UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 10 Análisis Funcional

11 de noviembre de 2022

Recuerdo 1 (Propiedad universal del cociente)**.** Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ operador lineal continuo. Entonces para $M \subseteq \ker(T)$ subespacio vectorial cerrado existe un operador lineal continuo inducido $\widetilde{T} : X/M \to Y$ de tal modo que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/M \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

i.e., $T = \widetilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/M$ es la proyección al cociente, que también es un operador lineal continuo y de norma $\|\pi\|_{\mathcal{L}(X,X/M)} = 1$. En particular, si $M = \ker(T)$ entonces $\widetilde{T}$ es inyectiva, $\operatorname{ran}(T) = \operatorname{ran}(\widetilde{T})$ y $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|\widetilde{T}\|_{\mathcal{L}(X/\ker(T),Y)}$.

Recuerdo 2 (base ortonormal e Identidad de Parseval)**.** Sea $(H; \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ espacio de Hilbert. Decimos que una sucesión $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es ortonormal si

$$\langle e_k, e_{k'}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = k' \\ 0 & \text{si} \quad k \neq k' \end{cases}$$

Decimos además que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una **base ortonormal** si

$$\langle e_k, x\rangle_H = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad x = 0$$

Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de H, entonces para todo $x \in X$

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle_H e_k \qquad \text{y} \qquad \|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle e_k, x\rangle_H|^2$$

Problema 1. Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal acotado. Demuestre que $\operatorname{ran}(T)$ es cerrado si y solo si existe $K > 0$ tal que $d(x, \ker(T)) \leq K\|T(x)\|_Y$ para todo $x \in X$.

Problema 2. Sean X, Y espacios vectoriales normados, $T : X \to Y$ operador lineal acotado y $T' : Y' \to X'$ su operador adjunto. Demuestre que T' es sobreyectivo si y solo si T es inyectivo y $T^{-1} : \operatorname{ran}(T) \to X$ es acotado.

Problema 3. Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado con rango cerrado. Demuestre que $\ker(T') \cong (Y/\operatorname{ran}(T))'$.

Problema 4. Sea H espacio de Hilbert real y $T \in \mathcal{L}(H)$. Muestre que el operador adjunto $T' : H' \to H'$ verifica la siguiente identidad

$$\langle Tx, y\rangle_H = \langle x, T'y\rangle \qquad \forall x, y \in H$$

Problema 5. Sea H espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Demuestre que H es isométricamente isomorfo a $H \times H$ con la norma $\|(x, y)\|_{H\times H} = (\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2)^{1/2}$.