Ayudantía 5 Estructuras Algebraicas

21 de abril de 2023

Durante todo el curso A denotará un anillo conmutativo con unidad.

Problema 1. Sea G un grupo finito y $H \trianglelefteq G$ un subgrupo normal. Probar que G admite una serie de composición

$$G =: G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_r = \{e\}$$

tal que $H = G_i$ para cierto $i \in \{0, \ldots, r\}$.
Indicación: Probar que si $K \trianglelefteq L \trianglelefteq G/H$, entonces $\pi^{-1}(L)/\pi^{-1}(K) \cong L/K$, donde $\pi : G \to G/H$ es la proyección al cociente. Para esto último, determinar el kernel de la composición $\pi^{-1}(L) \to L \to L/K$.

Problema 2. Sea A dominio de integridad, $\mathrm{Fr}(A)$ su cuerpo de fracciones y $\iota_A : A \hookrightarrow \mathrm{Fr}(A), a \mapsto \frac{a}{1}$ el morfismo de inclusión asociado. Demuestre que $\mathrm{Fr}(A)$ satisface la siguiente propiedad universal: *Para todo cuerpo K y todo morfismo de anillos $\varphi : A \hookrightarrow K$ inyectivo existe un único morfismo de anillos $\varphi : \mathrm{Fr}(A) \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook, "\varphi"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & & K \\ & \mathrm{Fr}(A) \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Problema 3. Sea A anillo. Demuestre el Teorema del binomio:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \forall a, b \in A, \forall n \in \mathbb{N}$$

Indicación: Muestre primero la relación $\displaystyle\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Problema 4. Sea A un anillo y $A[X]$ su anillo de polinomios. Sea $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in A[X]$

1. Muestre que P es nilpotente $\Leftrightarrow a_0, a_1, \ldots, a_n$ son nilpotentes.
2. Pruebe que P es una unidad en $A[X] \Leftrightarrow a_0$ es una unidad en A y $a_1, \ldots, a_n$ son nilpotentes.
   Indicación: Demuestre en primer lugar que si $x \in A$ es nilpotente entonces $1 + x \in A^\times$.
3. Demuestre que P es un divisor de cero $\Leftrightarrow$ existe $a \neq 0$ en A tal que $aP = 0$.

Problema 5. Un anillo A (no necesariamente conmutativo) es Booleano si $x^2 = x$ para todo $x \in A$. En un anillo Booleano A, demuestre que

1. Muestre que todo anillo Booleano es conmutativo.
2. $2x = 0$ para todo $x \in A$.
3. Todo ideal primo $\mathfrak{p}$ es maximal, y $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo con dos elementos.
4. Todo ideal finitamente generado en A es principal.

Problema 6. Sea A un dominio entero. Decimos que A es un dominio euclideano si existe una función (euclideana) $\varphi : A \backslash \{0\} \to \mathbb{N}$ tal que para todos $a, b \in A$ con $b \neq 0$ existe una escritura (no necesariamente única)

$$a = bq + r \text{ donde } r = 0, \text{ o bien } r \neq 0 \text{ y } \varphi(r) < \varphi(b).$$

Demuestre que un dominio euclideano es un dominio de ideales principales.