Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 11 Estructuras Algebraicas

6 de junio de 2023

Problema 1. Sea $\varphi^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ morfismo de complejos de $A-$módulos.

1. Demuestre que $\varphi^\bullet$ induce morfismos entre los grupos de cohomología $H^i(\varphi^\bullet) : H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
2. Pruebe que las colecciones $\ker(\varphi^\bullet) := \{(\ker(\varphi^i), d_M^i)\}, \operatorname{Im}(\varphi^\bullet) := \{(\operatorname{Im}(\varphi^i), d_N^i)\}$ son complejos.
3. Considere un segundo morfismo de complejos $\psi^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ y denotemos los morfismos d_M^i, d_N^i simplemente por d^i. Decimos que $\varphi^\bullet, \psi^\bullet$ son morfismos *homotópicos* si para todo $n \in \mathbb{Z}$ existe un morfismo de $A-$módulos $s^i : M^i \to N^{i-1}$ de tal modo que:
$$\varphi^i - \psi^i = d^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i$$
Demuestre que si $\varphi^\bullet, \psi^\bullet$ son homotópicos entonces inducen el mismo morfismo entre grupos de cohomología.

Demostración.

1. Recordemos que por definición $H^i(M^\bullet) = \ker(d_M^i)/\operatorname{Im}(d_M^{i-1})$ y la definición es idéntica para $N^\bullet$. Por lo tanto, la forma más natural de definir un morfismo inducido es mediante:
$$H^i(\varphi^\bullet) : H^i(M^\bullet) \to H^i(N^\bullet), \quad [x] \mapsto [\varphi^i(x)]$$
donde la primera clase es módulo $\operatorname{Im}(d_M^{i-1})$ y la segunda módulo $\operatorname{Im}(d_N^{i-1})$. Resta probar entonces que esta aplicación está bien definida, pues el hecho de que sea un morfismo de $A-$módulos viene del hecho que es la composición de una proyección con φ^i. Esto significa dos cosas: en primer lugar, que en efecto toma valores en donde se ha indicado, y además que el valor no depende del elemento escogido en la clase de equivalencia. Para lo primero, si $x \in \ker(d_M^i)$, entonces tenemos:
$$d_N^i(\varphi^i(x)) = \varphi^{i+1}(d_M^i(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi^i(x) \in \ker(d_N^i)$$
así que $[\varphi^i(x)] \in H^i(N^\bullet)$.
Sean $x, x' \in \ker(d_M^i)$ tal que $[x], [x'] \in H^i(M^\bullet)$, es decir, existe $y \in M^{i-1}$ tal que $x' = x + d_M^{i-1}(y)$. Tenemos entonces que:
$$\varphi^i(x') = \varphi^i(x + d_M^{i-1}(y)) = \varphi^i(x) + \varphi^i(d_M^{i-1}(y)) = \varphi^i(x) + \underbrace{d_N^{i-1}(\varphi^{i-1}(y))}_{\in \operatorname{Im}(d_N^{i-1})} \quad \Rightarrow \quad [\varphi^i(x)] = [\varphi^i(x')]$$
2. Veamos el caso del kernel. Veremos que los propios morfismos d_M^i se restringen bien a los kernel y por lo tanto definen naturalmente un complejo. Para ello consideramos $x \in \ker(\varphi^i)$, y por lo tanto por conmutatividad tenemos:
$$0 = d_N^i(\varphi^i(x)) = \varphi^{i+1}(d_M^i(x)) \quad \Rightarrow d_M^i(x) \in \ker(\varphi^{i+1})$$
Esto nos dice entonces que la restricción $d_M^i|_{\ker(\varphi^i)} : \ker(\varphi^i) \to \ker(\varphi^{i+1})$ está bien definida y así los kernel conforman naturalmente un complejo. El caso de las imágenes es análogo.
3. Tenemos que $\varphi^i - \psi^i = d^{i-1}s^i + s^{i+1}d^i$. Por lo tanto, si $[x] \in H^i(M^\bullet)$, como $x \in \ker(d_M^i)$ tenemos:
$$\varphi^i(x) - \psi^i(x) = d^{i-1}s^{i-1}(x) + s^{i+1}\underbrace{d^i(x)}_{=0} = d^{i-1}s^{i-1}(x) \in \operatorname{Im}(d^i)$$
es decir, $[\varphi^i(x)] = [\psi^i(x)]$ y por definición del morfismo inducido tenemos $H^i(\varphi)([x]) = H^i(\psi)([x])$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

