TP de modélisation stochastique - séance 3

Professeur: Olivier Wintenberger. Chargé de TP: Sébastien Farkas, `ISUP CS1`

Thème : Chaîne de Markov et méthodes Monte Carlo NB : Les questions (BONUS) ne sont pas obligatoires.

1. Chaîne de Markov

(a) Introduction aux chaînes de Markov discrètes

1) Programmer une fonction *transition* retournant un état suivant à un état connu d'une chaine de Markov définie par une matrice stochastique. Les fonctions *nrow* , *runif* et *cumsum* pourront être utilisées.

2) Considérons la matrice stochastique P suivante définissant une chaîne de Markov à 3 états.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Créez 3 vecteurs stockant respectivement les états de 3 réalisations de longueur égale à 20 de chaîne de Markov avec la matrice P et un état initial à 1.

3) Représentez sur une même fenêtre graphique ces 3 trajectoires en utilisant la fonction *plot* en spécifiant $type = "s"$.

(b) Introduction à la notion d'irréductibilité

1) Rappelez la définition d'une chaîne de Markov irréductible.

2) La chaîne de Markov définie par P est-elle irréductible ?

3) Considérons la matrice stochastique Q suivante définissant une chaîne de Markov à 4 états.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Générez puis représentez 4 trajectoires de cette chaîne avec les 4 états initiaux possibles.

4) Comparez avec les trajectoires avec les 3 premières trajectoires obtenues à la question précédente. La chaîne de Markov définie par Q est-elle irréductible ?

(c) Introduction à la notion de mesure de probabilité invariante

1) La mesure de probabilité invariante est définit comme la mesure de probabilité invariante par la transposée de la matrice de transition définissant la chaîne de Markov. Lorsqu'elle existe, elle est définie par le vecteur propre associé à la valeur propre 1, si cette valeur propre existe. Comme l'aide de R l'indique, la fonction R *eigen* permet d'obtenir, lorsque cela est possible, les valeurs propres d'une matrice et leurs vecteurs propres associés. Testez la fonction sur la matrice P. Pour récupérer les différentes sorties de la fonction vous pourez utiliser *$values* et *$vectors*.

2) Trouvez la mesure de probabilité invariante de la chaîne de Markov définie par P. Vous pourrez utiliser la fonction t permettant de transposer une matrice. Vérifiez votre résultat en utilisant l'opérateur *%*%* permettant de réaliser un produit matriciel.

(d) Illustration de la loi forte des grands nombres

1) En réalisant une expérience, représentez la convergence des proportions empiriques respectives de passage dans chaque état vers les poids respectifs définis par la mesure de probabilité invariante de la chaîne de Markov définie par P.

2) Créez une fonction retournant la proportion, parmi un certain nombre d'expériences *ntraj*, de présence de chaque état à une certaine étape i également prise en argument. Vous pourrez vous aidez de la fonction *table* permettant de synthétiser un vecteur fini d'entiers.

3) Appliquez la fonction pour remplir une matrice de taille 4×5 dont le terme (i, j) correspond à la proportion du ième état à la jième étape d'intérêt. Avec comme étape d'intérêt de vecteur c(2,3,4,5,10).

4) Au moyen de la fonction *cbind*, ajouterune dernière colonne à la matrice correspondant aux poids de la mesure de probabilité invariante. Représentez cette nouvelle matrice avec la fonction *barplot* en spécifiant l'argument beside=TRUE.

2. Métropolis Hasting

(a) Introduction à l'algorithme de Métropolis Hasting

Nous allons appliquer le principe de l'algorithme de Métropolis Hasting dans l'objectif de simuler suivant une loi normale centrée réduite en dimension 2 à partir d'une loi uniforme sur $(] - alpha; alpha[)^2$, pour $\alpha > 0$ obtenu au moyen de la fonction *runif*.

1) Proposez une fonction permettant de réaliser une trajectoire à partir d'un couple de valeurs initiales. Le résultat de la trajectoire pourra être stockée dans une matrice avec 2 colonnes.

2) Proposez une fonction dérivée de la précédente, qui permet, en plus d'obtenir les trajectoires, d'obtenir d'une part la trajectoire en escalier sous-jacente qui saute d'une valeur 1 dès que l'on change d'état, et d'autre part le rapport entre le nombre de fois où l'on a changé d'état sur le nombre de couple obtenus après la réalisation de l'algorithme (c'est à dire le nombre d'itérations).

(b) Exemple

1) En appliquant la première fonction, illustrez l'influence de alpha et des conditions initiales sur les trajectoires et la vitesse de convergence de la loi forte des grands nombres. Vous pourrez utiliser la fonction *image* avant de supperposer les différentes trajectoires obtenues grâce à le fonction *points*. Vous pourrez prendre $\alpha \in \{0.01; 0.1; 1; 10\}$ et $\{(3, 3); (1, 1)\}$ comme conditions initiales.

2) Pour la condition initiale $(3, 3)$, représentez, pour les différentes valeurs d'alpha, la convergence de la première composante de la trajectoire vers la moyenne théorique.

(c) Optimisation de la convergence

1) Pour la condition initiale $(3, 3)$, en réalisant plusieurs expériences et plusieurs simulations, représentez au moyens de boxplots la variabilité des moyennes estimées de la première composante en fonction des différentes valeurs d'alpha.

2) Conclure sur la valeur d'alpha qui vous semble la plus pertinente.