Ayudantía 6 Estructuras Algebraicas

25 de abril de 2023

Problema 1. Demostrar que si se tienen subgrupos $K \leq H \leq G$ de un grupo finito G, entonces

$$[G : K] = [G : H][H : K]$$

Problema 2. Un subgrupo H de un grupo finito G es un **subgrupo de Hall** si $|H|$ y $[G : H]$ son primos relativos. Sea G un grupo finito, H un subgrupo de Hall de G.

1. Demuestre que para cualquier subgrupo normal K de G se verifica que $H \cap K$ es un subgrupo de Hall de K.

2. Si K es normal en G, muestre que HK/K es un subgrupo de Hall de G/K.

3. Sea H un subgrupo de Hall normal del grupo finito G. Demostrar que H es el único subgrupo de G de orden $|H|$.

Problema 3. Sea G un grupo finito y S un conjunto no vacío. Supongamos que G actúa sobre S libre y transitivamente. Demuestre que $|G| = |S|$.

Problema 4. Sea G un grupo finito tal que $n_p(G)$ (número de p-subgrupos de Sylow de G) no es congruente con 1 módulo p^2. Demostrar que existen dos p-subgrupos de Sylow distintos de G, P y Q, tales que $[P : P \cap Q] = [Q : P \cap Q] = p$, procediendo como sigue:

1. Fije arbitrariamente un p-subgrupo de Sylow P, y considere la acción de éste por conjugación sobre el conjunto de los p-subgrupos de Sylow de G. Describa las órbitas de esta acción y el estabilizador de cada punto Q.

2. Demuestre que para cada p-subgrupo de Sylow $P, S \cap N_G(P) \subseteq P$. Pruebe que la órbita de P es de orden igual al índice $[S : S \cap P]$.

3. Demuestre que hay exactamente un punto fijo para esta acción.

4. Demuestre que ha de existir al menos una órbita con exactamente p elementos.

5. Demuestre que para cualquier P en una órbita con p elementos se verifica que

$$[S : S \cap P] = [P : SP \cap P] = p$$

Problema 5. Sea H un p-subgrupo normal de G grupo finito, ie, tal que $p||H|$ (no necesariamente un subgrupo de Sylow).

1. Demuestre que H está contenido en cada p-subgrupo de Sylow de G de Sylow.

2. Si K es otro p-subgrupo normal de G, demuestre que HK también es un p-subgrupo normal de G.

3. Defina $\mathcal{O}_p(G)$ como el subgrupo generado por todos los $p-$subgrupos normales de G. Muestre que $\mathcal{O}_p(G)$ es el $p-$subgrupo normal más grande de G y que corresponde a la intersección de todos los $p-$subgrupos de Sylow de G.

4. Sea $\overline{G} = G/\mathcal{O}_p(G)$. Demuestre que $\mathcal{O}_p(\overline{G}) = \{e\}$