Michela Eleuteri

ESERCIZIARIO DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

Corso di Laurea in Informatica

Principio di induzione, campi ordinati, numeri complessi, successioni, serie, notazioni asintotiche, limiti e derivate, integrali

Indice

CAPITOLO 1

Esercizi riguardanti il principio di induzione

1.1. Esercizi che coinvolgono sommatorie

❒ **Esercizio 1.1.1. (Esame del 23.01.19)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \tag{1.1.1}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.1). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left[\frac{n}{3}+1\right] = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.2. (Esame del 14.11.19)** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2. \tag{1.1.2}$$

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.2). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 - 1 = 1 = 1^2$$

che è vero. Quindi $1 \in S$.

• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2}$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \overset{\text{ipotesi}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.3. (Esame del 14.11.19)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}. \tag{1.1.3}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale la (1.1.3). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = 1 \leq 2 - 1 = 1$$

che è vero. Quindi $1 \in S$.

• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{ipotesi}}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{?}{\leq} 2 - \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&\Leftrightarrow \frac{n}{n(n+1)^2} \leq \frac{(n+1)^2 - n(n+1)}{n(n+1)^2} \Leftrightarrow n \leq n^2 + 2n + 1 - n^2 - n \Leftrightarrow 1 \geq 0
\end{aligned}$$

che è ovviamente vero. Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n + 1 \in S$. Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.4. (Esame del 15.11.19)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$ *vale l'uguaglianza*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}. \tag{1.1.4}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.4). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da

$n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} = 2 - \frac{1+2}{2}.$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}}$$

Si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \overset{\text{ipotesi}}{=} 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.5. (Esame del 15.11.19)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n}{2n+1}. \tag{1.1.5}$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.5). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}.$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n}{2n+1}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &\overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2+1)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.6. (Esame del 07.01.20)** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Usiamo il principio di induzione (prima forma).
• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$$

che è vero. Quindi $0 \in S$.
• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1}$$

Si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} \overset{\text{ipotesi}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2\,2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.1.7. (Esame del 18.02.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$ *vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!) = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots n(n!) = [(n+1)!] - 1. \tag{1.1.6}$$

➾ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.6). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} k(k!) = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} k(k!) = (n+2)! - 1}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k!) &= \sum_{k=1}^{n} k(k!) + (n+1)(n+1)! \overset{\text{ipotesi}}{=} (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)![1 + n + 1] - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n + 1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.8. (Esame del 08.09.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

➾ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Usiamo il principio di induzione (prima forma).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} 3^k = 3^0 = 1 = \frac{3^1 - 1}{2}$$

che è vero. Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \frac{3^{n+2} - 1}{2}}$$

Si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} 3^k = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 3^{n+1} \overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{3^{n+1} - 1}{2} + 3^{n+1} = \frac{3}{2}\, 3^{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{3^{n+2} - 1}{2}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n + 1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.1.9. (Esame del 14.12.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ vale la formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.1.7}$$

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.1.7). Usiamo il principio di induzione (prima forma) da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

Quindi $1 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} = \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.1.10. (Esame del 02.02.21)** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale

$$\sum_{k=0}^{n} (3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}.$$

Usiamo il principio di induzione (prima forma).
• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} (3k+1) = 0+1 = 1 = \frac{2}{2}$$

che è vero. Quindi $0 \in S$.
• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} (3k+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n+1} (3k+1) = \frac{3(n+1)^2+5(n+1)+2}{2} = \frac{3n^2+11n+10}{2}}$$

Si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} (3k+1) = \sum_{k=0}^{n} (3k+1) + 3(n+1)+1 \overset{\text{ipotesi}}{=} \frac{3n^2+5n+2}{2} + 3n+4 = \frac{3n^2+11n+10}{2}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.1.11. (Esame del 08.06.21)** *Dimostrare per induzione che*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

R. Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right].$$

Usiamo il principio di induzione (prima forma).
• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

che è vero. Quindi $0 \in S$.
• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]}$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \overset{\text{ipotesi}}{=} 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ &= 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}(3-1) = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}\right]\end{aligned}$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

1.2. Esercizi che coinvolgono disuguaglianze

❐ **Esercizio 1.2.1. (Esame del 08.01.19)** *Dimostrare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *vale la formula*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n\,.$$

➾ **R.** Sia $\mathcal{P}(n) := \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n\right\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma).

• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1 \geq 0\,.$$

Quindi $\mathcal{P}(0)$ ÃÍ vera.

• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ ÃÍ vera, cioÃÍ } \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \geq n}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ ÃÍ vera, cioÃÍ } \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n+1} \geq n+1}$$

Si ha

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \overset{\text{ipotesi}}{\geq} \frac{3}{2} n \overset{?}{\geq} n+1 \Leftrightarrow n \geq 2\,.$$

Resta da verificare il caso $n = 1$, che al momento rimane fuori sia dalla base dell'induzione che dal passo induttivo. Per $n = 1$ si ha

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2} \geq 1\,,$$

quindi anche $\mathcal{P}(1)$ ÃÍ vera. Allora abbiamo verificato che $\mathcal{P}(0)$ ÃÍ vera, $\mathcal{P}(1)$ ÃÍ vera e inoltre, se $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera per $n \geq 2$, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ ÃÍ vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❐ **Esercizio 1.2.2. (Esame del 05.06.19)** *Dimostrare per induzione che per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *vale la formula*

$$(n+1)! \geq 2^n\,.$$

➾ **R.** Sia $\mathcal{P}(n) := \{(n+1)! \geq 2^n\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma).
• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha

$$(0+1)! = 1! = 1 \geq 2^0 = 1\,.$$

Quindi $\mathcal{P}(0)$ ÃÍ vera.
• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ ÃÍ vera, cioÃÍ } (n+1)! \geq 2^n}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ ÃÍ vera, cioÃÍ } (n+2)! \geq 2^{n+1}}$$

Si ha

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)! \overset{\text{ipotesi}}{\geq} (n+2)\,2^n \overset{?}{\geq} 2^{n+1} \Leftrightarrow n+2 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 0$$

che ÃÍ ovviamente vera. Quindi abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ ÃÍ vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❐ **Esercizio 1.2.3. (Esame del 09.11.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$2^{n-1} \leq n!$$

➾ **R.** Sia $\mathcal{P}(n) := \{2^{n-1} \leq n!\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma).
• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha

$$2^0 = 1 \leq 1!\,.$$

Quindi $\mathcal{P}(0)$ ÃÍ vera.
• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ ÃÍ vera, cioÃÍ } 2^{n-1} \leq n!}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ ÃÍ vera, cioÃÍ } 2^n \leq (n+1)!}$$

Si ha

$$2^n = 2^{n-1}\,2 \overset{\text{ipotesi}}{\leq} 2n! \overset{?}{\leq} (n+1)! \Leftrightarrow n+1 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 1$$

che ÃÍ vera per ipotesi. Quindi abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ ÃÍ vera.

Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ ÃÍ vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❐ **Esercizio 1.2.4. (Esame del 22.02.21)** *Dimostrare per induzione che, per* $n \geq 2$ *si ha*

$$2^n + 4^n \leq 6^n$$

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{2^n + 4^n \leq 6^n\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 2$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 2$ invece che da $n = 0$).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 2$ si ha $2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20 \leq 36 = 6^2$ che è vera. Quindi $\mathcal{P}(2)$ è vera.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera, cioè } 2^n + 4^n \leq 6^n}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } 2^{n+1} + 4^{n+1} \leq 6^{n+1}}.$$

Si ha

$$2^{n+1} + 4^{n+1} = 2^n\, 2 + 4^n\, 4 \overset{2 \leq 6,\ 4 \leq 6}{\leq} (2^n + 4^n)\, 6 \overset{\text{ipotesi}}{\leq} 6^n\, 6 = 6^{n+1}.$$

Allora abbiamo verificato che se $\mathcal{P}(n)$ è vera per $n \geq 2$, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❐ **Esercizio 1.2.5. (Esame del 22.06.21)** *Sia* $\beta \in \mathbb{R}$ *tale che* $0 < \beta < 1$. *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \geq 1$

$$(1 - \beta)^n < \frac{1}{1 + n\beta}.$$

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \left\{(1 - \beta)^n < \frac{1}{1+n\beta}\right\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma), da un certo indice in poi, visto che faremo partire l'induzione da $n = 1$.

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 1$ si ha, essendo $\beta + 1 > 0$

$$(1 - \beta) \overset{?}{<} \frac{1}{1 + \beta} \Leftrightarrow 1 - \beta^2 < 1 \Leftrightarrow \beta^2 > 0$$

che è vero perché consideriamo $\beta \neq 0$. Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera, cioè } (1 - \beta)^n < \tfrac{1}{1+n\beta}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } (1-\beta)^{n+1} < \tfrac{1}{1+(n+1)\beta}}$$

Si ha

$$\begin{aligned}(1-\beta)^{n+1} &= (1-\beta)^n(1-\beta) \overset{\text{ipotesi}}{<} \frac{1-\beta}{1+n\beta} \overset{?}{<} \frac{1}{1+(n+1)\beta} \\ &\Leftrightarrow (1+(n+1)\beta)(1-\beta) < 1+n\beta \Leftrightarrow (n+1)\beta^2 > 0,\end{aligned}$$

che di nuovo è vero perché $\beta \neq 0$. Quindi abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

1.3. Esercizi che riguardano funzioni definite ricorsivamente

❒ **Esercizio 1.3.1. (Esame del 11.09.18)** *Sia $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = 4 \\ F(n+1) = F(n) + n. \end{cases}$$

Usare il principio di induzione per dimostrare che $F(n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui $F(n) \geq n$. Usiamo il principio di induzione nella forma "quinto assioma di Peano".
• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = 4 \geq 0.$$

Quindi $0 \in S$.
• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } F(n) \geq n}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) \geq n+1}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} F(n) + n \overset{\text{ipotesi}}{\geq} n + n = 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$ per tutti gli $n \geq 1$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❐ **Esercizio 1.3.2. (Esame del 13.11.18)** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = \alpha\,, \\ F(n+1) = [F(n)]^2 - 3F(n) + 4 \qquad n \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando il principio di induzione dimostrare che, se $\alpha > 2$*, allora per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$F(n) > 2\,. \tag{1.3.1}$$

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.3.1). Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = \alpha > 2\,.$$

Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S, \text{ cioÃÍ } F(n) > 2}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioÃÍ } F(n+1) > 2}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} [F(n)]^2 - 3F(n) + 4 \overset{?}{>} 2 \iff [F(n)]^2 - 3F(n) + 2 > 0$$
$$\iff [F(n)-1]\,[F(n)-2] > 0 \iff F(n) < 1 \,\vee\, F(n) > 2$$

che ÃÍ vera per l'ipotesi induttiva. Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.

Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❐ **Esercizio 1.3.3. (Esame del 22.02.19)** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = \sqrt{\pi}\,, \\ F(n+1) = \sqrt{F(n)+6} \qquad n \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando il principio di induzione dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$F(n) \leq 3\,. \tag{1.3.2}$$

➾ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.3.2). Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = \sqrt{\pi} \leq 3\,.$$

Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S, \text{ cioÃÍ } F(n) \leq 3}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioÃÍ } F(n+1) \leq 3}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} \sqrt{F(n)+6} \overset{\text{ipotesi}}{\leq} \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3\,.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.3.4. (Esame del 17.06.19)** *Sia $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = \pi\,, \\ F(n+1) = \sqrt[3]{[F(n)]^2 + 18} \qquad n \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando il principio di induzione dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$F(n) \geq 3\,. \tag{1.3.3}$$

➾ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.3.3). Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = \pi \geq 3\,.$$

Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S, \text{ cioÃÍ } F(n) \geq 3}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioÃÍ } F(n+1) \geq 3}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} \sqrt[3]{[F(n)]^2 + 18} \overset{\text{ipotesi}}{\geq} \sqrt[3]{9+18} = \sqrt[3]{27} = 3\,.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.3.5. (Esame del 09.07.20)** *Sia* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(n) = n + F(n-1) \qquad n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che

$$F(n) = \frac{n^2+n}{2}. \tag{1.3.4}$$

➼ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale (1.3.4). Usiamo il principio di induzione (prima forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n=1$ invece che da $n=0$).

• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha

$$F(1) = 1 = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Quindi $1 \in S$.

• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S \text{ cioè } F(n) = \frac{n^2+n}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S, \text{ cioè } F(n+1) = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} n+1+F(n) \overset{\text{ipotesi}}{=} (n+1) + \frac{(n+1)n}{2} = (n+1)\left[1 + \frac{n}{2}\right] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n+1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$.

❒ **Esercizio 1.3.6. (Esame del 06.07.20)** *Sia $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = 15\,, \\ F(n+1) = F(n)^2 - 7F(n) + 16 \qquad n \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando il principio di induzione dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $F(n) > 4$.

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale $F(n) > 4$. Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

• BASE DELL'INDUZIONE: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = 15 > 4\,.$$

Quindi $0 \in S$.

• PASSO INDUTTIVO:

$$\boxed{\text{ipotesi: } n \in S\text{, cioÃÍ } F(n) > 4}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } n+1 \in S\text{, cioÃÍ } F(n+1) > 4}$$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} [F(n)]^2 - 7F(n) + 16 \overset{?}{>} 4 \iff [F(n)]^2 - 7F(n) + 12 > 0$$
$$\iff [F(n) - 3]\,[F(n) - 4] > 0 \iff F(n) < 3 \vee F(n) > 4$$

che ÃÍ vera per l'ipotesi induttiva. Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n + 1 \in S$.

Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.3.7. (Esame del 11.01.21)** *Sia $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita ricorsivamente da*

$$\begin{cases} F(0) = \pi \\ F(n+1) = \dfrac{F(n)^2 - 3}{2} \end{cases}$$

Dimostrare che $F(n) > 3$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

➻ **R.** Sia $S \subseteq \mathbb{N}$ l'insieme degli n per cui vale che $F(n) > 3$. Usiamo il principio di induzione (prima forma o quinto assioma di Peano).

• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha

$$F(0) = \pi \geq 3\,.$$

Quindi $0 \in S$.
• passo induttivo:

ipotesi: $n \in S$, cioÃÍ $F(n) \geq 3$

$$\Downarrow$$

tesi: $n + 1 \in S$, cioÃÍ $F(n+1) \geq 3$

Si ha

$$F(n+1) \overset{\text{definizione}}{=} \frac{F(n)^2 - 3}{2} \overset{\text{ipotesi}}{\geq} \frac{9-3}{2} = 3$$

Quindi abbiamo ottenuto che se $n \in S$, allora anche $n + 1 \in S$.
Allora, per il principio di induzione, $S = \mathbb{N}$.

1.4. Esercizi che riguardano questioni di divisibilità

❒ **Esercizio 1.4.1.** *Dimostrare per induzione che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$

$$9^{n+1} + 2^{6n+1}$$

è divisibile per 11.

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per $11\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma). Osserviamo che dire che il numero $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11 significa che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $9^{n+1} + 2^{6n+1} = 11k$.
• base dell'induzione: per $n = 0$ si ha $9^{0+1} + 2^{0+1} = 11$ che giustamente è divisibile per 11. Quindi $\mathcal{P}(0)$ è vera.
• passo induttivo: $\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera}} \Rightarrow \boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera}}$.
Si ha

$$9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1} = 9^{n+1}\,9 + 2^{6n+1}\,2^6 \pm 9^{n+1}\,2^6 = 9^{n+1}[9 - 2^6] + [2^{6n+1} + 9^{n+1}]\,2^6$$

A questo punto osserviamo che $9 - 2^6 = 55$ quindi il primo termine della somma risulta divisibile per 11; il secondo termine pure risulta divisibile per 11 dall'ipotesi induttiva. Allora tutto il numero $9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1}$ è divisibile per 11, quindi abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera (cioè

$9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11) allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

❒ **Esercizio 1.4.2. (Esame del 23.11.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ il numero $z(n) := n^3 + 2n$ è divisibile per 3.*

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{z(n) := n^3 + 2n$ è divisibile per $3\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma) da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$). Osserviamo che dire che il numero $z(n)$ è divisibile per 3 significa che esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $z(n) = 3k$.
• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha $z(1) = 1 + 2 = 3$ che giustamente è divisibile per 3. Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera.
• passo induttivo:

$$\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera, cioè } z(n) \text{ divisibile per } 3}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera, cioè } z(n+1) \text{ divisibile per } 3}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} z(n+1) &= (n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= [n^3 + 2n] + 3(n^2 + n + 1) \overset{\text{ipotesi}}{=} 3[k + n^2 + n + 1]. \end{aligned}$$

Siccome il numero $k + n^2 + n + 1 \in \mathbb{N}$, abbiamo ottenuto un numero divisibile per 3. Quindi riassumendo, se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

❒ **Esercizio 1.4.3. (Esame del 23.11.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ il numero $\gamma(n) := n^3 + 3n^2 + 5n$ è divisibile per 3.*

R. Sia $\mathcal{P}(n) := \{\gamma(n) := n^3 + 3n^2 + 5n$ è divisibile per $3\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$). Osserviamo che dire che $\mathcal{P}(n)$ è vera, significa dire che $\gamma(n)$ è divisibile per 3, cioè $n^3 + 3n^2 + 5n = 3k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.
• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha $\gamma(1) = 1 + 3 + 5 = 9$ che giustamente è divisibile per 3. Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera.

• passo induttivo: $\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera}} \Rightarrow \boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera}}$.
Si ha

$$\begin{aligned}\gamma(n+1) &= (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n^2 + 6n + 3 + 5n + 5 \\ &= n^3 + 3n^2 + 5n + [3n^2 + 9n + 9] \overset{\text{ipotesi}}{=} 3k + 3[n^2 + 3n + 3]\end{aligned}$$

Siccome il numero $3k + 3[n^2 + 3n + 3]$ è divisibile per 3, abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera (cioè $\gamma(n)$ è divisibile per 3) allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

❒ **Esercizio 1.4.4. (Esame del 23.11.20)** *Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geq 1$ il numero $\gamma(n) := n^3 + 3n^2 + 2n$ è divisibile per 3.*

➼ **R.** Sia $\mathcal{P}(n) := \{\gamma(n) := n^3 + 3n^2 + 2n$ è divisibile per $3\}$. Vogliamo dimostrare che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. Usiamo il principio di induzione (seconda forma), da un certo indice in poi, (facciamo partire l'induzione da $n = 1$ invece che da $n = 0$). Osserviamo che dire che $\mathcal{P}(n)$ è vera, significa dire che $\gamma(n)$ è divisibile per 3, cioè $n^3 + 3n^2 + 2n = 3k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.
• base dell'induzione: per $n = 1$ si ha $\gamma(1) = 1 + 3 + 2 = 6$ che giustamente è divisibile per 3. Quindi $\mathcal{P}(1)$ è vera.
• passo induttivo: $\boxed{\text{ipotesi: } \mathcal{P}(n) \text{ vera}} \Rightarrow \boxed{\text{tesi: } \mathcal{P}(n+1) \text{ è vera}}$.
Si ha

$$\begin{aligned}\gamma(n+1) &= (n+1)^3 + 3(n+1)^2 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2 \\ &= n^3 + 3n^2 + 2n + [3n^2 + 9n + 6] \overset{\text{ipotesi}}{=} 3k + 3[n^2 + 3n + 2]\end{aligned}$$

Siccome il numero $3k + 3[n^2 + 3n + 2]$ è divisibile per 3, abbiamo ottenuto che se $\mathcal{P}(n)$ è vera (cioè $\gamma(n)$ è divisibile per 3) allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.
Allora, per il principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$.

CAPITOLO 2

Esercizi riguardanti limiti di successioni

2.1. Richiami di teoria

➠ (ALGEBRA DEI LIMITI) Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to b \in \mathbb{R}$ allora

$$\begin{array}{ll} a_n \pm b_n \to a \pm b & \\ a_n\, b_n \to a\, b & \\ \dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b} & (b_n, b \neq 0) \\ a_n^{b_n} \to a^b & (a, a_n > 0) \end{array}$$

➠ (TEOREMA DEL CONFRONTO) Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che definitivamente $a_n \leq b_n$. Allora se $a_n \to +\infty$ allora $b_n \to +\infty$ (e se $b_n \to -\infty$ allora $a_n \to -\infty$).
➠ (TEOREMA DEI DUE CARABINIERI) Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $a_n \to \ell$ e $c_n \to \ell$ allora $b_n \to \ell$.
➠ Il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è una successione infinitesima.
➠ REGOLE DI ARITMETIZZAZIONE (PARZIALE) DEL SIMBOLO DI INFINITO (QUI $a \in \mathbb{R}$):

$a + \infty = +\infty$	$a - \infty = -\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$
$a \cdot +\infty = +\infty (a > 0)$	$a \cdot (-\infty) = -\infty (a > 0)$	$a \cdot +\infty = -\infty (a < 0)$	$a \cdot (-\infty) = +\infty (a < 0)$
$\frac{a}{0^+} = +\infty (a > 0)$	$\frac{a}{0^-} = -\infty (a > 0)$	$\frac{a}{0^+} = -\infty (a < 0)$	$\frac{a}{0^-} = +\infty (a < 0)$
$\frac{a}{+\infty} = 0^+ (a \geq 0)$	$\frac{a}{-\infty} = 0^- (a \geq 0)$	$\frac{a}{+\infty} = 0^- (a \leq 0)$	$\frac{a}{-\infty} = 0^+ (a \leq 0)$

➠ FORME DI INDECISIONE: ➠ Si ha

$+\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$1^{\pm\infty}$	0^0	$(+\infty)^0$

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

per ogni successione a_n divergente.

➠ (GERARCHIA DEGLI INFINITI) Vale la seguente gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall a > 1,\ \alpha > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

2.2. Limiti di successioni: esercizi proposti

2.2.1. Limiti che si risolvono grazie alla gerarchia degli infiniti e ai teoremi di confronto

❒ **Esercizio 2.2.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

1) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^3 + 2n\log n + \sqrt{2}}{5n^2 + \arctan n^3 + (-1)^n \sin n}$ **(Esame del 01.02.16)**

2) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(3^n + (-2)^n)}{n^2 - n(-1)^n}$ **(Esame del 19.07.16)**

3) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(n^2) + n^2}{(-1)^n(-n)^2\log(1+n)}$ **(Esame del 23.02.17)**

4) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(3^n + (-2)^n)}{n^2 - n(-1)^n}$ **(Esame del 25.01.18)**

5) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3 + n + 4}{-1 + 2\sqrt{n} + \arctan(n^3)}$ **(Esame del 10.04.19)**

6) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\dfrac{7n+3(-1)^n}{n^2+1}}$ **(Esame del 05.06.19)**

7) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4+n^2}+\sqrt[4]{3n}}{\sqrt[3]{n^4+n}+2\sqrt{n-1}}$ **(Esame del 17.06.19)**

8) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+2\log n}{n\,\sqrt[3]{n^2-1}+(-1)^n\arctan n}$ **(Esame del 07.01.20)**

9) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}+4\log n}{n\,\sqrt[3]{n^2-1}+(-1)^n\sin n}$ **(Esame del 08.09.20)**

10) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n-\sin n}}{n+\cos n}$ **(Esame del 01.02.21)**

11) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n}+\cos n}{n+\cos n}$ **(Esame del 21.02.21)**

R.

1) Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+2n\log n+\sqrt{2}}{5n^2+\arctan n^3+(-1)^n\sin n}=\frac{n^3\left(4+\dfrac{2\log n}{n^2}+\dfrac{\sqrt{2}}{n^3}\right)}{n^2\left(5+\dfrac{\arctan n^3}{n^2}+\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^2}\right)}=+\infty$$

dove osserviamo che, per $n\to\infty$

$$\frac{\log n}{n^2}\to 0$$

per la gerarchia degli infiniti; inoltre

$$\frac{\sqrt{2}}{n^3}\to 0 \qquad \frac{\arctan n^3}{n^2}\to 0$$

perché $\arctan n^3 \to \frac{pi}{2}$ e dove infine si usa il teorema dei carabinieri per concludere che

$$\frac{(-1)^n\sin n}{n^2}\to 0.$$

Osserviamo che sarebbe stato un **errore grave** scrivere $\arctan n^3\sim n^3$ in quanto $n\to\infty$.

2) Osserviamo che, indipendentemente dal suo argomento, $\sin(3^n+(-2)^n)$ è una quantità limitata, quindi si ha, dividendo numeratore e denominatore per n^2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(3^n+(-2)^n)}{n^2-n(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin(3^n+(-2)^n)}{n}}{1-\frac{(-1)^n}{n}}=0$$

perché, dal teorema dei due carabinieri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(3^n + (-2)^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

3) Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2) + n^2}{(-1)^n(-n)^2\log(1+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2) + n^2}{(-1)^n n^2 \log(1+n)} \\
= &\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{\cos(n^2)}{n^2}\right)}{n^2\left[(-1)^n\log(1+n)\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\cos(n^2)}{n^2}\right)}{\left[(-1)^n\log(1+n)\right]}
\end{aligned}$$

A questo punto, il numeratore tende a zero dal teorema dei carabinieri. Il denominatore non ha limite (tende a $+\infty$ o $-\infty$ rispettivamente se n è pari o dispari) però, essendo al denominatore, si ha che complessivamente non si tratta di una forma di indecisione, anzi tutto il limite tende a zero.

4) L'idea è che il limite proposto esista e faccia 0. Prima di tutto osserviamo che, indipendentemente dall'argomento, la funzione seno ha valori compresi tra -1 e 1 pertanto in particolare si ha

$$-1 \le \sin(3^n + (-2)^n) \le 1.$$

Inoltre anche $-1 \le (-1)^n \le 1$ da cui $-n \le n(-1)^n \le n$ e anche $-n \le -n(-1)^n \le n$ pertanto (attenti al verso della disuguaglianza!!)

$$\frac{-n}{n^2+n} \le \frac{n\sin(3^n + (-2)^n)}{n^2 - n(-1)^n} \le \frac{n}{n^2-n}.$$

A questo punto

$$-\frac{n}{n^2+n} = -\frac{1}{n+1} \to 0 \qquad \text{se } n\to\infty$$

mentre

$$\frac{n}{n^2-n} = \frac{1}{n-1} \to 0 \qquad \text{se } n\to\infty$$

e allora il limite dato esiste e fa 0 dal teorema dei carabinieri.

5) Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+n+4}{-1+2\sqrt{n}+\arctan(n^3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(3+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{\sqrt{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}+2+\frac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}}\right)} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/2}\left(3+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}+2+\frac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}}}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\arctan(n^3) \to \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+n+4}{-1+2\sqrt{n}+\arctan(n^3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{n^{5/2}}^{\stackrel{+\infty}{\uparrow}} \overbrace{\left(3+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}^{\stackrel{3}{\uparrow}}}{\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{n}}+2+\frac{\arctan(n^3)}{\sqrt{n}}}_{\stackrel{\downarrow}{2}}} = +\infty\,.$$

6) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{7n+3(-1)^n}{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{n\left(7+\frac{3(-1)^n}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7+\frac{3(-1)^n}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\right)^{1/3}.$$

Osserviamo che

$$\underbrace{\frac{-3}{n}}_{\stackrel{\downarrow}{0}} \le \frac{3(-1)^n}{n} \le \underbrace{\frac{3}{n}}_{\stackrel{\downarrow}{0}} \;\Rightarrow\; \frac{3(-1)^n}{n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri. Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{7n+3(-1)^n}{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\overbrace{7+\frac{3(-1)^n}{n}}^{\stackrel{7}{\uparrow}}}{\underbrace{n}_{\stackrel{\downarrow}{+\infty}} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}_{\stackrel{\downarrow}{1}}}\right)^{1/3} = 0\,.$$

7) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{4+n^2}+\sqrt[4]{3n}}{\sqrt[3]{n^4+n}+2\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2\left(\frac{4}{n^2}+1\right)}+\sqrt[4]{3n}}{\sqrt[3]{n^4\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}+2\sqrt{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}+n^{1/4}\sqrt[4]{3}}{n^{4/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+2n^{1/2}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}+\frac{\sqrt[4]{3}}{n^{3/4}}\right)}{n^{4/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+\frac{2}{n^{5/6}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}+\frac{\sqrt[4]{3}}{n^{3/4}}}{n^{1/3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+\frac{2}{n^{5/6}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}\,.$$

Osserviamo che

$$\frac{4}{n^2},\, \frac{1}{n^3},\, \frac{1}{n} \to 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{4}{n^2}+1},\; \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}},\; \sqrt{1-\frac{1}{n}} \to 1$$

dalla continuitÃă delle radici. Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4+n^2}+\sqrt[4]{3n}}{\sqrt[3]{n^4+n}+2\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{\sqrt{\frac{4}{n^2}+1}+\frac{\sqrt[4]{3}}{n^{3/4}}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{n^{1/3}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}}\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}+\frac{2}{n^{5/6}}\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}_{\substack{\downarrow\\ 1}}}=0\,.$$

8) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+2\log n}{n\,\sqrt[3]{n^2-1}+(-1)^n\arctan n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\left[1+\frac{2\log n}{\sqrt{n}}\right]}{n\,n^{2/3}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{(-1)^n\arctan n}{n^{5/3}}\right]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left[1+\frac{2\log n}{\sqrt{n}}\right]}{n^{7/6}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{(-1)^n\arctan n}{n^{5/3}}\right]}=0$$

in quanto

$$\frac{2\log n}{\sqrt{n}}\to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}\to 1$$

dalla continuità della funzione radice cubica, e infine

$$\frac{(-1)^n\arctan n}{n^{5/3}}\to 0$$

dal teorema dei carabinieri.

9) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+4\log n}{n\,\sqrt[3]{n^2-1}+(-1)^n\sin n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}\left[1+\frac{4\log n}{\sqrt[3]{n}}\right]}{n\,n^{2/3}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{(-1)^n\sin n}{n^{5/3}}\right]}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left[1+\frac{2\log n}{\sqrt[3]{n}}\right]}{n^{4/3}\left[\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}}+\frac{(-1)^n\sin n}{n^{5/3}}\right]}=0$$

in quanto

$$\frac{4\log n}{\sqrt[3]{n}}\to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}} \to 0$$

dalla continuità della funzione radice cubica, e infine

$$\frac{(-1)^n \sin n}{n^{5/3}} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri.

10) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n - \sin n}}{n + \cos n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\sqrt{1 - \frac{\sin n}{n}}}{n\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin n}{n}}}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)} = 0$$

perché, dal teorema dei carabinieri

$$\frac{\sin n}{n} \to 0 \qquad \frac{\cos n}{n} \to 0$$

11) Osserviamo che

$$\frac{e^{-n} + \cos n}{n + \cos n} = (e^{-n} + \cos n)\,\frac{1}{n + \cos n}.$$

A questo punto

$$-1 \leq e^{-n} + \cos n \leq\; 2$$

quindi $e^{-n} + \cos n$ è una quantità limitata; d'altra parte

$$\frac{1}{n + \cos n} = \frac{1}{n\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)} \to 0$$

perché $\frac{\cos n}{n} \to 0$ dal teorema dei carabinieri.
Dunque il limite dato esiste e fa 0, in quanto è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima.

2.2.2. Forme di indecisione $[\infty^0]$

❒ **Esercizio 2.2.2.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

12) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2 - 2\cos n^2}$ **(Esame del 15.02.18)**

13) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^3 - \sin n^2}$ **(Esame del 11.09.18)**

14) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^5 + \pi}$ **(Esame del 23.11.20)**

15) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2 - n\cos(\pi)}$ **(Esame del 21.06.21)**

R.

12) Si tratta di una forma di indecisione $[\infty^0]$. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 - 2\cos n^2} = \lim_{n\to\infty} (n^2 - 2\cos n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log(n^2 - 2\cos n^2)}{n}}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\log(n^2 - 2\cos n^2) &= \log\left(n^2\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right)\right) = \log n^2 + \log\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right)\\ &= 2\log n + \log\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n^2 - 2\cos n^2)}{n} = \frac{2\log n}{n} + \frac{\log\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right)}{n} \to 0$$

perché somma di due quantità infinitesime: infatti il primo termine tende a zero dalla gerarchia degli infiniti, il secondo tende a zero perché l'argomento del logaritmo tende a 1 (infatti $\frac{2\cos n^2}{n^2} \to 0$ dal teorema dei carabinieri) e quindi si conclude dalla continuità della funzione logaritmo e dal fatto che il termine $\frac{\log\left(1 - \frac{2\cos n^2}{n^2}\right)}{n}$ si presenta dunque nella forma $[\frac{0}{\infty}]$ che **NON** è una forma di indecisione. Allora dalla continuità della funzione esponenziale il limite dato esiste e fa 1.

13) Si tratta di forma di indecisione $[\infty^0]$. Analogamente all'esercizio precedente, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 - \sin n^2} = \lim_{n\to\infty} (n^3 - \sin n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log(n^3 - \sin n^2)}{n}}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\log(n^3-\sin n^2) &= \log\left(n^3\left(1-\frac{\sin n^2}{n^3}\right)\right)=\log n^3+\log\left(1-\frac{\sin n^2}{n^3}\right)\\ &= 3\log n+\log\left(1-\frac{\sin n^2}{n^3}\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n^3-\sin n^2)}{n}=\frac{3\log n}{n}+\frac{\log\left(1-\frac{\sin n^2}{n^3}\right)}{n}\to 0$$

perché somma di due quantità infinitesime: infatti il primo termine tende a zero dalla gerarchia degli infiniti, il secondo tende a zero perché l'argomento del logaritmo tende a 1 (infatti $\frac{\sin n^2}{n^3}\to 0$ dal teorema dei carabinieri) e quindi si conclude dalla continuità della funzione logaritmo e dal fatto che il termine $\frac{\log\left(1-\frac{\sin n^2}{n^3}\right)}{n}$ si presenta dunque nella forma $[\frac{0}{\infty}]$ che **NON** è una forma di indecisione. Allora dalla continuità della funzione esponenziale il limite dato esiste e fa 1.

14) Si tratta di forma di indecisione $[\infty^0]$. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5+\pi}=\lim_{n\to\infty}(n^5+\pi)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\log(n^5+\pi)}{n}}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\log(n^5+\pi) &= \log\left(n^5\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)\right)=\log n^5+\log\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)\\ &= 5\log n+\log\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n^5+\pi)}{n}=5\frac{\log n}{n}+\frac{\log\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)}{n}\to 0$$

perché l'argomento del logaritmo tende a 1 (infatti $\frac{\pi}{n^2}\to 0$) e quindi si conclude dalla continuità della funzione logaritmo e dal fatto che il termine $\frac{\log\left(1+\frac{\pi}{n^5}\right)}{n}$ si presenta dunque nella forma $[\frac{0}{\infty}]$ che **NON** è una forma di indecisione. Allora dalla continuità della funzione esponenziale il limite dato esiste e fa 1.

15) Si tratta di forma di indecisione $[\infty^0]$. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n\cos(\pi)}=\lim_{n\to\infty}(n^2-n\cos(\pi))^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\log(n^2-n\cos(\pi))}{n}}.$$

A questo punto

$$\begin{aligned}\log(n^2-n\cos(\pi)) &= \log\left(n^2\left(1-\frac{\cos(\pi)}{n}\right)\right)=\log n^2+\log\left(1-\frac{\cos(\pi)}{n}\right)\\ &= 2\log n+\log\left(1-\frac{\cos(\pi)}{n}\right)\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\log(n^2 - n\cos(\pi))}{n} = \frac{2\log n}{n} + \frac{\log\left(1 - \frac{\cos(\pi)}{n}\right)}{n} \to 0$$

perché somma di due quantità infinitesime: infatti il primo termine tende a zero dalla gerarchia degli infiniti, il secondo tende a zero perché l'argomento del logaritmo tende a 1 (infatti $\frac{\cos(\pi)}{n} \to 0$ dal teorema dei carabinieri) e quindi si conclude dalla continuità della funzione logaritmo e dal fatto che il termine $\frac{\log\left(1-\frac{\cos(\pi)}{n}\right)}{n}$ si presenta dunque nella forma $[\frac{0}{\infty}]$ che **NON** è una forma di indecisione. Allora dalla continuità della funzione esponenziale il limite dato esiste e fa 1.

2.2.3. Forme di indecisione $[1^\infty]$

❒ **Esercizio 2.2.3.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

16) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right)^{2e^n}$ **(Esame del 15.12.15)**

17) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\log^3 n+3}{\log^3 n+1}\right)^{-\frac{\log^2 n}{2}}$ **(Esame del 15.12.15)**

18) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^{n}$ **(Esame del 08.01.19)**

19) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{n^2/4}$ **(Esame del 23.11.20)**

R.

16) Ricordiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \quad \text{quando } a_n \to \pm\infty\,, \tag{2.2.1}$$

A questo punto, usando il limite (2.2.1) con $a_n = e^{2n}+1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{2n}+2}{e^{2n}+1}\right)^{2e^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{e^{2n}+1}\right)^{e^{2n}+1}\right]^{\frac{2e^n}{e^{2n}+1}} = e^0 = 1$$

visto che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2e^n}{e^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{e^n\left(1+\frac{1}{e^{2n}}\right)} = 0$$

17) Si ha, usando il limite (2.2.1) con $a_n = \dfrac{\log^3 n + 1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log^3 n + 3}{\log^3 n + 1}\right)^{-\frac{\log^2 n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{\log^3 n + 1}\right)^{\frac{\log^3 n+1}{2}}\right]^{b_n} = e^0 = 1,$$

dove

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} -\frac{\log^2 n}{\log^3 n + 1} = 0$$

18) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1-1-n}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n .$$

quindi scriviamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+1}}\right]^{-\frac{n(n+1)}{n^2+1}} .$$

Osserviamo che

$$-\frac{n^2+1}{n+1} \to -\infty \;\Rightarrow\; \left(1-\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+1}} \to e$$

usando il limite notevole (2.2.1) con $a_n = -\frac{n^2+1}{n+1}$, e inoltre

$$-\frac{n(n+1)}{n^2+1} = -\frac{n^2+n}{n^2+1} = -\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = -\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to -1.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-n}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\left[\left(1-\frac{n+1}{n^2+1}\right)^{-\frac{n^2+1}{n+1}}\right]}_{\downarrow\, e}{}^{\overbrace{-\frac{n(n+1)}{n^2+1}}^{\downarrow\, -1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} .$$

19) Si ha, usando il limite (2.2.1) con $a_n = -4n^2$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{n^2/4} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)^{(-4n^2)}\right]^{-1/16} = e^{-1/16}.$$

2.2.4. Limiti che coinvolgono differenze di radici

❒ **Esercizio 2.2.4.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

20) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^4}{\sqrt{n^4-1}} - \dfrac{n^4}{\sqrt{n^4+1}}$ **(Esame del 14.11.19)**

21) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} - \dfrac{n^2}{\sqrt{n^2-1}}$ **(Esame del 14.11.19)**

22) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log(1+n)}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}$ **(Esame del 09.07.20)**

23) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$ **(Esame del 23.11.20)**

R.

20) Riscriviamo il limite dato come

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{\sqrt{n^4-1}} - \frac{n^4}{\sqrt{n^4+1}} = \lim_{n\to+\infty} n^4 \frac{\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^4-1}\,\sqrt{n^4+1}} \\
= &\lim_{n\to+\infty} n^4\, \frac{\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^8-1}}\, \frac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}}{\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+1-n^4+1}{\sqrt{n^8-1}\,[\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n^8-1}\,[\sqrt{n^4+1}+\sqrt{n^4-1}]} = 0
\end{aligned}
$$

21) Riscriviamo il limite dato come

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2+1}} - \frac{n^2}{\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}\,\sqrt{n^2-1}} \\
= &\lim_{n\to+\infty} n^2\, \frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^4-1}}\, \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1-n^2-1}{\sqrt{n^4-1}\,[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{\sqrt{n^4-1}\,[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}]} = 0
\end{aligned}
$$

22) Riscriviamo il limite dato come

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1})}{(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1})} \\
= &\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n)(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1})}{n^2-1-n^2-1} = -\infty
\end{aligned}
$$

23) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{2}\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

2.2.5. Limiti che coinvolgono le proprietà dei logaritmi

❒ **Esercizio 2.2.5.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

24) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(2\sqrt{n}+e^n)+\frac{1}{2^n}+\cos n}{\log n + n\arctan n}$ **(Esame del 06.05.16)**

25) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log(8+e^{3n})+2n^2}{(-1)^n\sqrt{n}+5n^2}$ **(Esame del 13.11.18)**

26) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1-\sqrt[n]{8}}{3}\right)$ **(Esame del 23.01.19)**

27) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\log(n^3+4)-\log n\right)\cos n$ **(Esame del 22.02.19)**

28) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\log(1+e^{3n})+3n^3}{(-1)^n\sqrt{n}+n^3}$ **(Esame del 23.07.19)**

29) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\sqrt{2n}}}{e^{n^2}}$ **(Esame del 24.06.20)**

R.

24) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2\sqrt{n}+e^n)+\frac{1}{2^n}+\cos n}{\log n + n\arctan n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left[e^n\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)\right]+\frac{1}{2^n}+\cos n}{n\left[\frac{\log n}{n}+\arctan n\right]}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log e^n + \log\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)+\frac{1}{2^n}+\cos n}{n\left[\frac{\log n}{n}+\arctan n\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + \log\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)+\frac{1}{2^n}+\cos n}{n\left[\frac{\log n}{n}+\arctan n\right]}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[1+\frac{1}{n}\log\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)+\frac{1}{n2^n}+\frac{\cos n}{n}\right]}{n\left[\frac{\log n}{n}+\arctan n\right]} = \frac{2}{\pi}$$

dato che, dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{e^n}=0$$

quindi dalla continuità della funzione logaritmo

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{2\sqrt{n}}{e^n}+1\right)=0.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n2^n}=0 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$$

dove nel secondo caso si è dovuto usare il teorema del confronto o il teorema dei carabinieri. Infine si è usato il fatto che

$$\lim_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}.$$

25) Si ha, utilizzando le proprietÃă dei logaritmi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\log(8+e^{3n})+2n^2}{(-1)^n\sqrt{n}+5n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\log\left[e^{3n}\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)\right]+2n^2}{n^2\left[\frac{(-1)^n n^{1/2}}{n^2}+5\right]}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left[\log\left(e^{3n}\right)+\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)\right]+2n^2}{n^2\left[\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5\right]}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left[3n+\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)\right]+2n^2}{n^2\left[\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5\right]}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left[3+\frac{\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)}{n}+2\right]}{n^2\left[\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5\right]}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)}{n}+5}{\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5}\,.$$

Osserviamo che

- $\dfrac{8}{e^{3n}}\to 0\ \Rightarrow\ \log\left(\dfrac{8}{e^{3n}}+1\right)\to 0$ dalla continuitÃă del logaritmo,
- $\underbrace{\dfrac{-1}{n^{3/2}}}_{\downarrow\atop 0}\le\dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}\le\underbrace{\dfrac{1}{n^{3/2}}}_{\downarrow\atop 0}\ \Rightarrow\ \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}\to 0$ dal teorema dei carabinieri.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\log(8+e^{3n})+2n^2}{(-1)^n\sqrt{n}+5n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{\frac{\log\left(\frac{8}{e^{3n}}+1\right)}{n}+5}^{5\atop\uparrow}}{\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}+5}_{\downarrow\atop 5}}=1\,.$$

26) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1-\sqrt[n]{8}}{3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1-8^{1/n}}{1/n}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\log 8^{1/n}}-1}{1/n}\right).$$

Ricordiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1 \quad \text{quando } a_n \to 0\,, \tag{2.2.2}$$

quindi scriviamo, utilizzando le proprietÃă dei logaritmi,

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\log 8^{1/n}}-1}{1/n}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}\log 8}-1}{\frac{1}{n}\log 8}\right)\log 8\,.$$

Osserviamo che

- $\dfrac{1}{n}\log 8 \to 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{e^{\frac{1}{n}\log 8}-1}{\frac{1}{n}\log 8} \to 1$ usando il limite notevole (2.2.2) con $a_n = \frac{1}{n}\log 8$.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1-\sqrt[n]{8}}{3}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{3}\underbrace{\left(\frac{e^{\frac{1}{n}\log 8}-1}{\frac{1}{n}\log 8}\right)}_{\downarrow \atop 1}\log 8 = -\frac{1}{3}\log 8 = -\log\left(8^{1/3}\right) = -\log 2\,.$$

27) Si ha, utilizzando le proprietÃă dei logaritmi,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\log(n^3+4)-\log n\right)\cos n = \lim_{n\to+\infty}\left(\log(n^3+4)^{1/3}-\log n\right)\cos n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{\sqrt[3]{n^3+4}}{n}\right)\cos n = \lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{4}{n^3}\right)}}{n}\right)\cos n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{n\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}}{n}\right)\cos n = \lim_{n\to+\infty}\log\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}\right)\cos n\,.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

- $\dfrac{4}{n^3} \to 0 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{1+\dfrac{4}{n^3}} \to 1 \;\Rightarrow\; \log\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{4}{n^3}}\right) \to 0$ dalla continuitÃă del logaritmo,
- $\cos n$ ÃÍ una funzione limitata.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\log(n^3+4)-\log n\right)\cos n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\log\left(\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}\right)}_{\text{infinitesima}}\underbrace{\cos n}_{\text{limitata}} = 0\,.$$

28) Si ha, utilizzando le proprietÃă dei logaritmi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\log(1+e^{3n})+3n^3}{(-1)^n\sqrt{n}+n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\log\left[e^{3n}\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)\right]+3n^3}{n^3\left[\frac{(-1)^n\,n^{1/2}}{n^3}+1\right]}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left[\log\left(e^{3n}\right)+\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)\right]+3n^3}{n^3\left[\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1\right]}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left[3n+\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)\right]+3n^3}{n^3\left[\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1\right]}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left[3+\frac{\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)}{n}+3\right]}{n^3\left[\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1\right]}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)}{n}+6}{\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1}\,.$$

Osserviamo che

- $\frac{1}{e^{3n}}\to 0 \;\Rightarrow\; \log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)\to 0$ dalla continuitÃă del logaritmo,
- $\underbrace{\frac{-1}{n^{5/2}}}_{\downarrow\atop 0}\le\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}\le\underbrace{\frac{1}{n^{5/2}}}_{\downarrow\atop 0}\;\Rightarrow\;\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}\to 0$ dal teorema dei carabinieri.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\log(1+e^{3n})+3n^3}{(-1)^n\sqrt{n}+n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{\frac{\log\left(\frac{1}{e^{3n}}+1\right)}{n}+6}^{6\atop\uparrow}}{\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{5/2}}+1}_{\downarrow\atop 1}}=6\,.$$

29) Si può riscrivere il limite dato nel modo seguente, usando le proprietà degli esponenziali

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\sqrt{2n}}}{e^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{2n}\log n}}{e^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\sqrt{2n}\log n-n^2}.$$

A questo punto, osservando che

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2n}\log n-n^2=\lim_{n\to+\infty}n^2\left(\frac{\sqrt{2}\log n}{n^{3/2}}-1\right)=-\infty$$

in quanto, dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2}\log n}{n^{3/2}}=0,$$

si conclude che il limite dato esiste e fa 0.

2.2.6. Limiti che non sono forme di indecisione

❒ **Esercizio 2.2.6.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

30) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2+1}$ **(Esame del 13.11.17)**

31) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{n^3+1}$ **(Esame del 13.11.17)**

32) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+2}}\right)^{\sqrt{n}}$ **(Esame del 11.01.21)**

33) $\lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{2n}}+1$ **(Esame del 22.06.21)**

R.

30) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{(n^2+1)\log\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0$$

perché

$$\lim_{n\to\infty} (n^2+1)\log\frac{1}{\sqrt{n}} = -\infty.$$

Osserviamo che la conclusione poteva essere data immediatamente sfruttando la continuitá delle funzioni logaritmo ed esponenziale in quanto il limite dato si presenta nella forma $[0^\infty]$ che **non è** una forma di indecisione.

31) Analogamente all'esercizio precedente si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} e^{(n^3+1)\log\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = 0$$

perché

$$\lim_{n\to\infty} (n^3+1)\log\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = -\infty.$$

Osserviamo che la conclusione poteva essere data immediatamente sfruttando la continuitá delle funzioni logaritmo ed esponenziale in quanto di nuovo il limite dato si presenta nella forma $[0^\infty]$ che **non è** una forma di indecisione.

32) Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+2}}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}\log\frac{1}{\sqrt{n^4+2}}} = 0$$

perché

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\log\frac{1}{\sqrt{n^4+2}} = -\infty.$$

Ancora una volta si osserva che la conclusione poteva essere data immediatamente sfruttando la continuità delle funzioni logaritmo ed esponenziale in quanto di nuovo il limite dato si presenta nella forma $[0^\infty]$ che **non è** una forma di indecisione.

33) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{\sqrt{2n}} + 1 = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{2n}\log n} + 1 = +\infty$$

in quanto

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n}\log n = +\infty$$

Si osserva che il limite dato si presenta nella forma $[\infty^\infty]$ che **non è** una forma di indecisione.

2.2.7. Limiti che sfruttano sviluppi asintotici basati sui limiti notevoli

❒ **Esercizio 2.2.7.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni:*

34) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sin^2\frac{n}{\sqrt{n^3+4}}\right)$ **(Esame del 25.02.16)**

35) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+n}{3\sqrt{n}+n^2\sin\frac{1}{n}}$ **(Esame del 23.02.17)**

36) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n^2+\pi)\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)$ **(Esame del 10.09.19)**

37) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4}{n-4}\right)^{n^2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}$ **(Esame del 15.11.19)**

38) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n-3}\right)^{n^2\sin\frac{1}{n}}$ **(Esame del 15.11.19)**

39) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-4}\right)^{n^2\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ **(Esame del 23.07.20)**

40) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)+\sin(n)}{\log\left(\frac{1}{n}+1\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ **(Esame del 09.11.20)**

41) $\lim_{n\to+\infty} n^3 \left(\sin \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}\right)$ **(Esame del 14.12.20)**

42) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{n^2\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ **(Esame del 06.07.21)**

R.

34) Ci sono diversi modi per affrontare l'esercizio. Lo strumento più utile sono gli sviluppi asintotici. Per esempio, se $n \to +\infty$ allora

$$n^3+4 \sim n^3 \Rightarrow \sqrt{n^3+4} \sim \sqrt{n^3} = n^{3/2}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sin^2 \frac{n}{\sqrt{n^3+4}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sin^2 \frac{n}{n^{3/2}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

A questo punto osserviamo che se $n \to +\infty$ allora

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n}$$

e quindi concludendo

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\sin^2 \frac{n}{\sqrt{n^3+4}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{n} = +\infty$$

35) Osserviamo prima di tutto che gli sviluppi asintotici in generale non si comportano bene con la somma. Quindi per essere rigorosi, osserviamo che, per $n \to \infty$ si ha

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow n \sin \frac{1}{n} \sim 1.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+n}{3\sqrt{n}+n^2\sin\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left[2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right]}{n\left[\frac{3}{\sqrt{n}}+n\sin\frac{1}{n}\right]} = 1,$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.$$

36) Ricordiamo innanzitutto che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad \text{quando } a_n \to 0\,, \tag{2.2.3}$$

quindi scriviamo

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+\pi)\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\pi)\frac{\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)^3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\pi}{(n^{4/3}+\pi)^{3/2}}\frac{\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{\pi}{n^2}\right)}{\left[n^{4/3}\left(1+\frac{\pi}{n^{4/3}}\right)\right]^{3/2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\right]^3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{\pi}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{\pi}{n^{4/3}}\right)^{3/2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\right]^3=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\pi}{n^2}}{\left(1+\frac{\pi}{n^{4/3}}\right)^{3/2}}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\right]^3.$$

Osserviamo che

- $\dfrac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\to 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\to 1$ usando il limite notevole (2.2.3) con $a_n=\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}$.

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+\pi)\sin^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{\overbrace{1+\frac{\pi}{n^2}}^{\to 1}}{\left(1+\frac{\pi}{n^{4/3}}\right)^{3/2}}}_{\to 1}\underbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^{4/3}+\pi}}}\right]^3}_{\to 1}=1\,.$$

37) Osserviamo che se $n\to\infty$ allora $\frac{1}{n}\to 0$ e dunque, dai limiti notevoli

$$n^2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\sim n^2\,\frac{1}{n}=n$$

A questo punto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+4}{n-4}\right)^{n^2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{8}{n-4}\right)^{\frac{n-4}{8}}\right]^{b_n}=e^8$$

dove abbiamo usato il limite (2.2.1) con la scelta $a_n=\frac{n-4}{8}$ e dove si ha, per quanto visto prima

$$b_n:=\frac{8}{n-4}\,n^2\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\sim 8$$

38) Osserviamo che se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$ e dunque, dai limiti notevoli

$$n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n^2 \frac{1}{n} = n$$

A questo punto

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n-3}\right)^{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{6}{n-3}\right)^{\frac{n-3}{6}}\right]^{b_n} = e^6$$

dove abbiamo usato il limite (2.2.1) con la scelta $a_n = \frac{n-3}{6}$ e dove si ha, per quanto visto prima

$$b_n := \frac{6}{n-3}\, n^2 \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim 6$$

39) Osserviamo che se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e dunque, dai limiti notevoli

$$n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim n^2 \frac{1}{n} = n$$

A questo punto

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-4}\right)^{n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{5}{2n-4}\right)^{\frac{2n-4}{5}}\right]^{b_n} = e^{5/2}$$

dove abbiamo usato il limite (2.2.1) con la scelta $a_n = \frac{2n-4}{5}$ e dove si ha, per quanto visto prima

$$b_n := \frac{5}{2n-4}\, n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{5}{2}$$

40) Il limite dato **non** si presenta in una forma di indecisione. Infatti

$$\log(n+1) + \sin(n) = \log(n+1)\left(1 + \frac{\sin n}{\log(n+1)}\right) \to +\infty$$

in quanto, dal teorema dei carabinieri

$$\frac{\sin n}{\log(n+1)} \to 0;$$

d'altra parte, dai limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n}+1\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\frac{1}{n}} + \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 2$$

dunque

$$\log\left(\frac{1}{n}+1\right) + \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{2}{n} \to 0^+$$

e allora complessivamente il limite dato esiste e vale $+\infty$

41) Se $n \to +\infty$ allora

$$n^6 + 1 \sim n^6 \Rightarrow \sqrt{n^6+1} \sim \sqrt{n^6} = n^3$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\sin \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3 \left(\sin \frac{n}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3 \left(\sin \frac{1}{n^2}\right).$$

A questo punto osserviamo che se $n \to +\infty$ allora

$$\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

e quindi concludendo

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(\sin \frac{n}{\sqrt{n^6+1}}\right) = +\infty$$

42) Osserviamo che se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e dunque, dai limiti notevoli

$$n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim n^2 \frac{1}{n} = n$$

A questo punto

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{4}{n-3}\right)^{\frac{n-3}{4}}\right]^{b_n} = e^4$$

dove abbiamo usato il limite (2.2.1) con la scelta $a_n = \frac{n-3}{4}$ e dove si ha, per quanto visto prima

$$b_n := \frac{4}{n-3} n^2 \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim 4$$

CAPITOLO 3

Notazioni asintotiche

3.1. Esercizi proposti

3.1.1. Notazione "O-grande"

❒ **Definizione 3.1.1.** Date due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, diremo che $f(n) = O(g(n))$ se e solo se esistono due costanti $c > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(n) \leq \; c\, g(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}. \tag{3.1.1}$$

❒ **Esercizio 3.1.2.** *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.*

$1) n^5 + n^2 = O(e^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 14.11.19)**
$2) n^6 + n \cos n = O(e^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 14.11.19)**
$3) n^4 + \arctan n \, \cos n = O(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 18.02.20)**
$4) n^5 + n^2 \cos n = O(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 09.07.20)**
$5) n^3 + \sqrt{n} \log n = O(e^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 23.07.20)**
$6) n^4 + n \log(n^2 + 5) - \cos n = O(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 09.11.20)**
$7) \arctan(n) + 2 + (-1)^n + \sqrt[3]{n^2} = O(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 14.12.20)**

8)$3^n + 4n^3 = O(n!)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 01.02.21)**
9) $\log(n) + n + n^2 = O(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 08.06.21)**
10)$n^4 + \sqrt{n}\log n^2 = O(2^n)$	$n \to +\infty$	**(Esame del 06.07.21)**

R.

1) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + n^2}{e^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^5}{e^n} \to 0 \qquad \frac{n^2}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^5 + n^2}{e^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ottiene

$$n^5 + n^2 \leq e^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

2) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^6 + n\cos n}{e^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^6}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n\cos n}{e^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^6 + n\cos n}{e^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$n^6 + n\cos n \leq e^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

3) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + \arctan n \cos n}{2^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{\arctan n \cos n}{2^n} \to 0$$

perché è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4 + \arctan n \cos n}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$

$$n^4 + \arctan n \cos n \leq \ 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

4) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + n^2 \cos n}{2^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^5}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n^2 \cos n}{2^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^5 + n^2 \cos n}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$n^5 + n^2 \cos n \leq \ 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

5) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + \sqrt{n}\log n}{e^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^3}{e^n} \to 0 \qquad\qquad \frac{\sqrt{n}\log n}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \bar{n} : \;\; \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^3 + \sqrt{n}\log n}{e^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$n^3 + \sqrt{n}\log n \leq \; e^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

6) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + n\log(n^2+5) - \cos n}{2^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti; inoltre, essendo $\log(n^2+5) \sim \log(n^2) = 2\log n$ per $n \to +\infty$, anche

$$\frac{n\log(n^2+5)}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Infine

$$\frac{\cos n}{2^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \bar{n} : \;\; \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4 + n\log(n^2+5) - \cos n}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$n^4 + n\log(n^2+5) - \cos n \leq \; 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

7) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n) + 2 + (-1)^n + \sqrt[3]{n^2}}{2^n} = 0$$

infatti
$$\frac{\arctan(n)+2+(-1)^n}{2^n} \to 0$$
perché risulta essere il prodotto di una quantità limitata $(\arctan(n)+2+(-1)^n)$ per una quantità infinitesima $(\frac{1}{2^n})$; inoltre
$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\arctan(n)+2+(-1)^n+\sqrt[3]{n^2}}{2^n} < \varepsilon.$$
Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha
$$\arctan(n)+2+(-1)^n+\sqrt[3]{n^2} \leq 2^n$$
quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

8) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+4n^3}{n!} = 0$$
infatti
$$\frac{3^n}{n!} \to 0 \qquad \frac{4n^3}{n!} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{3^n+4n^3}{n!} < \varepsilon.$$
Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha
$$3^n + 4n^3 \leq n!$$
quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

9) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)+n+n^2}{2^n} = 0$$
infatti
$$\frac{\log(n)}{2^n} \to 0 \qquad \frac{n}{2^n} \to 0 \qquad \frac{n^2}{2^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\log(n)+n+n^2}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$\log(n) + n + n^2 \leq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

10) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + \sqrt{n}\log n^2}{2^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0 \qquad \frac{\sqrt{n}\log n^2}{2^n} = \frac{2\sqrt{n}\log(n)}{2^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4 + \sqrt{n}\log n^2}{2^n} < \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$n^4 + \sqrt{n}\log n^2 \leq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.1) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

3.1.2. Notazione "Ω"

❒ **Definizione 3.1.3.** Date due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, diremo che $f(n) = \Omega(g(n))$ se e solo se esistono due costanti $c > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(n) \geq c\, g(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}. \tag{3.1.2}$$

❒ **Esercizio 3.1.4.** *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.*

11) $n^4 + n\sin n = \Omega(2^n)$ $\quad n \to +\infty$ $\quad$ **(Esame del 15.11.19)**

12) $n^6 + n\cos n = \Omega(e^n)$ $\quad n \to +\infty$ $\quad$ **(Esame del 15.11.19)**

13) $\arctan n + \sqrt[3]{n^2} = \Omega(n^3)$ $\quad n \to +\infty$ $\quad$ **(Esame del 07.01.20)**

14) $n^3 + (-1)^n\sqrt{n} = \Omega(e^n)$ $\quad n \to +\infty$ $\quad$ **(Esame del 21.01.20)**

15) $\cos n + \sqrt[3]{n^5} = \Omega(n^4)$ $\quad n \to +\infty$ $\quad$ **(Esame del 08.09.20)**

16) $n\sqrt{n}+5^n+n^{3/2}=\Omega(e^n)$	$n\to+\infty$	**(Esame del 23.11.20)**
17) $n\sqrt{n}+e^n+4n^3=\Omega(2^n)$	$n\to+\infty$	**(Esame del 23.11.20)**
18) $n+4^n+2e^n=\Omega(3^n)$	$n\to+\infty$	**(Esame del 23.11.20)**
19) $e^{-n}+\sqrt[3]{n^4}=\Omega(n^{3/2})$	$n\to+\infty$	**(Esame del 11.01.21)**
20) $3^n+e^{-n}=\Omega(2^n)$	$n\to+\infty$	**(Esame del 11.01.21)**
21) $4n^{3/2}+7\sqrt{n+2}=\Omega(n^4)$	$n\to+\infty$	**(Esame del 08.06.21)**
22) $n^4+n\cos n=\Omega(4^n)$	$n\to+\infty$	**(Esame del 22.06.21)**

R.

11) Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n\sin n}{2^n}=0$$

infatti

$$\frac{n^4}{2^n}\to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n\sin n}{2^n}\to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}:\ \forall n\geq\bar{n}\qquad\frac{n^4+n\sin n}{2^n}>-\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon>0$, non si riesce a trovare un valore di $c>0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

12) Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^6+n\cos n}{e^n}=0$$

infatti

$$\frac{n^6}{e^n}\to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{n\cos n}{e^n}\to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^6 + n \cos n}{e^n} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

13) Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\arctan n + \sqrt[3]{n^2}}{n^3} = 0$$

infatti

$$\frac{\arctan n}{n^3} \to 0$$

perché è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima, mentre

$$\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n^3} = \frac{1}{n^{7/3}} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\arctan n + \sqrt[3]{n^2}}{n^3} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

14) Si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + (-1)^n \sqrt{n}}{e^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^3}{e^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre

$$\frac{(-1)^n \sqrt{n}}{e^n} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^3 + (-1)^n \sqrt{n}}{e^n} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto anche questa affermazione risulta falsa.

15) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n + \sqrt[3]{n^5}}{n^4} = 0$$
infatti
$$\frac{\cos n}{n^4} \to 0$$
perché è il prodotto di una quantità limitata per una infinitesima, mentre
$$\frac{\sqrt[3]{n^5}}{n^4} = \frac{1}{n^{7/3}} \to 0.$$
Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\cos n + \sqrt[3]{n^5}}{n^4} > -\varepsilon.$$
Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

16) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n} + 5^n + n^{3/2}}{e^n} = +\infty$$
infatti
$$\frac{n\sqrt{n}}{e^n} \to 0 \qquad \frac{5^n}{e^n} \to +\infty \qquad \frac{n^{3/2}}{e^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n\sqrt{n} + 5^n + n^{3/2}}{e^n} > M.$$
La Definizione (3.1.2) risulta pertanto verificata con $c = M$ e $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.

17) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n} + e^n + 4n^3}{2^n} = +\infty$$
infatti
$$\frac{n\sqrt{n}}{2^n} \to 0 \qquad \frac{4n^3}{2^n} \to 0$$
dalla gerarchia degli infiniti ma
$$\frac{e^n}{2^n} = \left(\frac{e}{2}\right)^n \to +\infty$$
perché $e > 2$. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n\sqrt{n} + e^n + 4n^3}{2^n} > M.$$

Scegliendo $M = 1$ si ha

$$n\sqrt{n} + e^n + 4n^3 \geq 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.2) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

18) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + 4^n + 2e^n}{3^n} = +\infty$$

infatti

$$\frac{n}{3^n} \to 0 \qquad \frac{2e^n}{3^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti, in quanto $e < 3$, ma

$$\frac{4^n}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \to +\infty.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n + 4^n + 2e^n}{3^n} > M.$$

Scegliendo $M = 1$ si ha

$$n + 4^n + 2e^n \geq 3^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.2) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

19) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} + \sqrt[3]{n^4}}{n^{3/2}} = 0$$

infatti

$$\frac{e^{-n}}{n^{3/2}} \to 0$$

perché $e^{-n} \to 0$ (non è nemmeno un infinito) mentre

$$\frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^{3/2}} = \frac{n^{4/3}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{1/6}} \to 0$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{e^{-n} + \sqrt[3]{n^4}}{n^{3/2}} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, ancora una volta non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

20) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + e^{-n}}{2^n} = +\infty$$

infatti

$$\frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$$

mentre

$$\frac{e^{-n}}{2^n} \to 0$$

perché $e^{-n} \to 0$ (non è nemmeno un infinito). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall M > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{3^n + e^{-n}}{2^n} > M.$$

Scegliendo $M = 1$ si ha

$$3^n + e^{-n} \geq \ 2^n$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.2) è verificata con $c = 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

21) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^{3/2} + 7\sqrt{n+2}}{n^4} = 0$$

infatti

$$\frac{4n^{3/2}}{n^4} = \frac{4}{n^{5/2}} \to 0$$

e d'altra parte

$$\frac{7\sqrt{n+2}}{n^4} \sim \frac{7\sqrt{n}}{n^4} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{4n^{3/2} + 7\sqrt{n+2}}{n^4} > -\varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

22) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + n\cos n}{4^n} = 0$$

infatti

$$\frac{n^4}{4^n} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti mentre
$$\frac{n\cos n}{4^n} \to 0$$
dal teorema dei carabinieri (e dalla gerarchia degli infiniti). Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{n^4 + n\cos n}{4^n} > -\varepsilon.$$
Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

3.1.3. Notazione "Θ"

❒ **Definizione 3.1.5.** Date due funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, diremo che $f(n) = \Theta(g(n))$ se $f(n) = O(g(n))$ e contemporaneamente $f(n) = \Omega(g(n))$. Questo equivale a chiedere che esistano costanti $c_1 > 0, c_2 > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che
$$c_2\, g(n) \leq \ f(n) \leq \ c_1\, g(n) \qquad \forall n \geq \bar{n}. \tag{3.1.3}$$

❒ **Esercizio 3.1.6.** *Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.*

23) $e^n + 6n^7 = \Theta(n!)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 07.01.20)**

24) $3^n + 4n^3 = \Theta(n!)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 08.09.20)**

25) $\cos n + n^2 + e^{-n^2} = \Theta(n^2)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 23.11.20)**

26) $\sin n + n^4 + e^{-n} = \Theta(n^4)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 23.11.20)**

27) $\sin n + n^2 + e^{-n^2} = \Theta(n^3)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 14.12.20)**

28) $n \arctan(n) + \log(n^3 + 5n + 2) = \Theta(n)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 11.01.21)**

29) $\arctan(n) + (-1)^n + 2n^4 = \Theta(n^4)$ $\quad n \to +\infty$ **(Esame del 11.01.21)**

R.

