4) Muestre que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{i,j} x_j$$

Para el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & \cdots + & a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & \cdots + & a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

Se representa matricialmente y se triangula con:

$$R_i \frac{a_{ji}}{a_{ii}} - R_j$$

Obteniendo:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}x_1 & \cdots & +0_n & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1}x_1 & \cdots & +a_{nn}x_n & b_n \end{array}\right)$$

$$b_n = \sum_{j=1}^{n} a_{(n-1),j}\, x_j$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{jj}} = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j$$

5) Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = \frac{bi - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

$$A x_i = b_i$$

Si A es una matriz cuadrada $m=n$ y x_i, b_i son vectores:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots + & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots + & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_n$$

$$y \quad x_n = \frac{(a_{m1}x_1 + \dots + a_{n-1(n-1)}x_{n-1}) - b_n}{a_{nn}}$$

Si A es triangular superior:

$$x_{m-1} = \frac{b_{m-1} - \sum_{j=n}^{n} a_{(m-1),j}\, x_j}{a_{m-1,(n-1)}}$$

$m = i+1$ y despejando $i = m-1$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\, x_j}{a_{ii}}$$