Lab#03

Autómatos Finitos

Objectivos:

- Introdução ao conceito de Autómato Finito e notações utilizadas na sua representação;
- Classificação de AF quanto ao seu comportamentos: Determinísticos (AFD) ou Não Determinísticos (AFN)
- Aprendizagem dos conceitos através da realização de alguns exercícios;

3.1 Introdução

Considere um interruptor comum que tem dois estados possíveis: `on` e `off` (os estado `off` é o estado inicial). Sobre este interruptor podem ser realizadas duas acções: `ligar` e `desligar`. O funcionamento deste interruptor pode ser descrito através do autómato finito apresentado na figura 3.1.

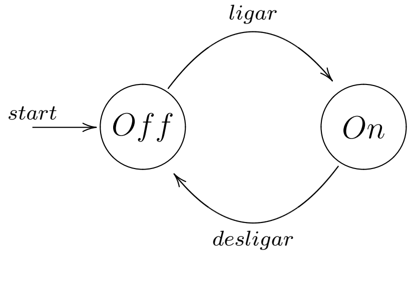

Figura 3.1: Autómato de um interruptor

Um autómato finito ou máquina de estados, é um formalismo, que permite representar de forma clara, um qualquer processo composto por um conjunto de estados, e transições entre esses estados. Mais formalmente um autómato finito (AF) é representado por um tuplo:

$$A = (S, \Sigma, s_0, F, \delta), \text{ no qual:}$$

- S é um conjunto finito de estados não vazio;
- Σ é o alfabeto de entrada, um conjunto finito de símbolos não vazio;
- s_0 é o estado inicial, um elemento de S;
- F é conjunto de estados finais. F é um subconjunto de S;
- δ é a função de transição, recebe como argumentos um estado e um símbolo de entrada, e devolve um novo estado (eventualmente o mesmo): $\delta : S \times \Sigma \rightarrow S$;

Considere-se um AF capaz de processar números binários terminados em "10" (equivalente à expressão regular "(0|1)*10").

$$A = (\{s_0, s_1, s_2\}, \{0, 1\}, s_0, \{s_2\}, \delta) \tag{3.1.1}$$

onde,

$$\delta(s_0, 0) = \{s_0\} \tag{3.1.2}$$
$$\delta(s_0, 1) = \{s_0, s_1\} \tag{3.1.3}$$
$$\delta(s_1, 0) = \{s_2\} \tag{3.1.4}$$

Este autómato finito é representável por uma tabela de transições como a seguir apresentado (ver tabela 3.1).

Tabela 3.1: Tabela de transições do AF

	0	1
$\rightarrow s_0$	$\{s_0\}$	$\{s_0, s_1\}$
s_1	$\{s_2\}$	$\emptyset$
$*s_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Este autómato finito também pode ser representado graficamente, como a seguir se exemplifica (ver figura 3.2).

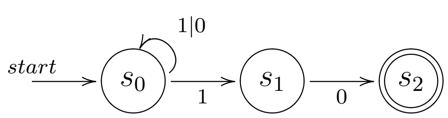

Figura 3.2: Representação gráfica do AF

A simbologia utilizada na representação gráfica do autómato é explicitada na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Simbologia da representação gráfica de um AF

$\longrightarrow s_0$	Estado inicial s_0
s_1	Estado s_1
$\xrightarrow{0}$	Transição que consome o símbolo 0
s_3	Estado final s_3

Aquando do processamento de uma frase por um AF acontece uma das seguintes situações:

- Após processar o último símbolo está num estado final: o autómato pára e a frase é aceite;
- Após processar o último símbolo está num estado não final: o autómato pára e a frase rejeitada;
- O autómato está num estado em que para o símbolo seguinte não existe função de transição: o autómato pára e a frase rejeitada;

3.2 Classificação de Autómatos Finitos

Um autómato finito diz-se determinístico (AFD) se, em cada um dos seus estados e perante um símbolo, puder transitar para um único estado, *i.e.*,

$$\forall s_1, s_2, s_3, a : (s_1, a, s_2) \in \delta \wedge (s_1, a, s_3) \in \delta \rightarrow s_2 = s_3 \qquad (3.2.1)$$

Caso contrário, diz-se não determinístico (AFN).
No que diz respeito à comparação entre AFDs e AFNs pode-se acrescentar que:

- Os AFD são mais rápidos (tempo de computação) que os AFN;
- Os AFN ocupam muito menos espaço (têm menos estados) que os AFD;
- Um AFD é um caso particular de AFN em que para qualquer estado K e qualquer símbolo de entrada x, só pode haver uma transição a partir de K.