23) Si ha
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n + 6n^7}{n!} = 0$$

infatti dalla gerarchia degli infiniti si ha

$$\frac{e^n}{n!} \to 0 \qquad \frac{6n^7}{n!} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad -\varepsilon < \frac{e^n + 6n^7}{n!} < \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c_2 > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

24) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4n^3}{n!} = 0$$

infatti dalla gerarchia degli infiniti si ha

$$\frac{3^n}{n!} \to 0 \qquad \frac{4n^3}{n!} \to 0.$$

Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad -\varepsilon < \frac{3^n + 4n^3}{n!} < \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c_2 > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.2), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

25) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n + n^2 + e^{-n^2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n^2} + \frac{n^2}{n^2} + \frac{e^{-n^2}}{n^2} = 1$$

infatti

$$\frac{\cos n}{n^2} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri; d'altra parte

$$\frac{e^{-n^2}}{n^2} \to 0$$

perché $e^{-n^2} \to 0$. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad 1 - \varepsilon < \frac{\cos n + n^2 + e^{-n^2}}{n^2} < 1 + \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1/2$ si ha

$$\frac{1}{2} < \frac{\cos n + n^2 + e^{-n^2}}{n^2} < \frac{3}{2}$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.3) è verificata con $c_2 = 1/2$, $c_1 = 3/2$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

26) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + n^4 + e^{-n}}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^4} + \frac{n^4}{n^4} + \frac{e^{-n}}{n^4} = 1$$

infatti

$$\frac{\sin n}{n^4} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri; d'altra parte

$$\frac{e^{-n}}{n^4} \to 0$$

perché $e^{-n} \to 0$. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad 1 - \varepsilon < \frac{\sin n + n^4 + e^{-n}}{n^2} < 1 + \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1/2$ si ha

$$\frac{1}{2} < \frac{\sin n + n^4 + e^{-n}}{n^4} < \frac{3}{2}$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.3) è verificata con $c_2 = 1/2$, $c_1 = 3/2$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

27) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n + n^2 + e^{-n^2}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^3} + \frac{n^2}{n^3} + \frac{e^{-n^2}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^3} + \frac{1}{n} + \frac{e^{-n^2}}{n^3} = 0$$

infatti

$$\frac{\sin n}{n^4} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri; d'altra parte

$$\frac{e^{-n}}{n^4} \to 0$$

perché $e^{-n} \to 0$. Pertanto, dalla definizione di limite risulta in particolare che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad - \varepsilon < \frac{\sin n + n^2 + e^{-n^2}}{n^3} < \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$, non si riesce a trovare un valore di $c_2 > 0$ che soddisfi la Definizione (3.1.3), pertanto l'affermazione data risulta falsa.

28) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\arctan(n) + \log(n^3+5n+2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\arctan(n)}{n} + \frac{\log(n^3+5n+2)}{n^4} = \frac{\pi}{2}$$

infatti, se $n \to \infty$

$$\arctan(n) \to \frac{\pi}{2}$$

mentre

$$\frac{\log(n^3+5n+2)}{n^4} \sim \frac{\log(n^3)}{n^4} = 3\frac{\log(n)}{n^4} \to 0$$

dalla gerarchia degli infiniti. Pertanto, dalla definizione di limite risulta che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{n\arctan(n) + \log(n^3+5n+2)}{n} < \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$0 < \frac{\pi}{2} - 1 < \frac{n\arctan(n) + \log(n^3+5n+2)}{n} < \frac{\pi}{2} + 1$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.3) è verificata con $c_2 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, $c_1 = \frac{\pi}{2} + 1$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

29) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\arctan(n) + (-1)^n + 2n^4}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n)}{n} + \frac{(-1)^n}{n^4} + 2 = 2$$

infatti, se $n \to \infty$

$$\frac{\arctan(n)}{n} \to 0$$

perché prodotto di una quantità limitata per una infinitesima; inoltre

$$\frac{(-1)^n}{n^4} \to 0$$

dal teorema dei carabinieri. Pertanto, dalla definizione di limite risulta che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \qquad 2 - \varepsilon < \frac{n\arctan(n) + (-1)^n + 2n^4}{n^4} < 2 + \varepsilon.$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ si ha

$$1 < \frac{n\arctan(n) + (-1)^n + 2n^4}{n^4} < 3$$

quindi l'affermazione risulta vera in quanto la Definizione (3.1.3) è verificata con $c_2 = 1$, $c_1 = 3$ e $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

CAPITOLO 4

Esercizi riguardanti serie numeriche

4.1. Serie riconducibili a serie geometriche

❒ **Esercizio 4.1.1. (Esame del 15.12.15)** *Sia s la somma della serie convergente*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Determinare quanto vale $3s$.

➼ **R.** Data una serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ si sa che

$$s=\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$$

(è importante che la somma parta da $n=0$). Nel nostro caso $q=-1/3$ quindi $s=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$. Allora la somma richiesta $3s$ vale $\frac{9}{4}$.

❒ **Esercizio 4.1.2. (Esame del 01.02.16)** *Determinare per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ la seguente serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3-\alpha)^n$$

converge. Per tali valori di α calcolarne la somma.

➼ **R.** Si tratta di una serie geometrica che converge quando la ragione in valore assoluto è minore di 1. Si tratta dunque di risolvere la seguente disequazione in α

$$|3-\alpha| < 1 \Leftrightarrow -1 < 3-\alpha < 1 \Leftrightarrow -4 < -\alpha < -2 \Leftrightarrow 2 < \alpha < 4.$$

Per tali valori di α possiamo calcolare la somma della serie ottenendo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3-\alpha)^n = \frac{1}{1-(3-\alpha)} = \frac{1}{\alpha-2}$$

❐ **Esercizio 4.1.3. (Esame del 20.12.16)** *Calcolare (in funzione di $x>0$)*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

(attenzione! La somma parte da $n=2$).

➻ **R.** Si tratta di una serie geometrica di ragione

$$q = \frac{1}{1+x} < 1$$

quindi

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n - \underbrace{1}_{n=0} - \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{n=1}\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} - 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)^2 - x(1+x) - x}{x(1+x)} = \frac{1}{x(1+x)}.\end{aligned}$$

❐ **Esercizio 4.1.4 (Esame del 09.11.20).** *Calcolare la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3\pi)^{-n}$$

➻ **R.**

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3\pi)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3\pi}\right)^n$$

Si tratta dunque di una serie geometrica di ragione $q = -\frac{1}{3\pi}$. Visto che la somma parte da 1, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(3\pi)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3\pi}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3\pi}} - 1 = -\frac{1}{3\pi+1}$$

4.2. Sulla condizione necessaria

❒ **Esercizio 4.2.1. (Esame del 18.12.17)** *Posto*

$$a_n := \left(1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$$

calcolare

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Stabilire poi (motivando la risposta) come si comporta la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

➼ **R.** Ci sono diversi modi di risolvere l'esercizio in maniera equivalente. Per esempio

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \log\left(1+\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}.$$

Lavoriamo sull'esponente, poi passeremo al limite sfruttando la continuità della funzione esponenziale. Si ha che per $n \to \infty$

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \log\left(1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log\left(1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

quindi anche

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \log\left(1+\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = +\infty.$$

D'altra parte, la serie data è a termini positivi, ma dal passo precedente, non risulta verificata la condizione necessaria, quindi la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.2.2. (Esame del 11.01.18)** *Sia data la successione*

$$a_n = \log(2^n + \sqrt{4^n + n^4})$$

1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

2) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

R.

1) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log(2^n + \sqrt{4^n + n^4}) = \lim_{n\to\infty} \log\left(2^n\left(1+\sqrt{1+\frac{n^4}{2^n}}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\log 2 + \log\left(1+\sqrt{1+\frac{n^4}{2^n}}\right) = +\infty$$

in quanto, dalla gerarchia degli infiniti, per $n \to \infty$

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$

e dunque dalla continuità della funzione logaritmo

$$\log\left(1+\sqrt{1+\frac{n^4}{2^n}}\right) \to \log 2.$$

2) Dai conti fatti in precedenza, osserviamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge dalla condizione necessaria.

❒ **Esercizio 4.2.3 (Esame del 23.01.19).** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 + n^{-1/3}\right).$$

R. La serie ÃÍ a termini di segno alternato. Osserviamo tuttavia che

$$(-1)^n \left(1+n^{-1/3}\right) = (-1)^n \left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \to \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ ÃÍ pari,} \\ -1 & \text{se } n \text{ ÃÍ dispari.} \end{cases}$$

Dunque la serie data non converge perchÃľ non ÃÍ verificata la condizione necessaria per la convergenza.

❒ **Esercizio 4.2.4 (Esame del 22.02.19).** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\pi}\left(\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right).$$

R. Osserviamo che, utilizzando il limite notevole del seno,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\pi}\left(\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n^{\pi}\left(\frac{1}{n}+\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n^{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)$$

$$=\underbrace{n^{\pi-1}}_{\substack{\downarrow\\+\infty}}\underbrace{\left(1+\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)}_{\substack{\downarrow\\2}}=+\infty\,.$$

Dunque la serie data non converge perchÃľ non ÃÍ verificata la condizione necessaria per la convergenza.

❒ **Esercizio 4.2.5 (Esame del 18.02.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1+2^{-n})$$

R. La serie ÃÍ a termini di segno alternato. Osserviamo tuttavia che

$$(-1)^n\left(1+2^{-n}\right)\to\begin{cases}1 & \text{se } n \text{ ÃÍ pari,}\\ -1 & \text{se } n \text{ ÃÍ dispari.}\end{cases}$$

Dunque la serie data non converge perchÃľ non ÃÍ verificata la condizione necessaria per la convergenza.

❒ **Esercizio 4.2.6 (Esame del 11.01.21).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^2+3n+2}$$

R.

Calcoliamo
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+3n+2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n^2+3n+2)}.$$
A questo punto, essendo per $n \to +\infty$
$$\log(n^2+3n+2) \sim \log(n^2) = 2\log n,$$
dalla gerarchia degli infiniti si ha che
$$\frac{1}{n}\log(n^2+3n+2) \sim \frac{2\log n}{n^2} \to 0$$
e dalla continuità della funzione esponenziale si ottiene che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+3n+2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\log(n^2+3n+2)} = 1.$$
Pertanto la serie data non converge perché non è verificata la condizione necessaria per la convergenza.

4.3. Serie a termini non negativi: criterio del confronto

❒ **Esercizio 4.3.1. (Esame del 29.06.16)** *Studiare la convergenza della seguente serie*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n| + e^{-n}}{n^{17/5}}.$$

➼ **R.** Si tratta innanzitutto di una serie a termini positivi. Possiamo utilizzare il criterio del confronto osservando che
$$|\sin n| + e^{-n} \leq 2$$
quindi la serie di partenza può essere maggiorata con la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{17/5}}$$
che è la serie armonica generalizzata di esponente $17/5 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.3.2. (Esame del 12.09.17)** *Studiare la convergenza della serie numerica*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right| \sin\frac{1}{n^3}$$

➻ **R.** Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di provare ad applicare il criterio del confronto. Tenendo conto del fatto che $\sin x \le x$ per $x > 0$ e che $\cos z \le 1$ per ogni argomento z, si ottiene

$$\left|\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right| \sin\frac{1}{n^3} \le \sin\frac{1}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$$

e pertanto dal criterio del confronto, la serie data viene maggiorata dalla serie armonica generalizzata di esponente 3 che converge e pertanto anche la serie di partenza converge.

4.4. Serie a termini non negativi: criterio del confronto asintotico

---

❒ **Esercizio 4.4.1. (Esame del 19.09.16)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{n^{\pi+e}}.$$

➻ **R.** Si tratta innanzitutto di una serie a termini positivi. Possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico. Si ha che $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$ quindi siccome $n \to \infty$ allora $\frac{1}{n} \to 0$ e pertanto

$$\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Allora la serie data si comporta, per il criterio del confronto asintotico, come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi+e+1/3}}$$

che è la serie armonica generalizzata di esponente $\pi + e + 1/3 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.4.2. (Esame del 03.02.17)** *Posto*

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n}$$

1) si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

2) Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

R. 1) Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{n} \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2-n^2-1}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = 0$$

2) Dai conti precedenti si ha che

$$a_n \sim \frac{1}{2n^2}$$

quindi essendo $a_n \geq 0$, posso applicare il criterio del confronto asintotico per dedurre che la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha > 1$ quindi converge.

❒ **Esercizio 4.4.3. (Esame del 23.02.17)** *Si studi il comportamento della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n}\left(\cos\frac{1}{n^2}-1\right)$$

R. Si tratta di una serie sempre a termini negativi, quindi può essere trattata con i metodi che si usando per le serie a termini non negativi, in particolare possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
Dai limiti notevoli si ha che

$$\cos z \sim 1-\frac{z^2}{2} \qquad z\to 0$$

quindi essendo $n\to\infty$ si ha che $1/n \to 0^+$ e pertanto si può dire che

$$\cos\frac{1}{n^2} \sim 1-\frac{1}{2n^4}.$$

Pertanto, dal criterio del confronto asintotico, si ha che la serie data si comporta come (nel senso che ha lo stesso carattere) la seguente serie numerica

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n}\frac{1}{2n^4} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

che converge (serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1). Quindi dal criterio del confronto asintotico, anche la serie data converge.

❒ **Esercizio 4.4.4. (Esame del 13.11.17)** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^{5/3}(\log n + 3n)}.$$

Dire se tale serie si comporta come la seguente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1})\,2^{\sin n}}{n^{5/3}(\log n + 3n)}$$

motivando la risposta.

R. si tratta di una serie a termini positivi, quindi ad esempio possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Per $\boxed{n \to \infty}$ si ha

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^{5/3}(\log n + 3n)} \sim \frac{n}{n^{5/3}\,3n} = \frac{1}{3n^{5/3}}$$

perché per $\boxed{n \to \infty}$

$$\sqrt{n^2+1} \sim n \qquad \log n + 3n \sim 3n,$$

quindi la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $5/3 > 1$ e pertanto converge.
Per quanto riguarda la seconda serie, osserviamo che

$$\frac{1}{2} \leq 2^{\sin n} \leq 2,$$

quindi anche la seconda serie è a termini positivi. A questo punto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1})\,2^{\sin n}}{n^{5/3}(\log n + 3n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1})\,2}{n^{5/3}(\log n + 3n)}$$

e la serie a secondo membro è un multiplo della serie di partenza, che converge dal punto precedente. Allora anche la seconda serie converge per il criterio del confronto.

Osserviamo che la condizione necessaria non avrebbe dato informazioni utili: infatti, posto

$$a_n := \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^{5/3}(\log n + 3n)},$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

dai calcoli precedenti.

❒ **Esercizio 4.4.5. (Esame del 11.01.18)** *Sia data la successione*

$$b_n = \frac{\log(2^n + \sqrt{4^n + n^4})}{n^2}.$$

1) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} b_n.$$

2) Studiare il comportamento delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

R.

1) Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \log(2^n + \sqrt{4^n + n^4}) &= \lim_{n\to\infty} \log\left(2^n\left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^4}{2^n}}\right)\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\log 2 + \log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^4}{2^n}}\right) = +\infty\end{aligned}$$

in quanto, dalla gerarchia degli infiniti, per $n \to \infty$

$$\frac{n^4}{2^n} \to 0$$

e dunque dalla continuità della funzione logaritmo

$$\log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{n^4}{2^n}}\right) \to \log 2.$$

A questo punto

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

2) Si tratta di una serie a termini positivi. Si osserva che $b_n \sim \frac{\log 2}{n}$ quindi, dal criterio del confronto asintotico, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si comporta come la serie armonica e pertanto diverge.

❒ **Esercizio 4.4.6. (Esame del 10.07.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right)$$

R.
La serie data è a termini positivi, proviamo ad applicare il criterio del confronto asintotico. Si ha per $n \to \infty$ che $\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \to 0$ e dunque, applicando i limiti notevoli

$$\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) \sim \left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)^2 = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La serie data allora si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$ e pertanto converge dal criterio del confronto asintotico.

❒ **Esercizio 4.4.7 (Esame del 13.11.18).** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin^3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right).$$

R. Siccome $0 < \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \leq 1 < \pi$ allora sicuramente $\sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) > 0$, perciÃš la serie ÃÍ a termini positivi. Osserviamo poi che se $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \to 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}.$$

Pertanto

$$n \sin^3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right) \sim n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\right)^3 = n\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)^3 = n \cdot \frac{1}{n^{9/4}} = \frac{1}{n^{5/4}}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/4}},$$

che converge avendo esponente $\frac{5}{4} > 1$.

❐ **Esercizio 4.4.8 (Esame del 10.04.19).** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)}{n^{4+\pi}} .$$

➻ **R.** Siccome $1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}} > 1$ allora sicuramente $\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) > 0$, perciÃš la serie ÃÍ a termini positivi. Osserviamo poi che se $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} \to 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{n}} .$$

Pertanto

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)}{n^{4+\pi}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}}{n^{4+\pi}} = \frac{1}{n^{1/4}\cdot n^{4+\pi}} = \frac{1}{n^{17/4+\pi}} .$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{17/4+\pi}} ,$$

che converge avendo esponente $\frac{17}{4}+\pi > 1$.

❐ **Esercizio 4.4.9 (Esame del 05.06.19).** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{4n}{\pi+4n^3}\right) .$$

➻ **R.** Siccome $0 \leq \frac{4n}{\pi+4n^3} < 1 < \pi$ (poichÃľ il denominatore ÃÍ sempre maggiore del numeratore) allora sicuramente $\sin\left(\frac{4n}{\pi+4n^3}\right) \geq 0$, perciÃš la serie ÃÍ a termini non negativi. Inoltre, siccome il primo termine ÃÍ nullo (e solo lui), possiamo considerare direttamente la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{4n}{\pi+4n^3}\right) .$$

Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{\pi+4n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{4n^3\left(\frac{\pi}{n^3}+1\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2\underbrace{\left(\frac{\pi}{n^3}+1\right)}_{\downarrow\atop 1}} = 0,$$

quindi dai limiti notevoli si ha

$$\sin\left(\frac{4n}{\pi+4n^3}\right) \sim \frac{4n}{\pi+4n^3} = \frac{1}{n^2\left(\frac{\pi}{n^3}+1\right)} \sim \frac{1}{n^2}\,.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

che converge avendo esponente $2 > 1$.

❒ **Esercizio 4.4.10 (Esame del 14.11.19).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5-\log n}}\right)$$

➼ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Se $n \to +\infty$ allora, usando anche la gerarchia degli infiniti

$$\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5-\log n}} \sim \frac{2n}{n^{5/3}} = \frac{2}{n^{2/3}} \to 0$$

quindi possiamo usare il confronto asintotico $\sin z \sim z$ quando $z \to 0$ ottenendo

$$\sin^2\left(\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5-\log n}}\right) \sim \left(\frac{2}{n^{2/3}}\right)^2 = \frac{4}{n^{4/3}}$$

In conclusione, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta (a meno di una costante) come la serie armonica generalizzata di esponente $4/3 > 1$ e quindi converge.

❒ **Esercizio 4.4.11 (Esame del 14.11.19).**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^3\left(\frac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt[3]{n^6-\log n}}\right)$$

➼ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Se $n \to +\infty$ allora, usando anche la gerarchia degli infiniti

$$\frac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt[3]{n^6-\log n}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{3/2}} \to 0$$

quindi possiamo usare il confronto asintotico $\sin z \sim z$ quando $z \to 0$ ottenendo

$$\sin^3\left(\frac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt[3]{n^6-\log n}}\right) \sim \left(\frac{2}{n^{3/2}}\right)^3 = \frac{8}{n^{27/8}}$$

In conclusione, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta (a meno di una costante) come la serie armonica generalizzata di esponente $27/8 > 1$ e quindi converge.

❒ **Esercizio 4.4.12 (Esame del 09.07.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4-\sqrt{n}}}\right)$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Se $n \to +\infty$ allora, usando anche la gerarchia degli infiniti

$$\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4-\sqrt{n}}} \sim \frac{n}{n^{4/3}} = \frac{1}{n^{1/3}} \to 0$$

quindi possiamo usare il confronto asintotico $\sin z \sim z$ quando $z \to 0$ ottenendo

$$\sin^2\left(\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^4-\sqrt{n}}}\right) \sim \left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)^2 = \frac{1}{n^{2/3}}$$

In conclusione, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta (a meno di una costante) come la serie armonica generalizzata di esponente $2/3 < 1$ e quindi diverge.

❒ **Esercizio 4.4.13 (Esame del 23.11.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^{5/2}+e^{-n^2}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n \to 0$

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, si ha anche

$$n^{5/2}+e^{-n^2} \sim n^{5/2}$$

in quanto $e^{-n^2} \to 0$; quindi globalmente

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^{5/2} + e^{-n^2}} \sim \frac{1}{n^{5/2+2}} = \frac{1}{n^{9/2}}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $9/2 > 1$ che converge.

❐ **Esercizio 4.4.14 (Esame del 23.11.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^2} - 1}{n\sqrt{n} + \sin^2(n^2)}$$

➾ **R.**
Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n^2 \to 0$

$$e^{1/n^2} - 1 \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, si ha anche

$$n\sqrt{n} + \sin^2(n^2) \sim n\sqrt{n} = n^{3/2}$$

in quanto $\sin^2(n^2)$ è una quantità limitata; quindi globalmente

$$\frac{e^{1/n^2} - 1}{n\sqrt{n} + \sin^2(n^2)} \sim \frac{1}{n^{3/2+2}} = \frac{1}{n^{7/2}}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $7/2 > 1$ che converge.

❐ **Esercizio 4.4.15 (Esame del 23.11.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3 + \arctan(n^2)}$$

➾ **R.**
Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n^2 \to 0$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, si ha anche

$$n^3 + \arctan(n^2) \sim n^3$$

in quanto $\arctan(n^2)$ è una quantità limitata; quindi globalmente

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3+\arctan(n^2)} \sim \frac{1}{n^5}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $5 > 1$ che converge.

❒ **Esercizio 4.4.16 (Esame del 01.02.21).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}$$

➻ R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $2/n^2 \to 0$

$$\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right) \sim \frac{2}{n^2},$$

quindi, dalla continuità della funzione logaritmo

$$\sqrt{\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} \sim \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta, a meno di una costante, come la serie armonica che diverge.

❒ **Esercizio 4.4.17 (Esame del 22.02.21).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}-1}{n\sqrt{n}}$$

➻ R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n \to 0$

$$e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n},$$

e pertanto

$$\frac{e^{1/n}-1}{n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{5/2}}$$

quindi, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $5/2 > 1$ e pertanto converge.

4.5. Serie a termini non negativi: criterio del rapporto

❒ **Esercizio 4.5.1. (Esame del 12.01.16)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$$

➽ **R.**
Per questa serie utilizziamo il criterio del rapporto. Posto

$$a_n = \frac{n!3^n}{n^n}$$

andiamo a studiare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!\,3\,3^n\,n^n}{(n+1)\,(n+1)^n\,n!\,3^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{e} > 1$$

quindi dal criterio del rapporto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.2. (Esame del 19.07.16)** *Data la successione* $a_n = \dfrac{3^n}{n!+(n+1)!}$*, determinare quanto vale* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*. Studiare poi la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

➽ **R.** Si vede immediatamente che a_n è a termini positivi. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!+(n+2)!}\,\frac{n!+(n+1)!}{3^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n![1+n+1]}{(n+1)![1+n+2]} = \frac{3(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 0.\end{aligned}$$

A questo punto, dal criterio del rapporto, essendo $0 < 1$ si ha che la serie data converge.

❒ **Esercizio 4.5.3. (Esame del 15.02.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{2^{\sqrt{n}}(n+3)!}$$

➼ **R.**

Causa presenza del fattoriale, proviamo ad usare il criterio del rapporto (si può usare in quanto la serie è a termini positivi). Poniamo

$$a_n := \frac{n^{n+1}}{2^{\sqrt{n}}(n+3)!}.$$

Andiamo a calcolare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2}\, 2^{\sqrt{n}}\, (n+3)!}{2^{\sqrt{n+1}}\, (n+4)!\, n^{n+1}} = (n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{1}{n+4} \frac{1}{2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}.$$

Osserviamo che

$$2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 2^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} = e^{\frac{\log 2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} \to 1$$

quindi globalmente, sfruttando il limite notevole $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ si ottiene

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e > 1,$$

pertanto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.4. (Esame del 12.06.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n+1}$$

➼ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. Proviamo a usare il criterio del rapporto. Osserviamo prima di tutto che

$$a_n := \frac{(n!)^2}{n^n+1} \sim b_n := \frac{(n!)^2}{n^n}$$

quindi applichiamo il criterio del rapporto alla serie di termine generale b_n. Si ha

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to +\infty$$

in quanto $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 1/e$, quindi dal criterio del rapporto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.5. (Esame del 26.06.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(2n)!}{n^{2n}}$$

➼ **R.**

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto, essendo una serie a termini positivi. Posto

$$a_n = \frac{4^n(2n)!}{n^{2n}},$$

proviamo a calcolare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}\,(2n+2)!}{(n+1)^{2(n+1)}}\,\frac{n^{2n}}{4^n\,(2n!)} = 4\,(2n+2)\,(2n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}\frac{1}{(n+1)^2} \to \frac{16}{e^2} > 1$$

quindi la serie data diverge, dal criterio del rapporto.

❒ **Esercizio 4.5.6. (Esame del 10.07.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n-1)^n}$$

➼ **R.**

Proviamo ad applicare il criterio del rapporto, essendo la serie data a termini positivi. Posto

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!(2n-1)^n},$$

proviamo a calcolare

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(2n+1)^{n+1}}\,\frac{(2n-1)^n\,n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n\frac{1}{2n+1} \to \frac{2}{e} < 1$$

avendo sfruttato il limite notevole

$$\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n = \left[\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^{-\frac{2n+1}{2}}\right]^{\frac{-2n}{2n+1}} \to e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Quindi la serie data converge dal criterio del rapporto.

❒ **Esercizio 4.5.7. (Esame del 11.09.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{\sqrt{n}}(n+1)!}$$

➻ **R.**
Causa presenza del fattoriale, proviamo ad usare il criterio del rapporto (si può usare in quanto la serie è a termini positivi). Poniamo
$$a_n := \frac{n^n}{3^{\sqrt{n}}(n+1)!}.$$
Andiamo a calcolare
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\,3^{\sqrt{n}}\,(n+1)!}{3^{\sqrt{n+1}}\,(n+2)!\,n^n} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{n+2}\,\frac{1}{3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}.$$
Osserviamo che
$$3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = 3^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} = e^{\frac{\log 3}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}} \to 1$$
quindi globalmente, sfruttando il limite notevole $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ si ottiene
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to e > 1,$$
pertanto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.8 (Esame del 10.09.19).** *Studiare la convergenza della serie numerica*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

➻ **R.**
La serie ÃÍ a termini positivi. Causa presenza del fattoriale, proviamo ad utilizzare il criterio del rapporto. Poniamo
$$a_n := \frac{n^{-n/2}}{\sqrt{n!}}$$
e andiamo a calcolare
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{-(n+1)/2}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{n^{-n/2}} = \frac{(n+1)^{-n/2}(n+1)^{-1/2}}{\sqrt{(n+1)}\sqrt{n!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{n^{-n/2}} = \frac{(n+1)^{-1/2}}{\sqrt{(n+1)}} \cdot \frac{(n+1)^{-n/2}}{n^{-n/2}}$$
$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n/2}.$$

Osserviamo che

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n/2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{-1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\,,$$

dunque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\substack{\downarrow\\0}}\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n/2}}_{\substack{\downarrow\\\frac{1}{\sqrt{e}}}} = 0 < 1\,.$$

Pertanto la serie data converge.

❒ **Esercizio 4.5.9 (Esame del 15.11.19).** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n/2)^{n/2}}{\sqrt{n!}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del rapporto. Poniamo

$$b_n := \frac{(n/2)^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Si ha

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{(n+1)!}}\,\frac{\sqrt{n!}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}\frac{(n+1)^{1/2}}{\sqrt{n+1}}\,\frac{2^{n/2}}{2^{n/2}\sqrt{2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{2}} \to \sqrt{\frac{e}{2}} > 1$$

in quanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, quindi dal criterio del rapporto la serie data diverge.

❒ **Esercizio 4.5.10 (Esame del 06.07.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n/3)^{n/3}}{\sqrt[3]{n!}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del rapporto. Poniamo

$$a_n := \frac{(n/3)^{n/3}}{\sqrt[3]{n!}}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{\frac{n+1}{3}}}{\sqrt[3]{(n+1)!}} \frac{\sqrt[3]{n!}}{\left(\frac{n}{3}\right)^{\frac{n}{3}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/3} \frac{(n+1)^{1/3}}{\sqrt[3]{n+1}} \frac{3^{n/3}}{3^{n/3}\sqrt[3]{3}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/3} \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \to \sqrt[3]{\frac{e}{3}} < 1$$

in quanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, quindi dal criterio del rapporto la serie data converge.

4.6. Serie a termini di segno alternato: criterio di Leibniz

❒ **Esercizio 4.6.1. (Esame del 15.12.15)** *Studiare la convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}$$

➭ **R.** Si tratta di una serie a termini di segno alternato. La scriviamo come

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}.$$

L'idea è quella di usare il criterio di Leibniz. Posto

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}},$$

Pertanto è possibile applicare il criterio di Leibniz e la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.6.2. (Esame del 12.01.17)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}$$

➭ **R.** Si tratta di una serie a termini di segno alternato. Il fatto che ci sia $(-1)^{n+1}$ oppure $(-1)^n$ non cambia nulla: eventualmente si scrive $(-1)^{n+1} = (-1)^n(-1)$ e si studia la convergenza della serie

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}$$

il cui comportamento è senz'altro paragonabile a quello della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt[5]{n}}$$

(in particolare, se converge la prima, converge anche la seconda). Studiamo dunque quest'ultima. Poniamo

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n} + 2\sqrt[5]{n}}.$$

Sicuramente $a_n > 0$ e anche $a_n \to 0$. Inoltre siccome la successione $\sqrt{n} + 2\sqrt[5]{n}$ è crescente (basta applicare la definizione), si ha che a_n è decrescente. Sono dunque verificate le ipotesi del criterio di Leibniz e la serie converge, quindi anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.6.3. (Esame del 26.06.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{3n-1}}$$

➻ **R.**
Si tratta di una serie a termini di segno alternato. Proviamo ad applicare il criterio di Leibniz. Poniamo

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[3]{3n-1}}.$$

Si ha $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ e anche a_n decrescente. Infatti banalmente $3n-1 \leq 3(n+1)-1$ e anche applicando la radice terza, la funzione al denominatore rimane (debolmente) crescente dunque a_n è debolmente decrescente. Allora dal criterio di Leibniz la serie data converge.

❒ **Esercizio 4.6.4 (Esame del 14.12.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{4n+2}}$$

➻ **R.**
Si tratta di una serie a termini di segno alternato. L'idea è quella di usare il criterio di Leibniz. Poniamo

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[3]{4n+2}}$$

Si verifica facilmente che $a_n > 0$, $a_n \to 0$ e a_n è debolmente decrescente. Dunque dal criterio di Leibniz la serie data converge.

4.7. Serie a termini di segno qualunque: criterio della convergenza assoluta

❐ **Esercizio 4.7.1. (Esame del 12.01.16)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2 + 3n + 2}$$

R.
Posto

$$a_n = \frac{\cos n}{n^2 + 3n + 2},$$

si verifica rapidamente dal teorema dei carabinieri che $a_n \to 0$ quindi dalla condizione necessaria non si può concludere nulla a priori sulla convergenza della serie.
Studiamo la serie attraverso il criterio della convergenza assoluta. Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2 + 3n + 2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + 3n + 2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$$

L'ultima serie è a termini positivi ed essendo $n^2 + 3n + 2 \sim n^2$ per $n \to \infty$ allora essa si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente 2 e quindi converge.
Dal criterio della convergenza assoluta, anche la serie di partenza converge.

❐ **Esercizio 4.7.2. (Esame del 19.07.17)** *Studiare la convergenza della serie numerica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n + 2}{n^{15} + 3}$$

R. Osserviamo che $1 < \cos n + 2 < 3$ in quanto $-1 < \cos n < 1$. L'idea è quella di usare il criterio della convergenza assoluta. Si ha

$$\left| (-1)^n \frac{\cos n + 2}{n^{15} + 3} \right| = \frac{\cos n + 2}{n^{15} + 3} \leq \frac{3}{n^{15} + 3} \sim \frac{3}{n^{15}}$$

quindi la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^{15} + 3}$$

si comporta (a meno di una costante) come la serie armonica generalizzata di esponente 15 che ovviamente converge. Allora dal criterio del confronto anche la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n + 2}{n^{15} + 3}$$

converge e infine dal crtierio della convergenza assoluta anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.3. (Esame del 15.02.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)\log(2n)}{n^3\sqrt{n+2}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini di segno alternato; causa presenza di una potenza di n abbastanza grande al denominatore, proviamo ad usare il criterio della convergenza assoluta. Si ha, usando il fatto che $\log(2n) \leq 2n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\left|(-1)^n \frac{(n+1)\log(2n)}{n^3\sqrt{n+2}}\right| \leq \frac{(n+1)\log(2n)}{n^3\sqrt{n+2}} \leq \frac{2n(n+1)}{n^3\sqrt{n+2}} \sim \frac{2n^2}{n^3\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Allora, dal criterio del confronto asintotico, la serie che maggiora la nostra serie dei valori assoluti si comporta come una serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie dei valori assoluti converge e dal criterio della convergenza assoluta anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.4. (Esame del 12.06.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,[\sin(n^{4/5})] \left(e^{1/n^3} - 1\right)$$

R.

1) La serie data non è a termini positivi, in quanto il termine $\sin(n^{4/5})$ oscilla tra -1 e 1 (notare che $\sin(n^{4/5}) \neq \sin(1/n^{4/5})$). Quindi proviamo a usare il criterio della convergenza assoluta. Si ha

$$\left|\sqrt{n}[\sin(n^{4/5})](e^{1/n^3} - 1)\right| \leq \sqrt{n}\,(e^{1/n^3} - 1) \sim \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$$

quindi la serie dei valori assoluti è maggiorata da una serie che si comporta come una serie armonica generalizzata di esponente $5/2$ e pertanto converge. Allora dal criterio del confronto asintotico (e dal criterio del confronto) anche la serie dei valori assoluti converge e pertanto, dal criterio della convergenza assoluta, anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.5. (Esame del 11.09.18)** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+\pi)\log(\pi n)}{n^{\pi}\sqrt{n+\pi}}$$

R.

Si tratta di una serie a termini di segno alternato; causa presenza di una potenza di n abbastanza grande al denominatore, proviamo ad usare il criterio della convergenza assoluta. Si ha, usando il fatto che $\log(\pi\, n) \leq \pi\, n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\left|(-1)^n \frac{(n+\pi)\log(\pi\, n)}{n^{\pi}\sqrt{n+\pi}}\right| \leq \frac{(n+\pi)\log(\pi\, n)}{n^{\pi}\sqrt{n+\pi}} \leq \frac{\pi\, n(n+\pi)}{n^{\pi}\sqrt{n+\pi}} \sim \frac{\pi\, n^2}{n^{\pi}\sqrt{n}} = \frac{\pi}{n^{\pi-3/2}}.$$

Allora, dal criterio del confronto asintotico, la serie che maggiora la nostra serie dei valori assoluti si comporta come una serie armonica generalizzata di esponente $\pi - 3/2 > 1$ pertanto converge. Allora anche la serie dei valori assoluti converge e dal criterio della convergenza assoluta anche la serie di partenza converge.

❒ **Esercizio 4.7.6 (Esame del 21.01.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n^n}$$

R.

Ci sono diversi modi di risolvere l'esercizio. Innanzitutto notiamo che si tratta di una serie a termini oscillanti. A causa del termine n^n al denominatore, tentiamo di usare il criterio della convergenza assoluta.

Studiamo dunque la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^n}$$

che è una serie a termini positivi, con il criterio del rapporto. Poniamo

$$a_n = \frac{n-1}{n^n}.$$

Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n-1} = \frac{n}{(n+1)(n-1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 0 < 1$$

in quanto

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to e \qquad\qquad \frac{n}{(n+1)(n-1)} \to 0.$$

Allora dal criterio del rapporto, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^n}$$

converge e dunque, dal criterio della convergenza assoluta, anche la serie di partenza converge.

4.8. Serie dipendenti da un parametro

❒ **Esercizio 4.8.1. (Esame del 06.05.16)** *Sia data la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

1) Dire se converge per il valore $\alpha = 2$, motivando la risposta.
2) Determinare i valori di α per cui essa diverge.

R. Per ogni valore di α la serie data è a termini positivi per cui possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
1) Se $n \to \infty$ allora $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ e pertanto

$$\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

da cui la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-3/2}}$$

che diverge in quanto serie armonica generalizzata di esponente minore o uguale a 1. Pertanto se $\alpha = 2$ la serie di partenza diverge.
2) Ripetendo analogo ragionamento si ottiene che, per il criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha\sqrt{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

che diverge se

$$\frac{1}{2} - \alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq -\frac{1}{2}.$$

❒ **Esercizio 4.8.2. (Esame del 08.06.17)** *Determinare l'insieme dei numeri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3\sqrt{n} + n^2)(e^{1/\sqrt{n}} - 1)^{\alpha}$$

converge.

➼ **R.** Si tratta di una serie a termini non negativi, quindi provo a usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to \infty$ si ha

$$3\sqrt{n} + n^2 \sim n^2 \qquad e^{1/\sqrt{n}} - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

dunque la serie data si comporta come

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2-2}}.$$

Si tratta di una serie armonica generalizzata di esponente $\frac{\alpha}{2} - 2$ che converge se $\frac{\alpha}{2} - 2 > 1$ cioè $\alpha > 6$

❒ **Esercizio 4.8.3 (Esame del 08.01.19).** *Determinare l'insieme dei numeri reali $\alpha > 0$ tali per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log\left(1 + n^{-1/3}\right)}$$

risulta convergente.

➼ **R.** Siccome $1 + n^{-1/3} > 1$ allora sicuramente $\log\left(1 + n^{-1/3}\right) > 0$, perciÃš la serie ÃÍ a termini positivi. Osserviamo poi che se $n \to +\infty$ allora $n^{-1/3} \to 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\log\left(1 + n^{-1/3}\right) \sim n^{-1/3}.$$

Pertanto

$$\frac{1}{n^{\alpha} \log\left(1 + n^{-1/3}\right)} \sim \frac{1}{n^{\alpha} \cdot n^{-1/3}} = \frac{1}{n^{\alpha - 1/3}}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1/3}}\,,$$
che converge se $\alpha - 1/3 > 1$ cioÃÍ se $\alpha > 4/3$.

❐ **Esercizio 4.8.4 (Esame del 17.06.19).** *Determinare l'insieme dei numeri reali α tali per cui la serie*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}}$$
risulta convergente.

➽ **R.** Siccome $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1 < \pi$ allora sicuramente $\sin \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, perciÃš la serie ÃÍ a termini positivi. Conviene spezzare la serie nel seguente modo:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^{\alpha+5}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} =: I + II\,.$$
Per il primo termine si ha
$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+4}}\,,$$
che essendo una serie armonica generalizzata di esponente $\alpha + 4$ converge solo se $\alpha + 4 > 1$ cioÃÍ se $\alpha > -3$. Per quanto riguarda il secondo termine osserviamo che se $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, quindi dai limiti notevoli si ha
$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$
Pertanto
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} = \frac{\frac{1}{n}}{n^{\alpha+5}} = \frac{1}{n \cdot n^{\alpha+5}} = \frac{1}{n^{\alpha+6}}\,.$$
Per il criterio del confronto asintotico la serie II si comporta come la serie armonica generalizzata
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+6}}\,,$$
che converge se $\alpha + 6 > 1$ cioÃÍ se $\alpha > -5$. Quindi la serie di partenza ÃÍ tale che
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha+5}} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+4}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+6}}\,,$$

e converge solo se entrambe le serie convergono. Facendo l'intersezione delle due condizioni $\alpha > -3$ e $\alpha > -5$ si ottiene che la serie di partenza converge se $\alpha > -3$.

❐ **Esercizio 4.8.5 (Esame del 22.07.19).** *Determinare l'insieme dei numeri reali* $\alpha > 0$ *tali per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}\right)$$

risulta convergente.

➾ **R.** La serie ÃÍ a termini positivi. Osserviamo poi che se $n \to +\infty$ allora $\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}} \to 0$ essendo $\alpha > 0$, quindi dai limiti notevoli si ha

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}.$$

Pertanto

$$n\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}\right) \sim n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^\alpha}}\right)^2 = n\left(\frac{1}{n^{\alpha/3}}\right)^2 = n \cdot \frac{1}{n^{2\alpha/3}} = \frac{1}{n^{2\alpha/3-1}}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico la serie di partenza si comporta come la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha/3-1}},$$

che converge se $\frac{2}{3}\alpha - 1 > 1$ cioÃÍ se $\alpha > 3$.

❐ **Esercizio 4.8.6 (Esame del 07.01.20).** *Studiare, al variare del parametro* $\alpha > 0$, *il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 2\log n}{n^\alpha \sqrt[3]{n^2+1}}$$

➾ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha (usando anche la gerarchia degli infiniti)

$$\frac{\sqrt{n} + 2\log n}{n^\alpha \sqrt[3]{n^2+1}} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha\, n^{2/3}} = \frac{1}{n^{\alpha + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\alpha+1/6}}$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha + 1/6$ che converge quando

$$\alpha + \frac{1}{6} > 1 \iff \alpha > \frac{5}{6}.$$

❒ **Esercizio 4.8.7 (Esame del 24.06.20).** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica al variare del parametro* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^\beta}$$

➼ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha

$$\frac{n^3 - 1}{n^\beta} \sim \frac{n^3}{n^\beta} = \frac{1}{n^{\beta - 3}}$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\beta - 3$ che converge quando

$$\beta - 3 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta > 4.$$

❒ **Esercizio 4.8.8 (Esame del 08.09.20).** *Studiare, al variare del parametro* $\alpha > 0$, *il carattere della seguente serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + 1/n)}{(n+1)^\alpha \sqrt[3]{n^4 + 1}}$$

➼ **R.**

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n \to 0$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

D'altra parte, per $n \to +\infty$, si ha anche

$$(n+1)^\alpha \sqrt[3]{n^4 + 1} \sim n^\alpha \, n^{4/3} = n^{\alpha + 4/3}$$

quindi globalmente

$$\frac{\log(1 + 1/n)}{(n+1)^\alpha \sqrt[3]{n^4 + 1}} \sim \frac{1}{n^{\alpha + 7/3}}.$$

Allora dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha + 7/3$ che converge quando

$$\alpha + 7/3 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > -4/3.$$

Visto che per ipotesi $\alpha > 0$, si ha che la serie data converge per tutti i valori di $\alpha > 0$.

❒ **Esercizio 4.8.9 (Esame del 08.06.21).** *Determinare per quali valori del parametro $\alpha > 0$ converge la serie seguente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n^\alpha} - 1}{n^3}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha, dai limiti notevoli, visto che $1/n^\alpha \to 0$

$$e^{1/n^\alpha} - 1 \sim \frac{1}{n^\alpha},$$

e pertanto

$$\frac{e^{1/n^\alpha} - 1}{n^3} \sim \frac{1}{n^{3+\alpha}}$$

quindi, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $3 + \alpha$ e pertanto converge se

$$3 + \alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > -2$$

Siccome per ipotesi deve essere $\alpha > 0$, si ha che la serie data converge per ogni valore di $\alpha > 0$.

❒ **Esercizio 4.8.10 (Esame del 22.06.21).** *Studiare la convergenza della seguente serie numerica al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{(n^\alpha + 5)}$$

R.

Si tratta di una serie a termini positivi. L'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico. Per $n \to +\infty$, si ha

$$\frac{n^3 - 1}{(n^\alpha + 5)} \sim \frac{n^3}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-3}}$$

quindi, dal criterio del confronto asintotico, la serie data si comporta come la serie armonica generalizzata di esponente $\alpha - 3$ e pertanto converge se

$$\alpha - 3 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 4.$$

CAPITOLO 5

Campi ordinati

5.1. Richiami di teoria

➠ CARATTERIZZAZIONI DI ESTREMO SUPERIORE ED ESTREMO INFERIORE

$$\xi = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \ \ a \leq \xi \\ \forall \lambda < \xi, \ \ \exists \bar{a} \in A, \ \lambda < \bar{a} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

$$\eta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall a \in A, \ \ \eta \leq a \\ \forall \lambda > \eta, \ \ \exists \bar{a} \in A, \ \lambda > \bar{a}. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

➠ Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}. \tag{5.1.3}$$

5.2. Esercizi proposti

❒ **Esercizio 5.2.1. (Esame del 13.11.18)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2}{n+1} - 1 : \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = 1$

➬ **R.**

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\xi = 1$ ÃÍ un maggiorante. Occorre far vedere che

$$\frac{2}{n+1} - 1 \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 0$. Ma questo ÃÍ certamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.
• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = 1$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{2}{\bar{n}+1} - 1 = 1\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $\bar{n} = 0$, che corrisponde ad un valore accettabile. Quindi $\boxed{\xi = 1 = \sup A = \max A}$ perchÃľ $1 \in A$ (ed ÃÍ raggiunto per $n = 0$).

❐ **Esercizio 5.2.2. (Esame del 08.01.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2\sqrt{n} - n}{n+1} \, : \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = \frac{1}{2}$.

➾ **R.**
• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\xi = \frac{1}{2}$ ÃÍ un maggiorante. Occorre far vedere che

$$\frac{2\sqrt{n} - n}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

ma questo ÃÍ sicuramente vero per quanto osservato al passo precedente.
• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = \frac{1}{2}$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{2\sqrt{\bar{n}} - \bar{n}}{\bar{n}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Dal passo 0 si vede che $\bar{n} = 1$. Quindi $\boxed{\xi = \frac{1}{2} = \sup A = \max A}$ perchÃľ $\frac{1}{2} \in A$ (ed ÃÍ raggiunto per $n = 1$).

❐ **Esercizio 5.2.3. (Esame del 23.01.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \log\left(\frac{n+2}{2n+1}\right) \, : \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = \log \frac{1}{2}$ *mentre* $\min A$ *non esiste.*

R.

• <u>passo 1:</u> dimostriamo che $\eta = \log \frac{1}{2}$ ÃÍ un minorante. Occorre far vedere che

$$\log\left(\frac{n+2}{2n+1}\right) \geq \log\frac{1}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

ovvero che

$$\frac{n+2}{2n+1} \geq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 2(n+2) \geq 2n+1 \;\Leftrightarrow\; 4 \geq 1 \quad \text{VERO}\,.$$

• <u>passo 2:</u> vediamo se $\eta = \log \frac{1}{2}$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\log\left(\frac{\bar{n}+2}{2\bar{n}+1}\right) = \log\frac{1}{2}\,,$$

ovvero tale che

$$\frac{\bar{n}+2}{2\bar{n}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $4 = 1$, quindi non esiste nessun $\bar{n}$ che realizzi l'uguaglianza. PerciÃš $\log \frac{1}{2} \notin A$.

• <u>passo 3:</u> dai passi 1 e 2 abbiamo provato che $\eta = \log \frac{1}{2}$ ÃÍ un minorante di A che non appartiene all'insieme. Per dimostrare che si ha $\eta = \inf A$ occorre far vedere che ÃÍ il massimo dei minoranti, cioÃÍ che preso un qualunque numero maggiore di $\log \frac{1}{2}$ esso non ÃÍ un minorante. CioÃÍ, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\log\left(\frac{n_0+2}{2n_0+1}\right) < \log\frac{1}{2} + \varepsilon\,. \tag{3.1}$$

Per fare ciÃš conviene ricordare che $\log \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)$, perciÃš dalla definizione di limite si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha

$$\left|\log\left(\frac{\bar{n}+2}{2\bar{n}+1}\right) - \log\frac{1}{2}\right| = \log\left(\frac{\bar{n}+2}{2\bar{n}+1}\right) - \log\frac{1}{2} < \varepsilon$$

dove abbiamo potuto togliere il valore assoluto essendo la successione decrescente. Ma allora (3.1) ÃÍ verificata scegliendo $n_0 \geq \bar{n}$. Quindi $\boxed{\inf A = \log \frac{1}{2}}$, mentre $\boxed{\min A \text{ non esiste}}$.

❒ **Esercizio 5.2.4. (Esame del 23.02.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n + 1}{n + (-1)^{n+1}} \;:\; n \in \mathbb{N},\; n > 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = 0$.

➼ **R.**
Innanzitutto, posto $a_n = \frac{(-1)^n+1}{n+(-1)^{n+1}}$, possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n-1} & n \text{ pari,} \\ 0 & n \text{ dispari, } n > 1. \end{cases}$$

Quindi, tenendo conto del fatto che se n ÃÍ pari allora $n = 2k$ con $k = 1, 2, \ldots$, possiamo riscrivere A come

$$A = \left\{ \frac{2}{2k-1} \,:\, k = 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}\,.$$

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\eta = 0$ ÃÍ un minorante. Siccome banalmente $0 \geq 0$, rimane da far vedere che

$$\frac{2}{2k-1} \geq 0 \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots\,.$$

Ma anche questo ÃÍ certamente vero.
• <u>PASSO 2:</u> banalmente $\eta = 0$ appartiene all'insieme (viene raggiunto da tutti gli input dispari). Quindi $\boxed{\eta = 0 = \inf A = \min A}$ perchÃľ $0 \in A$.

❒ **Esercizio 5.2.5. (Esame del 10.04.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} - 2 \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = -2$ *e che il minimo non esiste.*

➼ **R.**
• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\eta = -2$ ÃÍ un minorante. Occorre far vedere che

$$\frac{1}{n+1} - 2 \geq -2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 0$. Ma questo ÃÍ certamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.
• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\eta = -2$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{1}{\bar{n}+1} - 2 = -2\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $1 = 0$, quindi non esiste nessun $\bar{n}$ che realizzi l'uguaglianza. PerciÃš $-2 \notin A$.

• <u>PASSO 3:</u> dai passi 1 e 2 abbiamo provato che $\eta = -2$ Ãĺ un minorante di A che non appartiene all'insieme. Per dimostrare che si ha $\eta = \inf A$ occorre far vedere che Ãĺ il massimo dei minoranti, cioÃĺ che preso un qualunque numero maggiore di -2 esso non Ãĺ un minorante. CioÃĺ, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{1}{n_0+1} - 2 < -2 + \varepsilon\,.$$

D'altra parte

$$\frac{1}{n_0+1} - 2 < -2 + \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; n_0 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

che Ãĺ vero per la proprietÃă di Archimede. Quindi $\boxed{\inf A = -2}$, mentre $\boxed{\min A \text{ non esiste}}$.

❒ **Esercizio 5.2.6. (Esame del 05.06.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{n-3}{n+3} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = -1$.

R.

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\eta = -1$ Ãĺ un minorante. Occorre far vedere che

$$\frac{n-3}{n+3} \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 0$. Ma questo Ãĺ certamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\eta = -1$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{\bar{n}-3}{\bar{n}+3} = -1\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $\bar{n} = 0$, che corrisponde ad un valore accettabile. Quindi $\boxed{\eta = -1 = \inf A = \min A}$ perchÃľ $-1 \in A$ (ed Ãĺ raggiunto per $n = 0$).

❒ **Esercizio 5.2.7. (Esame del 17.06.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : 4^x + 2^{x+1} - 4 \geq 0 \right\}.$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$, $\sup A = +\infty$ *mentre* $\max A$ *non esiste.*

R.

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che $\eta = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$ ÃÍ un minorante. Occorre far vedere che

$$4^x + 2^{x+1} - 4 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Basta infatti risolvere la disequazione

$$2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 4 \geq 0\,.$$

Sostituendo $t = 2^x$ si ha

$$t^2 + 2t - 4 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; t \leq -1-\sqrt{5} \vee t \geq -1+\sqrt{5}\,,$$

ovvero in termini di x

$$2^x \leq -1-\sqrt{5} \;\vee\; 2^x \geq -1+\sqrt{5}\,.$$

Siccome $2^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la prima alternativa non ÃÍ sicuramente mai verificata, e quindi la soluzione si riduce a

$$x \geq \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right).$$

Quindi possiamo riscrivere A come

$$A = \left[\log_2\left(-1+\sqrt{5}\right), +\infty\right).$$

A questo punto $\eta = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$ ÃÍ senz'altro un minorante per A.
Dimostriamo ora che l'insieme A non ÃÍ limitato superiormente. Questo ci permetterÃă di concludere che $\sup A = +\infty$ mentre $\max A$ non esiste. Dire che un insieme non ÃÍ limitato superiormente significa dire che l'insieme dei maggioranti ÃÍ vuoto, cioÃÍ che per ogni $M > 0$ esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che $4^{\bar{x}} + 2^{\bar{x}+1} - 4 \geq 0$ e $\bar{x} > M$. In virtÃź di quanto visto al passo precedente basta prendere
$\bar{x} = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$ se $M < \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$,
$\bar{x} = M+1$ se $M \geq \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$.
Quindi $\boxed{\sup A = +\infty}$ mentre $\boxed{\max A \text{ non esiste}}$.

• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\eta = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right)$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{x}$ tale che

$$4^{\bar{x}} + 2^{\bar{x}+1} - 4 \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{x} = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right).$$

Ma questo ÃÍ sicuramente vero per quanto detto in precedenza.
Quindi $\boxed{\eta = \log_2\left(-1+\sqrt{5}\right) = \inf A = \min A}$ perchÃľ $\log_2\left(-1+\sqrt{5}\right) \in A$.

❒ **Esercizio 5.2.8. (Esame del 23.07.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{\pi}{n+2} - 1 : \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = \frac{\pi}{2} - 1$.

➬ **R.**

• PASSO 1: dimostriamo che $\xi = \frac{\pi}{2} - 1$ ÃÍ un maggiorante. Occorre far vedere che

$$\frac{\pi}{n+2} - 1 \leq \frac{\pi}{2} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 0$. Ma questo ÃÍ certamente vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.
• PASSO 2: vediamo se $\xi = \frac{\pi}{2} - 1$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{\pi}{\bar{n}+2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $\bar{n} = 0$, che corrisponde ad un valore accettabile. Quindi $\boxed{\xi = \frac{\pi}{2} - 1 = \sup A = \max A}$ perchÃľ $\frac{\pi}{2} - 1 \in A$ (ed ÃÍ raggiunto per $n = 0$).

❒ **Esercizio 5.2.9. (Esame del 10.09.19)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2^n}{(-2)^n + 4} : \, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Dimostrare che $\max A = 1$.

➬ **R.**

• PASSO 1: dimostriamo che $\xi = 1$ ÃÍ un maggiorante. Occorre far vedere che

$$\frac{2^n}{(-2)^n + 4} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\, n \neq 0\,.$$

Innanzitutto, posto $a_n = \frac{2^n}{(-2)^n+4}$, possiamo riscrivere nel seguente modo:

$$a_n = \frac{2^n}{(-1)^n \cdot 2^n + 4} = \begin{cases} \dfrac{2^n}{2^n + 4} & n \text{ pari}, \\ \dfrac{2^n}{-2^n + 4} & n \text{ dispari}. \end{cases}$$

Per n pari il denominatore ÃÍ sempre positivo, quindi si ha

$$\frac{2^n}{2^n+4} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 4 \quad \text{VERO}.$$

Per n dispari si ha

$$\frac{2^n}{-2^n+4} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^n}{-2^n+4} - 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^n+2^n-4}{-2^n+4} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^{n+1}-4}{2^n-4} \geq 0$$

$$\begin{aligned} N &\geq 0: \quad 2^{n+1} \geq 4 = 2^2 \Leftrightarrow n+1 \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 1 \\ D &> 0: \quad 2^n > 4 = 2^2 \Leftrightarrow n > 2 \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{2^{n+1}-4}{2^n-4} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; n \leq 1 \vee n > 2\,,$$

ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 2$. Ma siccome stiamo considerando n dispari, la disuguaglianza ÃÍ sempre verificata.

• PASSO 2: vediamo se $\xi = 1$ appartiene ad A. Questo equivale a controllare se esiste $\bar{n}$ tale che

$$\frac{2^{\bar{n}}}{(-2)^{\bar{n}}+4} = 1\,.$$

Per $\bar{n}$ pari si ha

$$\frac{2^{\bar{n}}}{2^{\bar{n}}+4} = 1 \;\Leftrightarrow\; 2^{\bar{n}} = 2^{\bar{n}}+4 \;\Leftrightarrow\; 0 = 4\,,$$

quindi non si verifica mai. Per n dispari si ha

$$\frac{2^{\bar{n}}}{-2^{\bar{n}}+4} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^{\bar{n}}}{-2^{\bar{n}}+4} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2^{\bar{n}+1}-4}{-2^{\bar{n}}+4} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2^{\bar{n}+1} = 4 = 2^2 \;\Leftrightarrow\; \bar{n}+1 = 2\,.$$

Risolvendo l'equazione si trova $\bar{n} = 1$, che corrisponde ad un valore accettabile. Quindi $\boxed{\xi = 1 = \max A}$ perchÃľ $1 \in A$ (ed ÃÍ raggiunto per $n = 1$).

❒ **Esercizio 5.2.10. (Esame del 14.11.19)** *Sia*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} : n \geq 1 \right\}.$$

Dimostare che $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$ *e* $\inf A = \min A = -1$.

R.

• <u>PASSO 1:</u> Dimostriamo che $\xi = \frac{3}{2}$ ed $\eta = -1$ sono rispettivamente un maggiorante e un minorante dell'insieme A. Occorre far vedere che

$$-1 \le \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \le \frac{3}{2} \qquad \forall n \ge 1.$$

Se n è pari, $n \ge 2$

$$\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} = 1 + \frac{1}{n} \le \frac{3}{2}$$

e anche

$$1 + \frac{1}{n} \ge 0 > -1.$$

Se invece n è dispari

$$-1 \le \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} = -\frac{1}{n} \ge -1$$

perché $n \ge 1$ e d'altra parte

$$-\frac{1}{n} \le 0 < \frac{3}{2}.$$

Quindi siamo riusciti a dimostrare che $\xi = \frac{3}{2}$ è maggiorante per A e $\eta = -1$ è minorante per A.

• <u>PASSO 2:</u> vediamo se $\xi = \frac{3}{2}$ e $\eta = -1$ appartengono ad A. Osservando le disuguaglianze viste in precedenza, è facile vedere che se $\bar{n} = 2$ allora

$$\frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}} + \frac{1+(-1)^{\bar{n}}}{2} = 1 + \frac{1}{\bar{n}} = \frac{3}{2} \in A$$

e d'altra parte, se $\bar{n} = 1$ allora

$$\frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}} + \frac{1+(-1)^{\bar{n}}}{2} = -\frac{1}{\bar{n}} = -1 \in A$$

Pertanto $\xi = \frac{3}{2}$ è maggiorante per A che appartiene all'insieme e dunque $\max A = \frac{3}{2}$ e $\sup A = \max A = \frac{3}{2}$. D'altra parte $\eta = -1$ è minorante per A che appartiene all'insieme, dunque $\min A = -1$ e di conseguenza $\inf A = \min A = -1$, che era quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.11. (Esame del 15.11.19)** *Sia*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x \ge 0\}.$$

Dimostrare che $\sup A = +\infty$ *e* $\max A$ *non esiste, mentre* $\inf A = \min A = -1$.

R.

Prima di tutto riscriviamo l'insieme A risolvendo la disequazione. Si ha

$$x^3 - x \ge 0 \iff x(x^2-1) \ge 0 \iff -1 \le x \le 0 \vee x \ge 1$$

Quindi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty[\}$$

• <u>PASSO 1:</u> dimostriamo che A non è limitato superiormente. Per definizione, per ogni $M \in \mathbb{R}$ occorre trovare $\bar{x} \in A$ tale che $\bar{x} \geq M$. A tal proposito basta prendere $\bar{x} = 1$ se $M \leq 1$ e $\bar{x} = M + 1$ se $M > 1$.
Quindi $\sup A = +\infty$ e ovviamente $\max A$ non esiste.
Dimostriamo invece che -1 è minorante per A. Occorre dimostrare che per ogni $x \in A$ si ha $x \geq 1$ e questo è ovvio da come è stato riscritto l'insieme A.
• <u>PASSO 2:</u> visto che $-1 \in A$, si ha che -1 è un minorante che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\min A = -1$ e di conseguenza anche $\inf A = \min A = -1$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.12. (Esame del 07.01.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{n}{(-1)^n + 2n} : n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = 1$.

R.

• <u>PASSO 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\xi = 1$ è maggiorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{n}{(-1)^n + 2n} \leq 1.$$

A questo punto, se n è pari, si ha

$$\frac{n}{(-1)^n + 2n} = \frac{n}{1 + 2n} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \leq 1 + 2n \quad \Leftrightarrow \quad n + 1 \geq 0$$

che è banalmente verificato. D'altra parte, se n è dispari (osserviamo che $2n - 1 > 0$ perché $n \geq 1$)

$$\frac{n}{(-1)^n + 2n} = \frac{n}{-1 + 2n} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \leq 2n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1$$

che è verificato per ipotesi. Dunque $\xi = 1$ è maggiorante per A.
• <u>PASSO 2:</u> proviamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{\bar{n}}{(-1)^{\bar{n}} + 2\bar{n}} = 1$$

Osservando le disuguaglianze provate al passo precedente, è facile vedere che se $\bar{n} = 1$, allora

$$\frac{\bar{n}}{(-1)^{\bar{n}} + 2\bar{n}} = \frac{\bar{n}}{2\bar{n} - 1} = 1$$

Quindi $\xi = 1$ è è un maggiorante che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\max A = 1$ e di conseguenza anche $\sup A = \max A = 1$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.13. (Esame del 21.01.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ e^{(1+2(-1)^n)/n} : n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\min A = \inf A = e^{-1} = 1/e$.

R.

• <u>PASSO 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\eta = 1/e$ è minorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} \geq 1/e = e^{-1}.$$

A questo punto, se n è pari, si ha, dalla monotonia della funzione esponenziale

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{3/n} \geq e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{n} \geq -1$$

che è banalmente verificato. D'altra parte, se n è dispari

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{-1/n} \geq e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n} \geq -1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1$$

che è verificato per ipotesi. Dunque $\eta = 1/e$ è minorante per A.

• <u>PASSO 2:</u> proviamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = 1/e$$

Osservando le disuguaglianze provate al passo precedente, è facile vedere che se $\bar{n} = 1$, allora

$$e^{(1+2(-1)^{\bar{n}})/\bar{n}} = e^{-1}$$

Quindi $\eta = 1/e$ è è un minorante che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\min A = 1/e$ e di conseguenza anche $\inf A = \min A = 1/e$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.14. (Esame del 18.02.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ e^{(1+2(-1)^n)/n} : n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\max A = \sup A = e^{3/2}$.

➾ R.

• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\xi = e^{3/2}$ è minorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} \leq e^{3/2}.$$

A questo punto, se n è pari, si ha, dalla monotonia della funzione esponenziale

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{3/n} \leq e^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{n} \leq e^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 2$$

che è verificato perché n è pari. D'altra parte, se n è dispari

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{-1/n} \leq e^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{n} \leq \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -2/3$$

che è banalmente verificato. Dunque $\xi = e^{3/2}$ è maggiorante per A.

• PASSO 2: proviamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$e^{(1+2(-1)^n)/n} = e^{3/2}$$

Osservando le disuguaglianze provate al passo precedente, è facile vedere che se $\bar{n} = 2$, allora

$$e^{(1+2(-1)^{\bar{n}})/\bar{n}} = e^{3/2}$$

Quindi$\xi = e^{3/2}$ è maggiorante per A che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\max A = e^{3/2}$ e di conseguenza anche $\sup A = \max A = e^{3/2}$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.15. (Esame del 24.06.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2 - 3(-1)^n}} : n \geq 1 \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = -1$ *e che il minimo non esiste.*

➾ R.

• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\eta = -1$ è un minorante per A. Occorre far vedere che

$$-1 \leq \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2 - 3(-1)^n}} \qquad \forall n \geq 1.$$

Se n è pari, questo è ovvio perché a secondo membro cè una quantità positiva. Se invece n è dispari, occorre mostrare che

$$-1 \leq \frac{-n}{\sqrt{n^2+3}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n^2+3} \geq n \quad \Leftrightarrow \quad n^2+3 \geq n^2$$

e questo risulta verificato.

