Pauta Ayudantía 8 Análisis Funcional

20 de octubre de 2022

Recuerdo 1 (Topología generada por un conjunto de funciones)**.** Sea X conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de funciones de la forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Se define la topología en X generada por $\mathcal{F}$ como la topología menos fina tal que las funciones de la colección $\mathcal{F}$ son continuas. Denotamos a esta topología por $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Problema 1. Sea X conjunto no vacío, $\{(Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de espacios topológicos y $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de funciones de la forma $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Demuestre que la topología generada por $\mathcal{F}$ existe y que la colección

$$\mathscr{B} = \{f_\alpha^{-1}(\theta_\alpha) | \theta_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$$

es una subbase para dicha topología. Considere a continuación $\overline{\ell} \in X'$. Demuestre que la colección

$$\{V_{\overline{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) | x_1, \ldots, x_n \in X, \varepsilon > 0\}$$

donde

$$V_{\overline{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{\ell \in X' | |\langle \ell - \overline{\ell}, x_i\rangle_{X',X}| < \varepsilon, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

define una base de vecindades de la topología $\sigma(X', X) := \sigma(X', J(X))$ en torno a $\overline{\ell}$, donde $J : X \to X''$ es la inyección canónica.

Demostración. La existencia de esta topología es directa del hecho que la intersección de topologías es también una topología, pues podemos entonces definir la topología generada como la intersección de todas aquellas topologías para las cuales la colección $\mathcal{F}$ es continua. Esta será única por construcción.
Por otro lado, es directo de la definición de $\sigma(X, \mathcal{F})$ que $\mathscr{B} \subseteq \sigma(X, \mathcal{F})$ pues las funciones $f_\alpha : (X, \sigma(x, \mathcal{F})) \to (Y_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ son continuas. Luego la topología generada por $\mathscr{B}$, denotada por $\mathcal{T}_{\mathscr{B}}$, verifica $\mathcal{T}_{\mathscr{B}} \subseteq \sigma(X, \mathcal{F})$.
Ahora, dado que $\mathcal{T}_{\mathscr{B}}$ contiene todas las preimagenes de abiertos por $\mathcal{F}$, es claro que esta colección es continua en esta topología, y como $\sigma(X, \mathcal{F})$ es minimal respecto a esta propiedad, $\sigma(X, \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathscr{B}}$.
Consideremos ahora la topología débil-* $\sigma(X', X) := \sigma(X', J(X))$ y veamos primero que los conjuntos $V_{\overline{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ son abiertos en dicha topología. De aquí en adelante fijamos $\overline{\ell} \in X'$. Escribimos

$$\begin{aligned}
V_{\overline{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) &= \{\ell \in X' : |\langle \ell - \overline{\ell}, x_i\rangle_{X',X}| < \varepsilon, \forall i\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} \{\ell \in X' : -\varepsilon + \langle J_{x_i}, \overline{\ell}\rangle_{X'',X'} < \langle J_{x_i}, \ell\rangle_{X'',X'} < \varepsilon + \langle J_{x_i}, \overline{\ell}\rangle_{X'',X'}, \forall i\} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}^{-1}((-\varepsilon + \langle J_{x_i}, \overline{\ell}\rangle_{X'',X'}, \varepsilon + \langle J_{x_i}, \overline{\ell}\rangle_{X'',X'}))
\end{aligned}$$

y dado que los J_x son continuos en $\sigma(X', X)$ para todo $x \in X$ por definición, tenemos que $V_{\overline{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ es abierto en $\sigma(X', X)$ para todos $x_1, \ldots, x_n \in X, \varepsilon > 0$.
Para concluir que los conjuntos anteriores definen una base de vecindades en torno a $\overline{\ell} \in X'$, consideramos $V \in \sigma(X', X)$ vecindad abierta débil-* de $\overline{\ell} \in X'$ y probaremos que existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$ de tal modo que $V_{\overline{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) \subseteq V$. Por definición de $\sigma(X', X)$, A es unión de intersecciones finitas de preimágenes de abiertos de $\mathbb{R}$ por funcionales de evaluación. Por lo tanto existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $U_1, \ldots, U_n \in \mathbb{R}$ de tal modo que

$$\overline{\ell} \in \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}^{-1}(U_i) \subseteq V$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ notar que $\langle J_{x_i}, \overline{\ell} \rangle \in U_i$ y como U_i es abierto existe $\varepsilon_i > 0$ de tal modo que

$$(-\varepsilon_i + \langle J_{x_i}, \overline{\ell} \rangle_{X'', X'}, \varepsilon_i + \langle J_{x_i}, \overline{\ell} \rangle_{X'', X'}) \subseteq U_i \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

