Pauta Ayudantía 9 Estructuras Algebraicas

16 de mayo de 2023

Definición (módulo noetheriano)**.** *Sea A un anillo. Decimos que un $A-$módulo M es noetheriano si para toda cadena creciente de submódulos*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$$

existe $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $M_n = M_{n+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Observación. *Note que el concepto de anillo noetheriano cabe dentro de la definición anterior, pues si tomamos $M = A$ (el cual es naturalmente un $A-$módulo) entonces sus $A-$submódulos corresponden a los ideales y por lo tanto se recupera esta definición.*

A continuación se enuncia un resultado referente a $A-$módulos noetherianos(y que asumiremos como verdaderas pues su demostración no difiere tanto de resultados vistos en cátedra).

Teorema. *Sea A un anillo, M un $A-$módulo y $N \subseteq M$ un $A-$submódulo.*

1. *M es noetheriano si y solo si todo $A-$submódulo de M es finitamente generado.*
2. *M es noetheriano si y solo si N y M/N son noetherianos (ver Tarea 2).*
3. *Si A es un anillo noetheriano entonces todo $A-$módulo finitamente generado es noetheriano.*

Problema 1. El objetivo de este problema es demostrar que la propiedad de noetherianidad de un anillo se puede medir únicamente mirando sus ideales primos. Sea A un anillo. Suponga que todo ideal primo de A es finitamente generado y concluya por contradicción que A es noetheriano realizando los siguientes pasos:

(a) Demuestre que si la colección de ideales de A que no son finitamente generados es no vacía, entonces contiene un elemento maximal I, y que A/I es un anillo noetheriano. *Indicación:* Para lo pultimo pruebe que todo ideal de A/I es finitamente generado.

(b) Pruebe que existen ideales J_1 y J_2 finitamente generados que contienen I con $J_1J_2 \subsetneq I$ y que J_1J_2 es finitamente generado. *Indicacion:* Note que I no es primo y elija elementos adecuados. Extienda I usando dichos elementos.

(c) Muestre que I/J_1J_2 es un $A/I-$submódulo finitamente generado de J_1/J_1J_2. *Indicación:* Utilice la parte 3. del Teorema.

(d) Demuestre que I es finitamente generado sobre A y concluya que A es noetheriano.

Demostración.

(a) Sabemos que si A es noetheriano entonces todo ideal es finitamente generado. Si suponemos entonces por contradicción que A no es noetheriano entonces existe al menos un ideal que no es finitamente generado. Denotemos por S el conjunto de ideales de A que no son finitamente generados, parcialmente ordenado por la inclusión, y sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq S$ un subcnjunto totalmente ordenado. Definimos $I := \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$ el cual sabemos que es un ideal y es además no finitamente generado. En efecto, si $I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ para ciertos $a_1, \ldots, a_n \in A$ para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $\alpha_i \in \Lambda$ tal que $a_i \in I_{\alpha_i}$. Ahora, como $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es totalmente ordenado por la inclusión existe un $\alpha \in \Lambda$ tal que $\alpha_i \in I_\alpha$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y por definición de I tenemos $I = I_\alpha$, lo cual supone una contradicción pues I_α es no finitamente generado. Así, tenemos que $I \in S$.
Es claro entonces que I es una cota superior para $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ pues $I_\alpha \subseteq I$ para todo $\alpha \in \Lambda$. El lema de Zorn afirma entonces que existe un elemento maximal I de S. Por maximalidad entonces todo ideal de A/I es finitamente generado, pues de lo contrario dada la correspondencia entre ideales de A que contienen a I e ideales de A/I obtendríamos un ideal finitamente generado de A conteniendo a I. Así, todo ideal de A/I es finitamente generado y en consencuencia es noetheriano.

