Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Pauta Ayudantía 3 Análisis Funcional

8 de septiembre de 2022

Problema 1. Supongamos que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un e.v.n. y que $f : Y \to \mathbb{R}$ es una función continua y convexa, i.e., tal que

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2), \quad \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \lambda \in [0,1].$$

Consideremos ahora otro e.v.n. $(X, \|\cdot\|_X)$, un operador $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $x_0 \in X$, tales que existe $\varphi \in X^{'}$ que verifica

$$f(A(x_0)) + \varphi(x - x_0) \leq f(A(x)), \quad \forall x \in X.$$

Pruebe, usando el Teorema de Hahn-Banach Geométrico, que existe $\ell \in Y^{'}$ tal que $\varphi = \ell \circ A$ y que además satisface

$$f(A(x_0)) + \ell(y - A(x_0)) \leq f(y), \quad \forall y \in Y.$$

Indicación: Pruebe que los siguientes conjuntos son convexos y disjuntos:

$$A := \{(y,z) \in Y \times \mathbb{R} \mid f(y) < z\} \quad \text{y} \quad B := \{(A(x), f(A(x_0)) + \varphi(x - x_0)) \in Y \times \mathbb{R} \mid x \in X\}.$$

Demostración. Probamos primero que A es convexo. Sean $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in A, \lambda \in [0,1]$. Por definición de A y la convexidad de f

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda)f(y_2) < \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2 \Rightarrow \lambda(y_1,z_1) + (1-\lambda)(y_2,z_2) \in A$$

Para ver que B es convexo, consideramos $x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$ y vemos que como A es lineal

$$\lambda A(x_1) + (1-\lambda)A(x_2) = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

y además

$$\begin{aligned} f(A(x_0)) + \varphi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= f(A(x_0)) + \lambda\varphi(x_1 - x_0) + (1-\lambda)\varphi(x_2 - x_0) \\ &= \lambda(f(A(x_0)) + \varphi(x_1 - x_0)) + (1-\lambda)(f(A(x_0)) + \varphi(x_2 - x_0)) \end{aligned}$$

y juntando ambas coordenadas tenemos la convexidad. Ahora, notemos que A y B son no vacíos por construcción, y además A es abierto. Para ver esto, definimos la función $F : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (y,z) \mapsto f(y)$ la cual es continua pues f lo es, y también la función $\pi : Y \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (y,z) \to z$ proyección en la segunda coordenada (también continua). Podemos entonces reescribir A como

$$\begin{aligned} A &= \{(y,z) \in Y \times \mathbb{R} \mid f(y) < z\} \\ &= \{(y,z) \in Y \times \mathbb{R} \mid f(y) - z < 0\} \\ &= \{(y,z) \in Y \times \mathbb{R} \mid F(y,z) - \pi(y,z) < 0\} \\ &= (F - \pi)^{-1}(-\infty, 0) \end{aligned}$$

y hemos escrito así A como preimagen de un abierto.
Veamos ahora que son disjuntos. Por contradicción supongamos que existe $(y,z) \in A \cap B$. Entonces $f(y) < z$ y además existe $x \in X$ tal que $y = A(x), z = f(A(x_0)) + \varphi(x - x_0)$ de donde

$$f(A(x)) < f(A(x_0)) + \varphi(x - x_0)$$

lo cual es una contradicción con la hipótesis del enunciado. Tenemos entonces $A \cap B = \emptyset$.
De esta forma podemos emplear el Teorema de Hahn-Banach geométrico para separar A y B, es decir, existe $L \in (Y \times \mathbb{R})^* \setminus \{0\}$ tal que

$$L(y,z) \leq L(A(x), f(A(x_0)) + \varphi(x - x_0)) \qquad \forall x \in X, \forall (y,z) \in A$$

Notemos que podemos escribir L como

$$L(y,z) = \underbrace{L(y,0)}_{=:\ell(y)} + z\underbrace{L(0,1)}_{=:r} = \ell(y) + rz$$

donde $\ell \in Y^*$ y entonces reescribimos la desigualdad anterior como

$$\ell(y) + rz \leq \ell(A(x)) + r(f(A(x_0)) + \varphi(x - x_0)) \qquad \forall x \in X, \forall (y,z) \in A$$

