Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 6 Estructuras Algebraicas

25 de abril de 2023

Problema 1. Demostrar que si se tienen subgrupos $K \leq H \leq G$ de un grupo finito G, entonces

$$[G : K] = [G : H][H : K]$$

Demostración. Podemos emplear el teorema de Lagrange para cada par de grupos obteniendo que:

$$|G| = [G : H]|H| = [G : K]|K|, \qquad |H| = [H : K]|K|$$

Juntando las expresiones anteriores tenemos que

$$[G : H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{[G : K]|K|}{[H : K]|K|} = \frac{[G : K]}{[H : K]} \quad \Rightarrow \quad [G : K] = [G : H][H : K]$$

□

Problema 2. Un subgrupo H de un grupo finito G es un **subgrupo de Hall** si $|H|$ y $[G : H]$ son primos relativos. Sea G un grupo finito, H un subgrupo de Hall de G.

1. Demuestre que para cualquier subgrupo normal K de G se verifica que $H \cap K$ es un subgrupo de Hall de K.
2. Si K es normal en G, muestre que HK/K es un subgrupo de Hall de G/K.
3. Sea H un subgrupo de Hall normal del grupo finito G. Demostrar que H es el único subgrupo de G de orden $|H|$.

Demostración.

1. Por hipótesis tenemos que $\text{mcd}(|H|, [G : H]) = 1$. Sea K subgrupo normal de G. Probaremos a continuación que $|H \cap K|$ es un divisor de $|H|$, en tanto que $[K : K \cap H]$ lo es de $[G : H]$, de lo que se seguirá la condición $\text{mcd}(|H \cap K|, [K : H \cap K]) = 1$ y por definición $H \cap K$ será un subgrupo de Hall de K. Puesto que $H \cap K$ es un subgrupo de H, por el Teorema de Lagrange su orden $|H \cap K|$ es un divisor de $|H|$. Por otra parte, aplicando el Problema 1. tenemos

   $$[HK : K][K : H \cap K] = [HK : H \cap K] = [HK : H][H : H \cap K]$$

   pero como $HK/K \cong H/(H \cap K)$ (Ayudantía 2), obtenemos que $[HK : K] = [H : H \cap K]$ y así

   $$[K : H \cap K] = [HK : H]$$

   Además, $|G| = [G : H]|H|$, y nuevamente por el Problema 1. $[G : H] = [G : HK][HK : H]$. Por lo tanto $[K : H \cap K] = [HK : H]$ es un divisor del índice $[G : H]$.

2. Por argumentos similares tenemos que $[G : H] = [G : HK][HK : H]$ así que $[G : HK]$ divide a $[G : H]$. Además, por teorema del isomorfismo (Ayudantía 2) se tiene $[G/K : HK/K] = [G : HK]$, de donde tenemos que $[G/K : HK/K]$ divide también a $[G : H]$. También sabemos que $H/(H \cap K) \cong (HK)/K$ y así $[H : K \cap H] = [HK : K]$ y en consecuencia $[HK : K]$ divide a $|H|$ pues $[H : K \cap H]|K \cap H| = |H|$, de donde se tiene la conclusión.

3. Sean $|H| = m$ y $[G : H] = n$. Entonces $|G| = mn$ y $\text{mcd}(m, n) = 1$. Si K es otro subgrupo de G con $|K| = m$, consideremos el grupo cociente KH/H. Como es un subgrupo de G/H, su orden dividirá al de este, o sea a n. Pero $KH/H \cong K/(K \cap H)$, siendo este último un grupo cociente de K, por tanto $|KH/H|$ ha de ser un divisor de m. Como m y n son primos entre sí, concluimos que necesariamente $|KH/H| = 1$, lo que significa que $KH = H$ y que $K \subseteq H$. Pero ambos tienen el mismo orden, así que $K = H$.

□

Problema 3. Sea G un grupo finito y S un conjunto no vacío. Supongamos que G actúa sobre S libre y transitivamente. Demuestre que $|G| = |S|$.