□

Problema 2(Five Lemma). Considere el siguiente diagrama conmutativo de $A-$módulos:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & M_5 \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
\end{tikzcd}$$

Suponga que las filas del diagrama anterior son exactas.

1. Muestre que si β, δ son inyectivos y α sobreyectivo entonces γ es inyectivo.
2. Demuestre que si β, δ son sobreyectivos y ε inyectivo entonces γ es sobreyectivo.

En particular si β, δ son isomorfismos, α es sobreyectivo y ε inyectivo, entonces γ es isomorfismo.

Demostración.

1. Denotaremos las flechas de la fila superior por $f_i : M_i \to M_{i+1}$ y las flechas inferiores por $g_i : N_i \to N_{i+1}$. Sea $m_3 \in M_3$ tal que $\gamma(m_3) = 0$. Debemos probar entonces que $m_3 = 0$. Para ello utilizamos la conmutatividad del diagrama y la inyectividad de δ como sigue:

$$0 = g_3(\gamma(m_3)) = \delta(f_3(m_3)) \quad \Rightarrow \quad f_3(m_3) = 0$$

Ahora, la exactitud de la fila superior nos da que $\mathrm{Im}(f_2) = \ker(f_3)$, ie, existe $m_2 \in M_2$ de tal forma que $f_2(m_2) = m_3$. Entonces por exactitud tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 = \gamma(m_3) = \gamma(f_2(m_2)) = g_2(\beta(m_2)) \quad &\Rightarrow \quad \exists m_1 \in N_1, \quad \beta(m_2) = g_1(n_1) \\
&\Rightarrow \quad \exists m_1 \in M_1, \quad n_1 = \alpha(m_1) \qquad (\alpha \text{ es sobreyectivo}) \\
&\Rightarrow \quad g_1(\alpha(m_1)) = \beta(m_2) = \beta(f_1(m_1)) \\
&\Rightarrow \quad m_2 = f_1(m_1) \qquad (\beta \text{ es inyectivo}) \\
&\Rightarrow \quad m_3 = f_2(m_2) = f_2(f_1(m_1)) = 0
\end{aligned}$$

de donde se tiene la conclusión.

2. Sea $n_3 \in N_3$. Para concluir debemos probar que existe $x \in M_3$ tal que $\gamma(x) = n_3$. Notemos entonces en primer lugar que como δ es sobreyectivo, existe $m_4 \in M_4$ tal que $g_3(n_3) = \delta(m_4)$, y luego por exactitud y conmutatividad:

$$0 = g_4(g_3(n_3)) = g_4(\delta(m_4)) = \varepsilon(f_4(m_4))$$

Ahora, por hipótesis ε es inyectivo, así que $f_4(m_4) = 0$, y nuevamente por exactitud de la fila superior existe $m_3 \in M_3$ tal que $f_3(m_3) = m_4$. Obtenemos entonces:

$$\delta(f_3(m_3)) = g_3(\gamma(m_3)) = \delta(m_4) = g_3(n_3) \quad \Rightarrow \quad n_3 - \gamma(m_3) \in \ker(g_3)$$

Ahora, $\ker(g_3) = \mathrm{Im}(g_2)$, así que existe $n_2 \in N_2$ tal que

$$n_3 - \gamma(m_3) = g_2(n_2) \quad \Rightarrow \quad \exists m_2 \in M_2, \quad n_3 - \gamma(m_3) = g_2(\beta(m_2)) = \gamma(f_2(m_2)) \quad \Rightarrow \quad n_3 = \gamma(m_3 + f_2(m_2))$$

□

Definición. Sea A anillo y M un $A-$módulo. Decimos que M es *finitamente presentado*, o de *presentación finita*, si es que existe una sucesión exacta $A^m \to A^n \to M \to 0$ para ciertos $m, n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Nos referimos a la sucesión anterior como *presentación*.

