UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 11 Estructuras Algebraicas

6 de junio de 2023

Problema 1. Sea $\varphi^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ morfismo de complejos de $A-$módulos.

1. Demuestre que $\varphi^\bullet$ induce morfismos entre los grupos de cohomología $H^i(\varphi^\bullet) : H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
2. Pruebe que las colecciones $\ker(\varphi^\bullet) := \{(\ker(\varphi^i), d^i_M)\}, \operatorname{Im}(\varphi^\bullet) := \{(\operatorname{Im}(\varphi^i), d^i_N)\}$ son complejos.
3. Considere un segundo morfismo de complejos $\psi^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ y denotemos los morfismos d^i_M, d^i_N simplemente por d^i. Decimos que $\varphi^\bullet, \psi^\bullet$ son morfismos *homotópicos* si para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe un morfismo de $A-$módulos $s_n : M^{i+1} \to N^i$ de tal modo que:
$$\varphi^i - \psi^i = d^i s^{i-1} + s^i d^{i+1}$$
Demuestre que si $\varphi^\bullet, \psi^\bullet$ son homotópicos entonces inducen el mismo morfismo entre grupos de cohomología.

Problema 2.(Five Lemma) Considere el siguiente diagrama conmutativo de $A-$módulos:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & M_5 \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

Suponga que las filas del diagrama anterior son exactas.

1. Muestre que si β, δ son inyectivos y α sobreyectivo entonces γ es inyectivo.
2. Demuestre que si β, δ son sobreyectivos y ε inyectivo entonces γ es sobreyectivo.

En particular si β, δ son isomorfismos, α es sobreyectivo y ε inyectivo, entonces γ es isomorfismo.

Definición. Sea A anillo y M un $A-$módulo. Decimos que M es *finitamente presentado*, o de *presentación finita*, si es que existe una sucesión exacta $A^m \to A^n \to M \to 0$ para ciertos $m, n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Nos referimos a la sucesión anterior como *presentación*.

Problema 3. Sea A anillo, M un $A-$módulo finitamente presentado y $0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. El objetivo es demostrar que si M_2 es un $A-$módulo finitamente generado, entonces M_1 es también finitamente generado.

1. Sea $A^m \xrightarrow{\psi} A^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ una presentación de M y $e_1, \ldots, e_n$ una base de A^n. Muestre que existen $b_1, \ldots, b_n \in M_2$ de modo que $\beta(b_i) = \varphi(e_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.
2. Si f es el morfismo de A^n a M_2 definido por $f(e_i) = b_i$ para $i = 1, \ldots, n$, muestre que $f(\psi(A^m)) \subseteq \ker \beta$. Construya un diagrama conmutativo de A-módulos con filas exactas de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
 & A^m \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"'] & A^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\alpha"] & M_2 \arrow[r, "\beta"] & M &
\end{tikzcd}$$

3. Demuestre que $\operatorname{coker}(g) \cong \operatorname{coker}(f)$ y concluya que M_1 es finitamente generado.
Indicación: Utilice el lema de la serpiente