Utilizando el Problema 3 tenemos que:

$$(M \otimes_A N)_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}$$

y luego como $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local y M, N son finitamente generados, el Problema 3 de la Ayudantía 12 nos dice que $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} = 0$ entonces $M_{\mathfrak{p}} = 0$ o bien $N_{\mathfrak{p}} = 0$. El recíproco de esta afirmación nos da entonces que $\operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(N) \subseteq \operatorname{Supp}(M \otimes_A N)$. Ahora, por otro lado si $M_{\mathfrak{p}} = 0$ o bien $N_{\mathfrak{p}}$ es obvio que $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} = 0$ de donde se tiene la otra inclusión.

$\square$

[1] Si un ideal primo contiene una intersección de ideales entonces contiene a uno de ellos. Por ejemplo, si $\mathfrak{p}$ es ideal primo e I, J son ideales tal que $I \cap J \subseteq \mathfrak{p}$ y suponemos que $\mathfrak{p}$ no contiene a ninguno de ellos, entonces existen $a \in I \setminus \mathfrak{p}, b \in J \setminus \mathfrak{p}$, pero entonces $ab \in I \cap J \subseteq \mathfrak{p}$ lo cual supone una contradicción.