Profesor: Pedro Montero
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 7 Estructuras Algebraicas

2 de mayo de 2023

Problema 1. Sea $A = C([0,1])$ el anillo de todas las funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, y para cada $c \in [0,1]$ sea $I_c = \{f \in A \mid f(c) = 0\}$

1. Pruebe que I_c es un ideal maximal para cada $c \in [0,1]$.
2. Demuestre que si I es un ideal maximal de A, entonces existe un número real $c \in [0,1]$ tal que $I = I_c$.
3. Muestre que si b y c son puntos distintos en $[0,1]$ entonces $I_b \neq I_c$.
4. Pruebe que I_c no es igual al ideal principal generado por $x - c$.
5. Demuestre que I_c no es un ideal generado finitamente.

Problema 2. Sea A un anillo, $\operatorname{Nil}(A)$ su nilradical. Demuestre que los siguientes hechos son equivalentes:

1. A tiene exactamente un ideal primo.
2. cada elemento de A es una unidad o nilpotente.
3. $A/\operatorname{Nil}(A)$ es un cuerpo.

Problema 3. Sean $I, J \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ideales y considere los conjuntos algebraicos afines $X := V(I), Y := V(J)$ de $\mathbb{A}^n$.

1. Pruebe que $V(I) = V(\sqrt{I})$ y $V(J) = V(\sqrt{J})$.
2. Utilice el Hilbert Nullstellensatz para demostrar que

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$$