Ayudantía 2 Análisis Funcional

1 de septiembre de 2022

Problema 1. Considere X e.v.n y $M \subseteq$ subespacio vectorial cerrado.

1. Pruebe que si X es separable entonces X/M también.
2. Demuestre que si X/M y M son ambos separables, entonces X es separable.
3. Dé un ejemplo donde M y X/M sean separables pero X no lo sea.

Problema 2. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un e.v.n. y sea $\sigma : X \to \mathbb{R}$ una función dada. Considere el conjunto

$$D = \{\ell \in X^* \mid \ell(x) \leq \sigma(x), \forall x \in X\}.$$

El objetivo del problema es demostrar que σ es sublineal y continua si y solo si D es convexo, cerrado, no vacio y acotado, y que además satisface

$$\sigma(x) = \sup\{\ell(x) \mid \ell \in D\}, \quad \forall x \in X \tag{1}$$

Considere lo siguientes pasos:

1. Asuma que σ viene dado por (1) y que D es un subconjunto convexo, cerrado, no vacío y acotado de X^*. Demuestre que σ es sublineal y continua en X.
   Indicación: Demuestre primero que σ es continua en $x = 0$, luego, usando argumentos similares al caso de funcionales lineales, obtenga la continuidad de σ en todo el espacio X.

De aquí en adelante suponer que σ es sublineal y continua en X.

2. Demuestre que D es no vacío y que (1) se verifica.
   Indicación: Fije $x_0 \in X \backslash \{0\}$. Considere el s.e.v. $X_0 = \langle \{x_0\} \rangle$ y la función $\ell_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ dada por
   $$\ell_0(tx_0) = t\sigma(x_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$
3. Pruebe que D es un subconjunto convexo y cerrado de X^*.
4. Usando la continuidad de σ, pruebe que $\exists c > 0$ tal que $|\sigma(x)| \leq c$ para todo $x \in X$ con $\|x\|_X \leq 1$. Concluya que D es acotado.

Problema 3. Supongamos que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un e.v.n. y que $f : Y \to \mathbb{R}$ es una función continua y convexa, i.e., tal que

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2), \quad \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \lambda \in [0,1].$$

Consideremos ahora otro e.v.n. $(X, \|\cdot\|_X)$, un operador $A \in \mathcal{L}C(X,Y)$ y $x_0 \in X$, tales que existe $\varphi \in X^*$ que verifica

$$f(A(x_0)) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{X^*,X} \leq f(A(x)), \quad \forall x \in X.$$

Pruebe, usando el Teorema de Hahn-Banach Geométrico, que existe $\ell \in Y^*$ tal que $\varphi = \ell \circ A$ y que además satisface

$$f(A(x_0)) + \langle \ell, y - A(x_0) \rangle_{Y^*,Y} \leq f(y), \quad \forall y \in Y.$$

Indicación: Pruebe que los siguientes conjuntos son convexos y disjuntos:

$$A := \{(y,z) \in Y \times \mathbb{R} \mid f(y) < z\} \quad \text{y} \quad B := \left\{ \Big(A(x), f\Big(A(x_0) + \langle \varphi, x - x_0 \rangle_{X^*,X} \Big) \in Y \times \mathbb{R} \mid x \in X \right\}.$$