Profesor: Michael Karkulik
Ayudante: Sebastián Fuentes

Ayudantía 13 Análisis Funcional

1 de diciembre de 2022

Problema 1.[] Sea H espacio de Hilbert, $V \subseteq H$ subespacio vectorial cerrado y P_V su proyección ortogonal.

1. Determine el espectro y los autovalores de P_V.
2. ¿Bajo qué condiciones P_V es compacto?

Problema 2. Considere el espacio ℓ^2 y defina los operadores shift izquierdo y derecho como

$$\begin{aligned} T_l : \ell^2 \to \ell^2, \qquad & T_l(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) := (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots) \\ T_r : \ell^2 \to \ell^2, \qquad & T_r(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots) \end{aligned}$$

Con respecto a estos operadores

1. Muestre que $T_l, T_r \in \mathcal{L}(\ell^2)$.
2. Pruebe que estos operadores no son compactos.
3. Encuentre los operadores adjuntos T_l^*, T_r^*.
4. Calcule los valores propios de T_l, T_r y verifique que $\mathrm{VP}(T_l) \neq \mathrm{VP}(T_r)$.
5. Demuestre que $\sigma(T_l) = \sigma(T_r) = [-1, 1]$.

Problema 3. Sea $X = C([0,1])$ con la norma del supremo y considere el operador

$$T(u)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x u(t)dt & \text{si} \quad x \in (0,1] \\ u(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Demuestre que T está bien definido y $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$.
2. Demuestre que $\mathrm{VP}(T) = (0,1]$ y encuentre las funciones propias.
3. Muestre que $\sigma(T) = [0,1]$. Detemirne si el operador T es compacto y encuentre una fórmula explícita para $(T - \lambda I)^{-1}$ cuando $\lambda \in \rho(T)$.
4. Considere ahora T como un operador $T : C[0,1] \to L^p(0,1)$ con $1 \leq p < +\infty$. Demuestre que T es un operador compacto.
   Indicación: Para $\varepsilon > 0$ defina $T_\varepsilon(u)(x) = \frac{1}{x+\varepsilon}\int_0^x u(t)dt$. Demuestre que T_ε es compacto usando el teorema de Arzelá-Ascoli y concluye mostrando que $\|T_\varepsilon - T\| \to 0$.