• <u>passo 2:</u> facciamo vedere che non esiste $\bar{n} \geq 1$ tale che si abbia

$$-1 = \frac{(-1)^{\bar{n}}\bar{n}}{\sqrt{\bar{n}^2 - 3(-1)^{\bar{n}}}}.$$

Se tale $\bar{n}$ esistesse, non potrebbe essere pari, perché, come prima, a destra avremmo una quantità positiva. Se invece tale $\bar{n}$ fosse dispari, si dovrebbe avere

$$-\frac{\bar{n}}{\sqrt{\bar{n}^2+3}} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n} = \sqrt{\bar{n}^2+3} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n}^2 = \bar{n}^2 + 3$$

e questo è assurdo. Quindi si può concludere che $\min A$ non esiste.

• <u>passo 3:</u> mostriamo che $-1 = \inf A$ usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Posto

$$a_n := \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2 - 3(-1)^n}},$$

dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < -1 + \varepsilon.$$

D'altra parte osserviamo che, se n è dispari

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : |a_n + 1| < \varepsilon.$$

In particolare questo permette di concludere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : a_n < -1 + \varepsilon$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

❒ **Esercizio 5.2.16. (Esame del 09.07.20)** *Sia*

$$A = \left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{\pi} : n \geq 1 \right\}.$$

Dimostare che $\sup A = +\infty$. *Esiste* $\max A$? *Motivare adeguatamente la risposta.*

R.

Dire che $\sup A = +\infty$ significa dimostrare che A non è limitato superiormente. Posto

$$a_n := \frac{n^2 + (-1)^n}{\pi}$$

la tesi equivale a dimostrare che

$$\forall M > 0, \;\; \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > M.$$

D'altra parte

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

e quindi, dalla definizione di limite

$$\forall M > 0, \;\; \exists \bar{n} : \; \forall n \geq \; \bar{n} \;\; a_n > M$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.
D'altra parte $\max A$ non esiste perché, per definizione il massimo è un maggiorante che appartiene all'insieme e ovviamente $+\infty \notin A$.

❒ **Esercizio 5.2.17. (Esame del 08.09.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n + 2n}{n} : n \in \mathbb{N}, \;\; n \geq 1 \right\}.$$

Dimostrare che $\sup A = \max A = 5/2$.

➾ **R.**

• <u>PASSO 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\xi = 5/2$ è maggiorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{(-1)^n + 2n}{n} \leq \frac{5}{2} \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{(-1)^n}{n} + 2 \leq \frac{5}{2} \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{2}.$$

A questo punto, se n è dispari, si ha che la tesi è banalmente verificata. D'altra parte, se n è pari, questo equivale a chiedere $2 \leq n$ che è ok per ipotesi.
Dunque $\xi = 5/2$ è maggiorante per A.

• <u>PASSO 2:</u> proviamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{(-1)^{\bar{n}} + 2\bar{n}}{\bar{n}} = \frac{5}{2}.$$

Osservando le disuguaglianze provate al passo precedente, è facile vedere che se $\bar{n} = 2$, allora

$$\frac{(-1)^{\bar{n}} + 2\bar{n}}{\bar{n}} = \frac{(-1)^2 + 4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Quindi $\xi = \frac{5}{2}$ è è un maggiorante che appartiene all'insieme, quindi per definizione $\max A = \frac{5}{2}$ e di conseguenza anche $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$ che è quello che volevamo dimostrare.

❒ **Esercizio 5.2.18. (Esame del 09.11.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ (-1)^n \, n + \frac{1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = -\infty$ *e che il minimo di* A *non esiste.*

R.

Dire che $\inf A = -\infty$ significa dimostrare che A non è limitato inferiormente. Posto

$$a_n := (-1)^n \, n + \frac{1}{n}$$

la tesi equivale a dimostrare che

$$\forall M > 0, \ \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < -M.$$

D'altra parte, se n è dispari

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

e quindi, dalla definizione di limite

$$\forall M > 0, \ \ \exists \bar{n} \ \text{ dispari } \ : \forall n \geq \ \bar{n} \ \text{ dispari } \ \ a_n < -M$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.
D'altra parte $\min A$ non esiste perché, per definizione il minimo è un minorante che appartiene all'insieme e ovviamente $-\infty \notin A$.

❒ **Esercizio 5.2.19. (Esame del 23.11.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2n}{n+\pi} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\sup A = 2$ *e* $\max A$ *non esiste (si consiglia di usare la definizione di limite).*

R.

• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\xi = 2$ è maggiorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{2n}{n+\pi} \leq \ 2 \ \ \Leftrightarrow \ \ 2n \leq \ 2n + 2\pi$$

e questo è sempre verificato.
Dunque $\xi = 2$ è maggiorante per A.
• PASSO 2: proviamo che non esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{2\bar{n}}{\bar{n} + 2\pi} = 2.$$

Infatti, se così fosse, si dovrebbe avere $2\bar{n} = 2\bar{n} + 2\pi$ cioè $2\pi = 0$ che è assurdo.
Allora $\max A$ non esiste.
• PASSO 3: dimostriamo che $\sup A = 2$ usando la caratterizzazione dell'estremo superiore. Dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} : \ a_{\bar{n}} > 2 - \varepsilon.$$

D'altra parte si osserva che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n + \pi} = 2$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : \ |a_n - 2| < \varepsilon$$

che in particolare porta a $a_n > 2 - \varepsilon$ e la tesi è ottenuta con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite. Quindi $\sup A = 2$ e $\max A$ non esiste.

❒ **Esercizio 5.2.20. (Esame del 14.12.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n - n}{2n} : n \geq 1 \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = -1$

R.
• PASSO 1: prima di tutto dimostriamo che $\eta = -1$ è minorante per A. Posto $a_n = \frac{(-1)^n - n}{2n}$ occorre far vedere che

$$-1 \leq \frac{(-1)^n - n}{2n}.$$

Ora, se n è pari, allora

$$-1 \leq \frac{1-n}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad -2n \leq 1 - n \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -1$$

che è sempre verificato. D'altra parte, se n è dispari

$$-1 \leq \frac{-1-n}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{1+n}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1$$

che è ok per ipotesi.
• <u>passo 2:</u> facciamo vedere che esiste $\bar{n}$ tale che $a_{\bar{n}} = -1$. Seguendo i conti precedenti, è facile vedere che se $\bar{n} = 1$ allora

$$a_1 = \frac{-1-1}{2} = -1.$$

Quindi -1 è un minorante che appartiene all'insieme e dunque $\min A = -1$. A questo punto allora anche $\inf A = \min A = -1$.

❒ **Esercizio 5.2.21. (Esame del 14.12.20)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{-n + (-1)^n}{3n} : n \geq 1 \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = \min A = -2/3$

➻ **R.**

• <u>passo 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\eta = -2/3$ è minorante per A. Posto $a_n = \frac{-n+(-1)^n}{3n}$ occorre far vedere che

$$-\frac{2}{3} \leq a_n.$$

Ora, se n è pari, questo equivale a

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{-n+1}{3n} \quad \Leftrightarrow \quad 2n \geq n-1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -1$$

che è sempre verificato. D'altra parte, se n è dispari

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{-1-n}{3n} \quad \Leftrightarrow \quad -2n \leq -n-1 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 1$$

che è ok per ipotesi.
• <u>passo 2:</u> facciamo vedere che esiste $\bar{n}$ tale che $a_{\bar{n}} = -2/3$. Seguendo i conti precedenti, è facile vedere che se $\bar{n} = 1$ allora

$$a_1 = \frac{-1-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Quindi $-2/3$ è un minorante che appartiene all'insieme e dunque $\min A = -2/3$. A questo punto allora anche $\inf A = \min A = -2/3$.

❐ **Esercizio 5.2.22. (Esame del 11.01.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2+n^5}{5(n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\sup A = +\infty$ *e che* $\max A$ *non esiste.*

➼ **R.**

Dire che $\sup A = +\infty$ significa dimostrare che A non è limitato superiormente. Posto

$$a_n := \frac{2+n^5}{5(n+1)}$$

la tesi equivale a dimostrare che

$$\forall M > 0, \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > M.$$

D'altra parte

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

e quindi, dalla definizione di limite

$$\forall M > 0, \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ \ a_n > M$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.
D'altra parte $\max A$ non esiste perché, per definizione il massimo è un maggiorante che appartiene all'insieme e ovviamente $+\infty \notin A$.

❐ **Esercizio 5.2.23. (Esame del 01.02.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2}{5(n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\inf A = 0$ *e che* $\min A$ *non esiste.*

➼ **R.**

• <u>passo 1:</u> prima di tutto dimostriamo che $\eta = 0$ è un minorante per A. Occorre far vedere che

$$0 \leq \frac{2}{5(n+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e questo risulta banalmente verificato.

• <u>PASSO 2:</u> è facile vedere che non esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che si abbia

$$0 = \frac{2}{5(n+1)}$$

quindi si può concludere che $\min A$ non esiste.

• <u>PASSO 3:</u> mostriamo che $0 = \inf A$ usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Posto

$$a_n := \frac{2}{5(n+1)},$$

dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < \varepsilon.$$

D'altra parte osserviamo che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : |a_n| < \varepsilon.$$

In particolare questo permette di concludere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} : a_n < \varepsilon$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

❒ **Esercizio 5.2.24. (Esame del 22.02.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2 + n(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\max A = \sup A = 2$ *mentre* $\inf A = -1$ *e che* $\min A$ *non esiste.*

R.

• <u>PASSO 1:</u> Dimostriamo che $\xi = 2$ ed $\eta = -1$ sono rispettivamente un maggiorante e un minorante dell'insieme A. Occorre far vedere che

$$-1 \leq \frac{2 + n(-1)^n}{n+1} \leq 2 \qquad \forall n \geq 1.$$

Se n è pari

$$\frac{2 + n(-1)^n}{n+1} = \frac{2+n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2 \ \ \Leftrightarrow \ \ n \geq 0$$

che naturalmente è ok dall'ipotesi, e inoltre

$$-1 \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

che è banalmente verificato.
Se invece n è dispari

$$-1 \leq \frac{2-n}{n+1}$$

è banalmente verificato, perché equivale a chiedere $2 \geq -1$ mentre

$$\frac{2-n}{n+1} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3n \geq 0$$

e anche questo è banalmente verificato.
Quindi siamo riusciti a dimostrare che $\xi = 2$ è maggiorante per A e $\eta = -1$ è minorante per A.
• PASSO 2: vediamo se $\xi = 2$ e $\eta = -1$ appartengono ad A. Osservando le disuguaglianze viste in precedenza, è facile vedere che se $\bar{n} = 0$ allora

$$\frac{2 + \bar{n}(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}+1} = 2 \in A$$

mentre non esiste $\bar{n} \in A$ tale che

$$\frac{2 + \bar{n}(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}+1} = -1.$$

Infatti se esistesse un tale $\bar{n}$ e fosse dispari, si dovrebbe avere

$$\frac{2-\bar{n}}{\bar{n}+1} = -1$$

e questo è assurdo. Invece se esistesse un tale $\bar{n}$ e fosse pari, si dovrebbe avere

$$\frac{2+\bar{n}}{\bar{n}+1} = -1$$

cioè $\bar{n} = -1/2$ e anche questo ovviamente è assurdo.
Pertanto $\xi = 2$ è maggiorante per A che appartiene all'insieme e dunque $\max A = 2$ e $\sup A = \max A = 2$. D'altra parte $\min A$ non esiste.
• PASSO 3: mostriamo che $-1 = \inf A$ usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Posto

$$a_n := \frac{2 + n(-1)^n}{n+1},$$

dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < -1 + \varepsilon.$$

D'altra parte osserviamo che se n è dispari

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -1$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists\bar{n} :\ \forall n \geq \bar{n} : |a_n + 1| < \varepsilon.$$

In particolare questo permette di concludere che

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists\bar{n} :\ \forall n \geq \bar{n} : a_n < -1 + \varepsilon$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

❒ **Esercizio 5.2.25. (Esame del 08.06.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimostrare che $\max A = \sup A = \pi$ *mentre* $\inf A = 0$ *e che* $\min A$ *non esiste.*

R.

• PASSO 1: Dimostriamo che $\xi = \pi$ ed $\eta = 0$ sono rispettivamente un maggiorante e un minorante dell'insieme A. Occorre far vedere che

$$0 \leq \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} \leq \pi \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La disuguaglianza di sinistra è banalmente verificata mentre per quella di destra si ha

$$\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} \leq \pi \ \ \Leftrightarrow \ \ \sqrt{n^2+1} \geq 1 \ \ \Leftrightarrow \ \ n \geq 0$$

che è banalmente verificato.
Quindi siamo riusciti a dimostrare che $\xi = \pi$ è maggiorante per A e $\eta = 0$ è minorante per A.
• PASSO 2: vediamo se $\xi = \pi$ e $\eta = 0$ appartengono ad A. Osservando le disuguaglianze viste in precedenza, è facile vedere che se $\bar{n} = 0$ allora

$$\frac{\pi}{\sqrt{0^2+1}} = \pi \in A$$

mentre ovviamente non esiste $\bar{n} \in A$ tale che

$$\frac{\pi}{\sqrt{\bar{n}^2+1}} = 0.$$

Pertanto $\xi = \pi$ è maggiorante per A che appartiene all'insieme e dunque $\max A = \pi$ e $\sup A = \max A = \pi$. D'altra parte $\min A$ non esiste.
• PASSO 3: mostriamo che $0 = \inf A$ usando la caratterizzazione dell'estremo inferiore. Posto

$$a_n := \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}},$$

dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \bar{n} : a_{\bar{n}} < \varepsilon.$$

D'altra parte osserviamo che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \bar{n} : \;\; \forall n \geq \bar{n} : |a_n| < \varepsilon.$$

In particolare questo permette di concludere che

$$\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \bar{n} : \;\; \forall n \geq \bar{n} : a_n < \varepsilon$$

e dunque la tesi è verificata con $\bar{n}$ data dalla definizione di limite.

❒ **Esercizio 5.2.26. (Esame del 06.07.21)** *Sia dato l'insieme*

$$A = \left\{ \frac{2n + n(-1)^n - 1}{3n + 1} \; : \; n \geq 1 \right\}$$

Dimostrare che $\sup A = 1$ *e che* $\max A$ *non esiste.*

R.

• <u>PASSO 1:</u>

Prima di tutto dimostriamo che $\xi = 1$ è maggiorante per A. Occorre far vedere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\frac{2n + n(-1)^n - 1}{3n + 1} \leq 1 \qquad \forall n \geq 1.$$

A questo punto, se n è dispari, questo coincide col provare che

$$\frac{2n - n - 1}{3n + 1} \leq 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; n - 1 \leq 3n + 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; 2n + 2 \geq 0$$

che è sicuramente verificato. D'altra parte se n è pari, si deve verificare che

$$\frac{3n - 1}{3n + 1} \leq 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; 2 \geq 0$$

ovviamente verificato.

Dunque $\xi = 1$ è maggiorante per A.

• <u>PASSO 2:</u> proviamo che non esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{2\bar{n} + \bar{n}(-1)^{\bar{n}} - 1}{3\bar{n} + 1} = 1.$$

Infatti, se $\bar{n}$ fosse dispari, si dovrebbe avere $\bar{n} - 1 = 3\bar{n} + 1$ che è assurdo.
Se invece $\bar{n}$ fosse pari, si dovrebbe verificare $3\bar{n} - 1 = 3\bar{n} + 1$ che è ugualmente assurdo
Allora $\max A$ non esiste.

• PASSO 3: dimostriamo che $\sup A = 1$ usando la caratterizzazione dell'estremo superiore. Dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} :\ a_{\bar{n}} > 1 - \varepsilon.$$

D'altra parte si osserva che, se n è pari

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$$

quindi, dalla definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} :\ \forall n \geq \bar{n} :\ |a_n - 1| < \varepsilon$$

che in particolare porta a $a_n > 1 - \varepsilon$ e la tesi è ottenuta con $\bar{n}$ dato dalla definizione di limite.
Quindi $\sup A = 1$ e $\max A$ non esiste.

CAPITOLO 6

Esercizi riguardanti numeri complessi

6.1. Richiami di teoria

➠ Se z è un numero complesso, $z = a+ib$ si dice FORMA ALGEBRICA DEL NUMERO COMPLESSO z; inoltre a si dice PARTE REALE DI z e si indica con $\Re(z)$ mentre b si dice PARTE IMMAGINARIA DI z e si indica con $\Im(z)$.

➠ Il QUOZIENTE di numeri complessi si definisce nel modo seguente

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)\,(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

➠ Si dice COMPLESSO CONIUGATO di un numero complesso $z = a+ib$ il numero complesso $\overline{z} = a - ib$. Inoltre MODULO DI z e si indica con $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Quindi $|z|^2 = z\,\overline{z}$; se $z \in \mathbb{R}$ allora il suo modulo coincide con il valore assoluto.

➠ $|z|$ rappresenta la distanza del numero complesso (o del punto nel piano di Gauss) dall'origine. In particolare $|z_1 - z_2|$ rappresenta la *distanza* di due numeri complessi.

➠ $|z - z_0| = r$ rappresenta nel piano di Gauss una circonferenza di centro il numero complesso z_0 e raggio r; quindi $|z - z_0| < r$ rappresenta il cerchio di centro z_0 e raggio r (privato della circonferenza che è il suo bordo) mentre $|z-z_0| \le r$ rappresenta il cerchio di centro z_0 e raggio r, bordo incluso. Pertanto in quest'ottica, i numeri complessi di modulo r sono i punti della circonferenza centrata nell'origine e raggio r.

➠ $|z-z_0| = |z-z_1|$ si interpreta come il luogo dei punti del piano *equidistanti* dai punti z_0 e z_1: si tratta pertanto dell'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1. Di conseguenza $|z-z_0| < |z-z_1|$ rappresenta il semipiano (delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1) che contiene z_0 e viceversa $|z-z_0| > |z-z_1|$ rappresenta il semipiano (delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1) che contiene z_1. Se la disuguaglianza è stretta allora l'asse non è compreso, se larga l'asse è compreso.

➠ Si dice che $z \in \mathbb{C}$ è scritto in FORMA TRIGONOMETRICA se sono evidenziati i valori di $\rho \geq 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ per cui si abbia

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

➠ Il prodotto di due numeri complessi $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ di dati moduli ρ, r e argomenti θ, ϕ sono dati da

$$z\,w = (\rho\,r)\,[\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)]$$

e se $w \neq 0$ il loro quoziente è dato da

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}\,(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi))\,.$$

➠ Se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ allora $\forall n \in \mathbb{Z}$ le sue potenze sono date dalla formula

$$z^n = \rho^n\ (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))\,.$$

➠ Dato un numero complesso w, diremo che z è una RADICE N-ESIMA COMPLESSA di w se risulta $z^n = w$.

➠ Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ e $n \geq 1$ intero. Allora esistono esattamente n radici ennesime complesse $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ di w, cioè tali che $z_k^n = w$ per $k = 0, \ldots, n-1$. Inoltre posto $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, si ha che $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ dove

$$\begin{cases} \rho_k = r^{1/n} \\ \theta_k = \dfrac{\phi + 2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

6.2. Esercizi proposti

6.2.1. Forma algebrica e forma trigonometrica di numeri complessi

❒ **Esercizio 6.2.1. (Esame del 09.01.18)** *Scrivere in forma algebrica e trigonometrica il seguente numero complesso*

$$w = (2-2i)^4.$$

➻ **R.** Prima di tutto si ha

$$w = 2^4(1-i)^4.$$

Poniamo

$$z := 1 - i.$$

In forma trigonometrica

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right]$$

e quindi

$$\begin{aligned}(1-i)^4 = z^4 &= (\sqrt{2})^4\left[\cos\left(\frac{7}{4}4\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}4\pi\right)\right] = 4(\cos(7\pi) + i\sin(7\pi))\\ &= 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4\end{aligned}$$

da cui

$$w = -64.$$

❒ **Esercizio 6.2.2. (Esame del 05.06.19)** *Calcolare*

$$\frac{z^3 - i\overline{z}}{z - |z|}$$

con

$$z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

R. Possiamo riscrivere

$$z = a + ib = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Troviamo ora z^3, $\overline{z}$ e $|z|$. Si ha immediatamente.

$$\overline{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Per trovare z^3 scriviamo z in forma trigonometrica. Si ha

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \varphi = \frac{7}{4}\pi$$

da cui

$$z = \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi.$$

Dalla formula di De Moivre

$$\begin{aligned}z^3 &= 1^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{7}{4}\pi\right)\right) = \cos\frac{21}{4}\pi + i\sin\frac{21}{4}\pi\\ &= \cos\left(\frac{5}{4}\pi + 4\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi + 4\pi\right) = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i.\end{aligned}$$

Andiamo a sostituire nell'espressione. Otteniamo

$$\frac{z^3 - i\overline{z}}{z - |z|} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - 1} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i} = \frac{-\sqrt{2}i}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i}.$$

Infine moltiplichiamo per il coniugato del denominatore per ottenere la forma algebrica:

$$\begin{aligned}\frac{z^3 - i\overline{z}}{z - |z|} &= \frac{-\sqrt{2}i}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i}{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i} = \frac{-i + \sqrt{2}\,i + 1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{-i + \sqrt{2}\,i + 1}{\frac{1}{2} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{-i + \sqrt{2}\,i + 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)\,i}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.2.3. (Esame del 09.01.20)** *Ridurre in forma algebrica il seguente numero complesso*

$$z = (\sqrt{3} + i)^3$$

➼ **R.** Posto $z = \sqrt{3} + i$ si ha

$$|z| = 2 \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{6} \qquad \text{da cui} \qquad z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

e quindi

$$z^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i.$$

❒ **Esercizio 6.2.4. (Esame del 20.02.20)** *Dire quale dei seguenti numeri è sempre un numero reale per qualsiasi $z \in \mathbb{C}$, motivando adeguatamente la risposta.*

$$(a) z - iz \qquad (b) z - \overline{z} \qquad (c) z\,\overline{z} \qquad (d) z + i\overline{z}$$

➼ **R.** Posto $z = a + ib$ si ha

$$(a) z - iz = (a + ib) - i(a + ib) = a + ib - ai + b = (a + b) + i(b - a)$$

$$(b) z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = a - a + ib + ib = 2ib$$

$$(c) z\,\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$(d) z + i\overline{z} = (a + ib) + i(a - ib) = a + ib + ai + b = (a + b) + i(a + b)$$

Dunque la risposta esatta è la (c).

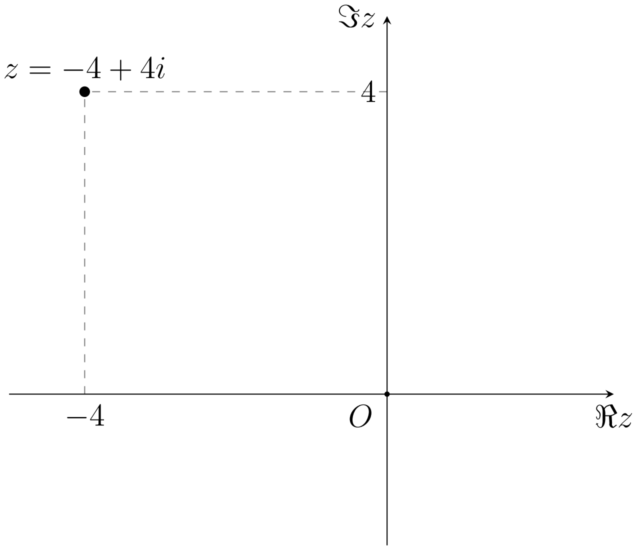
❒ **Esercizio 6.2.5. (Esame del 24.06.20)** *Ridurre nella forma $z = a + ib$ e disegnare nel piano di Gauss il numero complesso $z = (1 - i)^5$.*

R. Posto $z = 1 - i$ si ha

$$|z| = \sqrt{2} \qquad \arg(z) = \frac{7}{4}\pi \qquad \text{da cui} \qquad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

e quindi

$$z^5 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{35}{4}\pi + i\sin\frac{35}{4}\pi\right) = -4 + 4i.$$



❒ **Esercizio 6.2.6. (Esame del 08.09.20)** *Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Le seguenti espressioni, tranne una, sono sempre numeri reali. Quale non è necessariamente reale?*

$$(a)\frac{z}{\overline{z}} \qquad (b)|\overline{z}| \qquad (c)z + \overline{z} \qquad (d)z\,\overline{z}$$

R. Posto $z = a + ib$ si ha

$$(a)\frac{z}{\overline{z}} = \frac{a+ib}{a-ib}\,\frac{a+ib}{a+ib} = \frac{(a+ib)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2+2aib}{a^2+b^2}$$

$$(b)|\overline{z}| = \sqrt{a^b + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$(c)z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a$$

$$(d)z\,\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$$

Quindi la risposta esatta è la (a).

❒ **Esercizio 6.2.7. (Esame del 21.12.20)** *Sostituite* $z = -3 - 4i$ *nell'espressione*

$$\frac{z|z| + i\overline{z}}{2i + \overline{z}},$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica.

R. Si ha

$$\overline{z} = -3 + 4i \qquad |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{z|z| + i\overline{z}}{2i + \overline{z}} &= \frac{(-3-4i)5 + i(-3+4i)}{2i - 3 + 4i} \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{-19-23i}{1-2i}\,\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1}{3}\,\frac{19+38i+23i-46}{5} = \frac{27+61i}{15} = \frac{27}{15} + \frac{61}{15}i. \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.2.8. (Esame del 21.12.20)** *Sostituite* $z = 1 - 2i$ *nell'espressione*

$$\frac{(\overline{z})^2 + iz - 2}{i|z|^2 - z}$$

ed esprimete il risultato in forma algebrica.

R. Si ha

$$\overline{z} = 1 + 2i \qquad\qquad |z|^2 = 5$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{(\overline{z})^2 + iz - 2}{i|z|^2 - z} &= \frac{(1+2i)^2 + i(1-2i) - 2}{5i - (1-2i)} = \frac{1 - 4 + 4i + i + 2 - 2}{-1 + 7i}\;\frac{-1-7i}{-1-7i} \\ &= \frac{(-3+5i)(-1-7i)}{1+49} = \frac{38+16i}{50} = \frac{19}{25} + \frac{8}{25}i \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.2.9. (Esame del 12.01.21)** *Ridurre nella forma algebrica e disegnare nel piano di Gauss il seguente numero complesso* $(-1+i)^3$

➼ **R.** Ci sono due modi di risolvere l'esercizio.
PRIMO MODO: applichiamo la formula del cubo del binomio. Si ha

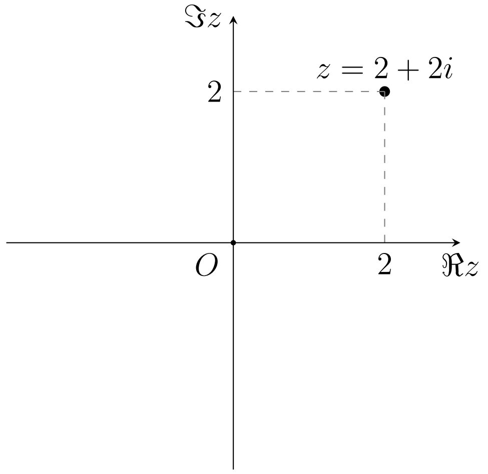
$$(-1+i)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2 i + 3(-1)(i^2) + (i)^3 = -1 + 3i + 3 - i = 2 + 2i$$

SECONDO MODO: scrivendo il numero $-1+i$ in forma trigonometrica, si ha

$$-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

da cui, per la formula di De Moivre

$$(-1+i)^3 = (\sqrt{2})^3\left(\cos\left(\frac{9}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2+2i$$



❐ **Esercizio 6.2.10. (Esame del 23.06.21)** *Ridurre nella forma $z = a + ib$ e disegnare nel piano di Gauss il numero complesso $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2$.*

➼ **R.** Ci sono due modi di risolvere l'esercizio.
PRIMO MODO: applichiamo la formula del quadrato del binomio. Si ha

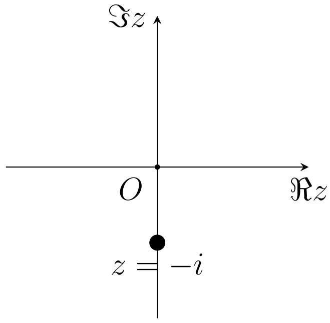
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2 = \frac{1}{2}(1-1-2i) = -i$$

SECONDO MODO: scrivendo il numero $(1-i)$ in forma trigonometrica, si ha

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$$

da cui, per la formula di De Moivre

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 &= \frac{1}{2}(1-i)^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\left(\cos\left(\frac{7}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{2}\pi\right)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -i\end{aligned}$$



6.2.2. Rappresentazione di insiemi nel piano di Gauss

❒ **Esercizio 6.2.11. (Esame del 12.01.17)** *Descrivere geometricamente l'insieme*

$$E := \{z \in \mathbb{C} : |z + 2 - i| = 1, \ |z - 2 + i| = 1\}.$$

➼ **R.** L'insieme $|z + 2 - i| = 1$ rappresenta una circonferenza nel piano di Gauss centrata nel punto $z_0 = -2 + i$ e di raggio 1. Analogamente l'insieme $|z - 2 + i| = 1$ rappresenta una circonferenza nel piano di Gauss centrata in $z_0 = 2 - i$ e di raggio 1. Le due circonferenze non hanno punti in comune, dunque l'insieme E risulta l'insieme vuoto.

❒ **Esercizio 6.2.12. (Esame del 28.06.17)** *Descrivere geometricamente l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z| < 1$ e $|z - 1| = |z - i|$.*

➼ **R.** La disuguaglianza $|z| < 1$ rappresenta una cerchio nel piano di Gauss centrato nell'origine e di raggio 1 (bordo escluso); l'equazione $|z - 1| = |z - i|$ rappresenta invece il luogo dei punti nel piano di Gauss equidistanti da $z = 1$ e da $z = i$, quindi l'asse del segmento, che coincide con la bisettrice del primo e terzo quadrante. L'intersezione dei due insiemi rappresenta un segmento.

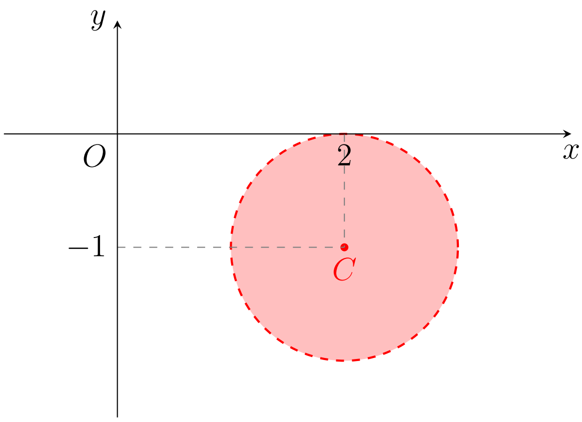
❒ **Esercizio 6.2.13. (Esame del 20.12.18)** *Descrivere e disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$|z - 2 + i| < 1$$

➼ **R.** In generale la disuguaglianza $|z - z_0| < r$ rappresenta nel piano di Gauss il cerchio di centro z_0 e raggio r, privato della circonferenza che è il suo bordo. Nel nostro caso $z_0 = 2 - i$ e $r = 1$. Si può verificare questo andando a sostituire $z = x + iy$, ottenendo

$$\begin{aligned}
&|x + iy - 2 + i| < 1 \\
&|(x - 2) + (y + 1)\, i| < 1 \\
&\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} < 1 \\
&(x - 2)^2 + (y + 1)^2 < 1
\end{aligned}$$

che rappresenta appunto il cerchio (bordo escluso) di centro $C = (2, -1)$ e raggio $r = 1$.



❒ **Esercizio 6.2.14 (Esame del 22.02.19).** *Descrivere geometricamente e rappresentare nel piano di Gauss l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$|z + 1 - i| < |z|.$$

Si descriva poi geometricamente e si rappresenti nel piano di Gauss l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

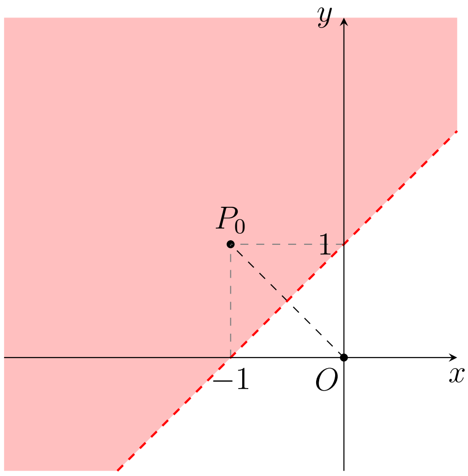
$$|z + i| > 1.$$

R. Primo insieme: In generale la disuguaglianza $|z - z_0| < |z - z_1|$ rappresenta nel piano di Gauss il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1 e contenente z_0. Nel nostro caso $z_0 = -1 + i$ e $z_0 = 0$. Si può verificare questo andando a sostituire

$z = x + iy$, ottenendo

$$\begin{aligned}
&|x + iy + 1 - i| < |x + iy| \\
&|(x + 1) + (y - 1)\, i| < |x + iy| \\
&\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} < \sqrt{x^2 + y^2} \\
&(x + 1)^2 + (y - 1)^2 < x^2 + y^2 \\
&x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 < x^2 + y^2 \\
&2x - 2y + 2 < 0 \\
&y > x + 1
\end{aligned}$$

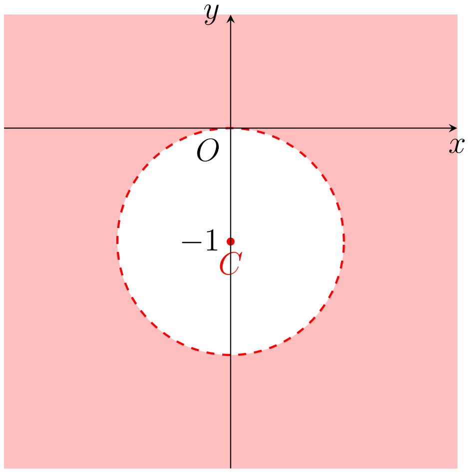
che rappresenta il luogo dei punti che stanno sopra la retta di equazione $y = x + 1$. Tale retta è appunto l'asse del segmento che congiunge $P_0 = (-1, 1)$ e $O = (0, 0)$.



Secondo insieme: In generale la disuguaglianza $|z - z_0| > r$ rappresenta nel piano di Gauss l'area esterna alla circonferenza di centro z_0 e raggio r, privata della circonferenza stessa che è il suo bordo. Nel nostro caso $z_0 = -i$ e $r = 1$. Si può verificare questo andando a sostituire $z = x + iy$, ottenendo

$$\begin{aligned}
&|x + iy + i| > 1 \\
&|x + (y + 1)\, i| > 1 \\
&\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} > 1 \\
&x^2 + (y + 1)^2 > 1
\end{aligned}$$

che rappresenta appunto l'esterno del cerchio (bordo escluso) di centro $C = (0, -1)$ e raggio $r = 1$.



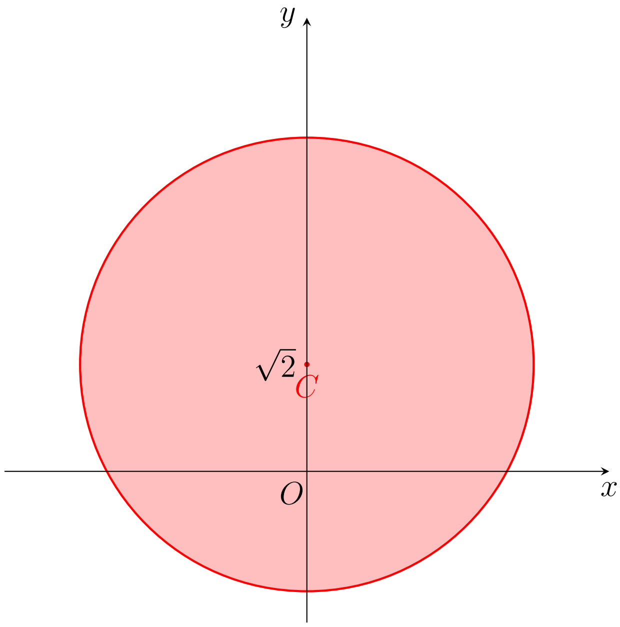
❒ **Esercizio 6.2.15. (Esame del 10.04.19)** *Descrivere e disegnare nel piano di Gauss l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che*

$$|z - \sqrt{2}i| \leq 3$$

➭ **R.** In generale la disuguaglianza $|z - z_0| < r$ rappresenta nel piano di Gauss il cerchio di centro z_0 e raggio r, inclusa la circonferenza che è il suo bordo. Nel nostro caso $z_0 = \sqrt{2}i$ e $r = 3$. Si può verificare questo andando a sostituire $z = x + iy$, ottenendo

$$|x + iy - \sqrt{2}i| \leq 3$$
$$|x + (y - \sqrt{2})\,i| \leq 3$$
$$\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{2})^2} \leq 3$$
$$x^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$$

che rappresenta appunto il cerchio (bordo incluso) di centro $C = (0, \sqrt{2})$ e raggio $r = 3$.



❒ **Esercizio 6.2.16. (Esame del 14.12.20)** *Sia dato l'insieme dei punti* $z \in \mathbb{C}$ *tali che* $|z| = |z+1|$. *Scegliere tra le seguenti alternative quale rappresenta l'insieme dato, motivando adeguatamente la risposta.*

(a) una circonferenza di raggio 1
(b) una coppia di rette ortogonali
(c) una retta parallela all'asse reale
(d) una retta parallela all'asse immaginario

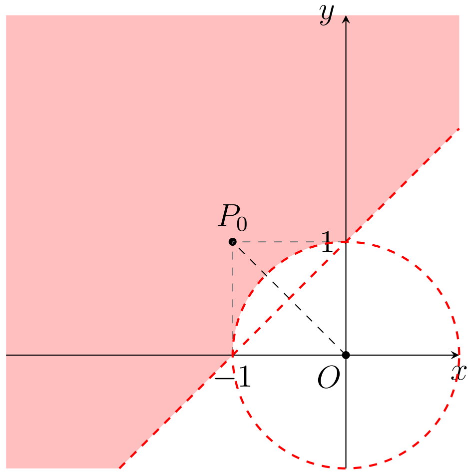
R. L'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| = |z+1|$ rappresenta l'asse del segmento che congiunge i punti $z = 0$ e $z = -1$ pertanto rappresenta una retta parallela all'asse immaginario, e la risposta esatta è la (d).

❒ **Esercizio 6.2.17. (Esame del 02.02.21)** *Descrivere geometricamente e rappresentare nel piano di Gauss l'insieme dei punti* $z \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$|z+1-i| < |z| \qquad \wedge \qquad |z| > 1$$

R. In generale la disuguaglianza $|z - z_0| < |z - z_1|$ rappresenta nel piano di Gauss il semipiano delimitato dall'asse del segmento che congiunge z_0 e z_1 e contenente z_0. Nel nostro caso $z_0 = -1 + i$ e $z_0 = 0$.

In generale la disuguaglianza $|z - z_0| > r$ rappresenta nel piano di Gauss l'esterno del cerchio di centro z_0 e raggio r, privato della circonferenza che è il suo bordo. Nel nostro caso $z_0 = 0$ e $r = 1$.
Quindi l'intersezione tra i due insiemi rappresenta la parte di semipiano descritta dalla prima disuguaglianza privata del segmento circolare di base la corda che unisce i punti $(-1, 0)$ e $(0, 1)$.



6.2.3. Radici di numeri complessi

❒ **Esercizio 6.2.18. (Esame del 19.07.16)** *Determinare il numero complesso $a + ib$ di cui i numeri complessi*

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3}\right)\right), \qquad k = 0, 1, \dots, 5$$

sono le radici seste.

R. Basta ricordare le formule che legano i moduli e gli argomenti di un numero complesso e delle sue radici. Se w è un numero complesso e z_i le sue radici, con $i = 1, \dots, n$ allora detto r il modulo di w e ρ_i il modulo degli z_i si ha prima di tutto $\rho_i = r^{1/n}$. Quindi nel nostro caso essendo $n = 6$ si ha che il modulo delle radici è $\sqrt{2}$ quindi il modulo del numero complesso di origine deve per forza essere $(\sqrt{2})^6 = 8$. D'altra parte, il primo argomento delle radici si trova dividendo per n (quindi nel nostro caso per 6) l'argomento del numero complesso di origine. Nel nostro caso il primo argomento delle radici lo leggiamo dalla formula risulta $\pi/8$ che moltiplicato per 6 dà $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Questo è l'argomento del numero complesso originario. Osservando che

$$\cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

si ha che il numero richiesto è

$$w = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2}(1-i).$$

❐ **Esercizio 6.2.19. (Esame del 19.09.16)** *Determinare le soluzioni dell'equazione*

$$(\bar{z} - i)^3 = 8i$$

➾ **R.** Poniamo

$$w := \bar{z} - i$$

in questo modo l'equazione data diventa $w^3 = 8i$ che è equivalente dunque a cercare le radici terze del numero complesso $8i$ che è un numero complesso che ha modulo 2 e argomento $\frac{\pi}{2}$. Allora le tre radici di tale numero avranno modulo uguale alla radice cubica di 8, cioè 2 e argomenti rispettivamente pari a

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi \qquad \varphi_3 = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

Quindi le tre radici cubiche di $8i$ (in forma trigonometrica)

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad w_2 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) \qquad w_3 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

che corrispondono a (in forma algebrica)

$$w_1 = \sqrt{3} + i \qquad w_2 = -\sqrt{3} + i \qquad w_3 = -2i.$$

A questo punto, ricordando che $w = \bar{z} - i$ si ottiene

$$\bar{z}_1 = \sqrt{3} + 2i \qquad \bar{z}_2 = -\sqrt{3} + 2i \qquad \bar{z}_3 = -i$$

quindi passando ai coniugati si ottiene

$$z_1 = \sqrt{3} - 2i \qquad z_2 = -\sqrt{3} - 2i \qquad z_3 = i$$

❒ **Esercizio 6.2.20. (Esame del 11.01.18)** *Determinare quale/i dei seguenti numeri complessi*

$$(a)\ -\frac{\sqrt{3}+i}{2} \qquad (b)\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$(c)\frac{-\sqrt{3}+i}{2} \qquad (d)\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

risulta soluzione dell'equazione

$$1+2z^5+\sqrt{3}i=0$$

motivando la risposta.

R. Prima di tutto osserviamo che l'equazione data può essere riscritta come

$$z^5=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e quindi risolvere l'equazione data significa in realtà trovare le radici quinte del numero complesso $w=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. In forma trigonometrica si ha

$$w=\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

quindi le cinque radici complesse di w sono:

$$z_0=\cos\left(\frac{4}{3}\frac{1}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\frac{1}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{4}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi\right)$$

$$z_1=\cos\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{2}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{2}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$z_2=\cos\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{4}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{2}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{16}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{16}{15}\pi\right)$$

$$z_3=\cos\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{6}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{3}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{22}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{22}{15}\pi\right)$$

$$z_4=\cos\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{8}{5}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{15}\pi+\frac{4}{5}\pi\right)=\cos\left(\frac{28}{15}\pi\right)+i\sin\left(\frac{28}{15}\pi\right)$$

quindi la risposta esatta è la (b) in quanto

$$z_2=\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

❒ **Esercizio 6.2.21. (Esame del 23.01.19)** *Calcolare le radici quarte complesse del numero* $z = -16$.

➻ **R.** Prima di tutto occorre scrivere z in forma trigonometrica. Siccome z in realtà è un numero reale, in forma algebrica si scrive $z = a + ib = -16 + i \cdot 0$. Quindi

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16,$$

e anche

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -1, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = 0$$

da cui $\varphi = \pi$. Quindi la forma trigonometrica el numero complesso z è

$$z = 16\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

A questo punto, se w è una radice quarta allora

$$|w| = \sqrt[4]{|z|} = \sqrt[4]{16} = 2,$$

mentre se indichiamo con θ l'argomento di w si ottiene

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{4} = \frac{\varphi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Allora gli argomenti delle quattro radici quarte sono esattamente

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{\pi}{4}, \\
\theta_2 &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\,\pi, \\
\theta_3 &= \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\,\pi, \\
\theta_4 &= \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{4}\,\pi.
\end{aligned}$$

Quindi le quattro radici quarte sono

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\
w_2 &= 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \\
w_3 &= 2\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \\
w_4 &= 2\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 6.2.22 (Esame del 18.06.19).** *Scrivere in forma trigonometrica e in forma algebrica il numero complesso*

$$w = \left(\frac{3}{2}\,i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

e determinare tutte le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$.

R. Vogliamo applicare la formula di De Moivre, perciò scriviamo il numero complesso $a + ib = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ in forma trigonometrica. Si ha

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$$

e

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

da cui $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Qundi la forma trigonometrica è

$$\frac{3}{2}\,i - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right).$$

Utilizzando la formula di De Moivre otteniamo la forma trigonometrica di w, ovvero

$$w = \left(\sqrt{3}\right)^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 3\sqrt{3}\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right),$$

da cui anche la forma algebrica

$$w = 3\sqrt{3}\,(1 + i\cdot 0) = 3\sqrt{3}.$$

È noto che le radici n-esime di un numero complesso w nel piano di Gauss rappresentano i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|w|}$, dunque nel nostro caso staranno ai vertici di un triangolo equilatero. Siccome fra le soluzioni dell'equazione $z^3 = w$ c'è sicuramente

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i = \sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

le altre due radici si trovano aggiungendo $2\pi/3$ e $2\cdot 2\pi/3$ all'argomento di z_1. Si ottiene

$$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,i,$$

$$z_3 = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right) = \sqrt{3}\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = \sqrt{3}.$$

❒ **Esercizio 6.2.23.** **(Esame del 23.01.20)** *Trovare le radici cubiche del numero complesso $z = 1 - i$ e disegnarle nel piano di Gauss.*

➼ **R.** Si ha $|z| = \sqrt{2}$ e $\arg(z) = \frac{7}{4}\pi$ da cui, esprimendo z in forma trigonometrica, si ha

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right).$$

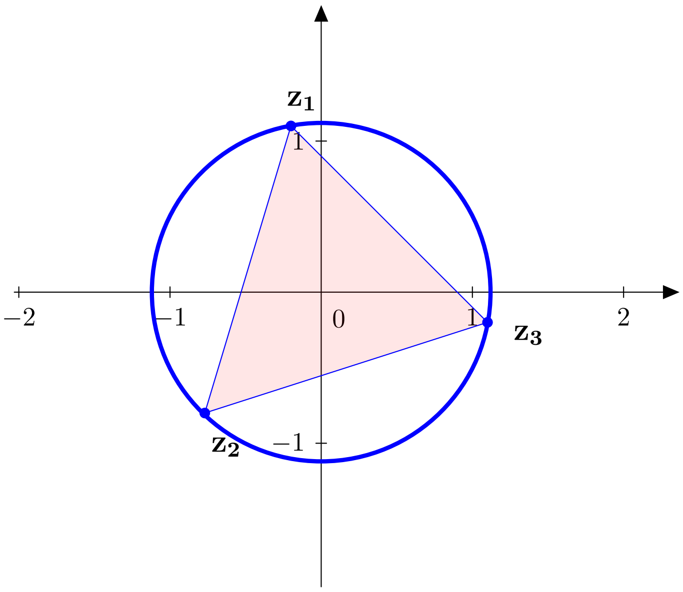
Le radici cubiche di z sono dunque le seguenti:

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\frac{1}{3}\pi\right)\right] = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{15}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi + \frac{4}{3}\pi\right)\right] = \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{23}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{23}{12}\pi\right)\right]$$

$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right] = -\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}(1+i)$$



❒ **Esercizio 6.2.24.** **(Esame del 23.07.20)** *Trovare le radici quarte del numero complesso $z = \sqrt{3} + 3i$ e disegnarle nel piano di Gauss*

➼ **R.** Si ha

$$|z| = 2\sqrt{3} \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

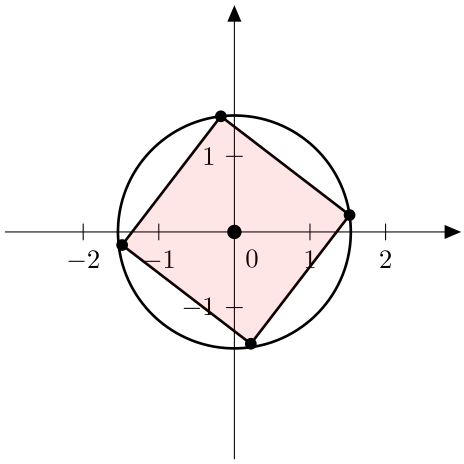
per cui le quattro radici quarte di z sono

$$z_0 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{3}\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\frac{1}{4}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi + \pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi + \pi\right)\right] = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{13}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{13}{12}\pi\right)\right]$$

$$z_3 = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{2\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{19}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{19}{12}\pi\right)\right]$$



❒ **Esercizio 6.2.25. (Esame del 09.06.21)** *Trovare le radici quarte del numero complesso* $-8i$ *e disegnarle nel piano di Gauss.*

R. Si ha

$$|z| = 8 \qquad \arg(z) = \frac{3}{2}\pi$$

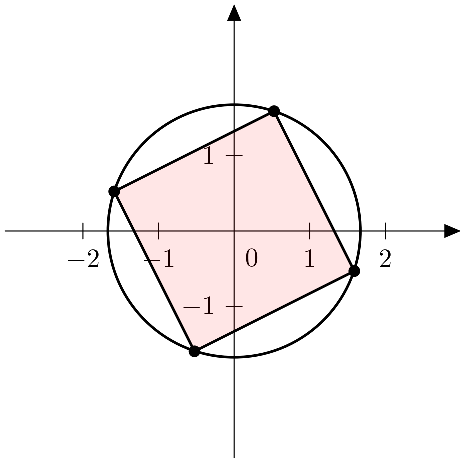
per cui le quattro radici quarte di z sono

$$z_0 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\frac{1}{4}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{7}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{8}\pi\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{8}\pi + \pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi + \pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{11}{18}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{18}\pi\right)\right]$$

$$z_3 = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\right] = \sqrt[4]{8}\left[\cos\left(\frac{15}{8}\pi\right) + i\sin\left(\frac{15}{8}\pi\right)\right]$$



6.2.4. Equazioni in campo complesso

❐ **Esercizio 6.2.26.** (**Esame del 01.02.16**) *Risolvere nel piano complesso l'equazione*

$$z^2 - z\overline{z} + 6 - i = 0$$

➼ **R.** Poniamo $z = a + ib$. Osserviamo che

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2aib \qquad\qquad z\,\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2.$$

Si ha allora

$$a^2 - b^2 + 2aib - a^2 - b^2 + 6 - i = 0$$

da cui si deduce il sistema di due equazioni in due incognite (reali!)

$$\begin{cases} -2b^2 + 6 = 0 \\ 2aib - i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 3 \\ 2ab = 1. \end{cases}$$

A questo punto, se $b = \sqrt{3}$ allora $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ mentre se $b = -\sqrt{3}$ allora $a = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Le soluzioni del nostro sistema sono dunque

$$z_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3}i \qquad\qquad z_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}i.$$

❐ **Esercizio 6.2.27. (Esame del 10.07.18)** *Risolvere in campo complesso la seguente equazione*

$$z - 1 - 6i = z^2 - 2z\Re z + |z|^2$$

➼ **R.** Posto $z = a + ib$ si ha

$$a + ib - 1 - 6i = (a + ib)^2 - 2(a + ib)a + a^2 + b^2$$

da cui, sviluppando

$$a + ib - 1 - 6i = a^2 - b^2 + 2aib - 2a^2 - 2aib + a^2 + b^2.$$

Semplificando si ottiene

$$a + ib - 1 - 6i = 0$$

e quindi, separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene

$$a = 1 \qquad b = 6.$$

La soluzione dell'equazione proposta risulta $z = 1 + 6i$.

❐ **Esercizio 6.2.28. (Esame del 08.01.19)** *Trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$z^2 + \overline{z}^2 = |z|^2$$

e dire cosa rappresentano nel piano di Gauss.

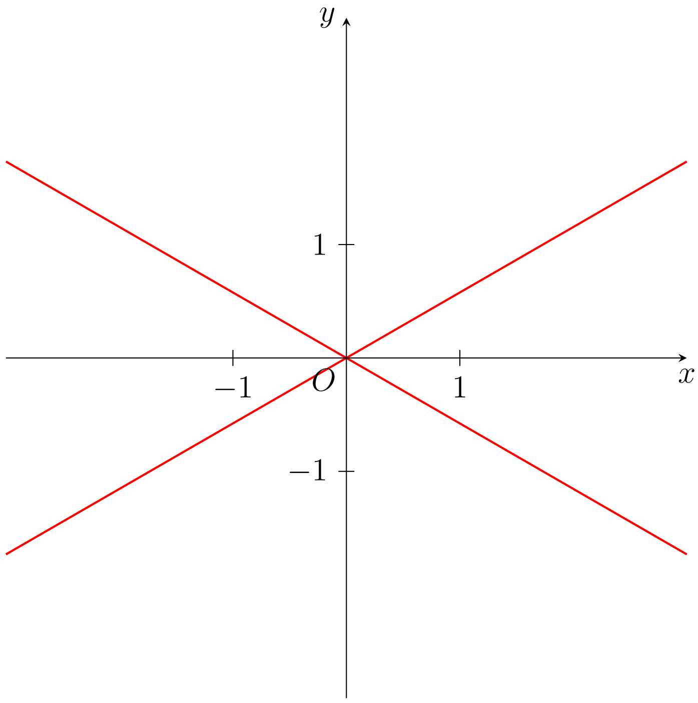
➼ **R.** Poniamo $z = x + iy$. Dunque $\overline{z} = x - iy$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sostituendo si ottiene

$$(x + iy)^2 + (x - iy)^2 = x^2 + y^2,$$

da cui

$$\begin{aligned} &x^2 + (iy)^2 + 2xyi + x^2 + (iy)^2 - 2xyi = x^2 + y^2 \\ &2x^2 - 2y^2 = x^2 + y^2 \\ &x^2 - 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

e dunque $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$. Si ottengono quindi due rette di coefficienti angolari $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ e passanti per l'origine.



❒ **Esercizio 6.2.29. (Esame del 24.07.19)** *Risolvere in* $\mathbb{C}$

$$z(4-\overline{z}) = 4\sqrt{3}i$$

➻ **R.** Posto $z = a + ib$ si ottiene

$$(a+ib)(4-(a-ib)) = 4\sqrt{3}i$$

che equivale a

$$(a+ib)(4-a+ib) = 4\sqrt{3}i$$

da cui

$$4a - a^2 + aib + 4ib - aib - b^2 = 4\sqrt{3}i.$$

Semplificando e separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene immediatamente

$$b = \sqrt{3}$$

da cui

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

che porta a $a = 1$ e $a = 3$. Riassumendo le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i \qquad z_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

❒ **Esercizio 6.2.30. (Esame del 11.09.19)** *Determinare le soluzioni dell'equazione*

$$z^2 = \overline{z}$$

e dire quante di esse sono reali.

R. Posto $z = a + ib$, l'equazione risulta equivalente a

$$(a + ib)^2 = a - ib$$

da cui

$$a^2 - b^2 + 2aib = a - ib.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $b = 0$ oppure $a = -1/2$. Se $b = 0$, dalla prima equazione si ottiene $a^2 - a = 0$ da cui $a = 0$ e $a = 1$.
Se $a = -1/2$ allora dalla prima equazione si ottiene

$$b^2 = \frac{3}{4}$$

quindi riassumendo le soluzioni sono

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = 1 \qquad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Di esse, due sole sono soluzioni reali.

❒ **Esercizio 6.2.31. (Esame del 19.12.19)** *Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione* $z^2 = 2\overline{z}$

R. Poniamo $z = a + ib$ da cui $\overline{z} = a - ib$. Pertanto l'equazione data diventa

$$(a + ib)^2 = 2(a - ib)$$

cioè

$$a^2 - b^2 + 2aib = 2a - 2ib.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2a \\ 2ab = -2b \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $b = 0$ oppure $a = 1$. Se $b = 0$ allora inserendo nella prima equazione si ricava $a^2 - 2a = 0$ da cui $a = 0$ oppure $a = 2$. Se invece $a = 1$, dalla prima equazione si ottiene $b^2 = -1$ che non dà soluzioni reali (ricordiamo che a, b devono necessariamente essere numeri reali).
Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = 2.$$

❒ **Esercizio 6.2.32. (Esame del 19.12.19)** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$(z - 2)\overline{z} = i\overline{z}$$

R. Poniamo $z = a + ib$ da cui $\overline{z} = a - ib$. Pertanto l'equazione data diventa

$$(a + ib - 2)(a - ib) = ai + b$$

cioè

$$a^2 - aib + aib + b^2 - 2a + 2ib = ai + b.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - b = 0 \\ 2b = a \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $a = 2b$, che, inserita nella prima equazione, fornisce

$$5b^2 - 5b = 0$$

da cui si ricava $b = 0$ oppure $b = 1$. Se $b = 0$ allora anche $a = 0$ mentre se $b = 1$ allora $a = 2$.
Pertanto le soluzioni dell'equazione data sono

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = 2 + i.$$

L'equazione poteva risolversi più semplicemente osservando che si poteva semplificare il termine $\overline{z}$ da ambo i membri, che fornisce però la soluzione $\overline{z} = 0$ e dunque $z = 0$. A quel punto direttamente si ottiene l'altra soluzione $z - 2 = i$ da cui $z = 2 + i$.

❒ **Esercizio 6.2.33. (Esame del 09.07.20)** *Risolvere in $\mathbb{C}$ la seguente equazione*

$$\Re z(\overline{z} - i\Im z) = z$$

R. Posto $z = a + ib$ l'equazione data diventa

$$a(a - ib - ib) = a + ib$$

che equivale a

$$a^2 - 2aib = a + ib.$$

Separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 = a \\ -2ab = b \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $a = 0$ o $a = 1$ che, inserite nella seconda equazione, forniscono $b = 0$. Le due soluzioni dell'equazione sono $z = 0$ e $z = 1$.

❒ **Esercizio 6.2.34. (Esame del 23.02.21)** *Determinare quale dei seguenti numeri complessi risulta soluzione dell'equazione $z\,|z|^2 = 8i$*

$$(a) 1 + 2i \qquad (b) 1 - 2i \qquad (c) 2i \qquad (d) - 2i$$

R. Ci sono molti modi per risolvere l'esercizio. Per completezza, risolviamo l'equazione data. Ponendo $z = a + ib$ allora $|z|^2 = a^2 + b^2$ e quindi l'equazione è equivalente a

$$(a + ib)(a^2 + b^2) = 8i$$

da cui

$$a^3 + ab^2 + a^2 ib + ib^3 = 8i.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^3 + ab^2 = 0 \\ a^2 b + b^3 = 8 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $a^2 + b^2 = 0$ che darebbe $a = b = 0$ ma che non è compatibile con la seconda equazione, oppure $a = 0$ che inserita nella seconda porta a $b^3 = 8$ cioè (ricordando che b dee essere un numero reale) $b = 2$. Quindi la risposta corretta è la (c).

❒ **Esercizio 6.2.35. (Esame del 07.07.21)** *Risolvere in* $\mathbb{C}$ *la seguente equazione*

$$\Re z(\overline{z} - i\Im z) = z$$

dove $\Re z$ *è la parte reale del numero complesso* z *e* $\Im z$ *la sua parte immaginaria.*

R. Poniamo $z = a + ib$ da cui $\overline{z} = a - ib$, $\Re z = a$ e $\Im z = b$. Allora l'equazione data risulta equivalente a

$$a(a - ib - ib) = a + ib$$

da cui

$$a^2 - 2aib = a + ib$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b(2a + 1) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $a = -1/2$ che non soddisfa la prima equazione, oppure $b = 0$. D'altra parte dalla prima equazione si ottiene $a = 0$ oppure $a = 1$, quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$z_1 = 0 \qquad\qquad z_2 = 1.$$

CAPITOLO 7

Esercizi riguardanti limiti di funzioni

7.1. Uso della gerarchia degli infiniti

❒ **Esercizio 7.1.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\sqrt[3]{x})e^{2x}}{x(e^x-1)\log x}$ **(Esame del 12.01.16)**

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x+x^3+\sin x}{7e^x+\sqrt{x^6+1}}$ **(Esame del 19.07.16)**

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+x^2+\arctan x}{e^x+1}$ **(Esame del 22.02.19)**

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+3^x+x^3}{x^4+4^x}$ **(Esame del 14.11.19)**

5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3+2^x+x^2}{1+x^3+2^x}$ **(Esame del 14.11.19)**

6) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1+e^x+x^3}{x^4+e^x}$ **(Esame del 09.07.20)**

R.

1) Osserviamo che se $x\to+\infty$ allora

$$x+\sqrt[3]{x}\sim x \qquad \text{e} \qquad e^x-1\sim e^x$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\sqrt[3]{x})e^{2x}}{x(e^x-1)\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,e^{2x}}{x\,e^x\,\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\log x} = +\infty$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la gerarchia degli infiniti.

2) Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

quindi tra i vari termini che compaiono nel limite, l'esponenziale **non è** un infinito di ordine superiore alle potenze. Pertanto si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x + x^3 + \sin x}{7e^x + \sqrt{x^6+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left[\frac{2e^x}{x^3} + 1 + \frac{\sin x}{x^3}\right]}{7e^x + |x^3|\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left[\frac{2e^x}{x^3} + 1 + \frac{\sin x}{x^3}\right]}{-x^3\left[-\frac{7e^x}{x^3} + \sqrt{1+\frac{1}{x^3}}\right]} = -1,$$

dove abbiamo usato il teorema dei carabinieri, la gerarchia degli infiniti e il fatto che quando un termine esce dalla radice quadrata, deve comparire con il valore assoluto.

3) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Raccogliamo gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore per $x \to +\infty$ si ha $e^{-x} \to 0$ e $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, dunque l'infinito dominante ÃÍ x^2. Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} + x^2 + \arctan x}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 1 + \frac{\arctan x}{x^2}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \cdot \frac{\frac{1}{e^x x^2} + 1 + \frac{\arctan x}{x^2}}{1+\frac{1}{e^x}}.$$

Dalla gerarchia degli infiniti si deduce

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0,$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} + x^2 + \arctan x}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^2}{e^x}}_{\downarrow\atop 0} \cdot \frac{\overbrace{\frac{1}{e^x x^2} + 1 + \frac{\arctan x}{x^2}}^{1\atop\uparrow}}{\underbrace{1+\frac{1}{e^x}}_{\downarrow\atop 1}} = 0.$$

4) Osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+3^x+x^3}{x^4+4^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(\frac{1}{x^3} + \frac{3^x}{x^3} + 1\right)}{x^4\left(1+\frac{4^x}{x^4}\right)} = 0$$

dato che, per $x \to -\infty$ si ha

$$3^x \to 0 \qquad 4^x \to 0$$

pertanto, anche

$$\frac{3^x}{x^3} \to 0 \qquad \frac{4^x}{x^4} \to 0$$

(non si tratta di forme di indecisione). Il limite dato dunque esiste e fa 0.

5) Osserviamo che
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+2^x+x^2}{1+x^3+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}+\frac{2^x}{x^2}+1\right)}{x^3\left(\frac{1}{x^3}+1+\frac{2^x}{x^3}\right)}=0$$
dato che, per $x\to-\infty$ si ha
$$2^x\to 0$$
pertanto, anche
$$\frac{2^x}{x^2}\to 0 \qquad \frac{2^x}{x^3}\to 0$$
(non si tratta di forme di indecisione). Anche questo limite dunque esiste e fa 0.

6) Si ha
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^x+x^3}{x^4+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x^3}+\frac{e^x}{x^3}+1\right)}{x^4\left(1+\frac{e^x}{x^4}\right)}=0$$
dato che, per $x\to-\infty$ anche
$$e^x\to 0$$
pertanto
$$\frac{e^x}{x^3}\to 0 \qquad \frac{e^x}{x^4}\to 0$$
(non si tratta di forme di indecisione). Anche questo limite dunque esiste e fa 0.

7.2. Uso dei limiti notevoli

❒ **Esercizio 7.2.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

7) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-e^{2x}}{\sin(3x)}$ **(Esame del 07.06.16)**

8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$ **(Esame del 29.06.16)**

9) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{3/2}-\log(1+x^2)+x\sqrt{x}}{\arctan x^{3/2}+x^2}$ **(Esame del 08.06.17)**

10) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}(e^{x\sqrt{x}}-1)\arctan(x+1)}{1-\cos(\pi x)}$ **(Esame del 13.11.17)**

11) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{(x-1)}\right)^{3x}$ **(Esame del 25.01.18)**

12) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x\log(1+x)}$ **(Esame del 15.02.18)**

13) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)(\sqrt[3]{1+6x}-1)+\sin x^2}{x^3+\sqrt{x^2\sin x}\ [\log(1+\sqrt[3]{x})]}$ **(Esame del 12.06.18)**

14) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x}\sin x^{3/2}}$ **(Esame del 11.09.18)**

15) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(x^4+x^{9/2}\right)}{x^3\sin^2\left(\sqrt{2x}\right)}$ **(Esame del 13.11.18)**

16) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$ **(Esame del 23.01.19)**

17) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x\left(x^2+1\right)}e^{2x}}{\tan\sqrt[3]{x}}$ **(Esame del 10.04.19)**

18) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x+x^2-\sin x}{x^3+\log(1+x)}$ **(Esame del 05.06.19)**

19) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^2-\pi}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **(Esame del 17.06.19)**

20) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left(x^2+x^{5/2}\right)}{x^{3/2}\arctan\left(\sqrt{2x}\right)}$ **(Esame del 23.07.19)**

21) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\arctan\left(x^2+2\right)}$ **(Esame del 10.09.19)**

22) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})}$ **(Esame del 15.11.19)**

23) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ **(Esame del 07.01.20)**

24) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x}}$ **(Esame del 24.06.20)**

25) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+4x)^{\frac{1}{x^2}}$ **(Esame del 08.09.20)**

26) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\arctan x+x^3}{x^2-\pi}\left(e^{1/x}-1\right)$ **(Esame del 23.11.20)**

27) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ **(Esame del 23.11.20)**

28) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x+5}\sin\frac{1}{x^{3/2}}$ **(Esame del 23.11.20)**

29) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (3x+x^2)\left(e^{1/x^2}-1\right)$ **(Esame del 14.12.20)**

30) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+x\sqrt{x})^{1/x^3}$ **(Esame del 11.01.21)**

31) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{e^{x^5}-1}}{\log(1+x^2\sqrt{x})}$ **(Esame del 01.02.21)**

32) $\lim_{x\to0^+} (1+\arctan x)^{1/x}$ **(Esame del 22.02.21)**

33) $\lim_{x\to0} \dfrac{(1+x)^{1/2}-1}{e^{2x}-1}$ **(Esame del 08.06.21)**

34) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x^2\ \sin\frac{2}{x}}$ **(Esame del 22.06.21)**

35) $\lim_{x\to0^+} \dfrac{(1+x)^{1/2}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})}$ **(Esame del 06.07.21)**

R.

