Lineare Optimierung und Operations Research

Armin Hoffmann

TU Ilmenau

Sommersemester 2008

03.04.2008

Primale Simplexmethode

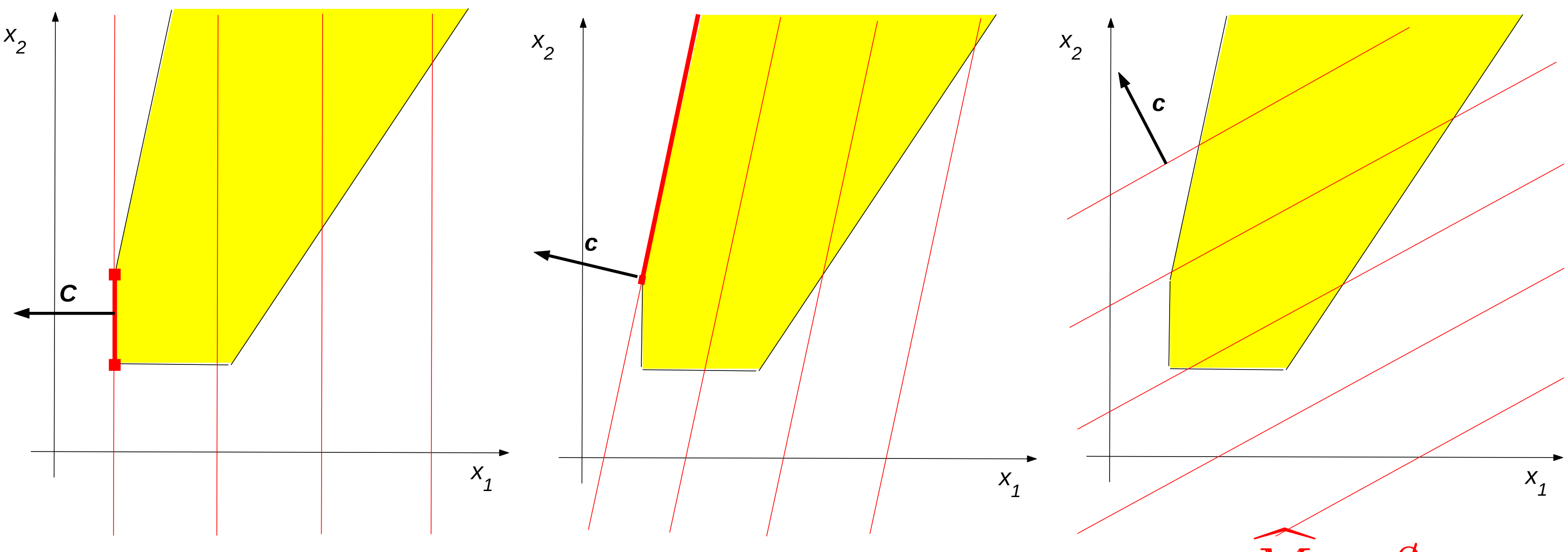
1. Hauptsatz der LO
2. Kanonisches Tableau des LOP
3. Primaler Algorithmus
4. Geometrie des Simplex-Algorithmus

1. Hauptsatz der LO

Satz: (HS der LO, 1. Form) Wenn

$$\text{MAX } \{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

lösbar ist, dann gehört ein **Extremalpunkt** $\hat{\boldsymbol{x}}$ zur Lösungsmenge $\widehat{M}$.



$\widehat{M}$ = Intervall

$\widehat{M}$ = Strahl

$\widehat{M} = \emptyset$

ZF unbeschränkt

2.1 Kanonisches Tableau des LOP

Geg.: LOP: MAX $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}, \quad M \neq \emptyset$

Anfangstableau mit Basiszuordnung (~~überflüssige Zeilen~~)

$$
\begin{array}{c|c|cc|l}
\multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{-\boldsymbol{x}_I^T} & \multicolumn{1}{c}{-\boldsymbol{x}_J^T} & & \\
\hline
0 & -\boldsymbol{c}_I^T & -\boldsymbol{c}_J^T & & = z \\
\hline
\boldsymbol{b} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{N} & & = \boldsymbol{0} \\
\hline
\end{array}
$$

JT mit Basismatrix $\boldsymbol{B} \Longrightarrow$ **kanonisches Tableau** des LOP

