Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 4 Estructuras Algebraicas

4 de abril de 2023

Problema 1. Sea G grupo finito, $S \subseteq G$ un $p-$ subgrupo de Sylow y $H \leq G$ subgrupo arbitrario. Demuestre que existe $g \in G$ tal que $gSg^{-1} \cap H$ es un $p-$subgrupo de Sylow.

Problema 2.

1. Suponga que G es un grupo simple y que p es un divisor primo de $|G|$. Demuestre que $|G|$ divide a $n_p!$ donde n_p denota la cantidad de $p-$subgrupos de Sylow de G.
2. Si G es un grupo de orden $|G| = 48$ pruebe que G no es simple.
3. Demuestre que no existen grupos simples de orden $1,000,000$.

Problema 3. Sea G un grupo finito de orden $|G| = 231$. Demuestre que $|Z(G)| \geq 11$.
Indicación: Demuestre que G posee un único $11-$Sylow. Suponga por contradicción que dicho subgrupo no está contenido en $Z(G)$ y recuerde la clasificación de grupos de orden primo (Ayudantía 2).

Problema 4. Determinar todos los grupos abelianos de orden 360.

El teorema que se presenta a continuación es una generalización del Pequeño Teorema de Fermat el cual es válido en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ incluso cuando n no es primo. Su demostración es análoga a la del Pequeño Teorema de Fermat (Ayudantía 2) y por lo tanto queda como ejercicio.

Teorema 1 (Teorema de Euler)**.** *Sea $n \in \mathbb{N} \geq 1$ entero positivo. Definimos la función φ de Euler como $\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} | m \leq n, \operatorname{mcd}(m,n) = 1\}$. Si $a, n \in \mathbb{Z}$ son enteros primos relativos con $n \geq 1$, entonces*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

Problema 5. Utilice el Teorema chino del resto y el Teorema de Euler para calcular los dos últimos dígitos de $17^{17^{17}}$.

Problema 6. Sea G un grupo y considere el grupo de raíces coplejas de la unidad, denotado por $\mathbb{T}$[1]. Se define el **grupo dual** de G, denotado $\widehat{G}$, como

$$\widehat{G} := \{\chi : G \to \mathbb{T} \quad | \chi \text{ morfismo de grupos}\}$$

Como su nombre lo indica, este conjunto es un grupo abeliano, cuya ley de composición corresponde al producto puntual de funciones, es decir,

$$(\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g) \qquad \forall g \in G$$

Demuestre que si G es un grupo abeliano finito, entonces $\widehat{G} \cong G$.

Indicación: Puede utilizar el siguiente lema:

Lema 2. *Sean $G, G_1, \ldots, G_n$ grupos abelianos y denote por $\operatorname{Hom}(G,H)$ el conjunto de morfismos de grupo $G \to H$. Demuestre que*

$$\operatorname{Hom}\left(\prod_{i=1}^{n} G_i, G\right) \cong \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Hom}(G_i, G)$$

[1]Geométricamente, este grupo corresponde a la esfera unitaria de $\mathbb{C}$