# Ayudantía 8 Análisis Funcional

20 de octubre de 2022

**Recuerdo 1** (Topología generada por un conjunto de funciones)**.** Sea $X$ conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de funciones de la forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Se define la topología en $X$ generada por $\mathcal{F}$ como la topología menos fina tal que las funciones de la colección $\mathcal{F}$ son continuas. Denotamos a esta topología por $\sigma(X, \mathcal{F})$.

**Problema 1.** Sea $X$ conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de funciones de la forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Demuestre que la topología generada por $\mathcal{F}$ existe y que la colección

$$\mathscr{B} = \{f_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) | \theta_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$$

es una subbase para dicha topología. Considere a continuación $\bar{\ell} \in X'$. Demuestre que la colección

$$\{V_{\bar{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) | x_1, \ldots, x_n \in X, \varepsilon > 0\}$$

donde

$$V_{\bar{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{\ell \in X' | |\langle \ell - \bar{\ell}, x_i\rangle_{X',X}| < \varepsilon, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

define una base de vecindades de la topología $\sigma(X', X) := \sigma(X', J(X))$ en torno a $\bar{\ell}$, donde $J : X \to X''$ es la inyección canónica.

**Problema 2.** Sea $X$ conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}, f_\alpha : X \to Y_\alpha$ funciones de la forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Considere una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Demuestre que $(x_n) \subseteq X$ converge a $x \in X$ en $\sigma(X, \mathcal{F})$ si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} f_\alpha(x_n) = f_\alpha(x) \qquad \forall \alpha \in \Lambda$$

Utilice lo anterior para demostrar que la convergencia en $\sigma(X', X)$ corresponde a la convergencia puntual.

**Problema 3.** Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ espacio de Banach. Demuestre usando los teoremas de Kakutani y Banach-Alaouglu que $(X, \|\cdot\|_X)$ es reflexivo si y solo si $\sigma(X', X) = \sigma(X', X'')$.

**Problema 4.** El objetivo de este problema es demostrar que la compacidad en $\sigma(X', X)$ es equivalente al hecho de ser cerrado y acotado. Sea entonces $X$ espacio de Banach y con respecto a la topología $\sigma(X', X)$ pruebe los siguientes hechos:

1. Pruebe que $\sigma(X', X)$ es Hausdorff.
2. Pruebe que para cada $\lambda > 0$, la función $\varphi_\lambda : (X', \sigma(X', X)) \to (X', \sigma(X', X)), \ell \to \lambda\ell$ es un homeomorfismo.
3. Demuestre que si $K \subseteq X'$ es débil-$\star$ cerrado y acotado entonces es compacto en $\sigma(X', X)$.
4. Demuestre que si $K$ es compacto en $\sigma(X', X)$ entonces es cerrado y acotado.
   **Indicación:** Considere un cubrimiento por abiertos débiles de la forma $U_{\bar{\ell}}(x) = \{\ell \in X' : |\ell(x) - \bar{\ell}(x)| < 1\}$. Use la compacidad y concluya por el teorema de Banach-Steinhaus.