Pauta Ayudantía 4 Análisis Funcional

8 de septiembre de 2022

Problema 3. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ e.v.n y sea $p : X \to \mathbb{R}$ una función tal que

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
2. Para cada $x \in X$ la función $\lambda \mapsto p(\lambda x)$ es continua
3. Si $(y_n) \subseteq X$ es tal que $p(y_n) \to 0$ entonces $p(\lambda y_n) \to 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

Asuma que $(x_n) \subseteq X$ es tal que $p(x_n) \to 0$ y $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión acotada. Pruebe que $p(0) = 0$ y que $p(\alpha_n x_n) \to 0$.
Concluir que si $(x_n) \subseteq X$ es tal que $p(x_n - x) \to 0$ para algún $x \in X$ y $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $\alpha_n \to \alpha$ entonces $p(\alpha_n x_n) \top p(\alpha x)$.

Indicación: Argumente por contradicción y considere los conjuntos

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq n\}$$

Utilice el Lema de Baire de manera adecuada.

Demostración. Considere $(x_n) \subseteq X$ tal que $p(x_n) \to 0$ y $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}$ acotada. En primer lugar, notamos que por la condición 1. $p(0) \leq p(0) + p(0) \Rightarrow p(0) \geq 0$, y por otro lado,

$$p(0) \leq p(x_n) + p(-x_n) \to 0 \quad \Rightarrow \quad p(0) \leq 0$$

así que $p(0) = 0$.
Por contradicción supongamos que $p(\alpha_n x_n) \nrightarrow 0$. Esto significa que existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión de tal modo que $|p(\alpha_n x_n)| > 2\varepsilon$. Tomando nuevamente subsucesión podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\alpha_n \to \alpha$ (toda sucesión acotada en $\mathbb{R}$ posee subsucesión convergente). Continuamos denotando a estas subsucesiones por (α_n) y (x_n).
Notemos ahora que los conjuntos F_n definidos en la indicación son cerrados pues si denotamos $p_{x_k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto p(\lambda x_k)$ entonces

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq n\} = \bigcap_{k \geq n} \{\lambda \in \mathbb{R} : -\varepsilon \leq p(\lambda x_k) \leq \varepsilon\} = \bigcap_{k \geq n} p_{x_k}^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

y la condición 2. del enunciado afirma que las funciones p_{x_k} son continuas. Por otro lado, podemos notar que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}$$

En efecto, para $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario, la condición 3. significa que $p(\lambda x_n) \to 0$, y por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|p(\lambda x_k)| \leq \varepsilon \ \forall k \geq N$, así que $\lambda \in F_N$. El lema de Baire entonces afirma que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$. Esto entonces significa que existen $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0$ tal que

$$\lambda \in F_{n_0} \qquad \forall |\lambda - \lambda_0| < \delta, \forall k \geq n_0$$

Si definimos $t := \lambda - \lambda_0$ la condición anterior se traduce en que

$$|p((\lambda_0 + t)x_k)| \leq \varepsilon \quad \forall |t| < \delta, \forall k \geq n_0$$

Por la condición 1. tenemos que

$$\begin{aligned} p(\alpha_k x_k) &\leq p((\lambda_0 + \alpha_k - \alpha)x_k) + p((\alpha - \lambda_0)x_k) \\ -p(\alpha_k x_k) &\leq -p((\lambda_0 + \alpha_k - \alpha)x_k) + p((\lambda_0 - \alpha)x_k) \end{aligned}$$

y dado que $\alpha_k \to \alpha$ podemos escoger k suficientemente grande tal que $|\alpha - \alpha_k| < \delta$ y así $|p(\alpha_k x_k)| \leq 2\varepsilon$, lo cual es una contradicción.
Para concluir, consideramos la desigualdad

$$p(\alpha_n x_n) - p(\alpha x) \leq p(\alpha_n(x_n - x)) + p(\alpha_n x) - p(\alpha x)$$

