Pauta Ayudantía 1 Análisis Funcional

Repaso Análisis I y II

25 de agosto de 2022

Problema 1. Sea ω conjunto no vacío. Definimos el espacio vectorial

$$\ell^\infty(\omega) := \{x : \omega \to \mathbb{K} | \sup_{t\in\omega} |x(t)| < +\infty\}$$

junto con la norma

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in\omega} |x(t)| \quad \forall x \in \ell^\infty(\omega)$$

Demuestre que este espacio es Banach. Deduzca de lo anterior que si M es un espacio métrico compacto entonces el espacio $C(M) := \{f : M \to \mathbb{R} | f \text{ continua}\}$ junto con la norma del supremo es también Banach.

Demostración. Mostramos directamente la completitud del espacio. Sea entonces $\{x_n\} \subseteq \ell^\infty(\omega)$ sucesión de Cauchy. Esto en particular dice que para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq N$ se verifica

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall t \in \omega$$

Así, para cada $t \in \omega$ se tiene que $\{x_n(t)\}$ es una sucesión de Cauchy, y podemos entonces definir puntualmente la función $x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t)$.
Probamos ahora que $x \in \ell^\infty(\omega)$ y que es el límite de la sucesión. Para ello sea $\varepsilon > 0, t \in \omega$. Podemos seleccionar $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon$ para $n \geq N'$, y para $N := \max\{N, N'\}$ tenemos

$$|x(t) - x_n(t)| \leq |x(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon + \|x_m - x_n\|_\infty < 2\varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Podemos entonces tomar supremo en la desigualdad anterior para concluir que $x_n \to x$ en $\ell^\infty(\omega)$. Recordando ahora que toda sucesión de Cauchy es acotada ($\{x_k\}$ lo es) tenemos que

$$|x(t)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t)| \leq 2\varepsilon + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_\infty$$

de donde deducimos que $x \in \ell^\infty(\omega)$.
Consideremos ahora $\omega = M$ espacio métrico compacto y $C(M)$ el espacio de funciones continuas. Notemos que $C(M) \subseteq \ell^\infty(M)$ pues toda función continua es acotada en un compacto. Luego basta verificar que $C(M)$ es cerrado en dicho espacio. Ello equivale entonces a probar que el límite uniforme de funciones continuas es continuo. Probamos esto a continuación. Sea $\{x_n\} \subseteq C(M)$ convergente a x en $\ell^\infty(M)$. Sean $\varepsilon > 0, t_0 \in M$ fijos. Por la convergencia uniforme se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon/3 \qquad \forall t \in M, \forall n \geq N$$

Dado que x_n es continua en t_0 podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$|x_n(t) - x_n(t_0)| < \varepsilon/3 \qquad \forall t \in B_M(t_0, \delta)$$

Juntando lo anterior

$$|x(t) - x(t_0)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in B_M(t_0, \delta)$$

de lo que concluimos el resultado. □

Problema 2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio vectorial normado y $K \subseteq X$ un conjunto compacto no vacío y sea $0 < \alpha \leq 1$. Decimos que una función $f : K \to \mathbb{R}$ es α-Hölder continua si

$$[f]_\alpha := \sup_{x,y\in K, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x-y\|_X^\alpha} < +\infty$$

Definimos el espacio de Hólder $C^\alpha(K)$ como el conjunto de funciones Hölder continuas sobre K. En este espacio definimos

$$\|f\| = \|f\|_\infty + [f]_\alpha := \sup_{x\in K} |f(x)| + \sup_{x,y\in K, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x-y\|_X^\alpha} \qquad \forall f \in C^\alpha(K)$$

Demuestre que la función anterior define una norma en $C^\alpha(K)$ y que dicho espacio es Banach.