Si evaluamos lo anterior en $x = x_0, y = A(x_0)$ tenemos

$$\ell(A(x_0)) + rz \leq \ell(A(x_0)) + rf(A(x_0)) \quad \Rightarrow \quad rz \leq rf(A(x_0)) \quad \forall z > f(A(x_0))$$

Tomando $z = f(A(x_0)) + 1$ vemos que $r \leq 0$.
Ahora, por la definición de A tenemos que $f(y) < z$ y así

$$\ell(y) + rf(y) \leq \ell(A(x)) + r(f(A(x_0)) + \varphi(x - x_0)) \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

De lo anterior podemos decir que $r < 0$, pues si $r = 0$ lo anterior se convierte en

$$\ell(y) \leq \ell(A(x)) \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y$$

y fijando $y \in Y$ obtendríamos que $\ell = 0$, una contradicción. Reescalando entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que $r = -1$. y luego escribimos

$$\ell(y - A(x)) \leq f(y) - f(A(x_0)) - \varphi(x - x_0) \qquad \forall x \in X, \forall y \in Y \tag{1}$$

Evaluando en $x = x_0$ la expresión anterior obtenemos la conclusión

$$f(A(x_0)) + \ell(y - A(x_0)) \leq f(y) \qquad \forall y \in Y$$

Para terminar resta probar que $\varphi = \ell \circ A$. Tomando $y = A(x_0)$ en (1) se obtiene que

$$\ell(A(x_0) - A(x)) \leq -\varphi(x - x_0) \qquad \forall x \in X$$

y escribiendo $\overline{x} = x - x_0$ tenemos

$$\varphi(\overline{x}) \leq \ell(A(\overline{x})) \qquad \forall \overline{x} \in X$$

Cambiando $\overline{x}$ por $-\overline{x}$ se tiene la igualdad. □

Problema 2. Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ e.v.n. y $\{x_k\} \subseteq X$ tal que para todo $\ell \in X'$ se tiene que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ell(x_k)| < +\infty$. Demuestre que

$$\sup_{\|\ell\|_{X'} \leq 1} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\ell(x_k)| < +\infty$$

Indicación: Defina una sucesión de operadores lineales adecuada y emplee el Teorema de Banach-Steinhaus.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar el operador $\varphi_n : X' \to \ell_1$ definido por

$$\varphi_n(\ell) = (\ell(x_0), \ell(x_1), \ldots, \ell(x_n), 0, 0, \ldots)$$

Además considerar $\varphi : X' \to \ell_1$ tal que $\varphi(\ell) = \{\ell(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. Notar primero que por hipótesis $\varphi(\ell) \in \ell_1$ para todo $\ell \in X'$ ya que $\{\ell(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable. Además, notar que

$$\varphi(\ell) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\ell)$$

pues como $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\ell(x_k)| < +\infty$ se tiene que

$$\|\{\varphi(\ell)\} - \{\varphi_n(\ell)\}\|_{\ell_1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\ell(x_k)| \to 0$$

Por otro lado, φ es lineal ya que claramente φ_n es lineal para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces se puede concluir por linealidad del límite.
Ahora veamos que φ_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello basta observar que

$$\|\varphi_n(\ell)\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} |\ell(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} \|\ell\|_{X'} \|x_k\| = \|\ell\|_{X'} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

Notar que como la serie $\sum |\ell(x_k)|$ es de términos positivos, la sucesión de sumas parciales es creciente y por lo tanto converge a su supremo, y entonces por la continuidad de la norma se tiene que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n(\ell)\|_{\ell_1} = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(\ell)\|_{\ell_1} = \|\varphi(\ell)\|_{\ell_1} < +\infty$$

Ahora, como $X^{'}$ es Banach, por el Teorema de Banach-Steinhaus se tiene que

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_{\mathcal{L}(X',\ell_1)} < +\infty$$

