Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 2 Análisis Funcional

1 de septiembre de 2022

Problema 1. Considere X e.v.n y $M \subseteq$ subespacio vectorial cerrado.

1. Pruebe que si X es separable entonces X/M también.
2. Demuestre que si X/M y M son ambos separables, entonces X es separable.
3. Dé un ejemplo donde M y X/M sean separables pero X no lo sea.

Demostración.

1. Suponer que X es separable, i.e., tiene $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ denso. Sea $[x] \in X/M, \varepsilon > 0$. Por densidad, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_n\|_X < \varepsilon$. Dado que M es subespacio, en particular $0 \in M$ y por lo tanto
$$\|[x] - [x_n]\|_{X/M}\| = \|[x - x_n]\|_{X/M} \leq \|x - x_n\|_X < \varepsilon$$
2. Sea $\{[x_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso en X/M y $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ denso en M. Probaremos que $\{x_n + y_k\}_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ es denso en X, de lo cual se seguirá el resultado pues el conjunto anterior es numerable.
Sea $\varepsilon > 0, x \in X$. Como $\{[x_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso existe $x_n \in X$ tal que $\|[x - x_n]\|_{X/M} = \inf_{m\in M} \|x - x_n\|_X < \varepsilon/2$. Por definición de ínfimo existe $m \in M$ tal que $\|x - x_n - m\|_X < \varepsilon/2$. Ahora, como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en M existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|m - y_k\| < \varepsilon/2$. Luego vemos que
$$\|x - x_n - y_k\|_X = \|(x - x_n - m) + (m - y_k)\|_X \leq \|(x - x_n - m)\|_X + \|m - y_k\|_X < \varepsilon$$
3. Consideremos $X = \ell^\infty(\mathbb{R})$. Definimos la aplicación lineal sobreyectiva.
$$\varphi : \ell^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}, \qquad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x_1$$
Notemos que $\ker(\varphi) = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} | x_1 = 0\}$ el cual es cerrado pues la convergencia en $\ell^1(\mathbb{R})$ es la convergencia uniforme que en particular implica convergencia puntual. Por teorema del isomorfismo de Noether tenemos un isomorfismo $\ell^\infty(\mathbb{R})/M \cong \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es separable. Este ejemplo es válido pues en clases se vio que $\ell^\infty(\mathbb{R})$ no es separable.

□

Problema 2. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un e.v.n. y sea $\sigma : X \to \mathbb{R}$ una función dada. Considere el conjunto
$$D = \{\ell \in X^* \mid \ell(x) \leq \sigma(x), \forall x \in X\}.$$
El objetivo del problema es demostrar que σ es sublineal y continua si y sólo si D es convexo, cerrado, no vacio y acotado, y que además satisface
$$\sigma(x) = \sup\{\ell(x) \mid \ell \in D\}, \quad \forall x \in X \tag{1}$$
Considere lo siguientes pasos:

1. Asuma que σ viene dado por (1) y que D es un subconjunto convexo, cerrado, no vacío y acotado de X^*. Demuestre que σ es sublineal y continua en X.
Indicación: Demuestre primero que σ es continua en $x = 0$, luego, usando argumentos similares al caso de funcionales lineales, obtenga la continuidad de σ en todo el espacio X.

De aquí en adelante suponer que σ es sublineal y continua en X.

2. Demuestre que D es no vacío y que (1) se verifica.
   Indicación: Fije $x_0 \in X\backslash\{0\}$. Considere el s.e.v. $X_0 = \langle\{x_0\}\rangle$ y la función $\ell_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ dada por
$$\ell_0\left(tx_0\right) = t\sigma\left(x_0\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
3. Pruebe que D es un subconjunto convexo y cerrado de X^*.
4. Usando la continuidad de σ, pruebe que $\exists c > 0$ tal que $|\sigma(x)| \leq c$ para todo $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$. Concluya que D es acotado.

Demostración.

