UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 10 Análisis Funcional

11 de noviembre de 2022

Recuerdo 1 (Propiedad universal del cociente)**.** Sean X, Y espacios vectoriales normados y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ operador lineal continuo. Entonces para $M \subseteq \ker(T)$ subespacio vectorial existe un operador lineal continuo inducido $\widetilde{T} : X/M \to Y$ de tal modo que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ X/M \arrow[ur, "\widetilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

i.e., $T = \widetilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/M$ es la proyección al cociente, que también es un operador lineal continuo y de norma $\|\pi\|_{\mathcal{L}(X,X/M)} = 1$. En particular, si $M = \ker(T)$ entonces $\widetilde{T}$ es inyectiva, $\operatorname{ran}(T) = \operatorname{ran}(\widetilde{T})$ y $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|\widetilde{T}\|_{\mathcal{L}(X/\ker(T),Y)}$.

Recuerdo 2 (base ortonormal e Identidad de Parseval)**.** Sea $(H; \langle\cdot,\cdot\rangle_H$ espacio de Hilbert. Decimos que una sucesión $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es ortonormal si

$$\langle e_k, e_{k'}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = k' \\ 0 & \text{si} \quad k \neq k' \end{cases}$$

Decimos además que $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una **base ortonormal** si

$$\langle e_k, x\rangle_H = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \quad x = 0$$

Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de H, entonces para todo $x \in X$

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \langle e_k, x\rangle_H e_k \qquad \text{y} \qquad \|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle e_k, x\rangle_H|^2$$

Problema 1. Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ lineal acotado. Demuestre que $\operatorname{ran}(T)$ es cerrado si y solo si existe $K > 0$ tal que $d(x, \ker(T)) \leq K\|T(x)\|_Y$ para todo $x \in X$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\widetilde{T} : \ker(T) \to Y$ el mapeo inducido en el cociente mediante $T = \widetilde{T} \circ \pi$. Claramente $\operatorname{ran}(T) = \operatorname{ran}(\widetilde{T})$ es cerrado (y por lo tanto Banach) y como $\widetilde{T}$ es continuo, por teorema de la aplicación abierta $\widetilde{T}$ es un isomorfismo sobre su imagen. La continuidad de la inversa entonces da la existencia de $K > 0$ tal que

$$\|\widetilde{T}^{-1}(y)\|_{X/\ker(T)} \leq K\|y\|_Y \qquad \forall y \in \operatorname{ran}(\widetilde{T})$$

Por lo tanto $\|[x]\|_{X/\ker(T)} \leq K\|\widetilde{T}([x])\|_Y$ para todo $x \in X$ y como $\widetilde{T}([x]) = T(x)$ por construcción, entonces se obtiene que

$$d(x, \ker(T)) = \|[x]\|_{X/\ker(T)} \leq K\|T(x)\|_Y \qquad \forall x \in X$$

($\Leftarrow$) Sea $(y_n) \subseteq \operatorname{ran}(T)$ tal que $y_n \to y$ en Y y $(x_n) \subseteq X$ tal que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis

$$\|[x_n] - [x_m]\|_{X/\ker(T)} = \|[x_n - x_m]\|_{X/\ker(T)} = d(x_n - x_m, \ker(T)) \leq K\|T(x_n - x_m)\|_Y = K\|y_n - y_m\|_Y \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

y como (y_n) es Cauchy deducimos que $([x_n])$ es Cauchy en $X/\ker(T)$, así que $[x_n] \to [x]$ para cierto $x \in X$. Ahora, por definición de la distancia como ínfimo podemos tomar $(z_n) \subseteq \ker(T)$ de tal forma que

$$\|x_n - x - z_n\|_X \leq 2\|[x_n] - [x]\|_{X/\ker(T)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así $x_n - z_n \to x$ en X y por continuidad de T, $T(x_n) = T(x_n - z_n) \to T(x)$, y por unicidad del límite $y = T(x)$, de donde se obtiene que $y \in \operatorname{ran}(T)$ y así el rango es cerrado. $\square$

Problema 2. Sean X, Y espacios vectoriales normados, $T : X \to Y$ operador lineal acotado y $T' : Y' \to X'$ su operador adjunto. Demuestre que T' es sobreyectivo si y solo si T es inyectivo y $T^{-1} : \operatorname{ran}(T) \to X$ es acotado.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sabemos que $\ker(T) = \perp^{(}\operatorname{ran}(T')) = \{0\}$ así que es directo que T es inyectivo. Como T' es sobreyectivo por el teorema de la aplicación abierta existe $r > 0$ tal que $B_{X'}(0, r) \subseteq T'(B_{Y'}(0, 1))$ y multiplicando $B_{X'}(0, 2) \subseteq T'(B_{Y'}(0, 2/r))$. Así, si $\|f\|_{X'} < 2$ entonces existe $\ell \in Y'$ de norma $\|\ell\|_{Y'} < 2/r$ y $f = T'(\ell)$. Consideremos $x \in X \setminus \{0\}$. Por corolario de Hahn-Banach existe $f \in X'$ de norma 1 y verificando $f(x) = \|x\|_X$, así que existe $\ell \in Y'$ tal que $f = T'(\ell)$ y $\|\ell\|_{Y'} < 2/r$. Luego

