Informe Tarea 6

Pregunta 1

1.1.-Introducción:

Se busca resolver la ecuación de Fisher-KPP, que modela un proceso de difusión-reacción en una especia animal en 1-D:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2$$

la variable n, dependiente de la posición y el tiempo describe la densidad de la especie.
μn: tendencia de la especie a crecer desmedidamente
$-\mu n^2$: pasado un tiempo se comienza a competir por los recursos, lo que tenderá a disminuir la cantidad
$\gamma \nabla n$: tendencia de la especie a dispersarse para buscar recursos

Resolveremos el problema con las siguientes condiciones iniciales:

$$n(t,0) = 1$$
$$n(t,1) = 0$$
$$n(0,x) = e^{-x^2/0.1}$$

1.2.-Procedimiento:

Se discretiza la función ϕ (representa a la función n(x,t), con j discretizando el espacio y n el tiempo) utilizando el método de Crank-Nicolson para la derivada espacial, y utilizando el método de euler explícito para el resto de la ecuación, quedando:

$$\frac{\phi_{n+1}^{j}+\phi_{n}^{j}}{h}=\frac{\gamma}{2}(\frac{\phi_{n+1}^{j+1}-2\phi_{n+1}^{j}+\phi_{n+1}^{j-1}}{h^2}+\frac{\phi_{n}^{j+1}-2\phi_{n}^{j}+\phi_{n}^{j-1}}{h^2})+\mu\phi_n^j-\phi_n^j\phi_n^j$$

juntando a un lado los términos con subíndice n+1 a la izquierda y los con subíndice n a la derecha obtenemos:

$$-r\phi_{n+1}^{j+1}+(1+2r)\phi_{n+1}^{j}-r\phi_{n+1}^{j-1}=r(\phi_n^{j+1}+\phi_n^{j-1})+(\varepsilon\mu(1-\phi_n^j)+1-2r)\phi_n^j$$

Donde nos aparece la variable r que corresponde :

$$r=\frac{\gamma\epsilon}{2h^2}$$

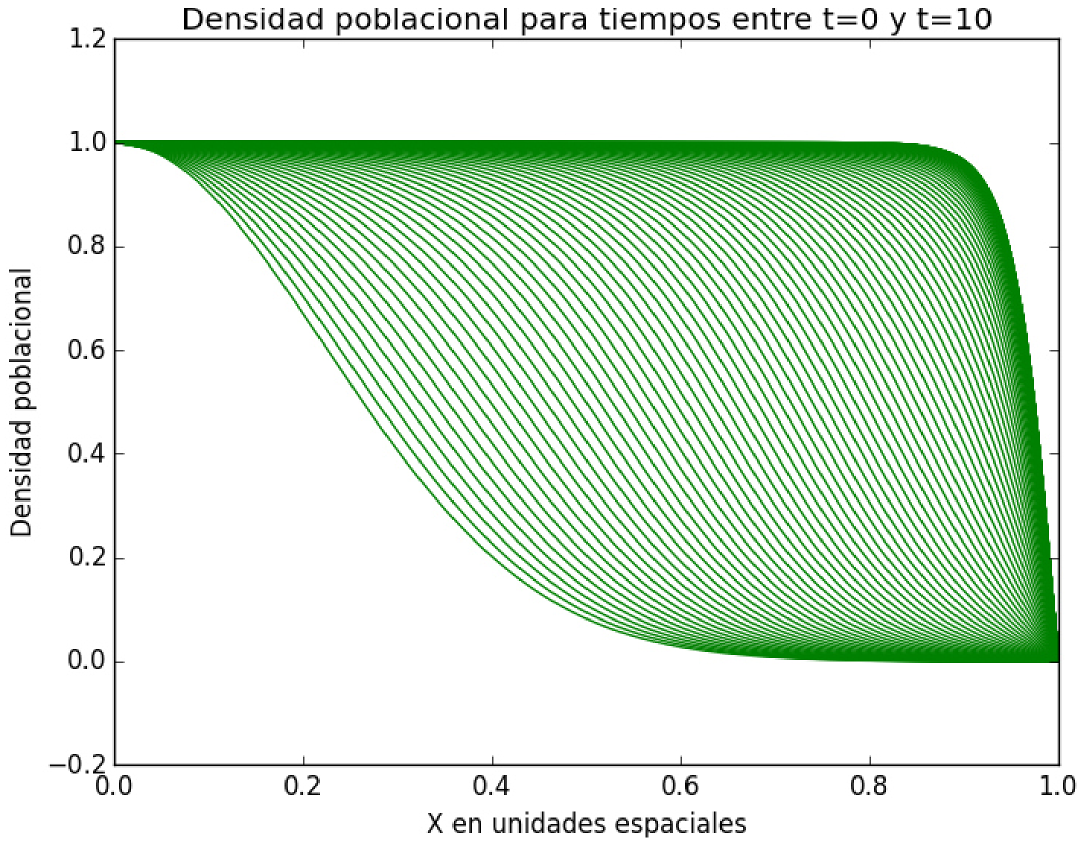
Podemos observar que el único cambio de una función solamente difusiva es el término extra que se le agrega al lado derecho, lo que implica que el único término a cambiar en el método de crank-nicolson es la expresión a usar de B_k .