1. Sea $\lambda > 0, x \in X$ y veamos que σ es positivamente homogénea. En efecto,
$$\sigma(\lambda x) = \sup\{\ell(\lambda x)|\ell \in D\} = \sup\{\lambda\ell(x)|\ell \in D\} = \lambda\sup\{\ell(x)|\ell \in D\} = \lambda\sigma(x)$$
   Considerando ahora $x, y \in X$ vemos que
$$\begin{aligned}\sigma(x+y) = \sup\{\ell(x+y)|\ell \in D\} &= \sup\{\ell(x)+\ell(y)|\ell \in D\}\\ &\leq \sup\{\ell(x)|\ell \in D\} + \sup\{\ell(y)|\ell \in D\}\\ &= \sigma(x)+\sigma(y) \qquad \forall x, y \in X\end{aligned}$$
   Demostraremos en primer lugar que σ es continua en $x = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que D es acotado, existe $L > 0$ tal que $\sup\{\|\ell\|_{X^*}|\ell \in D\} \leq L$ y luego eligiendo $\delta = \varepsilon/L$ tenemos que para cada $x \in B_X(0,\delta)$
$$\begin{aligned}|\sigma(x)| = |\sup\{\ell(x)|\ell \in D\}| &\leq \sup\{|\ell(x)||\ell \in D\}\\ &\leq \sup\{\|\ell\|\|x\||\ell \in D\}\\ &= \|x\|\sup\{\ell(x)|\ell \in D\}\\ &= L\|x\| \leq \varepsilon\end{aligned}$$
   Ahora, dado que $\sigma(0) = \lambda\sigma(0)$ para $\lambda > 0$ entonces $\sigma(0) = 0$ y lo anterior prueba la continuidad en $x = 0$. Ahora, si consideramos $x, y \in X$ entonces
$$\begin{aligned}\sigma(x) \leq \sigma(x-y)+\sigma(y) &\Rightarrow \sigma(x)-\sigma(y) \leq \sigma(x-y) \leq L\|x-y\|_X\\ &\Rightarrow |\sigma(x)-\sigma(y)| \leq L\|x-y\|_X\end{aligned}$$
   con lo cual se puede concluir la continuidad de σ.

2. Sea $x_0 \in X \setminus \{0\}$ fijo, $X_0 = \langle x_0\rangle$ y $\ell_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ definido como $\ell_0(tx_0) = t\sigma(x_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
   Si $t > 0$ es claro que $\ell_0(tx_0) \leq \sigma(tx_0)$ por homogeneidad, y si $t < 0$ notamos que
$$\begin{aligned}\ell(tx_0) &= t\sigma(x_0) = -\sigma(-tx_0)\\ \Rightarrow 0 &= \sigma(tx_0 - tx_0) \leq \sigma(tx_0) + \sigma(-tx_0)\\ &\Rightarrow -\sigma(-tx_0) = \ell(tx_0) \leq \sigma(tx_0)\end{aligned}$$
   de donde deducimos que $\ell_0 \leq \sigma$ en X_0. Por el Teorema de extensión de Hahn-Banach existe $\ell \in X^*$ tal que $\ell|_{X_0} = \ell_0$ y $\ell \leq \sigma$ en todo X, así que $\ell \in D$ y por lo tanto dicho conjunto es no vacío.
   Además, por la misma definición de D tenemos que
$$\sup\{\ell(x)|\ell \in D\} \leq \sigma(x) \quad \forall x \in X$$
   y en particular el $\ell \in D$ que construimos verifica que $\ell(x_0) = \sigma(x_0)$, y dado que dicha construcción la podemos realizar para cada $x_0 \in X$ se alcanza la igualdad en todo punto.

3. Notemos que podemos reescribir D como
$$D = \bigcap_{x\in X} \underbrace{\{\ell \in X^*|\ell(x) \leq \sigma(x)\}}_{=:D_x}$$

Probaremos que cada D_x es convexo, cerrado y tendremos que D es cerrado. Sea $\{\ell_k\} \subseteq D_x$ tal que $\ell_k \to \ell$ en X^*. Notar que esto en particular implica que ℓ_k converge de manera puntual a ℓ, es decir, para cada $x \in X$ se tiene que $\ell_k(x) \to \ell(x)$. Tomando $k \to \infty$ en $\ell_k(x) \leq \sigma(x)$ tenemos $\ell(x) \leq \sigma(x) \Rightarrow \ell \in D_x$.
Para ver que es convexo basta con tomar $\lambda \in (0,1), \ell_1, \ell_2 \in D_x$ y ver que

$$\lambda\ell_1(x) + (1-\lambda)\ell_2(x) \leq \lambda\sigma(x) + (1-\lambda)\sigma(x) = \sigma(x) \Rightarrow \lambda\ell_1 + (1-\lambda)\ell_2 \in D_x$$

4. Dado que σ es continuo, en particular lo es en $x = 0$, y por lo tanto $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta \Rightarrow |\sigma(x)| \leq \varepsilon$ Tomando $\varepsilon = 1$ tenemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que $|\sigma(x)| \leq 1 \quad \forall x \in B_X[0, \delta_1]$. Luego tenemos que para $x \in B_X[0,1] \setminus \{0\}$ se verifica $\dfrac{\delta_1 x}{\|x\|} \in B_X[0, \delta_1]$ y por lo tanto

$$\left|\sigma\left(\frac{\delta_1 x}{\|x\|_X}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow |\sigma(x)| \leq \frac{\|x\|}{\delta_1} \leq \frac{1}{\delta_1}$$

y para $c = 1/\delta_1$ se tiene la propiedad del enunciado. Si $\ell \in D$ entonces

$$\ell(x) \leq \sigma(x) \leq c \quad \text{y} \quad -\ell(x) = \ell(-x) \leq \sigma(-x) \leq c \Rightarrow |\ell(x)| \leq c \quad \forall x \in B_X[0,1]$$

Se sigue que $\|\ell\| \leq c$ para todo $\ell \in D$, i.e., D es acotado.

□