Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 13 Estructuras Algebraicas

20 de junio de 2023

Problema 1.

1. Sea S un subconjunto multiplicativamente cerrado de un anillo A, y sea M un módulo A generado finitamente. Demostrar que $S^{-1}M = 0$ si y sólo si existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.
2. Sea $I \subseteq A$ ideal y $S = 1 + I$. Muestre que $S^{-1}I$ está contenido en el ideal de Jacobson de $S^{-1}A$.
Indicación: Recuerde la caracterización del ideal de Jacobson probada en clases.

Problema 2. Sea A un anillo, $f \in A$. Demuestre que:

$$A_f \cong A[X]/\langle fX - 1\rangle$$

donde A_f denota la localización de A en f.
Indicación: Defina $\varphi : A[X] \to A_f$ mediante $X \mapsto \frac{1}{f}$ y calcule su kernel.

Problema 3. El objetivo de este problema es estudiar cómo interactúan la localización y el producto tensorial. Sea A anillo, M, N $A-$módulos y $S \subseteq A$ conjunto multiplicativo. Muestre que

$$S^{-1}(M \otimes_A N) \cong (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}(A)} (S^{-1}N)$$

Indicación: Defina $\varphi : (S^{-1}M) \times (S^{-1}N) \to S^{-1}(M \otimes_A N)$, $\quad \left(\frac{m}{s}, \frac{n}{t}\right) \mapsto \frac{m \otimes n}{st}$.

Problema 4. Sea A un anillo y sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ ideal primo. Demuestre que

$$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p})$$

donde $\mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p})$ denota el cuerpo de fracciones del anillo cociente $A/\mathfrak{p}$.
Indicación: Defina $\varphi : A_{\mathfrak{p}} \mapsto \mathrm{Fr}(A/\mathfrak{p})$, $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\pi(a)}{\pi(s)}$ donde $\pi : A \to A/\mathfrak{p}$ es la proyección canónica. Recuerde que $A/\mathfrak{p}$ es un dominio y que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local.

Problema 5. El objetivo de este problema es estudiar el concepto de **soporte** de un módulo. Sea A un anillo, M un módulo A. El soporte de M, denotado por $\mathrm{Supp}(M)$, se define como el conjunto de ideales primos $\mathfrak{p}$ de A tal que $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$.

1. Si $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ es una sucesión exacta, entonces $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M_1) \cup \mathrm{Supp}(M_2)$.
2. Sea $\{M_\lambda\}$ una colección de $A-$módulos, $S \subseteq A$ multiplicativo. Demuestre que la suma directa y la localización conmutan, ie,
$$S^{-1}\left(\bigoplus M_\lambda\right) \cong \bigoplus S^{-1}(M_\lambda)$$
Use esto para probar que si $M = \sum M_\lambda$, entonces $\mathrm{Supp}(M) = \bigcup \mathrm{Supp}(M_\lambda)$.
Indicación: Use el Problema 2. de la Ayudantía 12. junto con la caracterización de la localización en términos del producto tensorial vista en clases. Recuerde que hay una aplicación $\bigoplus M_\lambda \twoheadrightarrow \sum M_\lambda$.
3. Si M es finitamente generado, entonces $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathrm{ann}(M))$ (y por lo tanto es un subconjunto cerrado de $\mathrm{Spec}(A)$).
4. Si M, N son finitamente generados, entonces $\mathrm{Supp}(M \otimes_A N) = \mathrm{Supp}(M) \cap \mathrm{Supp}(N)$
Indicación: Use el Problema 3 y el Problema 3 de la Ayudantía 12.