Taller 1 - Métodos de Raíces

Camilo Ruiz[1], Alex Barreto[2], and Sebastian Roberts[3]

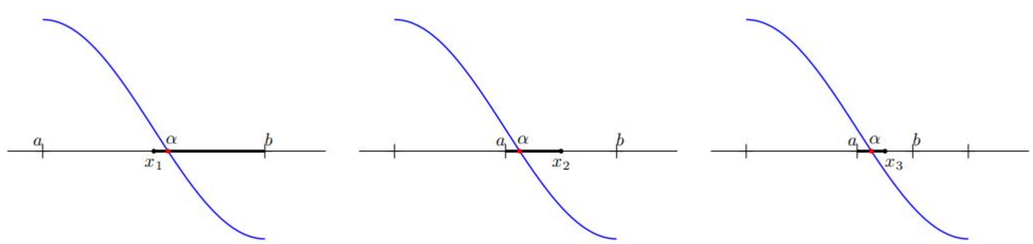
[1]ruizcamilo@javeriana.edu.co
[2]barreto.alex@javeriana.edu.co
[3]sroberts@javeriana.edu.co

Agosto del 2019

1. Método de Bisección

el método de bisección consiste en lo siguiente:

- 1. Subdividir en dos partes el intervalo en que se sabe que la función cambia de signo y tiene una sola raíz.
- 2. Averiguar en cual de las dos mitades se encuentra la raiz y descartar la otra mitad del intervalo.
- 3. Reiniciar este proceso con el subintervalo elegido.
- 4. Continuar con este proceso hasta que el subintervalo elegido tenga una longitud lo suficientemente pequeña como para que cualquiera de sus puntos sea una aproximación aceptable de la solución. La elección óptima como aproximación es, entonces, el punto medio del subintervalo.



- **Entrada(s)**: E: tolerancia, va: Inicio del Intervalo, vb: Fin del Intervalo.
- **Salidas**: c: Valor cercano a la raíz de la ecuación.

2. Método de Punto Fijo

Un punto fijo de una función g, es un número p tal que $g(p) = p$. El problema de encontrar las soluciones de una ecuación $f(x) = 0$ y el de encontrar los puntos fijos de una función $h(x)$ son equivalentes en el siguiente sentido: dado el problema de encontar las soluciones de una ecuación $f(x) = 0$, podemos definir una función g con un punto fijo p de muchas formas; por ejemplo, $f(x) = x - g(x)$. En forma inversa, si la función g tiene un punto fijo en p, entonces la función definida por $f(x) = x - g(x)$ posee un cero en p. El método de punto fijo inicia con una aproximación inicial x_0 y $x_{i+1} = g(x_i)$ genera una sucesión de aproximaciones la cual converge a la solución de la ecuación $f(x) = 0$. A la función g se le conoce como función iteradora. Se puede demostrar que dicha sucesión $\langle x_n \rangle$ converge siempre y cuando $|g'(x)| < 1$.

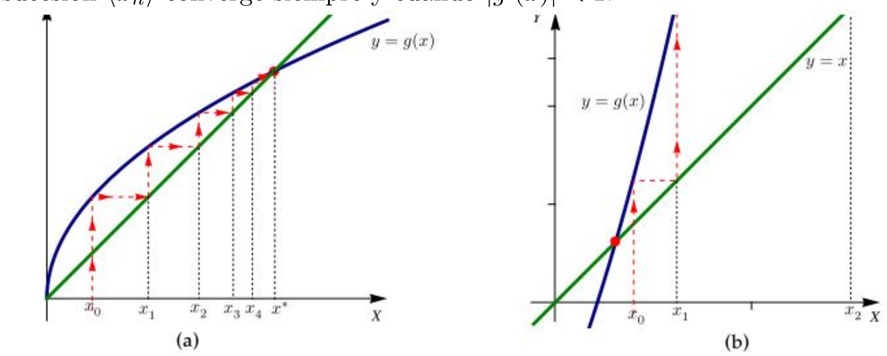


Figura 4.2: Iteraciones del método de punto fijo: convergencia y divergencia. Observe que $|g'(x)| < 1$ en los alrededores de $x = x^*$ en la figura **(a)**

- **Entrada(s)**: E: tolerancia, x0: Valor Inicial.
- **Salidas**: x: Valor final, cercano a la raíz de la ecuación.

