TP de modélisation stochastique - séance 1 - correction

Professeur: Olivier Wintenberger. Chargé de TP: Sébastien Farkas, `ISUP CS1`

Thème : Simulation de variables aléatoires.

2. Méthodes générales de simulation de variables aléatoires

(a) Simulation selon la méthode de transformation inverse.

Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Sa fonction de répartition, définie sur $\mathbb{R}$ et notée $F_X(x)$, est donnée par $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Cette fonction est inversible et son inverse, notée $F_X^{-1}(u)$ est définie $]0\,;1[$ par $F_X^{-1}(u) = \frac{\log(1-u)}{\lambda}$.

(b) Simulation selon la méthode de rejet.

2) Appliquons cette fonction à la simulation d'une variable suivant une loi normale centrée réduite. En utilisant comme densité instrumentale celle de le loi de Laplace et une constante associée M qu'il conviendra de calculer, simulez n réalisations d'une loi normale centrée réduite.

La densité de la loi de Laplace est donnée par $f_{\mathcal{L}}(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$. La densité d'une loi normale centrée réduite est donnée par $f_{\mathcal{N}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

L'objectif est de chercher M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M * f_{\mathcal{L}}(x) \geq f_{\mathcal{N}}(x)$. Autrement dit, $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{f_{\mathcal{N}}(x)}{f_{\mathcal{L}}(x)}$. Remarquons que le sup peut être calculé uniquement sur les entiers positifs puisque les densités dont symétriques. Cela permet de se débarrasser de la valeur absolue.

$$\frac{f_{\mathcal{N}}(x)}{f_{\mathcal{L}}(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}+x}. \text{ Or, } e^{-\frac{x^2}{2}+x} \leq e^{\frac{1}{2}}. \text{ Donc, } M = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}.$$

4) (BONUS) En modifiant la sortie de la précédente fonction, représentez la convergence lorsque n tend vers l'infini du ratio d'acceptation de la méthode. La valeur de convergence est égale à $\frac{1}{M} \approx 0,76$.

(c) Simulation selon la méthode de ratio rejet :

2) Appliquons cette méthode à la simulation d'une variable suivant une loi normale centrée réduite en utilisant $h(x) = e^{-x^2}$. Simulez n réalisations d'une loi normale centrée réduite.

Rappelons que $C_h = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq \sqrt{h\left(\frac{v}{u}\right)}\}$. L'objectif est de simuler uniformément sur cet espace. Une solution consiste à borner cet espace dans un rectangle.

Posons $x = \frac{v}{u}$, nous obtenons $0 \leq u \leq \sqrt{h(x)}$. En fonction du signe de x, on a donc soit $0 \leq v \leq x\sqrt{h(x)}$ dans le cas positif soit $0 \geq v \geq x\sqrt{h(x)}$ dans le cas négatif. Dans tous les cas, nous pouvons écrire que $-|x|\sqrt{h(x)} \leq v \leq |x|\sqrt{h(x)}$, soit $-\sqrt{x^2 h(x)} \leq v \leq \sqrt{x^2 h(x)}$.

Donc $C_h \subset [0;a] \times [-b;b]$, avec $a = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{h(x)}$ et $b = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{x^2 h(x)}$.

Dans notre exemple, où $h(x) = e^{-x^2}$, nous avons $a = 1$ et $b = \sqrt{\frac{2}{e}}$. La seconde constante s'obtient par exemple en remarquant que $\left(x^2 e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} x(2 - x^2)$.

5) (BONUS) En modifiant la sortie de la précédente fonction, représentez la convergence lorsque n tend vers l'infini du ratio de rejet de la méthode. Quelle est la valeur de cette limite théorique ?

Le ratio d'acceptation est égal au ratio entre cette aire et l'aire du rectangle $[0;a] \times [-b;b]$. Il est montré dans votre cours que l'aire de C_h vaut la moitié de l'intégrale de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$. Cette intégrale vaut $\sqrt{2\pi}$ et l'aire du rectangle vaut $2\sqrt{\frac{2}{e}}$. La valeur de convergence du ratio d'acceptation vaut donc $\frac{\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}{2\sqrt{\frac{2}{e}}} = \frac{\sqrt{\pi e}}{4} \approx 0,73$.

(d) Simulation selon la méthode de Box Muller.

3) (BONUS) En modifiant la sortie de la précédente fonction, représentez la convergence lorsque n tend vers l'infini du ratio de rejet de la méthode. Quelle est la valeur de cette limite théorique ?

Le ratio d'acceptation est égal au ratio entre l'aire du cercle unité et l'aire du rectangle $[-1;1] \times [-1;1]$, soit $\frac{\pi}{4} \approx 0.78$.

(e) Comparaison des méthodes. Dans le cas particulier de la simulation de réalisations selon une loi normale centrée réduite de dimension 1 et selon vos observations des différents ratios de rejet, classez les méthodes de simulations précédemment considérées suivant leurs performances.

Les trois précédentes méthodes permettant de simuler une loi normale centrée réduite tirent profit de la méthode du rejet. En supposant que le coût de chaque itération soit égal dans chaque méthode, plus le taux d'acceptation est élevé et plus le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir n réalisations sera faible. Nous obtenons donc, dans ce cas particulier, le classement suivant :

(a) Box Muller,

(b) Rejet,

(c) Ratio rejet.