Demostración. En primer lugar debemos notar que $\|\cdot\|$ está bien definida, pues por definición de $C^\alpha(K)$ se tendrá que $[f]_\alpha < +\infty$ y lo anterior implica que f es uniformemente continua, así que en particular $\|f\| < +\infty$ pues K es compacto. El hecho que $\|\cdot\|$ define una norma es directo de las propiedades de supremo y valor absoluto.
Resta entonces ver la completitud del espacio. Para ello sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C^\alpha(K)$ sucesión de Cauchy. Se puede observar entonces que esto implica que para cada $x \in K$ la sucesión $\{f_k(x)\} \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy, y por lo tanto podemos definir una función $f : K \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Veamos que $f \in C^\alpha(K)$. Para ello, recordamos que toda sucesión de Cauchy es acotada, es decir, en este caso tenemos que existe $L > 0$ tal que

$$\|f_k\| = \|f_k\|_\infty + [f_k]_\alpha < L \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

De lo anterior entonces podemos obtener que

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq L\|x-y\|_X^\alpha \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x, y \in K$$

Tomando $k \to \infty$ se tiene entonces el resultado. Para concluir entonces probaremos que $f_k \to f$ en $C^\alpha(K)$. Para ello fijamos $\varepsilon > 0$. Usando nuevamente el hecho que $\{f_k\}$ es Cauchy, podemos decir que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$\|f_k - f_{k'}\|_\infty \leq \varepsilon \qquad [f_k - f_{k'}]_\alpha \leq \varepsilon \qquad \forall k, k' \geq k_0$$

La primera cota entonces nos da una cota uniforme sobre K mientras que la segunda cota nos da que

$$|f_k(x) - f_{k'}(x) - f_k(y) + f_{k'}(y)| \leq \varepsilon\|x-y\|_X^\alpha \qquad \forall k, k' \geq k_0, \forall x, y \in K$$

Podemos hacer $k' \to \infty$ para obtener las desigualdades

$$\begin{aligned} |f_k(x) - f(x)| &\leq \varepsilon & &\forall k \geq k_0, \forall x \in K \\ |f_k(x) - f(x) - f_k(y) + f(y)| &\leq \varepsilon\|x-y\|_X^\alpha & &\forall k \geq k_0, \forall x, y \in K \end{aligned}$$

y tomando supremo en las desigualdades anteriores obtenemos que $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ y $[f_k - f]_\alpha \to 0$, lo que implica la convergencia en $C^\alpha(K)$. □

Problema 3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio vectorial normado y $U \subseteq X$. Entonces se verifica que

$$d(x, U) = 0 \quad \iff \quad x \in \overline{U}$$

Demostración. Suponemos en primer lugar que $d(x, U) = 0$. Dado que la distancia corresponde a un ínfimo, lo anterior permite decir que para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $x_\varepsilon \in U$ tal que

$$d(x, x_\varepsilon) < d(x, U) + \varepsilon < \varepsilon$$

Porlo tanto tenemos que $B(x, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, de donde $x \in \overline{U}$.
Por otro lado, si tenemos que $x \in \overline{U}$, podemos seleccionar $x_n \in U \cap B(x, 1/n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así que

$$0 \leq d(x, U) \leq d(x, x_n) < \frac{1}{n}$$

y luego $d(x, U) = 0$. □

Problema 4. El objetivo de este problema es demostrar el **Teorema de Radon-Nikodym** utilizando el **Teorema de Representación de Riesz** para espacios de Hilbert. Sean μ y ν dos medidas finitas sobre el espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Considere los siguientes pasos.

1. Si μ, ν satisfacen $\nu(A) \leq \mu(A)$ para todo conjunto $A \in \mathcal{A}$, muestre que existe una función medible ψ tal que
$$\int_X \varphi d\nu = \int_X \varphi\psi d\mu, \quad \forall \varphi \in L^2(X, \mu).$$
2. Pruebe que la función ψ del ítem anterior satisface $0 \leq \psi \leq 1$ $\mu-$ctp.
3. Suponga que ν es absolutamente continua con respecto a μ. Aplique los ítems anteriores para concluir que existen dos funciones medibles ψ_ν, ψ_μ tales que $0 \leq \psi_\nu \leq 1$, $0 \leq \psi_\mu \leq 1$ satisfaciendo
$$\int_X \varphi d\nu = \int_X \varphi\psi_\nu d[\nu + \mu] \quad \text{y} \quad \int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi\psi_\mu d[\nu + \mu]$$
para toda $\varphi \in L^2(X, \nu + \mu)$.
4. Note que las medidas $\nu+\mu$ y μ tienen los mismos conjuntos nulos. Pruebe que $\psi_\mu \neq 0$ μ-ctp, $1/\psi_\mu$ es integrable respecto a μ y que para toda función medible no negativa φ se tiene
$$\int_X \varphi d[\nu + \mu] = \int_X \varphi\psi_\mu^{-1} d\mu.$$
5. Concluya que para todo conjunto medible $A \in \mathcal{A}$
$$\nu(A) = \int_A \psi_\nu\psi_\mu^{-1} d\mu.$$

Demostración.