7) Si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-e^{2x}}{\sin(3x)}=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\downarrow\atop 1}\underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\downarrow\atop 1}\frac{1}{3}+\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{1-e^{2x}}{-2x}}_{\downarrow\atop 1}\underbrace{\frac{3x}{\sin(3x)}}_{\downarrow\atop 1}\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3},$$

dove abbiamo potuto spezzare il limite della somma nella somma dei limiti non essendoci forme di indecisione.

8) Osserviamo prima di tutto che

$$\log(1+z)\sim z \qquad z\to0$$

dunque nel nostro caso, visto che se $x\to+\infty$ si ha che $\frac{1}{x\sqrt{x}}\to0$, allora

$$\log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\sim\frac{1}{x\sqrt{x}} \qquad x\to+\infty.$$

A questo punto allora (osserviamo che $e^{-x}\to0$ se $x\to+\infty$ quindi non è un infinito di ordine superiore alle potenze di x)

$$\frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}}\log\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)\sim\frac{3x^2+e^{-x}}{2-\sqrt{x}}\,\frac{1}{x\sqrt{x}}\sim\frac{3x^2}{-x^2}=-3$$

quindi il limite proposto esiste e vale -3.

9) Si ha (dividendo numeratore e denominatore per $x^{3/2}$)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{3/2}-\log(1+x^2)+x\sqrt{x}}{\arctan x^{3/2}+x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\sin x^{3/2}}{x^{3/2}}-\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\sqrt{x}+1}{\frac{\arctan x^{3/2}}{x^{3/2}}+\sqrt{x}}=2$$

perché si conclude dai limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^{3/2}}{x^{3/2}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x^{3/2}}{x^{3/2}} = 1.$$

10) Si osserva che $\boxed{\text{se } x \to 0^+}$

$$e^{x\sqrt{x}} - 1 \sim x\sqrt{x} \qquad \arctan(x+1) \sim \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \qquad 1 - \cos(\pi x) \sim \frac{\pi^2 x^2}{2}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}(e^{x\sqrt{x}} - 1)\arctan(x+1)}{1-\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\,\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi^2 x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi}$$

11) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} e^{3x\log\left(1+\frac{2}{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{3x\frac{2}{x-1}} = e^6$$

dove abbiamo usato il fatto che, se $x \to +\infty$ allora $\frac{2}{x-1} \to 0$ e pertanto siamo in grado di usare lo sviluppo asintotico

$$\log\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2}{x-1}$$

usando poi anche il fatto che, se $x \to +\infty$

$$3x\frac{2}{x-1} \to 6.$$

12) Innanzitutto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2}\log(1+x\sin x) - 1}}{x\log(1+x)}.$$

A questo punto, se $x \to 0^+$ allora $x\sin x \to 0$ quindi

$$\log(1+x\sin x) \sim x\sin x$$

da cui

$$e^{\frac{1}{2}\log(1+x\sin x) - 1} \sim e^{\frac{x\sin x}{2} - 1} \sim \frac{x\sin x}{2} \sim \frac{x^2}{2}.$$

D'altra parte, anche $\log(1+x) \sim x$ da cui globalmente il limite dato esiste e fa $1/2$.

13) Ragionando come nell'esercizio precedente, visto che di nuovo $x \to 0$

$$\sqrt[3]{1+6x} - 1 = e^{\frac{1}{3}(\log(1+6x))} - 1 \sim e^{2x} - 1 \sim 2x$$

e inoltre

$$\arctan x \sim x \qquad \sin x^2 \sim x^2 \qquad \sqrt{x^2 \sin x}\,\log(1+\sqrt[3]{x}) \sim \sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{x} = x^{11/6}$$

che quindi va a zero più lentamente di x^3. Pertanto possiamo concludere che

$$x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}[\log(1 + \sqrt[3]{x})] \sim x^{11/6}$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}[\log(1 + \sqrt[3]{x})]}{x^{11/6}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x^{11/6}} + \frac{\sqrt{x^2 \sin x}[\log(1 + \sqrt[3]{x})]}{x^{11/6}} = 1$$

e allora

$$\begin{aligned} & \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)(\sqrt[3]{1+6x} - 1) + \sin x^2}{x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}\ [\log(1 + \sqrt[3]{x})]} \\ = & \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)(\sqrt[3]{1+6x} - 1)}{x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}\ [\log(1 + \sqrt[3]{x})]} + \frac{\sin x^2}{x^3 + \sqrt{x^2 \sin x}\ [\log(1 + \sqrt[3]{x})]} \\ = & \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{x^{11/6}} + \frac{x^2}{x^{11/6}} = 0. \end{aligned}$$

Il limite dato allora esiste e fa 0.

14) Ragionando come sopra, visto che di nuovo $x \to 0^+$

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = e^{\frac{1}{2}(\log(1+x^2))} - 1 \sim e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \sim \frac{x^2}{2}$$

e inoltre $\sin x^{3/2} \sim x^{3/2}$. Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{x} \sin x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

15) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x \to 0^+$ si ha $x^4 + x^{9/2} \to 0$ e $\sqrt{2x} \to 0$, pertanto si possono usare le seguenti relazioni asintotiche

$$\arctan\left(x^4 + x^{9/2}\right) \sim x^4 + x^{9/2}, \qquad \sin(\sqrt{2x}) \sim \sqrt{2x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(x^4 + x^{9/2}\right)}{x^3 \sin^2\left(\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + x^{9/2}}{x^3\left(\sqrt{2x}\right)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + x^{9/2}}{x^3 \cdot 2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + x^{9/2}}{2x^4}.$$

Siccome vicino a zero contano le potenze piccole, raccogliamo l'infinitesimo di ordine inferiore e otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan\left(x^4 + x^{9/2}\right)}{x^3 \sin^2\left(\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4 + x^{9/2}}{2x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4\left(1 + \frac{x^{9/2}}{x^4}\right)}{2x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{1 + x^{1/2}}^{\stackrel{1}{\uparrow}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

16) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\log\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}\right]} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{2x}\log(1+\sin x)}.$$

Studiamo a parte l'esponente. Per $x \to 0$ (e quindi anche per $x \to 0^+$) vale la relazione asintotica

$$\sin x \sim x,$$

da cui

$$\log(1+\sin x) \sim \log(1+x) \sim x.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}\log(1+\sin x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x}\cdot x = \frac{1}{2},$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\overbrace{\frac{1}{2x}\log(1+\sin x)}^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{e}.$$

17) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x \to 0^+$ si ha $\sqrt[3]{x} \to 0$, pertanto si puÃš usare la seguente relazione asintotica

$$\tan\sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x\,(x^2+1)}e^{2x}}{\tan\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x\,(x^2+1)}e^{2x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^{1/2}\sqrt{x^2+1}\,e^{2x}}{x^{1/3}} = \lim_{x\to 0^+}\underbrace{x^{1/6}}_{\downarrow\atop 0}\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\downarrow\atop 1}\underbrace{e^{2x}}_{\downarrow\atop 1} = 0.$$

18) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x \to 0$ si possono usare le seguenti relazioni asintotiche

$$\tan x \sim x, \qquad \sin x \sim x, \qquad \log(1+x) \sim x.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + x^2 - \sin x}{x^3+\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3+x}.$$

Siccome vicino a zero contano le potenze piccole, raccogliamo l'infinitesimo di ordine inferiore e otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x + x^2 - \sin x}{x^3+\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^3+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\,(x^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{x}^{0}}{\underbrace{x^2+1}_{\downarrow\atop 1}} = 0.$$

19) Osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0$, pertanto si puÃš utilizzare la seguente relazione asintotica

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^2-\pi}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^2-\pi}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^3-\pi x}.$$

Raccogliamo ora gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore per $x \to +\infty$ si ha $e^{-x} \to 0$, dunque l'infinito dominante ÃÍ x^3. Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^2-\pi}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4e^{-x}}{x^3-\pi x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{4e^{-x}}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{\pi}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+\frac{4}{e^x x^3}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{1-\frac{\pi}{x^2}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}} = 1.$$

20) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x \to 0^+$ si ha $x^2 + x^{5/2} \to 0$ e $\sqrt{2x} \to 0$, pertanto si possono usare le seguenti relazioni asintotiche

$$\sin\left(x^2+x^{5/2}\right) \sim x^2+x^{5/2}, \qquad \arctan(\sqrt{2x}) \sim \sqrt{2x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(x^2+x^{5/2}\right)}{x^{3/2}\arctan\left(\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x^{5/2}}{x^{3/2}\sqrt{2x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x^{5/2}}{\sqrt{2}x^2}.$$

Siccome vicino a zero contano le potenze piccole, raccogliamo l'infinitesimo di ordine inferiore e otteniamo

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(x^2+x^{5/2}\right)}{x^{3/2}\arctan\left(\sqrt{2x}\right)} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+x^{5/2}}{\sqrt{2}x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2\left(1+\frac{x^{5/2}}{x^2}\right)}{\sqrt{2}x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\overbrace{1+x^{1/2}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

21) L'argomento del logaritmo si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Osserviamo perÃš che

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x}+\frac{1}{x} = 1+\frac{1}{x},$$

quindi possiamo riscrivere

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\arctan\left(x^2+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan\left(x^2+2\right)}.$$

Il numeratore si presenta ora nella forma di indecisione $[\infty \cdot 0]$, mentre $\arctan(x^2+2) \to \frac{\pi}{2}$. Per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0$, pertanto si puÃš utilizzare la seguente relazione asintotica

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\arctan\left(x^2+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \cdot \frac{1}{x}}{\arctan\left(x^2+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{x^2}^{\stackrel{+\infty}{\uparrow}}}{\underbrace{\arctan\left(x^2+2\right)}_{\stackrel{\downarrow}{\frac{\pi}{2}}}} = +\infty.$$

22) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{3}\log(x+1)}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})}.$$

A questo punto, dai limiti notevoli, si ha per $x \to 0^+$

$$e^{\frac{1}{3}\log(x+1)} - 1 \sim \frac{1}{3}\log(x+1) \sim \frac{1}{3}x$$

e anche

$$\sin^2(2\sqrt{x}) \sim (2\sqrt{x})^2 = 4x$$

da cui

$$\lim_{x\to0^+} \frac{(1+x)^{1/3}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{3}\log(x+1)}-1}{\sin^2(2\sqrt{x})} = \frac{1}{12}$$

23) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\log(1+3x)}$$

A questo punto, dai limiti notevoli

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\log\left(1+3x\right) \sim \frac{3x}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} \to 0$$

da cui, per la continuità della funzione esponenziale, il limite dato esiste e fa 1.

24) Osserviamo che per $x \to +\infty$

$$\frac{4x+2}{4x-1} \to 1$$

mentre dai limiti notevoli, sempre per $x \to +\infty$

$$\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x} \sim x^2\,\frac{2}{x} = 2x \to +\infty$$

quindi il limite dato si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$.
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{3}}\right]^{\frac{3}{4x-1}\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x}}$$

A questo punto, per quanto osservato prima

$$\frac{3}{4x-1}\sqrt{x^4+3x}\ \sin\frac{2}{x}\sim\frac{3}{4x}\,2x\to\frac{3}{2}$$

dunque, visto che

$$\left(1+\frac{3}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{3}}\to e$$

il limite dato esiste e fa $e^{3/2}$.

25) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to0^+}(1+4x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x^2}\log(1+4x)}$$

A questo punto, dai limiti notevoli, visto che se $z\to0^+$ allora $\log(1+z)\sim z$

$$\frac{1}{x^2}\log(1+4x)\sim\frac{4x}{x^2}\sim\frac{4}{x}\to+\infty$$

quindi il limite dato esiste e fa $+\infty$.

26) Osserviamo innanzitutto che per $x\to+\infty$ si ha $\frac{1}{x}\to0$, pertanto si puÃš utilizzare la seguente relazione asintotica

$$e^{1/x}-1\sim\frac{1}{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan n+x^3}{x^2-\pi}(e^{1/x}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x+x^3}{x^2-\pi}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x+x^3}{x^3-\pi x}.$$

Raccogliamo ora gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore l'infinito dominante ÃÍ x^3 perché $\arctan x$ è una quantità limitata. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x+x^3}{x^2-\pi}(e^{1/x}-1) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x+x^3}{x^3-\pi x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{\arctan x}{x^3}+1\right)}{x^3\left(1-\frac{\pi}{x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\frac{\arctan x}{x^3}+1}^{\uparrow\, 1}}{\underbrace{1-\frac{\pi}{x^2}}_{\downarrow\, 1}}=1.\end{aligned}$$

27) Osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} \to 0$, pertanto si puÃš utilizzare la seguente relazione asintotica

$$\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\cdot\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x^3-3x^2}.$$

Raccogliamo ora gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore per $x \to +\infty$ si ha $e^{-x} \to 0$, dunque l'infinito dominante ÃÍ x^3. Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x-3}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^{-x}}{x^3-3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{e^{-x}}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+\dfrac{1}{e^x x^3}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{1-\dfrac{3}{x}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}} = 1.$$

28) Osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x^{3/2}} \to 0$, pertanto si puÃš utilizzare la seguente relazione asintotica

$$\sin\frac{1}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x+5}\sin\frac{1}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x+5}\cdot\frac{1}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x^{5/2}+5x^{3/2}}.$$

Raccogliamo ora gli infiniti dominanti. Osserviamo che a numeratore l'infinito dominante ÃÍ $x^{5/2}$ perché $\sin x$ è una quantità limitata. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x+5}\sin\frac{1}{x^{3/2}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\sqrt{x}+\sin x}{x^{5/2}+5x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{5/2}\left(1+\frac{\sin x}{x^{5/2}}\right)}{x^{5/2}\left(1+\frac{5}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{1+\dfrac{\sin x}{x^{5/2}}}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{1+\dfrac{5}{x}}_{\substack{\downarrow\\ 1}}} = 1.\end{aligned}$$

29) Osserviamo innanzitutto che per $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x^2} \to 0$, pertanto si puÃš utilizzare la seguente relazione asintotica

$$e^{1/x^2}-1 \sim \frac{1}{x^2}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty}(3x+x^2)\left(e^{1/x^2}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}(3x+x^2)\,\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+1=1$$

30) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to0^+}\left(1+x\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x^3}\log\left(1+x\sqrt{x}\right)}$$

A questo punto, dai limiti notevoli, visto che se $z\to0^+$ allora $\log(1+z)\sim z$

$$\frac{1}{x^3}\log\left(1+x\sqrt{x}\right)\sim\frac{x\sqrt{x}}{x^3}\sim\frac{1}{x\sqrt{x}}\to+\infty$$

quindi il limite dato esiste e fa $+\infty$.

31) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per $x\to0^+$ si ha $x^5\to0$ e $x^2\sqrt{x}\to0$, pertanto si possono usare le seguenti relazioni asintotiche

$$e^{x^5}-1\sim x^5,\qquad \log\left(1+x^2\sqrt{x}\right)\sim x^2\sqrt{x}.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{e^{x^5}-1}}{\log\left(1+x^2\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^5}}{x^2\sqrt{x}}=1.$$

32) Il limite si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$. Si ha, usando la definizione di logaritmo,

$$\lim_{x\to0^+}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}\log(1+\arctan x)}$$

A questo punto, dai limiti notevoli, visto che se $z\to0^+$ allora $\arctan z\sim z$ e $\log(1+z)\sim z$

$$\frac{1}{x}\log\left(1+\arctan x\right)\sim\frac{\arctan x}{x}\sim1$$

da cui, per la continuità della funzione esponenziale, il limite dato esiste e fa e.

33) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(1+x)^{1/2}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1}{e^{2x}-1}.$$

A questo punto, dai limiti notevoli, si ha per $x\to0^+$

$$e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1\sim\frac{1}{2}\log(x+1)\sim\frac{1}{2}x$$

e anche

$$e^{2x} - 1 \sim 2x$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1}{e^{2x}-1} = \frac{1}{4}$$

34) Osserviamo che per $x \to +\infty$

$$\frac{2x+1}{2x-1} \to 1$$

mentre dai limiti notevoli, sempre per $x \to +\infty$

$$x^2 \ \sin\frac{2}{x} \sim x^2\,\frac{2}{x} = 2x \to +\infty$$

quindi il limite dato si presenta nella forma di indecisione $[1^\infty]$.
Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x^2 \ \sin\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x-1}x^2 \ \sin\frac{2}{x}}$$

A questo punto, per quanto osservato prima

$$\frac{2}{2x-1}x^2 \ \sin\frac{2}{x} \sim \frac{2}{2x}\,2x \to 2$$

dunque, visto che

$$\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{2}} \to e$$

il limite dato esiste e fa e^2.

35) Il limite si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})}.$$

A questo punto, dai limiti notevoli, si ha per $x \to 0^+$

$$e^{\frac{1}{2}\log(x+1)} - 1 \sim \frac{1}{2}\log(x+1) \sim \frac{1}{2}x$$

e anche

$$\arctan^2(3\sqrt{x}) \sim (3\sqrt{x})^2 = 9x$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/2}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x+1)}-1}{\arctan^2(3\sqrt{x})} = \frac{1}{18}.$$

7.3. Limiti che coinvolgono differenza di radici

❒ **Esercizio 7.3.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

36) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}$ **(Esame del 15.12.15)**

37) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2+3x-7}-3x$ **(Esame del 15.12.15)**

38) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x(x+\log x)e^{3x}}{\pi x^2+\sqrt{x}e^{2x}}$ **(Esame del 06.05.16)**

39) $\lim_{x\to+\infty} (2x^2+3)\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}-1\right)$ **(Esame del 07.06.16)**

40) $\lim_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)$ **(Esame del 21.01.20)**

R.

36) Andiamo ad effettuare il seguente cambio di variabile $x=-z$ in modo tale che se $x\to-\infty$ allora $z\to+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}=\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{-z+\sqrt{z^2+2}}\frac{\sqrt{z^2+2}+z}{\sqrt{z^2+2}+z}=\lim_{z\to+\infty}\frac{\sqrt{z^2+2}+z}{2}=+\infty.$$

37) Possiamo risolvere l'esercizio in due modi.

primo modo: si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-7}-3x &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3x-7}-3x)\frac{\sqrt{2x^2+3x-7}+3x}{\sqrt{2x^2+3x-7}+3x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-7-9x^2}{|x|\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+3x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-7x^2\left(1-\frac{3}{7x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}+3x}=-\infty\end{aligned}$$

secondo modo: si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x-7}-3x=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-3x=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{2+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}}-3\right]=-\infty,$$

dove abbiamo potuto scrivere $|x|=x$ perché $x\to+\infty$.

38) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+\log x)e^{3x}}{\pi x^2+\sqrt{x}e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{\log x}{x}\right)e^{3x}}{\sqrt{x}e^{2x}\left(\frac{\pi x\sqrt{x}}{e^{2x}}+1\right)}=\frac{x\sqrt{x}e^{x}\left(1+\frac{\log x}{x}\right)}{\left(\frac{\pi x\sqrt{x}}{e^{2x}}+1\right)}=+\infty$$

in quanto, dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi x\sqrt{x}}{e^{2x}}=0$$

39) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^2+3)\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}(2x^2+3)\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1\right)\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(2x^2+3)\frac{3}{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+\frac{9}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{6}{2}=3$$

40) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\frac{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\frac{\frac{3}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=\frac{3}{2}$$

7.4. Altre tipologie di limiti

7.4.1. Uso delle proprietà dei logaritmi

❒ **Esercizio 7.4.1.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

41) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^x+\sqrt{4^x+x^4})}{x}$ **(Esame del 01.02.16)**

42) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ **(Esame del 28.06.17)**

R.

41) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x+\sqrt{4^x+x^4}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x+\sqrt{4^x\left(1+\frac{x^4}{4^x}\right)}\right)}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(e^x+2^x\sqrt{1+\frac{x^4}{4^x}}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left[e^x\left(1+\frac{2^x}{e^x}\sqrt{1+\frac{x^4}{4^x}}\right)\right]}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log e^x+\log\left(1+\frac{2^x}{e^x}\sqrt{1+\frac{x^4}{4^x}}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\log\left(1+\frac{2^x}{e^x}\sqrt{1+\frac{x^4}{4^x}}\right)}{x}=1$$

in quanto, per la gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{e^x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{4^x}=0.$$

42) Stavolta, siccome $x\to+\infty$, si tratta di una forma di indecisione, che **NON** possiamo gestire tramite la gerarchia degli infiniti in quanto l'argomento del logaritmo è un esponenziale e non una potenza. Usiamo invece le proprietà dei logaritmi in questo modo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2e^x\left(\frac{1}{2e^x}+1\right)}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\log e}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}+\frac{\log\left(\frac{1}{2e^x}+1\right)}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}.$$

A questo punto, siccome $\log e=1$, il primo termine tende a 2, in quanto $\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\to 0$, invece il secondo termine tende a 0, in quanto $\log\left(\frac{1}{2e^x}+1\right)\to 0$ mentre $x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\to+\infty$. Osserviamo che abbiamo potuto porre $|x|=x$ in quanto $x\to+\infty$ e quindi definitivamente $x>0$. Si può dunque concludere che il limite dato esiste e fa 2.

7.4.2. Limiti che si risolvono grazie a un cambio di variabile

❒ **Esercizio 7.4.2.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

43) $\displaystyle\lim_{x\to1^-}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ **(Esame del 19.07.17)**

R.

43) Operiamo il seguente cambio di variabile $x-1=z$. Si ha allora

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right)}.$$

Dalle proprietà delle funzioni trigonometriche si ottiene

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}(z+1)\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{z\to0}(-z)\frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}=\frac{2}{\pi}$$

dove abbiamo usato il limite notevole

$$\lim_{z\to0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\frac{\pi}{2}z}=1.$$

7.4.3. Limiti che non si presentano come forme di indecisione

❒ **Esercizio 7.4.3.** *Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di funzioni:*

44) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{x}$ **(Esame del 08.06.17)**

45) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ **(Esame del 28.06.17)**

46) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ **(Esame del 28.06.17)**

➻ **R.**

12) Si ha banalmente

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\,x\,\sin\frac{1}{x}=0$$

perché

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x\to0}x\,\sin\frac{1}{x}=0$$

perchÃľ prodotto di una quantità limitata per una infinitesima.

14) Se $x\to-\infty$, allora $e^x\to0$ e dalla continuità della funzione logaritmo, il numeratore tende a zero, mentre il denominatore tende a $+\infty$. Non si tratta dunque di una forma di indecisione. Il limite dato esiste e fa 0.

16) Se $x \to 0^+$ allora calcolando direttamente, dalla continuità delle funzioni coinvolte si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \log 3.$$

CAPITOLO 8

Calcolo differenziale: esercizi

8.1. Calcolo di derivate di funzioni composte

❐ **Esercizio 8.1.1. (Esame del 07.06.16)** *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \frac{x^{\sin x}}{\arctan(\log x)}$$

➼ **R.** Posto $x^{\sin x} = e^{\sin x \log x}$ si ha

$$f'(x) = \frac{x^{\sin x}\left[\cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}\right] \arctan(\log x) - x^{\sin x}\left[\frac{1}{1+\log^2 x}\frac{1}{x}\right]}{\arctan^2(\log x)}.$$

❐ **Esercizio 8.1.2. (Esame del 19.07.16)** *Sia data la funzione*

$$f(x) = \frac{\log(1+\sin^2(3x))}{1+e^{x^2-1}}$$

Calcolare $f'(\pi)$.

➼ **R.** Applicando la formula della derivata del quoziente di funzioni e della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+\sin^2(3x)} 2\sin(3x)\cos(3x)3\right)(1+e^{x^2-1}) - 2x(e^{x^2-1})\log(1+\sin^2(3x))}{(1+e^{x^2-1})^2}$$

da cui in modo evidente si ottiene $f'(\pi) = 0$.

❒ **Esercizio 8.1.3. (Esame del 12.01.17)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{\log(1+\sin^2(2x)) - x}{1+e^{x^2-1}}$$

Si noti che con la scrittura $\sin^2(2x)$ *si intende naturalmente* $[\sin(2x)]^2$.

➾ **R.** Applicando la formula della derivata del quoziente di funzioni e della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x) = \frac{\frac{4\sin(2x)\cos(2x)}{1+\sin^2(2x)}(1+e^{x^2-1}) + \log(1+\sin^2(2x))e^{x^2-1}(2x)}{(1+e^{x^2-1})^2}.$$

❒ **Esercizio 8.1.4. (Esame del 18.12.17)** *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\,\cos x\right)^x.$$

➾ **R.** Si nota che l'espressione della funzione $f(x)$ può essere semplificata. Infatti si ha, dalle proprietà delle potenze

$$f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^x (\cos x)^x = e\,(\cos x)^x.$$

A questo punto occorre fare la derivata del termine $(\cos x)^x$ che contiene la x sia nella base che nell'esponente. Pertanto **non si può usare** la formula $\frac{d}{dx}([g(x)]^\alpha) = \alpha(g(x))^{\alpha-1}$ perché questa vale se $\alpha \in \mathbb{R}$ e **non si può usare** la formula $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a$ perché anche in questo caso $a \in \mathbb{R}$ e in entrambi i casi α, a non devono contenere la variabile rispetto alla quale si va a derivare. Quindi la strada corretta da seguire è quella di trasformare il termine $(\cos x)^x$ in un esponenziale usando poi la regola della catena. Si ha

$$f(x) = e\,(\cos x)^x = e\,e^{x\log(\cos x)} = e^{1+x\log(\cos x)}.$$

Da cui

$$f'(x) = e^{1+x\log(\cos x)}\left[\log(\cos x) + x\frac{1}{\cos x}(-\sin x)\right] = e^{1+x\log(\cos x)}\,[\log(\cos x) - x\tan x]$$

L'esercizio naturalmente poteva essere risolto anche senza la semplificazione iniziale, utilizzando le stesse regole. In questo caso si aveva

$$f(x) = \exp\left(x\log\left[e^{\frac{1}{x}}\cos x\right]\right)$$

da cui

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(x\log\left[e^{\frac{1}{x}}\cos x\right]\right)\left\{\log\left[e^{\frac{1}{x}}\cos x\right] + x\frac{1}{e^{1/x}\cos x}\left[e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos x - \sin x e^{1/x}\right]\right\} \\ &= e^{1+x\log(\cos x)}\left[\log e^{1/x} + \log(\cos x) + \frac{x\left[-\frac{1}{x^2}\cos x\right] - \sin x}{\cos x}\right] \\ &= e^{1+x\log(\cos x)}\left[\log(\cos x) - x\tan x\right]. \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 8.1.5. (Esame del 13.11.18)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = x^3\sin^2(\sqrt{2x}) + \arctan(x^2+1)$$

➼ **R.** Applicando la formula della derivata della funzione composta si ha che

$$f'(x) = 3x^2\,\sin^2(\sqrt{2x}) + x^3\,2\,\sin(\sqrt{2x})\,\cos(\sqrt{2x})\,\frac{1}{2\sqrt{2x}}\,2 + \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$$

❒ **Esercizio 8.1.6. (Esame del 23.01.19)** *Siano date le due funzioni $f(x) = x^4+2$ e $g(y) = 4\log(\sqrt{y})$, calcolare la derivata della funzione $h(x) = (g\circ f)(x)$*

➼ **R.** Esplicitiamo la formula della funzione composta. Si ha

$$h(x) = (g\circ f)(x) = 4\log\sqrt{x^4+2}.$$

Si ha pertanto

$$h'(x) = \frac{4}{\sqrt{x^4+2}}\,\frac{1}{2\sqrt{x^4+2}}\,4x^3 = \frac{8x^3}{(x^4+2)}.$$

Risultati analoghi potevano essere ottenuti considerando che

$$f'(x) = 4x^3 \qquad\qquad g'(y) = \frac{4}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{2}{y}$$

da cui

$$h'(x) = g'(f(x))\,f'(x).$$

❒ **Esercizio 8.1.7. (Esame del 22.02.19)** *Sia data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1}(3x^2 + \cos(\pi x^3))$. Calcolare $f'(x)$.*

➻ **R.** Si tratta innanzitutto della derivata di un prodotto. Posto $f(x) = g(x)h(x)$ con $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ e $h(x) = 3x^2 + \cos(\pi x^3)$, si ha innanzitutto $f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$. Dalle regole di derivazione della funzione composta si ha

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(3x^2 + \cos(\pi x^3)) + \sqrt{x^2+1}(6x - \sin(\pi x^3)3x^2\pi).$$

❒ **Esercizio 8.1.8. (Esame del 10.04.19)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = x^{3/2}\cos^3(\sqrt[3]{4x}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$$

➻ **R.** Posto $f(x) = g(x)h(x) + \ell(x)$ con $g(x) = x^{3/2}$, $h(x) = \cos^3(\sqrt[3]{4x})$ e $\ell(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$, si ha innanzitutto $f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x) + \ell'(x)$. Dalle regole di derivazione della funzione composta si ha dunque

$$f'(x) = (\frac{3}{2}\sqrt{x})\cos^3(\sqrt[3]{4x}) - x^{3/2}\,3\cos^2(\sqrt[3]{4x})\,\sin(\sqrt[3]{4x})\,\frac{1}{3}(4x)^{-2/3} - \frac{1}{2}(1+x^3)^{-3/2}.$$

❒ **Esercizio 8.1.9. (Esame del 17.06.19)** *Calcolare la derivata di*

$$f(x) = \arctan(1 + \sqrt{x^2+2}) + \log^2(1 + x^2 + x^4)$$

➻ **R.** Dalle regole di derivazione della funzione composta si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + \sqrt{x^2+2})^2}\,\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\,2x + 2\log(1 + x^2 + x^4)\,\frac{1}{1 + x^2 + x^4}\,(2x + 4x^3).$$

❒ **Esercizio 8.1.10. (Esame del 22.07.19)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = x^5\cos^2(\sqrt[3]{x}) + \arctan(x^4 + 1)$$

➻ **R.** Dalle regole di derivazione della funzione composta si ha

$$f'(x) = 5x^4\,\cos^2(\sqrt[3]{x}) + x^5\,2\cos(\sqrt[3]{x})(-\sin(\sqrt[3]{x}))\,\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{1}{1 + (x^4+1)^2}(4x^3).$$

❒ **Esercizio 8.1.11. (Esame del 10.09.19)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \left(\frac{1}{4x} - 2x\right)e^{1/x^2}$$

➾ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{4x^2} - 2\right) e^{1/x^2} + \left(\frac{1}{4x} - 2x\right) e^{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

❐ **Esercizio 8.1.12. (Esame del 14.11.19)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{3^x \arctan(x^4+1)}{(1+x)^2+1}$$

➾ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{[3^x \log 3 \arctan(x^4+1) + 3^x \frac{1}{1+(x^4+1)^2} 4x^3]((1+x)^2+1) - 2(1+x)(3^x \arctan(x^4+1))}{[(1+x)^2+1]^2}$$

❐ **Esercizio 8.1.13. (Esame del 15.11.19)** *Calcolare la derivata della seguente funzione*

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3+1}(x^2 + \pi \sin(\pi \sqrt[3]{x}))$$

➾ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x^3+1)^{-4/5}\, 3x^2\, (x^2 + \pi \sin(\pi \sqrt[3]{x})) + (x^3+1)^{1/5} \left(2x + \pi \cos(\pi \sqrt[3]{x})\, \pi\, \frac{1}{3} x^{-2/3}\right)$$

❐ **Esercizio 8.1.14. (Esame del 21.01.20)** *Calcolare la derivata della seguente funzione*

$$f(x) = \frac{(\cos x)^x \sqrt{1+x} - e^{x/2}}{x^2}$$

➾ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{x^4} \Bigg\{ & \left[(\cos x)^x \left(\log(\cos x) + x \frac{1}{\cos x}(-\sin x) \right) \sqrt{1+x} + (\cos x)^x \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} e^{x/2} \right] x^2 \\ & -2x \left[(\cos x)^x \sqrt{1+x} - e^{x/2} \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

❐ **Esercizio 8.1.15. (Esame del 09.07.20)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})\ \log(x^4+1)}{2^{2x}}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{\left[-\sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\log(x^4+1) + \cos(\sqrt{x})\frac{1}{x^4+1}(4x^3)\right]2^{2x} - 2^{2x}\log 4(\cos(\sqrt{x})\log(x^4+1)}{16^x}$$

❐ **Esercizio 8.1.16. (Esame del 23.07.20)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{5^x\ \log(x^4+1)}{\sqrt{x^2+3}}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{[5^x \log 5\ \log(x^4+1) + 5^x\frac{1}{x^4+1}(4x^3)]\sqrt{x^2+3} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}2x[5^x\log(x^4+1)]}{x^2+3}$$

❐ **Esercizio 8.1.17. (Esame del 08.09.20)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{\log(1+\sqrt[4]{x}) + x^7}{\sin^2 x + 3^x}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\,\frac{1}{4}\,x^{-3/4} + 7x^6\right](\sin^2 x + 3^x) - [2\sin x\cos x + 3^x\log 3](\log(1+\sqrt[4]{x}) + x^7)}{[\sin^2 x + 3^x]^2}$$

❐ **Esercizio 8.1.18. (Esame del 09.11.20)** *Sia* $f(x) = (\sin x)^x$ *per* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Determinare* $f'(\pi/3)$.

➼ **R.** Si ha

$$f'(x) = (\sin x)^x\left[\log\sin x + \frac{x}{\sin x}(-\cos x)\right]$$

da cui

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\pi/3}\left(\log\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)$$

❒ **Esercizio 8.1.19. (Esame del 11.01.21)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x)=\frac{\cos^2(2x)+\log(3x^2+e^x)}{x^4+4}$$

➼ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x)=\frac{[-4\cos(2x)\sin(2x)+\frac{1}{3x^2+e^x}(6x+e^x)](x^4+4)-4x^3[\cos^2(2x)+\log(3x^2+e^x)]}{(x^4+4)^2}$$

❒ **Esercizio 8.1.20. (Esame del 22.02.21)** *Calcolare la derivata della seguente funzione*

$$f(x)=x^{2x+1}$$

➼ **R.** Si ha che

$$f(x)=x^{2x+1}=e^{(2x+1)\log x}$$

dunque

$$f'(x)=x^{2x+1}\left[2\log x+\frac{2x+1}{x}\right]$$

❒ **Esercizio 8.1.21. (Esame del 08.06.21)** *Siano date le funzioni*

$$f(x)=\sqrt{x^4+1}\qquad g(y)=\sin(y+3)$$

Calcolare la derivata della funzione composta $g\circ f$

➼ **R.** Si ha

$$h(x)=(g\circ f)(x)=\sin(\sqrt{x^4+1}+3)$$

da cui

$$h'(x)=\cos(\sqrt{x^4+1}+3)\left[\frac{1}{2\sqrt{x^4+1}}4x^3\right]$$

❒ **Esercizio 8.1.22. (Esame del 06.07.21)** *Calcolare la derivata della funzione*

$$f(x) = \frac{3^x \log(x^5 + 1)}{\sqrt{x^2 + \pi}}$$

➬ **R.** Dalle regole di derivazione riguardo derivata di quoziente, prodotto e composizione di funzioni si ha

$$f'(x) = \frac{[3^x \log 3 \log(x^5 + 1) + 3^x \frac{1}{x^5+1}(5x^4)]\sqrt{x^2 + \pi} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+\pi}} 2x[3^x \log(x^5 + 1)]}{x^2 + \pi}$$

8.2. Calcolo di derivate di funzioni inverse

❒ **Esercizio 8.2.1. (Esame del 05.06.19)** *Sia* $f(x) = x^4 e^{2x-1}$ *per* $x \geq 0$. *Se* f^{-1} *è la funzione inversa di* f, *determinare* $(f^{-1})'(e)$

➬ **R.**
Innanzitutto si osserva che $f(x_0) = e$ se $x_0 = 1$. Quindi, posto che

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)}$$

dato che $f'(x) = 4x^3 e^{2x-1} + 2x^4 e^{2x-1}$, allora $f'(1) = 6e$ quindi

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6e}.$$

❒ **Esercizio 8.2.2. (Esame del 07.01.20)** *Sia* $f(x) = 3x + \sin x$ *e sia* g *la funzione inversa di* f. *Determinare* $g'(3\pi)$.

➬ **R.** Innanzitutto si osserva che $f(x_0) = 3\pi$ se $x_0 = \pi$. Quindi, posto che

$$g'(3\pi) = \frac{1}{f'(\pi)}$$

dato che $f'(x) = 3 + \cos x$, allora $f'(\pi) = 2$ quindi

$$g'(3\pi) = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{2}.$$

❒ **Esercizio 8.2.3. (Esame del 14.12.20)** *Sia data una funzione* $f(x) = 2x^3 - x$ *e sia* f^{-1} *la sua funzione inversa. Determinare la pendenza della retta tangente al grafico di* f^{-1} *nel punto* $(1,1)$.

➾ **R.** La pendenza della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1,1)$ coincide con il valore della derivata di f^{-1} calcolata nel punto 1. D'altra parte, dalle regole di derivazione della funzione inversa, si ha

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)}$$

e visto che si ha $f'(x) = 6x^2 - 1$ allora $f'(1) = 5$ e

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{5}$$

8.3. Rette tangenti al grafico di funzioni

❒ **Esercizio 8.3.1. (Esame del 18.02.20)** *Sia* $f(x) = \sin \pi x + x^2$ *per* $x \in \mathbb{R}$. *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* f *nel punto di ascissa* $x = 1$.

➾ **R.** Osserviamo prima di tutto che $f(1) = 1$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1 ha equazione

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1).$$

Dato che $f'(x) = \cos(\pi x)\pi + 2x$ da cui $f'(1) = 2 - \pi$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = 1 + (2 - \pi)(x - 1)$$

❒ **Esercizio 8.3.2. (Esame del 23.11.20)** *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione* $f(x) = 4e^x \cos(x^3 + \pi)$ *nel punto di ascissa* $x_0 = 0$. *Si ricorda che* $\cos(\pi) = -1$.

➾ **R.** Osserviamo prima di tutto che $f(0) = -4$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 ha equazione

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Dato che $f'(x) = 4e^x \cos(x^3 + \pi) - 4e^x \sin(x^3 + \pi)\, 3x^2$ da cui $f'(0) = -4$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = -4 - 4x$$

❒ **Esercizio 8.3.3. (Esame del 23.11.20)** *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 2x \cos(x^{3/2})$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.*

➻ **R.** Osserviamo prima di tutto che $f(0) = 0$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 0 ha equazione

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Dato che $f'(x) = 2\cos(x^{3/2}) - 2x \sin(x^{3/2}) 3/2\sqrt{x}$ da cui $f'(0) = 2$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = 2x$$

❒ **Esercizio 8.3.4. (Esame del 23.11.20)** *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = 2e^x \cos(x^2)$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.*

➻ **R.** Osserviamo prima di tutto che $f(0) = 2$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1 ha equazione

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Dato che $f'(x) = 2e^x \cos(x^2) - 2e^x \sin(x^2) 2x$ da cui $f'(0) = 2$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = 2 + 2x$$

8.4. Rette tangenti al grafico di funzioni composte

❒ **Esercizio 8.4.1. (Esame del 02.09.16)** *Sia $f(t) = t^2$ e $g(s) = e^s$. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione composta $g \circ f$ nel punto di ascissa $t_0 = 1$.*

➻ **R.** Scriviamo innanzitutto la funzione composta $h = g \circ f$ dove $h(t) = e^{t^2}$. A questo punto, l'equazione della retta tangente cercata risulta

$$y = y_0 + h'(t_0)(t - t_0)$$

dove $t_0 = 1$, $y_0 = h(t_0) = e$, $h'(t_0) = 2t_0e^{t_0} = 2e$. L'equazione richiesta è dunque $y = 2et - e$.

8.5. Rette tangenti al grafico di funzioni inverse

❒ **Esercizio 8.5.1. (Esame del 08.01.19)** *Sia* $f(x) = \log(1 + x) + x + 2$. *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa* f^{-1} *nel punto* $(2, f^{-1}(2))$.

➻ **R.**
Osserviamo prima di tutto che $f(x_0) = 2$ se $x_0 = 0$. Quindi l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel suo punto di ascissa 2 ha equazione

$$y = f^{-1}(2) + (f^{-1})'(2)(x - 2) = 0 + \frac{1}{f'(0)}(x - 2).$$

Dato che $f'(x) = \frac{1}{1+x} + 1$ si ha $f'(0) = 2$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = \frac{x - 2}{2}.$$

❒ **Esercizio 8.5.2. (Esame del 24.06.20)** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = x + 2e^x$. *Sia* f^{-1} *la sua funzione inversa di* f. *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* f^{-1} *nel punto* $(2, 0)$.

➻ **R.** L'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel suo punto di ascissa 2 ha equazione

$$y = f^{-1}(2) + (f^{-1})'(2)(x - 2) = 0 + \frac{1}{f'(0)}(x - 2).$$

Dato che $f'(x) = 1 + 2e^x$ si ha $f'(0) = 3$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = \frac{x - 2}{3}.$$

❒ **Esercizio 8.5.3. (Esame del 22.06.21)** *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x) = x + 3e^x$. *Sia* f^{-1} *la sua funzione inversa di* f. *Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di* f^{-1} *nel punto* $(3, 0)$.

R. L'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel suo punto di ascissa 3 ha equazione

$$y = f^{-1}(3) + (f^{-1})'(3)(x-3) = 0 + \frac{1}{f'(0)}(x-3).$$

Dato che $f'(x) = 1 + 3e^x$ si ha $f'(0) = 4$. Allora l'equazione della retta richiesta risulta

$$y = \frac{x-3}{4}.$$

CAPITOLO 9

Esercizi riguardanti approssimazione e polinomi di Mac Laurin

9.1. Limiti risolti con l'uso di polinomi di Mac Laurin

❒ **Esercizio 9.1.1. (Esame del 22.02.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x^3 \sin^2(\sqrt{2x}) \qquad\qquad g(x) = 2x^2 - (\cos x)(\log(1+2x^2))$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Si ha

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

da cui

$$\sin\sqrt{2x} = \sqrt{2x} - \frac{\sqrt{2x}(2x)}{6} + o(x\sqrt{x}) \qquad \sin^2(\sqrt{2x}) = 2x - \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)$$

pertanto

$$f(x) = x^3\left(2x - \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)\right) = 2x^4 - \frac{4}{3}x^5 + o(x^5) = 2x^4 + o(x^4)$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(2x^2 - 2x^4 + o(x^4)\right) \\ &= 2x^2 - 2x^2 + 2x^4 + x^4 + o(x^4) = 3x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4 + o(x^4)}{3x^4 + o(x^4)} = \frac{2}{3}$$

❒ **Esercizio 9.1.2. (Esame del 10.04.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al secondo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x \arctan x + \log^2(1+x) \qquad g(x) = \sqrt{2}x^2$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + o(z^3) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

da cui

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(x + o(x^2)\right) + \left[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]^2 \\ &= x^2 + o(x^2) + x^2 + o(x^2) \\ &= 2x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

D'altra parte, per quanto riguarda la funzione g, si tratta di un polinomio quindi non deve essere ulteriormente sviluppata.
Allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{\sqrt{2}x^2} = \sqrt{2}.$$

❒ **Esercizio 9.1.3. (Esame del 18.06.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \log(1 + x\sin x) - e^{x^2} + 1 \qquad g(x) = \sqrt{1-3x^4} - 1$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

➼ **R.** Prima di tutto si ha

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

da cui

$$\begin{aligned}\log(1 + x\sin x) &= x\sin x - \frac{(x\sin x)^2}{2} + o((x\sin x)^2)\\ &= x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

D'altra parte, ricordando che

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

si ottiene

$$(1 - 3x^4)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-3x^4) + o(x^4)$$

quindi

$$g(x) = -\frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{9}.$$

❒ **Esercizio 9.1.4. (Esame del 19.12.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x\cos x - \tan x \qquad\qquad g(x) = x\sin^2 x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➼ **R.** Si ha

$$f(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = -\frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

mentre

$$g(x) = x^3 + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=-\frac{5}{6}$$

❒ **Esercizio 9.1.5. (Esame del 19.12.19)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x)=\sin x-x\cos x \qquad\qquad g(x)=x\tan^2 x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➻ **R.** Si ha

$$f(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

mentre

$$g(x)=x\left[x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]^2=x(x^2+o(x^2))=x^3+o(x^3)$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\frac{1}{3}$$

❒ **Esercizio 9.1.6. (Esame del 09.01.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al secondo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x)=\cos x-1-\sin(x^2) \qquad\qquad g(x)=x+2x^2-\log(1+x).$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➻ **R.** Si ha

$$f(x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x^2+o(x^2)=-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)$$

mentre

$$g(x)=x+2x^2-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)=\frac{5}{2}x^2+o(x^2)$$

dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{\frac{5}{2}x^2+o(x^2)}=-\frac{3}{5}$$

❒ **Esercizio 9.1.7. (Esame del 23.01.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = 3x\, e^{x^2} - \sin(2x) - x \qquad\qquad g(x) = x\, \sin(x^2)$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$f(x) = 3x(1 + x^2 + o(x^2)) - 2x + \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3) - x = \frac{13}{3}x^3 + o(x^3)$$

e

$$g(x) = x(x^2 + o(x^2)) = x^3 + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{13}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{13}{3}$$

❒ **Esercizio 9.1.8. (Esame del 20.02.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \log(1 - x) + \sqrt{1 + x}\,\sin x \qquad\qquad g(x) = \arctan x - x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] + \left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right]\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] \\ &= -\frac{5}{8}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

mentre

$$g(x) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{8}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{15}{8}$$

❐ **Esercizio 9.1.9. (Esame del 24.06.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x - e^x \sin x \qquad\qquad g(x) = x^2 \cos 2x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

➻ **R.** Si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\ &= x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) + x^2 + \frac{x^3}{2}\right) = -x^2 - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

mentre

$$g(x) = x^2\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^4)\right) = x^2 - 2x^4 + o(x^4)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -1$$

❐ **Esercizio 9.1.10. (Esame del 09.07.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x - \sin x \qquad\qquad g(x) = x - \log(1 + x)$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

➻ **R.** Si ha

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = 0$$

❒ **Esercizio 9.1.11. (Esame del 23.07.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \sqrt{1+2x} + e^{-x} - 2 \qquad\qquad g(x) = x - \sin x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} z^3 + o(z^3)$$

dunque

$$\begin{aligned}(1+2x)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{6}(8x^3) + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\end{aligned}$$

D'altra parte, essendo $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, si ha

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

mentre

$$g(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 2$$

❒ **Esercizio 9.1.12. (Esame del 08.09.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al secondo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = \log(1+x) - x - 2x^2 \qquad\qquad g(x) = \sin(x^2) - 1 + \cos x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - 2x^2 = -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$$

mentre

$$g(x) = x^2 + o(x^2) - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -5$$

❒ **Esercizio 9.1.13. (Esame del 14.12.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = (1-\cos x)^2 \qquad\qquad g(x) = 2\log(1+x^2) + \cos(2x) - 1$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R. Si ha

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

mentre

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4) \\ &= 2x^2 - x^4 + o(x^4) - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) = -\frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} = -\frac{3}{4}$$

❒ **Esercizio 9.1.14. (Esame del 21.12.20)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x(\sin x - \cos x + 1) \qquad\qquad g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 - e^x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^4) \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + o(z^4) \qquad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + o(z^4)$$

quindi

$$f(x) = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + 1\right) = x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

e

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1 - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{2}{3}.$$

❒ **Esercizio 9.1.15. (Esame del 12.01.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = e^{-x/2} \sin x - \log(1+x) \qquad\qquad g(x) = x - x\cos x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + o(z^4)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + o(z^4)$$

A questo punto

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x/2}\sin x - \log(1+x)\\
&= \left[1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{x}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \left(-\frac{x}{2}\right)^3\frac{1}{6} + o(x^3)\right]\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]\\
&= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\\
&= -\frac{3}{8}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

mentre

$$g(x) = x(1 - \cos x) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{8}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=-\frac{3}{4}.$$

❒ **Esercizio 9.1.16. (Esame del 02.02.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x)=e^{x^3}-1 \qquad\qquad g(x)=x(\cos x-e^{x^2})$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➺ **R.**

Ricordiamo che

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+o(z^3) \qquad\qquad \cos z=1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+o(z^4)$$

A questo punto

$$f(x)=x^3+o(x^3)$$

mentre

$$g(x)=x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x^2\right)=-\frac{3}{2}x^3+o(x^3).$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{3}{2}x^3+o(x^3)}=-\frac{2}{3}.$$

❒ **Esercizio 9.1.17. (Esame del 23.02.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al quarto ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x)=x^2+\log(1+x)\cdot\log(1-x) \qquad\qquad g(x)=x^3\sin x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

➺ **R.**

1) Ricordiamo che

$$\log(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+o(z^4) \qquad\qquad \sin z=z-\frac{z^3}{6}+o(z^3)$$

A questo punto

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right] \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right] \\ &= x^2 - x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) = -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$g(x) = x^3 \sin x = x^3(x + o(x)) = x^4 + o(x^4)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{5}{12}.$$

❒ **Esercizio 9.1.18. (Esame del 09.06.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = e^{3x} - 1 - 2x\cos x - x \qquad\qquad g(x) = x^2 \arctan x$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + o(z^3) \qquad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2)$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) - 2x\left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] - x \\ &= 3x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) - 2x + x^3 + o(x^3) - x \\ &= -\frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

e d'altra parte

$$g(x) = x^2(x + o(x)) = x^3 + o(x^3)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{9}{2} + \frac{11}{2}x + o(x)}{x + o(x)}$$

e questo limite non esiste perché tende a $-\infty$ se $x \to 0^+$ mentre tende a $+\infty$ se $x \to 0^-$.

❒ **Esercizio 9.1.19. (Esame del 23.06.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = e^x \sin x - x \qquad\qquad g(x) = x^{3/2} \log(1+\sqrt{x})$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

R.

1) Ricordiamo che

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

A questo punto

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x - x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right]\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] - x \\ &= x - \frac{x^3}{6} + x^2 + \frac{x^3}{2} - x + o(x^3) = x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

D'altra parte

$$g(x) = x^{3/2}\log(1+\sqrt{x}) = x^{3/2}\left[\sqrt{x} - \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{3} + o(x\sqrt{x})\right] = x^2 - \frac{x^{5/2}}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2 - \frac{x^{5/2}}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 1$$

❒ **Esercizio 9.1.20. (Esame del 07.07.21)** *1) Si scriva lo sviluppo di Mac Laurin fino al terzo ordine delle seguenti funzioni:*

$$f(x) = x - \sin x \qquad\qquad g(x) = x - \log(1+x)$$

2) Si calcoli, se esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{[x\, g(x)]}$$

➡ **R.**

1) Ricordiamo che

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + o(z^3)$$

A questo punto

$$f(x) = x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

mentre

$$g(x) = x - \log(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

2) A questo punto, sfruttando i risultati ottenuti al passo precedente, si ha che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[xg(x)]} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \frac{1}{3}$$

CAPITOLO 10

Esercizi riguardanti continuità e derivabilità di funzioni su un intervallo

10.1. Teorema degli zeri e sue conseguenze

❒ **Esercizio 10.1.1. (Esame del 12.01.15)** *Determinare il numero delle soluzioni della seguente equazione*
$$\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{81}{32} = 0$$
giustificando la risposta sulla base della teoria.

➼ **R.** Poniamo
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{81}{32}.$$
Il dominio di f è $\mathbb{R}$, la funzione f è continua; inoltre
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$
Infine
$$f'(x) = x^2 - 2x - \frac{9}{16}$$
e pertanto
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{9}{4}.$$
Dato che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(-1/4) > 0$, dal teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 < -1/4$ tale che $f(x_0) = 0$. Inoltre, essendo $f(9/4) = 0$ ed essendo f strettamente crescente per $x > 9/4$, gli unici due zeri della funzione f sono x_0 e $9/4$ e non ce ne sono altri. Pertanto

l'equazione data ammette esattamente due soluzioni.

❒ **Esercizio 10.1.2. (Esame del 20.12.18)** *Sia f una funzione continua tale che $f(0) = -2$ e $f(1) = -1$. Dimostrare che esiste almeno una soluzione $x_0 \in (0,1)$ tale che*

$$f(x_0) + x_0 + 1 = 0.$$

R. Poniamo

$$g(x) = f(x) + x + 1.$$

Allora si ha che g è una funzione continua, in quanto f lo è. Inoltre

$$g(0) = f(0) + 0 + 1 = -2 + 1 = -1 < 0 \qquad g(1) = f(1) + 1 + 1 = 1 > 0.$$

Quindi la funzione g è continua nell'intervallo $[0,1]$ e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applicando il teorema degli zeri si ottiene che la funzione g ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo considerato e quindi esiste sempre $x_0 \in (0,1)$ tale che $f(x_0) + x_0 + 1 = 0$.

❒ **Esercizio 10.1.3. (Esame del 22.02.19)** *Dimostrare che l'equazione $e^x - 3 = \arctan x$ ha almeno una soluzione.*

R. Poniamo

$$f(x) = e^x - 3 - \arctan x.$$

La funzione f è ben definita su $\mathbb{R}$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -3 + \frac{\pi}{2} < 0$$

quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici rispetto all'origine, M e $-M$) tale che $f(M) > 0$ e $f(-M) < 0$. La funzione data è continua ovunque e dunque anche nell'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$. Quindi si può applicare il teorema degli zeri nell'intervallo $[-M, M]$ e dunque esiste (almeno) uno zero della funzione e quindi (almeno) una soluzione dell'equazione data.

❒ **Esercizio 10.1.4. (Esame del 10.04.19)** *Dimostrare che l'equazione*

$$2x\,e^{-x} = \frac{1}{2}$$

ha almeno due soluzioni.

➼ **R.** Ponendo $f(x) = 2xe^{-x} - \frac{1}{2}$, il problema proposto equivale a trovare gli zeri della f. Si ha che $f(1) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2} > 0$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ dunque ripetendo il ragionamento dell'esercizio precedente, si ha un numero pari di soluzioni. Dai limiti agli estremi del dominio, si ha che definitivamente, se $x \to \pm\infty$ la funzione data è negativa; quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici rispetto all'origine, $-M$ e M) tale che $f(M) < 0$ e $f(-M) < 0$. La funzione data è continua ovunque e dunque anche nell'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$. Ma $f(1) > 0$ quindi si può applicare il teorema degli zeri due volte, rispettivamente negli intervalli $[1, M]$ e $[-M, 1]$ e dunque esistono (almeno) due zeri della funzione e quindi (almeno) due soluzioni dell'equazione data.

❒ **Esercizio 10.1.5. (Esame del 19.12.19)** *Dimostrare che per* $\alpha > 2 - 2\log 2$ *l'equazione* $e^x = 2x + \alpha$ *ha due soluzioni distinte.*

➼ **R.** Poniamo

$$f(x) = e^x - 2x - \alpha.$$

La funzione f è ben definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è continua. Si osserva che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

quindi esisteranno due valori (che per semplicità possiamo assumere simmetrici rispetto all'origine, $-M$ e M) tale che $f(M) > 0$ e $f(-M) > 0$. Inoltre

$$f'(x) = e^x - 2.$$

Osservando il segno della derivata prima, si vede che $x = \log 2$ è punto di minimo assoluto per f. Allora se fosse $f(\log 2) < 0$, potremmo applicare due volte il teorema degli zeri (negli intervalli $[-M, \log 2]$ e $[\log 2, M]$ (non è restrittivo supporre che $M > \log 2$). Ma

$$f(\log 2) = e^{\log 2} - 2\log 2 - \alpha = 2 - 2\log 2 - \alpha < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha > 2 - 2\log 2$$

che era la condizione richiesta.

❒ **Esercizio 10.1.6. (Esame del 14.12.20)** *Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$. Dimostrare che esiste una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ dell'equazione $f(x) + x^2 - 2 = 0$.*

R. Poniamo

$$g(x) = f(x) + x^2 - 2.$$

Allora si ha che g è una funzione continua, in quanto f lo è. Inoltre

$$g(0) = f(0) + 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \qquad g(1) = f(1) + 1 - 2 = 2 + 1 - 2 > 0.$$

Quindi la funzione g è continua nell'intervallo $[0, 1]$ e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applicando il teorema degli zeri si ottiene che la funzione g ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo considerato e quindi esiste sempre $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x_0) + x_0^2 - 2 = 0$.

❒ **Esercizio 10.1.7. (Esame del 23.06.21)** *Sia $f(x)$ una funzione continua per cui vale $f(0) = -3$ e $f(1) = 1$. Dimostrare che esiste una soluzione $x_0 \in (0, 1)$ dell'equazione $f(x) + x + 1 = 0$.*

R. Poniamo

$$g(x) = f(x) + x + 1.$$

Allora si ha che g è una funzione continua, in quanto f lo è. Inoltre

$$g(0) = f(0) + 0 + 1 = -3 + 1 = -2 < 0 \qquad g(1) = f(1) + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 > 0.$$

Quindi la funzione g è continua nell'intervallo $[0, 1]$ e assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo. Applicando il teorema degli zeri si ottiene che la funzione g ha sicuramente almeno uno zero nell'intervallo considerato e quindi esiste sempre $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x_0) + x_0 + 1 = 0$.

10.2. Continuità e derivabilità

❒ **Esercizio 10.2.1. (Esame del 15.12.15)** *Determinare per quali valori del parametro reale α si ha che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} & x > 0 \\ \alpha x + 3 & x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

R. Se $x > 0$ la funzione data è continua (composizione di funzioni continue), se $x < 0$ la funzione data è continua (polinomio di primo grado), quindi resta solo da verificare per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x\,\frac{1}{2}x} = 2$$

perché $\sin x^2 \sim x^2$ se $x \to 0$ e $\sqrt{x+1} - 1 \sim \frac{1}{2}x$ se $x \to 0$.
D'altra parte

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 3.$$

Quindi la funzione data non è continua per alcun valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

❒ **Esercizio 10.2.2. (Esame del 15.12.15)** *Determinare per quali valori del parametro reale α si ha che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^x-1)^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} & x > 0 \\ \alpha x + 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

R. Se $x > 0$ la funzione data è continua (composizione di funzioni continue), se $x < 0$ la funzione data è continua (polinomio di primo grado), quindi resta solo da verificare per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ si abbia

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(e^x-1)^2}{x(\sqrt{x+1}-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x\,\frac{1}{2}x} = 2$$

perché $(e^x-1)^2 \sim x^2$ se $x \to 0$ e $\sqrt{x+1}-1 \sim \frac{1}{2}x$ se $x \to 0$.
D'altra parte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2.$$

Quindi la funzione data è continua per tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$.

❒ **Esercizio 10.2.3. (Esame del 02.09.16)** *Determinare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ per cui risulta continua la seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x+k & x \le 0 \\ x^{1/x} & x > 0 \end{cases}$$

➻ **R.** Per verificare la continuità si deve avere che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

A questo punto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = k$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log x}{x}} = 0$$

quindi la funzione è continua ovunque se $k = 0$.

❒ **Esercizio 10.2.4. (Esame del 19.12.16)** *Determinare il valore (o i valori) del parametro reale α per cui la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\cos(\alpha x)} & x \le 0 \\ \dfrac{\sin^2(\alpha x)}{1-\cos x} & x > 0 \end{cases}$$

risulta continua in $[-\pi, \pi]$.

➽ **R.** Se $x \neq 0$ allora la funzione data è composizione di funzioni continue e pertanto risulta continua (nell'intervallo considerato $[-\pi, \pi]$). Quindi basta valutare la continuità in $x = 0$. Si deve avere

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ottiene

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = e^{\cos(\alpha 0)} = e$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(\alpha x)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha^2 x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2\alpha^2.$$

Dunque uguagliando i due valori ottenuti si deve avere

$$2\alpha^2 = e \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{e}{2}}.$$

❒ **Esercizio 10.2.5. (Esame del 20.12.16)** *Determinare il valore (o i valori) del parametro reale α per cui la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2} & x \leq 0 \\ \dfrac{\arctan^{3/2}(\alpha x)}{x\sqrt{x(4+x)}} & x > 0 \end{cases}$$

risulta continua in $\left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right]$.

➽ **R.** La funzione data è ben definita e continua se $x \in \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right] \setminus \{0\}$ perché composizione di funzioni continue. Quindi rimane da verificare la continuità in $x = 0$. Per fare questo dovrei verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ha

$$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan^{3/2}(\alpha x)}{x\sqrt{x(4+x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha x)^{3/2}}{2x\sqrt{x}} = \frac{\alpha^{3/2}}{2},$$

dove sono stati usati i seguenti fatti che valgono per $x \to 0$

$$\arctan z \sim z \qquad \sqrt{x(4+x)} \sim 2\sqrt{x}$$

quindi in particolare
$$\arctan^{3/2}(\alpha x) \sim (\alpha x)^{3/2}.$$
Quindi uguagliando i valori ottenuti si ha che la funzione data risulta continua anche in $x = 0$ se
$$\frac{\alpha^{3/2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

❒ **Esercizio 10.2.6. (Esame del 18.12.17)** *Si determinino il valore (o i valori) del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la seguente funzione*
$$f(x) = \begin{cases} 2x + \alpha & x \leq 0 \\ \dfrac{\sin x - xe^{2x}}{x^2} & x > 0 \end{cases}$$
risulta continua.

R. La funzione data risulta continua se $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue. Rimane da verificare la continuità di f in $x = 0$. (La derivabilità non è richiesta e non ce ne cureremo). Dalla definizione di continuità, occorre verificare che
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$
Notare che occorre verificare sia l'esistenza del limite, sia il fatto che questo coincida col valore della funzione nel punto, altrimenti la funzione potrebbe non risultare continua! Nel nostro caso si ha
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - xe^{2x}}{x^2} = -2$$
dato che si ha usando gli sviluppi di Taylor
$$\sin x = x + o(x^2) \qquad e^{2x} = 1 + 2x + o(x) \qquad xe^{2x} = x + 2x^2 + o(x^2)$$
e dunque
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - xe^{2x}}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x^2 + o(x^2)}{x^2} = -2.$$
Lo stesso risultato si poteva ottenere usando il Teorema di De l'Hospital come segue
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - xe^{2x}}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - (1 + 2x)e^{2x}}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x - 2e^{2x} - 2(1 + 2x)e^{2x}}{2} = -2.$$
D'altra parte
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \alpha.$$

Quindi il valore di α che rende f continua anche in $x = 0$ è $\alpha = -2$.

❒ **Esercizio 10.2.7. (Esame del 23.01.19)** *Determinare i valori dei parametri a e b per i quali la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(ax^2) - 1 & \text{per } x \geq 0 \\ b\,\cos x + ax & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel punto $x = 0$

➻ **R.** Dalla definizione di continuità

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sin(ax^2) - 1 = -1 = f(0)$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} b\cos x + ax = b$$

da cui si deduce $b = -1$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos(ax^2)\,2ax = 0$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-b\sin x + a) = a$$

pertanto $a = 0$. Allora per $a = 0$ e $b = -1$ si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile nel punto $x = 0$.

❒ **Esercizio 10.2.8. (Esame del 05.06.19)** *Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{2-2x} - ax & x < 1 \\ \log(3x-2) - bx^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in $x_0 = 1$

➾ **R.** Dalla definizione di continuità

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{2-2x} - ax = 1 - a$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(3x-2) - bx^2 = -b = f(1)$$

da cui si deduce $b = a - 1$.

D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 1$ occorre che

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{2-2x}(-2) - a = -2 - a$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3}{3x-2} - 2bx = 3 - 2b$$

pertanto si ottiene $-2 - a = 3 - 2b$ da cui $a = 2b - 5$.

Mettendo a sistema le due condizioni ottenute, si ottiene $a = 7$ e $b = 6$. Allora per $a = 7$ e $b = 6$ si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile nel punto $x = 1$.

❒ **Esercizio 10.2.9. (Esame del 11.09.19)** *Determinare per quali valori di α e β la seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1 - (\log 2)x}{x} & x > 0 \\ \alpha x + \beta & x \le 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

➾ **R.** La funzione risulta continua e derivabile se $x > 0$ perché quoziente di funzioni continue e derivabili e anche se $x < 0$ perché è un polinomio. Per concludere è dunque sufficiente valutare continuità e derivabilità nel punto $x = 0$.

Dalla definizione di continuità

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x - 1 - (\log 2)x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log 2} - 1}{x} - \log 2 = 0$$

mentre
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \alpha x + \beta = f(0)$$
da cui si deduce $\beta = 0$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$
Nel nostro caso
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{[2^x \log 2 - \log 2]x - 2^x + 1 + (\log 2)x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2^x \log 2)x - 2^x + 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
quindi dal Teorema di De l'Hospital si ottiene
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(2^x \log 2)x - 2^x + 1}{x^2} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x \log^2 2 + 2^x \log 2 - 2^x \log 2}{2x} = \frac{1}{2}\log^2 2.$$
D'altra parte
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha$$
quindi per $\alpha = \frac{1}{2}\log^2 2$ e $\beta = 0$ si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

❒ **Esercizio 10.2.10. (Esame del 25.01.18)** *Determinare il valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione*
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-3x^2}}{x} & x > 0 \\ \dfrac{5}{2}x + \alpha & x \le 0 \end{cases}$$
risulta continua (in $\mathbb{R}$). Per tale valore di α, la funzione f risulta anche derivabile?

