Pauta Ayudantía 12 Análisis Funcional

17 de noviembre de 2022

Problema 1. Sea H espacio de Hilbert y (e_n) base ortonormal. Decimos que un operador $T \in \mathcal{L}(H)$ es un **operador de Hilbert-Schmidt** si

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T(e_n)\|_H^2 < +\infty$$

1. Demuestre que la definición anterior no depende de la base ortonormal. Muestre también que T es Hilbert-Schmidt si y solo si T' es Hilbert-Schmidt.
2. Demuestre que el conjunto de operadores Hilbert-Schmidt es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H)$.

Sobre el espacio vectorial de operadores Hilbert-Schmidt, denotado $HS(H)$, podemos definir la norma:

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|T(e_n)\|_H^2\right)^{1/2}$$

3. Muestre que $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.
4. Demuestre que el espacio de operadores Hilbert-Schmidt sobre H es Banach. Más aún, pruebe que es Hilbert.

En lo que sigue considere $H = L^2(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $K \in L^2(\Omega\times\Omega)$ y defina el operador

$$T : H \to H, \quad (Tu)(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$$

5. Muestre que el operador $T \in HS(H)$ y que $\|T\|_{HS(H)} = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.

   Indicación: Si (e_n) es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ demuestre que $(e_n e_m)$ es base ortonormal de $L^2(\Omega\times\Omega)$.
6. Demuestre que todo operador $T \in HS(H)$ es de la forma anterior y que $\|T\|_{HS} = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.

Demostración.

1. Sea (f_n) otra base ortonormal de H. Notemos entonces que por el Teorema de Fubini

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle Te_n, f_m\rangle|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle e_n, T'f_m\rangle|^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \|T'f_m\|_H^2$$

   Entonces, considerando $f_m = e_m$ en la identidad anterior, repitiendo el mismo cálculo para T' y recordando que $T'' = T$ en espacios de Hilbert, tenemos

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|_H^2 = \sum_{m\in\mathbb{N}} \|T'e_m\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|T''f_n\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Tf_n\|_H^2$$

   El hecho que T' sea Hilbert-Schmidt se desprende de los cálculos anteriores.

2. Basta emplear desigualdad triangular:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|(S+T)(e_n)\|_H^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|S(e_n)\|_H^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|_H^2$$

3. Si $x \in H$ es unitario, podemos construir una sucesión ortonormal (e_n) tal que $\{x\} \cup \{e_n\}$ sea una base ortonormal de H. Luego
$$\|Tx\|_H^2 \leq \|Tx\|_H^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\|_H^2 = \|T\|_{HS}^2 \qquad \forall x \in \overline{B_H(0,1)}$$
y tomando supremo se sigue la desigualdad.

4. Sea $(T_n) \subseteq HS(H)$ sucesión de Cauchy. La desigualdad anterior nos dice entonces que T_n es Cauchy en $\mathcal{L}(H)$, así que existe $T \in \mathcal{L}(H)$ tal que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(H)$. Probamos simultáneamente que $T \in HS(H)$ y $T_n \to T$ en $HS(H)$.
Sea $\varepsilon > 0$ y (e_n) base ortonormal de H. Como T_n es Cauchy en $HS(H)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_m - T_n\|_{HS}^2 \leq \varepsilon$ para todos $m, n \geq N$. Luego para todo $k \in \mathbb{N}$
$$\sum_{j=1}^{k} \|(T_m - T_n)e_j\|_H^2 \leq \|T_m - T_n\|_{HS}^2 < \varepsilon$$
Haciendo $m \to \infty$
$$\sum_{j=1}^{k} \|(T_n - T)e_j\|_H^2 \leq \varepsilon$$
y dado que lo anterior es válido para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tomando $k \to \infty$
$$\|T_n - T\|_{HS}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|(T_m - T)e_n\|_H^2 \leq \varepsilon$$
Lo anterior muestra que $T_n - T \in HS(H)$, y dado que este es un espacio vectorial $T = T_n - (T_n - T) \in HS(H)$ y por los cálculos anteriores $T_n \to T$ en $HS(H)$. Así, $HS(H)$ es Banach. Por último, no es difícil ver que dada una base ortonormal (e_n) de H entonces
$$\langle T, S\rangle_{HS(H)} : \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle T(e_n), S(e_n)\rangle_H \qquad \forall T, S \in HS(H)$$
define un producto interno en $HS(H)$ que induce la norma definida.

