Aplicación a cadenas de Markov

7 de diciembre de 2022

1 Marco Conceptual

Definición

Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto $x_n : (0, 1, 2, .., n)$ con espacios de tiempo discreto talque S $\subset$ (0,1,2,..,n) que satisface la propiedad de Markov:

$$P(x_{n+1} = x_{n+1})$$

Para cualquier estado $x_0, x_1, ..., x_n$ y cualquier valor entero a partir de $n = 0$, talque la probabilidad de que x_{n+1} tome el valor x_{n+1} dado que el proceso a pasado por los estados $x_0, x_1, ..., x_n$ es simplemente la probabilidad del mismo evento dado x_n.

Lo cual quiere decir que: dado que se conoce la trayectoria del proceso hasta el tiempo n, el estado de la variable $n + 1$ depende únicamente del último valor observado.

Es decir: una cadena de Markov es una secuencia de vectores de probabilidad x_0, x_1, x_2,. . . ,x_n que junto con su matriz estocástica P satisface:

$$x_1 = Px_0,\ x_2 = Px_1\ ,...,\ x_{k+1} = Px_k$$

Notemos que:

$$x_2 = Px_1 \implies \mathrm{x}_2 = Px_1 = P(Px_0) = P^2x_0$$

Lo cual quiere decir que:

$$x_k = P^k x_0$$

De esta forma: definimos a una matriz estocástica P como una matriz nxn de tal forma que cada cadena de Markov o vectores de probabilidad, forman las colúmnas para esta matriz. En este vector: sus entradas $a_{ij} \geq 0$ y la suma de las entradas de sus colúmnas es igual a 1.

Notemos que la razón por la que la suma de las entradas de cada colúmna es 1, se debe a la naturaleza de los estudios probabilísticos, ya que estos en sus estudios toman como base un 100% de datos, adicionalmente a esto, el lector puede ver esto de tal forma que significa que no se pierde información, se aumentan o pierden datos.

Características de una matriz de Markov

Una matriz de Markov tiene a todos los $a_{ij} \geq 0$, donde la suma de cada columna es igual a 1.

(a) $\delta_1 = 1$ es un valor característico de P

(b) Su vector caraterístico x_1 es no negativo, y es un estado estacionario porque $Px_1 = x_1$

(c) Los otro valores característicos cumplen $1 \geq \delta$

(d) Si P o cualquier otra potencia de P tiene a todos sus elementos positivos, estos otros δ_i están abajo de 1.
La solucion $P^k u_0$ se aproxima a un múltiplo de x_1, el cual es el estado estacionario de u_∞

Vector estado estacionario

Una caracteristica curiosa sobre la cual aún no se ha ahondado es la aplicación determinista de la matriz estocástica, la cual es la predictibilidad que tienen las matrices de Markov al momento de pronosticar y predecir el movimiento que tedran distintas variables en un tiempo t cuando:

$$Px_1 = x_1$$

Donde: P es la matriz de probilidad y x_1 el vector de estado estacionario

Lo cual quiere decir que al vector x le corresponde el valor propio $\delta = 1$

Es decir: cuando la cadena de Markov tiene un comportamiento a largo plazo definido, este comportamiento a largo plazo está dado por el vector estacionario En otras palabras, los vectores estacionarios dictan el comportamiento a largo plazo en un cadena de Markov

Matriz estocástica regular

Sea **P** una matriz nxn estocástica, entonces P tiene un único vector de estado estable x_1. Además, si x_0 es cualquier estado inicial y una $x_{k+1} = Px_k$ para $k = (0, 1, 2, \ldots, n)$ (como ya se definio anteriormente) y cuando: $k_{\to\infty}$ de P^k definimos a P como una matriz estocastica regular si $\forall a \in P^K$ cumplen que $a_{ij} > 0$

Si se quiere determinar si una matriz P es una matriz estocástica regular, una estrategia es reescribir las entradas de P de tal modo que cada entrada este definida de la forma:

$$r = 1 - a_{ij}$$

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & .3 \\ 0 & .7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1-0.7 \\ 0 & .7 \end{bmatrix}$$

Además de esto, si el lector es suspicaz, puede darse cuenta de que si una determinada matriz M, tiene una entrada cero, esto la convierte inmediatamente en un una matriz estocástica no regular, ya que se tendria una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1-\beta \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

Donde γ, β son constantes entre 0 y 1
Eso implicaria tener dos vectores linealmente independientes por lo cual la ecuación:

$$Px = x$$

No tiene una solución única, entonces, por definición P no puede ser una matriz estocástica regular.

