Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 11 Análisis Funcional

17 de noviembre de 2022

Recuerdo(Ley del paralelogramo). Sea $(H, \langle\cdot\rangle)$ espacio de Hilbert. Entonces se verifica la ley del paralelogramo

$$\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2)$$

Más aún, se puede demostrar que si en un espacio vectorial normado la norma verifica la identidad anterior, entonces viene inducida por un producto interno.

Problema 1. Sea H espacio de Hilbert.

1. Demuestre que si $(x_n) \subseteq H$ converge débil $x_n \rightharpoonup x$ y $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_H \leq \|x\|_X$ entonces $x_n \to x$.

Considere a continuación $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de H, una sucesión $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ acotada y $u_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i e_i$.

2. Pruebe que $e_n \rightharpoonup 0$.
3. Demuestre que $|u_n| \to 0$ y $\sqrt{n}u_n \rightharpoonup 0$.

Demostración.

1. Recordar en primer lugar que en general (gracias al teorema de Banach-Steinhaus) se tiene que si $x_n \rightharpoonup x$ entonces

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$$

por lo que en verdad tenemos que $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$.
Ahora, notemos que gracias al teorema de representación de Riesz, la convergencia débil en H se puede ver de la siguiente forma

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{en } H \quad \iff \quad \ell(x_n) \to \ell(x) \quad \forall \ell \in H' \quad \iff \quad \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad \forall y \in H$$

Directamente vemos entonces que

$$\|x_n - x\|_H^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle_H = \langle x_n, x_n\rangle - 2\langle x_n, x\rangle + \langle x, x\rangle \to \|x\|_H^2 - 2\|x\|_H^2 + \|x\|_H^2 = 0$$

2. Como se observó en el punto anterior, basta ver que $\langle x, e_n\rangle \overset{n\to\infty}{\to} 0$ para todo $x \in H$. Como los e_n son ortonormales, la identidad de Parseval (Ayudantía 10) afirma que

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle x, e_n\rangle_H|^2$$

es decir, la serie anterior siempre converge y por lo tanto sus términos convergen a 0[1].

3. Para lo primero basta notar que por ortonormalidad

$$\|u_n\|_H^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k,j=1}^n a_k a_j \underbrace{\langle e_k, e_j\rangle}_{\delta_{kj}} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n a_k \leq \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n} \to 0$$

donde $K > 0$ es tal que $|a_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

[1] Note que esto funciona para cualquier sucesión ortonormal

4. Escribimos $v_n := \sqrt{n} u_n$. Notar que

$$\langle v_n, e_k \rangle = \begin{cases} \frac{a_k}{\sqrt{n}} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Considere ahora $x \in H$ arbitrario y escribamos $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$ con $\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que la serie anterior converge podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que $\sum_{k \geq N} x_i^2 < \varepsilon$ y podemos separar de la siguiente manera:

$$\langle v_n, x \rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle v_n, e_k \rangle x_i + \sum_{k>N} \langle v_n, e_k \rangle x_i$$

Con lo anterior, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz (en ℓ^2) podemos calcular como sigue:

$$\begin{aligned} |\langle v_n, x \rangle| &\leq \sum_{k=1}^{N} |\langle v_n, e_k \rangle x_i| + \sum_{k>N} |\langle v_n, e_k \rangle x_i| \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \frac{K\|x\|_H}{\sqrt{n}} + \sqrt{\sum_{k>N} |\langle v_n, e_k \rangle|^2} \sqrt{\sum_{k>N} x_i^2} \\ &\leq \frac{K\|x\|_H N}{\sqrt{n}} + \varepsilon \sqrt{\sum_{k=N+1}^{n} \left(\frac{a_k}{\sqrt{n}} \right)^2} \\ &\leq \frac{K\|x\|_H N}{\sqrt{n}} + \varepsilon \sqrt{\frac{C^2(n-N)}{n}} \end{aligned}$$

Tomando límite sperior a ambos lados obtenemos que

$$\limsup_{n \to \infty} |\langle v, x \rangle| \leq C\varepsilon$$

y dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se tiene la conclusión.

$\square$

Problema 2. Sea H espacio de Hilbert.

1. Sea (K_n) sucesión de convexos cerrados decrecientes en H tales que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Demuestre que para cada $x \in H$ la sucesión $x_n := P_{K_n}(x)$ converge y encuentre el límite.
2. Sea (K_n) sucesión creciente de convexos cerrados no vacíos de H. Demuestre que para cada $x \in H$ la sucesión $x_n := P_{K_n}(x)$ converge y encuentre el límite.
3. Considere $\varphi : H \to \mathbb{R}$ función continua y acotada inferiormente. Demuestre que la sucesión $\alpha_n = \inf_{K_n} \varphi$ converge.

Demostración.