5. Consideremos un operador integral de la forma anterior con $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Entonces
$$\begin{aligned}
\|Tu\|_H^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |Tu(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)u(y)dy\Big|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)^2 dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(y)^2 dy\right) dx \\
&\leq \int_{\Omega\times\Omega} K(x,y)^2 dydx \int_{\Omega} u(y)^2 dy \\
&= \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$
es decir $T \in \mathcal{L}(H)$ y más aún $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$. Consideremos $(e_n) \subseteq L^2(\Omega)$ base ortonormal. Probamos en primer lugar que $(e_n e_m)_{n,m\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de $L^2(\Omega \times \Omega)$. La ortonormalidad es directa pues
$$\langle e_n e_m, e_k e_j\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \langle e_n, e_k\rangle_{L^2(\Omega)} \langle e_m, e_j\rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{nk}\delta_{mj} = \delta_{(n,m)((k,j)}$$
Para demostrar que es base entonces debemos ver que su ortogonal es $\{0\}$. Para ello consideramos $u \in L^2(\Omega\times\Omega)$ tal que $\langle u, e_n e_m\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)} = 0$ para todo $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Tenemos entonces
$$0 = \int_\Omega \left(\int_\Omega u(x,y)e_m(y)dy\right) e_n(x)dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

así que la función $x \mapsto \int_\Omega u(x,y)e_m(y)dy$ es cero ctp para cada $m \in \mathbb{N}$. Podemos entonces considerar

$$A_m = \left\{ x \in \Omega | \int_\Omega u(x,y)e_m(y)dy \neq 0 \right\}$$

el cual es un conjunto de medida nula, y por lo tanto $A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m$ tiene medida nula. Así, fuera de A se tiene que $x \mapsto \int_\Omega u(x,y)e_m(y)dy$ es cero para todo $m \in \mathbb{N}$ y en consecuencia para cada $x \in \Omega \setminus A$ $u(x,\cdot) = 0$ ctp, y por el Teorema de Fubini

$$\int_{\Omega\times\Omega} |u(x,y)|^2 dydx = \int_{\Omega\setminus A}\int_\Omega |u(x,y)|^2 dydx = 0$$

así que $u = 0$ en $L^2(\Omega\times\Omega)$.
Ahora,

$$\|T\|^2_{HS(H)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|T(e_n)\|^2_H = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle T(e_n), e_k\rangle_H|^2$$

Por otro lado, podemos escribir K en términos de la base:

$$K = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} \langle K, e_n e_k\rangle e_n e_k \quad \Rightarrow \quad \|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} |\langle K, e_n e_k\rangle|^2$$

y ahora calculamos que

$$\langle T(e_n), e_k\rangle_H = \int_\Omega\int_\Omega K(x,y)e_n(y)e_k(x)dydx = \langle K, e_n e_k\rangle_{L^2(\Omega\times\Omega)}$$

y por lo tanto

$$\|T\|^2_{HS(H)} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle T(e_n), e_k\rangle_H|^2 = \|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)}$$

6. Sea $T \in HS(H)$. Definimos

$$K_n(x,y) = \sum_{j,k\leq n} \langle T(e_j), e_k\rangle e_j(x)e_k(y) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

las cuales están en $L^2(\Omega\times\Omega)$ pues son sumas finitas de funciones en este espacio. Vemos que para $m > n$

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega\times\Omega} |K_n(x,y) - K_m(x,y)|^2 dydx &= \sum_{j=n+1}^{m}\sum_{k=1}^{m} |\langle T(e_j), e_k\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{m} |\langle T(e_j), e_k\rangle|^2 \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle T(e_j), e_k\rangle|^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle T(e_j), e_k\rangle|^2\end{aligned}$$

y como $T \in HS(H)$ las series anteriores convergen así que la sucesión (K_n) es Cauchy en $L^2(\Omega\times\Omega)$ por lo que converge a un cierto K. Denotemos por T_K al operador integral de K y veamos entonces que $T = T_K$. Para cada e_k en la base tenemos la escritura

$$T_K(e_m) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle T_K(e_m), e_k\rangle e_k$$

y notando que

$$\langle T_K(e_m), e_k\rangle = \langle K, e_m e_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle K_n, e_m e_k\rangle = \langle T(e_m), e_k\rangle$$

y entonces $T_K(e_m) = T(e_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\square$

