Pauta Ayudantía 5 Análisis Funcional

29 de septiembre de 2022

Teorema 1 (Aplicación abierta). *Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y $T : X \to Y$ operador lineal continuo. Si T es sobreyectivo entonces es abierto.*

Teorema 2 (Grafo cerrado). *Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y $T : X \to Y$ operador lineal tal que su grafo*

$$\mathrm{Gr}(T) := \{(x, y) \in X \times Y | y = T(x)\}$$

es cerrado en $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$. Entonces T es continuo.

Problema 1. Sean X, Y e.v.n. y $T : X \to Y$ operador lineal de rango finito, i.e., $\dim \mathrm{Im}(T) < +\infty$. Demuestre que si el grafo de T es cerrado entonces T es continuo.

Indicación. Suponga por contradicción que T no es continuo. Construya una sucesión $(x_n) \subseteq X$ convergente de tal modo que $\|T(x_n)\|_Y \to \infty$ y concluya.

Demostración. Suponer que T no es continuo. Probaremos en primer lugar que existe $(x_n) \to 0$ tal que $\|T(x_n)\|_Y \to \infty$. En efecto, como T no es continuo entonces para todo $n \in N$ existe $x_n \in X$ de tal modo que

$$\|T(x_n)\|_Y > n\|x_n\|_X \quad \Rightarrow \quad \left\| T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right)\right\| \geq n$$

es decir, considerando la sucesión $u_n := x_n/\|x_n\|_X$ tenemos una sucesión acotada en X tal que $\|T(u_n)\|_Y \to \infty$. Notar entonces que la sucesión $z_n := u_n/\sqrt{T(u_n)} \to 0$ y

$$\|T(z_n)\|_Y = \frac{\|T(u_n)\|_Y}{\sqrt{\|T(u_n)\|_Y}} = \sqrt{\|T(u_n)\|_Y} \to \infty$$

Podemos entonces considerar $(x_n) \subseteq X$ sucesión tal que $x_n \to 0$ y $\|T(x_n)\|_Y \to \infty$. Definimos la sucesión $y_n := T(x_n)/\|T(x_n)\|_Y$ en Y. Dado que $\dim \mathrm{Im}(T) < +\infty$ entonces y_n deberá tener una subsucesión $(y_{n_k}) \subseteq Y$ convergente a un cierto $\overline{y} \in Y$. Dado que $\|y_{n_k}\|_Y = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $\|\overline{y}\|_Y = 1$. Ahora, por definición la sucesión $(x_{n_k}/\|T(x_{n_k})\|_Y, y_{n_k})$ pertenece al grafo de T y además es claro que

$$\frac{x_{n_k}}{\|T(x_{n_k})\|_Y} \to 0$$

y como el grafo de T es cerrado por hipótesis se tiene que $(x_{n_k}/\|T(x_{n_k})\|_Y, y_{n_k}) \to (0, \overline{y})$ está en el grafo de T, y entonces $T(0) = 0 = \overline{y}$ lo cual supone una contradicción pues $\|\overline{y}\|_Y = 1$. $\square$

Problema 2. Sea X espacio de Banach y $T : X \to X'$ lineal tal que

$$T(x)(x) \geq 0 \qquad \forall x \in X$$

Demuestre que T es un operador acotado.

Demostración. Por el teorema del grafo cerrado, basta probar que efectivamente el grafo de T es cerrado para concluir la continuidad. Sea entonces $(x_n) \subseteq X$ tal que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to f$. Dado que T es lineal tenemos la desigualdad

$$T(x_n - y)(x_n - y) = (T(x_n) - T(y))(x_n - y) \geq 0 \qquad \forall y \in X, \forall n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Ahora, notemos que $T(x_n)(x_n) \to f(x)$ pues

$$|T(x_n)(x_n) - f(x)| = |T(x_n)(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x)| \leq \|T(x_n) - f\|_{X'}\|x_n\| + \|f\|_{X'}\|x_n - x\|_X \to 0$$

donde lo último se tiene pues (x_n) es acotada. Pasando entonces al límite en (1) tenemos que

$$(f - T(y))(x - y) \geq 0 \qquad \forall y \in X$$

Escribiendo $y = x + tz$ con $t \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$(f - T(x))(-t(z)) + T(tz)(tz) = -t(f - T(x))(z) + t^2 T(z)(z) \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Considerando $t > 0$ y dividiendo por t tenemos

$$tT(z)(z) \geq (f - T(x))(z) \qquad \forall t > 0, \forall z \in X$$

Haciendo $t \to 0$ se obtiene entonces que $T(x)(z) \geq f(z)$ para todo $z \in X$, y tomando $-z$ en la identidad anterior y repitiendo el procedimiento se llega a la desigualdad contraria. Deducimos entonces que $f = T(x)$. □

Problema 3. El objetivo de este problema es probar que el Teorema del Grafo Cerrado implica el Teorema de la Aplicación Abierta, i.e., que ambos teoremas son equivalentes. Consideramos entonces X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ operador lineal acotado y sobreyectivo. Asuma de aquí en adelante que el Teorema del Grafo Cerrado es verdadero y considere los siguientes pasos:

1. Defina la aplicación $L : Y \to X/\ker(T)$ mediante $y \mapsto [x]$ donde $T(x) = y$. Pruebe que L está bien definido y es lineal.

