Ayudantía 11 Análisis Funcional

17 de noviembre de 2022

Recuerdo(Ley del paralelogramo). Sea $(H, \langle\cdot\rangle)$ espacio de Hilbert. Entonces se verifica la ley del paralelogramo

$$\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2)$$

Más aún, se puede demostrar que si en un espacio vectorial normado la norma verifica la identidad anterior, entonces viene inducida por un producto interno.

Problema 1. Sea H espacio de Hilbert.

1. Demuestre que si $(x_n) \subseteq H$ converge débil $x_n \rightharpoonup x$ y $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_H \leq \|x\|_X$ entonces $x_n \to x$.

Considere a continuación $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de H, una sucesión $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ acotada y $u_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i e_i$.

2. Pruebe que $e_n \rightharpoonup 0$.
3. Demuestre que $|u_n| \to 0$ y $\sqrt{n}u_n \rightharpoonup 0$.

Problema 2. Sea H espacio de Hilbert.

1. Sea (K_n) sucesión de convexos cerrados decrecientes en H tales que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Demuestre que para cada $x \in H$ la sucesión $x_n := P_{K_n}(x)$ converge y encuentre el límite.
2. Sea (K_n) sucesión creciente de convexos cerrados no vacíos de H. Demuestre que para cada $x \in H$ la sucesión $x_n := P_{K_n}(x)$ converge y encuentre el límite.
3. Considere $\varphi : H \to \mathbb{R}$ función continua y acotada inferiormente. Demuestre que la sucesión $\alpha_n = \inf_{K_n} \varphi$ converge.

Problema 3. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|_H$. Considere $V \subseteq H$ subespacio denso. Suponga que V posee una norma $\|\cdot\|_V$ con la cual es completo y asuma también que la inyección $V \hookrightarrow H$ es continua, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|v\|_H \leq C\|v\|_V$ para todo $v \in V$. Defina el operador lineal

$$T : H \to V', \qquad \langle Tu, v\rangle_{V',V} = \langle u, v\rangle_H \qquad \forall u \in H, \forall v \in V$$

1. Demuestre que $\|Tu\|_{V'} \leq C\|u\|_H$ para todo $u \in H$.
2. Demuestre que T es inyectiva.
3. Pruebe que $\mathrm{ran}(T)$ es denso en V' si V es reflexivo.
4. Dado $f \in V'$, demostrar que $x \in \mathrm{ran}(T)$ si y solo si existe $K \geq 0$ tal que $|\langle f, v\rangle_{V',V}| \leq K\|v\|_H$ para todo $v \in V$.

Note que, en el contexto del ejercicio anterior, en general podemos identificar H con su dual H', y dado que el ejercicio anterior nos da una inyección de H' en V', tenemos

$$V \subseteq H \cong H' \subseteq V'$$

y si V es reflexivo por el ejercicio anterior las inyecciones anteriores son continuas y densas.
Más aún, si suponemos que V es también Hilbert con su propio interno propio, también podríamos identificar V con V', lo cual hace que lo anterior pierda sentido. Así, en general, aunque el isomorfismo del teorema de representación de Riesz es independiente de elecciones, no todos los espacios se pueden identificar con sus duales de manera simultánea.