Problema 3. Sea A anillo, M un $A-$módulo finitamente presentado y $0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. El objetivo es demostrar que si M_2 es un $A-$módulo finitamente generado, entonces M_1 es también finitamente generado.

1. Sea $A^m \xrightarrow{\psi} A^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ una presentación de M y $e_1, \ldots, e_n$ una base de A^n. Muestre que existen $b_1, \ldots, b_n \in M_2$ de modo que $\beta(b_i) = \varphi(e_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.
2. Si f es el morfismo de A^n a M_2 definido por $f(e_i) = b_i$ para $i = 1, \ldots, n$, muestre que $f(\psi(A^m)) \subseteq \ker \beta$. Construya un diagrama conmutativo de A-módulos con filas exactas de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} & A^m \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"'] & A^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\alpha"] & M_2 \arrow[r, "\beta"] & M & \end{tikzcd}$$

3. Demuestre que $\operatorname{coker}(g) \cong \operatorname{coker}(f)$ y concluya que M_1 es finitamente generado.
   Indicación: Utilice el lema de la serpiente

Demostración.

1. Este punto es simplemente consecuencia del hecho que $\beta : M_2 \to M$ es sobreyectivo, y por lo tanto para cada $e_i \in A^n$ podemos considerar $b_i \in M_2$ tal que $\beta(b_i) = e_i$.
2. Podemos definir el morfismo $f : A^n \to M_2$ mediante las relaciones $f(e_i) = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y por definición entonces tenemos:

   $$\beta \circ f = \varphi \quad \Rightarrow \quad \beta \circ f \circ \psi = \varphi \circ \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}(f \circ \psi) \subseteq \ker(\beta)$$

   Ahora, por exactitud sabmoes que $\ker(\beta) = \operatorname{Im}(\alpha)$, así si consideramos $f_1, \ldots, f_m$ una base de A^m, existen $a_1, \ldots, a_m \in A$ tal que $(f \circ \psi)(f_i) = \alpha(a_i)$. Definimos entonces

   $$g : A^m \to M_1, \quad f_i \mapsto a_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

   De esta forma, tenemos que:

   $$(f \circ \psi)(f_i) = \alpha(a_i) = \alpha(g(f_i)) \quad \Rightarrow \quad f \circ \psi = \alpha \circ g$$

   y obtenemos entonces el diagrama de la forma indicada, donde la exactitud de las filas viene dada simplemente por hipótesis.
3. El lema de la serpiente nos provee de la siguiente sucesión exacta:

   $$\ker(g) \to \ker(f) \to \ker(\mathrm{id}) \to \operatorname{coker}(g) \to \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(\mathrm{id})$$

   y dado que $\mathrm{id} : M \to M$ es trivialmente un isomorfismo tenemos que $\ker(\mathrm{id}) = \operatorname{coker}(\mathrm{id}) = 0$, y entonces tenemos que:

   $$0 \to \operatorname{coker}(g) \to \operatorname{coker}(f) \to 0$$

   es exacta, lo que nos entrega directamente que $\operatorname{coker}(g) \cong \operatorname{coker}(f)$. Para finalizar, notamos que como M_2 es finitamente generado por hipótesis, tenemos que $\operatorname{coker}(f) = M_2/\operatorname{Im}(f)$ es finitamente generado, y por lo tanto $\operatorname{coker}(f) = M_1/\operatorname{Im}(g)$ también lo es. Ahora, $\operatorname{Im}(g)$ es finitamente generado pues es la imagen de un módulo libre (en particular finitamente generado), así que M_1 es finitamente generado.

$\square$