Problema 2. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ espacio Banach y $T \in \mathcal{L}(X)$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ dado, el operador resolvente $R_\lambda : X \to X$ se define como el único operador tal que

$$R_\lambda \circ (\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T) \circ R_\lambda(x) = x \qquad \forall x \in X$$

es decir, el operador inverso de $\lambda I - T$ de existir.

1. Demuestre que si $|\lambda| > \|T\|_{\mathcal{L}(X)}$ entonces R_λ está bien definido, $R_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ y

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

2. Sea $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \rho(T)$ convergente a $\lambda \in R$. Demuestre que si (R_{λ_k}) es acotada en $\mathcal{L}(X)$ entonces $\lambda \in \rho(T)$ y $R_{\lambda_k} \to R_\lambda$ en $\mathcal{L}(X)$.

Demostración.

1. En clases se vio que el espectro de un operador en un espacio de Banach verifica que $\sigma(T) \subseteq [-\|T\|_{\mathcal{L}(X)}, \|T\|_{\mathcal{L}(X)}]$, así que si $|\lambda| > \|T\|_{\mathcal{L}(X)}$ entonces $\lambda \in \rho(T)$ y por lo tanto R_λ está bien definido. Además $R_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ gracias al teorema de la aplicación abierta. Ahora, note que $\lambda R_\lambda(x) = x + T \circ R_\lambda(x)$ y entonces

$$|\lambda|\|R_\lambda(x)\|_X \leq \|x\|_X + \|T\|_{\mathcal{L}(X)}\|R_\lambda(x)\|_X \quad \Rightarrow \quad \|R_\lambda(x)\|_X \leq \frac{\|x\|_X}{|\lambda| - \|T\|_{\mathcal{L}(X)}} \quad \forall x \in X$$

y tomando supremo sobre la bola unitaria se tiene el resultado.

2. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus [-\|T\|_{\mathcal{L}(X)}, \|T\|_{\mathcal{L}(X)}]$. Por la parte anterior R_μ, R_λ están bien definidos y están en $\mathcal{L}(X)$. Es claro entonces que

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= R_\lambda \circ (\mu I - T) \circ R_\mu - R_\lambda \circ (\lambda I - T) \circ R_\mu \\ &= \mu R_\lambda \circ R_\lambda - R_\lambda \circ T \circ R_\mu - \lambda R_\lambda \circ R_\mu + R_\lambda \circ T \circ R_\mu \\ &= (\mu - \lambda) R_\lambda \circ R_\mu \end{aligned}$$

Sea entonces $(\lambda_k) \subseteq \rho(T)$ tal que $\lambda_k \to \lambda$. Entonces (R_{λ_k}) está bien definida. Supongamos que es acotada y tomemos $K > 0$ tal que $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|R_{\lambda_k}\|_{\mathcal{L}(X)} < K$. Por la propiedad anterior

$$\|R_{\lambda_k} - R_{\lambda_j}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq |\lambda_k - \lambda_j|\|R_{\lambda_k} \circ R_{\lambda_j}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K^2|\lambda_k - \lambda_j|$$

y dado que (λ_k) converge entonces (R_{λ_k}) es Cauchy y converge a cierto $R \in \mathcal{L}(X)$. Ahora, por definición del operador resolvente

$$R_{\lambda_k} \circ (\lambda_k I - T)(x) = (\lambda_k I - T) \circ R_{\lambda_k}(x) = x \qquad \forall x \in X, \forall k \in \mathbb{N}$$

y tomando $k \to \infty$ se tiene que

$$R \circ (\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T) \circ R(x) = x \qquad \forall x \in X$$

de donde deducimos que $R = R_\lambda$ y así $\lambda \in \rho(T)$.

$\square$