UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 6 Análisis Funcional

6 de octubre de 2022

Topología

Definición 1 (base). *Sea X un conjunto y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ (subconjuntos de X). Decimos que $\mathscr{B}$ es base de una topología sobre X si*

1. *Para todo $x \in X$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$.*
2. *Si $x \in B_1 \cap B_2$ para ciertos $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathscr{B}$ de tal modo que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Si $\mathscr{B}$ satisface las condiciones anteriores, definimos la topología $\mathcal{T}$ sobre X generada por $\mathscr{B}$ como

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X | \forall x \in U, \exists B \in \mathscr{B}, x \in B \subseteq U\}$$

Proposición. Sea X un conjunto y $\mathscr{B}$ una base de una topología sobre X. Entonces

1. La topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathscr{B}$ es, en efecto, una topología sobre X.
2. $\mathcal{T}$ corresponde a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathscr{B}$.
3. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es tal que para todo abierto $U \in \mathcal{T}$ y todo $x \in U$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, pruebe que $\mathscr{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$.

Definición/Proposición. Sea X conjunto, $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una colección que cubre X. La colección $\mathcal{T}$ de uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ define una topología sobre X, y decimos que $\mathcal{S}$ es una **subbase** de $\mathcal{T}$.

Definición/Proposición(topología producto). Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de espacios topológicos. Sobre el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Lambda}$ definimos la colección de rectángulos de abiertos

$$\mathscr{B} := \left\{ \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \mid A_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha \in \Lambda \text{ y } \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ tales que } A_\alpha = X_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \right\}$$

La colección anterior es una base de una topología sobre $\prod_{\alpha \in \Lambda}$ y llamamos a su topología generada como **topología producto**.

Definición 2 (Primer axioma de numerabilidad). *Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Se dice que X posee una base numerable en $x \in X$ si existe una colección numerable $\mathscr{B}$ de abiertos de x tal que cada entorno de x (abierto conteniendo a x) contiene un elemento de $\mathscr{B}$. Diremos que X satisface el primer axioma de numerabilidad, o que es 1AN, si cada punto posee una base numerable.*

Proposición. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico 1AN, $A \subseteq X$ subconjunto. Entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x$[1].

[1] Esta proposición se vuelve bastante relevante en el contexto de topologías débiles, puesto que es muy recurrente demostrar que un conjunto es cerrado mediante sucesiones. Sin embargo, en el caso de topologías débiles esto no podrá realizarse y es debido a que en general estas topologías no satisfacen la condición 1AN.

Reflexividad y topología débil

Problema 1. El objetivo de este problema consiste en estudiar la propiedad de reflexividad de espacios L^p en los casos $p = 1, \infty$. Para ello considere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finito. Un conjunto medible $A \in \mathcal{A}$ es llamado un **átomo** si $\mu(A) > 0$ y para todo conjunto medible $E \subseteq A$ se tiene que $\mu(E) = 0$ o bien $\mu(E) = \mu(A)$.

1. Para $1 \leq p \leq \infty$, demuestre que $\dim(L^p(X, \mathcal{A}, \mu)) < +\infty$ si y solo si X es unión finita y disjunta de átomos.
   Indicación: Para probar $(\Rightarrow)$ utilice el contrarrecíproco, considere la colección $\mathscr{B}$ de todos los átomos de X y analice por separado los casos en los que $Y := X \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{B}} A$ tiene medida positiva o nula.

2. Demuestre que $L^1((X, \mathcal{A}, \mu)$ es reflexivo si y solo si $\dim(L^1(X, \mathcal{A}, \mu)) < +\infty$.
   Indicación: Para probar $(\Rightarrow)$ utilice el contrarrecíproco, use el punto previo e identifique ℓ^1 con un subespacio de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

3. Demuestre que $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ es reflexivo si y solo si $\dim(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)) < +\infty$.

Demostración.