Para integrar la ecuación utilizaremos arreglos para guardar los datos de cada iteración, obteniendo finalmente una matriz en que cada fila serán los valores de la función para una iteración, que corresponderá a los pasos temporales, siendo la primera fila las condiciones iniciales del problema.

$$\Phi_k=\alpha_k\Phi_{k+1}+\beta_k$$

1.3.-Resultados:

Graficando los valores para t desde 0 a 10, obtuvimos:



1.4.-Conclusiones:

La densidad poblacional pasado el tiempo comienza a tender al valor 1 en todo el espacio, lo que tiene mucho sentido ya que de los dos puntos de equilibrio : 0 y 1, 1 es el único estable.

Pregunta 2

2.1.-Introducción:

Se busca resolver Newell-Whitehead-Segel que es otra ecuación de reacción-difusión que describe en este caso fenómenos de convección y combustión:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3)$$

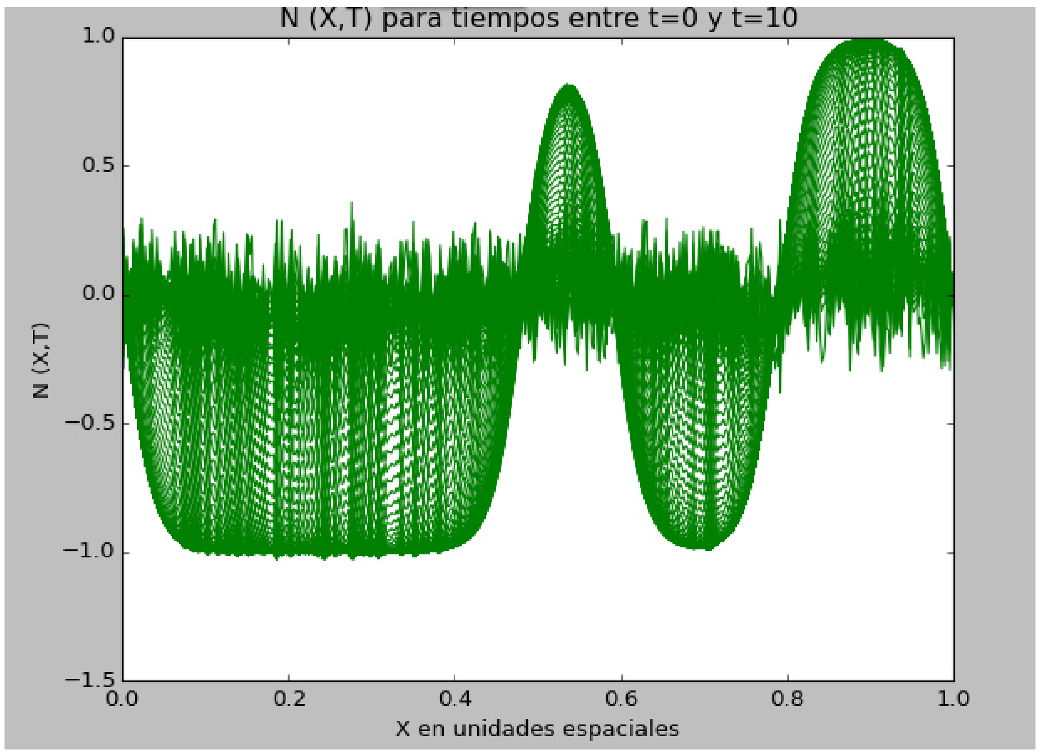
Resolveremos con las condiciones iniciales siguientes:

$$n(t,0) = 0$$
$$n(t,1) = 0$$
$$n(0,x) = \texttt{np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)}$$

2.2.-Procedimiento:

Para resolver esta ecuación usamos casi el mismo método anteriormente, en donde solo hay que cambiar un valor de los valores para la expresión de B_k, que corresponde al cambio del valor cuadrático de n por uno cúbico. Además de cambiar las condiciones iniciales del problema, que corresponden a una serie random de números y las condiciones de borde.
Para los valores random se utiliza una semilla con valor 10.

2.3.-Resultados:



2.4.-Conclusiones:

Vemos que la función evoluciona llevando a los valores de densidad hacia los puntos de equilibrio -1 y 1 distribuidos en el espacio. Esto obedece a que en estos puntos se anulan los términos de reacción, dejando solo los términos de difusión.