3. Método de Newton-Raphson

Consiste en lo siguiente:

- 1.Elegir un punto x0 que esté cerca de la solución.
- 2.Calcular sucesivamente los puntos:

$$x_{n+1} = x_n - (f(x_n)/f'(x_n)) \tag{1}$$

- Para n=0,1,2...
- Hasta conseguir una aproximación lo suficientemente buena.
- Nota: es mucho más rápido que el método de bisección

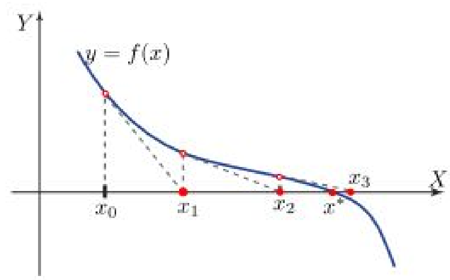


Figura 4.7: Representación simplificada

- **Entrada(s)**: E: tolerancia, x0: Valor Inicial.
- **Salidas**: x: Valor final, cercano a la raíz de la ecuación.

4. Método de Aitken

El método de Aitken es un método de aceleración de la convergencia. Si xn desde n=0 a infinito es una sucesión linealmente convergente al punto p y las diferencias xn-p tienen el mismo signo, entonces para valores suficientemente grandes de n tenemos:

$$\frac{x_{n+1}-p}{x_n-p} \approx \frac{x_{n+2}-p}{x_{n+1}-p}.$$

Al despejar p, nos da:

$$p = (x_n) - (((\Delta x)_n)^2)/(\Delta^2 x)_n \tag{2}$$

Con lo cual se muestra la aceleración de la convergencia, y en particular se ve un caso de transformación no lineal de una sucesión.

- **Entrada(s)**: E: tolerancia, x0: Valor Inicial.
- **Salidas**: x: Valor final, cercano a la raíz de la ecuación.

5. Método de Steffensen

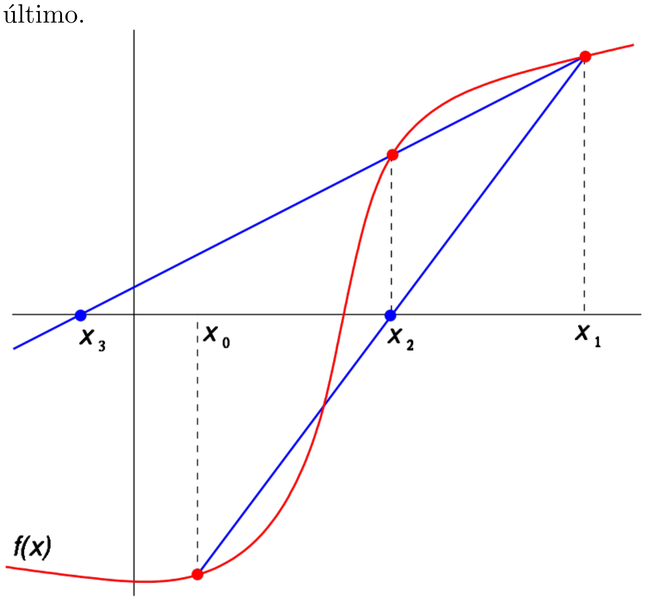
Cuando se aplica el método de Aitken a una sucesión obtenida mediante una iteración de punto fijo se conoce como método de Steffensen. Este metodo calcula el siguiente punto de interacción a partir de la expresión:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{[g(x_n) - x_n]^2}{g(g(x_n)) - 2g(x_n) + x_n}.$$

- **Entrada(s)**: E: tolerancia, x0: Valor Inicial.
- **Salidas**: x: Valor final, cercano a la raíz de la ecuación.