Ya vimos que $p(\alpha_n(x_n - x)) \to 0$, y por la condición 2. del enunciado $p(\alpha_n x) \to p(\alpha x)$, así que $p(\alpha_n(x_n - x)) + p(\alpha_n x) - p(\alpha x) \to 0$. Además, dado que

$$p(\alpha_n x) \leq p(\alpha_n(x - x_n)) + p(\alpha_n x_n)$$

y luego por argumentos similares a lo dados anteriormente

$$p(\alpha_n x_n) - p(\alpha x) \geq -p(\alpha_n(x_n - x)) + p(\alpha_n x) - p(\alpha x) \to 0$$

deduciendo que $p(\alpha_n x_n) \to p(\alpha x)$. □

Problema 2. Sean X, Y espacios de Banach y $B : X \times Y \to Z$ aplicación bilineal, Z e.v.n.. Suponga que B es *separadamente continua*, esto es,

1. Para cada $x \in X$ la aplicación $y \mapsto B(x, y)$ es continua.
2. Para cada $y \in Y$ la aplicación $x \mapsto B(x, y)$ es continua.

Demuestre que existe $C \geq 0$ tal que

$$\|B(x, y)\|_Z \leq C\|x\|_X \|y\|_Y \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Demostración. Denotamos $B_x : Y \to Z, y \mapsto B(x, y)$ y similar $B_y : X \to Z, x \mapsto B(x, y)$. Por la hipótesis de continuidad tenemos que para cada $x \in X$ existe $K_x \geq 0$ tal que

$$\|B_y(x)\|_Z = \|B(x, y)\|_Z \leq K_x \|y\|_Y \qquad \forall y \in Y$$

Lo anterior indica que el conjunto de operadores $\mathscr{L}_y := \{B_y | y \in Y, \|y\|_Y = 1\} \subseteq \mathcal{L}(X, Z)$ está puntualmente acotado. El teorema de Banach-Steinhaus implica que existe $C \geq 0$ de tal modo que

$$\sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y = 1}} \|B_y\| \leq C$$

Lo anterior entonces permite decir que

$$\|B(x, y)\|_Z \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X, \forall y \in B_Y[0, 1]$$

Luego, para $y \in Y \setminus \{0\}$ tenemos

$$\|B(x, y)\|_Z = \left\| B\left(x, \frac{y}{\|y\|_Y}\right) \right\|_Z \cdot \|y\|_Y \leq C\|x\|_X \|y\|_Y \quad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

□

Problema 3. Sea X espacio de Banach separable. El objetivo de este problema es probar que existe un subespacio cerrado $M \subseteq \ell^1(\mathbb{R})$ tal que $X \cong \ell^1(\mathbb{R})/M$ son isométricamente isomorfos. Para ello proceda como sigue:

1. Considere $(x_n) \subseteq B_X[0,1]$ denso numerable y defina $T : \ell^1(\mathbb{R}) \to X, (\lambda_n) \mapsto \sum_n \lambda_n x_n$ lineal. Pruebe que es acotado.

2. Para $x \in B_X[0,1]$ demuestre que existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que
$$\left\| x - \sum_{j=0}^{k} 2^{-j} x_j \right\| \leq 2^{-(j+1)}$$
y deduzca que T es sobreyectivo.

