



## AYUDANTÍA 5 ANÁLISIS FUNCIONAL

29 DE SEPTIEMBRE DE 2022

**Teorema 1** (Aplicación abierta). Sean  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  espacios de Banach y  $T : X \rightarrow Y$  operador lineal continuo. Si  $T$  es sobreyectivo entonces es abierto.

**Teorema 2** (Grafo cerrado). Sean  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  espacios de Banach y  $T : X \rightarrow Y$  operador lineal tal que su grafo

$$\text{Gr}(T) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = T(x)\}$$

es cerrado en  $(X \times Y, \|\cdot\|_{X \times Y})$ . Entonces  $T$  es continuo.

**Problema 1.** Sean  $X, Y$  e.v.n. y  $T : X \rightarrow Y$  operador lineal de rango finito, i.e.,  $\dim \text{Im}(T) < +\infty$ . Demuestre que si el grafo de  $T$  es cerrado entonces  $T$  es continuo.

**Indicación.** Suponga por contradicción que  $T$  no es continuo. Construya una sucesión  $(x_n) \subseteq X$  convergente de tal modo que  $\|T(x_n)\|_Y \rightarrow \infty$  y concluya.

**Problema 2.** Sea  $X$  espacio de Banach y  $T : X \rightarrow X'$  lineal tal que

$$T(x)(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$$

Demuestre que  $T$  es un operador acotado.

**Problema 3.** El objetivo de este problema es probar que el Teorema del Grafo Cerrado implica el Teorema de la Aplicación Abierta, i.e., que ambos teoremas son equivalentes. Consideramos entonces  $X, Y$  espacios de Banach y  $T : X \rightarrow Y$  operador lineal acotado y sobreyectivo. Asuma de aquí en adelante que el Teorema del Grafo Cerrado es verdadero y considere los siguientes pasos:

1. Defina la aplicación  $L : Y \rightarrow X/\ker(T)$  mediante  $y \mapsto [x]$  donde  $T(x) = y$ . Pruebe que  $L$  está bien definido y es lineal.
2. Empleando el teorema del grafo cerrado demuestre que  $L$  es continuo.
3. Concluya el resultado.

**Problema 4.** Sean  $Y, Z$  espacios de Banach,  $X$  e.v.n. Considere  $T_Y : Y \rightarrow X, T_Z : Z \rightarrow X$  operadores lineales continuos tales que la ecuación  $T_Y(y) = T_Z(z)$  posee una única solución  $z \in Z$  para cada  $y \in Y$ . Demuestre que la aplicación  $T : Y \rightarrow Z, y \mapsto z$  es lineal y continua.