Dotikanje največ kvadratov
Kratek opis projekta

Avtorja: Sebastjan Šenk, Ana Marija Okorn

26. november 2021

1 Navodilo

Glede na niz osno vzporednih kvadratov v ravnini poiščite točko v ravnini, ki se dotika čim več kvadratov. Za rešitev te težave uporabite CLP. Izvedite poskuse, da ustvarite kvadrate, ki so vzporedni z osjo, in poiščete optimalne rešitve. Kaj pa iskanje črte, ki se dotika čim več kvadratov?

2 Opis problema in načrt za nadalnje delo

Podano imamo množico, ki vsebuje enotske kvadrate, katerih stranice morajo biti vzporedne koordinatinm osem in njihova dolžina enaka 1. Te kvadrate bova generirala iz naključno izbranih točk na kordinatni ravnini, kjer bo $x_i \in [x_{\min}, x_{\max}]$ in $y_i \in [y_{\min}, y_{\max}]$.Kvadrate bova generirala s pomočjo dolžine stranice. Najprej bova naredila eksperiment z manjšim številom kvadratom, kasneje pa bova pogledala tudi za večje množice kvadratov. S pomočjo celoštevilskega linearnega programiranja (CLP) morava poiskati točko oziroma točke (če jih je več), ki se bo dotikala največ kvadratov. Torej to kar bova iskala bo presek največ kvadratov. Pri risanju kvadratov si bova pomagala s knjižnico Matplotlib v Pythonu. Kasneje pa bova poiskušala poiskati še premico, ki se bo dotikala največ kvadratov. Za to težavo bova za vsako premico $y = kx + m$, za vsak k s pomočjo programa preštela koliko kvadratov premica seka. Pri tem si bova pomagala tudi z logičnimi izrazi, ki jih bova zapisala kot linearne enačbe.

3 CLP program

1. Za iskanje točke, ki se dotika največ kvadratov bova uporabila sledeč CLP:

   Vhodni podatki:

   - n ... število točk, iz katerih zgeneriramo enotske kvadrate

   $$n \in \mathbb{N}$$

   - x_i ... x-koordinata i-te točke
   - y_i ... y-koordinata i-te točke
   - $x_{\min} = \min\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
   - $x_{\max} = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
   - $y_{\min} = \min\{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
   - $y_{\max} = \max\{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

   Spremenljivke:

   - $z_i = 1$, če točka (x, y) je v kvadratu i, sicer je 0, kjer $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ in $i \in \mathbb{N}$

   Iščeva točko (x, y) , za katero velja, da je točka v i-tem kvadratu, če veljajo sledeči pogoji:

   $$x_i \leq x \leq x_i + 1$$

   $$y_i \leq y \leq y_i + 1$$

   Iščemo torej

   $$\max \sum_{i=1}^{n} z_i$$

   pri pogojih:

   $$z_i \in \{0, 1\}; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

   $$x + (1 - z_i)(x_{\max} - x_{\min}) >= x_i$$

   $$x - (1 - z_i)(x_{\max} - x_{\min}) <= x_i + 1$$

$$y + (1 - z_i)(y_{\max} - y_{\min}) >= y_i$$
$$y - (1 - z_i)(y_{\max} - y_{\min}) <= y_i + 1$$

Za začetek si bova problem pogledala v mreži $[0, 10]$ x $[0, 10]$ pri $n = 60$. Kasneje pa si bova ogledala kako se čas algoritma spreminja z večanjem mreže in z večanjem števila kvadratov.

2. Za iskanje premice $y = kx + m$, ki se dotika največ kvadratov bova uporabila sledeč CLP:
   Vhodni podatki:

   - n ... število točk, iz katerih zgeneriramo enotske kadrate

   $$n \in \mathbb{N}$$

   - x_i ... x-koordinata i-te točke
   - y_i ... y-koordinata i-te točke
   - $x_{\min} = \min\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
   - $x_{\max} = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
   - $y_{\min} = \min\{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$
   - $y_{\max} = \max\{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

   Spremenljivke:

   - $z_i = 1$, če premica seka kvadrat i, sicer je 0, kjer $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ in $i \in \mathbb{N}$
   - $u_i = 1$, če premica $y = kx + m$ seka kvadrat i, tako, da je njegovo levo zgornje oglišče nad premico, desno spodnje ogljišče pa pod njo, sicer u_i je 0, kjer $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ in $i \in \mathbb{N}$
   - $v_i = 1$, če premica $y = kx + m$ seka kvadrat i, tako, da je njegovo levo spodnje oglišče pod premico, desno zgornje ogljišče pa nad njo, sicer v_i je 0, kjer $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ in $i \in \mathbb{N}$

Pred tem definiramo in izračunamo še $p_{\max} = k(x_{\max} + 1) + m$ in $p_{\min} = k(x_{\min}) + m$, ki predstavljata maksimalno in minimalno vrednost izmed vseh možnih k in m, ki jih lahko dosežemo.

Iščemo torej

$$\max \sum_{i=1}^{n} z_i$$

pri pogojih:

$$z_i \in \{0, 1\}; i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$z_i <= u_i + v_i$$
$$kx_i + m - (1 - u_i)(p_{\max} - y_{\min}) <= y_i + 1$$
$$k(x_i + 1) + m + (1 - u_i)(p_{\max} - y_{\min}) >= y_i$$
$$kx_i + m + (1 - v_i)(p_{\max} - y_{\min}) >= y_i$$
$$k(x_i + 1) + m - (1 - v_i)(p_{\max} - y_{\min}) <= y_i + 1$$