Esto en el caso de una matriz de dimensión $2x2$, aunque se puede extender a nxn teniendo en cuenta que se deber tener una entrada igual a 1 en una colúmna para poder aplicar este razonamiento.

2 Problemas

1. Un animal de laboratorio puede comer cualquiera de tres alimentos cada día. Los registros de laboratorio indican que si el animal elige un alimento en un ensayo, elegirá el mismo alimento en el siguiente ensayo con una probabilidad del 60%, y elegirá cualquiera de los otros alimentos en el siguiente ensayo con iguales probabilidades del 20%.

   (a) ¿Cuál es la matriz estocástica de esta situación?

   (b) Si el animal elige el alimento 1 en un ensayo inicial, ¿cuál es la probabilidad de que elija el alimento 2 en el segundo ensayo después del inicial?

2. El clima en Columbus es bueno, regular o malo en un día determinado. Si el clima es bueno hoy, hay un 40% de probabilidad de que sea bueno mañana, un 30% de probabilidad de que sea regular, y un 30% de que sea malo. Si el clima es regular hoy, existe un 50% de probabilidad de que sea bueno mañana, y un 30% de probabilidad de que sea regular. Por último, si el clima es malo hoy, existe un 30% de probabilidad de que sea bueno mañana y un 40% de que sea regular.

   (a) ¿Cuál es la matriz estocástica de esta situación?

   (b) Suponga que hay una probabilidad del 50% de buen clima hoy, y una probabilidad del 50% de clima regular. ¿Cuáles son las probabilidades de que el clima sea malo mañana?

   (c) Suponga que, de acuerdo con los pronósticos para el lunes, hay un 60% de probabilidad de que el clima sea regular y un 40% de que sea malo. ¿Cuáles son las probabilidades de tener buen clima el miércoles?

3. Encuentre el vector de estado estable.

$$\begin{bmatrix} .4 & .8 \\ .6 & .2 \end{bmatrix}$$

4. Encuentre el vector de estado estable.

$$\begin{bmatrix} .4 & .5 & .8 \\ .0 & .5 & .1 \\ .6 & .0 & .1 \end{bmatrix}$$

5. Determine si P= $\begin{bmatrix} 1 & .3 \\ 0 & .7 \end{bmatrix}$ es una matriz estocástica regular.

6. Consulte el ejercicio 1. ¿Qué alimento prefiere el animal después de muchos ensayos?

7. Consulte el ejercicio 2. En el largo plazo, ¿qué tan probable es que el clima en Columbus sea bueno en un día determinado?

8. En Detroit, Hertz Rent A Car cuenta con una flota de cerca de 2000 automóviles. El patrón de puntos de alquiler y devolución de las unidades está descrito por las fracciones en la siguiente tabla. En un día típico, ¿cuántos autos estarán listos para rentarse en la sucursal ubicada en el centro de la ciudad?

$$\begin{bmatrix} .90 & .01 & .09 \\ .01 & .90 & .01 \\ .09 & .09 & .90 \end{bmatrix}$$

9. Demuestre que toda matriz estocástica de 2x2 tiene al menos un vector de estado estable. Cualquier matriz de este tipo se puede representar en la forma P= $\begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}$ donde α β son constantes entre 0 y 1. (Hay dos vectores de estado estable, linealmente independientes, si $\alpha = \beta = 0$. De lo contrario, solo hay uno.

10. Si P es una matriz estocástica de nxn, entonces también lo es P^2.

11. Compare dos métodos para encontrar el vector de estado estable q de una matriz estocástica regular P: 1. calculando q como en el ejemplo 5, o 2. calculando Pk para un valor grande de k y utilizando una de las columnas de Pk como una aproximación para q. [La Guía de estudio describe un programa de base nula que casi automatiza el método 1]. Experimente con las matrices aleatorias estocásticas más grandes que su programa de matrices le permita, y utilice k 100 o algún otro valor grande. Para cada método, describa el tiempo que usted necesita para teclear y ejecutar su programa. (Algunas versiones de MATLAB tienen los comandos flops y tic . . . toc que registran el número de operaciones de punto flotante y el tiempo total transcurrido que utiliza MATLAB). Compare las ventajas de cada método y determine cuál prefiere.

Bibliografía

Strang, G. (2006). Linear algebra and its applications. Belmont, CA: Thomson, Brooks/Cole.

Lay, David C. Álgebra lineal y sus aplicaciones. Cuarta edición PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012 ISBN: 978-607-32-1398-1