Streichen der Nullspalten $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{c|c|l}
\multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{-\boldsymbol{x}_J^T} & \\
\hline
q_{oo} & -(\boldsymbol{q}^o)^T & = z \\
\hline
\boldsymbol{q}_o & \boldsymbol{Q} & = \boldsymbol{x}_I \\
\hline
\end{array}
$$

2.2 Beispiel zum kanonischen Tableau

Erläuterung des Programmes PSimplex

Eingabe eines Beispiels mit 4 Gleichungen,
8 nichtnegativen Variablen
Bestimmung eines 1. kanonischen Tableaus

!!!: Psimplex entfernt überflüssige Zeilen und Spalten nicht

Tableau-Bezeichnungen (teilweise unterdrückt):

ZF-Zeile:	$(\boldsymbol{q}^0_J)^T$	$:= (q_{0j})^T_{j\in J}$,	1. Index = Zeilenindex = 0
Abs. Elem. in ZF:		$:= q_{00}$	Wert von ZF in BL
Abs. Spalte:	$\boldsymbol{q}_{I0}$	$:= (q_{i0})_{i\in I}$,	2. Index = Spaltenindex = 0
Matrix :	$\boldsymbol{Q}$	$:= (q_{ij})_{i\in I, j\in J}$,	Zeilen: $(\boldsymbol{q}^i)^T_{i\in I}$, Spalten: $(\boldsymbol{q}_j)_{j\in J}$
Kollektive Indizes :	$\boldsymbol{Q}_{I_0 J_0}$	$:= (q_{ij})_{i\in I_0, j\in J_0}$,	$\boldsymbol{x}_I := (x_i)_{i\in I}$, $\boldsymbol{c}_J^T, \ldots$ etc.
Piv.elem.:	q_{rs}	Zeilenindex $\boldsymbol{r}$,	Spaltenindex $\boldsymbol{s}$

3.1 Primaler Simplex-Algorithmus am Bsp.

Bsp.: mit ablesbarem zulässigen kanonischen Tableau

$$\text{MAX}\left\{\begin{array}{c|cccccrl} & 1x_1 & +1x_2 & +x_3 & & & = & 6 \\ z = x_1 - x_2 = & 1x_1 & +0x_2 & & +x_4 & & = & 3 \\ -1(-x_1) + 1(-x_2) & 1x_1 & -2x_2 & & & +x_5 & = & 1 \\ & x_1 & , x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq & 0 \end{array}\right\}$$

NBV

$$\begin{array}{c|cc|l} 1 & -x_1 & -x_2 & \\ \hline 0 & -1 & 1 & = z \to \max \\ \hline 6 & 1 & 1 & = x_3 \\ 3 & 1 & 0 & = x_4 \\ 1 & 1 & -2 & = x_5 \\ \hline \end{array}$$

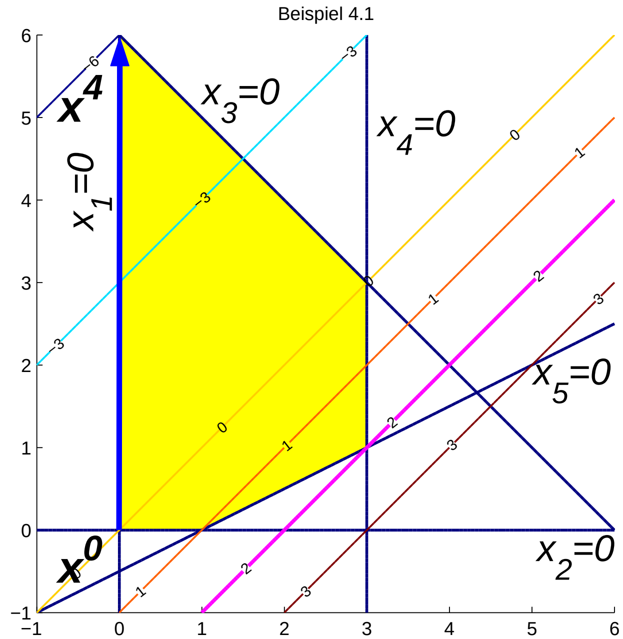
BV

ZBL: $\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.2 Regel: $q_{rs} > \mathbf{0}$ u. ZF Tabl.Koeff. $\leq \mathbf{0}$