Seleccionando $\varepsilon := \text{mín}_{i \in \{1, \ldots, n\}} \varepsilon_i > 0$ tenemos entonces

$$V_{\overline{\ell}}(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}^{-1}((-\varepsilon + \langle J_{x_i}, \overline{\ell} \rangle_{X'', X'}, \varepsilon + \langle J_{x_i}, \overline{\ell} \rangle_{X'', X'})) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} J_{x_i}^{-1}(U_i) \subseteq V$$

□

Problema 2. Sea $(X, \sigma(X, \mathcal{F}))$ espacio topológico junto con la topología generada por la colección $\mathcal{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Considere una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$. Demuestre que $(x_n) \subseteq X$ converge a $x \in X$ en $\sigma(X, \mathcal{F})$ si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} f_\alpha(x_n) = f_\alpha(x) \qquad \forall \alpha \in \Lambda$$

Utilice lo anterior para demostrar que la convergencia en $\sigma(X', X)$ corresponde a la convergencia puntual.

Demostración. Si $(x_n) \subseteq X$ converge en $\sigma(X, \mathcal{F})$ el resultado es obvio pues las funciones f_α son por definición continuas.
Suponer que existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f_\alpha(x_n) = f_\alpha(x) \qquad \forall \alpha \in \Lambda$$

Sea $V \in \sigma(X, \mathcal{F})$ vecindad abierta débil de x. Gracias a la base proporcionada por el Problema 1. tenemos que existe una colección finita $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ de abiertos $U_{\alpha_i} \subseteq Y_{\alpha_i}$ para ciertos $\alpha_i \in \Lambda$ tal que

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subseteq V$$

Lo anterior se interpreta diciendo que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que $f_{\alpha_i}(x) \in U_{\alpha_i}$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, sabemos que $(f_{\alpha_i}(x_n))$ converge a $f_{\alpha_i}(x)$ y por ende existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_{\alpha_i}(x_n) \in U_i \qquad \forall n \geq N_j$$

Tomando $N := \text{máx}_{i \in \{1, \ldots, n\}} N_j$ tenemos

$$x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_j) \subseteq V \qquad \forall n \geq N$$

y como la vecindad V es arbitraria tenemos $x_n \to x$ en $\sigma(X, \mathcal{F})$.
Usando el criterio anterior veamos qué significa converger en $\sigma(X', X)$. Para ello basta notar que

$$\begin{aligned} \ell_n \xrightharpoonup{\star} \ell \quad &\iff \quad f(\ell_n) \to f(\ell) \qquad \forall f \in J(X) \\ &\iff \quad J_x(\ell_n) \to J_x(\ell) \qquad \forall x \in X \\ &\iff \quad \ell_n(x) \to \ell(x) \qquad \forall x \in X \end{aligned}$$

es decir, la convergencia en la topología $\sigma(X', X)$ es la convergencia puntual de los funcionales lineales. □

Problema 3. Sea $(X, \| \cdot \|_X)$ espacio de Banach. Demuestre usando los teoremas de Kakutani y Banach-Alaouglu que $(X, \| \cdot \|_X)$ es reflexivo si y solo si $\sigma(X', X) = \sigma(X', X'')$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos en primer lugar que X es reflexivo. Siempre se tiene que $\sigma(X', X) \subseteq \sigma(X', X'')$, por lo que únicamente basta probar una contención. Por definición, $\sigma(X', X'')$ es la topología menos fina que hace continuos a los elementos de X'', y si $\varphi \in X''$ por reflexividad existe $x \in X$ tal que $\varphi = J_x$. Ahora, por definición $\sigma(X', X)$ es la topología menos fina tal que los funcionales de evaluación son continuos, pero por lo anterior φ es continuo en $\sigma(X', X)$, es decir, X' es continuo en $\sigma(X', X)$, pero $\sigma(X', X'')$ es la topología más pequeña con dicha propiedad, así que $\sigma(X', X'') \subseteq \sigma(X', X)$.
($\Leftarrow$) Sea X Banach tal que $\sigma(X', X'') = \sigma(X', X)$. Por el teorema de Banach-Alaoglu se verifica que $\overline{B}_{X'}$ es compacto en $\sigma(X', X)$ y por hipótesis es compacto en $\sigma(X', X'')$. Por el teorema de Kakutani X' es reflexivo y como X es Banach, concluimos que X es reflexivo. $\square$

Problema 4. El objetivo de este problema es demostrar que la compacidad en $\sigma(X', X)$ es equivalente al hecho de ser cerrado y acotado. Sea entonces X espacio de Banach. Con respecto a la topología $\sigma(X', X)$ pruebe los siguientes hechos:

1. Pruebe que $\sigma(X', X)$ es Hausdorff.

2. Pruebe que para cada $\lambda > 0$, la función $\varphi_\lambda : (X', \sigma(X', X)) \to (X', \sigma(X', X)), \ell \to \lambda\ell$ es un homeomorfismo.

