Ayudantía 9 Análisis Funcional

27 de octubre de 2022

Problema 1. Sean X, Y, Z espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(X, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Muestre que

1. $(S \circ T)' = T' \circ S'$.
2. Si T es biyectivo entonces T' es biyectivo y $(T')^{-1} = (T^{-1})'$

Demostración.

1. Notar que $S \circ T : X \to Z$ así que $(S \circ T)' : Z' \to X'$. Sea $\ell \in Z'$ y notamos que
$$(S \circ T)'(\ell) = \ell \circ (S \circ T) = T'(\ell \circ S) = T'(S'(\ell)) = (T' \circ S')(\ell)$$
2. Para concluir basta probar que $T' \circ (T^{-1})' = \mathrm{id}_{X'}$ y $(T^{-1})' \circ T' = \mathrm{id}_{Y'}$. Para $\ell \in X'$ tenemos
$$(T' \circ (T^{-1})')(\ell) = T'((T^{-1})'(\ell)) = T'(\ell \circ T^{-1}) = \ell \circ T^{-1} \circ T = \ell$$
y para $\ell \in Y'$
$$((T^{-1})' \circ T')(\ell) = (T^{-1})'(T'(\ell)) = (T^{-1})'(\ell \circ T) = \ell \circ T \circ T^{-1} = \ell$$

□

Problema 2. Considere $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ e.v.n..

1. Considere $J : X \to X''$ la inyección canónica del espacio X. Demuestre que
$$J : (X, \sigma(X, X')) \to (X'', \sigma(X'', X'))$$
es continua, es decir, que mantiene su continuidad si consideramos la topología débil en X y la topología débil-$\star$ $\sigma(X'', X')$ en X''.
2. Si $L : X \to Y$ es un operador lineal acotado, demuestre que $L : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ es continuo.

Demostración.

1. Considerar $\overline{x} \in X''$ y $\ell_1, \ldots, \ell_n \in X'; \varepsilon > 0$ y la vecindad abierta débil-$\star$ $W_{J(\overline{x})}(\ell_1, \ldots, \ell_n; \varepsilon)$. Basta entonces notar que
$$\begin{aligned} J^{-1}(W_{J(\overline{x})}(\ell_1, \ldots, \ell_n; \varepsilon)) &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |\langle J(x) - J(\overline{x}), \ell_i \rangle|_{X'', X'} < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{x \in X : |\langle \ell_i, x - \overline{x} \rangle_{X', X}| < \varepsilon\} \\ &= V_{\overline{x}}(\ell_1, \ldots, \ell_n; \varepsilon) \end{aligned}$$
el cual es un abierto en $\sigma(X, X')$.

2. Consideramos un abierto $V_{\overline{y}}(\ell_1,\ldots,\ell_n;\varepsilon)$ base de $\sigma(Y,Y')$, i.e., $\overline{y}\in Y,\ell_1,\ldots,\ell_n\in Y',\varepsilon>0$. Notamos a continuación

$$\begin{aligned} L^{-1}(V_{\overline{y}}(\ell_1,\ldots,\ell_n;\varepsilon)) &= \bigcap_{i=1}^n L^{-1}(V_{\overline{y}}(\ell_i;\varepsilon)) \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{x\in X : |\langle \ell_i, L(x)-\overline{y}\rangle_{Y',Y}|<\varepsilon\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{x\in X : \underbrace{-\varepsilon+\langle \ell_i,\overline{y}\rangle_{Y',Y}}_{=:a_i} < \langle L'(\ell_i),x\rangle_{X',X} < \underbrace{\varepsilon+\langle \ell_i,\overline{y}\rangle_{Y',Y}}_{=:b_i} \\ &= \bigcap_{i=1}^n L'(\ell_i)^{-1}((a_i,b_i))\in\sigma(X,X') \end{aligned}$$

pues $L'(\ell_i)\in X'$ para cada $i=1,\ldots,n$.

$\square$

Problema 3. Supongamos que $(X,\|\cdot\|_X)$ y $(Y,\|\cdot\|_Y)$ son dos e.v.n. y denotemos por $J_X : X\to X''$ y $J_Y : Y\to Y''$ las inyecciones canónicas de X y Y, respectivamente. En esta pregunta estudiaremos algunas propiedades de operadores débilmente compacto.