3.3 Propostas de exercícios

a) Represente graficamente e através da tabela de transições, os AFN capazes de reconhecer as seguintes linguagens:

1) uma string em a,b em que todas as strings acabam em “b” e começam em “a”;
2) String em a,b,c,d em que o primeiro “b” é precedido de um “a”;
3) Todas as strings que contêm as cinco vogais por ordem alfabética consecutivas.

b) Considere a seguinte expressão regular: (a|b)*abb

1) Represente graficamente o autómato correspondente.
2) Defina formalmente o autómato A de acordo com a fórmula $A = (S, \Sigma, s_0, F, \delta)$.
3) Elabore a tabela de transições respectiva.

c) Represente graficamente e através da tabela de transições, os AF capazes de reconhecer as seguintes expressões regulares e indique se são Determinísticos ou Não Determinísticos:

1) aa*|bb*
2) (a*|b*)*
3) (a|b)*abb(a|b)*
4) a(a|b)*

d) Represente um autómato finito capaz de reconhecer números inteiros.

e) Represente um autómato finito capaz de reconhecer números reais no seguinte formato: ‘inteiro’,‘inteiro’. O número real a reconhecer deverá ter sempre uma vírgula e uma casa decimal, não sendo obrigatória a existência de uma parte inteira.

f) Analise o seguinte código escrito em linguagem C e compare-o com o autómato desenvolvido no exercício anterior, retire conclusões:

```c
#include<stdio.h>

void main()
{
  int a;
  int real=1;
```

```
  char estado='A';
  int erro=0;

  printf("Introduza dados:");
  while(((a=getchar())!='\n') && (erro==0))
    switch (estado)
    {
      case 'A' :
                 if ((a>='0') && (a<='9'))
                   estado='A';
                 else
                   if (a==',')
                     estado='B';
                   else
                     erro=1;
            break;

      case 'B' :
                 if ((a>='0') && (a<='9'))
                   estado='C';
                 else
                   erro=1;
            break;

      case 'C' :
                 if ((a>='0') && (a<='9'))
                   estado='C';
                 else
                   erro=1;
            break;
    }
  if ((!erro) && (estado=='C'))
    printf("Foi lido um real.\n");
  else
    printf("Não foi lido um real.\n");
}
```

g) Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$, represente as seguintes linguagens utilizando um AF:

1) $L(A) = \{u \in \Sigma^*$: u é um número binário múltiplo de 4$\}$
2) $L(A) = \{u \in \Sigma^*$: 111 é factor de u$\}$

3) L(A) = {u ∈ Σ*: u é um número binário que ou não é par ou é múltiplo de 8}

4) L(A) = {u ∈ Σ*: u tem um número par de 1's}

5) L(A) = {u ∈ Σ*: u é vazia ou tem dígitos todos iguais, sendo de comprimento par as sequências de 0's, e ímpar as sequências de 1's}

6) L(A) = {u ∈ Σ*: u é múltiplo de 4 mas não de 8}

h) Considerando o alfabeto Σ = {A, B, C, ..., Z, a, b, c, ..., z}, represente as seguintes linguagens utilizando utilizando um AF:

1) L(A) = {u ∈ Σ*: u tem sempre pelo menos dois a's juntos}

2) L(A) = {u ∈ Σ*: u começa por um carácter minúsculo e tem no máximo duas maiúsculas}

3) L(A) = {u ∈ Σ*: u começa por uma maiúscula e termina sempre numa vogal}

i) Considerando o alfabeto Σ = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, represente as seguintes linguagens utilizando um AF:

1) L(A) = {u ∈ Σ*: u é uma sequência numérica crescente}

2) L(A) = {u ∈ Σ*: u é potência de 10}

3) L(A) = {u ∈ Σ*: u é múltiplo de 5}

4) L(A) = {u ∈ Σ*: u é um número ímpar}

j) Crie um AF capaz de identificar se uma quantia monetária está de acordo com a tabela 3.3;

Tabela 3.3: Representação de moedas

Moeda	**Exemplo**
Euro	€12,23; €1,00; €2,35; 23,50EUR
Libra	£12.50; £22.12; £22.99
Dólar	$25.13; $5.00; $0.30;
Escudo	12$50; 25$00; 150$00; 0$50