ZBL: $\boldsymbol{x}^0$

1	$-x_1$	$-x_2$	
$\mathbf{0}$	-1	$1 > 0$	$= z \longrightarrow \max$
6	1	$\langle \mathbf{1} \rangle$	$= x_3$
3	1	0	$= x_4$
1	1	$\langle \mathbf{-2} \rangle$	$= x_5$



BL: $\boldsymbol{x}^6$

1	$-x_1$	$-x_5$	
$\mathbf{1/2}$	$-1/2$	$1/2$	$= z$
$13/2$	$3/2$	$1/2$	$= x_3$
3	1	0	$= x_4$
$\boxed{\mathbf{-1/2}}$	$-1/2$	$-1/2$	$= x_2$

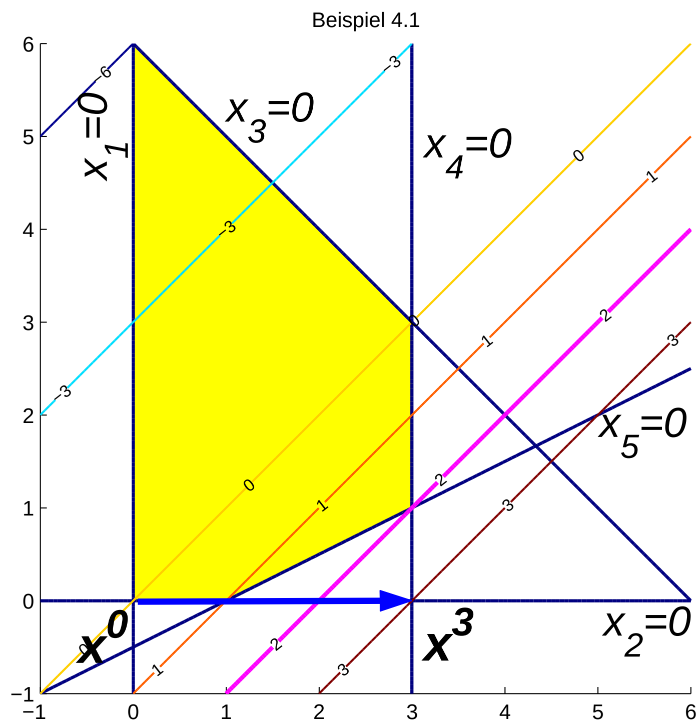
ZBL: $\boldsymbol{x}^4$

1	$-x_1$	$-x_3$	
$\boxed{\mathbf{-6}}$	-2	-1	$= z$
6	1	1	$= x_2$
3	1	0	$= x_4$
13	3	2	$= x_5$

3.3 Regel: $q_{rs} > 0$ und ???

ZBL: $\boldsymbol{x}^0$

1	$-x_1$	$-x_2$	
0	-1	1	$= z \to \max$
6	$\langle 1 \rangle$	1	$= x_3$
3	$\langle 1 \rangle$	0	$= x_4$
1	1	-2	$= x_5$



BL: $\boldsymbol{x}^3$

1	$-x_4$	$-x_2$	
3	1	1	$= z$
3	-1	1	$= x_3$
3	1	0	$= x_1$
$\boxed{\mathbf{-2}}$	-1	-2	$= x_5$

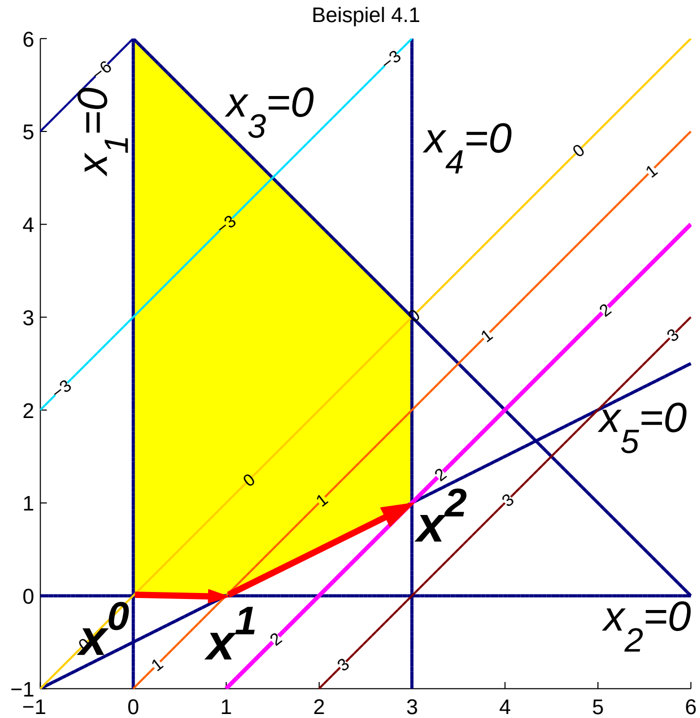
BL: $\boldsymbol{x}^8$

1	$-x_3$	$-x_2$	
6	1	2	$= z$
6	1	1	$= x_1$
$\boxed{\mathbf{-3}}$	-1	-1	$= x_4$
$\boxed{\mathbf{-5}}$	-1	-3	$= x_5$

