

Ayudantía 5 Estructuras Algebraicas

**Profesor:** Pedro Montero Ayudante: Sebastián Fuentes

21 de abril de 2023

Durante todo el curso A denotará un anillo conmutativo con unidad.

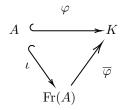
**Problema 1.** Sea G un grupo finito y  $H \triangleleft G$  un subgrupo normal. Probar que G admite una serie de composición

$$G =: G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_r = \{e\}$$

tal que  $H = G_i$  para cierto  $i \in \{0, ..., r\}$ .

Indicación: Probar que si  $K \leq L \leq G/H$ , entonces  $\pi^{-1}(L)/\pi^{-1}(K) \cong L/K$ , donde  $\pi: G \to G/H$  es la proyección al cociente. Para esto último, determinar el kernel de la composición  $\pi^{-1}(L) \to L \to L/K$ .

**Problema 2.** Sea A dominio de integridad, Fr(A) su cuerpo de fracciones y  $\iota_A:A\hookrightarrow Fr(A),a\mapsto \frac{a}{1}$  el morfismo de inclusión asociado. Demuestre que Fr(A) satisface la siguiente propiedad universal: Para todo cuerpo K y todo  $morfismo\ de\ anillos\ \varphi:A\hookrightarrow K\ inyectivo\ existe\ un\ único\ morfismo\ de\ anillos\ \varphi:\operatorname{Fr}(A)\to K\ tal\ que\ el\ siguiente$ diagrama es conmutativo:



**Problema 3.** Sea A anillo. Demuestre el Teorema del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \forall a, b \in A, \forall n \in \mathbb{N}$$

Indicación: Muestre primero la relación  $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ .

**Problema 4.** Sea A un anillo y A[X] su anillo de polinomios. Sea  $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in A[X]$ 

- 1. Muestre que P es nilpotente  $\Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n$  son nilpotentes.
- 2. Pruebe que P es una unidad en  $A[X] \Leftrightarrow a_0$  es una unidad en A y  $a_1, \ldots, a_n$  son nilpotentes. Indicación: Demuestre en primer lugar que si  $x \in A$  es nilpotente entonces  $1 + x \in A^{\times}$ .
- 3. Demuestre que P es un divisor de cero  $\Leftrightarrow$  existe  $a \neq 0$  en A tal que aP = 0.

**Problema 5.** Un anillo A (no necesariamente conmutativo) es Booleano si  $x^2 = x$  para todo  $x \in A$ . En un anillo Booleano A, demuestre que

- 1. Muestre que todo anillo Booleano es conmutativo.
- 2. 2x = 0 para todo  $x \in A$ .
- 3. Todo ideal primo  $\mathfrak{p}$  es maximal, y  $A/\mathfrak{p}$  es un cuerpo con dos elementos.
- 4. Todo ideal finitamente generado en A es principal.

MAT214 UTFSM

**Problema 6.** Sea A un dominio entero. Decimos que A es un dominio euclideano si existe una función (euclideana)  $\varphi: A\setminus\{0\} \to \mathbb{N}$  tal que para todos  $a, b \in A$  con  $b \neq 0$  existe una escritura (no necesariamente única)

$$a = bq + r$$
 donde  $r = 0$ , o bien  $r \neq 0$  y  $\varphi(r) < \varphi(b)$ .

Demuestre que un dominio euclideano es un dominio de ideales principales.