2. Empleando el teorema del grafo cerrado demuestre que L es continuo.

3. Concluya el res ultado.

Demostración. Probaremos que existe $r > 0$ tal que $B_Y(0, r) \subseteq T(B_X(0, 1))$. Para ello consideramos L como en el enunciado y probamos en primer lugar que está bien definida. Esto significa probar que todo $y \in Y$ posee una imagen y además que dicha imagen está únicamente determinada (es decir, si $T(x_1) = T(x_2)$ entonces $[x_1] = [x_2]$). En primer lugar, dado $y \in Y$ como T es sobreyectiva existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$ y luego por definición $L(y) = [x]$, así que la primera condición se satisface. Por otro lado, notar que si $T(x_1) = T(x_2)$ entonces $T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker(T)$ y por definición $[x_1] = [x_2]$ en $X/\ker(T)$ y L está bien definida.
Para la linealidad consideramos $y_1, y_2 \in Y, \lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que $L(y_1 + \lambda y_2) = [x]$ para algún $x \in X$, y también $L(y_1) = x_1, L(y_2) = x_2$ para ciertos $x_1, x_2 \in X$. Ahora, por linealidad de T $T(x_1 + \lambda x_2) = T(x_1) + \lambda T(x_2) = y_1 + \lambda y_2$ y gracias a la estructura vectorial del cociente

$$L(y_1 + \lambda y_2) = [x_1 + \lambda x_2] = [x_1] + \lambda[x_2] = L(y_1) + \lambda L(y_2)$$

probando así que L es lineal.
Demostraremos a continuación que L es continuo viendo que su grafo es cerrado. Para ello considere $(y_n, [x_n]) \subseteq \mathrm{Gr}(L)$ tal que $(y_n, [x_n]) \to (y, [x])$. Notemos que lo anterior significa que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pues $L(y_n) = [x_n]$, $y_n \to y$ en Y y $[x_n] \to [x]$ en $X/\ker(T)$. Lo último significa que

$$\|[x_n] - [x]\|_{X/\ker(T)} = \inf_{z \in \ker(T)} \|x_n - x - z\|_X \to 0$$

y por definición de ínfimo podemos construir una sucesión $(z_k) \subseteq \ker(T)$ de tal modo que $\|x_{n_k} - x - z_k\| \to 0$ para alguna subsucesión (x_{n_k}) de (x_n). En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|[x_{n_k}] - [x]\|_{X/\ker(T)} = \inf_{z \in \ker(T)} \|x_{n_k} - x - z\|_X < \frac{1}{k}$$

y por definición de ínfimo existe $z_k \in ker(T)$ de tal modo que

$$\|x_{n_k} - x - z_k\| \leq \frac{1}{k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

es decir, tenemos que $x_{n_k} - z_k \to x$ en X. Ahora, como T es continuo se sigue que

$$T(x_{n_k}) = T(x_{n_k}) - T(z_k) = T(x_{n_k} - z_k) \to T(x) \quad \text{en } Y$$

puesto que $(z_n) \subseteq \ker(T)$. Además, teniamos que $y_n \to y$, y tomando límite en $T(x_{n_k}) = y_{n_k}$ tenemos que $T(x) = y$ y por definición $L(y) = [x]$, lo cual significa que $(y, [x]) \in \mathrm{Gr}(L)$ y así L es continuo.
Como L es un operador continuo y acotado existe entonces $r > 0$ de tal modo que $L(B_Y(0, r)) \subseteq B_{X/\ker(T)}(0, 1)$. Usaremos esto para concluir. Para ello consideramos $y \in B_Y(0, r)$. La propiedad anterior nos dice que $\|L(y)\|_{X/\ker(T)} = \|[x]\|_{X/\ker(T)} < 1$, lo cual por definición conlleva la existencia de $z \in \ker(T)$ tal que $\|x - z\|_X < 1$. Tenemos finalmente que

$$y = T(x) = T(x) - T(z) = T(x - z) \in T(B_X(0, 1))$$

□

Problema 4. Sean Y, Z espacios de Banach, X e.v.n. Considere $T_Y : Y \to X, T_Z : Z \to X$ operadores lineales continuos tales que la ecuación $T_Y(y) = T_Z(z)$ posee una única solución $z \in Z$ para cada $y \in Y$. Demuestre que la aplicación $T : Y \to Z, y \mapsto z$ es lineal y continua.

Demostración. Probamos en primer lugar que T es lineal. Para ello sean $y_1 \in y_2 \in Y, \lambda \in \mathbb{R}$ y $z_1, z_2 \in Z$ soluciones respectivas tales que $T_Y(y_1) = T_Z(z_1)$ y $T_Y(y_2) = T_Z(z_2)$, i.e., $T(y_1) = z_1, T(y_2) = z_2$. Luego por linealidad

$$\begin{aligned} T_Y(y_1 + \lambda y_2) =& T_Y(y_1) + \lambda T_Y(y_2) = T_Z(z_1) + \lambda T_Z(z_2) = T_Z(z_1 + \lambda z_2) \\ \Rightarrow& \quad T(y_1 + \lambda y_2) = z_1 + \lambda z_2 = T(y_1) + \lambda T(y_2) \end{aligned}$$

Para concluir entonces probaremos que el grafo de T es cerrado. Para ello sea $(y_n) \subseteq Y$ tal que $y_n \to y$ y además $T(y_n) \to z \in Z$. Como T_Y es acotado $T_Y(y_n) \to T_Y(y)$ y además por la hipótesis del enunciado para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $z_n \in Z$ tal que $T_Y(y_n) = T_Z(z_n)$, y lo anterior significa por definición que $T(y_n) = z_n$ para cada $n \in N$. Ahora, sabemos que $z_n = T(y_n) \to z$ y luego como T_Z es acotado $T_Z(z_n) \to T_Z(z)$ en X. Dado que teníamos que $T_Y(y_n) = T_Z(z_n)$ tomando límite $n \to \infty$ obtenemos $T_Y(y) = T_Z(z)$ de donde $T(y) = z$ deduciendo que T es continuo. □