UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 6 Análisis Funcional

6 de octubre de 2022

Topología

Definición 1 (base). *Sea X un conjunto y $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ (subconjuntos de X). Decimos que $\mathscr{B}$ es base de una topología sobre X si*

1. *Para todo $x \in X$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$.*
2. *Si $x \in B_1 \cap B_2$ para ciertos $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, entonces existe $B_3 \in \mathscr{B}$ de tal modo que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Si $\mathscr{B}$ satisface las condiciones anteriores, definimos la topología $\mathcal{T}$ sobre X generada por $\mathscr{B}$ como

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X | \forall x \in U, \exists B \in \mathscr{B}, x \in B \subseteq U\}$$

Proposición. Sea X un conjunto y $\mathscr{B}$ una base de una topología sobre X. Entonces

1. La topología $\mathcal{T}$ generada por $\mathscr{B}$ es, en efecto, una topología sobre X.
2. $\mathcal{T}$ corresponde a la colección de todas las uniones de elementos de $\mathscr{B}$.
3. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Si $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es tal que para todo abierto $U \in \mathcal{T}$ y todo $x \in U$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, pruebe que $\mathscr{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$.

Definición/Proposición. Sea X conjunto, $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una colección que cubre X. La colección $\mathcal{T}$ de uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ define una topología sobre X, y decimos que $\mathcal{S}$ es una **subbase** de $\mathcal{T}$.

Definición/Proposición(topología producto). Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ una colección de espacios topológicos. Sobre el espacio producto $\prod_{\alpha \in \Lambda}$ definimos la colección de rectángulos de abiertos

$$\mathscr{B} := \left\{ \prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \mid A_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha \in \Lambda \text{ y } \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ tales que } A_\alpha = X_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \right\}$$

La colección anterior es una base de una topología sobre $\prod_{\alpha \in \Lambda}$ y llamamos a su topología generada como **topología producto**.

Definición 2 (Primer axioma de numerabilidad). *Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico. Se dice que X posee una base numerable en $x \in X$ si existe una colección numerable $\mathscr{B}$ de abiertos de x tal que cada entorno de x (abierto conteniendo a x) contiene un elemento de $\mathscr{B}$. Diremos que X satisface el primer axioma de numerabilidad, o que es 1AN, si cada punto posee una base numerable.*

Proposición. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico 1AN, $A \subseteq X$ subconjunto. Entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x$[1].

[1] Esta proposición se vuelve bastante relevante en el contexto de topologías débiles, puesto que es muy recurrente demostrar que un conjunto es cerrado mediante sucesiones. Sin embargo, en el caso de topologías débiles esto no podrá realizarse y es debido a que en general estas topologías no satisfacen la condición 1AN.

Reflexividad y topología débil

Problema 1. El objetivo de este problema consiste en estudiar la propiedad de reflexividad de espacios L^p en los casos $p = 1, \infty$. Para ello considere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida σ-finito. Un conjunto medible $A \in \mathcal{A}$ es llamado un **átomo** si $\mu(A) > 0$ y para todo conjunto medible $E \subseteq A$ se tiene que $\mu(E) = 0$ o bien $\mu(E) = \mu(A)$.

1. Para $1 \leq p \leq \infty$, demuestre que $\dim(L^p(X, \mathcal{A}, \mu)) < +\infty$ si y solo si X es unión finita y disjunta de átomos.
   Indicación: Para probar ($\Rightarrow$) utilice el contrarrecíproco, considere la colección $\mathscr{B}$ de todos los átomos de X y analice por separado los casos en los que $Y := X \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{B}} A$ tiene medida positiva o nula.
2. Demuestre que $L^1((X, \mathcal{A}, \mu)$ es reflexivo si y solo si $\dim(L^1(X, \mathcal{A}, \mu)) < +\infty$.
   Indicación: Para probar ($\Rightarrow$) utilice el contrarrecíproco, use el punto previo e identifique ℓ^1 con un subespacio de $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.
3. Demuestre que $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ es reflexivo si y solo si $\dim(L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)) < +\infty$.

Definición(topología débil). Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ evn. Consideramos la colección

$$\mathcal{S} = \{V_{\overline{x}}(\ell; \varepsilon) | \overline{x} \in X, \ell \in X^{'}, \varepsilon > 0\}$$

donde $V_{\overline{x}}(\ell; \varepsilon) = \{x \in X || \ell(\overline{x} - x)| < \varepsilon\}$. La topología débil de $(X, \|\cdot\|_X)$ se define como aquella generada por la subbase $\mathcal{S}$.

Problema 2. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ espacio Banach y $M \subseteq X$ subespacio cerrado. Demuestre que la topología débil $\sigma(M, M^{'})$ de M corresponde a la topología de subespacio $\sigma(X, X^{'})|M = \{M \cap A \subseteq \mathscr{P}(X) | A \in \sigma(X, X^{'})\}$.

Problema 3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ evn. Demuestre que si $x_n \rightharpoonup x$ converge en $\sigma(X, X^{'})$, entonces la sucesión $\sigma_n = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ verifica que $\sigma_n \rightharpoonup x$.