Definición 1. *Diremos que un operador $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente compacto si $\overline{T\left(\overline{B_X}\right)}$ es compacto débil en $\sigma\left(Y,Y'\right)$*

1. Supongamos que X o bien Y es reflexivo. Pruebe usando el Teorema de Kakutani que todo operador $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ es un operador débilmente compacto.
2. Sean $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ y $S\in\mathcal{L}(Y,Z)$, con $(Z,\|\cdot\|_Z)$ otro e.v.n.. Pruebe que si S o bien T es un operador débilmente compacto, entonces $S\circ T$ es un también operador débilmente compacto.
3. Pruebe que si $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ es un operador débilmente compacto entonces $\operatorname{im}(T'')\subseteq J_Y(Y)$.
   a) Demuestre que $T''\circ J_X = J_Y\circ T$ y con esto concluya que
   $$\overline{T''\left(J_X\left(\overline{B_X}\right)\right)}^{\sigma\left(Y'',Y'\right)}\subseteq J_Y\left(\overline{T\left(\overline{B_X}\right)}\right).$$
   b) Pruebe que $T' : (X'',\sigma(X'',X'))\to(Y'',\sigma(Y'',Y'))$ es continuo y obtenga el resultado usando el Lema de Goldstein
4. Pruebe que $T' : (Y',\sigma(Y',Y))\to(X',\sigma(X',X''))$ es continuo, y luego, usando el Teorema de Banach-Alaoglu, pruebe que si $T\in\mathcal{L}(X,Y)$ es un operador débilmente compacto entonces T' también es un operador débilmente compacto.

Demostración.

1. Suponer X es reflexivo y $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. Por el teorema de Kakutani $\overline{B_X}$ es compacto débil y como T es también débil continua, tenemos que $T(\overline{B_X})$ es compacto en $\sigma(Y,Y')$. Notando que $T(\overline{B_X})$ es convexo y cerrado fuerte tenemos $\overline{T(\overline{B_X})}=T(\overline{B_X})$.
   Por otro lado, si Y es reflexivo $\overline{B_Y}$ es compacto débil y $T(\overline{B_X})$ es acotado pues
   $$\|T(x)\|_Y\le\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\|x\|_X\le\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\qquad\forall x\in\overline{B_X}$$
   entonces $T(\overline{B_X})$ está contenido en un compacto débil y como $T(\overline{B_X})$ es convexo (T es lineal) entonces $\overline{T(\overline{B_X})}$ es convexo cerrado fuerte y por ende es un subconjunto cerrado débil de un compacto débil así que es compacto débil.

2. Sea T débilmente compacto y veamos que $\overline{S(T(\overline{B_X}))}$ es compacto débil. Notar que $\overline{T(\overline{B_X})}$ es compacto débil por hipótesis y

$$S(T(\overline{B_X})) \subseteq S(\overline{T(\overline{B_X})})$$

con $S(\overline{T(\overline{B_X})})$ compacto débil por continuidad de S en la topología débil. Como $\sigma(X, X')$ es Hausdorff, $S(\overline{T(\overline{B_X})})$ es cerrado y entonces

$$\underbrace{\overline{S(T(\overline{B_X}))}}_{\text{convexo}} \subseteq S(\overline{T(\overline{B_X})})$$

y así $\overline{S(T(\overline{B_X}))}$ es compacto débil.
Ahora, si S es débilmente compacto por definición $\overline{S(\overline{B_Y})}$ es compacto débil y además

$$T(\overline{B_X}) \subseteq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\overline{B_Y} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{S(T(\overline{B_X}))}_{\text{convexo}} \subseteq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} S(\overline{B_Y})$$
$$\Rightarrow \quad \underbrace{\overline{S\left(T(\overline{B_X})\right)}}_{\text{convexo}} \subseteq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \quad \underbrace{\overline{S(\overline{B_Y})}}_{\text{compacto débil}}$$

Así, $\overline{S(T(\overline{B_X}))}$ es compacto débil.

3. *a*) Notamos que si $x \in X, \ell \in Y'$ tenemos

$$\begin{aligned}(T'' \circ J_X)(x)(\ell) = (T''(J_X(x)))(\ell) &= (J_X(x) \circ T')(\ell) \\ &= J_X(x)(T'(\ell)) \\ &= T'(\ell)(x) \\ &= (\ell \circ T)(x) \\ &= J_Y(T(x))(\ell) \\ &= (J_Y \circ T)(x)(\ell)\end{aligned}$$

