UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 10 Estructuras Algebraicas

30 de mayo de 2023

Problema 1. Sea A anillo y M un $A-$módulo finitamente generado. El objetivo de este problema es mostrar que todo endomorfismo $u : M \twoheadrightarrow M$ sobreyectivo es un isomorfismo. Para ello proceda como sigue:

1. Utilice u para definir una estructura de $A[X]$-módulo sobre M tal que $M = IM$ para $I = \langle X \rangle$.
2. Considere $\varphi = \mathrm{id}_M : M \to M$ y encuentre $P(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_{n-1}X + c_n$ en $A[X]$ tal que $P(\varphi)$ y $c_j \in I^j$.
3. Calcule $P(\varphi)(m)$ para $m \in M$ y concluya que u es inyectiva.

Problema 2. Sea A un anillo y $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia arbitraria de $A-$módulos. Decimos que un $A-$módulo M es suma directa de la familia $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si existen morfismos de $A-$módulos $i_\lambda : M_\lambda \to M$ verificando la siguiente propiedad universal: para todo $A-$módulo N y toda colección de morfismos $f_\lambda : M_\lambda \to N$, existe un único morfismo de $A-$módulos $f : M \to N$ tal que para cada $\lambda \in \Lambda$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "f"] & \\
M_\lambda \arrow[u, "i_\lambda"] \arrow[r, "f_\lambda"'] & N
\end{tikzcd}$$

1. Muestre que la suma directa es única módulo un único isomorfismo.
2. Demuestre que la suma directa definida en cátedra, es decir,
$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda := \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \text{ tal que } m_\lambda = 0 \text{ salvo finitos } \lambda \in \Lambda\}$$
es una suma directa de $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en el sentido anterior.
3. Concluya que la suma directa verifica $\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N\right) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}\,(M_\lambda, N)$.

Problema 3. Sea A un anillo, M un $A-$módulo finitamente generado y $\varphi : M \twoheadrightarrow A^n$ morfismo sobreyectivo de $A-$módulos. Demuestre que $\ker(\varphi)$ es finitamente generado.

Problema 4. Sean A, B anillos locales con ideales maximales $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{m}_B$, respectivamente. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Decimos que f es un *morfismo local* si $f^{-1}(m_B) = m_A$. Sean $(A, \mathfrak{m}_A), (B, \mathfrak{m}_B)$ anillos locales noetherianos y $f : A \to B$ morfismo local. Suponga que:

1. $A/\mathfrak{m}_A \to B/\mathfrak{m}_B$ es un isomorfismo.
2. $\mathfrak{m}_A \to \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ es sobreyectivo.
3. B es un $A-$módulo finitamente generado. Demuestre que f es sobreyectiva.