1. $(\Leftarrow)$ Sean $A_1, \ldots, A_n$ átomos tales que $X = \bigcup_n A_n$. Como X es $\sigma-$ finito necesariamente $\mu(A_i) < +\infty$ para todo $1 \leq i \leq n$, puesto que si $\mu(A_i) = +\infty$, A_i no puede descomponerse como unión de conjuntos de medida finita. Luego $\mathbb{1}_{A_i} \in L^p(X, \mu)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Notamos entonces que

$$L^p(X, \mu) = \operatorname{span}\{\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}\}$$

   Para lo anterior basta probar que todo $f \in L^p(X, \mu)$ es constante en cada A_i. Si $f|_{A_i}$ no es constante entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que los conjuntos

$$\{x \in A_i | f(x) \leq \alpha\}, \qquad \{x \in A_i | f(x) > \alpha\}$$

   tienen ambos medida positiva, pero esto supone una contradicción con el hecho que A_i es un átomo.
   $(\Rightarrow)$ Demostraremos el contrarrecíproco. Suponer X no es unión finita y disjunta de átomos. Considere $\mathcal{B}$ la colección de todos los átomos de X y

$$Y = X \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A \right)$$

   Suponer en primer lugar que Y tiene medida positiva. Por definición Y no contiene átomos y entonces es posible tomar $Y_1 \subseteq Y$ tal que $0 < \mu(Y_1) < \mu(Y)$. Nuevamente como $Y \setminus Y_1$ tiene medida positiva y no es un átomo, existe $Y_2 \subseteq Y \setminus Y_1$ con $0 < \mu(Y_2) < \mu(Y \setminus Y_1)$. Podemos construir así una sucesión $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos medibles disjuntos de medida positiva contenida en Y y considerar $\{\mathbb{1}_{Y_n} | n \in \mathbb{N}\}$. Como los Y_n son disjuntos la colección anterior es linealmente independiente y por lo tanto $L^p(X, \mu)$ posee dimensión infinita.
   Suponer ahora que $\mu(Y) = 0$. Notemos que la unión de un conjunto de medida cero y un átomo es nuevamente un átomo,por lo qye $X = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$. Sin embargo, esta unión no es disjunta. Notamos a continuación que, como los conjuntos de $\mathcal{B}$ son átomos, para cada par $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ tendremos que $\mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} = 0$ o bien $\mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} = \mathbb{1}_{A_1} = \mathbb{1}_{A_2}$ (lo primero ocurre si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ y lo segundo en caso contrario, notando que todo esto es de manera ctp). Podemos entonces identificar $A_1 \sim A_2$ en $\mathscr{B}$ en caso de que $\mathbb{1}_{A_1} = \mathbb{1}_{A_2}$ y generar entonces una unión disjunta

$$X = \bigcup_{[A] \in B/\sim} A$$

   Por hipótesis la colección $B/\sim$ debe ser infinita, así que tenemos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ tal que $[A_n] \neq [A_m]$ cuando $n \neq m$. Por $\sigma-$finitud $\mu(A_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ así que $\mathbb{1}_{A_n} \in L^p(X, \mu)$ son linealmente independientes y en consecuencia $L^p(X, \mu)$ es de dimensión infinita.

2. ($\Leftarrow$) Esto es obvio pues todo espacio de dimensión finita es reflexivo.
($\Rightarrow$) Suponemos que $L^1(X,\mu)$ es de dimensión infinita. Por la parte anterior X no puede ser escrito como unión finita y disjunta de átomos, y razonando similar a la demostración del punto anterior tenemos $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunta tal que $0<\mu(E_n)<+\infty$. Luego la aplicación

$$\ell^1 \to L^1(X,\mu), \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\mu(E_n)} \mathbb{1}_{E_n}$$

es una isometría pues

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\mu(E_n)} \mathbb{1}_{E_n} \right\| &= \int_X \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\mu(E_n)} \mathbb{1}_{E_n} \right| d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \frac{|a_i|}{\mu(E_n)} \mathbb{1}_{E_n} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \|a_i\|_{\ell^1}\end{aligned}$$

en donde hemos empleado el hecho que los (E_n) son disjuntos. Ahora, como ℓ^1 es Banach su imagen isométrica en $L^1(X,\mu)$ es cerrada (la isometría preserva sucesiones de Cauchy). Así, como ℓ^1 no es reflexivo, hemos encontrado un subespacio cerrado de $L^1(X,\mu)$ el cual no es reflexivo, y en consecuencia $L^1(X,\mu)$ tampoco.