R. La funzione data risulta continua se $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue. Rimane da verificare la continuità di f in $x = 0$. Dalla definizione di continuità, occorre verificare che
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$
Nel nostro caso si ha
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-3x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1-3x^2}}{x} \frac{\sqrt{1+2x^2} + \sqrt{1-3x^2}}{\sqrt{1+2x^2} + \sqrt{1-3x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + 2x^2 - 1 + 3x^2}{x\left(\sqrt{1+2x^2} + \sqrt{1-3x^2}\right)} = 0.\end{aligned}$$

In particolare osserviamo che, per $x \to 0^+$

$$\frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x} \sim \frac{5}{2}x \tag{10.2.1}$$

che ci servirà in seguito. D'altra parte

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \alpha$$

quindi f è continua su $\mathbb{R}$ se $\alpha = 0$.
Vediamo se per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile. Sicuramente la funzione data è derivabile per $x \neq 0$ in quanto per $x > 0$ è quoziente di funzioni derivabili mentre per $x < 0$ è un polinomio. Vediamo se la funzione data è derivabile anche in $x = 0$.
Il modo canonico di procedere è quello di osservare che, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} f'(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\left[\frac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}} - \frac{-6x}{2\sqrt{1-3x^2}}\right] x - (\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2})}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-3x^2}} - \frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x^2} = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

in quanto, usando (10.2.1) si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+2x^2}-\sqrt{1-3x^2}}{x^2} = \frac{5}{2}.$$

D'altra parte, essendo

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \frac{5}{2}$$

si conclude che per il valore di $\alpha = 0$ la funzione data è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

❒ **Esercizio 10.2.11. (Esame del 15.11.19)** *Determinare il valore del parametro α per il quale la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} + 2\alpha & \text{per } x \geq 0 \\ -3x^2 - 1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua nel punto $x_0 = 0$. Dire se per tale valore di α f è anche derivabile in $x_0 = 0$.

R. La funzione data risulta continua se $x \neq 0$ perché composizione di funzioni continue. Rimane da verificare la continuità di f in $x = 0$. Dalla definizione di continuità, occorre verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^{-\alpha x} + 2\alpha) = 1 + 2\alpha = f(0)$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-3x^2 - 1) = -1$$

dunque per la continuità in $x = 0$ deve essere

$$1 + 2\alpha = -1$$

da cui $\alpha = -1$. Vediamo se per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile. Sicuramente la funzione data è derivabile per $x \neq 0$ in quanto per $x > 0$ è somma di funzioni derivabili mentre per $x < 0$ è un polinomio. Vediamo se la funzione data è derivabile anche in $x = 0$.
Il modo canonico di procedere è quello di osservare che, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\alpha x}(-\alpha) = -\alpha = 1$$

dalla scelta fatta al passo precedente. D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -6x = 0$$

si conclude che per il valore di $\alpha = -1$ la funzione data non è derivabile in $x = 0$.

❒ **Esercizio 10.2.12. (Esame del 23.01.20)** *Determinare per quale valore del parametro reale α la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi - x) & x \leq 0 \\ \dfrac{\sin(\alpha x^2)}{xe^{2x} - \sin x} & x > 0 \end{cases}$$

risulta continua in $x = 0$.

➻ **R.** Dalla definizione di continuità, occorre verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos(\pi - x) = -1 = f(0)$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\alpha x^2)}{xe^{2x} - \sin x}$$

che si presenta in una forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$. Osservando che

$$xe^{2x} - \sin x = x\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)\right) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = 2x^2 + o(x^2)$$

si ha che, per $x \to 0$

$$xe^{2x} - \sin x \sim 2x^2$$

da cui, per $x \to 0$

$$\frac{\sin(\alpha x^2)}{xe^{2x} - \sin x} \sim \frac{\alpha x^2}{2x^2} = \frac{\alpha}{2}$$

dunque per la continuità in $x = 0$ deve essere

$$\frac{\alpha}{2} = -1$$

da cui $\alpha = -2$.

❒ **Esercizio 10.2.13. (Esame del 21.12.20)** *Determinare per quale valore del parametro β la funzione*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x & \text{per } x < 0 \\ \log(1 + 2x) & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto $x_0 = 0$

➻ **R.** Osserviamo che la funzione data è continua nel punto $x_0 = 0$ in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log(1 + 2x) = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Per verificare la derivabilità in $x_0 = 0$, da un corollario del teorema di De l'Hospital, occorre che sia

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x).$$

Nel nostro caso si ha

$$2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+2x} = \lim_{x\to 0^-} 2x + \beta = \beta$$

da cui

$$\beta = 2.$$

Per tale valore di β la funzione risulta derivabile nel punto $x_0 = 0$.

❒ **Esercizio 10.2.14. (Esame del 08.09.20)** *Determinare per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{per } x < -1 \\ \alpha|x| - 1 & \text{per } x \geq -1 \end{cases}$$

è continua in $x_0 = -1$. Dire se per tale valore di α la funzione è anche derivabile in $x_0 = -1$

➻ **R.** Dalla definizione di continuità, occorre verificare che

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = f(-1).$$

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \alpha|x| - 1 = \alpha - 1 = f(-1)$$

mentre

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \cos(\pi x) = -1$$

dunque per la continuità in $x = 0$ deve essere

$$\alpha - 1 = -1$$

da cui $\alpha = 0$. Vediamo se per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile in $x = 0$.
Il modo canonico di procedere è quello di osservare che, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 0$$

perché se $\alpha = 0$, per $x > -1$ la funzione è costante. D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \pi \sin(\pi x) = 0$$

si conclude che per il valore di $\alpha = -1$ la funzione data è derivabile anche in $x = 0$.

❒ **Esercizio 10.2.15. (Esame del 21.12.20)** *Determinare per quali valori di α e β la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

è continua e derivabile in $x_0 = 1$

➻ **R.** Dalla definizione di continuità

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + \alpha x + \beta = 1 + \alpha + \beta$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - x^2 = 0 = f(1)$$

da cui si deduce $\alpha + \beta = -1$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 1$ occorre che sia

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x + \alpha = 2 + \alpha$$

e inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -2x = -2$$

da cui si deduce che $\alpha = -4$ mentre $\beta = 3$. Per tali valori di α e β si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile in $x_0 = 1$.

❒ **Esercizio 10.2.16. (Esame del 23.02.21)** *Determinare per quale valore di $\alpha \in (-2,2)$ risulta continua la seguente funzione*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{10-x^2}} & -2 \le x \le \alpha \\ \dfrac{1}{x+2} & \alpha \le x \le 2. \end{cases}$$

Per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile in $(-2,2)$? Motivare la risposta.

R. La funzione data risulta sicuramente continua se $x \neq \alpha$ in quanto quoziente di funzioni continue. Per concludere, occorre verificare che

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = f(\alpha).$$

Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lim_{x\to\alpha^+} \frac{1}{\alpha+2}$$

mentre

$$\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = \lim_{x\to\alpha^-} \frac{1}{\sqrt{10-\alpha^2}}$$

dunque per la continuità deve essere

$$\frac{1}{\alpha+2} = \frac{1}{\sqrt{10-\alpha^2}}$$

da cui

$$10-\alpha^2 = \alpha^2+4\alpha+4$$

che porta a $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -3$. Siccome l'esercizio chiede di determinare il valore di $\alpha \in (-2,2)$, l'unico valore accettabile risulta $\alpha = 1$. Questo è il valore di α che rende continua la funzione data.

Vediamo se per tale valore di α la funzione risulta anche derivabile. Sicuramente la funzione risulta derivabile per $x \neq 1$ in quanto quoziente di funzioni derivabili.

Il modo canonico di procedere è quello di osservare che, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 0$ occorre che sia

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^-} f'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} -\frac{1}{(x+2)^2} = -\frac{1}{9}$$

D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(10-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{27}$$

si conclude che per il valore di $\alpha = 1$ la funzione data non è derivabile in $x = 1$.

❒ **Esercizio 10.2.17. (Esame del 07.07.21)** *Sia*

$$g(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - 1 & \text{per } x < 1 \\ \beta x + 1 & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

Si determinino α e β affinché $g(x)$ sia continua e derivabile.

R. La funzione data risulta sicuramente continua e derivabile per $x \neq 1$ in quanto risulta una funzione polinomiale.
Vediamo per quali valori di α e β la funzione data risulta continua e derivabile anche in $x = 1$.
Dalla definizione di continuità si ha

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \beta x + 1 = 1 + \beta + 1 = g(1)$$

mentre

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \alpha x^2 - 1 = \alpha - 1$$

da cui si deduce $\alpha = \beta + 2$.
D'altra parte, da un corollario del teorema di De l'Hospital, perché la funzione sia derivabile in $x = 1$ occorre che sia

$$\lim_{x\to 1^+} g'(x) = \lim_{x\to 1^-} g'(x).$$

Nel nostro caso

$$\lim_{x\to 1^+} g'(x) = \lim_{x\to 1^+} \beta$$

e inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2\alpha x = 2\alpha$$

da cui si deduce che $\alpha = -2$ mentre $\beta = -4$. Per tali valori di α e β si ottiene che la funzione data risulta continua e derivabile anche in $x_0 = 1$.

10.3. Convessità e crescenza

❒ **Esercizio 10.3.1. (Esame del 06.05.16)** *Determinare l'insieme in cui la funzione*

$$f(x) = 3\log x - \log^2 x$$

è strettamente convessa (ha concavità verso l'alto).

➺ **R.** La funzione $f(x)$ è definita per $x > 0$. Inoltre

$$f'(x) = \frac{3}{x} - 2\log x\,\frac{1}{x} = \frac{3 - 2\log x}{x}$$

e anche

$$f''(x) = \frac{-\frac{2}{x}x - (3 - 2\log x)}{x^2} = \frac{2\log x - 5}{x^2}.$$

La condizione di stretta convessità è dunque equivalente a richiedere che $f''(x) > 0$ cioè

$$2\log x - 5 > 0 \Leftrightarrow \log x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x > e^{5/2}.$$

L'insieme richiesto è dunque $(e^{5/2}, +\infty)$.

❒ **Esercizio 10.3.2. (Esame del 19.12.16)** *Siano* $g(y) = \frac{y^2}{1-y}$ *e* $f(x) = e^{-x}$. *Determinare l'insieme dove la funzione* $(g \circ f)(x)$ *(definita per* $x \neq 0$*) è decrescente*

➺ **R.** Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}}$$

quindi

$$h'(x) = \frac{-2e^{-2x}(1 - e^{-x}) - (e^{-x})e^{-2x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{1}{(1 - e^{-x})^2}[e^{-3x} - 2e^{-2x}].$$

Quindi l'insieme dove la funzione h è decrescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \leq 0$$

cioè gli x tali che

$$e^{-3x} - 2e^{-2x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1 - 2e^{x}}{e^{3x}} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{x} \geq 1/2 \;\Leftrightarrow\; x \geq \log(1/2) = -\log 2$$

❒ **Esercizio 10.3.3. (Esame del 26.06.18)** *Siano date le funzioni* $f(x) = e^x$ *e* $g(y) = \frac{x^2}{x-1}$.

1) Determinare l'insieme dove la funzione composta $h(x) := (g \circ f)(x)$ *risulta essere non negativa.*
2) Determinare l'insieme dove la funzione composta risulta essere crescente

R. 1) Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$

Pertanto, essendo $e^{2x} > 0$, la funzione h risulta non negativa se $e^x - 1 > 0$ (perché il denominatore non si può annullare) cioè se $x > 0$.

2) D'altra parte si ha

$$h'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x - 1) - e^x\, e^{2x}}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{3x} - 2e^{2x}}{(e^x - 1)^2}$$

quindi l'insieme dove la funzione h è crescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \geq 0$$

cioè gli x tali che

$$e^{3x} - 2e^{2x} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2x}(e^x - 2) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e^x \geq 2 \;\Leftrightarrow\; x \geq \log 2.$$

❒ **Esercizio 10.3.4. (Esame del 08.01.19)** *Siano* $f(x) = e^{x/2}$ *e* $g(y) = \frac{y^2}{1-y}$. *Determinare l'insieme dove la funzione composta* $(g \circ f)(x)$ *definita per* $x \neq 0$ *è decrescente*

R. Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^x}{1 - e^{x/2}}$$

Pertanto

$$h'(x) = \frac{e^x - e^{3/2x} - \frac{1}{2}e^{3/2x}}{(1 - e^{x/2})^2} = \frac{e^x - \frac{3}{2}e^{3/2x}}{(1 - e^{x/2})^2}$$

quindi l'insieme dove la funzione h è decrescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \leq 0$$

cioè gli x tali che

$$e^x - \frac{3}{2}e^{3/2x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; e^x\left(1-\frac{3}{2}e^{1/2x}\right) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; e^{1/2x} \geq \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; x \geq 2\log\frac{2}{3}.$$

❐ **Esercizio 10.3.5. (Esame del 02.02.21)** *Siano date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(y) = \frac{y}{1+y}$. Determinare l'insieme dove la funzione $(g \circ f)(x)$ è crescente*

➾ **R.** Sia $h(x) = (g \circ f)(x)$. Si ottiene

$$h(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Pertanto

$$h'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x\, e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

quindi l'insieme dove la funzione h è crescente è l'insieme degli x dove

$$h'(x) \geq 0$$

cioè $\mathbb{R}$. La funzione h pertanto è sempre crescente.

10.4. Teorema di De l'Hospital

❐ **Esercizio 10.4.1. (Esame del 12.01.21)** *Calcolare il seguente limite, se esiste, usando il Teorema di de l'Hôpital*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1+x^2) - \frac{\pi}{4}}{\sin x + e^x - 1}$$

➾ **R.** Siccome $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, il limite dato si presenta nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$.
Dal Teorema di De l'Hospital si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1+x^2) - \frac{\pi}{4}}{\sin x + e^x - 1} \overset{\text{(H)}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+(1+x^2)^2}}{\cos x + e^x} = 0$$

CAPITOLO 11

Esercizi riguardanti domini di funzioni reali di variabile reale

11.1. Richiami di teoria

Per la determinazione del dominio di funzioni reali di una variabile reale occorre ricordare quanto segue:

➠ le operazioni di addizione, sottrazione e prodotto sono sempre possibili (quindi le funzioni razionali intere, cioè i polinomi, hanno come insieme di esistenza $\mathbb{R}$)

➠ l'operazione di divisione non ha significato se il divisore è nullo: quindi le funzioni razionali fratte hanno per insieme di definizione tutti i numeri reali tranne quelli che eventualmente annullino il denominatore

➠ l'operazione di estrazione di radice di indice pari ha risultato reale se il radicando è positivo o nullo

➠ l'operazione di estrazione di radice di indice dispari ha sempre senso purché esista il radicando

➠ il logaritmo ha significato se l'argomento è positivo e purché la base sia un numero positivo e diverso da 1

➠ l'esponenziale con base (costante!!) positiva esiste purché esista l'esponente (variabile)

➠ la potenza con base ed esponente variabili si considera solo per valori positivi della base

➠ le funzioni goniometriche $y = \sin x$ e $y = \cos x$ esistono per ogni x reale, la funzione $y = \tan x$ esiste se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

➠ le funzioni $y = \arcsin x$ e $y = \arccos x$ sono definite per $-1 \leq x \leq 1$ mentre $y = \arctan x$ esiste per ogni x reale

➠ gli indici dei radicali devono essere interi positivi

11.2. Esercizi proposti

❒ **Esercizio 11.2.1.** *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

1) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x^2-1}$ **(Esame del 20.12.18)**

2) $f(x) = \dfrac{\log(1-x^2)}{\sqrt{x^2-2x}}$ **(Esame del 08.01.19)**

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}}$ **(Esame del 23.01.19)**

4) $f(x) = \log\left(\dfrac{2x-1}{|x|-1}\right)$ **(Esame del 22.02.19)**

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-|x|}}{\log|x|}$ **(Esame del 10.04.19)**

6) $f(x) = \dfrac{\arctan(x^3+3)}{|x^2-1|}$ **(Esame del 05.06.19)**

7) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x^2-1|(x-2)^2}}$ **(Esame del 18.06.19)**

8) $f(x) = \sqrt{\log^2 x - \log x}$ **(Esame del 24.07.19)**

9) $f(x) = x\sqrt{x^2-x} - x^2\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ **(Esame del 11.09.19)**

➼ **R.** 1) La funzione è ben definita quando esistono le radici. Essendo entrambe di indice pari, questo equivale ad imporre che i loro argomenti siano non negativi, ovvero

$$\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x^2-1 \geq 0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $x \leq 1$, mentre dalla seconda $x \leq -1 \vee x \geq 1$. Intersecando questi due insiemi si ottiene $x \leq -1 \vee x = 1$. Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x = 1\}.$$

2) La funzione è ben definita quando esistono il logaritmo e la radice, e il denominatore è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} 1-x^2>0 \\ x^2-2x\geq 0 \\ \sqrt{x^2-2x}\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1-x^2>0, \\ x^2-2x>0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $-1<x<1$, mentre dalla seconda $x<0 \vee x>2$. Intersecando questi due insiemi si ottiene $-1<x<0$. Dunque

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}:-1<x<0\}.$$

3) La funzione è ben definita quando esistono le radici e il denominatore è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0, \\ x\geq 0, \\ \sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\neq 0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $x\leq -1 \vee x\geq 1$, mentre la terza è equivalente a

$$\sqrt{x^2-1}\neq\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2-1\neq x \Leftrightarrow x^2-x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Intersecando

$$\begin{cases} x\leq -1 \vee x\geq 1, \\ x\geq 0, \\ x\neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

ed essendo $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0<1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ si ottiene $x\geq 1 \wedge x\neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dunque

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:1\leq x<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

4) La funzione è ben definita quando esiste il logaritmo. Questo equivale ad imporre che il denominatore del suo argomento sia diverso da 0 e che l'argomento stesso sia positivo, ovvero

$$\begin{cases} |x|-1\neq 0, \\ \dfrac{2x-1}{|x|-1}>0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $|x|\neq 1$ ovvero $x\neq\pm 1$, mentre indicando con $N(x)$ e $D(x)$ il numeratore e il denominatore della seconda si ha

$$N(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2},$$
$$D(x)>0 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1 \vee x>1.$$

Dunque la seconda condizione è verificata se $-1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1$. Intersecando

$$\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ -1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1, \end{cases}$$

si ottiene $-1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1$. Dunque

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : -1 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1 \right\}.$$

5) La funzione è ben definita quando esistono la radice e il logaritmo, e il denominatore è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} 3 - |x| \geq 0, \\ |x| > 0, \\ \log |x| \neq 0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $|x| \leq 3$ ovvero $-3 \leq x \leq 3$, mentre la seconda è verificata per $x \neq 0$. Infine la terza è equivalente a

$$\log |x| \neq 0 = \log 1 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

Intersecando questi tre insiemi si ottiene $-3 \leq x \leq 3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$. Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < -1 \vee -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee 1 < x \leq 3\}.$$

6) La funzione è ben definita quando il denominatore è diverso da 0 (l'arcotangente è definita su tutto $\mathbb{R}$). Questo equivale ad imporre

$$|x^2 - 1| \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\}.$$

7) La funzione è ben definita quando esiste la radice e il denominatore è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} |x^2 - 1|(x-2)^2 \geq 0 \\ \sqrt{|x^2 - 1|(x-2)^2} \neq 0 \end{cases} \iff |x^2 - 1|(x-2)^2 > 0.$$

Siccome il valore assoluto e il quadrato sono funzioni non negative, questo equivale ad imporre che siano diversi da 0, ovvero

$$\begin{aligned} &|x^2 - 1|(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1|(x-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| \neq 0 \wedge (x-2)^2 \neq 0 \\ &\qquad \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \wedge x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \wedge x \neq 2. \end{aligned}$$

Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1 \wedge x \neq 2\}.$$

8) La funzione è ben definita quando esistono la radice e il logaritmo. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} \log^2 x - \log x \geq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione. Si ha

$$\log^2 x - \log x \geq 0 \Leftrightarrow \log x (\log x - 1) \geq 0.$$

Il primo fattore è tale che

$$\log x \geq 0 = \log 1 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

mentre il secondo

$$\log x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log x \geq 1 = \log e \Leftrightarrow x \geq e.$$

Dunque la prima condizione è verificata se $x \leq 1 \vee x \geq e$. Intersecando

$$\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq e, \\ x > 0, \end{cases}$$

si ottiene $0 < x \leq 1 \vee x \geq e$. Quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1 \vee x \geq e\}.$$

9) La funzione è ben definita quando esiste la radice e il denominatore dell'argomento del coseno è diverso da 0. Questo equivale ad imporre

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0, \\ \sqrt[3]{x} \neq 0. \end{cases}$$

Dalla prima condizione si ottiene $x \leq 0 \vee x \geq 1$, mentre la seconda è verificata quando $x \neq 0$. Intersecando questi due insiemi si ottiene $x < 0 \vee x \geq 1$. Dunque

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x \geq 1\}.$$

❒ **Esercizio 11.2.2.** *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

10) $f(x) = \dfrac{\log|x|}{\sqrt{x^2-1}}$ **(Esame del 15.11.19)**

11) $f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x}$ **(Esame del 19.12.19)**

12) $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x|}{1+|x|} - 1}$ **(Esame del 09.01.20)**

13) $f(x) = \log\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$ **(Esame del 23.01.20)**

14) $f(x) = \sqrt{|x|}\arctan\dfrac{2}{|x|}$ **(Esame del 24.06.20)**

15) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+|x|}}{\log(1+x^2)}$ **(Esame del 09.07.20)**

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{e^{1-|x|}-1}$ **(Esame del 23.07.20)**

17) $f(x) = \dfrac{x\log(x)}{\sqrt{e^{\sqrt{x}}-1}}$ **(Esame del 08.09.20)**

➻ **R.** 10) La funzione è ben definita se:

$|x| > 0$ condizione di esistenza del logaritmo

$x^2 - 1 \geq 0$ condizione di esistenza della radice

$\sqrt{x^2-1} \neq 0$ condizione di esistenza del denominatore

La prima condizione equivale a $x \neq 0$; la seconda porta a $x \leq -1 \vee x \geq 1$ e infine la terza equivale a $x \neq \pm 1$.
Riassumendo il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee x > 1\}$$

11) La funzione è ben definita se è ben definita la radice, quindi deve essere

$$e^{2x} - e^x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e^x(e^x - 1) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e^x \geq 1 = e^0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 0$$

pertanto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

12) La funzione è ben definita se è ben definita la radice, quindi deve essere

$$\frac{|x|}{1+|x|} - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+|x|} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+|x|} \leq 0.$$

Visto che $|x| + 1 > 0$, si ha che

$$D_f = \emptyset.$$

13) La funzione è ben definita se è ben definito il logaritmo, quindi deve essere

$$\frac{x+1}{x+2} > 0.$$

Si tratta di una disequazione fratta. Il numeratore è positivo se $x > -1$. Il denominatore è positivo se $x > -2$. Seguendo la regola dei segni allora la frazione è positiva se $x < -2 \vee x > -1$. Complessivamente allora

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < -2 \ \vee \ x > -1\}$$

14) La funzione è ben definita se è ben definita la radice (quindi occorre imporre $|x| \geq 0$, condizione che è sempre verificata) e il denominatore della frazione (in quanto la funzione arcotangente è ben definita su tutto $\mathbb{R}$) quindi basta chiedere $|x| \neq 0$ che equivale a $x \neq 0$. Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

15) La funzione è ben definita se:

$1 + \|x\| \geq 0$	condizione di esistenza della radice
$1 + x^2 > 0$	condizione di esistenza del logaritmo
$\log(1 + x^2) \neq 0$	condizione di esistenza del denominatore

Le prime due condizioni sono banalmente verificate. Per quanto riguarda la terza si ha

$$\log(1 + x^2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x^2 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

Riassumendo il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

16) La funzione è ben definita se:

$x^2 - 5 \geq 0$	condizione di esistenza della radice
$e^{1-\|x\|} - 1 \neq 0$	condizione di esistenza del denominatore

in quanto la funzione esponenziale è ben definita su tutto $\mathbb{R}$.
La prima condizione porta a

$$x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}$$

La seconda condizione invece porta a

$$e^{1-|x|} - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{1-|x|} \neq 1 = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - |x| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 1$$

Riassumendo il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\sqrt{5} \vee x \geq \sqrt{5}, \;\; x \neq \pm 1\}.$$

17) La funzione è ben definita se:

$x > 0$	condizione di esistenza del logaritmo
$x \geq 0$	condizione di esistenza della radice all'esponente
$e^{\sqrt{x}} - 1 \geq 0$	condizione di esistenza della radice al denominatore
$e^{\sqrt{x}} - 1 \neq 0$	condizione di esistenza del denominatore

Le ultime due condizioni portano a

$$e^{\sqrt{x}} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

mentre le prime due si riassumono chiedendo $x > 0$.
Complessivamente il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

❒ **Esercizio 11.2.3.** *Determinare il dominio delle seguenti funzioni:*

18) $f(x) = \arctan(x^2 + \sqrt{\lvert x\rvert + 2})$	**(Esame del 14.12.20)**
19) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3 - \lvert x\rvert}}{\log\lvert x\rvert}$	**(Esame del 21.12.20)**
20) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2 - \lvert x\rvert}}{\log\lvert x\rvert + 1}$	**(Esame del 21.12.20)**
21) $f(x) = \log(\sin x) + e^{1/x}$	**(Esame del 12.01.21)**
22) $f(x) = x^{2x}$	**(Esame del 02.02.21)**
23) $f(x) = x^{\sin x}$	**(Esame del 23.02.21)**

24) $f(x) = \dfrac{\sin(4|x| - 2)}{\log(x^4 + 5)}$ **(Esame del 09.06.21)**

25) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} \log\left(1 + \dfrac{2}{|x|}\right)$ **(Esame del 23.06.21)**

26) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+|x|}}{\log(1+x^2)}$ **(Esame del 07.07.21)**

R. 18) La funzione arcotangente è ben definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi l'unica condizione da imporre è data dall'esistenza della radice, cioè

$$|x| + 2 \geq 0$$

che è sempre verificata. Dunque

$$D_f = \mathbb{R}.$$

19) La funzione è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} 3 - |x| \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice} \\ |x| > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ \log|x| \neq 0 \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{array}$$

La prima condizione porta a $-3 \leq x \leq 3$; la seconda condizione porta a $x \neq 0$ e infine l'ultima condizione equivale a $\log|x| \neq 0$ cioè $x \neq \pm 1$.
Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < -1 \vee -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee 1 < x \leq 3\}.$$

20) La funzione è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} 2 - |x| \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice} \\ |x| > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ \log|x| + 1 \neq 0 \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{array}$$

La prima condizione porta a $-2 \leq x \leq 2$; la seconda condizione porta a $x \neq 0$ e infine l'ultima condizione equivale a $\log|x| \neq -1$ cioè $x \neq \pm 1/e$.
Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < -1/e \vee -1/e < x < 0 \vee 0 < x < 1/e \vee 1/e < x \leq 2\}.$$

21) La funzione è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} \sin x > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ x \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{array}$$

in quanto la funzione esponenziale è ben definita su $\mathbb{R}$; quindi complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

22) Scriviamo

$$f(x) = x^{2x} = e^{2x \log x}.$$

A questo punto, la funzione esponenziale è ben definita su $\mathbb{R}$, quindi è sufficiente imporre la condizione di esistenza del logaritmo, cioè $x > 0$. Pertanto il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

23) Scriviamo

$$f(x) = x^{\sin x} = e^{\sin x \log x}.$$

A questo punto, la funzione esponenziale e la funzione seno sono ben definite su $\mathbb{R}$, quindi è sufficiente imporre la condizione di esistenza del logaritmo, cioè $x > 0$. Pertanto il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

24) La funzione seno è ben definita su $\mathbb{R}$, quindi la funzione data è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} x^4 + 5 > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \\ \log(x^4 + 5) \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \end{array}$$

La prima delle due condizioni è sempre verificata; la seconda porta a

$$x^4 + 5 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 \neq -4$$

condizione anch'essa sempre verificata. Dunque

$$D_f = \mathbb{R}.$$

25) La funzione è ben definita se:

$$\begin{array}{ll} |x| \geq 0 & \text{condizione di esistenza della radice} \\ |x| \neq 0 & \text{condizione di esistenza del denominatore} \\ 1 + \frac{2}{|x|} > 0 & \text{condizione di esistenza del logaritmo} \end{array}$$

La prima e la terza condizione sono sempre verificate, dunque complessivamente il dominio di f è dato da

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

26) La funzione è ben definita se:

$1 + \|x\| \geq 0$	condizione di esistenza della radice
$\log(1 + x^2) \neq 0$	condizione di esistenza del denominatore
$1 + x^2 > 0$	condizione di esistenza del logaritmo

La prima e la terza condizione sono sempre verificate, dunque complessivamente il dominio di f è dato dalla seconda condizione, che equivale a

$$\log(1 + x^2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + x^2 \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$$

da cui

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

CAPITOLO 12

Esercizi riguardanti calcolo di primitive e integrali definiti

12.1. Esercizi riguardanti calcolo di primitive

❒ **Esercizio 12.1.1.** (**Esame del 01.02.16**) *Determinare la primitiva della funzione*

$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$

che passa per l'origine.

➭ **R.** Prima di tutto dobbiamo trovare l'insieme delle primitive della funzione cioè calcolare

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx.$$

Proviamo con la sostituzione

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = t \qquad\qquad t > 0,\ \ x > 0,$$

da cui

$$x = (t^2-1)^2 \qquad\qquad dx = 2(t^2-1)2t\, dt = 4t(t^2-1)\, dt.$$

A questo punto dunque

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx &= \int 4t^2(t^2-1)\, dt = \int (4t^4-4t^2)\, dt = 4\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C =: F_C(x).\end{aligned}$$

Imponiamo adesso il passaggio per l'origine e troviamo il corrispondente valore della costante. Si ha

$$F_C(0) = \frac{4}{5} - \frac{4}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{8}{15}.$$

La primitiva richiesta è dunque

$$G(x) = \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + \frac{8}{15}.$$

❒ **Esercizio 12.1.2. (Esame del 19.07.16)** *Calcolare*

$$1) \int \frac{1}{x} \log\log x\, dx \qquad 2) \int e^{-x} \sin x\, dx \qquad 3) \int \frac{x^3+2}{x^2+1}\, dx$$

➽ **R.** 1) Proviamo ad operare la seguente sostituzione

$$\log x = t \qquad x = e^t \qquad dx = e^t\, dt$$

da cui

$$\int \frac{1}{x} \log(\log x)\, dx = \int \frac{1}{e^t} \log t\, e^t\, dt = \int \log t\, dt = t\log t - t + C = (\log x)(\log(\log x)) - \log x + C$$

2) Integrando per parti due volte si ha

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x\, dx &= -e^{-x}\cos x - \int (-e^{-x})(-\cos x)\, dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\, dx \\ &= -e^{-x}\cos x - \left[e^{-x}\sin x - \int -e^{-x}\sin x\, dx \right] \\ &= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x\, dx \end{aligned}$$

da cui

$$\int e^{-x}\sin x\, dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$$

3) Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2}{x^2+1}\, dx &= \int \frac{x^3+x-x+2}{x^2+1}\, dx = \int x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{2}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + 2\arctan x + C. \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.1.3 (Esame del 08.01.19).** *Calcolare*

$$\int \sqrt{e^x - 1}\, dx.$$

➼ **R.** Proviamo con la sostituzione

$$t = \sqrt{e^x - 1},$$

da cui

$$x = \log\left(t^2 + 1\right), \qquad dx = \frac{1}{t^2 + 1} \cdot 2t\, dt.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x - 1}\, dx &= \int t \cdot \frac{1}{t^2 + 1} \cdot 2t\, dt = 2\int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}\, dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t^2 + 1}\, dt \\ &= 2t - 2\arctan t + C = 2\sqrt{e^x - 1} - 2\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) + C.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.1.4 (Esame del 22.02.19).** *Calcolare*

$$\int \log\left(x^2 - 4\right) dx.$$

➼ **R.** Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int \log\left(x^2 - 4\right) dx = \int 1 \cdot \log\left(x^2 - 4\right) dx &= x\log\left(x^2 - 4\right) - \int x \cdot \frac{1}{x^2 - 4} \cdot 2x\, dx \\ &= x\log\left(x^2 - 4\right) - 2\int \frac{x^2 - 4 + 4}{x^2 - 4}\, dx \\ &= x\log\left(x^2 - 4\right) - 2\int dx - \int \frac{8}{x^2 - 4}\, dx \\ &= x\log\left(x^2 - 4\right) - 2x - \int \frac{8}{(x-2)(x+2)}\, dx.\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale rimasto utilizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{8}{(x-2)(x+2)} \stackrel{?}{=} \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax + 2A + Bx - 2B}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x + (2A - 2B)}{(x-2)(x+2)},$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 2A - 2B = 8, \end{cases}$$

da cui $A = 2$, $B = -2$. Sostituendo otteniamo

$$\int \log\left(x^2-4\right) dx = x\log\left(x^2-4\right) - 2x - \int \frac{2}{x-2}\, dx + \int \frac{2}{x+2}\, dx$$
$$= x\log\left(x^2-4\right) - 2x - 2\log|x-2| + 2\log|x+2| + C.$$

❐ **Esercizio 12.1.5 (Esame del 10.04.19).** *Calcolare*

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+1}\, dx.$$

➼ **R.** Si ha

$$\int \frac{x^3+2}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^3+x-x+2}{x^2+1}\, dx = \int x\, dx - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{2}{x^2+1}\, dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + 2\arctan x + C.$$

❐ **Esercizio 12.1.6 (Esame del 05.06.19).** *Calcolare*

$$\int \frac{\cos\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

➼ **R.** Proviamo con la sostituzione

$$t = 1 + \sqrt{x},$$

da cui

$$x = (t-1)^2, \qquad dx = 2\,(t-1)\, dt.$$

Otteniamo

$$\int \frac{\cos\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\cos t}{t-1}\cdot 2\,(t-1)\, dt = 2\int \cos t\, dt = 2\sin t + C = 2\sin\left(1+\sqrt{x}\right) + C.$$

❐ **Esercizio 12.1.7 (Esame del 24.07.19).** *Calcolare*

$$\int \frac{2x^3+5}{x^2-3x+2}\, dx.$$

➼ **R.** Facendo la divisione polinomiale si trova

$$2x^3+5 = \left(x^2-3x+2\right)(2x+6) + 14x - 7,$$

dunque

$$\int \frac{2x^3+5}{x^2-3x+2}\,dx = \int (2x+6)\,dx + \int \frac{14x-7}{x^2-3x+2}\,dx = x^2+6x+\int \frac{14x-7}{(x-2)(x-1)}\,dx.$$

Per calcolare l'integrale rimasto utilizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{14x-7}{(x-2)(x-1)} \stackrel{?}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-2)(x-1)} = \frac{(A+B)x+(-A-2B)}{(x-2)(x-1)},$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} A+B=14, \\ -A-2B=-7, \end{cases}$$

da cui $A=21$, $B=-7$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3+5}{x^2-3x+2}\,dx &= x^2+6x+\int \frac{21}{x-2}\,dx - \int \frac{7}{x-1}\,dx \\ &= x^2+6x+21\log|x-2|-7\log|x-1|+C. \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.1.8. (Esame del 15.11.19)** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{e^{-x}+3e^x}\,dx$$

R. Prima di tutto riscriviamo l'integrale come

$$\int \frac{1}{e^{-x}+3e^x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1}{e^x}+3e^x}\,dx = \int \frac{e^x}{1+3e^{2x}}\,dx.$$

A questo punto operiamo la seguente sostituzione

$$e^x = t \qquad x=\log t \qquad dx = \frac{1}{t}\,dt$$

pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^{-x}+3e^x}\,dx &= \int \frac{e^x}{1+3e^{2x}}\,dx = \int \frac{t}{1+3t^2}\,\frac{1}{t}\,dt \\ &= \int \frac{1}{1+3t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}t)+C = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}e^x)+C \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.1.9. (Esame del 19.12.19)** *Calcolare*

$$\int \log(x^2+2x+2)\,dx$$

➼ **R.** Integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \log(x^2+x+2)\,dx &= \int 1\cdot\log(x^2+x+2)\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - \int \frac{x(2x+1)}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - \int \frac{2x^2+x}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - \int \frac{2x^2+2x+4-2x-4+x}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - 2x + \int \frac{x+4}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+8-1}{x^2+x+2}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - 2x + \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}\,dx \\
&= x\log(x^2+x+2) - 2x + \frac{1}{2}\log(x^2+x+2) + \frac{7}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log(x^2+x+2) - 2x + 2\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2+1}\,dx \\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log(x^2+x+2) - 2x + \sqrt{7}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.1.10. (Esame del 09.01.20)** *Calcolare*

$$\int \frac{1}{x-2\sqrt{2x-8}}\,dx$$

➼ **R.** Effettuiamo un cambio di variabile. Poniamo

$$\sqrt{2x-8}=t \qquad 2x=8+t^2 \qquad x=4+\frac{t^2}{2} \qquad dx=t\,dt$$

da cui

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x-2\sqrt{2x-8}}\,dx &= \int \frac{t}{4+\frac{t^2}{2}-2t}\,dt = \int \frac{2t}{t^2-4t+8}\,dt = \int \frac{2t-4+4}{t^2-4t+8}\,dt \\
&= \int \frac{2t-4}{t^2-4t+8}\,dt + 4\int \frac{1}{t^2-4t+8}\,dt \\
&= \log(t^2-4t+8) + \int \frac{4}{(t-2)^2+4}\,dt \\
&= \log(t^2-4t+8) + \int \frac{1}{\left(\frac{t-2}{2}\right)^2+1}\,dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \log(t^2-4t+8)+2\arctan\left(\frac{t-2}{2}\right)+C \\
&= \log(2x-4\sqrt{2x-8})+2\arctan\left(\frac{\sqrt{2x-8}-2}{2}\right)+C.
\end{aligned}
$$

❒ **Esercizio 12.1.11. (Esame del 23.01.20)** *Calcolare*

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$$

➼ **R.** Effettuiamo un cambio di variabile. Poniamo

$$e^x=t \qquad x=\log t \qquad dx=\frac{1}{t}\,dt$$

da cui si ottiene

$$\int \frac{t}{t-1}\,\frac{1}{t}\,dt=\int \frac{1}{t-1}\,dt=\log|t-1|+C=\log|e^x-1|+C$$

Il risultato poteva anche essere ottenuto immediatamente osservando che e^x al numeratore è la derivata dell'argomento del logaritmo.

❒ **Esercizio 12.1.12. (Esame del 20.02.20)** *Calcolare*

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx$$

➼ **R.** Osservando che $\frac{1}{x}$ è la derivata di $\log x$, si può esprimere l'integrale dato nella forma

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x)$$

con $f(x)=\log x$ e $\alpha=2$. Tenendo conto che

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x)=\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$$

si ottiene dunque

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx=\frac{\log^3 x}{3}+C.$$

Alternativamente si può procedere con un cambio di variabile. Poniamo

$$\log x=t \qquad x=e^t \qquad dx=e^t\,dt$$

da cui

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx = \int \frac{t^2}{e^t}\,e^t\,dt = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\log^3 x}{3} + C$$

❒ **Esercizio 12.1.13. (Esame del 24.06.20)** *Calcolare*

$$\int (2^x + 3^x)^2\,dx$$

➻ **R.** Si ha

$$\int (2^x + 3^x)^2\,dx = \int \left[(2^x)^2 + (3^x)^2 + 2(3^x\,2^x)\right]\,dx.$$

Dalle proprietà delle potenze si ottiene

$$\int \left[(2^x)^2 + (3^x)^2 + 2\,3^x\,2^x\right]\,dx = \int (2^{2x} + 3^{2x} + 2\,(6^x))\,dx = \int \left(e^{2x\log 2} + e^{2x\log 3} + 2\,e^{x\log 6}\right)\,dx.$$

A questo punto

$$\int (2^x + 3^x)^2\,dx = \frac{2^{2x}}{2\log 2} + \frac{3^{2x}}{2\log 3} + 2\,\frac{6^x}{\log 6} + C = \frac{4^x}{\log 4} + \frac{9^x}{\log 9} + 2\frac{6^x}{\log 6} + C$$

❒ **Esercizio 12.1.14. (Esame del 23.07.20)** *Calcolare*

$$\int x^2 \sin(2x)\,dx$$

➻ **R.** Integrando per parti due volte si ottiene

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(2x)\,dx &= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + \int (2x)\frac{\cos(2x)}{2}\,dx \\
&= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x\frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}\,dx \\
&= -x^2\frac{\cos(2x)}{2} + x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{1}{4}\cos(2x) + C
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.1.15. (Esame del 08.09.20)** *Calcolare*

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}\,dx$$

➾ **R.** Si tratta di calcolare l'insieme delle primitive di una funzione razionale fratta. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici. Cerchiamo costanti A, B tali che

$$\frac{x-3}{x^2-6x+5} = \frac{x-3}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$$

Si ha

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{Ax-5A+Bx-B}{(x-1)(x-5)}$$

da cui, dal principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -5A-B=-3 \end{cases}$$

pertanto si ha $A = B = 1/2$.
A questo punto

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-5}\,dx = \log|x-1| + \log|x-5| + C.$$

❒ **Esercizio 12.1.16. (Esame del 21.12.20)** *Calcolare*

$$\int \cos x\,\sqrt[3]{\sin x}\,dx$$

➾ **R. R.** Proviamo con la sostituzione

$$t = \sin x,$$

da cui

$$dt = \cos x\,dx.$$

Otteniamo

$$\int \cos x\sqrt[3]{\sin x}\,dx = \int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{3}{4}\,t^{4/3} + C = \frac{3}{4}\,(\sin x)^{4/3} + C.$$

❒ **Esercizio 12.1.17. (Esame del 12.01.21)** *Calcolare*

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}$$

➼ **R.** Proviamo con la sostituzione

$$t = \sqrt{1-x},$$

da cui

$$x = 1 - t^2, \qquad dx = -2t\,dt.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx &= \int \frac{t}{1-t^2}\cdot(-2t)\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = 2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt \\ &= 2\int \frac{1}{t^2-1}\,dt + 2\int dt = \int \frac{2}{(t-1)(t+1)}\,dt + 2t.\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale rimasto utilizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} \stackrel{?}{=} \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{At + A + Bt - B}{(t-1)(t+1)} = \frac{(A+B)t + (A-B)}{(t-1)(t+1)},$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A - B = 2, \end{cases}$$

da cui $A = 1$, $B = -1$. Sostituendo otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,dx &= \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt + 2t = \log|t-1| - \log|t+1| + 2t + C \\ &= \log\left|\sqrt{1-x} - 1\right| - \log\left|\sqrt{1-x} + 1\right| + 2\sqrt{1-x} + C.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.1.18. (Esame del 23.02.21)** *Calcolare*

$$\int \frac{3+x}{x(x^2+9)}\,dx$$

➼ **R.** Si tratta di calcolare l'insieme delle primitive di una funzione razionale fratta. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici. Cerchiamo costanti A, B, C tali che

$$\frac{3+x}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+9}$$

Si ha

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+9} = \frac{Ax^2 + 9A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+9)}$$

da cui, dal principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 1 \\ 9A = 3 \end{cases}$$

pertanto si ha $A = 1/3$, $B = -1/3$ e $C = 1$. Dalla linearità dell'integrale, si ottiene dunque

$$\begin{aligned} &\int \frac{3+x}{x(x^2+9)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx \\ = \ &\frac{1}{3}\log|x| - \frac{1}{6}\log(x^2+9) + \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} + \arctan\frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato le proprietà dei logaritmi.

❒ **Esercizio 12.1.19. (Esame del 23.06.21)** *Calcolare*

$$\int \frac{1+\sin^2 x}{\tan x}\,dx$$

➻ **R.** Operiamo la seguente sostituzione

$$\sin x = t \qquad \cos x\,dx = dt$$

e ricordando che

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{1+\sin^2 x}{\tan x}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{t}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} + t\right)\,dt \\ &= \log|t| + \frac{t^2}{2} + C = \log|\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.1.20. (Esame del 07.07.21)** *Calcolare*

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$$

➻ **R.** Operiamo la seguente sostituzione

$$1 + x^2 = t \qquad 2x\,dx = dt$$

da cui
$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{1+x^2} + C.$$
Si noti che allo stesso risultato si poteva arrivare direttamente osservando che $2x$ è la derivata di $1+x^2$, scrivendo l'integrale dato nella forma
$$\int [f(x)]^\alpha f'(x) = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$
con $\alpha = -2$, $f(x) = 1+x^2$ e $f'(x) = 2x$.

12.2. Esercizi riguardanti integrali definiti

❒ **Esercizio 12.2.1. (Esame del 25.02.16)** *Calcolare*
$$\int_{-1}^{2} x\log(x+2+|x|)\,dx$$
(Suggerimento: spezzare l'integrale in 0 e valutare separatamente i due integrali discutendo il valore assoluto)

R. Usando il teorema di spezzamento e la definizione di valore assoluto si ha che
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} x\log(x+2+|x|)\,dx &= \int_{-1}^{0} x\log(x+2-x)\,dx + \int_{0}^{2} x\log(x+2+x)\,dx\\ &= \int_{-1}^{0} x\ \log 2dx + \int_{0}^{2} x\log(2x+2)\,dx.\end{aligned}$$
Il primo integrale si ottiene immediatamente dalla linearità dell'integrale stesso ottenendo, dal teorema fondamentale del calcolo
$$\int_{-1}^{0} x\ \log 2dx = \log 2\int_{-1}^{0} x\,dx = \log 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}\log 2.$$
L'altro integrale si risolve per parti. Si ha infatti
$$\begin{aligned}\int x\log(2x+2)\,dx &= \frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{2x+2}\,2\,dx = \frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx\\ &= \frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|x+1| + C\end{aligned}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha dunque

$$\int_0^2 x\log(2x+2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(2x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|x+1|\right]_0^2 = 2\log 6 - 1 + 1 - \frac{1}{2}\log 3.$$

Sommando i due contributi si ha infine

$$\int_{-1}^2 x\log(x+2+|x|)\,dx = -\frac{1}{2}\log 2 + 2\log 2 + 2\log 3 - \frac{1}{2}\log 3 = \frac{3}{2}\log 6$$

❒ **Esercizio 12.2.2. (Esame del 20.12.16)** *Si calcoli*

$$\int_0^{\pi^2} (2e^{\sqrt{x}} + 3\sin\sqrt{x})\,dx$$

➼ **R.** Per linearità dell'integrale, svolgiamo i due integrali separatamente. Prima di tutto troviamo una primitiva delle funzioni integrande. Operiamo la seguente sostituzione

$$\sqrt{x} = t \qquad x = t^2 \qquad dx = 2t\,dt$$

da cui

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^t t\,dt$$

quindi integrando per parti

$$2\int te^t\,dt = 2te^t - 2\int e^t\,dt = 2(t-1)e^t.$$

A questo punto, tornando alla variabile originaria si ha

$$\int_0^{\pi^2} 2e^{\sqrt{x}}\,dx = 4[(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}]_0^{\pi^2} = 4[(\pi-1)e^{\pi}+1].$$

Analogamente, di nuovo con la medesima sostituzione e integrando di nuovo per parti si ha

$$3\int \sin\sqrt{x}\,dx = 3\int 2t\sin t\,dt = 6[-t\cos t + \int \cos t\,dt] = -6\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 6\sin\sqrt{x}$$

da cui

$$3\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = [-6\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 6\sin\sqrt{x}]_0^{\pi^2} = 6\pi.$$

Riassumendo

$$\int_0^{\pi^2} (2e^{\sqrt{x}} + 3\sin\sqrt{x})\,dx = 4[(\pi-1)e^{\pi}+1] + 6\pi.$$

❒ **Esercizio 12.2.3. (Esame del 03.02.17)** *Sia f una funzione continua tale che* $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ *e* $\int_0^4 f(x)\,dx = 5.$ *Determinare il valore dell'integrale* $\int_1^2 f(2x)\,dx$ *(suggerimento: effettuare il cambio di variabile $2x := z$ e sfruttare le proprietà dell'integrale).*

➼ **R.** Effettuiamo come suggerito un cambio di variabile. Poniamo $2x = z$ da cui $dx = \frac{1}{2}dz$ e inoltre se $x = 1$ allora $z = 2$ mentre se $x = 2$ allora $z = 4$. In questo modo, usando le ipotesi

$$\int_1^2 f(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_0^4 f(z)\,dz - \frac{1}{2}\int_0^2 f(z)\,dz = \frac{1}{2}(5-3) = 1.$$

❒ **Esercizio 12.2.4. (Esame del 08.06.17)** *(a) Calcolare, spezzando opportunamente l'integrale e discutendo il valore assoluto*

$$\int_0^\pi |\cos x|\,dx.$$

(b) Con lo stesso procedimento, integrando per parti, calcolare

$$\int_0^\pi x|\cos x|\,dx.$$

➼ **R.** (a) Si ha

$$\int_0^\pi |\cos x|\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^\pi (-\cos x)\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} + [-\sin x]_{\pi/2}^\pi = 1-(-1) = 2.$$

Si poteva raggiungere lo stesso risultato con considerazioni di simmetria.
(b) Si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x|\cos x|\,dx &= \int_0^{\pi/2} x(\cos x)\,dx + \int_{\pi/2}^\pi x(-\cos x)\,dx \\
&= [x\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx + [-x\sin x]_{\pi/2}^\pi + \int_{\pi/2}^\pi \sin x\,dx \\
&= \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} + [-\cos x]_{\pi/2}^\pi \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.2.5. (Esame del 28.06.17)** *Calcolare*

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx.$$

(Una primitiva della funzione arctan *si trova integrando per parti).*

➼ **R.** Come suggerito, calcoliamo l'insieme delle primitive della funzione arcotangente. Si ha, integrando per parti

$$\begin{aligned}\int \arctan x \, dx &= \int 1 \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

A questo punto

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x \, dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) \right]_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\log 4 = \sqrt{3}\frac{\pi}{3} - \log 2.$$

❒ **Esercizio 12.2.6. (Esame del 18.12.17)** *Calcolare*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx$$

➼ **R.** Si tratta di un integrale di una funzione continua e limitata nell'intervallo $(0,1)$, senza problemi di limitatezza. Procediamo applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e calcolando prima una primitiva della funzione integranda. Effettuando il cambio di variabile $\sqrt{x} = t$ si ha $x = t^2$ da cui $dx = 2tdt$ e

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx = 2\int \frac{t^2}{t^2+2}\, dt = 2\int \frac{t^2+2-2}{t^2+2}\, dt = 2\int 1\, dt - 4\int \frac{1}{t^2+2}\, dt = 2t - 4\int \frac{1}{2\left(\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right.}$$

$$= 2t - 2\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + C = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}} + C.$$

A questo punto allora

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+2}\, dx = \left[2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x}{2}} \right]_0^1 = 2 - 2\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

❒ **Esercizio 12.2.7. (Esame del 10.07.18)** *Calcolare*

$$\int_{-3}^{3} \left[|x| \log(x+4) + x \arctan(x^2+3)\right] \, dx.$$

➻ **R.** Per l'additività dell'integrale, occupiamoci separatamente dei due integrali. Si ha, usando le formule di spezzamento

$$\int_{-3}^{3} |x| \log(x+4) \, dx = \int_{-3}^{0} (-x) \log(x+4) \, dx + \int_{0}^{3} x \log(x+4) \, dx.$$

Prima di tutto, integrando per parti

$$\begin{aligned}
\int x \log(x+4) \, dx &= \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \int \frac{x^2}{2(x+4)} \, dx = \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 4x - 4x}{x+4} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{x^2}{4} + 2 \int \frac{x}{x+4} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{x^2}{4} + 2 \int \left(1 - \frac{4}{x+4}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{x^2}{4} + 2x - 8 \log(x+4) + C.
\end{aligned}$$

A questo punto

$$\begin{aligned}
&\int_{-3}^{3} |x| \log(x+4) \, dx = \int_{-3}^{0} (-x) \log(x+4) \, dx + \int_{0}^{3} x \log(x+4) \, dx \\
= &\left[\frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{x^2}{4} + 2x - 8 \log(x+4)\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} \log(x+4) - \frac{x^2}{4} + 2x - 8 \log(x+4)\right]_{0}^{3} \\
= &-8 \log 4 + \frac{9}{4} + 6 + \frac{9}{2} \log 7 - \frac{9}{4} + 6 - 8 \log 7 + 8 \log 4 = 12 - \frac{7}{2} \log 7.
\end{aligned}$$

D'altra parte, osservando che $2x$ è la derivata dell'argomento dell'arcotangente

$$\int x \arctan(x^2+3) \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \arctan(x^2+3) \, dx = \frac{1}{4} \arctan^2(x^2+3) + C$$

da cui

$$\int_{-3}^{3} \int x \arctan(x^2+3) \, dx = \left[\frac{1}{4} \arctan^2(x^2+3)\right]_{-3}^{3} = 0.$$

Tale risultato era ovviamente atteso perché, per considerazioni di simmetria, l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico, è nullo.

In conclusione

$$\int_{-3}^{3} \left[|x| \log(x+4) + x \arctan(x^2+3)\right] \, dx = 12 - \frac{7}{2} \log 7.$$

❒ **Esercizio 12.2.8 (Esame del 20.12.18).** *Calcolare*

$$\int_0^1 x \log(2+x)\, dx.$$

➼ **R.** Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Integrando per parti si ha

$$\int x \log(2+x)\, dx = \frac{x^2}{2} \log(2+x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2+x}\, dx.$$

Siccome

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{2+x}\, dx &= \int \frac{-2x+2x+x^2}{2+x}\, dx = -2\int \frac{x}{2+x}\, dx + \int x\, dx \\ &= -2\int \frac{-2+2+x}{2+x}\, dx + \frac{x^2}{2} + C = 4\int \frac{1}{2+x}\, dx - 2\int dx + \frac{x^2}{2} + C \\ &= 4\log(2+x) - 2x + \frac{x^2}{2} + C, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\int x \log(2+x)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) \log(2+x) - \frac{x^2}{4} + x + C.$$

Quindi l'integrale definito è uguale a

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \log(2+x)\, dx &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - 2\right) \log(2+x) - \frac{x^2}{4} + x\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - 2\right) \log(2+1) - \frac{1}{4} + 1 - (-2)\log 2 = -\frac{3}{2}\log 3 + \frac{3}{4} + \log 4. \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 12.2.9 (Esame del 11.09.19).** *Calcolare*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx.$$

➼ **R.** Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx &= \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = x \tan x - \int \tan x\, dx = x \tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx \\ &= x \tan x + \log|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale definito ÃÍ uguale a

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = [x \tan x + \log|\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} \tan\frac{\pi}{4} + \log\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - \log|\cos 0| = \frac{\pi}{4} + \log\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

❒ **Esercizio 12.2.10. (Esame del 14.12.20)** *Calcolare*

$$\int_1^2 \frac{1+x^3}{x^2+x}\,dx$$

➾ **R.** Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Si tratta di un integrale di una funzione razionale fratta con numeratore di grado superiore al denominatore. Si può procedere con la divisione di polinomi oppure semplificare nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x^3}{x^2+x}\,dx &= \int \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{x(x+1)}\,dx \\
&= \int \frac{x^2+x+1}{x}\,dx \\
&= \int x+1+\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}+x+\log|x|+C
\end{aligned}$$

A questo punto

$$\int_1^2 \frac{1+x^3}{x^2+x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x+\log|x|\right]_1^2 = 2+2+\log 2-\frac{1}{2}-1=\frac{5}{2}+\log 2.$$

❒ **Esercizio 12.2.11. (Esame del 09.06.21)** *Calcolare*

$$\int_0^1 2x\,\arctan x\,dx$$

➾ **R.** Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
\int 2x\,\arctan x\,dx &= x^2\,\arctan x-\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x^2\,\arctan x-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\
&= x^2\,\arctan x-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = x^2\,\arctan x-x+\arctan x+C
\end{aligned}$$

per cui

$$\int_0^1 2x\,\arctan x\,dx = \left[(x^2+1)\arctan x-x\right]_0^1 = 2\arctan 1-1=\frac{\pi}{2}-1.$$

CAPITOLO 13

Integrali generalizzati

13.1. Esercizi proposti

❒ **Esercizio 13.1.1. (Esame del 15.12.15)** *Determinare quali dei seguenti integrali impropri è convergente e calcolarlo*

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}-1}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x+1)}\,dx$$

R. Si tratta di funzioni integrande non negative nei rispettivi intervalli di integrazione. Pertanto è possibile applicare il criterio del confronto asintotico e osservare che

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{2x}-1}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{2x}\,dx = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\log(\sin x+1)}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty.$$

L'unico integrale convergente è il seguente

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{2/3}}{2/3}\right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\varepsilon^{2/3}\right) = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 13.1.2. (Esame del 15.12.15)** *Usando la definizione, calcolare il seguente integrale improprio*

$$\int_2^{+\infty} 2x(x^2+3)^{-3/2}\,dx$$

➼ **R.** Si ha

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} 2x(x^2+3)^{-3/2}\,dx &= \lim_{\omega\to+\infty}\int_2^{\omega} 2x(x^2+3)^{-3/2}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\left[\frac{(x^2+3)^{-1/2}}{-1/2}\right]_2^{\omega}\\ &= \lim_{\omega\to+\infty} -2(\omega^2+3)^{-1/2}+\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 13.1.3. (Esame del 12.01.16)** *Calcolare*

$$\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Successivamente calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx$$

➼ **R.** Calcoliamo prima di tutto

$$\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx.$$

usando il metodo di sostituzione. Poniamo $e^x = t$ da cui $x = \log t$ e $dx = \frac{dt}{t}$. Si ha allora

$$\int \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1-t}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt.$$

Utilizziamo il metodo di decomposizione in fratti semplici cercando costanti A, B, C tali che

$$\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{1-t}{t(t^2+1)}.$$

Semplici calcoli portano a $A = 1$, $B = C = -1$. Si ha allora

$$\begin{aligned}&\int \frac{1-t}{t^2+1}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = \log|t| - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt - \int \frac{1}{t^2+1}\,dt\\ = \;&\log|t| - \frac{1}{2}\log|t^2+1| - \arctan t + C = \log e^x - \frac{1}{2}\log(e^{2x}+1) - \arctan e^x + C.\end{aligned}$$

A questo punto, usando la definizione di integrale generalizzato, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx &= \lim_{w\to+\infty}\int_0^{w} \frac{1-e^x}{e^{2x}+1}\,dx \\ = &\lim_{w\to+\infty}\left[w-\frac{1}{2}\log(e^{2w}+1)-\arctan(e^w)+\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}\right] \\ = &\lim_{w\to+\infty}\left[\log\frac{e^w}{\sqrt{e^{2w}+1}}-\arctan e^w+\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}\right] = \log\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

❐ **Esercizio 13.1.4. (Esame del 06.05.16)** *Determinare per quali valori del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *converge l'integrale improprio*

$$\int_0^1 \frac{e^{\alpha x^2}-1}{x\sin x^3}\,dx$$

➻ **R.** Se $\alpha = 0$ l'integrale è nullo dunque sicuramente risulta convergente. La funzione integranda poi è a valori positivi se $\alpha > 0$ e negativi se $\alpha < 0$, quindi separatamente nei due casi posso applicare il criterio del confronto asintotico. La funzione integranda ha un problema di limitatezza per $x = 0$ pertanto se $x \to 0$ si ha

$$e^{\alpha x^2}-1 \sim \alpha x^2 \qquad\qquad \sin x^3 \sim x^3$$

quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale di partenza si comporta come

$$\int_0^1 \frac{\alpha x^2}{x\,x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2}\,dx$$

che diverge perché $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge solo se $\alpha < 1$. Pertanto l'unico valore di α per cui l'integrale dato converge risulta $\alpha = 0$.

❐ **Esercizio 13.1.5. (Esame del 07.06.16)** *Stabilire per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *il seguente integrale improprio è convergente*

$$\int_0^1 \frac{3}{[2(x-\log(1+x))]^{3-3\alpha}}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale improprio con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è non negativa, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Ricordando che

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$$

si ha per $x \to 0$

$$\log(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \Leftrightarrow \log(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2} \sim 2(x - \log(1+x)) \sim x^2$$

quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{3}{x^{2(3-3\alpha)}}\,dx$$

che converge se

$$6 - 6\alpha < 1 \Leftrightarrow 6\alpha > 5 \Leftrightarrow \alpha > \frac{5}{6}.$$

❒ **Esercizio 13.1.6. (Esame del 29.06.16)** *Determinare l'insieme dei valori del parametro* $\alpha > 0$ *per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha \sin\sqrt{x}}{x^2 + 3x^3}\,dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

➻ **R.** si tratta di un integrale improprio con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è non negativa, quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Si osserva che

$$\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x} \qquad x \to 0$$

mentre

$$x^2 + 3x^3 \sim x^2 \qquad x \to 0$$

perché vicino a zero "contano" le potenze piccole. Allora dal criterio del confronto asintotico

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha \sin\sqrt{x}}{x^2 + 3x^3}\,dx \sim \int_0^1 \frac{x^\alpha\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha-1/2}}\,dx.$$

Posto $\beta := 2 - \alpha - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \alpha$, si ha che l'integrale dato converge se $\beta < 1$ ed è integrale improprio se $\beta > 0$, quindi riassumendo l'integrale dato è improprio e come tale converge se e soltanto se

$$0 < \frac{3}{2} - \alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}.$$

❒ **Esercizio 13.1.7. (Esame del 19.09.16)** *Determinare l'insieme dei valori del parametro* $\alpha > 0$ *per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(e^{3x} - 1)(1 - \cos x)^\alpha}\,dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

➻ **R.** Si tratta di un integrale improprio (con problema in 0) e funzione integranda non negativa. Quindi l'idea è quella di usare il criterio del confronto asintotico cercando di confrontare l'integrale dato con un integrale più semplice, per esempio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\beta}\, dx$$

che è integrale improprio se $\beta > 0$ e converge se $\beta < 1$. Quindi usiamo il fatto che per $x \to 0^+$

$$e^{3x} - 1 \sim 3x \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

e per il teorema citato l'integrale dato si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{3x\, \frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha}}\, dx$$

che a sua volta (possiamo tralasciare le costanti che non incidono sul comportamento dell'integrale) si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x\, x^{2\alpha}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha+1-2}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha-1}}\, dx$$

e questo converge allora (ed è integrale improprio) se

$$0 < 2\alpha - 1 < 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

❒ **Esercizio 13.1.8. (Esame del 19.12.16)** *Dire se il seguente integrale*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(x^2+1)}\; e^{2x}}{\tan \sqrt[3]{x}}\, dx$$

è convergente o divergente, motivando la risposta sulla base di opportuni criteri.

➻ **R.** Si tratta di una funzione integranda positiva (nell'intervallo considerato) che ha un problema di limitatezza in $x = 0$. Quindi siamo in presenza di un integrale generalizzato. Possiamo pensare di usare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\frac{\sqrt{x(x^2+1)}\; e^{2x}}{\tan \sqrt[3]{x}} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$$

perché per $x \to 0$ si ha

$$\sqrt{x(x^2+1)} \sim \sqrt{x} \qquad e^{2x} \sim 1 \qquad \tan \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}.$$

Quindi dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[x]{x}}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\, dx = \int_0^1 \sqrt[6]{x}\, dx$$

che converge perché non è nemmeno un integrale improprio! Quindi l'integrale di partenza converge.

❐ **Esercizio 13.1.9. (Esame del 19.12.16)** *Dire se il seguente integrale*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x(x^3+1)}\ \cos^2 x}{\arctan \sqrt[4]{x}}\, dx$$

è convergente o divergente, motivando la risposta sulla base di opportuni criteri.

➻ **R.** Si tratta di una funzione integranda positiva (nell'intervallo considerato) che ha un problema di limitatezza in $x = 0$. Quindi siamo in presenza di un integrale generalizzato. Possiamo pensare di usare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\frac{\sqrt{x(x^3+1)}\ \cos^2 x}{\arctan \sqrt[4]{x}} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{x}$$

perché per $x \to 0$ si ha

$$\sqrt{x(x^3+1)} \sim \sqrt{x} \qquad \cos^2 x \sim 1 \qquad \arctan \sqrt[4]{x} \sim \sqrt[4]{x}.$$

Quindi dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[x]{x}}\, dx = \int_0^1 \sqrt[4]{x}\, dx$$

che converge perché non è nemmeno un integrale improprio! Quindi l'integrale di partenza converge.

❐ **Esercizio 13.1.10. (Esame del 12.01.17)** *Calcolare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato su un dominio illimitato sia da destra che da sinistra. Spezziamo l'intervallo in due parti e usiamo la definizione di integrale improprio assieme alla definizione di valore assoluto. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{-x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\lim_{\omega\to-\infty} \int_{\omega}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \lim_{\omega\to+\infty} \int_{0}^{\omega} \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\lim_{\omega\to-\infty} \left[\frac{\log(1+x^2)}{2}\right]_{\omega}^{0} + \lim_{\omega\to+\infty} \int_{0}^{\omega} \left[\frac{\log(1+x^2)}{2}\right]_{0}^{\omega} \\
&= \lim_{\omega\to-\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) + \lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) \\
&= 2\lim_{\omega\to+\infty} \frac{1}{2}\log(1+\omega^2) = +\infty.
\end{aligned}$$

Osserviamo che siccome si trattava di un integrale di una funzione pari su un dominio simmetrico, si poteva dire subito dall'inizio che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

❐ **Esercizio 13.1.11. (Esame del 03.02.17)** *Determinare l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2}\cos\sqrt{x}}{\log(1+2x^\alpha)(1-\cos\sqrt{x})}\,dx$$

è un integrale improprio e come integrale improprio è convergente.