1. Sea el funcional $T : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ definida por
$$T(\varphi) = \int \varphi d\nu$$
Notar que dicho funcional está bien definido dado que, como $\nu(A) \leq \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, y además las medidas son finitas, se tiene que $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^2(X, \mathcal{A}, \nu)$. Podemos observar que T es lineal pues es una integral. Además es continuo dado que
$$|T(\varphi)| = \left|\int_X \varphi d\nu\right| \leq \int_X |\varphi| d\nu \leq \left(\int_X |\varphi|^2 d\nu\right)^{1/2} \nu(X)^{1/2} \leq \left(\int_X |\varphi|^2 d\mu\right)^{1/2} \nu(X)^{1/2} = \|\varphi\|_{L^2(X,\mathcal{A},\mu)}\nu(X)^{1/2}$$
$$\Longrightarrow |T(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{L^2(X,\mathcal{A},\mu)}\nu(X)^{1/2} \quad \forall \varphi \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$$
donde hemos utilizado la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la monotonía de la integral respecto de la medida y la finitud del espacio de medida. Como T es un funcional lineal continuo, el Teorema de Representación de Riesz asegura la existencia de $\psi \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ (por lo tanto medible) de tal forma que
$$T(\varphi) = \int_X \varphi d\nu = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} = \int_X \varphi\psi d\mu \quad \forall \varphi \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$$
2. Sea $\psi \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ la función encontrada en el problema anterior y considere los conjuntos
$$N_k := \{x \in X | \psi(x) \leq -1/n\} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$$

Luego utilizando el problema anterior notamos que (como ν es medida)

$$0 \leq T(\mathbb{1}_{N_k}) = \int_{N_k} d\nu = \nu(N_k) = \int_{N_k} \psi d\mu \leq -\mu(N_k)/k \leq 0 \Longrightarrow \mu(N_k) = 0$$

de donde es posible concluir que

$$\{\psi(x) < 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^{\geq 1}} N_k \Rightarrow 0 \leq \mu(\{\psi(x) < 0\}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}^{\geq 1}} \mu(N_k) = 0$$

Se sigue que $\psi \geq 0$ μ-ctp.
Dado que $\nu(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$\int_A \psi d\mu = \int_A d\nu \leq \int_A d\mu = \mu(A)$$

Ahora podemos definir

$$P_k := \{x \in X | \psi(x) > 1 + 1/k\}$$

Entonces tenemos

$$0 \leq \nu(P_k) = \int_{P_k} \psi d\mu \leq \mu(P_k) \Rightarrow 0 \leq \mu(P_k)/k \leq \int_{P_k} (\psi - 1) d\mu \leq 0$$

de donde deducimos que $\mu(P_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Por lo tanto

$$\{\psi(x) > 1\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^{\geq 1}} P_k \Rightarrow 0 \leq \mu(\{\psi(x) > 1\}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}^{\geq 1}} \mu(P_k) = 0$$

3. Como μ, ν son medidas finitas, tenemos que también $\nu + \mu$ es una medida finita sobre el espacio $(X, \mathcal{A})$. Tenemos la siguiente desigualdad

$$\text{máx}\{\nu(A), \mu(A)\} \leq (\nu + \mu)(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Dado que se cumplen las hipótesis del punto 1. tanto para ν como para μ, podemos afirmar la existencia de ψ_ν, ψ_μ medibles las cuales verifican que

$$\int_X \varphi d\nu = \int_X \varphi\psi_\nu d[\nu + \mu] \qquad \int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi\psi_\mu d[\nu + \mu] \qquad \forall \varphi \in L^2(X, \mathcal{A}, \nu + \mu)$$

Más aún, por el punto 2. se tiene que $0 \leq \psi_\nu \leq 1$ y $0 \leq \psi_\mu \leq 1$ c.t.p.. Dado que ahora se requiere que dichas funciones cumplan que $0 \leq \psi_\nu, \psi_\mu \leq 1$ en todo punto, basta definir los puntos en donde esto no se cumple como algún valor conveniente en el intervalo $[0, 1]$. Como dichos conjuntos son de medida nula, su redefinición no afectará a los valores de las integrales.