3. El ítem 1. nos permite decir que L^∞ es de dimensión finita si y solo si L^1 es de dimensión finita. Por el ítem 2. entonces L^∞ es de dimensión finita si y solo si L^1 es reflexivo, y como $(L^1)^* = L^\infty$ y X es reflexivo si y solo si X^* es reflexivo se obtiene al conclusión.

$\square$

Definición(topología débil). Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ evn. Consideramos la colección

$$\mathcal{S} = \{V_{\overline{x}}(\ell;\varepsilon) | \overline{x} \in X, \ell \in X^{'}, \varepsilon > 0\}$$

donde $V_{\overline{x}}(\ell;\varepsilon) = \{x \in X | |\ell(\overline{x}-x)| < \varepsilon\}$. La topología débil de $(X,\|\cdot\|_X)$ se define como aquella generada por la subbase $\mathcal{S}$.

Problema 2. Sea $(X,\|\cdot\|_X)$ espacio Banach y $M \subseteq X$ subespacio cerrado. Demuestre que la topología débil $\sigma(M,M^{'})$ de M corresponde a la topología de subespacio $\sigma(X,X^{'})|M = \{M \cap A \subseteq \mathscr{P}(X) | A \in \sigma(X,X^{'})\}$.

Demostración. Para esta demostración fijamos $x \in M, \varepsilon > 0$.
Veams pimero que $\sigma(X,X)|_M \subseteq \sigma(M,M')$. Para ello consideramos un elemento base de $\sigma(X,X')$, i.e.,

$$V = \{x \in X | |\langle \ell_i, x-\overline{x}\rangle| < \varepsilon, \forall i\}$$

con $\ell_1,\dots,\ell_m \in X'$. Tenemos que $\ell_i|_M \in M'$ para todo $1 \le i \le m$ y

$$M \cap V = \{x \in M | |\langle \ell_i|_M, x-\overline{x}\rangle| < \varepsilon, \forall i\}$$

y notamos así que $M\cap V$ es un abierto base de $\sigma(M,M')$. Dado que todo abierto de $\sigma(X,X')|_M$ es unión de abiertos de la forma $M\cap V$ tenemos que $\sigma(X,X')|_M \subseteq \sigma(M,M')$.
Sea ahora $V = \{x \in M | \langle \ell_i, x-\overline{x}\rangle| < \varepsilon, \forall i\} \in \sigma(M,M'), \ell_1,\dots \ell_m \in M'$ abierto base. El teorema de Hahn-Banach analítico permite extender los funcionales anteriores a $\overline{\ell}_1,\dots\overline{\ell}_m \in X'$ tales que $\overline{\ell}_i|_M = \ell_i$ para todo $1 \le i \le m$ y entonces

$$V = \{x \in X | \langle \overline{\ell}_i, x-\overline{x}\rangle| < \varepsilon, \forall i\} \cap M \in \sigma(X,X')|_M$$

y dado que hemos probado la contención para abiertos base concluimos $\sigma(M,M') \subseteq \sigma(X,X')|_M$. $\square$

Problema 3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ evn. Demuestre que si $x_n \rightharpoonup x$ converge en $\sigma(X, X^{'})$, entonces la sucesión $\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ verifica que $\sigma_n \rightharpoonup x$.

Demostración. Sea $f \in X'$. Debemos probar que $f(\sigma_n) \to f(x)$. Por linealidad

$$f(\sigma_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $x_n \rightharpoonup x, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x_n) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ para todo $n \geq N_0$. Luego

$$\begin{aligned} |f(\sigma_n) - f(x)| &= \left| \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n) - nf(x)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x_1) - f(x)}{n} \right| + \ldots + \left| \frac{f(x_n) - f(x)}{n} \right| \end{aligned}$$

Ahora, podemos considerar $N \geq N_0$ suficientemente grande de tal modo que

$$\frac{|f(x_1) + \ldots f(x_{N_0}) - N_0 f(x)|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq N$$

y luego

$$|f(\sigma_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(x_{N_0+1}) - f(x)| + \ldots + |f(x_n) - f(x)|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(n - N_0)}{2n} < \varepsilon$$

$\square$