✐ **R.** Si tratta di un integrale improprio con problema di limitatezza in $x = 0$ e funzione integranda non negativa. Penso di usare il criterio del confronto asintotico. Osservo che

$$\log(1+2x^\alpha) \sim 2x^\alpha \qquad 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{x}{2} \qquad \cos\sqrt{x} \sim 1 \qquad x \to 0$$

quindi l'integrale di partenza si comporta come

$$\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{2x^\alpha\,\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-3/2+1}}\,dx$$

quindi è integrale improprio se $\alpha - \frac{1}{2} > 0$ e converge se $\alpha - \frac{1}{2} < 1$. I valori richiesti sono pertanto

$$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}.$$

❐ **Esercizio 13.1.12. (Esame del 09.01.18)** *Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \sin^2(1/x)}{(x+\pi)^\alpha}\, dx$$

risulta convergente.

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione, pertanto possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
Per $x \to +\infty$ si ha che $1/x \to 0^+$, dunque dal limite notevole si ha

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x} \qquad \text{e dunque} \qquad \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^2}$$

mentre d'altra parte, se $x \to +\infty$ allora $x + \pi \sim x$ e dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2\, x^\alpha}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2+\alpha-1}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

che converge quando $\alpha + 1 > 1$ dunque se $\alpha > 0$.
Allora, dal criterio del confronto asintotico, anche l'integrale di partenza converge per $\alpha > 0$.

❐ **Esercizio 13.1.13. (Esame del 11.01.18)** *Calcolare con la definizione*

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\, dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. Per definizione si ha

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\, dx = \lim_{K\to+\infty} \int_0^{K} e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\, dx.$$

Calcoliamo prima l'insieme delle primitive. Procediamo con la seguente sostituzione

$$e^{-x} = t \qquad -x = \log t \qquad dx = -\frac{1}{t}\, dt$$

da cui

$$\begin{aligned} \int e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\, dx &= -\int t\sqrt{1+8t}\,\frac{1}{t}\, dt = -\int (1+8t)^{1/2}\, dt \\ &= -\frac{1}{12}(1+8t)^{3/2} + C = -\frac{1}{12}(1+8e^{-x})^{3/2} + C. \end{aligned}$$

A questo punto

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\,dx = \lim_{K\to+\infty}\int_0^K e^{-x}\sqrt{1+8e^{-x}}\,dx = \lim_{K\to+\infty}\left[-\frac{1}{12}(1+8e^{-x})^{3/2}\right]_0^K$$
$$= \lim_{K\to+\infty}\left(-\frac{1}{12}(1+8e^{-K})^{3/2}+\frac{1}{12}(1+8)^{3/2}\right) = \frac{13}{6}.$$

❒ **Esercizio 13.1.14. (Esame del 25.01.18)** *Determinare i valori del parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *per cui la funzione*

$$f(x) = \frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\arctan x$$

(a) *risulti integrabile in* $(0,1)$*;*
(b) *risulti integrabile in* $(1,+\infty)$*;*
(c) *risulti integrabile in* $(0,+\infty)$*.*

➻ **R.** (a) Si tratta di studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\arctan x\,dx.$$

Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x=0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x\to 0$

$$\frac{x+3}{x^3+1}\sim 3 \qquad \arctan x\sim x$$

da cui l'integrale considerato si comporta come l'integrale

$$\int_0^1 \frac{3}{x^{\alpha-1}}\,dx$$

che converge se $\alpha-1<1$ cioè se $\alpha<2$. Pertanto, dal criterio del confronto asintotico, la funzione $f(x)$ risulta integrabile in $(0,1)$ se $\alpha<2$.
(b) Si tratta di studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\arctan x\,dx.$$

Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x\to+\infty$

$$\frac{x+3}{x^3+1}\sim\frac{1}{x^2} \qquad \arctan x\sim\frac{\pi}{2}$$

da cui l'integrale considerato si comporta come l'integrale

$$\frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+2}}\,dx$$

che converge se $\alpha+2>1$ cioè se $\alpha>-1$. Pertanto, dal criterio del confronto asintotico, la funzione $f(x)$ risulta integrabile in $(1,+\infty)$ se $\alpha>-1$.
(c) Si tratta di studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\,\arctan x\,dx.$$

Questo integrale generalizzato ha due problemi: uno di limitatezza dell'intervallo e un problema di limitatezza in $x=0$. Pertanto, dal teorema di spezzamento si ha

$$\int_0^{+\infty}\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\,\arctan x\,dx=\int_0^{1}\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\,\arctan x\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{x+3}{x^3+1}\,x^{-\alpha}\,\arctan x\,dx.$$

Dalle considerazioni precedenti, il primo integrale converge se $\alpha<2$, il secondo se $\alpha>-1$ dunque riassumendo la funzione $f(x)$ risulta integrabile in $(0,+\infty)$ se

$$-1<\alpha<2.$$

❒ **Esercizio 13.1.15. (Esame del 15.02.18)** *Determinare i valori del parametro $\alpha>0$ tali per cui l'integrale generalizzato*

$$\int_0^1\frac{\sqrt[3]{\sin(\pi x)}}{x^\alpha}\,dx$$

converge.

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in un intorno di $x=0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x\to 0$

$$\sin(\pi x)\sim\pi x\qquad\text{quindi}\qquad\sqrt[3]{\sin(\pi x)}\sim\sqrt[3]{\pi x}$$

per cui l'integrale dato si comporta come

$$\sqrt[3]{\pi}\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha-1/3}}\,dx$$

che converge se $\alpha-1/3<1$ dunque, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato converge se $\alpha<4/3$.

❐ **Esercizio 13.1.16 (Esame del 20.12.18).** *Dire se l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})\,(1+x\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x^2\,(x+1)}+\arctan x}\,dx$$

è convergente o divergente.

R. L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to +\infty$. Allora a numeratore si ha

$$\left(1+e^{-x}\right)\left(1+x\sqrt[4]{x}\right) \sim x\sqrt[4]{x} = x^{5/4},$$

mentre a denominatore

$$\sqrt{x^2\,(x+1)}+\arctan x \sim \sqrt{x^2 \cdot x} = x^{3/2}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})\,(1+x\sqrt[4]{x})}{\sqrt{x^2\,(x+1)}+\arctan x}\,dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^{5/4}}{x^{3/2}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/4}}\,dx,$$

ed essendo $1/4 < 1$ l'integrale è divergente.

❐ **Esercizio 13.1.17 (Esame del 08.01.19).** *Dire se l'integrale*

$$\int_2^{+\infty} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$$

è convergente o divergente.

R. L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 2 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to +\infty$. Si ha

$$\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \log\left(\frac{x-1+1+1}{x-1}\right) = \log\left(1+\frac{2}{x-1}\right) \sim \frac{2}{x-1}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_2^{+\infty} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx \sim \int_2^{+\infty} \frac{2}{x-1}\,dx = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$$

dove si è utilizzata la sostituzione $t = x - 1$. L'integrale pertanto risulta divergente.

❒ **Esercizio 13.1.18 (Esame del 23.01.19).** *Calcolare, usando la definizione,*

$$\int_0^{+\infty} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} dx.$$

➻ **R.** L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 0 la funzione integranda è ben definita e continua), perciò si avrà

$$\int_0^{+\infty} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} dx.$$

Troviamo prima l'insieme delle primitive calcolando l'integrale indefinito. Proviamo con la sostituzione

$$t = 8 + x^4,$$

da cui

$$dt = 4x^3\, dx.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}\int x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} dx &= \frac{1}{4} \int \left(8 + x^4\right)^{-5/3} 4x^3\, dx = \frac{1}{4} \int t^{-5/3}\, dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-2/3}}{-2/3} + C \\ &= -\frac{3}{8}\, t^{-2/3} + C = -\frac{3}{8} \left(8 + x^4\right)^{-2/3} + C.\end{aligned}$$

L'integrale generalizzato è quindi uguale a

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-5/3} dx &= \lim_{\omega \to +\infty} \left[-\frac{3}{8} \left(8 + x^4\right)^{-2/3}\right]_0^{\omega} \\ &= \lim_{\omega \to +\infty} \left(-\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(8 + \omega^4)^{2/3}} + \frac{3}{32}\right) = \frac{3}{32}.\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 13.1.19 (Esame del 22.02.19).** *Determinare l'insieme dei valori del paramentro $\alpha > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2} - 1}{\pi x^{2\alpha} + 3x^{4\alpha}}\, dx$$

risulta convergente.

➻ **R.** L'unico problema è in un intorno destro di 0 (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to 0^+$. Allora a numeratore si ha

$$e^{x^2} - 1 \sim x^2,$$

mentre a denominatore

$$\pi x^{2\alpha} + 3x^{4\alpha} = \pi x^{2\alpha}\left(1 + \frac{3}{\pi}\, x^{2\alpha}\right) \sim \pi x^{2\alpha}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_0^1 \frac{e^{x^2}-1}{\pi x^{2\alpha} + 3x^{4\alpha}}\, dx \sim \int_0^1 \frac{x^2}{\pi x^{2\alpha}}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha-2}}\, dx,$$

che converge se e solo se $2\alpha - 2 < 1$, ovvero $\alpha < 3/2$.

❒ **Esercizio 13.1.20 (Esame del 10.04.19).** *Determinare l'insieme dei valori del paramentro $\beta > 0$ per cui l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x^\beta\left(3x+x^3\right)}\, dx$$

risulta convergente.

➻ **R.** L'unico problema è in un intorno destro di 0 (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x \to 0^+$. Allora a numeratore si ha

$$\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right) \sim \sqrt[3]{x},$$

mentre a denominatore

$$x^\beta\left(3x+x^3\right) = x^\beta \cdot 3x\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \sim x^\beta \cdot 3x = 3x^{\beta+1}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_0^1 \frac{\log\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{x^\beta\left(3x+x^3\right)}\, dx \sim \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{3x^{\beta+1}}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta+1-1/3}}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta+2/3}}\, dx,$$

che converge se e solo se $\beta + 2/3 < 1$, ovvero $\beta < 1/3$.

❒ **Esercizio 13.1.21 (Esame del 05.06.19).** *Determinare l'insieme dei valori del paramentro $\beta \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} t^\beta \arctan t \, dt$$

risulta divergente.

R. L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 0 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $t \to +\infty$. Allora

$$t^\beta \arctan t \sim \frac{\pi}{2} t^\beta.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_1^{+\infty} t^\beta \arctan t \, dt \sim \frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} t^\beta \, dt.$$

Se $\beta \geq 0$ allora l'integrale diverge positivamente, poiché $t^\beta \geq 1$ per ogni t. Se invece $\beta < 0$ allora riscriviamo l'integrale come

$$\frac{\pi}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{-\beta}} \, dt,$$

che risulta divergente quando $-\beta < 1$. Dunque per la divergenza deve essere $\beta \geq 0 \vee \beta > -1$, da cui $\beta > -1$.

❒ **Esercizio 13.1.22 (Esame del 18.06.19).** *Calcolare, se esiste,*

$$\int_0^{+\infty} e^{|\pi - x|} \, dx.$$

R. Innanzitutto

$$|\pi - x| = \begin{cases} \pi - x & x \leq \pi, \\ x - \pi & x > \pi. \end{cases}$$

Dunque spezziamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{|\pi - x|} \, dx = \int_0^{\pi} e^{\pi - x} \, dx + \int_{\pi}^{+\infty} e^{x - \pi} \, dx.$$

Troviamo prima l'insieme delle primitive calcolando gli integrali indefiniti. Si ha

$$\int e^{\pi-x}\,dx = -e^{\pi-x}+C, \qquad \int e^{x-\pi}\,dx = e^{x-\pi}+C.$$

Il primo è un normale integrale definito, quindi

$$\int_0^{\pi} e^{\pi-x}\,dx = \left[-e^{\pi-x}\right]_0^{\pi} = -1+e^{\pi}.$$

Il secondo è un integrale generalizzato, quindi

$$\int_{\pi}^{+\infty} e^{x-\pi}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\int_{\pi}^{\omega} e^{x-\pi}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty}\left[e^{x-\pi}\right]_0^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty}\left(e^{\omega-\pi}-e^{-\pi}\right) = +\infty.$$

Dunque complessivamente

$$\int_0^{+\infty} e^{|\pi-x|}\,dx = +\infty.$$

❒ **Esercizio 13.1.23 (Esame del 24.07.19).** *Dire se l'integrale*

$$\int_0^1 \frac{x^2e^x}{1-\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$$

è convergente o divergente.

R. L'unico problema è in un intorno destro di 0 (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua).
Sia $x\to 0^+$. Allora a numeratore si ha

$$x^2e^x \sim x^2,$$

mentre a denominatore

$$1-\cos\left(\sqrt[3]{x}\right) \sim \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2}.$$

Dunque dal criterio del confronto asintotico (in quanto la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione)

$$\int_0^1 \frac{x^2e^x}{1-\cos\left(\sqrt[3]{x}\right)}\,dx \sim \int_0^1 \frac{x^2}{\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{2}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^{2/3}}\,dx = \int_0^1 x^{4/3}\,dx < +\infty.$$

❒ **Esercizio 13.1.24 (Esame del 11.09.19).** *Calcolare, usando la definizione,*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^3+x}\,dx.$$

➻ **R.** L'unico problema è in un intorno di $+\infty$ (in un intorno di 1 la funzione integranda è ben definita e continua), perciò si avrà

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x^3+x}\, dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{3x^3+x}\, dx.$$

Troviamo prima l'insieme delle primitive calcolando l'integrale indefinito. Si ha

$$\int \frac{1}{3x^3+x}\, dx = \int \frac{1}{x\,(3x^2+1)}\, dx.$$

Utlizziamo il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{1}{x\,(3x^2+1)}\, dx \stackrel{?}{=} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{3x^2+1} = \frac{3Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\,(3x^2+1)} = \frac{(3A+B)x^2+Cx+A}{x\,(3x^2+1)},$$

che è verificata se e solo se

$$\begin{cases} 3A+B=0, \\ C=0, \\ A=1, \end{cases}$$

da cui $A=1$, $B=-3$, $C=0$. Sostituendo otteniamo

$$\int \frac{1}{3x^3+x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{3x}{3x^2+1}\, dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log|3x^2+1| + C.$$

L'integrale generalizzato è quindi uguale a

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega\to+\infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{3x^3+x}\, dx &= \lim_{\omega\to+\infty} \left[\log|x| - \frac{1}{2}\log|3x^2+1|\right]_1^{\omega} \\
&= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\log\omega - \frac{1}{2}\log(3\omega^2+1) - \log 1 + \frac{1}{2}\log 4\right) \\
&= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\log\left(\frac{\omega}{\sqrt{3\omega^2+1}}\right) + \log 2\right) = \log\frac{1}{\sqrt{3}} + \log 2 = \log\frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 13.1.25. (Esame del 15.11.19)** *Determinare i valori del parametro $\alpha > 0$ per cui il seguente integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3(x^3-1)^{\alpha}}\, dx$$

converge.

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to +\infty$

$$x^3 - 1 \sim x^3$$

per cui l'integrale dato si comporta come (attenzione alle proprietà delle potenze)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3+3\alpha}}\, dx$$

che converge se $3 + 3\alpha > 1$ dunque, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato converge se $\alpha > -2/3$.

❒ **Esercizio 13.1.26. (Esame del 19.12.19)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)}\, dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo e problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione quindi possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
Spezziamo l'integrale dato in due integrali da trattare separatamente. Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+1)}\, dx.$$

Consideriamo il primo dei due integrali. Per $x \to 0$ si ottiene

$$\sqrt{x} + 1 \sim 1$$

per cui il primo integrale si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\, dx$$

che converge perché $2/3 < 1$.
Consideriamo ora il secondo integrale. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{x} + 1 \sim \sqrt{x}$$

per cui il secondo integrale si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2/3+1/2}}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/6}}\, dx$$

che converge perché $7/6 > 1$.
Riassumendo l'integrale dato è un integrale convergente.

❒ **Esercizio 13.1.27. (Esame del 09.01.20)** *Dopo aver verificato che*

$$\log(e^x - x) \sim \frac{x^2}{2} \qquad x \to 0$$

studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato, al variare del parametro $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{[\log(e^x - x)]^\alpha}\,dx$$

(Si noti che $[\log(e^x - x)]^\alpha = \log^\alpha(e^x - x)$*).*

R. Usando gli sviluppi di Mac Laurin si ha che

$$\log(1 + z) = z + o(z)$$

da cui

$$\log(e^x - x) = e^x - 1 - x + o(e^x - 1 - x).$$

D'altra parte

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

quindi

$$\log(e^x - x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

e questo risulta equivalente al fatto che

$$\log(e^x - x) \sim \frac{x^2}{2}.$$

A questo punto, osservando che l'integrale generalizzato dato ha un problema di limitatezza e che, dagli sviluppi asintotici, la funzione integranda è non negativa, si può concludere, dal criterio del confronto asintotico, che l'integrale dato si comporta come

$$2^\alpha \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx$$

che converge se $2\alpha < 1$ cioè se $\alpha < 1/2$.

❒ **Esercizio 13.1.28. (Esame del 23.01.20)** *Calcolare, con la definizione*

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx$$

➻ **R.** Per definizione di integrale generalizzato si ha

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \lim_{K\to+\infty} \int_4^K \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx.$$

Calcoliamo prima l'insieme delle primitive con il metodo dei fratti semplici. Cerchiamo costanti A, B tali che

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)}$$

Si ha

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{Ax - 3A + Bx + B}{(x+1)(x-3)}$$

da cui, dal principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + B = 1 \end{cases}$$

pertanto si ha $A = -1/4$ e $B = 1/4$. Pertanto, dalla linearità dell'integrale e dalle proprietà dei logaritmi, si ottiene

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3} \right) dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-3} \right| + C.$$

A questo punto allora

$$\begin{aligned} \int_4^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx &= \lim_{K\to+\infty} \int_4^K \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \lim_{K\to+\infty} \left[\frac{1}{4} \log \left| \frac{x+1}{x-3} \right| \right]_4^K \\ &= \lim_{K\to+\infty} \log \left| \frac{K+1}{K-3} \right| - \log 5 = -\log 5. \end{aligned}$$

❒ **Esercizio 13.1.29. (Esame del 20.02.20)** *Calcolare, con la definizione*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\,dx$$

➻ **R.** Per definizione di integrale generalizzato si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\,dx = \lim_{K\to+\infty} \int_1^K \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\,dx.$$

Calcoliamo prima l'insieme delle primitive. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\,dx &= -\frac{\log(1+x^3)}{2x^2} + \int \frac{1}{1+x^4} \frac{4x^3}{2x^2}\,dx \\ &= -\frac{\log(1+x^3)}{2x^2} + \int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = -\frac{\log(1+x^3)}{2x^2} + \arctan(x^2). \end{aligned}$$

A questo punto allora

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\,dx &= \lim_{K\to+\infty}\int_1^K \frac{\log(1+x^4)}{x^3}\,dx = \lim_{K\to+\infty}\left[-\frac{\log(1+x^3)}{2x^2}+\arctan(x^2)\right]_1^K \\ &= \lim_{K\to+\infty} -\frac{\log(1+K^3)}{2K^2}+\arctan(K^2)+\log 2-\arctan 1 = \frac{\pi}{4}+\log 2,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la gerarchia degli infiniti, essendo, per $K \to +\infty$

$$\log(1+K^3) \sim \log K^3 = 3\log K$$

e dove abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{K\to+\infty} \arctan(K^2) = \frac{\pi}{2} \qquad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

❒ **Esercizio 13.1.30. (Esame del 24.06.20)** *Studiare la convergenza dell'integrale*

$$\int_3^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^3}+e^{-x}}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione considerato dunque possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.
Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{\frac{x^2}{x^\alpha}+e^{-x}} \sim \sqrt{\frac{x^2}{x^\alpha}}$$

indipendentemente dal valore di α. Infatti si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^\alpha}+e^{-x}}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^\alpha}}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{x^{\alpha-2}}{e^x}} = 1$$

in quanto

$$\frac{x^{\alpha-2}}{e^x} \to 0$$

(nel caso peggiore si risolve con la gerarchia degli infiniti). Quindi, dal criterio del confronto asintotico, l'integrale dato si comporta come

$$\int_3^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^{\alpha-2}}}\,dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha-2}{2}}}\,dx$$

che converge se $\frac{\alpha-2}{2} > 1$ cioè se $\alpha/2 > 2$ che significa $\alpha > 4$.

❒ **Esercizio 13.1.31. (Esame del 23.07.20)** *Studiare la convergenza dell'integrale al variare del parametro* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\int_3^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{x^\beta}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \log\left(1 - \frac{2}{x+1}\right) \sim -\frac{2}{x+1} \sim -\frac{2}{x},$$

quindi la funzione integranda è negativa in un intorno di $+\infty$ ma in ogni caso è possibile usare il criterio del confronto asintotico. Si ha dunque che l'integrale dato si comporta come

$$-2\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta+1}}\,dx$$

che converge se $\beta + 1 > 1$ dunque se $\beta > 0$. Allora, dal criterio del confronto asintotico, anche l'integrale di partenza converge per $\beta > 0$.

❒ **Esercizio 13.1.32. (Esame del 08.09.20)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato, al variare del parametro* $\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{1}{[\log(1+x^2)]^\alpha}\,dx$$

Si noti che con la scrittura $[\log(1+x^2)]^\alpha$ *si intende* $\log^\alpha(1+x^2)$.

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to 0$

$$\log(1+x^2) \sim x^2$$

quindi l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx$$

che converge quando $2\alpha < 1$ cioè $\alpha < 1/2$. Allora, dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza converge se $\alpha < 1/2$.

❒ **Esercizio 13.1.33. (Esame del 14.12.20)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{\sin(x^2+x^{3/2})}\,dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x=0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to 0$

$$e^{\sqrt[3]{x}}-1 \sim \sqrt[3]{x} \qquad \sin(x^2+x^{3/2}) \sim x^2+x^{3/2} \sim x^{3/2}$$

perché vicino a zero contano le potenze piccole. Quindi l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{x^{1/3}}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{7/6}}\,dx$$

che diverge perché $7/6 > 1$. Allora, dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza diverge.

❒ **Esercizio 13.1.34. (Esame del 21.12.20)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+e^{-x})(1+x\sqrt[4]{x})}{x^2+x^3}\,dx$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to +\infty$

$$1+e^{-x} \sim 1 \qquad 1+x\sqrt[4]{x} \sim x^{5/4} \qquad x^2+x^3 \sim x^3$$

Si ha dunque che l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3-5/4}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/4}}\,dx$$

che converge perché $7/4 > 1$. Allora anche l'integrale di partenza converge.

❒ **Esercizio 13.1.35. (Esame del 12.01.21)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\int_0^1 \frac{(e^x-1)^\alpha}{\sin\sqrt[3]{x}}\,dx$$

➼ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to 0$

$$e^x - 1 \sim x \qquad \sin \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$$

quindi l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3-\alpha}}\, dx$$

che converge quando $1/3 - \alpha < 1$ cioè $\alpha > -2/3$. Allora, dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza converge se $\alpha > -2/3$.

❐ **Esercizio 13.1.36. (Esame del 02.02.21)** *Calcolare*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\, dx$$

➼ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. Per definizione di integrale generalizzato si ha

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\, dx.$$

Troviamo innanzitutto l'insieme delle primitive. Effettuiamo la seguente sostituzione

$$\cos x = t \qquad -\sin x\, dx = dt$$

da cui, ricordando che $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, si ottiene

$$\int \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\, dx = \int \frac{t+1}{t(1-t)}\, dt.$$

A questo punto si tratta di una funzione razionale fratta, per cui procediamo col metodo dei fratti semplici. Si cercano costanti A, B tali che

$$\frac{t+1}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t}$$

da cui

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A - At + Bt}{t(1-t)} = \frac{t+1}{t(1-t)}$$

da cui, dal principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} -A + B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

pertanto si ha $A = 1$ e $B = 2$. Dunque

$$\int \frac{t+1}{t(1-t)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{1-t}\right) dt = \log|t| - 2\log|1-t| + C = \log|\cos x| - 2\log|1-\cos x| + C.$$

In conclusione (osservando che $1-\cos x \geq 0$ e che, nell'intervallo di integrazione dato, $\cos x \geq 0$)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\pi/4} \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1} \tan x\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\log(\cos x) - 2\log(1-\cos x)\right]_\varepsilon^{\pi/4} \\
&= \log\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\log\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \log(\cos\varepsilon) + 2\log(1-\cos\varepsilon) = -\infty
\end{aligned}$$

❒ **Esercizio 13.1.37. (Esame del 02.02.21)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2 + x\sin^5 x}$$

R. Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Mostriamo che, per $x \to 0$ si ha

$$\sqrt{x} + x^2 + x\sin^5 x \sim \sqrt{x}.$$

Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} + x^2 + x\sin^5 x \sim \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} 1 + x\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin^5 x = 1$$

quindi l'integrale dato si comporta come

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

che converge; pertanto, dal criterio del confronto asintotico, anche l'integrale di partenza converge.

❐ **Esercizio 13.1.38. (Esame del 23.02.21)** *Determinare per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale improprio*

$$\int_5^6 \frac{\log(x-4)}{(x-5)^\beta}\, dx$$

➾ **R.** Effettuiamo prima di tutto il seguente cambio di variabile

$$x - 5 = t$$

quindi l'integrale dato si può scrivere come

$$\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t^\beta}\, dt.$$

A questo punto, se $\beta \leq 0$ questo è un integrale di una funzione limitata su un intervallo limitato che quindi banalmente converge; se $\beta > 0$ si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza in $x = 0$. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico.
D'altra parte, se $x \to 0$

$$\log(1+x) \sim x$$

quindi l'integrale di partenza si comporta come

$$\int_0^1 \frac{t}{t^\beta}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{\beta-1}}\, dt$$

che converge se $\beta - 1 < 1$ cioè se $\beta < 2$. Allora, dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale di partenza converge se $\beta < 2$.

❐ **Esercizio 13.1.39. (Esame del 09.06.21)** *Studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato*

$$\int_1^{+\infty} \frac{(e^{1/x}-1)^3}{\sqrt[4]{x}}\, dx$$

➾ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to +\infty$

$$e^{1/x} - 1 \sim \frac{1}{x}$$

dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3+1/4}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{13/4}}\,dx$$

che converge perché $13/4 > 1$. Allora anche l'integrale di partenza converge.

❐ **Esercizio 13.1.40. (Esame del 23.06.21)** *Studiare la convergenza dell'integrale al variare del parametro* $\alpha > 0$

$$\int_3^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^\alpha + x^3}}\,dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Studiamo il comportamento del denominatore della frazione per $x \to +\infty$. Se $\alpha < 3$ si ha che

$$x^\alpha + x^3 \sim x^3$$

dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$

che converge perché $3/2 > 1$.
Se invece $\alpha = 3$ l'integrale dato si riscrive come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^3}}\,dx$$

quindi di nuovo converge perché risulta uguale a

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx.$$

Infine se $\alpha > 3$

$$x^\alpha + x^3 \sim x^\alpha$$

dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha/2}}\,dx$$

che converge se $\alpha/2 > 1$ cioè se $\alpha > 2$. Riassumendo l'integrale dato converge per ogni $\alpha > 0$.

❒ **Esercizio 13.1.41. (Esame del 07.07.21)** *Studiare la convergenza dell'integrale al variare del parametro* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin \frac{2}{x^2} + e^{1/x} - 1}{x^\beta}\, dx$$

➻ **R.** Si tratta di un integrale generalizzato con problema di limitatezza dell'intervallo. La funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione dunque possiamo usare il criterio del confronto asintotico. Si ha che, per $x \to +\infty$

$$\sin \frac{2}{x^2} + e^{1/x} - 1 \sim 1/x$$

infatti, dai limiti notevoli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \frac{2}{x^2} + e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin \frac{2}{x^2}}{2/x^2}\frac{2}{x} + \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = 1$$

dunque l'integrale dato si comporta come

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\beta+1}}\, dx$$

che converge quando $\beta+1 > 1$ cioè quando $\beta > 0$. Allora anche l'integrale di partenza converge quando $\beta > 0$.

CAPITOLO 14

Studio del grafico di funzioni: esercizi proposti

14.1. Richiami di teoria

Riassumiamo i punti fondamentali da verificare quando ci si trova di fronte al problema di studiare il grafico di una funzione e poi facciamo alcuni esempi.
1) DOMINIO: per prima cosa è essenziale determinare il dominio di f, cioè il più grande insieme naturale in cui la funzione risulta definito. Talvolta risulta particolarmente utile barrare con un segno grafico le parti del piano dove di sicuro si sa non ci sarà grafico della funzione.
2) SIMMETRIE: in seguito è importante vedere se la funzione presenta simmetrie, per esempio se f è pari o dispari. Nel caso ad esempio f sia pari, si può restringere lo studio del grafico alla regione $x \geq 0$ e disegnare la parte restante del grafico per simmetria. Se invece ad esempio la funzione è periodica, allora si può restringere lo studio del suo grafico a un periodo fissato.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: quando possibile e/o non particolarmente complicato può essere utile avere informazioni sulle intersezioni con gli assi della funzione, quindi in particolare sui suoi e sul suo segno.
4) LIMITI E ASINTOTI: a questo punto, dopo questa prima analisi, diventa essenziale studiare i limiti della f agli estremi del dominio, ricercando eventuali asintoti orizzontali, verticali. In particolare, se $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$ (o equivalentemente per $x \to \mp\infty$) allora è possibile cercare (se esiste) l'asintoto obliquo. In questa fase, può essere individuare eventuali punti di discontinuità della funzione.
5) DERIVATA PRIMA: a questo punto si calcola la derivata prima della f nei punti in cui $f'(x)$ esiste. È importante studiare accuratamente i punti in cui f risulta continua ma non derivabile, per stabilirne la natura (punti angolosi, punti di flesso a tangente verticale, cuspidi...). Nei punti angolosi o agli estremi del dominio può essere utile calcolare le derivate destre e sinistre di f

(per valutare l'eventuale pendenza del grafico).
Successivamente si studia il **segno di** $f'(x)$ che dà informazioni sulla monotonia di f e sugli eventuali punti di massimo o minimo.
6) DERIVATA SECONDA: ove richiesto, si può procedere a questo punto allo studio della derivata seconda e del suo segno, che dà informazioni su concavità e convessità della funzione.
7) GRAFICO: mettendo assieme tutte le informazioni precedenti, si giunge a determinare il grafico qualitativo della funzione.

14.2. Esercizi proposti

14.2.1. Funzioni razionali fratte

❒ **Esercizio 14.2.1. (Esame del 11.01.18)** *1) Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3}$$

disegnandone il grafico qualitativo. È richiesto lo studio della derivata seconda.

2) Dedurre dal grafico di f i grafici di $|f(x)|$ e $f(|x|)$.

R.
1) DOMINIO: la funzione è ben definita se non si annulla il denominatore, quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{3}\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data è dispari: infatti

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x)^2 - 3} = -f(x)$$

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: si ha $f(0) = 0$ (in quanto funzione dispari) e

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2}.$$

Inoltre dallo studio del segno risulta che

$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \vee 0 < x < \sqrt{2} \vee x > \sqrt{3}.$$

4) limiti e asintoti: studiamo i limiti della funzioni agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

pertanto è possibile cercare l'asintoto obliquo. Consideriamo prima il caso $x \to +\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-3} = 0$$

quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo per la funzione per $x \to +\infty$. D'altra parte, per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-3} = 0$$

quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo per la funzione anche per $x \to +\infty$.
Vediamo ora se ci sono asintoti verticali. Si ha

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty$$

quindi la retta $x = -\sqrt{3}$ è asintoto verticale per la funzione. Inoltre

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = +\infty$$

quindi anche la retta $x = \sqrt{3}$ è asintoto verticale per la funzione.
5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(x^2-3) - 2x(x^3-2x)}{(x^2-3)^2} = \frac{x^4-7x^2+6}{(x^2-3)^2} = \frac{(x^2-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima. Si ha

$$f'(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -\sqrt{6} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{6}.$$

A questo punto allora la funzione f risulta crescente se $x < -\sqrt{6} \vee -1 < x < 1 \vee x > \sqrt{6}$ e risulta decrescente negli intervalli complementari. Ne risulta che $x = -\sqrt{6}$ e $x = 1$ sono punti di massimo locale, mentre $x = -1$ e $x = \sqrt{6}$ sono punti di minimo locale.
6) derivata seconda: si ha

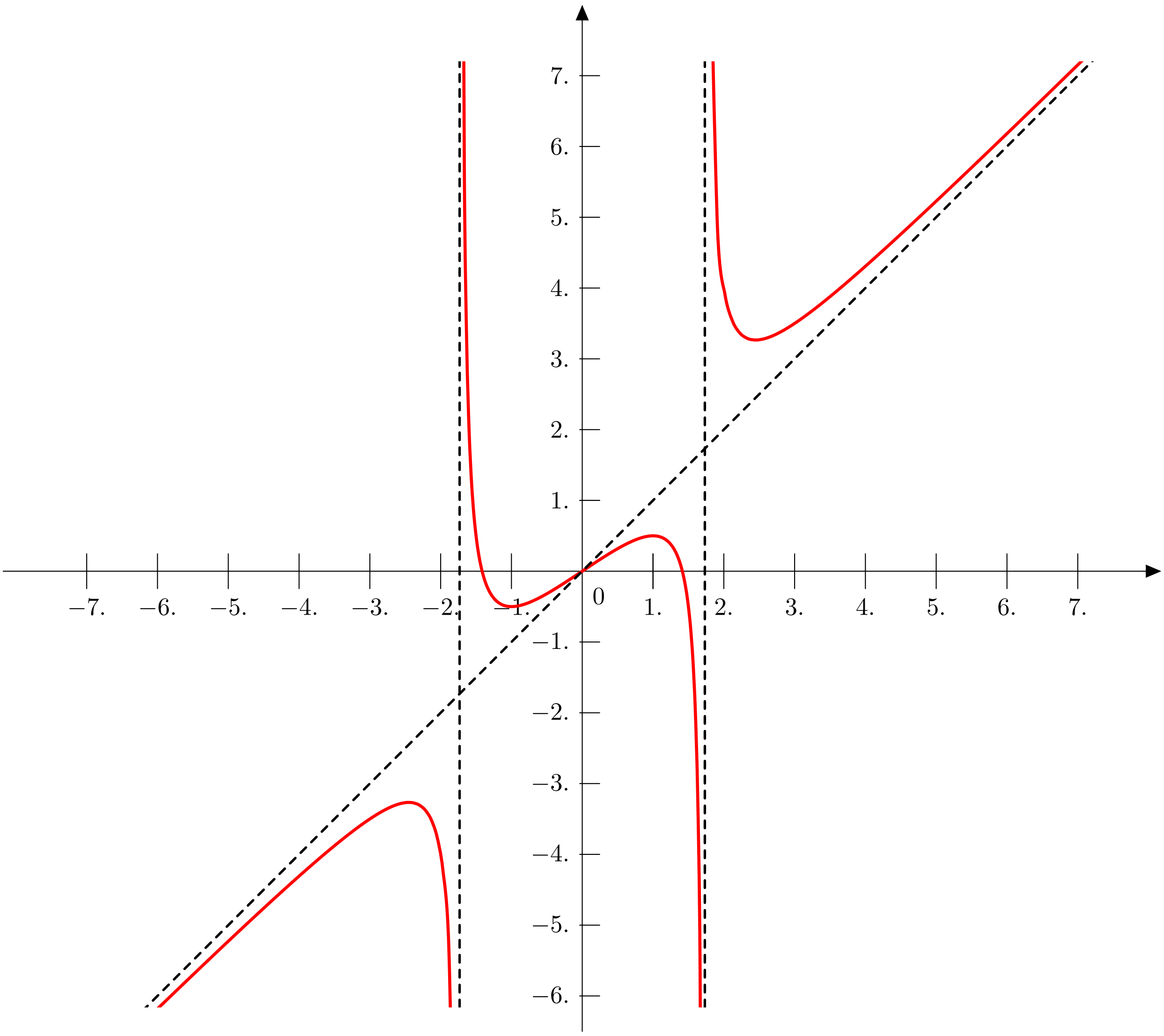
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3-14x)(x^2-3)^2 - 2(x^2-3)2x(x^4-7x^2+6)}{(x^2-3)^4} \\ &= \frac{2x[(2x^2-7)(x^2-3) - (2x^2-2)(x^2-6)]}{(x^2-3)^3} \\ &= \frac{2x(x^2+9)}{(x^2-3)^2} \end{aligned}$$

pertanto dallo studio del segno della derivata seconda risulta che f è concava se

$$x < -\sqrt{3} \vee 0 < x < \sqrt{3}$$

e convessa negli intervalli complementari.

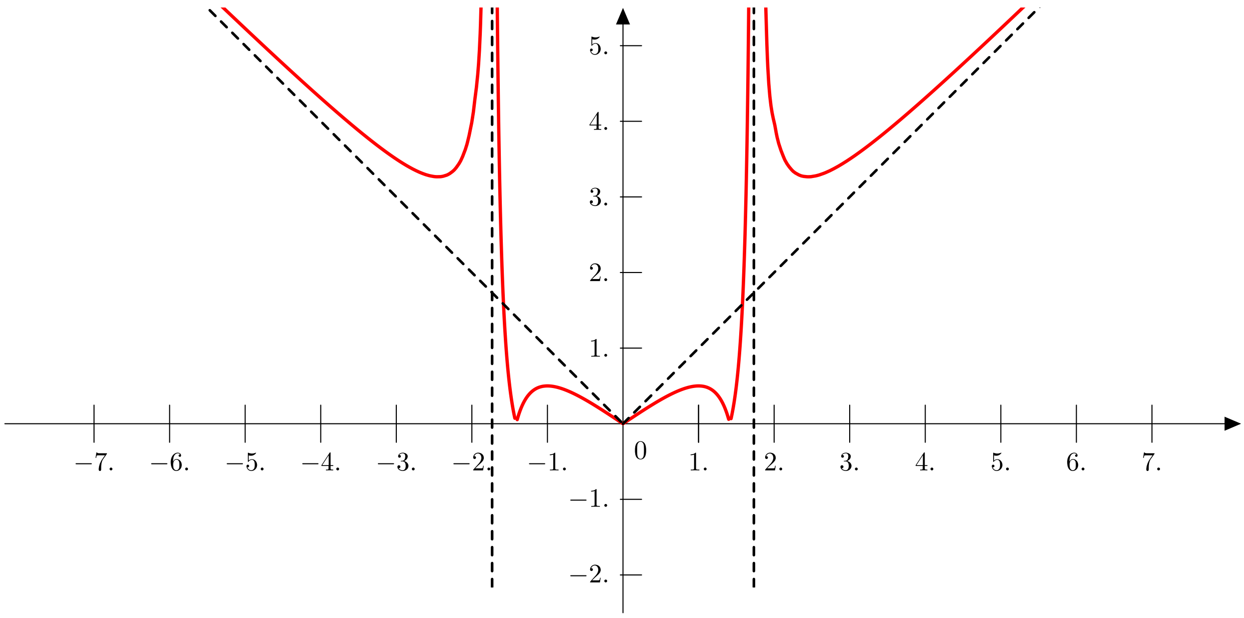
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura.



Da qui, se vogliamo dedurre il grafico di $|f(x)|$ basta prendere la funzione f dove questa è positiva e considerare la funzione $-f$ quando f è negativa. Infatti si ha

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

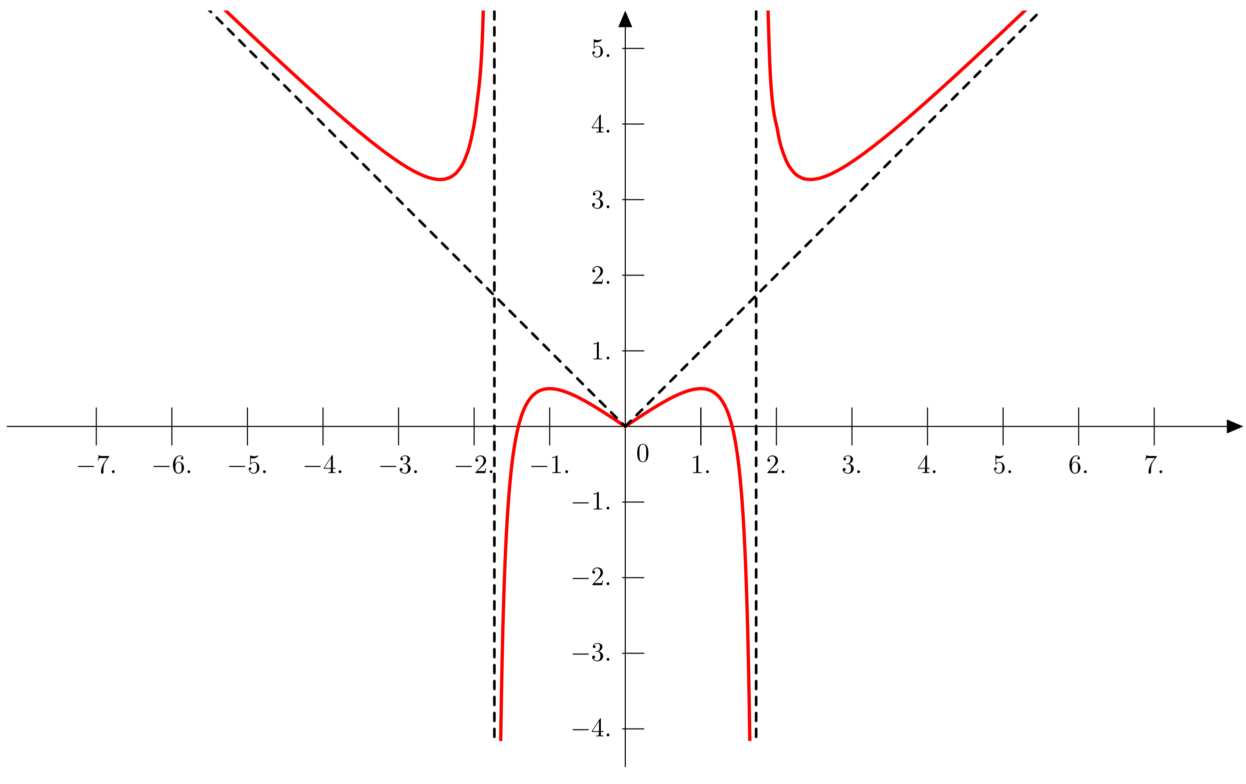
Il grafico qualitativo di $|f(x)|$ è riportato in figura.



D'altra parte

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Il grafico qualitativo di $f(|x|)|$ è riportato in figura.



❒ **Esercizio 14.2.2. (Esame del 09.06.21)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{3-x}{(x-2)^2}$$

determinandone il grafico qualitativo.

➼ **R.**

1) DOMINIO: la funzione è ben definita se non si annulla il denominatore, quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: si ha che $f(0) = 3/4$ mentre $f(x) = 0$ se $x = 3$. Inoltre $f(x) > 0$ se $x < 3$ e $f(x) < 0$ se $x > 3$.

4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^- \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$$

in quanto il grado del polinomio al numeratore è minore del grado del polinomio al denominatore. Quindi l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per f. Inoltre

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

quindi la retta $x = 2$ è asintoto verticale per f.

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \frac{-(x-2)^2 - 2(x-2)(3-x)}{(x-2)^4} = \frac{x-4}{(x-2)^3}$$

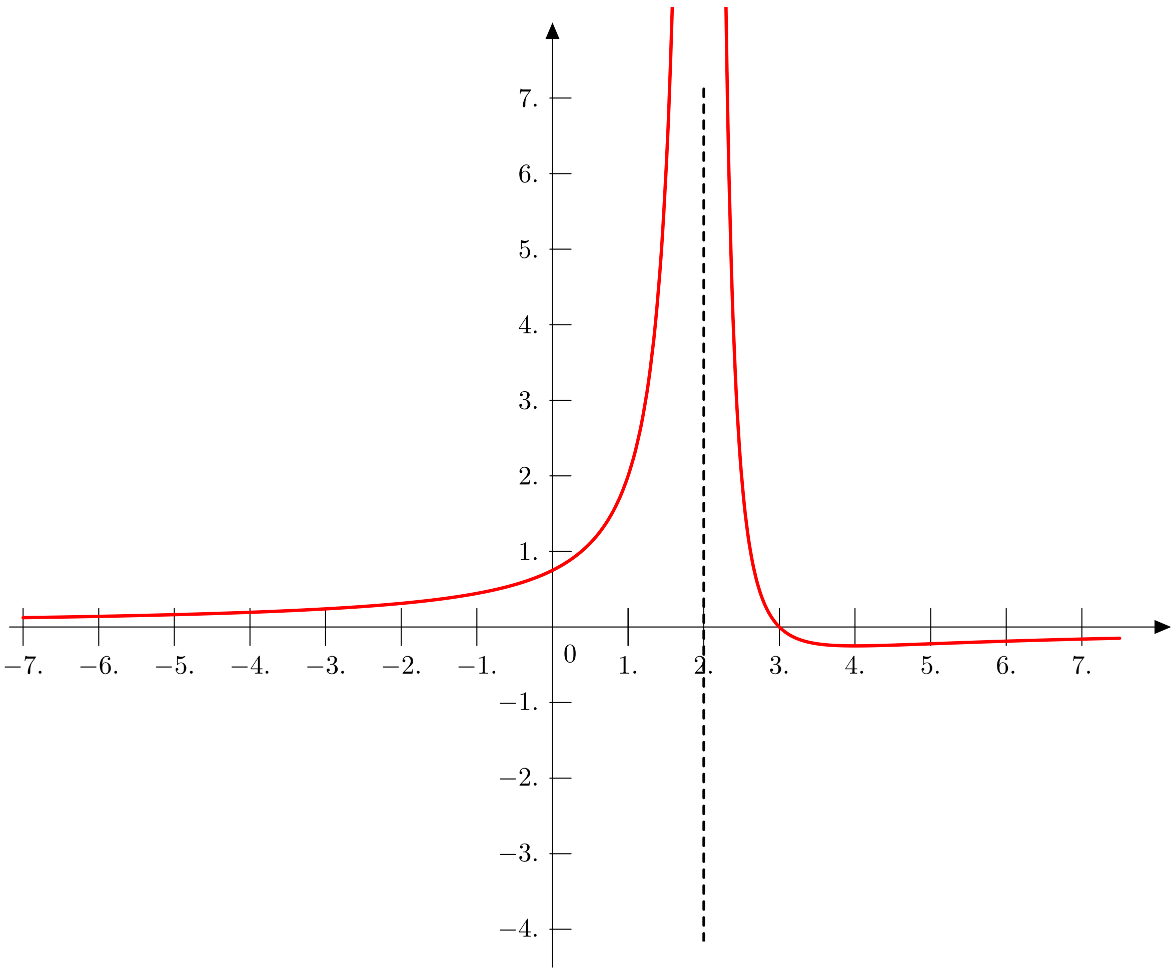
quindi, essendo $f'(x) > 0$ quando $x < 2$ o $x > 4$, in quegli intervalli la funzione data risulta crescente, mentre se $2 < x < 4$ la funzione data risulta decrescente. Pertanto $x = 4$ è punto di minimo locale per f (ricordiamo che in $x = 2$ la funzione non è definita).

6) DERIVATA SECONDA: si ha

$$f''(x) = \frac{(x-2)^3 - 3(x-2)^2(x-4)}{(x-2)^6} = \frac{-2x+10}{(x-2)^4}$$

quindi f è convessa se $x < 5$ e concava per $x > 5$. In $x = 5$ cè un cambio di concavità (punto di flesso).

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura.



14.2.2. Funzioni razionali fratte con valori assoluti

❒ **Esercizio 14.2.3. (Esame del 03.02.17)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{\pi x + 3}{|x - \pi|}$$

R.

Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi x + 3}{x - \pi} =: g(x) & x > \pi \\ \dfrac{\pi x + 3}{\pi - x} =: h(x) & x < \pi \end{cases}$$

1) DOMINIO: il dominio della funzione assegnata è $x \neq \pi$.

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: i punti di intersezione con gli assi sono $(-3/\pi, 0)$ e $(0, 1+3/\pi)$, mentre $f(x) > 0$ per $x > -3/\pi$.
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha che la retta $x = \pi$ è un asintoto verticale per la funzione, infatti

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} h(x) + \infty,$$
$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} g(x) + \infty.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x}{x-\pi} + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x-\pi} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi}{1-\pi/x} = \pi,$$

quindi la retta $x = \pi$ è un asintoto orizzontale per f per $x \to +\infty$; inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} -g(x) = -\pi$$

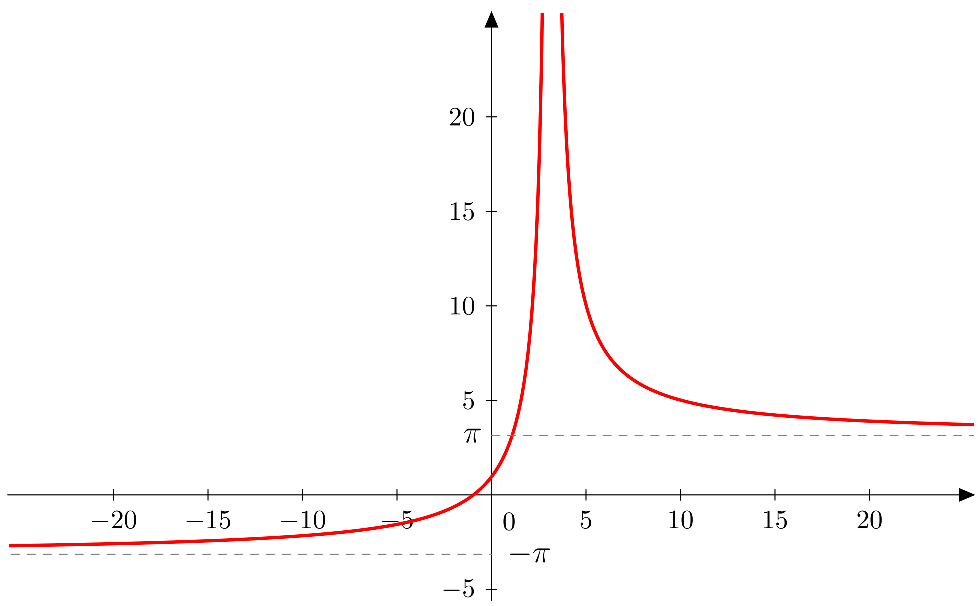
quindi la retta $x = -\pi$ è un asintoto orizzontale per f per $x \to -\infty$.
5) DERIVATA PRIMA: le derivate prime di $g(x)$ ed $h(x)$, sono

$$g'(x) = \frac{\pi(x-\pi) - (\pi x + 3)}{(x-\pi)^2} = -\frac{\pi^2+3}{(x-\pi)^2} < 0$$

e $h'(x) = -g'(x) > 0$. Quindi la funzione è crescente per $x < \pi$ e decrescente per $x > \pi$.
6) DERIVATA SECONDA: le derivate seconde sono

$$g''(x) = \frac{2(\pi^2+3)(x-\pi)}{(x-\pi)^4} > 0$$

e $h''(x) = -g''(x) < 0$, quindi la funzione è concava per $x < \pi$ e convessa per $x > \pi$.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura.



❒ **Esercizio 14.2.4 (Esame del 08.01.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 1}{x + 2} \right|$$

determinando eventuali punti angolosi.

R.

1) DOMINIO: affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che il denominatore non si annulli, quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$.

2) SIMMETRIE: si vede che $f(-x) \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è né pari né dispari.

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI E SEGNO: troviamo le eventuali intersezioni con l'asse y calcolando $f(0)$. Sostituendo si ha $f(0) = 1/2$, dunque la funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 1/2)$. Per quanto riguarda le intersezioni con l'asse x osserviamo che

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x + 2} \right| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

dunque la funzione interseca l'asse x nei punti $(-1, 0)$, $(1, 0)$. Inoltre, trattandosi di un valore assoluto, essa non è mai negativa.

4) LIMITI E ASINTOTI: d'ora in poi per comodità conviene riscrivere la funzione separando i casi in cui l'argomento del valore assoluto ha segno opposto. Siccome

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow -2 < x \leq -1 \vee x \geq 1,$$

otteniamo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 2} & -2 < x \leq -1 \vee x \geq 1, \\ -\dfrac{x^2 - 1}{x + 2} & x < -2 \vee -1 < x < 1. \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio, ovvero a $-2^{\pm}$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} -\frac{x^2 - 1}{x + 2} = +\infty.$$

C'è quindi un asintoto verticale di equazione $x = -2$. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} x \, \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{x^2 - 1}{x + 2} = \lim_{x \to -\infty} -x \, \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = +\infty,$$

quindi potrebbero esserci due asintoti obliqui. Verifichiamolo. A $x \to +\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = 1 =: m_1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - m_1 x &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-1}{x+2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} -2\,\frac{1+\frac{1}{2x}}{1+\frac{2}{x}} = -2 := q_1,\end{aligned}$$

quindi c'è un asintoto obliquo di equazione $y = x-2$ quando $x \to +\infty$. Con gli stessi passaggi a $x \to -\infty$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\frac{x^2-1}{x+2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2-1}{x^2+2x} = -1 =: m_2, \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_2 x &= \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{x^2-1}{x+2} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x+2} = 2 := q_2,\end{aligned}$$

quindi c'è un secondo asintoto obliquo di equazione $y = -x+2$ quando $x \to -\infty$. Osserviamo infine che $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = 0$, quindi la funzione è continua in $x = \pm1$ (come potevamo aspettarci dalla continuità del valore assoluto).

5) derivata prima: se $-2 < x < -1 \lor x > 1$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)-(x^2-1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2},$$

mentre se $x < -2 \lor -1 < x < 1$

$$f'(x) = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}.$$

Dunque complessivamente

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} & -2 < x < -1 \lor x > 1, \\ -\dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} & x < -2 \lor -1 < x < 1. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = 2, \qquad \lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = -2, \\ &\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} = -\frac{2}{3},\end{aligned}$$

quindi in $x = \pm1$ ci sono due punti angolosi per f. Studiamo ora il segno di f' per determinare la monotonia di f.

- Se $-2 < x < -1 \vee x > 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \qquad \text{(poiché } -2-\sqrt{3} < -2 < -1 < -2+\sqrt{3} < 1).$$

- Se $x < -2 \vee -1 < x < 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{3} < x < -2 \vee -1 < x < -2+\sqrt{3}.$$

Dunque f è decrescente per $x < -2-\sqrt{3}$ e ha un punto di minimo locale in $x = -2-\sqrt{3}$, dopodiché cresce in $]-2-\sqrt{3}, -2[$. Dopo l'asintoto verticale in $x = -2$ decresce nuovamente in $]-2, -1[$ fino al punto angoloso in $x = -1$ (che quindi è anche minimo locale), cresce fino al massimo locale in $x = -2+\sqrt{3}$ e decresce fino al punto angoloso in $x = 1$ (che quindi è anche minimo locale). Infine per $x > 1$ la funzione è crescente.

6) derivata seconda: se $-2 < x < -1 \vee x > 1$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+4x+1)}{(x+2)^4} = \frac{(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x+1)}{(x+2)^3} \\ &= \frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x-2}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}, \end{aligned}$$

mentre se $x < -2 \vee -1 < x < 1$

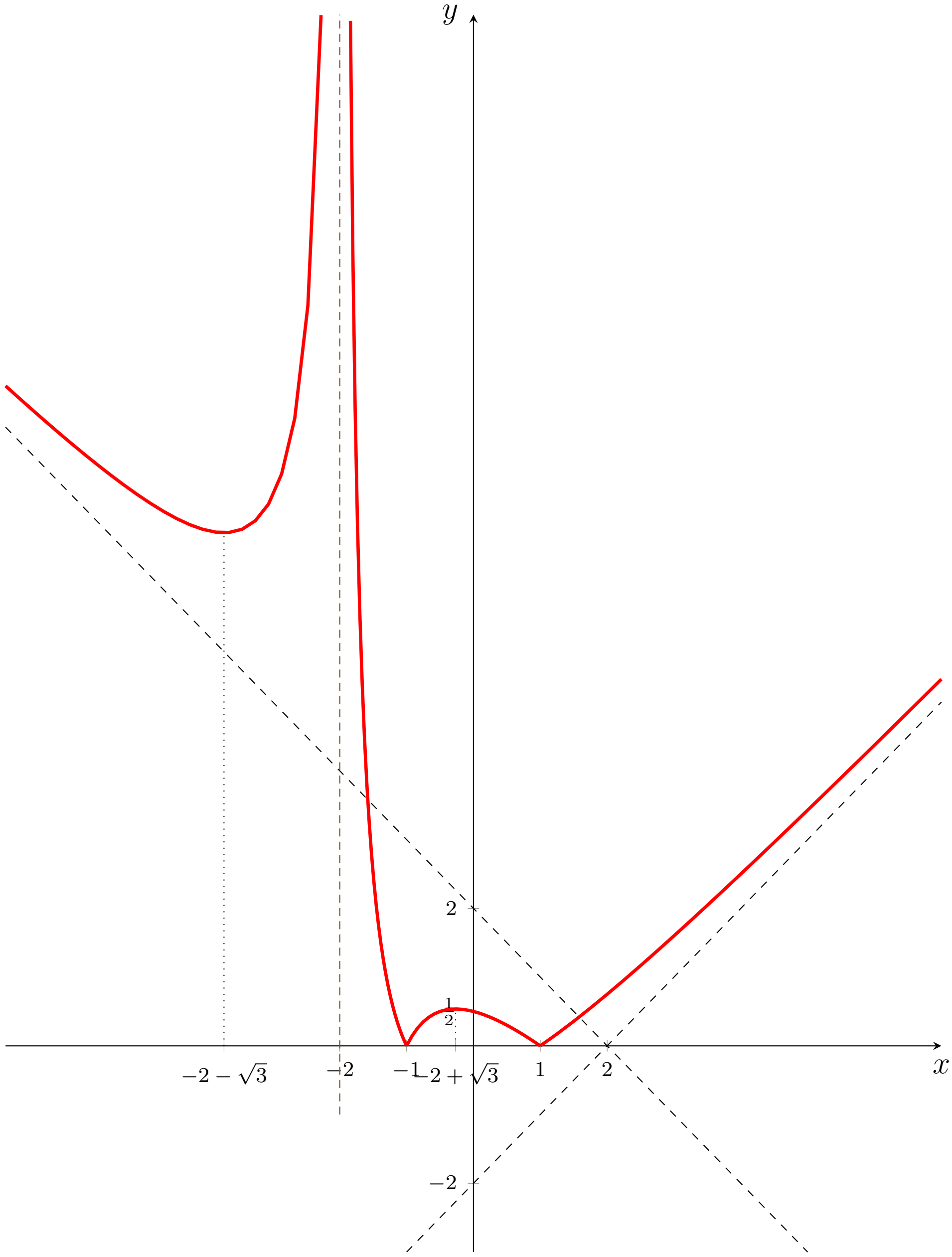
$$f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3}.$$

Dunque complessivamente

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{(x+2)^3} & -2 < x < -1 \vee x > 1, \\ -\dfrac{6}{(x+2)^3} & x < -2 \vee -1 < x < 1. \end{cases}$$

Siccome $\frac{6}{(x+2)^3} > 0 \Leftrightarrow x > -2$, si vede subito che se $-2 < x < -1 \vee x > 1$ la concavità è sempre verso l'alto, mentre se $x < -2 \vee -1 < x < 1$ la concavità è verso l'alto in $]-\infty, -2[$ e verso il basso in $]-1, 1[$.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura.



y
x
2
1
2
−2
−2 − √3
−2
−1
−2 + √3
1
2

14.2.3. Funzioni con radici

❒ **Esercizio 14.2.5. (Esame del 15.02.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = 1 - \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

disegnandone il grafico qualitativo. È richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la funzione data è ben definita se lo sono le radici e se il denominatore del terzo termine non si annulla. Nel complesso

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: proviamo a studiare il segno della funzione. Si ha

$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{x-1} - x}{\sqrt{x-1}} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{x-1} > x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x + 1 < 0$$

che non è mai verificata. Quindi la funzione è sempre negativa ed esiste sono per $x > 1$ quindi questo ci dice che non ci sono intersezioni con gli assi.
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale per f. D'altra parte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

quindi potrebbe esserci l'asintoto obliquo. Ma

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

pertanto in realtà non ci sono asintoti obliqui.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2(x-1)^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\left[1 - \frac{1}{x-1}\right] = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\left[\frac{x-2}{x-1}\right]$$

quindi, tenendo conto dell'insieme di definizione di f, si ha che $f'(x) > 0$ se $x < 2$ e $f'(x) < 0$ se $x > 2$ e dunque f è crescente se $1 < x < 2$ e f è decrescente se $x > 2$. Risulta allora che

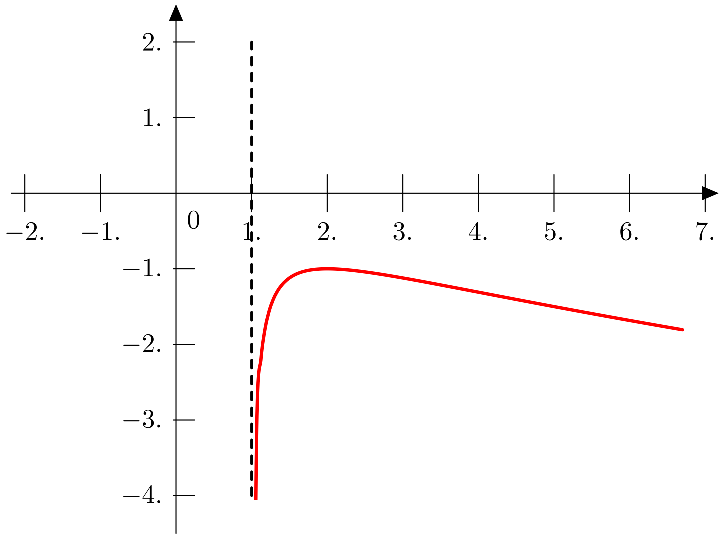
$x = 2$ è punto di massimo locale per f.

6) DERIVATA SECONDA: si ha

$$f''(x) = -\frac{2(x-1)^{3/2} - 2\,\frac{3}{2}\,(x-1)^{1/2}(x-2)}{4(x-1)^3} = -\frac{2(x-1) - 3(x-2)}{4(x-1)^{5/2}} = \frac{x-4}{4(x-1)^{5/2}}$$

dunque f è concava per $1 < x < 4$ e convessa se $x > 4$.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



> ❒ **Esercizio 14.2.6. (Esame del 12.06.18)** *Si studi la seguente funzione*
>
> $$f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^4}}{1 + \sqrt[5]{x}}$$
>
> *disegnandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.*

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita se $x \neq -1$ in quanto le due radici hanno esponente con denominatore dispari, quindi sono ben definite ovunque mentre il denominatore si annulla solo per $x = -1$.