3. Demuestre que si $K \subseteq X'$ es débil-$\star$ cerrado y acotado entonces es compacto en $\sigma(X', X)$.

4. Demuestre que si K es compacto en $\sigma(X', X)$ entonces es cerrado y acotado.
Indicación: Considere un cubrimiento por abiertos débiles de la forma $U_{\overline{\ell}}(x) = \{\ell \in X' : |\ell(x) - \overline{\ell}(x)| < 1\}$. Use la compacidad y concluya por el teorema de Banach-Steinhaus.

Demostración.

1. Sean $\ell_1, \ell_2 \in X'$ tal que $\ell_1 \neq \ell_2$. Existe entonces $x \in X$ tal que $\ell_1(x) \neq \ell_2(x)$ y sin pérdida de generalidad suponemos que $\ell_1(x) < \alpha < \ell_2(x)$. Los conjuntos

$$A = \{\ell \in X' | \langle \ell, x\rangle_{X',X} < \alpha\} = J_x^{-1}((-\infty, \alpha))$$
$$B = \{\ell \in X' | \langle \ell, x\rangle_{X',X} > \alpha\} = J_x^{-1}((\alpha, +\infty))$$

son abiertos en $\sigma(X', X)$ que verifican $\ell_1 \in A, \ell_2 \in B$ y $A \cap B = \emptyset$.

2. Para cada $\lambda > 0$ la función es biyectiva pues su inversa viene dada por $\varphi_{1/\lambda}$. Luego basta notar que la imagen de abiertos es abierta, y en particular basta verificar esto para abiertos base. Considerando una vecindad base del Problema 1. tenemos

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(V_{\overline{\ell}}(x_1, \dots, x_n; \varepsilon)) &= \bigcap_{i=1}^{n} \{\lambda\ell \in X' || \langle \ell - \overline{\ell}, x_i\rangle_{X',X}| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{\lambda\ell \in X' || \langle \lambda\ell - \lambda\overline{\ell}, x_i\rangle_{X',X}| < \lambda\varepsilon\} \\ &= V_{\lambda\overline{\ell}}(x_1, \dots, x_n; \lambda\varepsilon)\end{aligned}$$

3. Si K es acotado, entonces existe $\lambda > 0$ de tal modo que $K \subseteq \overline{B_{X'}}(0, \lambda)$. Considerando el homeomorfismo φ_λ del punto 2. tenemos que $\varphi_{1/\lambda}(K) \subseteq \varphi_{1/\lambda}(\overline{B_{X'}}(0, \lambda)) = \overline{B_{X'}}$ está contenido en la bola unitaria dual. El teorema de Banach-Alaogu afirma la compacidad de la bola, y como $\varphi_{1/\lambda}(K)$ es cerrado en $\sigma(X', X)$ tenemos que es compacto, de donde deducimos que $K = \varphi_\lambda(\varphi_{1/\lambda}(K))$ es compacto.

4. Sea $K \subseteq X'$ compacto en $\sigma(X', X)$. Por la condición de Hausdorff K es cerrado en $\sigma(X', X)$ así qur únicamente basta probar que es acotado. Considere ahora los conjuntos

$$U_{\overline{\ell}}(x) = \{\ell \in X' : |\ell(x) - \overline{\ell}(x)| < 1\}$$

de la indicación los cuales son abiertos débiles-$\star$ pues son abiertos base con $\varepsilon = 1$ (ver Problema 1). Ahora, para $x \in X$ fijo podemos considerar el cubrimiento abierto

$$K \subseteq \bigcup_{\ell \in K} U_\ell(x)$$

y por compacidad existen finitos $\ell_1, \ldots, \ell_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\ell_i}(x)$.
Sea $M := \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\ell_i\|_{X'}$ y observemos que para $\ell \in X'$

$$|\ell(x)| - |\ell_i(x)| \leq |\ell_(x) - \ell_i(x)| < 1 \Rightarrow |\ell(x)| < 1 + \|\ell_i\|_{X'}\|x\|_X \leq 1 + M\|x\|_X < +\infty \qquad \forall x \in X$$

El teorema de Banach Steinhaus entonces implica que

$$\sup_{\ell \in K} \|\ell\|_{X'} < +\infty$$

$\square$