Demostración. Denotamos por $g \cdot s$ la acción de $g \in G$ sobre $s \in S$. Dado que S no está vacío, fijamos un elemento $s_0 \in S$. Definir la aplicación

$$\varphi : G \to S, \quad g \mapsto g \cdot s$$

Probemos que esta función φ es biyectiva. Supongamos que tenemos $\varphi(g) = \varphi(h)$ para algunos $g, h \in G$. Entonces $g \cdot s = h \cdot s$, y como la acción es libre esto implica que $g = h$, y así φ es inyectiva. Para mostrar que φ es sobreyectiva, sea s un elemento arbitrario en S. Como la acción es transitiva, existe $g \in G$ tal que $g \cdot s = s$. Por lo tanto tenemos $\varphi(g) = s$, y φ es sobreyectiva. Concluimos entonces que $|G| = |S|$. □

Problema 4. Sea G un grupo finito tal que $n_p(G)$ (número de p-subgrupos de Sylow de G) no es congruente con 1 módulo p^2. Demostrar que existen dos p-subgrupos de Sylow distintos de G, P y Q, tales que $[P : P \cap Q] = [Q : P \cap Q] = p$, procediendo como sigue:

1. Fije arbitrariamente un p-subgrupo de Sylow P, y considere la acción de éste por conjugación sobre el conjunto de los p-subgrupos de Sylow de G. Describa las órbitas de esta acción y el estabilizador de cada punto Q.
2. Demuestre que para cada p-subgrupo de Sylow $P, S \cap N_G(P) \subseteq P$. Pruebe que la órbita de P es de orden igual al índice $[S : S \cap P]$.
3. Demuestre que hay exactamente un punto fijo para esta acción.
4. Demuestre que ha de existir al menos una órbita con exactamente p elementos.
5. Demuestre que para cualquier P en una órbita con p elementos se verifica que
$$[S : S \cap P] = [P : S \cap P] = p$$

Demostración.

1. Denotemos por $\mathrm{Syl}_p(G)$ al conjunto de los p subgrupos de Sylow de G, y sea S uno de ellos. Consideremos la acción de S por conjugación: $x \cdot P = xPx^{-1}$. Entonces, la orbita de cada $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ será $\mathcal{O}(P) = \left\{xPx^{-1} \mid x \in S\right\}$ y su estabilizador $\mathrm{Stab}_S(P) = \left\{x \in P \mid xPx^{-1} = P\right\} = S \cap N_G(P)$.
2. Como cada P es normal en su normalizador $N_G(P)$, este es su único $p-$ subgrupo de Sylow y, por tanto, contendrá a cualquier $p-$subgrupo de $N_G(P)$. En particular $S \cap N_G(P) \subseteq P$ y entonces $S \cap N_G(P) = S \cap P$. Concluimos que $|\mathcal{O}(P)| = [S : \mathrm{Stab}_S(P)] = [S : S \cap P]$
3. Por lo visto antes, será $|\mathcal{O}(P)| = 1$ si y solo si $[S : S \cap P] = 1$, lo que equivale a que $S \subseteq P$ y, puesto que son del mismo orden, a que $S = P$.
4. El cardinal de las orbitas con más de un elemento será de la forma p^r para $r \geq 1$. Si para todas ellas fuese $r \geq 2$, sería $n_p(G) \equiv 1 \left(\mathrm{mód} p^2\right)$, lo que contradice nuestra hipótesis. Luego alguna de las orbitas ha de tener exactamente p elementos.
5. Sea P en una órbita de orden p. Entonces P es un p-subgrupo de Sylow P tal que $[S : S \cap P] = p$. Como $|S| = [S : S \cap P] \mid S \cap P] = p|S \cap P|$ y $|S| = |P| = [P : S \cap P]|S \cap P|$ y concluimos que también $[P : S \cap P] = p$.

