$\mathcal{C} = 4.5$

Segundo

SISTEMAS NUMÉRICOS, ~~Primer~~ parcial

Nombre: Gabriel José Alvarez Coral Nota: ____________

Escriba sus soluciones en el espacio proporcionado, sea ordenado y escriba legiblemente. Usted será calificado no solo por la exactitud de su respuestas, sino por la claridad con la que las expresa.

1. (10pts) Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente. Sea $-A = \{-x \mid x \in A\}$; muestre que

$$\inf A = -\sup(-A)$$

~~Sea~~ ~~Como~~ ~~$\inf A \leq x$ para todo $x \in A$ tenemo~~

Como A está acotado inferiormente y es no vacío, por el teorema de completez, A tiene ínfimo. Como $\inf A \leq x$ para todo $x \in A$, o equivalentemente $-\inf A \geq -x$ para todo $x \in A$, es decir, $-\inf(A)$ es cota superior de $-A$.

1.0

Supongamos que existe una cota superior de $-A$ menor que $-\inf(+A)$ ~~…~~ ~~entonces~~. Sea $y < -\inf A$, $\Rightarrow -y \geq \inf A$, y $y \geq -x$ $\forall x \in A$. por definición de cota superior. Pero si $-y < x$ y $-y \geq \inf A$ esto implica que y es una cota inferior de A más grande que el ínfimo, luego $-\inf A = \sup(-A)$ $\Rightarrow$ $\inf A = -\sup(-A)$

contradicción

2. (10pts) Suponga que el desarrollo decimal de $\frac{1}{n}$ es periódico de longitud $n-1$. Muestre que 10^{n-1} es la primera entre las potencias $10, 10^2, 10^3, \ldots$ que tiene un residuo 1 al dividirse por n.

Sea $0,\overline{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}} = \frac{1}{n}$, el desarrollo decimal de $1/n$, con $a_i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

si multiplicamos ~~por una potencia de la menor~~ por 10^{n-1}, ~~obtenemos un número racional~~. ~~el cual es la~~ ~~luego~~

$$10^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}, a_1 a_2 \ldots a_{n-1}, \text{ de donde.}$$

0.5

$$\frac{10^{n-1}}{n} - \frac{1}{n} = \frac{10^{n-1} - 1}{n} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \Rightarrow 10^{n-1} - 1 = n \cdot (a_1 a_2 \cdots a_{n-1}),$$

lo cual por definición es $10^{n-1} \equiv_n 1$.

porqé es la mínimo?

3. (10pts) Un número natural n es *perfecto* si es igual a la suma de sus divisores salvo por n mismo (ej. 6 y 28 son perfectos pues $1 + 2 + 3 = 6$ y $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$). Suponga que $2^p - 1$ es un número primo, muestre que $m = 2^{p-1}(2^p - 1)$ es un número perfecto.

Como $m = 2^{p-1}(2^p - 1)$, ~~notamos que~~ ... ~~luego~~

~~luego todos los factores de m son múltiplos de 2~~

Como 2^{p-1} divide a m, todos los múltiplos de $2^0, 2^1, \ldots, 2^{p-2}, 2^{p-1}$ dividen a m y como $2^p - 1$ es primo, tenemos todos los divisores, luego.

$$\sum_{k=0}^{p-1} 2^k + (2^p - 1)\cdot\sum_{k=0}^{p-2} 2^k,$$ pues el número en sí no cuenta.

de donde notamos que son sumas geométricas

$$\sum_{k=0}^{p-1} 2^k = 2^p - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{p-2} 2^k = 2^{p-1} - 1, \text{ luego.}$$

10

$$2^p - 1 + (2^p - 1)\cdot(2^{p-1} - 1) = (2^p - 1)(2^{p-1}), \text{ luego}$$

m es perfecto.

4. (10pts) Demuestre la validez del siguiente criterio de divisibilidad por 7. Sea $n \in \mathbb{N}$, si $n = 10a + b$ con $0 \leq b \leq 9$, entonces n es divisible por 7 si y sólo si $a - 2b$ es divisible por 7. Use el criterio de forma sucesiva para mostrar que $7|37394$.

"$\Rightarrow$": Sea $n = 10a + b$ y n divisible por 7, entonces $n = 7k = 10a + b$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Agrupando tenemos $7(k - a) = 3a + b$, luego $7 | 3a + b$. Como $7 | 10a + b$ y $7 | 3a + b$, 7 divide cualquier combinación lineal de ellos, en particular, $7 | (10a + b - 3\cdot(3a + b)) \Rightarrow 7 | a - 2b$.

10

"$\Leftarrow$": Sea $a - 2b$ divisible por 7, entonces $a - 2b = 7k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. agrupando $8a + 5b = 7(k + a + b)$. Como $7 | 8a + 5b$ y $7 | a - 2b$. 7 divide a cualquier combinación lineal de ellos, en particular $7 | 8a + 5b + 2\cdot(a - 2b) = 10a + b = n$.

- $37394 = 10\cdot 3739 + 4 \qquad 3739 - 8 = 3731 \qquad 3731 = 373\cdot 10 + 1 \qquad 373 - 2 = 371$
$371 = 37\cdot 10 + 1 \qquad 37 - 2 = 35$, lo cual es divisible por 7.

5. (10pts) Decida si la afirmación es falsa **F** o verdadera **V**. No es necesario justificar

   a) $\boxed{\text{F}}$ Sean $n, a, b, c \in \mathbb{Z}$ tal que $ab \equiv ac \pmod{n}$, entonces necesariamente $b \equiv c \pmod{n}$

   b) $\boxed{\text{V}}$ Si $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, entonces existe un número trascendente c tal que $a < c < b$.

   c) $\boxed{\text{F}}$ Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, no vacíos y acotados, entonces $\inf(A) \leq \inf(B)$

   d) $\boxed{\text{F}}$ Si $a, b \in \mathbb{R}$ son irracionales, entonces necesariamente $a + b$ también es irracional.

   e) $\boxed{\text{F}}$ Si $a \in \mathbb{R}$, tal que su desarrollo decimal es infinito no periódico, entonces a no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros.

10