6. Método de Secante

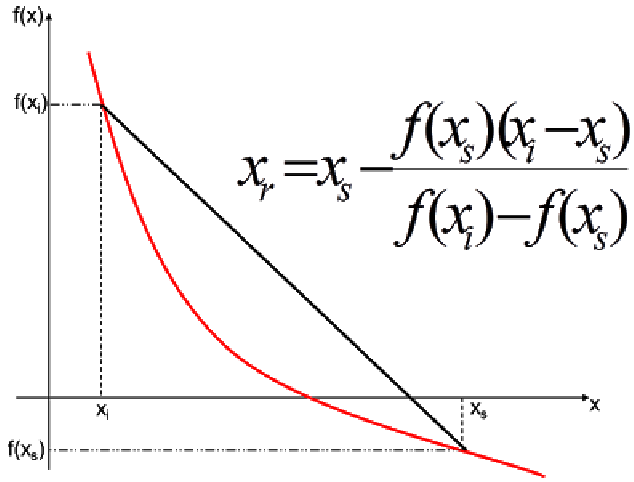
Es un método para encontrar los ceros de una función de forma iterativa. Es una variación del método de Newton-Raphson donde en vez de calcular la derivada de la función en el punto de estudio, teniendo en mente la definición de derivada, se aproxima la pendiente a la recta que une la función evaluada en el punto de estudio y en el punto de la iteración anterior. Este método es de especial interés cuando el coste computacional de derivar la función de estudio y evaluarla es demasiado elevado, por lo que el método de Newton no resulta atractivo. En otras palabras, el método de la secante es un algoritmo de la raíz de investigación que utiliza una serie de raíces de las líneas secantes para aproximar mejor la raíz de una función f. El método de la secante se puede considerar como una aproximación en diferencias finitas del método de Newton-Raphson. Sin embargo, este método fue desarrollado independientemente de este último.



- **Entrada(s)**: E: tolerancia, x0: Valor Inicial, va: Inicio del rango de la linea secante, vb: fin rango de la recta secante.
- **Salidas**: x: Valor final, cercano a la raíz de la ecuación.

7. Método de Posición Falsa

El método de la falsa posición pretende conjugar la seguridad del método de la bisección con la rapidez del método de la secante. Este método, como en el método de la bisección, parte de dos puntos que rodean a la raíz f(x) = 0, es decir, dos puntos x0 y x1tales que f(x0)f(x1) ¡0. La siguiente aproximación, x2, se calcula como la intersección con el eje X de la recta que une ambos puntos (empleando la ecuación del método de la secante). La asignación del nuevo intervalo de búsqueda se realiza como en el método de la bisección: entre ambos intervalos, [x0,x2] y [x2,x1], se toma aquel que cumpla f(x)f(x2) ¡0. En la figura se representa geométricamente este método.



- **Entrada(s)**: E: tolerancia, x0: Valor Inicial, va: Inicio del rango, vb: fin del rango.
- **Salidas**: x: Valor final, cercano a la raíz de la ecuación.

8. Método de Taylor

El método de Euler lo hemos deducido de la definición de derivada, pero también puede obtenerse a partir del desarrollo de Taylor de orden n = 1 de la función y(t) en el punto tk. Podemos encontrar un método que mejore la solucion del problema, si el desarrollo de Taylor se extiende hasta el orden n.

Si definimos

$$T^{(n)}(t_i, y_i) = f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, y_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y_i)$$

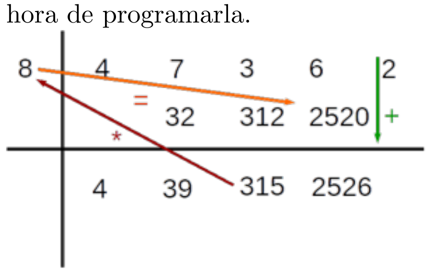
así por ejemplo:

$$\begin{aligned}
T^{(1)}(t_i, y_i) &= f(t_i, y_i) \\
T^{(2)}(t_i, y_i) &= f(t_i, y_i) + \tfrac{h}{2} f'(t_i, y_i) \\
T^{(3)}(t_i, y_i) &= f(t_i, y_i) + \tfrac{h}{2} f'(t_i, y_i) + \tfrac{h^2}{3!} f''(t_i, y_i) \\
T^{(4)}(t_i, y_i) &= f(t_i, y_i) + \tfrac{h}{2} f'(t_i, y_i) + \tfrac{h^2}{3!} f''(t_i, y_i) + \tfrac{h^3}{4!} f'''(t_i, y_i)
\end{aligned}$$

- **Entrada(s)**: E: tolerancia, x0: Valor Inicial.
- **Salidas**: x: Valor final, cercano a la raíz de la ecuación.

9. Método de Horner

El método de Horner, también llamado la regla de Horner es un algoritmo que permite calcular el resultado de un polinomio para un determinado valor de x. Aunque la solución de un polinomio para un valor específico de x es una tarea sencilla el algoritmo reduce la cantidad de operaciones necesarias para llegar al resultado lo que la convierte en una técnica más eficiente y más deseable a la hora de programarla.



- **Entrada(s)**: x0: Valor Inicial, c:factores del polinomio.
- **Salidas**: x: Valor resultante de la ecuación.