3.3 Regel: $q_{rs} > 0$ und Engpass-Bedingung

ZBL: $\boldsymbol{x}^0$

1	$-x_1$	$-x_2$	
0	-1	1	$= z \to \max$
6	1	1	$= x_3$
3	1	0	$= x_4$
1	$\langle 1 \rangle$	-2	$= x_5$



ZBL: $\boldsymbol{x}^1$

1	$-x_5$	$-x_2$	
1	1	-1	$= z$
5	-1	3	$= x_3$
2	-1	$\langle 2 \rangle$	$= x_4$
1	1	-2	$= x_1$

ZBL: $\boldsymbol{x}^2 = \hat{\boldsymbol{x}}$

1	$-x_5$	$-x_4$	
2	$1/2$	$1/2$	$= z$
2	$1/2$	$-3/2$	$= x_3$
1	$-1/2$	$1/2$	$= x_2$
3	0	1	$= x_1$

3.4 Optimalitätstest bzw. Unlösbarkeit

Optimalitätskriterium

ZF-Zeile: $-\boldsymbol{q}^0 \geq \boldsymbol{0}$

Absolut-Spalte: $\boldsymbol{q}_0 \geq \boldsymbol{0}$

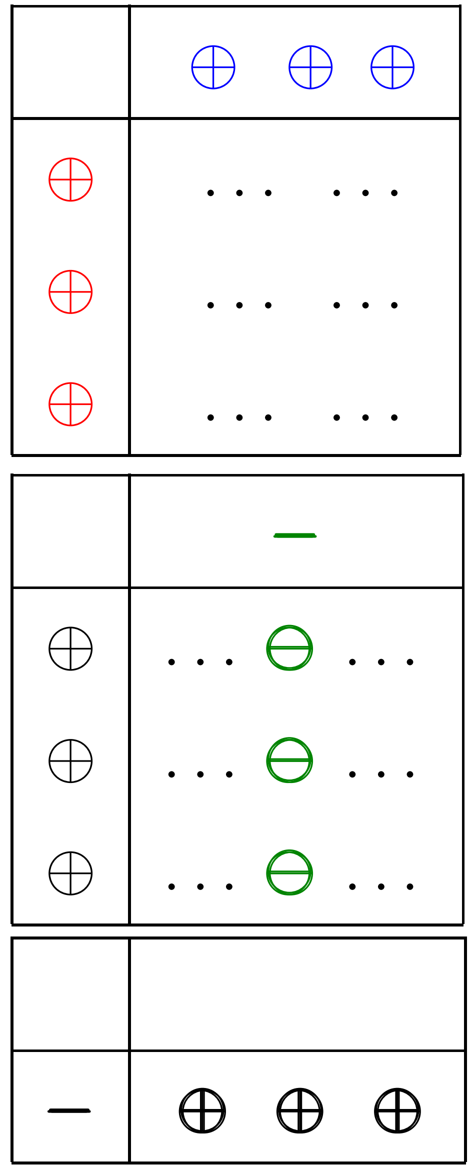
$\hat{\boldsymbol{x}}_I = \boldsymbol{q}_0, \ \hat{\boldsymbol{x}}_J = \boldsymbol{0}, \ \hat{\boldsymbol{x}} \in \widehat{M}$

Unbeschränktheit der ZF

$$M \neq \emptyset, \qquad \sup_{x \in M} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = +\infty$$

Leerer zulässiger Bereich

$$M = \emptyset$$



3.5 Kleinste Kosten- u. Antizyklus-Regel

Kleinste Kosten-Regel:

Wähle Pivotspalte s mit minimalem ZF-Zeilen-Koeffizient

$$q_{0s} := \min_{j \in J} q_{0j}$$

Antizyklus-Regel

Zu Beginn alle Variablen durchnummerieren.
Bei mehrdeutiger Auswahlmöglichkeit
für Zeile r oder Spalte s stets

die Variante mit dem kleinsten Index nehmen.