(b) Por hipótesis todo ideal primo de A es no finitamente generado y por lo tanto I no es primo, así que existen $x, y \in A$ tales que $x \notin I, y \notin I$ pero $xy \in I$. Tenemos entonces que los ideales $J_1 = I + \langle x \rangle, J_2 = I + \langle y \rangle$ contienen a I y por maximalidad entonces son finitamente generados, y además

$$J_1 J_2 = (I + \langle x \rangle)(I + \langle y \rangle) = I^2 + xI + yI + \langle xy \rangle \subseteq I$$

y dado que el producto de ideales finitamente generados es finitamente generado (ejercicio) entonces $J_1 J_2$ es finitamente generado.

(c) Por teoría general sabemos que los ideales de A son $A-$submódulos y por lo tanto podemos dotar a I/J_1J_2 de estructura de $A-$módulo mediante $a \cdot [b] := [ab]$, y como $I \subseteq J_1$ entonces I/J_1J_2 es un $A-$submódulo de J_1/J_1J_2. Ahora, como $IJ_1 \subseteq J_1J_2$ entonces I anula a J_1/J_1J_2 y por lo tanto tiene estructura de $A/I-$módulo. De forma similar I/J_1J_2 es un $A/I-$ módulo y $I/J_1J_2 \subseteq J_1/J_1J_2$. Como J_1 es finitamente generado como $A-$submódulo, J_1/J_1J_2 es finitamente generado como $A-$módulo, y por lo tanto también es finitamente generado como $A/I-$módulo (los generadores son los mismos). Finalmente, como A/I es un anillo noetheriano por el Problema 1. tenemos que J_1/J_1J_2 es un $A/I-$módulo noetheriano y por lo tanto I/J_1J_2 es finitamente generado como A/I-módulo.

(d) La parte anterior implica que I/J_1J_2 es finitamente generado también como $A-$módulo, y como J_1J_2 es también finitamente generado entonces I es finitamente generado, lo cual es una contradicción. Así, todo ideal de A es finitamente generado y por lo tanto es noetheriano.

□

Problema 2. Sea A anillo (conmutativo con unidad), M un $A-$módulo. Demuestre que $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$.

Demostración. Definimos el siguiente morfismo:

$$\Phi : \mathrm{Hom}_A(A, M) \to M, \quad \varphi \mapsto \varphi(1)$$

el cual claramente es un morfismo de $A-$módulos pues

$$\Phi(\varphi + \lambda\psi) = (\varphi + \lambda\psi)(1) = \varphi(1) + \lambda\psi(1) = \Phi(\varphi) + \lambda\Phi(\psi) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_A(A, M), \lambda \in A$$

Notemos ahora que

$$\varphi(1) = 0 \quad \iff \quad \varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1) = 0 \quad \forall \lambda \in A \quad \iff \quad \varphi = 0$$

y por lo tanto

$$\ker(\Phi) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M) : \varphi(1) = 0\} = 0$$

Ahora, para $m \in M$ dado, podemos definir el morfismo de $A-$módulos $\varphi : A \to M, a \mapsto am$, ie, $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ y tenemos $m = \varphi(1) = \Phi(\varphi)$, de donde vemos que Φ es un isomorfismo. □

Problema 3. Sea M un $A-$módulo noetheriano y $\varphi : M \to M$ un endomorfismo de M. Demuestre que si φ es sobreyectiva, entonces φ es un isomorfismo.

Demostración. Notar que tenemos una cadena natural de submódulos asociada a φ dada por

$$\ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi^2) \subseteq \cdots \subseteq \ker(\varphi^n) \subseteq \cdots$$

y por noetherianidad existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\ker(\varphi^n) \subseteq \ker(\varphi^{n+1})$. Por otro lado, notar que como φ es sobreyectivo entonces φ^n es sobreyectivo para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, si $m \in \ker(\varphi)$ entonces existe $m' \in M$ tal que $\varphi^n(m') = m$ y luego $0 = \varphi(m) = \varphi(\varphi^n(m')) = \varphi^{n+1}(m')$ así que $m' \in \ker(\varphi^{n+1}) = \ker(\varphi^n)$ de donde $m = 0$, lo que muestra $\ker(\varphi) = \{0\}$ y en consecuencia φ es inyectiva. □