Por hipótesis $\overline{T(\overline{B_X})}$ es compacto en $\sigma(Y, Y')$. y por la continuidad de la inyección canónica $J_Y(\overline{T(\overline{B_X})})$ es compacto en $\sigma(Y'', Y')$. Ahora

$$T''(J_X(\overline{B_X})) = J_Y(T(B_X)) \subseteq J_Y(\overline{T(\overline{B_X})})$$

b) Consideremos $\overline{\varphi} \in Y'', \ell_1, \dots, \ell_n \in Y', \varepsilon > 0$ y

$$V_{\overline{\varphi}}(\ell_1, \dots, \ell_n; \varepsilon) = \{\varphi \in Y'' : |\langle \varphi - \overline{\varphi}, \ell_i \rangle_{Y'', Y'}| < \varepsilon, \forall i\}$$

abierto básico de $\sigma(Y'', Y')$. Luego notamos que

$$
\begin{aligned}
(T'')^{-1}(V_{\overline{\varphi}}(\ell_1, \dots, \ell_n; \varepsilon) &= \bigcap_{i=1}^{n} (T'')^{-1}(V_{\overline{\varphi}}(\ell_i; \varepsilon)) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{\varphi \in X'' : |\langle T''(\varphi) - \overline{\varphi}, \ell_i \rangle_{Y'', Y'}| < \varepsilon\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{\varphi \in X'' : \underbrace{-\varepsilon + \langle \overline{\varphi}, \ell_i \rangle_{Y'', Y'}}_{:= a_i} < \langle T''(\varphi), \ell_i \rangle_{Y'', Y'} < \underbrace{\varepsilon + \langle \overline{\varphi}, \ell_i \rangle_{Y'', Y'}}_{:= b_i}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{\varphi \in X'' : a_i < \langle \varphi, T'(\ell_i) \rangle_{X'', X'} < b_i\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{\varphi \in X'' : a_i < \langle J_X(T'(\ell_i)), \varphi \rangle_{X''', X''} < b_i\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} J_{X'}(T'(\ell_i))^{-1}((a_i, b_i))
\end{aligned}
$$

y notando que $J_{X'}(T'(\ell_i)) : (X'', \sigma(X'', X')) \to \mathbb{R}$ son continuos (por definición de $\sigma(X'', X')$) se tiene la continuidad.
Usando el punto anterior y la continuidad[1]

$$
T''(\overline{J_X(\overline{B_X})}^{\sigma(X'', X')}) \subseteq \overline{T''(J_X(\overline{B_X}))}^{\sigma(Y'', Y')} \subseteq J_Y(\overline{T(\overline{B_X})})
$$

y el Lema de Goldstine implica que

$$
T''(\overline{B_{X''}}) \subseteq J_Y(\overline{T(\overline{B_X})})
$$

Reescalando la identidad anterior se obtiene la conclusión.

4. Sean $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X'', \varepsilon > 0$ y $V_{\overline{\ell}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon)$ vecindad de $\overline{\ell}$ en $\sigma(X', X'')$. Entonces

$$
\begin{aligned}
(T')^{-1}(V_{\overline{\ell}}(\varphi_1, \dots, \varphi_n; \varepsilon)) &= \bigcap_{i=1}^{n} (T')^{-1}(V_{\overline{\ell}}(\varphi_i; \varepsilon)) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{\ell \in Y' : |\langle \varphi_i, T'(\ell) - \overline{\ell} \rangle_{X'', X'}| < \varepsilon\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{\ell \in Y' : \underbrace{-\varepsilon + \langle \varphi_i, \overline{\ell} \rangle_{X'', X'}}_{=: a_i} < \langle T''(\varphi_i), \ell \rangle_{Y'', Y'} < \underbrace{\varepsilon + \langle \varphi_i, \overline{\ell} \rangle_{X'', X'}}_{=: a_i}\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} (T''(\varphi_i))^{-1}((a_i, b_i))
\end{aligned}
$$

Como T es débil compacto, por el punto 3. $\operatorname{im}(T'') \subseteq J_Y(Y)$ y entonces existen $y_i \in Y$ tales que $T''(\varphi_i) = J_Y(y_i)$ y entonces T' es débil-$\star$ débil continuo (pues la preimagen anterior es intersección de preimágenes de abiertos de $\mathbb{R}$ mediante funcionales de evaluación). Ahora, por el teorema de Banach-Alaoglu $\overline{B'_Y}$ es compacto en $\sigma(Y', Y)$ y entonces $T'(\overline{B'_Y})$ es compacto en $\sigma(X', X'')$, en particular cerrado fuerte así que $\overline{T'(\overline{B_{Y'}})} = T'(\overline{B'_Y})$ es compacto en $\sigma(X', X'')$.

□

[1] Aquí usamos el hecho general de que una función continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos verifica que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.