1. Observar primero que las proyecciones están bien definidas pues los conjuntos K_n son convexos cerrados. Sea $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Probaremos que $x_n \to P_K(x)$. Para ello notemos que la sucesión $d_n := \operatorname{dist}(x, K_n) = \|x_n - x\|_X$ es creciente y acotada superiormente, dado que los conjuntos K_n son decrecientes. Por lo tanto deducimos que $d_n \to d$. Empleado la ley del paralelogramo con $x - x_n, x - x_m$ tenemos

$$\begin{aligned} &\|2x - x_n - x_m\|_X^2 + \|x_m - x_n\|_X^2 = 2(\|x - x_n\|_X^2 + \|x - x_m\|_X^2) \\ \Rightarrow &\left\| x - \frac{x_n - x_m}{2} \right\|_X^2 + \left\| \frac{x_m - x_n}{2} \right\|_X^2 = \frac{1}{2}(\|x - x_n\|_X^2 + \|x - x_m\|_X^2) \end{aligned}$$

y si consideramos $m \geq n$, por convexidad tenemos que $\frac{x_n - x_m}{2} \in K_n$ y obtenemos

$$\left\| \frac{x_m - x_n}{2} \right\|_H^2 \leq \frac{1}{2}(\|x - x_n\|_X^2 + \|x - x_m\|_H^2 - 2\|x - x_n\|_H^2) = \frac{1}{2}(\operatorname{dist}(x, K_m)^2 - \operatorname{dist}(x, K_n))$$

y entonces

$$\|x_m - x_n\|_H^2 \leq 2(\operatorname{dist}(x, K_m)^2 - \operatorname{dist}(x, K_n)^2) \qquad \forall m \geq n$$

y por lo tanto tomando $n, m \to \infty$ vemos que la sucesión (x_n) es Cauchy y por ende converge a cierto $y \in K$ (K es cerrado).
Ahora, notar que

$$\|x - x_n\|_H^2 \leq \|x - z\| \qquad \forall z \in K_n$$

y en particular $\|x - x_n\|_H^2 \leq \|x - z\|$ para todo $z \in K$. Tomando límite entonces se concluye por unicidad de la proyección que $y = P_K(x)$.

2. Note que el conjunto $K = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n}$ es convexo, y además la sucesión $d_n := \operatorname{dist}(x, K_n) = \|x - x_n\|_X^2$ es decreciente y positiva, por lo que $d_n \searrow d$. Realizando el mismo procedimiento del punto anterior se puede obtener $\|x_n - x_m\|_X^2 \leq 2(d_n^2 - d_m^2)$ si $m \geq n$. Así la sucesión es Cauchy y converge a cierto $y \in K$. Finalmente, notando que $\|x - x_m\|_X \leq \|x - z\|$ para todo $z \in K_n$ siempre que $m \geq n$. Luego tomando $m \to \infty$ tenemos que $\|x - y\|_H \leq \|x - z\|_H$ para todo $z \in K$.

3. La sucesión α_n es decreciente y por lo tanto converge a cierto $\alpha \in \mathbb{R}$. Claramente $\inf_K \varphi \leq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ así que es claro que $\inf_K \varphi \leq \alpha$.
Por otro lado, para cada $z \in K$ podemos considerar la sucesión $z_n = P_{K_n}(z)$ y por el punto 2. sabemos que $z_n \to z$. Entonces dado que $\alpha_n \leq \varphi(z_n)$ tomando $n \to \infty$ se obtiene $\alpha \leq \varphi(z)$ y se sigue que $\alpha \leq \inf_K \varphi$.

$\square$

Problema 3. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio de Hilbert con norma $\|\cdot\|_H$. Considere $V \subseteq H$ subespacio denso. Suponga que V posee una norma $\|\cdot\|_V$ con la cual es completo y asuma también que la inyección $V \hookrightarrow H$ es continua, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|v\|_H \leq C\|v\|_V$ para todo $v \in V$. Defina el operador lineal

$$T : H \to V', \qquad \langle Tu, v \rangle_{V',V} = \langle u, v \rangle_H \qquad \forall u \in H, \forall v \in V$$

1. Demuestre que $\|Tu\|_{V'} \leq C\|u\|_H$ para todo $u \in H$.
2. Demuestre que T es inyectiva.
3. Pruebe que $\operatorname{ran}(T)$ es denso en V' si V es reflexivo.

Demostración.

1. Para ello basta con tomar supremo sobre la bola unitaria de V en la desigualdad de Cauchy-Schwarz y usar la continuidad de la inyección

$$\|Tu\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\langle Tu, v \rangle_{V',V}| = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\langle u, v \rangle_H| \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} \|u\|_H \|v\|_H \leq C\|u\|_H$$

2. Basta con notar que si $Tu = 0$ entonces por definición

$$0 = \langle Tu, v \rangle_{V',V} = \langle u, v \rangle_H \quad \forall v \in V$$

es decir, $u \in V^\perp$ y como V es denso se tiene que $u = 0$.

3. Considere V reflexivo y $W := \overline{\text{ran}(T)} \subseteq V'$. Notar que para concluir la densidad de $\text{ran}(T)$ basta con probar que si $\psi|_W = 0$ entonces $\psi = 0$ para todo $\psi \in V''$ (Hahn-Banach). Sea entonces $\psi \in V''$ tal que $\psi|_W = 0$. Como V es reflexivo existe $v \in V$ tal que $\psi = J_V(v)$ y luego

$$0 = \psi(Tu) = \langle Tu, v\rangle_{V',V} = \langle u, v\rangle_H \qquad \forall u \in H$$

es decir, $v = 0$ y así $\psi = 0$.

$\square$

Note que, en el contexto del ejercicio anterior, en general podemos identificar H con su dual H', y dado que el ejercicio anterior nos da una inyección de H' en V', tenemos

$$V \subseteq H \cong H' \subseteq V'$$

y si V es reflexivo por el ejercicio anterior las inyecciones anteriores son continuas y densas.
Más aún, si suponemos que V es también Hilbert con su propio interno propio, también podríamos identificar V con V', lo cual hace que lo anterior pierda sentido. Así, en general, aunque el isomorfismo del teorema de representación de Riesz es independiente de elecciones, no todos los espacios se pueden identificar con sus duales de manera simultánea.