Allora

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione data passa per l'origine. Inoltre, siccome il numeratore è sempre positivo, il segno è determinato dal denominatore: $f(x) > 0$ se $x > -1$ e

$f(x) < 0$ se $x < -1$.
4) limiti e asintoti: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

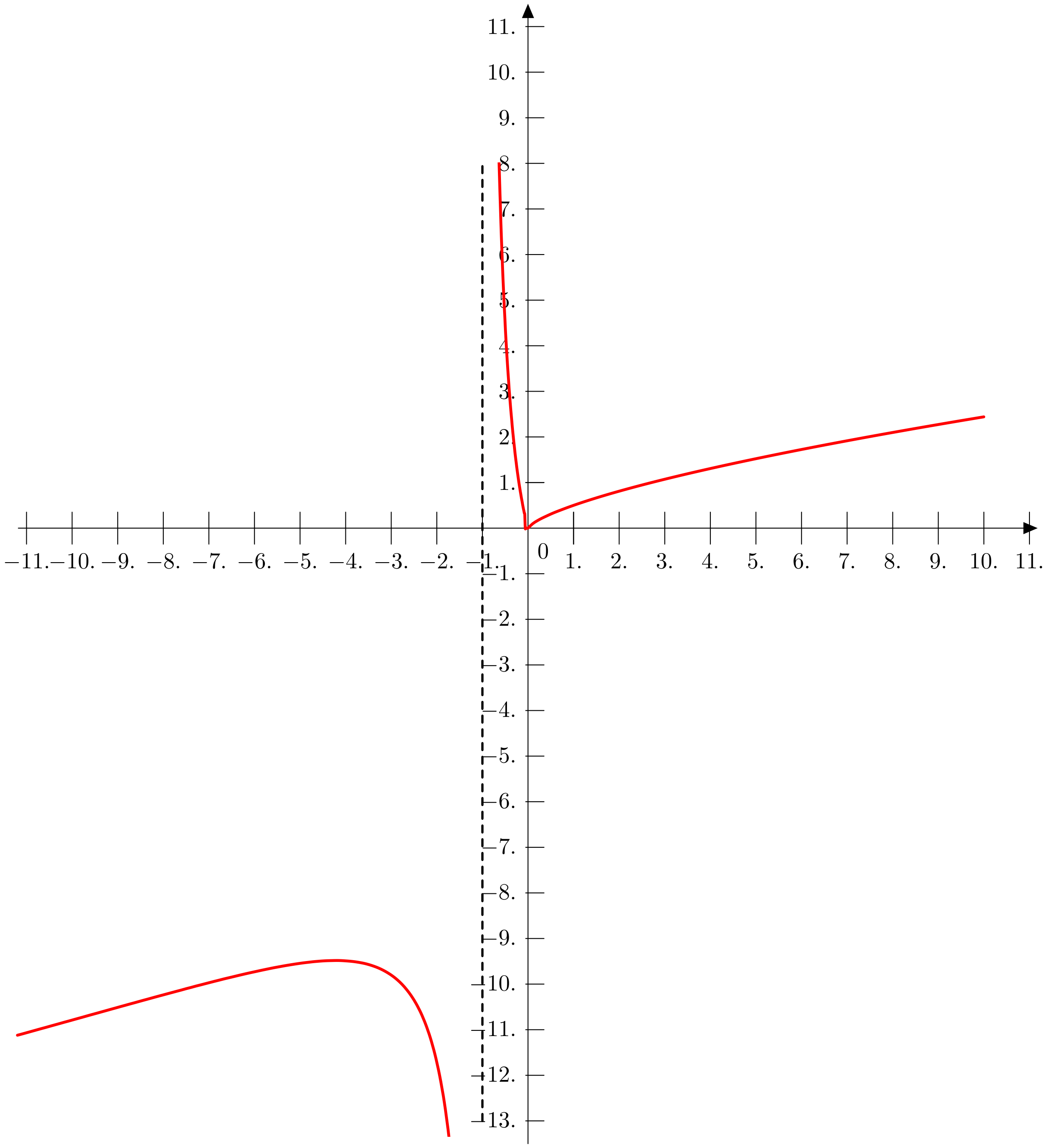
quindi $x = -1$ è asintoto verticale per la funzione, mentre non cè l'asintoto obliquo perché per $x \to \pm\infty$ la funzione è asintotica a $\sqrt[5]{x^3}$.
5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{4}{5}x^{-1/5}(1 + x^{1/5}) - \frac{1}{5}x^{-4/5}\,x^{4/5}}{(1 + x^{1/5})^2} = \frac{4x^{-1/5} + 3}{5(1 + x^{1/5})^2}.$$

A questo punto, se $x > 0$ si vede immediatamente che $f'(x) > 0$. Invece se $x < 0$ si ha che $f'(x) > 0$ se $x^{-1/5} > -3/4$ cioè se $x < (-4/3)^5$ e $f'(x) < 0$ se $(-4/3)^5 < x < 0$.
Allora la funzione data è crescente se $x < (-4/3)^5$ oppure se $x > 0$ e decrescente viceversa. Si ha che $x = 0$ è punto di minimo locale mentre $x = (-4/3)^5$ è punto di massimo locale.
Inoltre

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$$

Dal grafico non sembra perché l'andamento della funzione non consente di visualizzare questa informazione a questa scala; tuttavia è facile convincersi di questo perché la funzione essenzialmente vicino a zero si comporta come $x^{4/5}$ da cui discende quanto detto in precedenza.
6) derivata seconda: non richiesta
7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 14.2.7. (Esame del 11.09.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = 1 - \sqrt{|x-1|} - \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Evidenziare eventuali punti angolosi.

➾ **R.**

1) dominio: la funzione data è ben definita se $x \neq 1$ (valore per il quale si annulla il denominatore).
2) simmetrie: si ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x-1} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & x > 1 \\ 1 - \sqrt{1-x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \end{cases}$$

quindi la funzione data presenta una simmetria rispetto all'asse $x = 1$. Pertanto sarebbe sufficiente studiare il comportamento per $x > 1$ e poi dedurre la parte di grafico rimanente per simmetria. Noi andremo a verificare questo fatto svolgendo tutti i conti.
3) intersezioni con assi e segno: proviamo a studiare il segno della funzione. Consideriamo prima il caso $x > 1$. Si ha

$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\sqrt{x-1} - x}{\sqrt{x-1}} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{x-1} > x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - x + 1 < 0$$

che non è mai verificata. Quindi la funzione è sempre negativa; questo ci dice che non ci sono intersezioni con gli assi se $x > 1$.
Sia ora $x < 1$. Allora

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1-x} - 1 + x - 1}{\sqrt{1-x}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x} > 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 3 < 0$$

che di nuovo non è mai verificata. Quindi la funzione è sempre negativa; questo ci dice che non ci sono intersezioni con gli assi nemmeno se $x < 1$ (fatto confermato dalla simmetria).
4) limiti e asintoti: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale per f. D'altra parte

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ed essendo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

non ci sono asintoti obliqui.

5) derivata prima: prima di tutto consideriamo il caso $x > 1$. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2(x-1)^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \left[1 - \frac{1}{x-1}\right] = -\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \left[\frac{x-2}{x-1}\right]$$

quindi, tenendo conto del fatto che ci troviamo nel caso $x > 1$, si ha che $f'(x) > 0$ se $x < 2$ e $f'(x) < 0$ se $x > 2$ e dunque f è crescente se $1 < x < 2$ e f è decrescente se $x > 2$. Risulta allora che $x = 2$ è punto di massimo locale per f.
Sia ora $x < 1$. Allora si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2(1-x)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\left[1 - \frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\left[\frac{-x}{1-x}\right]$$

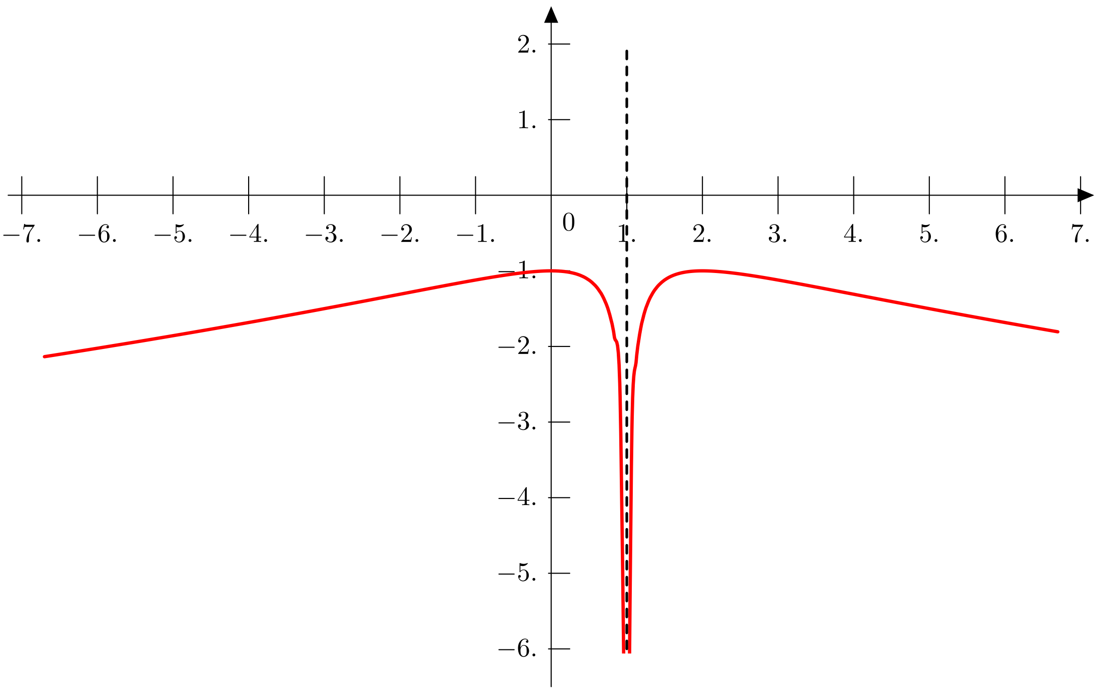
quindi, tenendo conto del fatto che ci troviamo nel caso $x < 1$, si ha che $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$ se $x > 0$ e dunque f è crescente se $x < 0$ e f è decrescente se $0 < x < 1$. Risulta allora che $x = 0$ è punto di massimo locale per f.
Anche questa analisi conferma la simmetria della funzione.
6) DERIVATA SECONDA: si ha, per $x > 1$ che

$$f''(x) = -\frac{2(x-1)^{3/2} - 2\,\frac{3}{2}\,(x-1)^{1/2}(x-2)}{4(x-1)^3} = -\frac{2(x-1) - 3(x-2)}{4(x-1)^{5/2}} = \frac{x-4}{4(x-1)^{5/2}}$$

dunque f è concava per $1 < x < 4$ e convessa se $x > 4$. D'altra parte, se $x < 1$

$$f''(x) = \frac{-2(1-x)^{3/2} - 2\,\frac{3}{2}\,(1-x)^{1/2}(-x)(-1)}{4(1-x)^3} = \frac{-2(1-x) - 3x}{4(1-x)^{5/2}} = \frac{-2-x}{4(1-x)^{5/2}}$$

dunque f è concava per $x > -2$ e convessa se $-2 < x < 1$.
Anche questa analisi conferma la simmetria della funzione.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 14.2.8 (Esame del 24.07.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = 3 - \frac{4}{5}\sqrt{-x^2 + 10x - 16}.$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R. 1) DOMINIO: affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che esista la radice. Si ottiene $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 8\}$.

2) SIMMETRIE: non ha senso calcolare $f(-x)$ poiché f non è definita per $x < 0$.

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI E SEGNO: non ci sono intersezioni con l'asse y poiché $x = 0$ non appartiene al dominio. Anche l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni, perciò non ci sono intersezioni neanche con l'asse x. Inoltre $f(x) > 0 \; \forall \, x \in D_f$.

4) LIMITI E ASINTOTI: agli estremi del dominio la funzione è continua (da destra o da sinistra), quindi non ha senso calcolare i limiti. Dunque non ci sono asintoti.

5) DERIVATA PRIMA: si ottiene

$$f'(x) = \frac{4(x-5)}{5\sqrt{-x^2 + 10x - 16}},$$

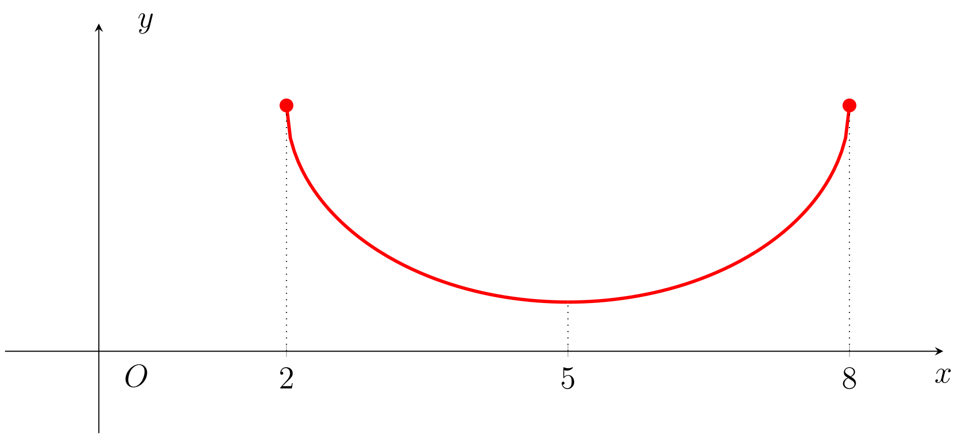
da cui

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 5.$$

La funzione è quindi decrescente in $[2, 5[$ e crescente in $]5, 8]$. Ha un punto di minimo locale in $x = 5$, e due punti di massimo locale in $x = 2$ e $x = 8$.

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.

7) GRAFICO:



❒ **Esercizio 14.2.9. (Esame del 15.11.19)** *Si studi la seguente funzione disegnandone il grafico qualitativo*
$$f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-2x}}$$

➻ **R.**
1) DOMINIO: la funzione è ben definita quando esiste la radice e quando il denominatore non si annulla. Complessivamente, la condizione da imporre è

$$x^2 - 2x > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < 0 \vee x > 2.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la radice quando esiste, è sempre positiva (sarebbe non negativa ma, essendo al denominatore, non si annulla) quindi il segno della funzione è determinato dal segno del numeratore. In particolare $f(x) > 0$ se $x > 3/2$ e quindi, tenendo conto del dominio della funzione, $f(x) > 0$ se $x > 2$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$. Non ci sono intersezioni con gli assi.
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 2$$

mentre
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1-\frac{3}{2x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = -2$$

quindi le rette $y = 2$ e $y = -2$ sono asintoti orizzontali per la funzione rispettivamente per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.
D'altra parte
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

quindi l'asse delle ordinate e la retta $x = 2$ sono asintoti verticali per la funzione.
Non ci sono asintoti obliqui per la funzione.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2-2x} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}(2x-2)(2x-3)}}{x^2-2x} = \frac{4(x^2-2x)-(4x^2-6x-4x+6)}{2(x^2-2x)^{3/2}} = \frac{x-3}{2(x^2-2x)^{3/2}}$$

pertanto $f'(x) > 0$ se $x > 3$ e $f'(x) < 0$ se $x < 3$. Dunque la funzione data è crescente se $x > 3$ ed è decrescente se $x < 3$. Il punto $x = 3$ è un punto di minimo locale per f.

6) derivata seconda: si ha

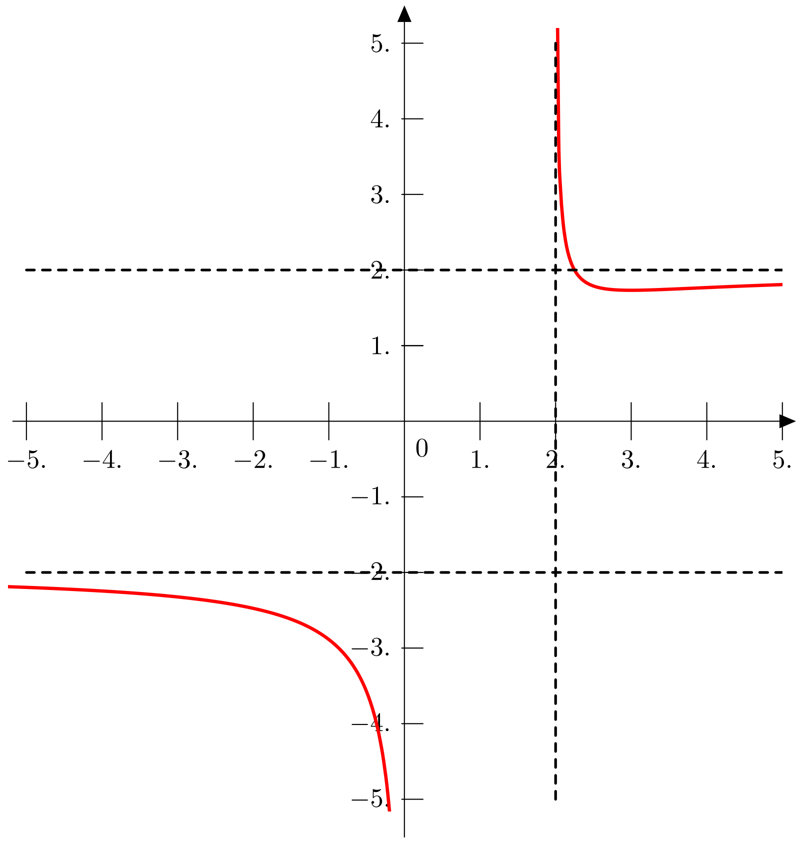
$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x^2-2x)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2-2x)^{1/2}(2x-2)(x-3)}{(x^2-2x)^3} \\
&= \frac{x^2-2x-3(x^2-4x+3)}{(x^2-2x)^{5/2}} = \frac{-2x^2+10x-9}{(x^2-2x)^{5/2}}.
\end{aligned}
$$

Si ha che

$$
f''(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{5-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{7}}{2}
$$

e quindi in questo intervallo la funzione è convessa, nel complementare è concava. Tenendo conto del dominio della funzione e tenendo conto che $2 < \sqrt{7} < 3$ si ha che la funzione data è concava per $x < 0$ e $x > \frac{5+\sqrt{7}}{2}$ (che è un valore compreso tra 7/2 e 4 ed è convessa se $2 < x < \frac{5+\sqrt{7}}{2}$.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 14.2.10. (Esame del 20.02.20)** *Si studi la funzione*

$$
f(x) = x^{-1}\sqrt{1-x}\,e^{-x/3}
$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

➼ **R.**

1) DOMINIO: la funzione è ben definita se lo è la radice e se il denominatore non si annulla. Quindi le condizioni da imporre sono:

$$\begin{array}{ll} x \leq 1 & \text{esistenza radice} \\ x \neq 0 & \text{esistenza denominatore} \end{array}$$

Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1, \;\; x \neq 0\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione data non presenta simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: il numeratore è sempre positivo e si annulla per $x = 1$, quindi il segno della funzione è determinato dal denominatore: $f(x) > 0$ se $0 < x \leq 1$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$.

4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

dalla gerarchia degli infiniti. La presenza dell'esponenziale esclude eventuali asintoti obliqui. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

dunque l'asse delle ordinate è asintoto verticale per f.

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{1-x}}e^{-x/3} + \sqrt{1-x}e^{-x/3}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]x - \sqrt{1-x}e^{-x/3}}{x^2} \\ &= \frac{e^{-x/3}}{6x^2\sqrt{1-x}}[-3x - 2(1-x)x - 6(1-x)] = \frac{e^{-x/3}}{6x^2\sqrt{1-x}}[2x^2 + x - 6]. \end{aligned}$$

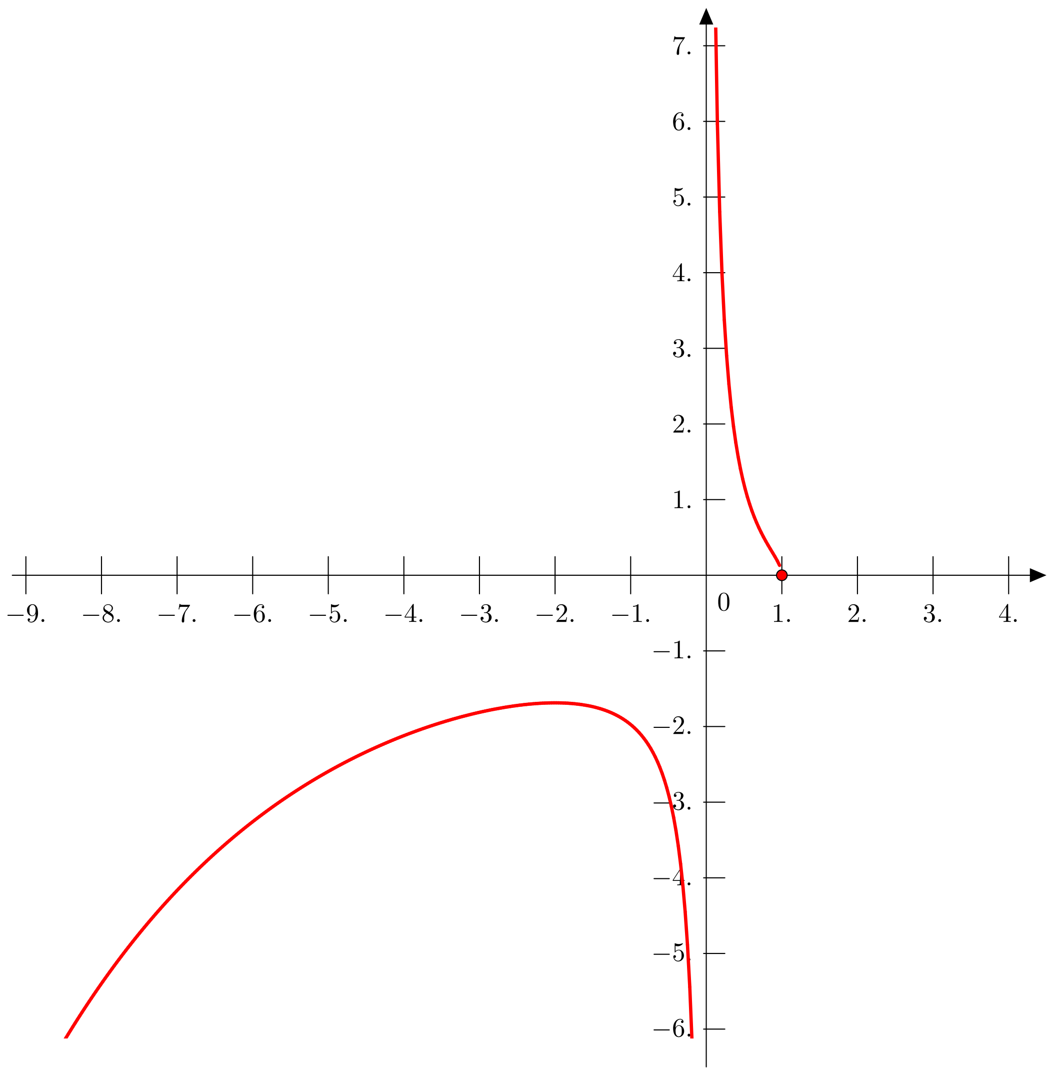
A questo punto

$$f'(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -2 \vee x > \frac{3}{2}$$

quindi, tenendo conto del dominio di f si ha che f è crescente se $x < -2$ e decrescente se $-2 < x < 0$ e se $0 < x \leq 1$.

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❐ **Esercizio 14.2.11. (Esame del 24.06.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita quando esiste la radice e non si annulla il denominatore. Complessivamente

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 2\}.$$

2) SIMMETRIE: la funzione non presenta simmetrie

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è sempre positiva, eventualmente nulla (va

indagato il comportamento in zero con un passaggio al limite).
4) LIMITI E ASINTOTI: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

dunque $x = 2$ è asintoto verticale per f. Indaghiamo la presenza di eventuali asintoti obliqui. Consideriamo prima il caso $x \to +\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 1$$

e inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}\,\frac{x^2 + x\sqrt{x^2-2x}}{x^2 + x\sqrt{x^2-2x}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-2x)}{\sqrt{x^2-2x}(x^2+x\sqrt{x^2-2x})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}}\,x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = 1\end{aligned}$$

quindi la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo per f per $x \to +\infty$.
Studiamo ora il caso $x \to -\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = -1$$

e inoltre (tenendo conto che stavolta $|x| = -x$ quindi $\sqrt{x^2-2x} = -x\sqrt{1-\frac{2}{x}}$)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2-2x}}\,\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-2x}}{x^2 - x\sqrt{x^2-2x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-2x)}{\sqrt{x^2-2x}(x^2-x\sqrt{x^2-2x})} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}\,x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = -1\end{aligned}$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x\sqrt{x^2-2x} - \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2)x^2}{x^2-2x} \\ &= \frac{8x(x^2-2x) - x^2(x-1)}{(x^2-2x)^{3/2}} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 - x^3 + x^2}{(x^2-2x)^{3/2}} \\ &= \frac{x^3-3x^2}{(x^2-2x)^{3/2}} = \frac{x^2(x-3)}{(x^2-2x)^{3/2}}\end{aligned}$$

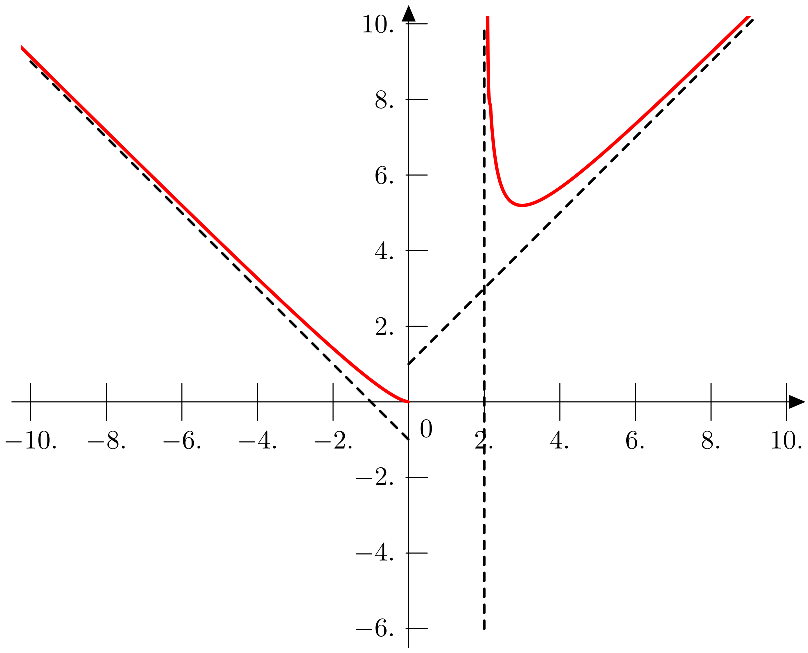
pertanto $f'(x) > 0$ se $x > 3$ e $f'(x) < 0$ se $x < 3$. Quindi f è crescente se $x > 3$ e f decrescente se $x < 3$. Pertanto $x = 3$ è punto di minimo locale per f.

6) DERIVATA SECONDA: si ottiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2-6x)(x^2-2x)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2-2x)^{1/2}(2x-2)(x^3-3x^2)}{(x^2-2x)^{3/2}} \\ &= \frac{(3x^2-6x)(x^2-2x) - 3(x-1)(x^3-3x^2)}{(x^2-2x)^{3/2}} \\ &= \frac{3x^4-6x^3-6x^3+12x^2-3x^4+9x^3+3x^3-9x^2}{(x^2-2x)^{3/2}} \\ &= \frac{3x^2}{(x^2-2x)^{3/2}} \end{aligned}$$

quindi la funzione data è sempre convessa.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❐ **Esercizio 14.2.12. (Esame del 23.07.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{x\sqrt{1-x}}{x+1}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la radice è ben definita se l'argomento è non negativo e la frazione è ben definita

se il denominatore è diverso da zero. Dunque occorre imporre che $x \leq 1$ (esistenza radice) e $x \neq -1$ (esistenza frazione) e si ha

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1, \;\; x \neq -1\}$$

2) simmetrie: la funzione data non presenta simmetrie.
3) intersezioni con assi e segno: la funzione data è positiva se $x < -1 \vee 0 < x < 1$ e negativa se $-1 < x < 0$. Inoltre $f(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = 1$.
4) limiti e asintoti: studiamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$$

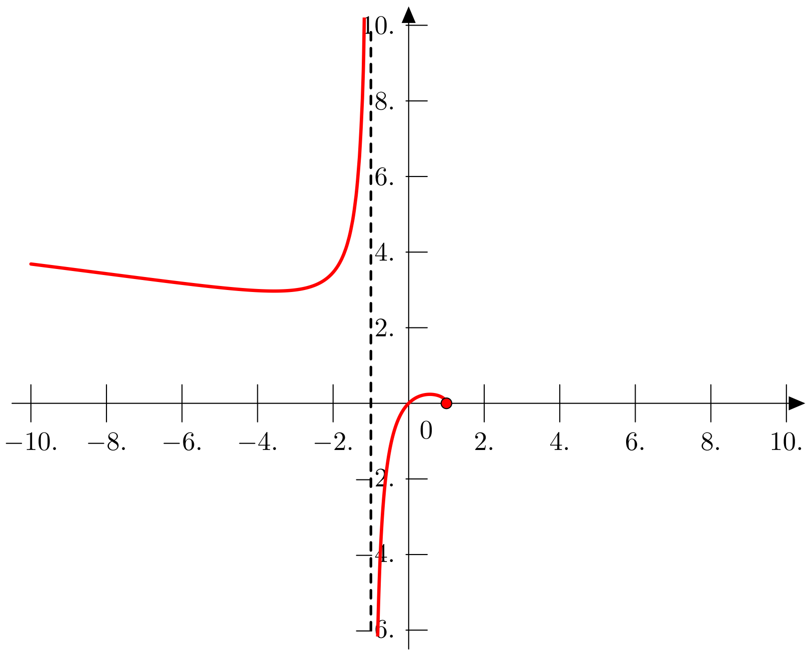
Quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale per f. D'altra parte, essendo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

non esiste l'asintoto obliquo per f.
5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \frac{[\sqrt{1-x} - \frac{x}{\sqrt{1-x}}](x+1) - x\sqrt{1-x}}{(x+1)^2} = \frac{(1-2x)(x+1) - x(1-x)}{\sqrt{1-x}(x+1)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{\sqrt{1-x}(x+1)^2}$$

quindi $f'(x) > 0$ (e dunque f crescente) se $-1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$ mentre $f'(x) < 0$ (e dunque f decrescente) se $x < -1-\sqrt{2} \vee -1+\sqrt{2} < x < 1$. Dunque $x = -1-\sqrt{2}$ è punto di minimo locale mentre $x = -1+\sqrt{2}$ è punto di massimo locale per f.
6) derivata seconda: non richiesta.
7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



❐ **Esercizio 14.2.13. (Esame del 08.09.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la radice è ben definita se

$$x^2 - |x| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - x \geq 0 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + x \geq 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x(x-1) \geq 0 & \text{se } x \geq 0 \\ x(x+1) \geq 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

pertanto

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x \geq 1\}.$$

Si ha dunque

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & \text{se } x \geq 1 \\ \sqrt{x^2 + x} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

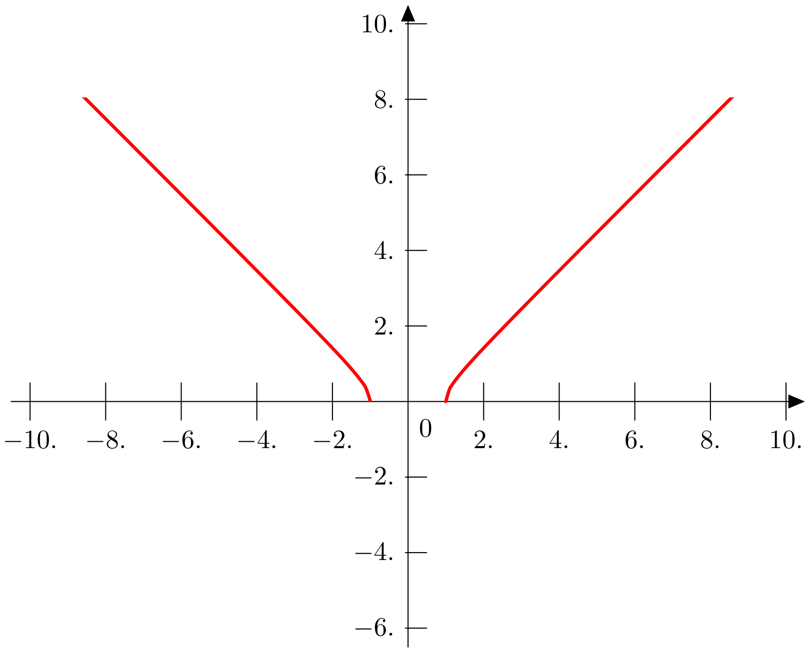
2) SIMMETRIE: la funzione data è pari
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione data è sempre non negativa e inoltre $f(1) = f(-1) = 0$
4) LIMITI E ASINTOTI: si può studiare solo il caso $x \geq 1$ e dedurre il comportamento nel caso $x \leq -1$ grazie alla simmetria della funzione. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{|x|}{x^2}} = +\infty$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

quindi $f'(x) > 0$ se $x > 1$ e $f'(x) < 0$ se $x < -1$ e pertanto f è crescente se $x > 1$ e decrescente se $x < -1$.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 14.2.14. (Esame del 14.12.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \sqrt{|x-1|} - \sqrt{x}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la prima radice è sempre ben definita, la seconda è ben definita se $x \geq 0$ quindi

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

Si ha inoltre

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} & \text{se } x \geq 1 \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie per la funzione f

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: si ha $f(0) = 1$, $f(1/2) = 0$. Studiamo ora il segno di f: si ha

$$\sqrt{|x-1|} \geq \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| \geq x$$

Ora, se $x \geq 1$ questo porterebbe a $x - 1 \geq x$ impossibile, mentre se $x < 1$ si ottiene $x \leq 1/2$. Pertanto $f \geq 0$ se $0 \leq x \leq 1/2$.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x}} = 0^-$$

quindi $x = 0$ è asintoto orizzontale per f.

5) DERIVATA PRIMA: se $x > 1$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x(x-1)}}\right)\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x(x-1)}(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}$$

quindi f crescente se $x > 1$. Invece se $0 < x < 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

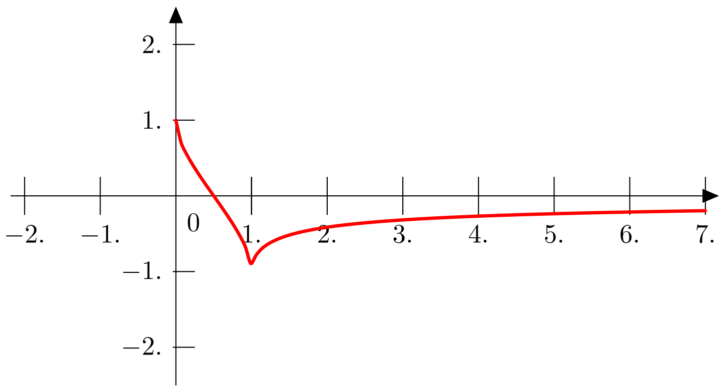
pertanto f decrescente se $0 < x < 1$.

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$$

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 14.2.15. (Esame del 23.06.21)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x}}$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la radice è ben definita se l'argomento è non negativo, ma il denominatore non si deve annullare, quindi

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee x > 0\}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: $f(0) = 0$; inoltre $f > 0$ se $x > 0$ mentre $f < 0$ se $x < 0$.

4) limiti e asintoti: dalla gerarchia degli infiniti e degli infinitesimi si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

5) derivata prima: si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2\sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2x+1)x^3}{x^2+x} \\ &= \frac{6x^2(x^2+x) - (2x+1)x^3}{2(x^2+x)^{3/2}} \\ &= \frac{6x^4+6x^3-2x^4-x^3}{2(x^2+x)^{3/2}} = \frac{4x^4+5x^3}{2(x^2+x)^{3/2}} \end{aligned}$$

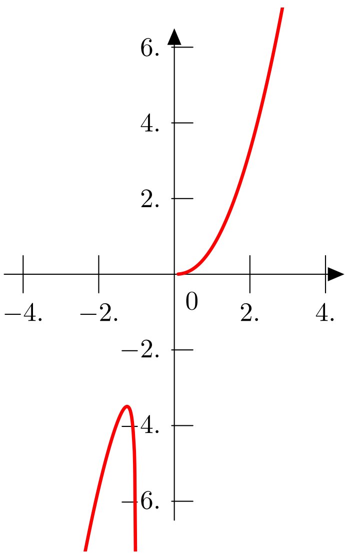
A questo punto $f'(x) > 0$ se $4x^4+5x^3 > 0$ cioè se $x^3(4x+5) > 0$ da cui $x < -5/4 \vee x > 0$. Quindi la funzione data è crescente se $x < -5/4$ oppure se $x > 0$ e decrescente nell'intervallo complementare.

6) derivata seconda: si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(16x^3+15x^2)2(x^2+x)^{3/2} - 2\,\frac{3}{2}(x^2+x)^{1/2}\,(2x+1)(4x^4+5x^3)}{4(x^2+x)^3} \\ &= \frac{(2x^2+2x)(16x^3+15x^2) - (6x+3)(4x^4+5x^3)}{4(x^3+x)^{5/2}} \\ &= \frac{32x^5+30x^4+32x^4+30x^3-24x^5-30x^4-12x^4-15x^3}{4(x^3+x)^{5/2}} \\ &= \frac{8x^5+20x^4+15x^3}{4(x^3+x)^{5/2}} = \frac{x^3(8x^2+20x+15)}{4(x^3+x)^{5/2}} \end{aligned}$$

da cui $f''(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



14.2.4. Funzioni con esponenziali

❐ **Esercizio 14.2.16. (Esame del 12.09.17)** *Studiare la seguente funzione*

$$f(x) = e^{x+\frac{1}{x}} = \exp\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la funzione esponenziale è sempre ben definita, a patto che lo sia il suo argomento; pertanto la funzione data è ben definita se il denominatore della frazione $\frac{1}{x}$ non si annulla quindi deve essere $x \neq 0$.
Si ha allora

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione esponenziale, quando esiste, è sempre positiva.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = e^{x+\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

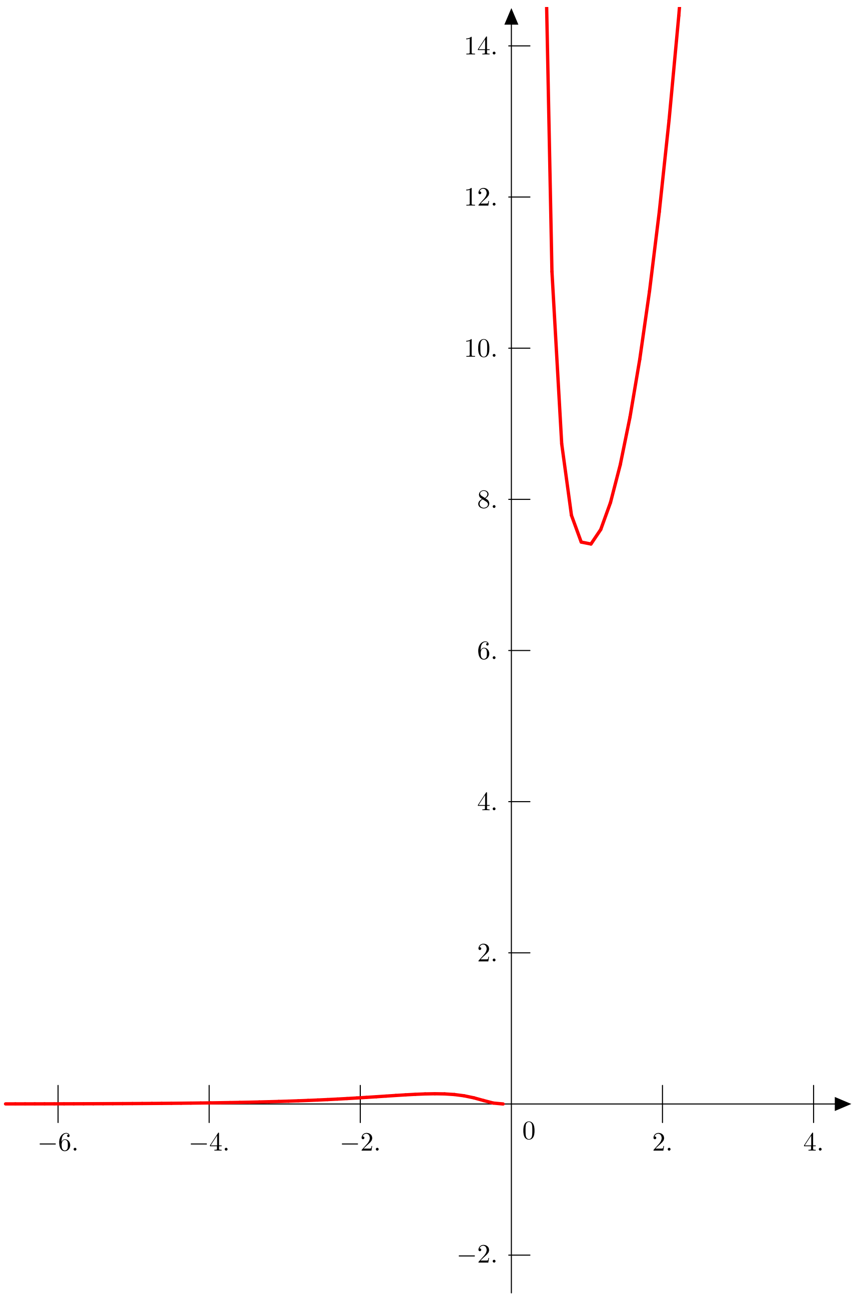
dunque

$$f'(x) > 0 \quad \leftrightarrow \quad x < -1 \vee x > 1$$

pertanto se $x < -1 \vee x > 1$ la funzione data è crescente, e decrescente nell'intervallo complementare.

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 14.2.17 (Esame del 11.09.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

➻ **R.**

1) DOMINIO: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che i denominatori non si annullino. Si ottiene $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

2) simmetrie: Si ha

$$f(-x) = \left(\frac{-x}{3} - \frac{1}{-x}\right) e^{-1/(-x)^2} = \left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = -f(x),$$

quindi la funzione è dispari. Possiamo allora limitarci a studiarla per $x > 0$ per poi rifletterne il grafico simmetricamente rispetto all'origine.

3) intersezioni con gli assi e segno: Non ci sono intersezioni con l'asse y poichÃĽ $x = 0$ non appartiene al dominio. Inoltre quando $x > 0$ si ha $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$, quindi c'è un'intersezione nel punto $(\sqrt{3}, 0)$. Infine $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}$.

4) limiti e asintoti: Calcolando i limiti agli estremi del dominio (limitatamente alla semiretta $x > 0$) otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{3}\, e^{-1/x^2} - \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = +\infty,\\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x^2} = \frac{1}{3} := m,\\
&\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} - \frac{x}{3} = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-1/x^2} - 1\right) \frac{x}{3} - \frac{1}{x}\, e^{-1/x^2}\\
&\qquad = \lim_{x\to+\infty} -\frac{e^{-1/x^2} - 1}{-1/x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{3} - \frac{1}{x}\, e^{-1/x^2} = 0 := q,
\end{aligned}$$

da cui un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{x}{3}$.

5) derivata prima: Si ottiene

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x^2}\,(x^4 + 5x^2 - 6)}{3x^4}$$

per $x > 0$, mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}\,(x^4 + 5x^2 - 6)}{3x^4} = 0.$$

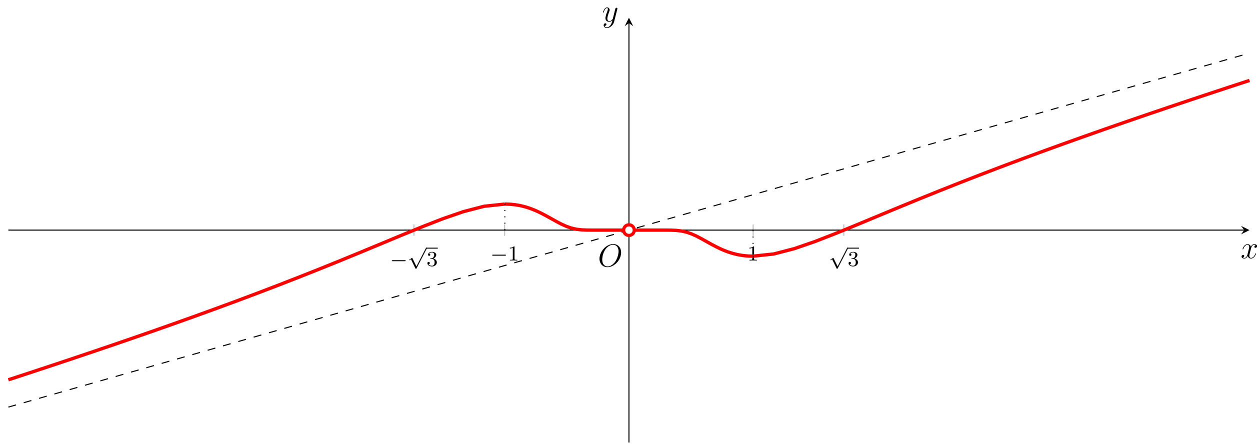
Inoltre

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Sulla semiretta $]0, +\infty]$ la funzione è quindi decrescente in $]0, 1]$ e crescente quando $x > 1$. Ha un punto di minimo locale in $x = 1$.

6) derivata seconda: non richiesta.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



14.2.5. Funzioni con esponenziali e valori assoluti

❒ **Esercizio 14.2.18. (Esame del 06.05.16)** *Sia data la funzione*

$$f(x) = |x|e^{\frac{1}{2-|x|}} = |x| \exp\left(\frac{1}{2-|x|}\right).$$

Si disegni il grafico qualitativo della funzione, determinando in particolare i limiti agli estremi del dominio, e lo studio della derivata prima; evidenziare eventuali punti angolosi studiando il comportamento della derivata prima destra e sinistra (se esistono).

R. Innanzitutto osserviamo che la funzione è definita se $x \neq \pm 2$ ed è pari, pertanto basta studiarla nel caso $x \geq 0$ e poi ricavare il grafico rimanente attraverso una simmetria rispetto all'asse delle y. Pertanto se $x \geq 0$ si ha semplicemente

$$f(x) = xe^{\frac{1}{2-x}}.$$

Si ha $f(0) = 0$ e inoltre

$$\lim_{x\to 2^- f(x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

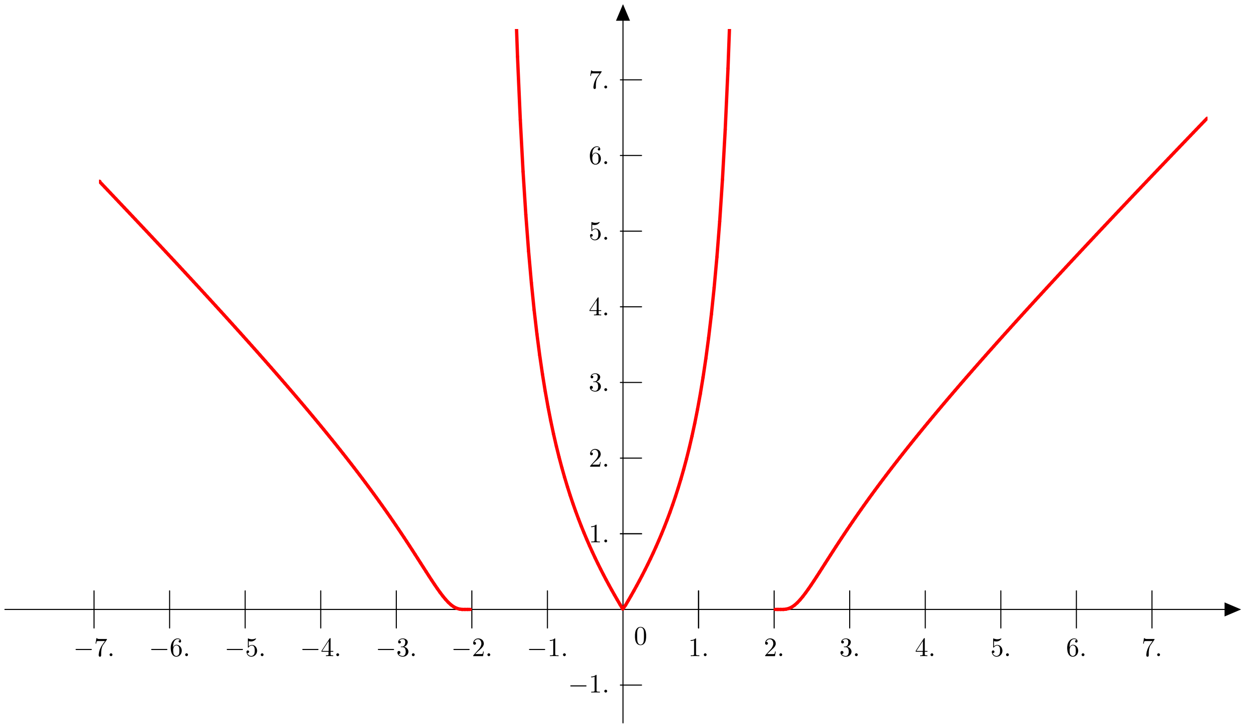
$$f'(x) = \left(1 + \frac{x}{(2-x)^2}\right) e^{\frac{1}{2-x}} = \frac{x^2 - 3x + 4}{(2-x)^2} e^{\frac{1}{2-x}}$$

quindi, essendo $x^2 - 3x + 4 > 0$ per ogni $x > 0$, si ha che $f'(x) > 0$ per ogni $x \neq 2$ da cui la funzione risulta crescente sia per $0 < x < 2$ che per $x > 2$.

Un'analisi successiva dello studio della derivata seconda avrebbe portato a osservare un cambio di concavità se $x > 2$. Infine osservando che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = e^{\frac{1}{2}} \neq -e^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

possiamo dire che la funzione f ammette in $x = 0$ un punto angoloso. In figura è evidenziato il grafico qualitativo di f.



❒ **Esercizio 14.2.19.** **(Esame del 19.12.16)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{e^{|x+1|}}{1+x^2}$$

Non è richiesto l'analisi della derivata seconda. Evidenziare eventuali punti angolosi calcolando espicitamente la retta tangente in un intorno destro e sinistro del punto.

R. La funzione data è ben definita su tutto l'asse reale; inoltre è sempre continua e strettamente positiva. Non ci sono dunque intersezioni con l'asse delle x mentre $f(0) = e$. Non ci sono simmetrie (la funzione non è né pari né dispari).
Vediamo i limiti agli estremi del dominio: dalla gerarchia degli infiniti si vede immediatamente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Sempre per la gerarchia degli infiniti non ci aspettiamo che ci possano essere asintoti obliqui. Studiamo il segno della derivata prima. Distinguiamo due casi:
sia $x > -1$: allora

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{e^{x+1}(1+x^2) - 2xe^{x+3}}{(1+x)^2} = \frac{e^{x+1}(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^{x+1}(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$$

quindi la funzione è sempre crescente se $x > -1$. Osserviamo che in $x = 1$ si ha $f'(x) = 0$ quindi la funzione ha tangente orizzontale in quel punto.
Sia ora $x < -1$. Si ha

$$f(x) = \frac{e^{-x-1}}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{-e^{-x-1}(1+x^2) - 2xe^{-x-1}}{(1+x)^2} = -\frac{e^{-x-1}(x+1)^2}{(1+x^2)^2}$$

quindi se $x < -1$ la funzione data è sempre decrescente.
Osserviamo che

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = 0$$

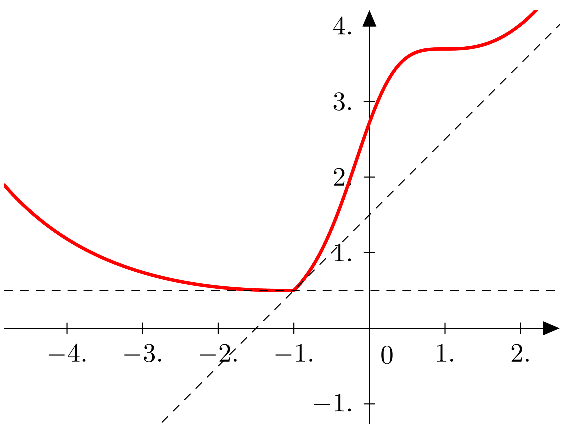
quindi in $x = -1$ da sinistra la funzione ha tangente orizzontale di equazione $y = f(-1) = 1/2$. Invece se $x > -1$ allora

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = 1$$

quindi l'equazione della retta tangente al grafico per $x \to -1^+$ è

$$y = x + \frac{3}{2}.$$

Si evidenzia pertanto la presenza di un punto angoloso. Il grafico è quello rappresentato in figura.



❒ **Esercizio 14.2.20. (Esame del 19.07.17)** *Studiare la seguente funzione*

$$f(x) = e^{\frac{x}{|x|-1}} = \exp\left(\frac{x}{|x|-1}\right)$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la funzione esponenziale è ben definita su tutto l'asse reale, quindi è sufficiente che il suo esponente (che è una frazione) sia ben definito, il che vale se $x \neq \pm 1$.
Si ha

$$f(x) = e^{\frac{x}{|x|-1}} = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}} & x \geq 0 \\ e^{\frac{x}{-x-1}} & x < 0 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione data, quando esiste, è sempre positiva.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1/e$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

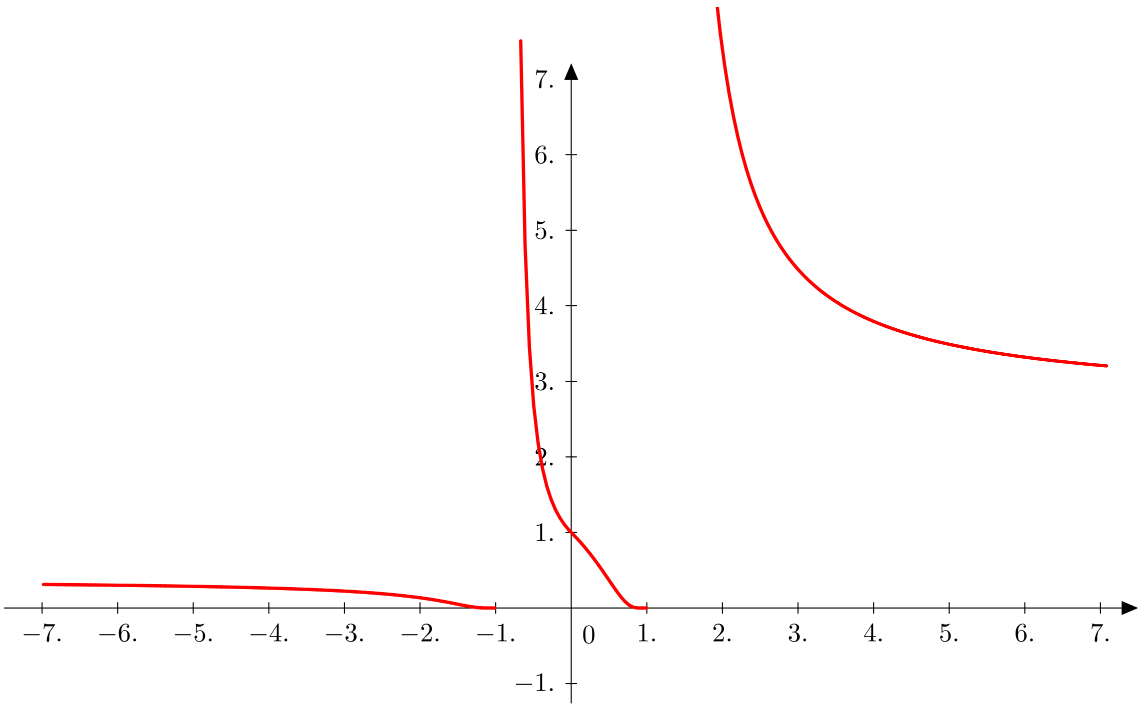
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-1}}\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right] & x \geq 0 \\ e^{\frac{x}{-x-1}}\left[-\dfrac{1}{(x-1)^2}\right] & x < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è sempre decrescente.

6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.

7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 14.2.21. (Esame del 18.12.17)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = (x+2)e^{-|x|}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. È richiesto lo studio della derivata seconda.

R. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$. Si ha $f(x) > 0$ se $x > -2$. Inoltre

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{-x} & x \geq 0 \\ (x+2)e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

La funzione risulta continua su tutto il suo dominio perché composizione di funzioni continue. Andiamo a calcolare i limiti agli estremi del dominio. Dalla gerarchia degli infiniti si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{-x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)e^{x} = 0.$$

Studiamo il segno della derivata prima. Si ha: (attenzione: non si deriva il valore assoluto!! Occorre separare i due casi)

$$f'(x) = \begin{cases} -(x+1)e^{-x} & x > 0 \\ (x+3)e^{x} & x < 0. \end{cases}$$

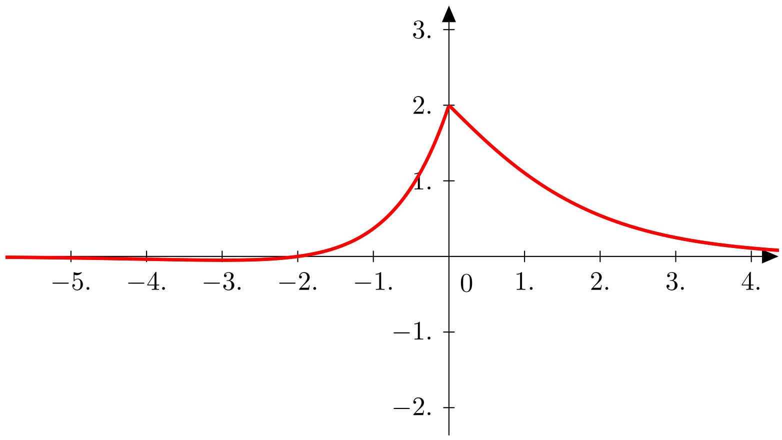
A questo punto osserviamo che se $x > 0$ allora $f'(x) < 0$ e dunque la funzione è sempre decrescente; invece se $x < 0$ allora $f'(x) = 0$ se $x = -3$ che rappresenta un punto di minimo locale per f. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 3$$

quindi $x = 3$ rappresenta un punto angoloso per f.
Concludiamo infine andando a studiare il segno della derivata seconda di f. Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ (x+4)e^x & x < 0. \end{cases}$$

quindi la funzione è convessa se $x > 0$ mentre risulta convessa se $x > -4$ e concava se $x < -4$.
Il grafico qualitativo è rappresentato in figura. Notate come il valore del minimo locale è molto prossimo a zero.



❒ **Esercizio 14.2.22. (Esame del 25.01.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = |x^2 - 1|\, e^{2x}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Evidenziare eventuali punti angolosi. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.
1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = |x^2 - 1|\, e^{2x} = \begin{cases} (x^2-1)e^{2x} & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ (1-x^2)e^{2x} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

2) simmetrie: non ci sono simmetrie.

3) intersezioni con assi e segno: la funzione data è sempre positiva.

4) limiti e asintoti: si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x^2 + x - 1)e^{2x} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ -2(x^2 + x - 1)e^{2x} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

Pertanto se $x < -1 \vee x > 1$ si ha $f'(x) > 0$ se $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > 1$ (sarebbe $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ma siamo nella zona dove $x > 1$) quindi $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo locale per f.
D'altra parte, se $-1 < x < 1$ in maniera del tutto analoga si ottiene che $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ è punto di massimo locale per f.
Inoltre si ha che

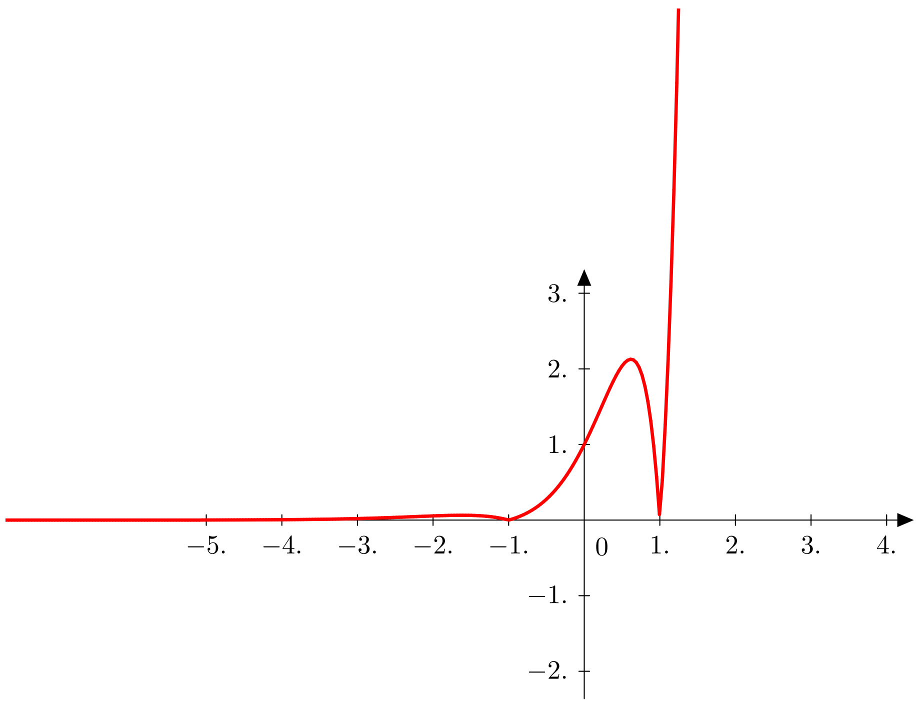
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2e^2 \qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -2e^2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = 2e^{-2} \qquad \lim_{x\to -1^-} f'(x) = -2e^{-2}$$

quindi possiamo notare la presenza di due punti angolosi.

6) derivata seconda: non è richiesta.

7) grafico: il grafico qualitativo è riportato in figura



❒ **Esercizio 14.2.23. (Esame del 26.06.18)**

a) Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{|e^x - 2|}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. Non è richiesta la derivata seconda.

b) Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x|} - 2}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. Non è richiesta la derivata seconda.

R.

Iniziamo dalla funzione a). Quindi consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{|e^x - 2|}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \begin{cases} \dfrac{e^x - 2}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } e^x \geq 2 \\ \dfrac{2 - e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } e^x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{e^x - 2}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } x \geq \log 2 \\ \dfrac{2 - e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} & \text{se } x < \log 2 \end{cases}$$

1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$.

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è sempre non negativa. Inoltre $f(\log 2) = 0$ e $f(0) = 1/\sqrt{2}$.

4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 2}{\sqrt{e^{2x}+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x\sqrt{1+\frac{1}{e^{2x}}}} = 1$$

e d'altra parte

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}} = 2$$

perché $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

5) DERIVATA PRIMA: si ha, se $x > \log 2$

$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}e^{2x}\,2\,(e^x - 2)}{e^{2x}+1} = \frac{e^x(e^{2x}+1) - e^{2x}(e^x - 2)}{(e^{2x}+1)^{3/2}} = \frac{e^x(1+2e^x)}{(e^{2x}+1)^{3/2}}$$

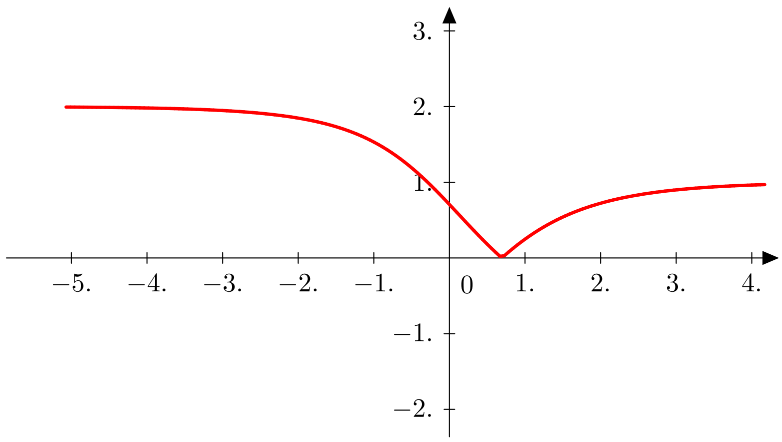
dunque se $x > \log 2$ la funzione data è sempre crescente. D'altra parte se $x < \log 2$

$$f'(x) = \frac{-e^x\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}}e^{2x}\,2\,(2 - e^x)}{e^{2x}+1} = \frac{-e^x(e^{2x}+1) - e^{2x}(2 - e^x)}{(e^{2x}+1)^{3/2}} = \frac{-e^x(1+2e^x)}{(e^{2x}+1)^{3/2}}$$

pertanto se $x < \log 2$ la funzione data è sempre decrescente.
Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x \to (\log 2)^+} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \lim_{x \to (\log 2)^-} f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

quindi in $x = \log 2$ c'è un punto angoloso.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è evidenziato in figura.



Consideriamo ora la funzione b). Sia dunque

$$f(x) = \frac{e^{|x|} - 2}{\sqrt{e^{2x} + 1}} = \begin{cases} \dfrac{e^x - 2}{\sqrt{e^{2x} + 1}} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{2 - e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$.
2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è positiva se $e^{|x|} > 2$ cioè se $|x| > \log 2$ dunque se $x < -\log 2 \vee x > \log 2$.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 2}{\sqrt{e^{2x} + 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2x}}}} = 1$$

mentre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} - 2}{\sqrt{e^{2x} + 1}} = +\infty$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha, se $x > 0$

$$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}} e^{2x}\, 2\,(e^x - 2)}{e^{2x}+1} = \frac{e^x(e^{2x}+1) - e^{2x}(e^x-2)}{(e^{2x}+1)^{3/2}} = \frac{e^x(1+2e^x)}{(e^{2x}+1)^{3/2}}$$

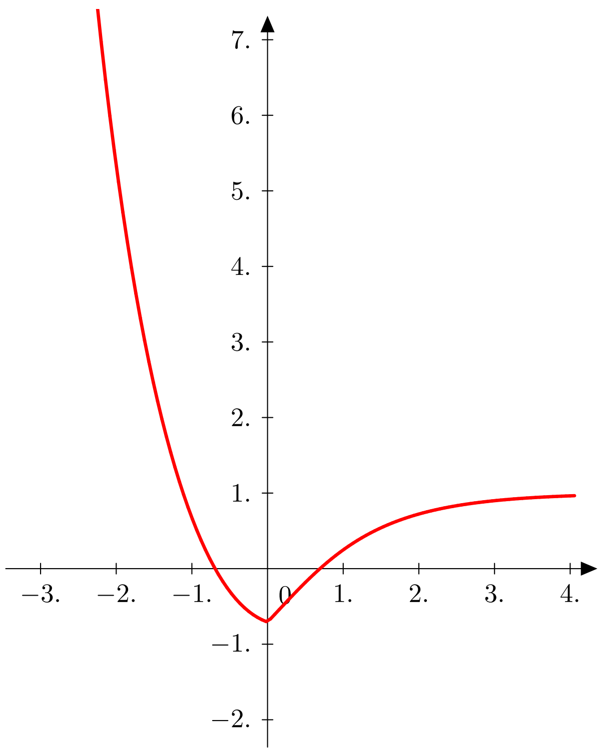
dunque se $x > 0$ la funzione data è sempre crescente. D'altra parte se $x < 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-e^{-x}\sqrt{e^{2x}+1} - \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}+1}} e^{2x}\, 2\,(e^{-x} - 2)}{e^{2x}+1} = \frac{-e^{-x}(e^{2x}+1) - e^{2x}(e^{-x}-2)}{(e^{2x}+1)^{3/2}} \\ &= \frac{-2e^x - e^{-x} + 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^{3/2}} \end{aligned}$$

pertanto se $x < 0$ la funzione data è sempre decrescente.
Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

quindi in $x = 0$ c'è un punto angoloso.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è evidenziato in figura.