$$\|x\|_X = f(x) = T'(\ell)(x) = \ell(T(x)) \leq \|\ell\|_{Y'}\|T(x)\|_Y \leq \frac{2}{r}\|T(x)\|_Y$$

y entonces

$$\|T^{-1}(y)\|_X \leq \frac{2}{r}\|y\|_Y \qquad \forall y \in \operatorname{ran}(T)$$

y así $\widetilde{T}^{-1}$ es continua.
($\Leftarrow$) Suponer ahora que T es inyectivo y T^{-1} continuo. Dado $L \in X'$ por hipótesis la composición $L \circ T^{-1}$ es acotada en $\operatorname{ran}(T)$ y por el teorema de extensión de Hahn-Banach existe $\ell \in Y'$ tal que $\ell(y) = L \circ T^{-1}(y)$ para todo $y \in \operatorname{ran}(T)$. Si $x \in X$, por definición $T(x) \in \operatorname{ran}(T)$ y entonces

$$T'(\ell)(x) = \ell(T(x)) = L(T^{-1}(T(x))) = L(x)$$

y vemos así que T' es sobreyectivo. □

Problema 3. Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado con rango cerrado. Demuestre que $\ker(T') \cong (Y/\operatorname{ran}(T))'$.

Demostración. Recordando que $\ker(T') = \operatorname{ran}(T)^{\perp}$ podemos definir

$$\varphi : \ker(T') \to (Y/\operatorname{ran}(T))', \qquad \ell \mapsto (\lambda : [y] \mapsto \ell(y))$$

puesto que

$$\ell(x + T(y)) = \ell(x) + \ell(T(y)) = \ell(x)$$

es decir, φ está bien definida pues el valor de ℓ no varía módulo elementos en $\operatorname{ran}(T)$. Más aún,

$$|\lambda[y]| = |\ell(y)| \leq \|\ell\|_{Y'}\|y + Tz\|_Y \qquad \forall y, z \in Y$$

Tomando ínfimo en $\operatorname{ran}(T)$ se obtiene que $|\lambda[y]| \leq \|\ell\|_{Y'}\|[y]\|_{Y/\operatorname{ran}(T)}$, y por lo tanto $\lambda \in (Y/\operatorname{ran}(T))'$. Además vemos que φ es continua pues

$$|\varphi(\ell)[y]| = |\lambda[y]| = |\ell(y)| \leq \sup_{\|y\|_Y \leq 1} |\ell(y)| = \|\ell\|_{Y'} \qquad \forall y \in \overline{B_Y(0,1)}$$

y recordando que $\|[y]\|_{Y/\operatorname{ran}(T)} \leq \|y\|_Y$ entonces

$$\|\lambda\|_{(Y/\operatorname{ran}(T))'} = \sup_{\|[y]\|_{Y/\operatorname{ran}(T)} \leq 1} |\lambda[y]| \leq \|\ell\|_{Y'}$$

y así φ es continua.
Denotamos por $\pi : Y \to Y/\operatorname{ran}(T)$ la proyección al cociente y definimos la inversa de φ como

$$\psi : (Y/\operatorname{ran}(T))' \to \ker(T'), \qquad \lambda \mapsto \ell := \lambda \circ \pi$$

continua pues π es continua y además

$$T'(\ell)(x) = \ell(T(x)) = \lambda \circ \pi(T(x)) = \lambda[Tx] = 0$$

gracias a que $\lambda \in (Y/\operatorname{ran}(T))'$ y entonces ψ está bien definida pues $\ell \in \ker(T')$.
Note que

$$|\ell(y)| = |\lambda \circ \pi(y)| \leq \|\lambda\|_{(Y/\operatorname{ran}(T))'} \|\pi(y)\|_{Y/\operatorname{ran}(T)} \leq |\lambda\|_{(Y/\operatorname{ran}(T))'} \underbrace{\|\pi\|}_{=1} \|y\|_Y$$

así que ψ es continua pues $\|\ell\|_{Y'} \leq |\lambda\|_{(Y/\operatorname{ran}(T))'}$ Por construcción se tiene que ψ es inversa de φ, y dado que probamos que $\|\lambda\|_{(Y/\operatorname{ran}(T))'} \leq \|\ell\|_{Y'}$ y acabamos de probar la desigualdad contraria, tenemos que el isomorfismo es isométrico. $\square$

