Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 4 Análisis Funcional

12 de septiembre de 2022

Problema 1. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ e.v.n y sea $p : X \to \mathbb{R}$ una función tal que

1. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
2. Para cada $x \in X$ la función $\lambda \mapsto p(\lambda x)$ es continua
3. Si $(y_n) \subseteq X$ es tal que $p(y_n) \to 0$ entonces $p(\lambda y_n) \to 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

Asuma que $(x_n) \subseteq X$ es tal que $p(x_n) \to 0$ y $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión acotada. Pruebe que $p(0) = 0$ y que $p(\alpha_n x_n) \to 0$.
Concluir que si $(x_n) \subseteq X$ es tal que $p(x_n - x) \to 0$ para algún $x \in X$ y $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $\alpha_n \to \alpha$ entonces $p(\alpha_n x_n) \to p(\alpha x)$.

Indicación: Argumente por contradicción y considere los conjuntos

$$F_n = \{\lambda \in \mathbb{R} : |p(\lambda x_k)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq n\}$$

Utilice el Lema de Baire de manera adecuada.

Problema 2. Sean X, Y espacios de Banach y $B : X \times Y \to Z$ aplicación bilineal, Z e.v.n.. Suponga que B es *separadamente continua*, esto es,

1. Para cada $x \in X$ la aplicación $y \mapsto B(x,y)$ es continua.
2. Para cada $y \in Y$ la aplicación $x \mapsto B(x,y)$ es continua.

Demuestre que existe $C \geq 0$ tal que

$$\|B(x,y)\|_Z \leq C\|x\|_X \|y\|_Y \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

Problema 3. Sea X espacio de Banach separable. El objetivo de este problema es probar que existe un subespacio cerrado $M \subseteq \ell^1(\mathbb{R})$ tal que $X \cong \ell^1(\mathbb{R})/M$ son isométricamente isomorfos. Para ello proceda como sigue:

1. Considere $(x_n) \subseteq B_X[0,1]$ denso numerable y defina $T : \ell^1(\mathbb{R}) \to X, (\lambda_n) \mapsto \sum_n \lambda_n x_n$ lineal. Pruebe que es acotado.
2. Para $x \in B_X[0,1]$ demuestre que existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que

   $$\left\| x - \sum_{j=0}^{k} 2^{-j} x_j \right\| \leq 2^{-j+1}$$

   y deduzca que T es sobreyectivo.
3. Considere la aplicación inducida en el cociente y pruebe que define una isometría.

Problema 4. Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ lineal, continua y sobreyectiva. Muestre que si existe $r > 0$ tal que $T(B_X(0,r))$ está contenido en un compacto, entonces $\dim Y < +\infty$.