❒ **Esercizio 14.2.24. (Esame del 10.07.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \sqrt[3]{|e^{2x} - 1|}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) dominio: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = \sqrt[3]{|e^{2x} - 1|} = \begin{cases} \sqrt[3]{e^{2x} - 1} & \text{se } e^{2x} \geq 1 \\ \sqrt[3]{1 - e^{2x}} & \text{se } e^{2x} < 1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt[3]{e^{2x} - 1} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{1 - e^{2x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) simmetrie: non ci sono simmetrie.

3) intersezioni con assi e segno: la funzione è sempre non negativa; inoltre $f(0) = 0$.

4) limiti e asintoti: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

5) derivata prima: si ha

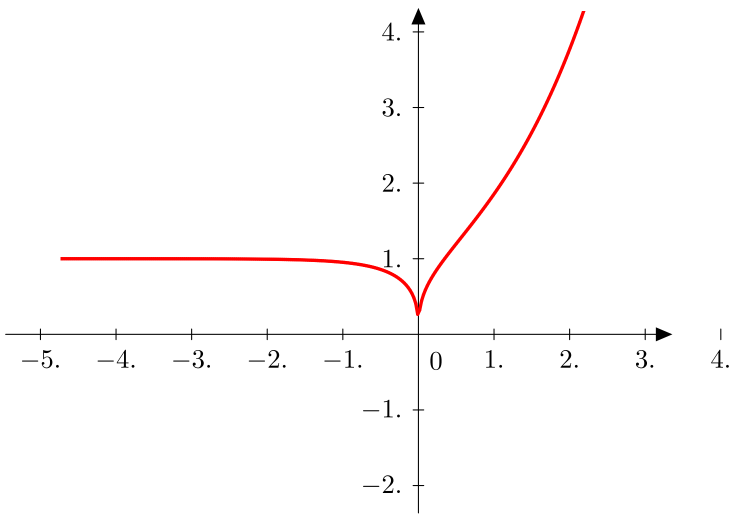
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(e^{2x} - 1)^2}} e^{2x}\, 2 & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1 - e^{2x})^2}} (-e^{2x})\, 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Inoltre si osserva che

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to0^-} f'(x) = -\frac{2}{3}$$

6) derivata seconda: non richiesta

7) grafico: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



❐ **Esercizio 14.2.25 (Esame del 18.06.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = e^{-x} \left|1 - e^{-2x}\right| .$$

R.

1) DOMINIO: $D_f = \mathbb{R}$.

2) SIMMETRIE: Si vede che $f(-x) \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è né pari né dispari.

3) INTERSEZIONI CON GLI ASSI E SEGNO: Si ha $f(0) = 0$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, quindi l'unica intersezione è l'origine. Inoltre $f(x) \geq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$.

4) LIMITI E ASINTOTI: Calcolando i limiti agli estremi del dominio otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} \left(1 - e^{-2x}\right) = 0,$$

da cui un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ (asse x), e

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \left(e^{-2x} - 1\right) = +\infty, \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x} \left(e^{-2x} - 1\right)}{x} = -\infty, \end{aligned}$$

quindi non c'è un asintoto obliquo quando $x \to -\infty$.

5) DERIVATA PRIMA: Si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 3e^{-3x} & x > 0, \\ -3e^{-3x} + e^{-x} & x < 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} -e^{-x} + 3e^{-3x} = 2,$$
$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} -3e^{-3x} + e^{-x} = -2,$$

quindi in $x = 0$ c'è un punto angoloso per f. Siccome inoltre

$$-e^{-x} + 3e^{-3x} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{\log 3}{2},$$

la funzione è sempre descrescente per $x < 0$, crescente in $]0, (\log 3)/2[$ e decrescente per $x > (\log 3)/2$. La funzione ha quindi un punto di massimo locale in $x = (\log 3)/2$ e un punto di minimo locale in $x = 0$.

6) derivata seconda: Si ottiene

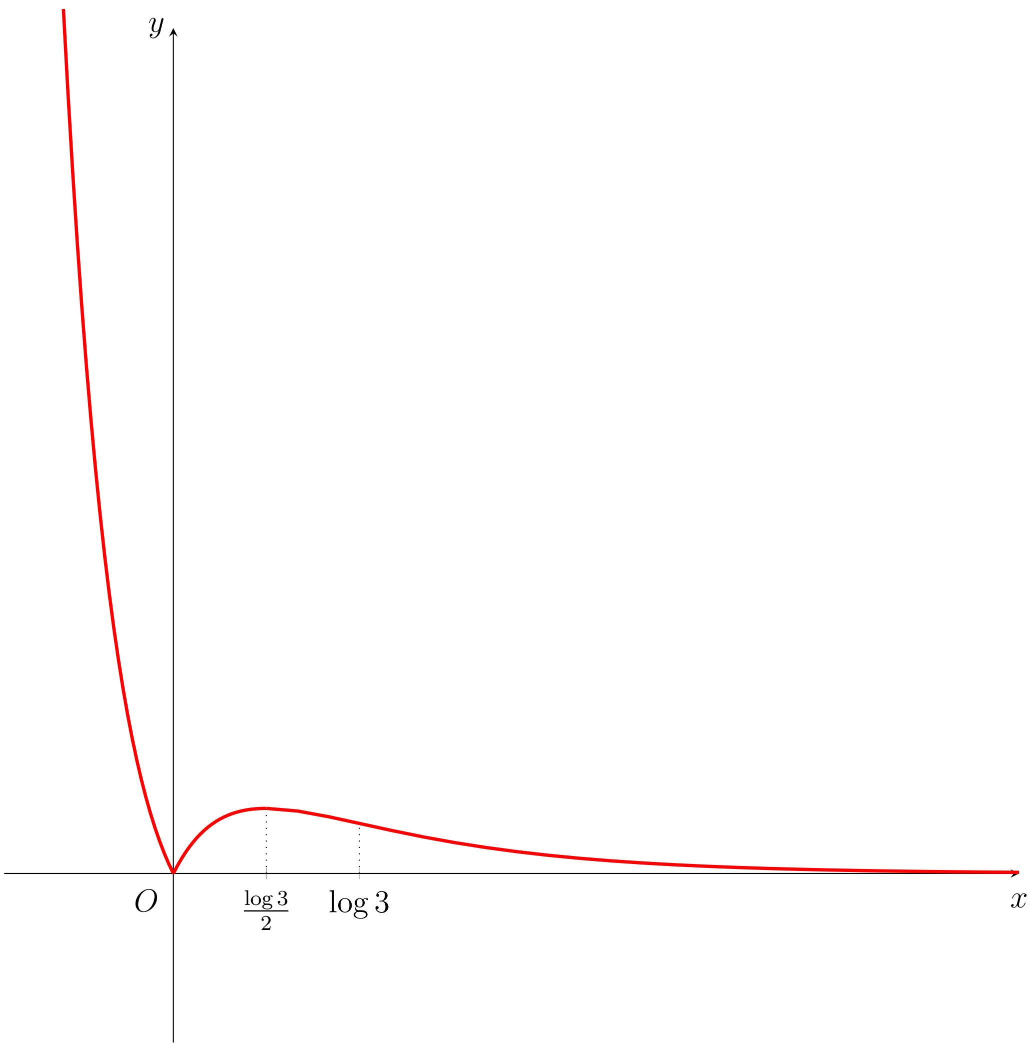
$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x} - 9e^{-3x} & x > 0, \\ 9e^{-3x} - e^{-x} & x < 0. \end{cases}$$

Siccome

$$e^{-x} - 9e^{-3x} > 0 \Leftrightarrow x > \log 3,$$

la funzione volge la concavità verso l'alto per $x < 0$, verso il basso in $]0, \log 3[$ e di nuovo verso l'alto per $x > \log 3$. In $x = \log 3$ la funzione ha quindi un punto di flesso.

7) grafico:



❒ **Esercizio 14.2.26. (Esame del 19.12.19)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = (1 - |x|)e^{-\frac{1}{2x}}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita se l'esponente dell'esponenziale non si annulla, quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}.$$

Si ha

$$f(x) = (1 - |x|)e^{-\frac{1}{2x}} = \begin{cases} (1-x)e^{-\frac{1}{2x}} & \text{se } x > 0 \\ (1+x)e^{-\frac{1}{2x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è positiva se $1 - |x| > 0$ cioè se $-1 < x < 1$ ed è negativa altrove
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

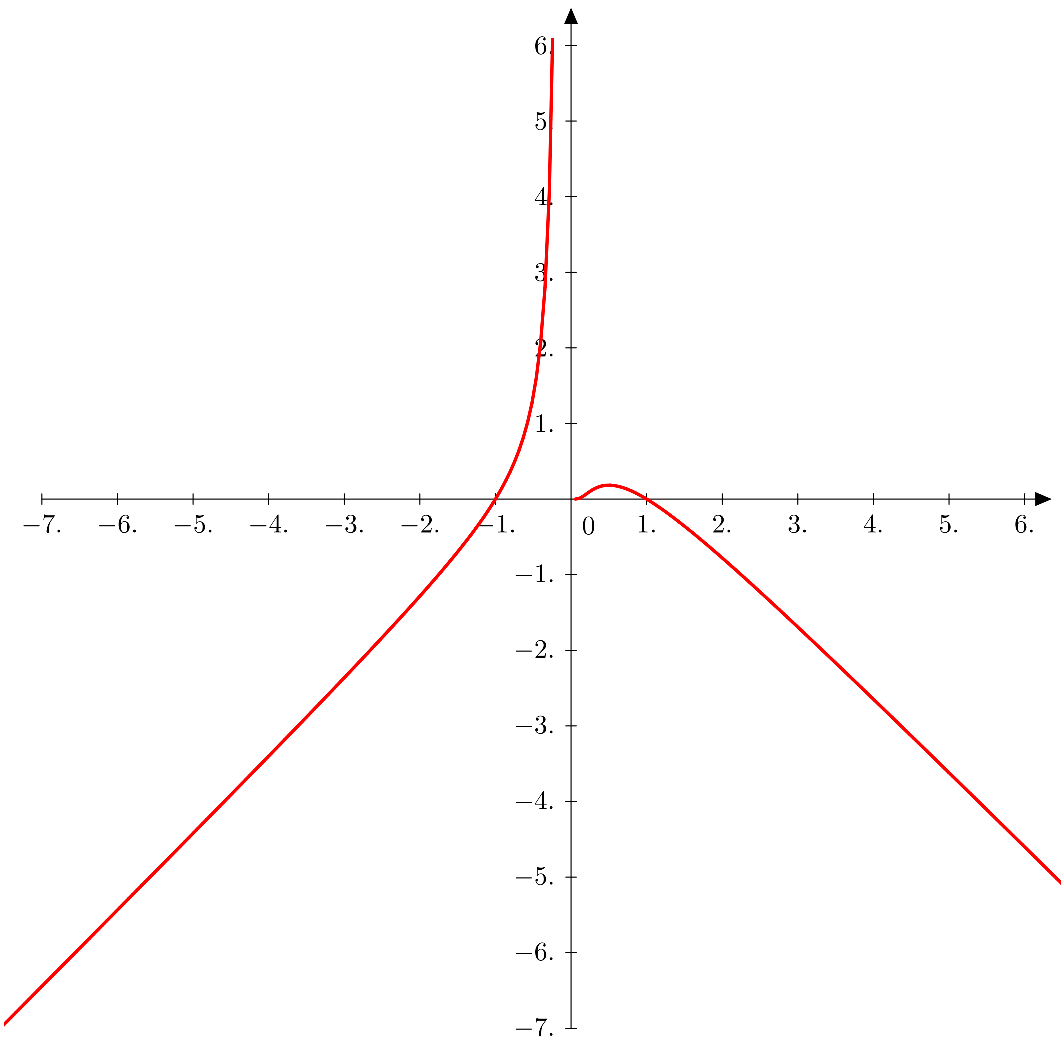
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

quindi l'asse delle ordinate è un asintoto verticale per $x \to 0^-$. D'altra parte la presenza del termine di tipo esponenziale esclude la presenza di asintoti obliqui.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-\frac{1}{2x}} + (1-x)e^{-\frac{1}{2x}}\dfrac{1}{2x^2} & \text{se } x > 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}} + (1+x)e^{-\frac{1}{2x}}\dfrac{1}{2x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2x}}\left(\dfrac{-2x^2+1-x}{2x^2}\right) & \text{se } x > 0 \\ e^{-\frac{1}{2x}}\left(\dfrac{2x^2+x+1}{2x^2}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

pertanto se $x > 0$ si ha che $f'(x) > 0$ se $-2x^2 - x + 1 > 0$ cioè se $-1 < x < 1/2$. Pertanto, tenendo conto della limitazione $x > 0$ si ha che $x = 1/2$ è punto di massimo locale per f. D'altra parte, se $x < 0$ si ottiene sempre $f'(x) > 0$ quindi la funzione è sempre crescente in questo intervallo.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



❐ **Esercizio 14.2.27. (Esame del 09.01.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{e^x \sqrt{x}}{|x| - 1}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda

R.

1) DOMINIO: la radice è ben definita se il suo argomento è non negativo, il denominatore deve essere diverso da zero, quindi

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1 \vee x > 1\}$$

Inoltre, siccome la funzione vive nella regione dove $x \geq 0$ si ha che $|x| = x$ e

$$f(x) = \frac{e^x \sqrt{x}}{x - 1}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: si ha che $f(x) > 0$ se $x > 1$.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

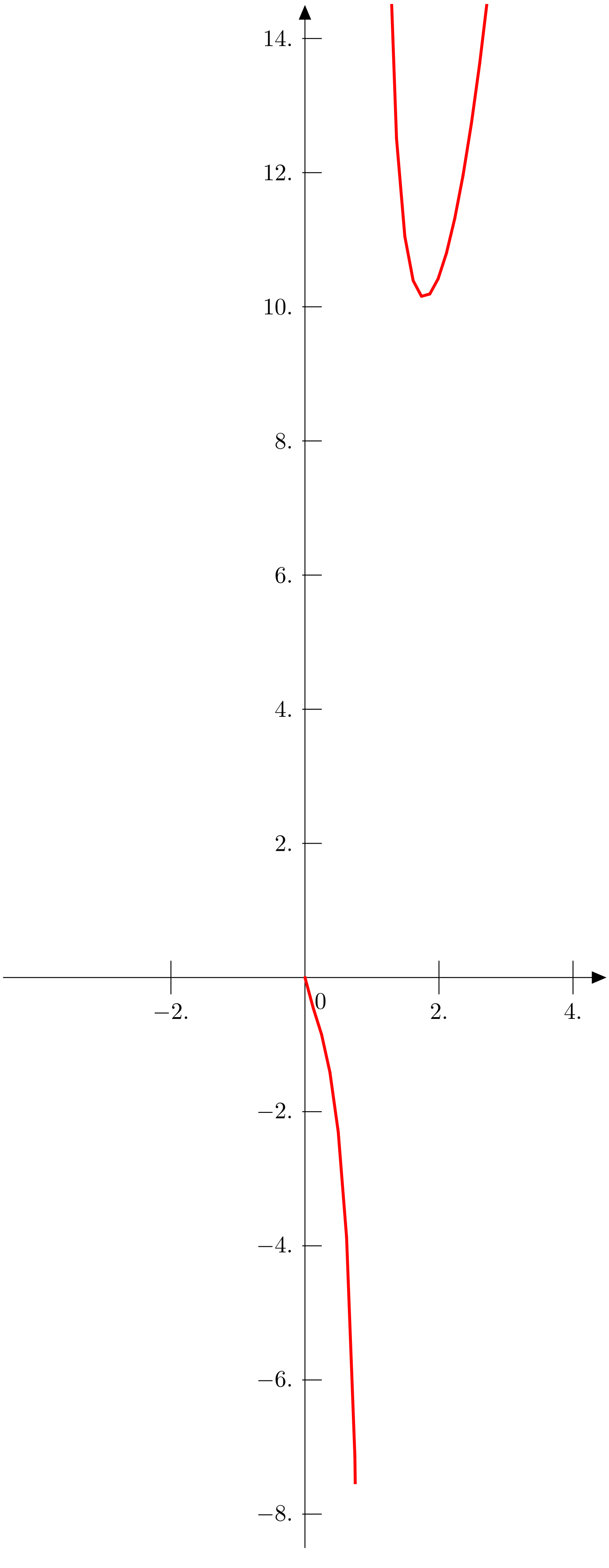
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

quindi $x = 1$ è asintoto verticale per f.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \frac{\left(e^x\sqrt{x} + e^x\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x-1) - e^x\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{e^x(2x^2-3x-1)}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

dunque $f'(x) > 0$ se $2x^2 - 3x - 1 > 0$ e tenendo conto della limitazione data dal dominio, questo vuol dire $x > \frac{3+\sqrt{17}}{4}$. Per cui in questo intervallo la funzione è crescente ed è decrescente altrove.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è riportato in figura.


14.
12.
10.
8.
6.
4.
2.
−2.
0
2.
4.
−2.
−4.
−6.
−8.

❒ **Esercizio 14.2.28. (Esame del 12.01.21)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-2}}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata se-conda.

R.

1) DOMINIO: l'esponenziale è una funzione ben definita dappertutto a patto che sia ben definito l'esponente, che è una frazione, dunque il denominatore non si deve annullare. Allora

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}.$$

Inoltre si ha

$$f(x) = e^{\frac{|x|}{x-2}} = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-2}} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{\frac{x}{2-x}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione dove esiste è sempre positiva.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{2-x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{x}{x-2}} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{x}{x-2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{x-2}} = e$$

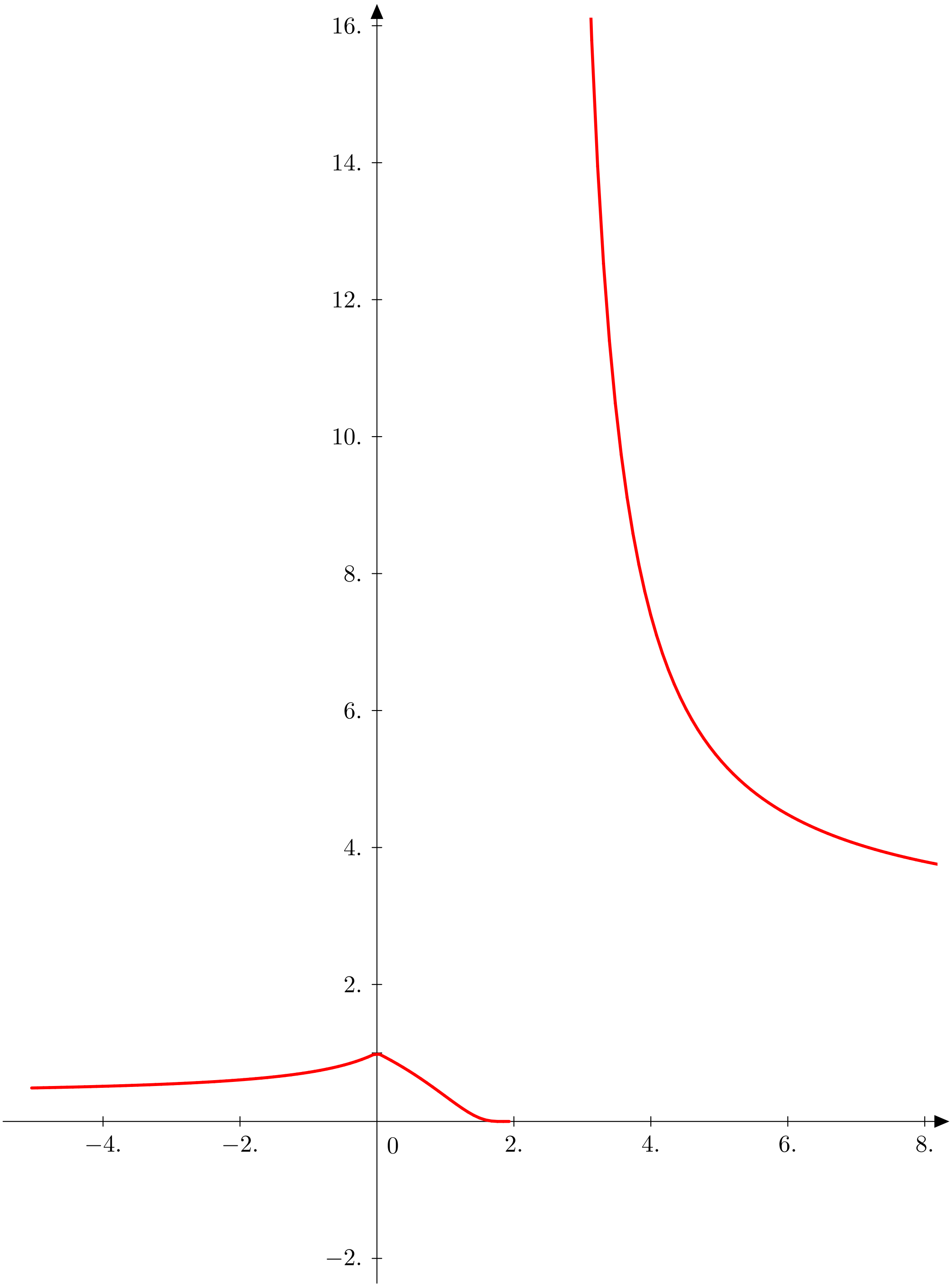
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{x-2}} \left(\frac{x-2-x}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{x}{x-2}} \left(\frac{2}{(x-2)^2}\right) & \text{se } x > 0 \\ e^{\frac{x}{2-x}} \left(\frac{-x+2+x}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{x}{2-x}} \left(\frac{2}{(x-2)^2}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi f è decrescente se $x > 0$ ed è crescente se $x > 0$.
Inoltre osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$$

pertanto si evidenzia in $x = 0$ un punto angoloso.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



❐ **Esercizio 14.2.29. (Esame del 02.02.21)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{1 + x^2}$$

determinandone il grafico qualitativo.

R.

1) DOMINIO: la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre si ha

$$f(x) = \frac{e^{|x|}}{1+x^2} = \begin{cases} \frac{e^x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{e^{-x}}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: la funzione è pari, pertanto è sufficiente studiare la funzione per $x \geq 0$ e dedurre il comportamento nella zona complementare per simmetria.
3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: $f(0) = 1$. Inoltre f è sempre positiva.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x(1+x^2)-2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{e^{-x}(1+x^2)-2xe^{-x}}{(1+x^2)^2} = -\frac{e^{-x}(x+1)^2}{(1+x^2)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

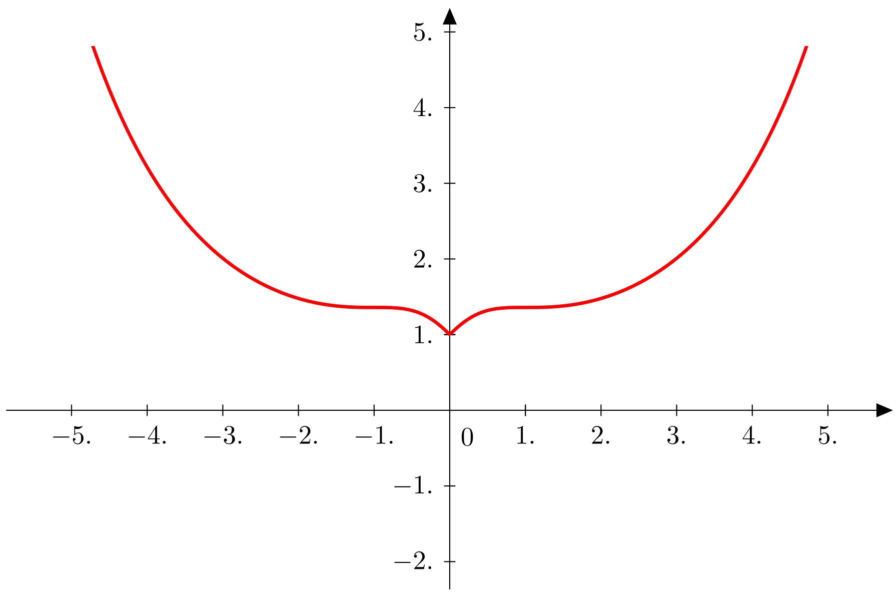
quindi f è decrescente per $x < 0$ e crescente se $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$$

pertanto in $x = 0$ si evidenzia un punto angoloso.
6) DERIVATA SECONDA: per $x > 0$ si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[e^x(x^2-2x+1)+e^x(2x-2)](1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x\, e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{e^x[(x^2-1)(x^2+1)-4x(x-1)^2]}{(1+x^2)^3} = \frac{e^x(x-1)(x^3-3x^2+5x+1)}{(1+x^2)^3} \end{aligned}$$

pertanto $x = 1$ è un flesso a tangente orizzontale (e la funzione presenta un cambio di concavità. In maniera analoga anche per $x = -1$ si evidenzia un comportamento analogo.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è evidenziato in figura.



14.2.6. Funzioni con logaritmi

❒ **Esercizio 14.2.30 (Esame del 10.04.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right).$$

Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R. (versione breve)

1) Dominio: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che esistano la radice e il logaritmo, e che il denominatore non si annulli. Si ottiene $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1 \vee x > 3\}$.

2) Simmetrie: Non ha senso calcolare $f(-x)$ poiché f non è definita per $x < 0$.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Si ha $f(0) = \log(1/3)$ e $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$, quindi le intersezioni sono $(0, \log(1/3))$ e $(4, 0)$. Inoltre $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 4$.

4) Limiti e asintoti: Calcolando i limiti agli estremi del dominio otteniamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right) = +\infty,$$

da cui due asintoti verticali di equazione $x = 1$ e $x = 3$, e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-3}\right)}{x} = 0,$$

quindi non c'è un asintoto obliquo quando $x \to +\infty$.

5) Derivata prima: Per $0 < x < 1 \vee x > 3$ si ottiene

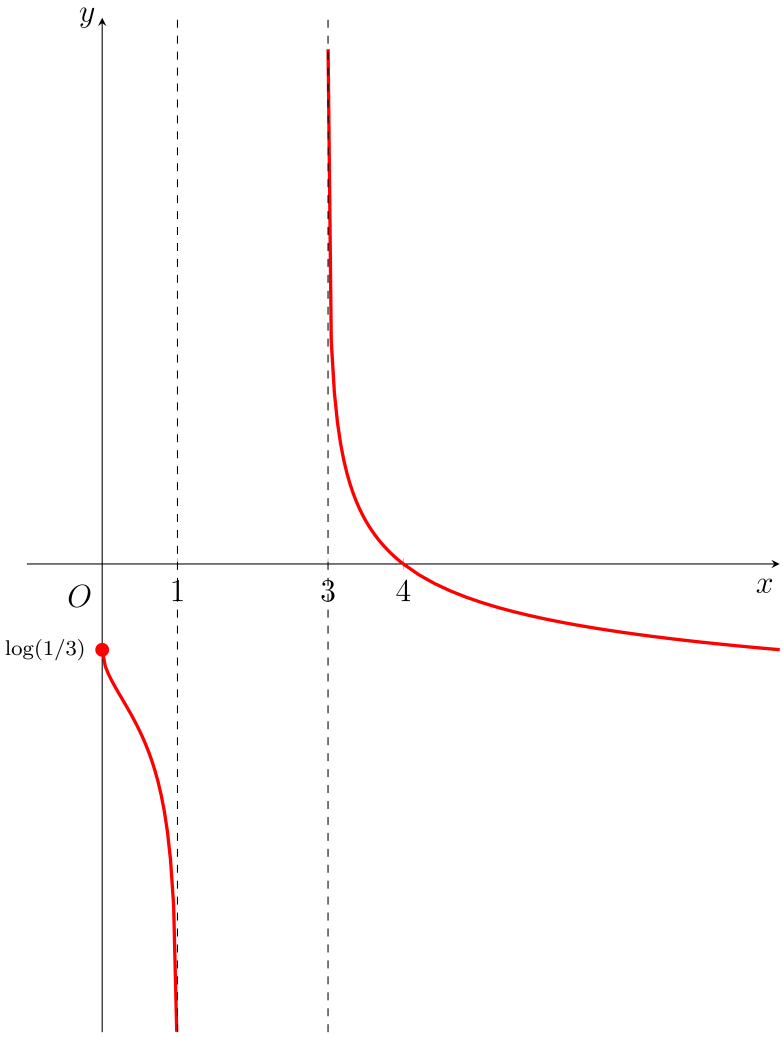
$$f'(x) = \frac{-x+2\sqrt{x}-3}{2\left(\sqrt{x}-1\right)(x-3)\sqrt{x}}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{-x+2\sqrt{x}-3}{2\left(\sqrt{x}-1\right)(x-3)\sqrt{x}} = -\infty.$$

Per quanto riguarda il segno della derivata osserviamo che il numeratore è sempre negativo, mentre il denominatore è positivo per ogni $x \in D_f$. Dunque $f'(x) < 0\ \forall x \in D_f$, e la funzione è sempre decrescente. Essa ha quindi un punto di massimo locale in $x = 0$.

6) Grafico:



14.2.7. Funzioni con logaritmi e valori assoluti

❒ **Esercizio 14.2.31. (Esame del 20.12.16)** *Studiare la funzione*

$$f(x) = \frac{|\log^2 x - 1|}{x}$$

e rappresentare il grafico. Non è richiesta l'analisi della derivata seconda. Facoltativo: evidenziare eventuali punti angolosi calcolando espicitamente la retta tangente in un intorno destro e sinistro del punto.

R. Innanzitutto con la scritta $\log^2 x$ si intende naturalmente $(\log x)^2$ che è diverso da $\log(x^2)$. Dominio: $x > 0$ per esistenza del logaritmo, che congloba anche l'esistenza del denominatore.

Nel dominio considerato, la funzione data è sempre positiva.
Osserviamo che

$$\log^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log^2 x \geq 1 \Leftrightarrow \log x < -1 \vee \log x > 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e} \vee x > e$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log^2 x - 1}{x} & x \leq \dfrac{1}{e} \vee x \geq e \\ \dfrac{1 - \log^2 x}{x} & \dfrac{1}{e} < x < e. \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

dove nel primo caso si ha semplicemente sostituendo (non è una forma di indecisione) mentre nel secondo caso si ha dalla gerarchia degli infiniti.
A questo punto, studiamo la derivata prima. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\log^2 x + 2\log x + 1}{x^2} & \log x < -1 \vee \log x > 1 \\ \dfrac{\log^2 x - 2\log x - 1}{x^2} & -1 < \log x < 1. \end{cases}$$

Si ha

$$\log^2 x - 2\log x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log x < 1 - \sqrt{2} \vee \log x > 1 + \sqrt{2}.$$

A questo punto, osservando che

$$-1 < -1 + \sqrt{2} < 1 < 1 + \sqrt{2},$$

si ha:
• primo caso: nell'intervallo in cui $\log x < -1 \vee \log x > 1$ la funzione data è crescente per $1 < \log x < 1 + \sqrt{2}$ e descrescente per $\log x < -1$ e anche per $\log x > 1 + \sqrt{2}$ quindi $x = e^{1+\sqrt{2}}$ è un punto di massimo locale per f.
• secondo caso: nell'intervallo in cui $-1 < \log x < 1$ la funzione data è crescente per $-1 < \log x < 1 - \sqrt{2}$ e decrescente nell'intervallo $1 - \sqrt{2} < \log x < 1$ quindi $x = e^{1-\sqrt{2}}$ è un altro punto di massimo locale per f.
Analizziamo i punti angolosi. Si ha

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} f'(x) = 2e^2 \qquad \lim_{x \to \frac{1}{e}^-} f'(x) = -2e^2$$

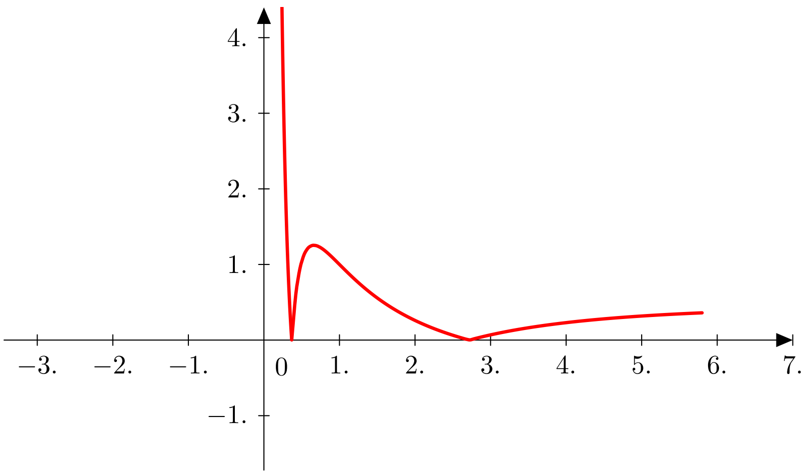
e analogamente

$$\lim_{x \to e^+} f'(x) = \frac{2}{e^2} \qquad \lim_{x \to e^-} f'(x) = -\frac{2}{e^2}$$

e questi sono i coefficienti angolari delle rispettive rette tangenti da destra e da sinistra nei punti angolosi, le cui equazioni sono rispettivamente

$$y = \pm 2e^2 \left(x - \frac{1}{e} \right) \qquad y = \pm \frac{2}{e^2}(x - e).$$

Il grafico è mostrato in figura.



❒ **Esercizio 14.2.32. (Esame del 09.01.18)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,|\log x - 1|}$$

disegnandone il grafico qualitativo. Si evidenzino eventuali punti angolosi. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: il dominio della radice sarebbe $x \geq 0$ ma la radice è al denominatore, quindi dobbiamo escludere $x = 0$. Inoltre il dominio del logaritmo è $x > 0$ ma il denominatore si annulla anche se $\log x = 1$ cioè se $x = e$. Pertanto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \;\; x \neq e\}$$

Inoltre si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\,|\log x - 1|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(\log x - 1)} & \text{se } \log x \geq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1 - \log x)} & \text{se } \log x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(\log x - 1)} & \text{se } x \geq e \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1 - \log x)} & \text{se } x < e \end{cases}$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione data è sempre positiva.
4) LIMITI E ASINTOTI: si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

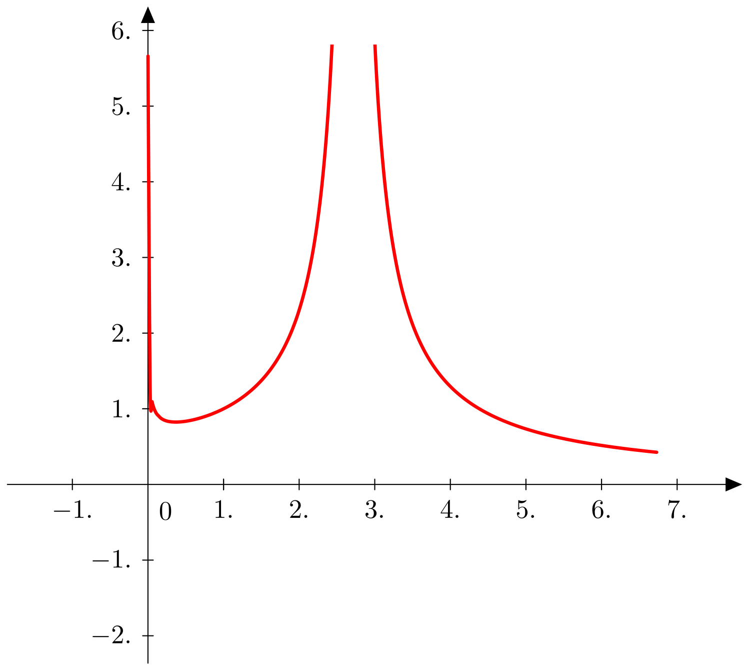
$$\lim_{x\to e^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x) = +\infty$$

pertanto $x = e$ è asintoto verticale per f.
5) DERIVATA PRIMA: si ha

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}(\log x-1)-\sqrt{x}\frac{1}{x}}}{x(\log x - 1)^2} & \text{se } x > e \\ \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\log x)+\sqrt{x}\frac{1}{x}}}{x(1 - \log x)^2} & \text{se } x < e \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{\log x + 1}{2x\sqrt{x}(\log x - 1)^2} & \text{se } x > e \\ \dfrac{\log x + 1}{2x\sqrt{x}(1 - \log x)^2} & \text{se } x < e \end{cases}$$

quindi f decrescente se $x > e$ mentre se $x < e$ allora $f'(x) > 0$ se $x > 1/e$, dunque $x = 1/e$ è punto di minimo locale per f.
6) DERIVATA SECONDA: non richiesta.
7) GRAFICO: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.



❒ **Esercizio 14.2.33 (Esame del 22.02.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = x + |x| + \log \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^2$$

determinando eventuali punti angolosi.

R.

1) Dominio: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che il denominatore non si annulli e che esista il logaritmo, ovvero

$$x - 1 \neq 0,$$
$$\left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^2 > 0.$$

Quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1/2 \wedge x \neq 1\}$.

2) Simmetrie: Si vede che $f(-x) \neq \pm f(x)$, quindi la funzione non è né pari né dispari.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Troviamo le eventuali intersezioni con l'asse y calcolando $f(0)$. Sostituendo si ha $f(0) = 0$, dunque la funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 0)$. Per quanto riguarda le intersezioni con l'asse x e il segno, osserviamo che non è semplice calcolare quando $f(x) = 0$, e di conseguenza determinare il segno della funzione.

4) Limiti e asintoti: D'ora in poi per comodità conviene riscrivere la funzione separando i casi in cui l'argomento del valore assoluto ha segno opposto. Otteniamo

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \log \left(\dfrac{2x-1}{x-1} \right)^2 & x \geq 0,\ x \neq 1/2 \wedge x \neq 1, \\ \log \left(\dfrac{2x-1}{x-1} \right)^2 & x < 0. \end{cases}$$

Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio, ovvero a $1/2^{\pm}$, a $1^{\pm}$ e a $\pm\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim_{x \to 1/2^+} 2x + \log \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^2 = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim_{x \to 1/2^-} 2x + \log \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^2 = -\infty.$$

C'è quindi un asintoto verticale di equazione $x = 1/2$. Inoltre

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x + \log \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^2 = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x + \log \left(\frac{2x-1}{x-1} \right)^2 = +\infty.$$

C'è quindi un secondo asintoto verticale di equazione $x = 1$. Infine

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} 2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} 2x + \log\left[\frac{2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right]^2 \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2x + \log\left(2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2 = +\infty, \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty} \log\left(2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2 = \log 4.\end{aligned}$$

C'è quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = \log 4$ quando $x \to -\infty$. Vediamo se c'è un asintoto obliquo quando $x \to +\infty$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{\log\left(2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2}{x} = 2 := m, \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx &= \lim_{x\to+\infty} 2x + \log\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2 - 2x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(2\,\frac{1-\frac{1}{2x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^2 = \log 4 := q,\end{aligned}$$

quindi c'è un asintoto obliquo di equazione $y = 2x + \log 4$ quando $x \to +\infty$. Osserviamo infine che $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = 0$, quindi la funzione è continua in $x = 0$ (come potevamo aspettarci dalla continuità del valore assoluto).

5) Derivata prima: Se $x > 0$, $x \neq 1/2 \wedge x \neq 1$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 + \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2} \cdot 2\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) \cdot \frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2} = 2 + 2\cdot\frac{x-1}{2x-1}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2} \\ &= 2 - \frac{2}{(2x-1)(x-1)} = \frac{2(2x-1)(x-1)-2}{(2x-1)(x-1)} = \frac{4x^2-6x}{(2x-1)(x-1)} = \frac{2x(2x-3)}{(2x-1)(x-1)},\end{aligned}$$

mentre se $x < 0$

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-1)(x-1)}.$$

Dunque complessivamente

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(2x-3)}{(2x-1)(x-1)} & x > 0,\ x \neq 1/2 \wedge x \neq 1, \\ -\dfrac{2}{(2x-1)(x-1)} & x < 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f'(x) &= \lim_{x\to0^+} \frac{2x(2x-3)}{(2x-1)(x-1)} = 0, \\ \lim_{x\to0^-} f'(x) &= \lim_{x\to0^-} -\frac{2}{(2x-1)(x-1)} = -2,\end{aligned}$$

quindi in $x = 0$ c'è un punto angoloso per f. Studiamo ora il segno di f' per determinare la monotonia di f.

- Se $x > 0$, $x \neq 1/2 \wedge x \neq 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(2x-1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow 1/2 < x < 1 \vee x > 3/2.$$

- Se $x < 0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) < 0 \Rightarrow \nexists\, x < 0.$$

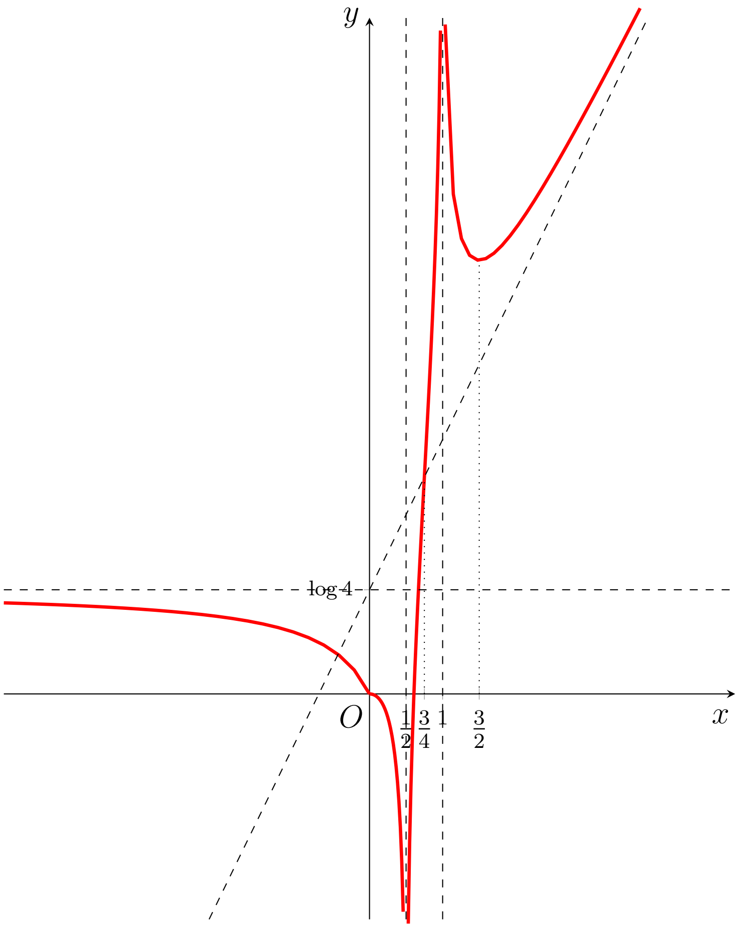
Dunque f è decrescente per $x < 1/2$ (punto angoloso compreso), mentre dopo l'asintoto verticale in $x = 1/2$ cresce fino all'altro asintoto verticale in $x = 1$. Infine decresce in $]1, 3/2[$ fino al punto di minimo locale in $x = 3/2$, per poi crescere per $x > 3/2$.

6) Derivata seconda: Osserviamo che nel calcolare $f'(x)$ quando $x > 0$ ad un certo punto siamo arrivati alla forma $f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x-1)(x-1)}$, quindi $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{(2x-1)(x-1)}\right)$ $\forall\, x \in D_f$. Otteniamo

$$f''(x) = \frac{(4x-3)\cdot 2}{[(2x-1)(x-1)]^2},$$

da cui $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3/4$. Quindi la funzione volge la concavitÃă verso il basso in $]-\infty, 0[$, in $]0, 1/2[$ e in $]1/2, 3/4[$, ha un punto di flesso in $x = 3/4$ per poi volgere la concavitÃă verso l'alto in $]3/4, 1[$ e in $]1, +\infty[$.

7) Grafico:



❒ **Esercizio 14.2.34 (Esame del 07.07.21).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \frac{x^2}{\log|x| - 1}$$

determinando eventuali punti angolosi.

➻ **R.**

1) Dominio: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che esista il logaritmo e che il denominatore non si annulli, ovvero

$$\begin{cases} |x| > 0, \\ \log|x| - 1 \neq 0. \end{cases}$$

La prima condizione è soddisfatta per qualsiasi $x \neq 0$, mentre la seconda è equivalente a $\log|x| \neq 1 = \log e$. Quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \neq \pm e\}$.

2) Simmetrie: Si ha

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{\log|-x|-1} = \frac{x^2}{\log|x|-1} = f(x),$$

quindi la funzione è pari. Possiamo allora limitarci a studiarla per $x > 0$ per poi rifletterne il grafico simmetricamente rispetto all'asse y.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Non ci sono intersezioni con l'asse y poiché $x = 0$ non appartiene al dominio. Per quanto riguarda le intersezioni con l'asse x (limitandoci alla semiretta $x > 0$ per quanto visto prima) osserviamo che

$$\frac{x^2}{\log x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

quindi per lo stesso motivo non ci sono intersezioni con l'asse x. Studiamo il segno della funzione. Indicando con N e D numeratore e denominatore, si ha

$$\begin{aligned} &N > 0 \ \ \forall x \in D_f, \\ &D > 0 \Leftrightarrow \log x > 1 = \log e \Leftrightarrow x > e, \end{aligned}$$

quindi per $x > 0$ si ha $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > e$.

4) Limiti e asintoti: Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio (limitatamente alla semiretta $x > 0$), ovvero a 0^+, a $e^{\pm}$ e a $+\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\log x - 1} = 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x\to e^+} f(x) &= \lim_{x\to e^+} \frac{x^2}{\log x - 1} = +\infty, \\ \lim_{x\to e^-} f(x) &= \lim_{x\to e^-} \frac{x^2}{\log x - 1} = -\infty. \end{aligned}$$

C'è quindi un asintoto verticale di equazione $x = e$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log x \left(1 - \frac{1}{\log x}\right)} = +\infty,$$

quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo. Verifichiamolo. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\log x - x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\log x\left(1 - \frac{1}{\log x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x\left(1 - \frac{1}{\log x}\right)} = +\infty,$$

quindi non c'è un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

5) Derivata prima: Si ha

$$f'(x) = \frac{2x\,(\log x - 1) - \frac{1}{x}\cdot x^2}{(\log x - 1)^2} = \frac{x\,(2\log x - 3)}{(\log x - 1)^2}$$

per $x > 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\,(2\log x - 3)}{(\log x - 1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2\,\frac{\log\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 3x}{(\log x - 1)^2} = 0.$$

Studiamo ora il segno di f' per determinare la monotonia di f. Siccome il denominatore è sempre positivo si ha

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x\,(2\log x - 3) > 0,$$

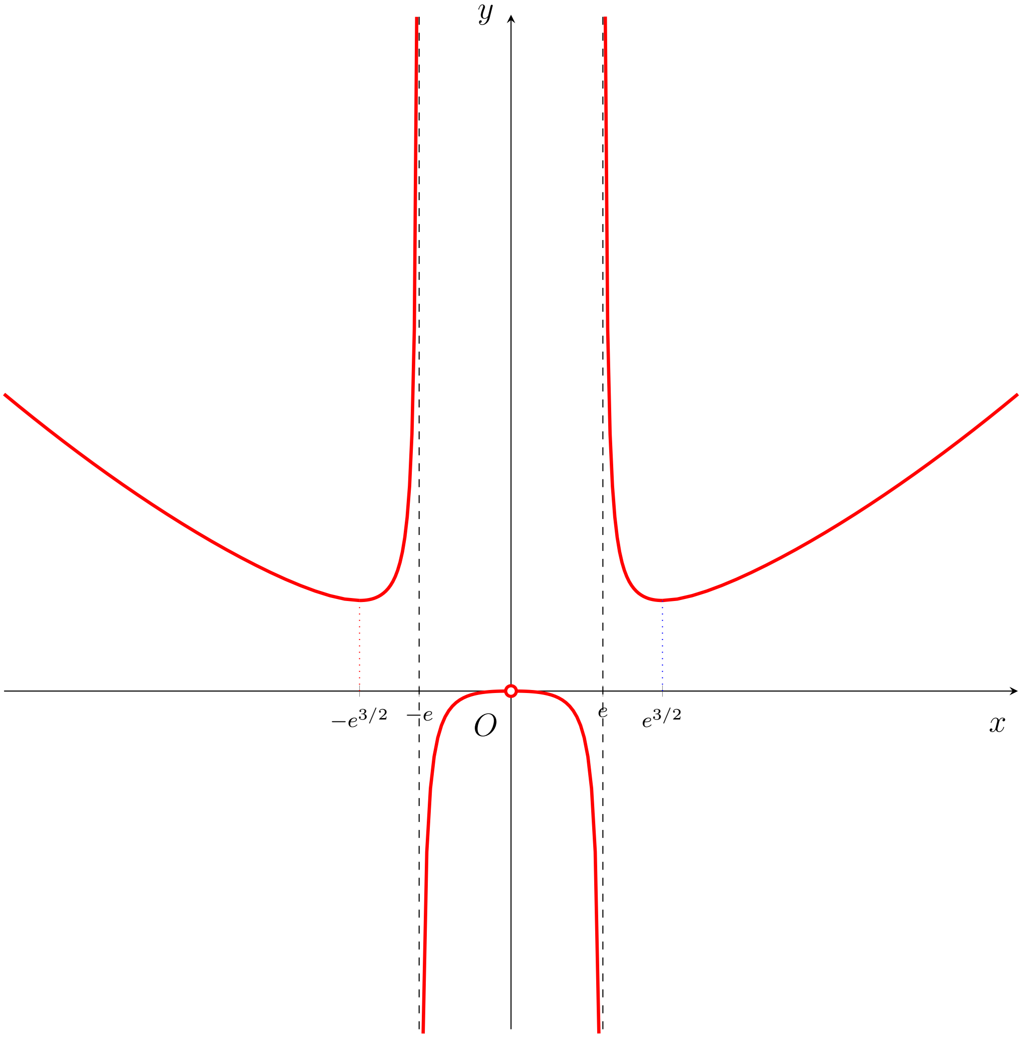
e siccome stiamo assumendo $x > 0$ questa condizione è equivalente a $2\log x - 3 > 0$, ovvero $x > e^{3/2}$. Dunque f è decrescente in $]0, e[$ e in $]e, e^{3/2}[$, ha un punto di minimo locale in $x = e^{3/2}$ e poi cresce per $x > e^{3/2}$.

6) Derivata seconda: Si ha

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(2\log x - 3 + x\cdot 2\cdot \frac{1}{x})(\log x - 1)^2 - 2(\log x - 1)\cdot \frac{1}{x}\cdot x(2\log x - 3)}{(\log x - 1)^4} \\
&= \frac{(2\log x - 1)(\log x - 1) - 2(2\log x - 3)}{(\log x - 1)^3} = \frac{2\log^2 x - 3\log x + 1 - 4\log x + 6}{(\log x - 1)^3} \\
&= \frac{2\log^2 x - 7\log x + 7}{(\log x - 1)^3}\,.
\end{aligned}$$

Studiando la disequazione $2t^2 - 7t + 7 > 0$ si vede che il numeratore è sempre positivo, mentre il denominatore è positivo quando $x > e$. Dunque f volge la concavità verso il basso in $]0, e[$, e verso l'alto in $]e, +\infty[$.

7) Grafico:



14.2.8. Funzioni con logaritmi e funzioni trigonometriche

❒ **Esercizio 14.2.35. (Esame del 23.02.17)** *Si studi la seguente funzione*

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

R. La funzione data è ben definita in $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1+x}{1-x} > 0 \right\}$ che è equivalente ad avere $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$.

Si ha $f(0) = 0$ mentre ci si accorge che la funzione è dispari, infatti

$$f(-x) = \arctan(-x) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = -\arctan x - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} = -f(x).$$

Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.$$

La funzione è infinitamente derivabile sul suo dominio quindi è possibile calcolare

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{2x^2}{x^4-1}$$

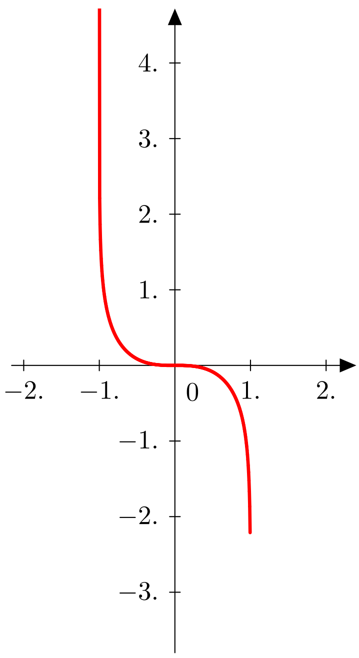
da cui si evince che

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x < -1 \;\vee\; x > 1$$

quindi nel dominio di definizione della f, la funzione è sempre decrescente.
Infine calcoliamo la derivata seconda: si ha

$$f''(x) = \frac{4x(x^4-1) - 4x^3\,2x^2}{(x^4-1)^2} = \frac{-4x(1+x^4)}{(x^4-1)^2}$$

quindi la funzione è concava per $x > 0$ e convessa per $x < 0$. Il grafico qualitativo è quello mostrato in figura.



❒ **Esercizio 14.2.36 (Esame del 05.06.19).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \log x - \arctan(x-1).$$

Ricavare poi il grafico di $|f(x)|$ *e* $f(|x|)$.

➾ **R.**

1) Dominio: Affinché la funzione sia ben definita occorre imporre che esista il logaritmo. Si ottiene $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2) Simmetrie: Non ha senso calcolare $f(-x)$ poiché f non è definita per $x < 0$.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Non ci sono intersezioni con l'asse y poichÃĽ $x = 0$ non appartiene al dominio. Non è invece semplice calcolare quando $f(x) = 0$, e di conseguenza determinare il segno della funzione.

4) Limiti e asintoti: Calcolando i limiti agli estremi del dominio otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log x - \arctan(x-1) = -\infty,$$

da cui un asintoto verticale di equazione $x = 0$ (asse y), e

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \log x - \arctan(x-1) = +\infty, \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x - \arctan(x-1)}{x} = 0, \end{aligned}$$

quindi non c'è un asintoto obliquo quando $x \to +\infty$.

5) Derivata prima: Si ottiene

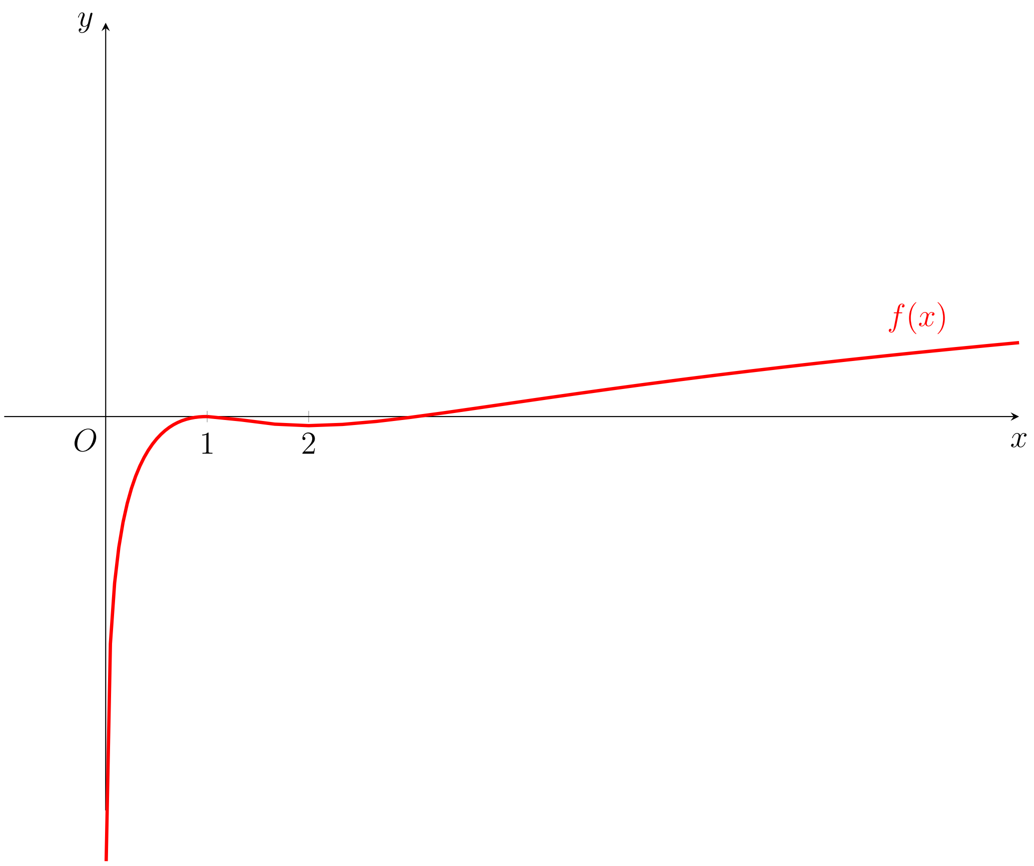
$$f'(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x^2-2x+2)},$$

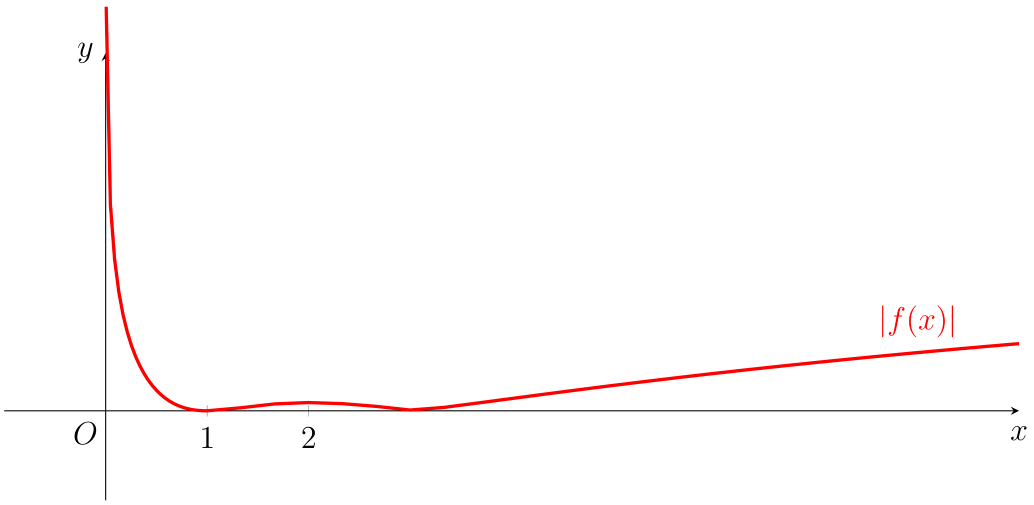
da cui

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \vee x > 2.$$

Quindi in $x = 1$ c'è un massimo locale, mentre in $x = 2$ un minimo locale.

6) Grafici:





Il grafico di $f(|x|)$ è uguale a quello di $f(x)$ essendo $x > 0$.

14.2.9. Funzioni definite a tratti

❒ **Esercizio 14.2.37 (Esame del 20.12.18).** *Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x^2+x} & x \geq 0 \\ x^3+2x^2+1 & x < 0 \end{cases}$$

determinando eventuali punti angolosi. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) Dominio: Non ci sono condizioni di esistenza da imporre, perciò $D_f = \mathbb{R}$.

2) Simmetrie: La funzione ha due leggi diverse a seconda del segno di x perciò sicuramente $f(-x) \neq \pm f(x)$, ovvero f non è né pari né dispari.

3) Intersezioni con gli assi e segno: Troviamo le eventuali intersezioni con l'asse y calcolando $f(0)$. Sostituendo nella prima legge si ha $f(0) = 1$, dunque la funzione interseca l'asse y nel punto $(0, 1)$. Per quanto riguarda le intersezioni con l'asse x e il segno, osserviamo che $f(x) > 0 \ \ \forall x \geq 0$. Se $x < 0$ non è invece semplice calcolare quando $f(x) = 0$, e di conseguenza determinare il segno della funzione.

4) Limiti e asintoti: Calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del dominio, ovvero a $\pm\infty$, e nel punto in cui la funzione cambia legge, ovvero a $0^{\pm}$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x^2\left(1-\frac{1}{2x}\right)} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^3+2x^2+1\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = -\infty.$$

C'è quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ (asse x) quando $x \to +\infty$. Vediamo se c'è un asintoto obliquo quando $x \to -\infty$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right) = +\infty,$$

quindi non c'è un asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Verifichiamo ora se la funzione è continua in $x = 0$. Si ha

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = e^0 = 1,$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \left(x^3+2x^2+1\right) = 1,$$

quindi la funzione è continua in 0.

5) Derivata prima: Se $x > 0$ si ha

$$f'(x) = e^{-2x^2+x}(-2 \cdot 2x + 1) = e^{-2x^2+x}(-4x+1),$$

mentre se $x < 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 2x = 3x^2 + 4x.$$

Dunque complessivamente

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-2x^2+x}(-4x+1) & x > 0, \\ 3x^2 + 4x & x < 0. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-2x^2+x}(-4x+1) = 1,$$
$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(3x^2 + 4x\right) = 0,$$

quindi in $x = 0$ c'è un punto angoloso per f. Studiamo ora il segno di f' per determinare la monotonia di f.

• Se $x > 0$

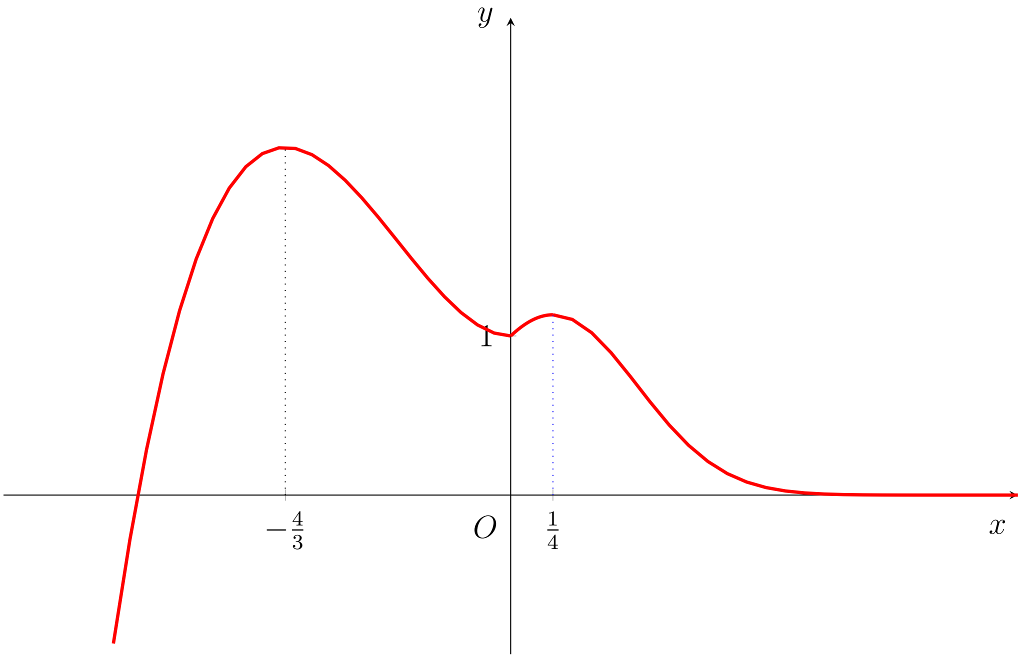
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-2x^2+x}(-4x+1) > 0 \Leftrightarrow -4x+1 > 0 \Leftrightarrow x < 1/4.$$

• Se $x < 0$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x > 0 \Leftrightarrow x(3x+4) > 0 \Leftrightarrow x < -4/3.$$

Dunque f è crescente per $x < -4/3$ e ha un punto di massimo locale in $x = -4/3$, dopodiché decresce in $]-4/3, 0[$. Dopo il punto angoloso in $x = 0$ cresce di nuovo in $]0, 1/4[$ fino al punto di massimo locale in $x = 1/4$, ed è infine decrescente per $x > 1/4$.
Si osservi che in $x = 0$ si ha quindi un punto di minimo locale, e questo non è in contraddizione con il teorema di Fermat poiché $\nexists\, f'(0)$.

6) Grafico:



❒ **Esercizio 14.2.38. (Esame del 23.01.20)** *Si studi la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2-2x} & x \leq 0 \\ \log\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) & x > 0 \end{cases}$$

determinandone il grafico qualitativo. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

R.

1) DOMINIO: se $x \leq 0$ la funzione è ben definita mentre se $x > 0$ la funzione è ben definita se

$$\frac{x+1}{x+2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -2 \vee x > -1$$

e dunque, visto che stiamo considerando il caso $x > 0$, anche in questo caso la funzione è ben definita. Dunque

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2) SIMMETRIE: non ci sono simmetrie.

3) INTERSEZIONI CON ASSI E SEGNO: la funzione è sicuramente positiva se $x \leq 0$. Invece se $x > 0$ si ha che $f > 0$ quando

$$\frac{x+1}{x+2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{x+2} > 0$$

e dunque se $x > 0$ allora $f(x) < 0$.
Inoltre

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \log\frac{1}{2} \neq \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$$

quindi f non è continua in $x = 0$.
4) limiti e asintoti: si ha

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \log 1 = 0$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale per f.
5) derivata prima: si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2-2x}(-2x-2) & x < 0 \\ \dfrac{x+2}{x+1}\,\dfrac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} & x > 0 \end{cases}$$

quindi se $x < 0$ si ha $f'(x) > 0$ se $x < -1$ e $f'(x) < 0$ se $x > -1$, pertanto $x = -1$ è un punto di massimo locale per f. D'altra parte, se $x > 0$ allora f è sempre crescente.
6) derivata seconda: non richiesta.
7) grafico: il grafico qualitativo è rappresentato in figura.