3.6 Simplex-Algorithmus

Algorithmus P: (Primaler Simplexalgorithmus)

Voraussetzung: Starttableau mit $\boldsymbol{q}_0 \geq \mathbf{0}$ (ZBL)

S1. **if** $-\boldsymbol{q}^0 \geq \mathbf{0}$ **then** ZBL $\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{q}_o, \boldsymbol{x}_J = \mathbf{0}$ ist optimal mit Optimalwert $z = q_{oo}$ von ZF, **STOPP**.

S2. Bestimme $J_1 \subseteq J$ mit $(-q_{0j}) < 0$ für $j \in J_1$

if $\exists j \in J_1 : \boldsymbol{q}_j \leq 0$ **then**

$\sup\limits_{\boldsymbol{x} \in M} z(\boldsymbol{x}) = +\infty$, ZF unbeschränkt, **STOPP**.

S3. Spaltenindex $s = \min J_1$

Zeilenindex $r = \min I_1$ mit Engpass-Indexmenge

$$I_1 := \left\{ \rho \in I \;\middle|\; \frac{q_{\rho o}}{q_{\rho s}} = \min \left\{ \frac{q_{io}}{q_{is}} \;\middle|\; q_{is} > 0, i \in I \right\} \right\}$$

JT mit q_{rs}, **goto S1.**

3.7 Konvergenzsatz

Satz: Der Algorithmus P ist endlich. Er endet entweder mit einer optimalen ZBL (Ecke) oder zeigt die Unbeschränktheit von ZF an.

Bem.: Spalten-Index-Auswahl

S3$_{mod}$**:** Spalte: Kleinste Kosten-Regel
Zeile: Wie in **S3.**

Vorteil: Verfahren oft viel schneller
Nachteil: Zyklen bei ausgearteten ZBL möglich
damit keine Konvergenz gesichert

Bem.: andere Antizyklen-Regeln:
lexikographischer Simplex, ...

3.8 Beispiel mit Zyklus

Auswahlregel: S3$_{mod}$ $\Rightarrow$ Zyklus nach 6 Iterationen,
S3 Lösung nach 6 Iterationen

Beachte !! Lösung mit 2 Iterationen erreichbar durch

$$x_1 \leftrightarrow x_6,\; x_3 \leftrightarrow x_7$$

$$\begin{array}{c|ccccc|l}
1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & \\
\hline
0 & -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & = z \to \text{max} \\
\hline
0 & \langle 1/4 \rangle & -8 & -1 & 9 & = x_5 \\
0 & 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & = x_6 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & = x_7 \\
\hline
\end{array}$$

Benutzung von PSIMPLEX:($x_5 := y_1,\; x_6 := y_2,\; x_7 := y_3$)
Lösung: $\boldsymbol{x}^T = (1, 0, 1, 0, 3/4, 0, 0)$, $z_{\max} = 5/4$

4. Zur Geometrie des Simplex-Algorithmus

Zulässige Richtungen $\boldsymbol{d}$ in $\boldsymbol{x} \in M$: $\quad \exists \varepsilon > 0 : \boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{d} \in M$

bilden abgeschl. konv. Kegel K_{zul}

Anstiegsrichtungen: $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{d} > 0$

bilden offenen Halbraum $\mathrm{int} H_+$

Brauchbare Richtungen $\boldsymbol{d}$ in $\boldsymbol{x} \in M$: $\quad \boldsymbol{d} \in K_{zul} \cap \mathrm{int} H_+ =: K_b$

bilden konv. Kegel (i.a. nicht abgeschl.)

Charakterisierung für ZBL (Extremalpunkte):

$\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{Q}(-\boldsymbol{x}_J)$ mit $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

Parametrische Darstellung

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{Q}(-\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{q}_0 + (-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{\lambda} \qquad = \mathbf{0} + (+\boldsymbol{E})\boldsymbol{\lambda}$$

"Parametervektor" $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ (!! nicht explizit bekannt)

Satz: Vor. $\boldsymbol{x}_I = \boldsymbol{q}_0 > 0, \boldsymbol{x}_j \geq \mathbf{0}$. Beh.: $\boldsymbol{x}$ opt. ZBL $\Rightarrow \boldsymbol{q}^0 \geq \mathbf{0}$.