3. Considere la aplicación inducida en el cociente y pruebe que define una isometría.

Demostración. Sea $(x_n) \subseteq B_X[0,1]$ denso y definimos $T : \ell^1 \to X, (\lambda_n) \mapsto \sum_n \lambda_n x_n$ lineal. T es acotado pues
$$\|T((\lambda_n))\|_X \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \|x_n\|_X \leq \|(\lambda_n)\|_{\ell^1}$$
Probemos ahora la sobreyectividad. Sea $x \in B_X[0,1]$. Dado que (x_n) es densa en $B_X[0,1]$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_{n_0}\|_X \leq 1/2$. Luego $2(x - x_{n_0}) \in B_X[0,1]$ y existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de tal modo que $\|2(x - x_{n_0}) - x_{n_1}\| \leq 1/2$. Luego de k pasos tenemos que
$$\|2^{k-1}(x - x_{n_0}) - 2^{k-2} x_{n_1} - \ldots - x_{n_{k-1}}\|_X \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left\| x - \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} x_{n_j} \right\|_X \leq \frac{1}{2^k}$$
Tenemos entonces que $x = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} x_{n_j}$. Si definimos $\lambda_n = 2^{-n}$ cuando $n = n_j$ y $\lambda_n = 0$ en otro caso, entonces $T((\lambda_n)) = x$, por lo que hemos encontrado una preimagen para x. Ahora, si $x \in X \setminus \{0\}$ y $\|x\| \neq 1$ considere $x' = x/\|x\|$. Por lo anterior existe entonces $\lambda' \in \ell^1$ tal que $T(\lambda') = x'$ y luego por linealidad $T(\|x\|\lambda') = x$. En última instancia, si $x = 0$ basta tomar $\lambda = 0$ en ℓ^1. Concluimos la sobreyectividad de T.
Considere $\widetilde{T} : \ell^1/\ker(T) \to X$ la aplicación inducida en el cociente, la cual es biyectiva pues T es sobreyectiva. Dado que X y ℓ^1 son Banach, el teorema de la aplicación abierta implica la continuidad de $\widetilde{T}^{-1}$.
Resta entonces probar que $\widetilde{T}$ es una isometría, i.e., que $\|[\lambda]\|_{\ell^1/\ker(T)} = \|T(\lambda)\|_X$. Si $\|x\|_X = 1$, notar que el argumento del punto anterior se puede realizar cambiando 2 por cualquier $r > 1$ para obtener una subsucesión $(x^r_{n_j})$ verificando $\|x - \sum_{j=0}^{k} r^{-j} x^r_{n_j}\|_X \leq r^{-(k+1)}$ y si definimos $\lambda^r \in \ell^1$ como $\lambda^r_n = r^{-j}$ si $n = n_j$ y $\lambda^r_n = 0$ en otro caso, entonces $\lambda^r \in \ell^1$ y además $T(\lambda^r) = x$. Entonces $\lambda - \lambda^r \in \ker(T)$ y luego
$$\|[\lambda]\|_{\ell^1/\ker(T)} \leq \|\lambda - (\lambda - \lambda^r)\|_{\ell^1} = \|\lambda^r\|_{\ell^1} \leq \sum_{j=0}^{\infty} r^{-j} = \frac{r}{r-1}$$
Haciendo $r \to \infty$ tenemos que $\|[\lambda]\|_{\ell^1/\ker(T)} \leq 1$.
Por otro lado, si $\lambda \in \ell^1$,$\lambda' = \lambda/\|T(\lambda)\|_X$ y $x' = T(\lambda')$, como $\|x'\| = 1$ entonces
$$\|[\lambda']\|_{\ell^1/\ker(T)} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \|[\lambda]\|_{\ell^1/\ker(T)} \leq \|T(\lambda)\|_X = \|\widetilde{T}([\lambda])\|_X$$
Finalmente, como T es lineal siempre se tiene que
$$\|\widetilde{T}(\lambda)\|_X = \|T(\lambda)\|_X = \|T(\lambda) - T(\lambda')\|_X \leq \|\lambda - \lambda'\|_{\ell^1} \quad \forall \lambda' \in \ker(T)$$
así que $\|\widetilde{T}([\lambda])\|_X \leq \|[\lambda]\|_{\ell^1/\ker(T)}$. $\square$

Problema 4. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ lineal, continua y sobreyectiva. Muestre que si existe $r > 0$ tal que $T(B_X(0, r))$ está contenido en un compacto, entonces $\dim Y < +\infty$.

Demostración. El teorema de la aplicación abierta afirma la existencia de $c > 0$ tal que

$$B_Y(0, c) \subseteq T(B_X(0, 1))$$

La hipótesis significa que existe $K \subseteq Y$ compacto y $r > 0$ tal que $T(B_X(0, r)) \subseteq K$. Dado que $B_X(0, 1) = \frac{1}{r} B_X(0, r)$ y T es lineal tenemos que

$$T(B_X(0, 1)) \subseteq \frac{1}{r} K =: K'$$

con $K' \subseteq Y$ compacto. Luego tenemos que

$$\overline{B_Y(0, c)} \subseteq \overline{T(B_X(0, 1))} \subseteq K'$$

y dado que K' es compacto, entonces $\overline{B_Y(0, c)}$ también lo es, y por teorema visto en clases $\dim(Y) < +\infty$. □