4. Considere el conjunto $Z = \{x \in X : \psi_\mu = 0\}$. Luego por el problema anterior vemos que

$$\mu(Z) = \int_Z d\mu = \int_Z \psi_\mu d[\nu + \mu] = 0$$

de donde concluimos que $\psi_\mu \neq 0$ $\mu-$ctp. Como μ y $\mu + \nu$ comparten sus conjuntos de medida nula, podemos decir lo mismo con respecto a la medida $\mu + \nu$, por ende tiene sentido considerar la función $1/\psi_\mu$. Veamos que dicha función es $\mu-$integrable. Para ello definamos los conjuntos $E_n = \{x \in X : 1/n \leq \psi_\mu(x)\}$. Luego tenemos que

$$\int (\mathbb{1}_{E_n} \psi_\mu^{-1})^2 d[\mu + \nu] \leq \int_{E_n} n^2 d[\mu + \nu] \leq n^2(\mu + \nu)(X) < +\infty$$

y así $\mathbb{1}_{E_n}\psi_\mu^{-1} \in L^2(X,\mu)$. Por esto podemos emplear la identidad demostrada en 1.3 para observar que

$$(\nu+\mu)(E_n) = \int_{E_n} (\psi_\mu^{-1})\psi_\mu d[\nu+\mu] = \int_{E_n} \psi_\mu^{-1} d\mu$$

Como la sucesión de conjuntos $(E_n)_n$ es creciente y esta converge a X, notamos que $(1_{E_n}\psi_\mu^{-1}) \nearrow \psi_\mu^{-1}$, y como ψ_μ^{-1} es no negativa, por TCM y la finitud de la medida se tiene que

$$\int \psi_\mu^{-1} d\mu = (\nu+\mu)(X) < +\infty$$

concluyendo que $1/\psi_\mu$ es $\mu-$integrable.
Consideremos ahora $\varphi = a\mathbb{1}_A$ función característica para cierto $A \in \mathcal{A}$. Dado que ψ_μ^{-1} es acotada en E_n, tenemos que $\mathbb{1}_{A\cap E_n}\psi_\mu^{-1} \in L^2(X,\mu+\nu)$. Entonces, usando el punto 3, TCM y la continuidad de la medida (los E_n son crecientes) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_X \varphi d[\mu+\nu] = a(\mu+\nu)(A) &= a \lim_{n\to\infty} (\mu+\nu)(A\cap E_n) \\
&= a \lim_{n\to\infty} \int (\mathbb{1}_{A\cap E_n}\psi_\mu^{-1})\psi_\mu d[\mu+\nu] \\
&= a \lim_{n\to\infty} \int_{A\cap E_n} \psi_\mu^{-1} d\mu \\
&= a \int \psi_\mu^{-1} d\mu \\
&= \int \varphi\psi_\mu^{-1} d\mu
\end{aligned}$$

Ahora, si φ es una función simple no negativa de la forma

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}, \qquad a_k \geq 0$$

donde los A_k son 2 a 2 disjuntos, podemos aplicar lo anterior y obtener que

$$\int_X \varphi\psi_\mu^{-1} d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{A_k} \psi_\mu^{-1} d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{A_k} \psi_\mu^{-1} d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{A_k} d[\nu+\mu] = \int \varphi d[\nu+\mu]$$

A continuación, si φ es una función medible no negativa, podemos tomar una sucesión creciente $(\varphi_n)_n$ de funciones simples no negativas de tal forma que $\varphi_n \nearrow \varphi$. Entonces por TCM

$$\int_X \varphi\psi_\mu^{-1} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \psi_\mu^{-1} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d[\nu+\mu] = \int_X \varphi d[\nu+\mu]$$

5. Por el punto 3. sabemos que $0 \leq \psi_\nu \leq 1$, por lo que dicha función es no negativa. Entonces, si $A \in \mathcal{A}$ por los incisos 3. y 4. podemos concluir que

$$\nu(A) = \int_A d\nu = \int_A \psi_\nu d[\nu+\mu] = \int_A \psi_\nu \psi_\mu^{-1} d\mu$$

$\square$