□

Problema 5. Sea H un p-subgrupo normal de G grupo finito, ie, tal que $p||H|$ (no necesariamente un subgrupo de Sylow).

1. Demuestre que H está contenido en cada p-subgrupo de Sylow de G de Sylow.

2. Si K es otro p-subgrupo normal de G, demuestre que HK también es un p-subgrupo normal de G.
3. Defina $\mathcal{O}_p(G)$ como el subgrupo generado por todos los $p-$subgrupos normales de G. Muestre que $\mathcal{O}_p(G)$ es el $p-$subgrupo normal más grande de G y que corresponde a la intersección de todos los $p-$subgrupos de Sylow de G.
4. Sea $\overline{G} = G/\mathcal{O}_p(G)$. Demuestre que $\mathcal{O}_p(\overline{G}) = \{e\}$

Demostración.

1. Sea S subgrupo de Sylow. Por el teorema de Sylow sabemos que todo p-subgrupo está contenido en algún $p-$Sylow, que denotamos P, y más aún, el teorema de Sylow afirma también que todos los $p-$Sylow son conjugados entre sí, y por ende existe $g \in G$ tal que $P = gSg^{-1}$, obteniendo que $H \leq gSg^{-1}$. De lo anterior tenemos que $g^{-1}Hg \leq S$ y como H es normal $g^{-1}Hg = H$.
2. Probamos en la ayudantía 2 que HK es subgrupo. Para la normalidad basta con notar que
$$gHKg^{-1} = (gHg^{-1})(gKg^{-1}) \qquad \forall g \in G$$
En la Ayudantía 2 probamos el isomorfismo $K/(K \cap H) \cong HK/H$, y de esto y el Teorema de Lagrange se sigue que
$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$
Como H, K son ambos $p-$grupos, vemos que el único divisor primo de $|HK|$ es p, asi que es un $p-$subgrupo.
3. Denotemos por $\{H_1, \ldots, H_n\}$ el conjunto de todos los $p-$subgrupos de G y denotemos $H := H_1 \cdots H_n$, el cua por el punto anterior sabemos que es un p-subgrupo normal de G. Notar en primer lugar que $H_i \leq H$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, y entonces por definición $\mathcal{O}_p(G) \leq H$. Por otro lado, como H es en sí mismo un $p-$subgrupo normal entonces $H = H_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, así que $\mathcal{O}_p(G) = H$.
Ahora, en el punto 1. mostramos que todo p-subgrupo normal está contenido en todo p-Sylow, así que $\mathcal{O}_p(G) \subseteq \bigcap_{S \in Syl_p(G)} S$. Para ver la contención contraria denotemos $I := \bigcap_{S \in Syl_p(G)}$. Notar que I es normal pues para $x \in I, g \in G$ y $P \in Syl_p(G)$ tenemos que $g^{-1}Pg \in Syl_p(G)$ y $x \in g^{-1}Pg \quad \Rightarrow \quad gxg^{-1} \in P$, y como esto ocurre para todo $P \in Syl_p(G)$ tenemos que I es normal. Por otro lado, es directo notar que I es p-grupo pues está contenido en un $p-$Sylow que en particular es $p-$subgrupo. De esta manera concluimos que I es un $p-$subgrupo normal de G y entonces $I = \mathcal{O}_p(G)$.
4. La última afirmación es equivalente a probar que $\overline{G}$ no posee $p-$subgrupos normales no triviales. Sea $\overline{K} \trianglelefteq \overline{G}$ $p-$subgrupo normal. Como tenemos una correspondencia entre subgrupos normales de G y del cociente, existe un subgrupo normal $\mathcal{O}_p(G) \leq K \trianglelefteq G$ el cual verifica $K/\mathcal{O}_p(G) = \overline{K}$. Así, como $\overline{K}$ es p-subgrupo tenemos que K es p-subgrupo de G y entonces por los puntos anteriores deducimos que $K = \mathcal{O}_p(G)$, de donde se obtiene la conclusión pues $\overline{K} = \{e\}$.

□