**Profesor:** Michael Karkulik
**Ayudante:** Sebastián Fuentes

# Ayudantía 9 Análisis Funcional

27 de octubre de 2022

**Problema 1.** Sean $X, Y, Z$ espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(X,Y), S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Muestre que

1. $(S \circ T)' = T' \circ S'$.
2. Si $T$ es biyectivo entonces $T'$ es biyectivo y $(T')^{-1} = (T^{-1})'$

**Problema 2.** Considere $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ e.v.n.

1. Considere $J : X \to X''$ la inyección canónica del espacio $X$. Demuestre que
$$J : (X, \sigma(X, X')) \to (X'', \sigma(X'', X'))$$
es continua, es decir, que mantiene su continuidad si consideramos la topología débil en $X$ y la topología débil-$\star$ $\sigma(X'', X')$ en $X''$.
2. Si $L : X \to Y$ es un operador lineal acotado, demuestre que $L : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ es continuo.

**Problema 3.** Supongamos que $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son dos e.v.n. y denotemos por $J_X : X \to X''$ y $J_Y : Y \to Y''$ las inyecciones canónicas de $X$ y $Y$, respectivamente. En esta pregunta estudiaremos algunas propiedades de operadores débilmente compacto.

**Definición 1.** *Diremos que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es débilmente compacto si $\overline{T\left(\overline{B_X}\right)}$ es compacto débil en $\sigma\left(Y, Y'\right)$*

1. Supongamos que $X$ o bien $Y$ es reflexivo. Pruebe usando el Teorema de Kakutani que todo operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador débilmente compacto.
2. Sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$, con $(Z, \|\cdot\|_Z)$ otro e.v.n.. Pruebe que si $S$ o bien $T$ es un operador débilmente compacto, entonces $S \circ T$ es un también operador débilmente compacto.
3. Pruebe que si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador débilmente compacto entonces $\operatorname{im}(T^{**}) \subseteq J_Y(Y)$.
   a) Demuestre que $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$ y con esto concluya que
   $$\overline{T^{**}\left(J_X\left(\overline{B_X}\right)\right)}^{\sigma\left(Y'', Y'\right)} \subseteq J_Y\left(\overline{T\left(\overline{B_X}\right)}\right).$$
   b) Pruebe que $T^{**} : \left(X'', \sigma\left(X'', X'\right)\right) \to \left(Y'', \sigma\left(Y'', Y'\right)\right)$ es continuo y obtenga el resultado usando el Lema de Goldstein.
4. Pruebe que $T^* : \left(Y'', \sigma\left(Y'', Y\right)\right) \to \left(X', \sigma\left(X', X''\right)\right)$ es continuo, y luego, usando el Teorema de Banach-Alaoglu, pruebe que si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es un operador débilmente compacto entonces $T^*$ también es un operador débilmente compacto.