Problema 4. Sea H espacio de Hilbert real y $T \in \mathcal{L}(H)$. Muestre que el operador adjunto $T' : H' \to H'$ se puede identificar con un operador $\widetilde{T} : H \to H$ verificando la siguiente identidad

$$\langle Tx, y\rangle_H = \langle x, \widetilde{T}y\rangle_H \qquad \forall x, y \in H$$

Demostración. Sea $T' : H' \to H'$ el operador adjunto usual, es decir,

$$\langle \ell, Tx\rangle_{H',H} = \langle T'(\ell), x\rangle_{H',H} \qquad \forall x, y \in H$$

Por el teorema de representación de Riesz existen $y, \overline{y} \in H$ tales que

$$\langle y, Tx\rangle_H = \langle \ell, Tx\rangle_{H',H} = \langle T'(\ell), x\rangle_{H',H} = \langle \overline{y}, x\rangle_H \qquad \forall x, y \in X$$

es decir, $y, \overline{y}$ representan a $\ell, T'(\ell)$ respectivamente. Definimos $\widetilde{T} : H \to H$ como $\widetilde{T}(y) = \overline{y}$, el cual por construcción verifica la identidad deseada. Es directo verificar que $\widetilde{T}$ es lineal, así que resta entonces probar que $\widetilde{T}$ es continuo, y para ello empleamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz como sigue:

$$\|\widetilde{T}(y)\|^2 = \langle \widetilde{T}(y), \widetilde{T}(y)\rangle_H = \langle y, T\widetilde{T}(y)\rangle \leq \|T\widetilde{T}(y)\|_H \|y\|_H \leq \|T\|_{\mathcal{L}(H)} \|\widetilde{T}\|_{\mathcal{L}(H)} \|y\|_H^2$$

y así $\widetilde{T}$ es continuo. $\square$

Problema 5. Sea H espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Demuestre que H es isométricamente isomorfo a $H \times H$ con la norma $\|(x,y)\|_{H\times H} = (\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2)^{1/2}$.

Demostración. Sea (e_n) base ortonormal de H[1] y definimos

$$T : H \to H \times H, \quad x \mapsto \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_{2n-1}\rangle e_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_{2n}\rangle e_n \right)$$

La aplicación anterior está bien definida por ortonormalidad (las series convergen) y es directo probar que es lineal por bilinealidad del producto interno. Construimos directaente la inversa de T como sigue:

$$S : H \times H \to H, \quad S(x_1, x_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_n\rangle_H e_{2n-1} + \langle x_2, e_n\rangle_H e_{2n}$$

[1] Se puede demostrar sin mucha dificultad que todo Hilbert separable posee una base ortonormal

Verificamos que $T \circ S = \mathrm{id}_{H\times H}$. Para ello notamos que las relaciones de ortonormalidad dan:

$$\begin{aligned}
(T \circ S)(x_1, x_2) =& T\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_n\rangle_H e_{2n-1} + \langle x_2, e_n\rangle_H e_{2n}\right) \\
=& \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left\langle \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_m\rangle_H e_{2m-1} + \langle x_2, e_m\rangle_H e_{2m}\right), e_{2n-1}\right\rangle e_n,\right. \\
& \left.\sum_{n\in\mathbb{N}} \left\langle \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_m\rangle_H e_{2m-1} + \langle x_2, e_m\rangle_H e_{2m}\right), e_{2n}\right\rangle e_n\right) \\
=& \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_n\rangle_H e_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_2, e_n\rangle_H e_n\right) \\
=& (x_1, x_2)
\end{aligned}$$

Con cálculos similares se prueba que $S \circ T = \mathrm{id}_H$. Verificamos entonces que es una isometría. En primer lugar usando la ortonormalidad vemos que

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^2_{H\times H} &= \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_{2n-1}\rangle e_n \Big\|^2_H + \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_{2n}\rangle e_n \Big\|^2_H \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_{2n-1}\rangle^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_{2n}\rangle^2 \\
&= \|x\|^2_H
\end{aligned}$$

De forma similar

$$\begin{aligned}
\|S(x_1, x_2)\|^2_H &= \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_n\rangle_H e_{2n-1} + \langle x_2, e_n\rangle_H e_{2n} \Big\|^2_H \\
&= \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_n\rangle_H e_{2n-1} \Big\|^2_H + \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_2, e_n\rangle_H e_{2n} \Big\|^2_H \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_n\rangle^2_H \langle e_{2n-1}, e_{2n-1}\rangle^2_H + \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_2, e_n\rangle^2_H \langle e_{2n}, e_{2n}\rangle^2_H \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_1, e_n\rangle^2_H + \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_2, e_n\rangle^2_H \\
&= \|x_1\|^2_H + \|x_2\|^2_H
\end{aligned}$$

$\square$