Por lo anterior, y nuevamente por la continuidad de la norma es posible concluir que

$$\|\varphi(\ell)\|_{\ell_1} = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n(\ell)\|_{\ell_1} \leq M\|\ell\|_{X'}$$

Se concluye entonces que φ es continua.
Finalmente, como $\varphi \in \mathcal{L}(X^{'}, \ell_1)$ entonces se concluye que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}(X',\ell_1)} = \sup_{\ell\in X'} \frac{\|\varphi(\ell)\|_{\ell_1}}{\|\ell\|_{X'}} = \sup_{\ell\in B[0,1]} \|\varphi(\ell)\|_{\ell_1} = \sup_{\|\ell\|_{X'}\leq 1} \sum_{k\in\mathbb{N}} |\ell(x_k)| < +\infty$$

$\square$

Problema 3. Considere en este problema un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

1. Sea $f \in L^p$ para algún $1 \leq p < \infty$. Probar que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

2. Suponer $\mu(X) < +\infty$. Demuestre que si $1 \leq p \leq q$ entonces $L^q(X,\mu) \hookrightarrow L^p(X,\mu)$ de manera continua, y calcule la norma de la inclusión.

Demostración.

1. Notar en primer lugar que si $\|f\|_\infty = 0$ entonces $\|f\|_{L_p} = 0$ para todo $1 \leq p \leq \infty$, así que podemos suponer $\|f\|_{L^\infty} > 0$. Considerar $K \in [0, \|f\|_{L^\infty})$ y notar que por definición de $\|\cdot\|_{L^\infty}$ el conjunto

$$A_K := \{x \in X : |f(x)| \geq K\}$$

tiene medida positiva. Notar ahora que

$$\|f\|_{L^p} \geq \left(\int_{A_K} |f|^p d\mu\right)^{1/p} \geq K\mu(A_K)^{1/p}$$

Si $\mu(A_K) < +\infty$ entonces $\mu(A_K)^{1/p} \to 1$ y luego

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq K$$

y lo anterior también es válido si $\mu(A_K) = +\infty$. Dado que K es arbitrario tenemos entonces

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty}$$

Ahora, si suponemos que $f \in L^q$ para cierto $1 \leq q < \infty$ entonces para $q < p < \infty$ tenemos que

$$\|f\|_{L^p}^p = \int |f|^p d\mu = \int |f|^q |f|^{p-q} d\mu \leq \|f\|_{L^\infty}^{p-q} \int |f|^q d\mu$$

y por lo tanto

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}^{1-q/p} \|f\|_{L^q}^{q/p}$$

y dado que $\|f\|_{L^q} < +\infty$ entonces

$$\limsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}$$

2. Sea $f \in L^q(X,\mu)$ y considere $r > 0$ de tal forma que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q/p} + \frac{1}{r/p} = 1$$

y luego podemos emplear la desigualdad de Hölder

$$\|f\|_{L^p}^p \int |f|^p d\mu \leq \left(\int (|f|^p)^{q/p} d\mu\right)^{p/q} \left(\int \mathbb{1}^{r/p} d\mu\right)^{p/r} = \|f\|_{L^q}^p \cdot \mu(X)^{p/r}$$

de donde obtenemos que

$$\|f\|_{L^p} \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \|f\|_{L^q}$$

lo cual muestra simultáneamente que $L^q(X,\mu) \subseteq L^p(X,\mu)$ y que la inclusión es continua. Podemos denotar entonces a la inclusión por $\iota : L^q(X,\mu) \to L^p(X,\mu)$, si consideramos $f = \mathbb{1}_X$ entonces

$$\|\iota\| = \sup_{f\in L^q(X,\mu)\setminus\{0\}} \frac{\|f\|_{L^p(X,\mu)}}{\|f\|_{L^q(X,\mu)}} \geq \frac{\mu(X)^{1/p}}{\mu(X)^{1/q}} = \mu(X)^{1/p-1/q}$$

Juntando lo anterior deducimos que $\|\iota\| = \mu(X)^{1/p-1/q}$.

□