

Exploitation de la quadrature bayésienne pour des calculs de Credit Valuation Adjustment précis et rapides

Sébastien HAAG^(*,1)

¹Quantitative Trading Analyst Intern

6 mai 2025

*. Contact de l'Auteur : sbthaag@gmail.com

Sommaire

Résumé	2
1 Introduction	2
1.1 Aperçu sur la recherche et les contributions	3
1.2 Structure de l'article	4
2 Les Mesures du Risque de Contrepartie	5
2.1 Exposition attendue	5
2.2 Credit Valuation Adjustment (CVA)	6
3 Modélisation par Inférence Bayésienne	7
3.1 Regression de processus gaussien (GPR)	7
3.2 Entraînement des Algorithmes à Processus Gaussiens	9
3.3 Quadrature Bayésienne	10
4 Calcul du CVA sous le Modèle Linéaire Gaussien de Markov à un Facteur	11
4.1 Approximation Analytique du CVA sous le Modèle LGM-1F	12
4.2 Valorisation des Swaptions sous le Modèle LGM-1F	14
4.3 Valorisation des Swaptions avec le Modèle de Bachelier	15
5 Applications Numériques pour le Calcul du CVA	17
5.1 Tests de Convergence pour un Swap Unitaire	18
5.2 Calcul du CVA d'un Portefeuille de Swaps de Taux d'Intérêt par les Approches Classiques	19
5.3 Tests Numériques pour le Calcul du CVA par GPR et Quadrature Bayésienne . .	22
6 Discussion	24
7 Conclusion	24

Résumé

Le *risque de contrepartie*, qui combine les *risques de marché* et de *crédit*, a pris de l'importance après la crise financière de 2008 en raison de sa complexité et de ses implications systémiques. Les méthodes traditionnelles de gestion, telles que la *compensation bilatérale (netting)* et la *collatéralisation*, sont devenues extrêmement coûteuses en calcul sous des cadres réglementaires comme le *Fundamental Review of the Trading Book (FRTB)*. Cet article explore l'application conjointe de la *régression par processus gaussiens (GPR)* et de la *quadrature bayésienne (BQ)* pour améliorer l'efficacité et la précision des métriques de risque de contrepartie, notamment le *Credit Valuation Adjustment (CVA)*. Cette approche équilibre une excellente précision avec des gains significatifs en performance de calcul.

En se concentrant sur des portefeuilles de dérivés à revenu fixe, tels que les *interest rate swaps* et les *swaptions*, dans le cadre du modèle *One-Factor Linear Gaussian Markov (LGM-1F)*, nous mettons en avant trois contributions clés. Premièrement, nous approximons les prix des swaptions en utilisant la *formule de Bachelier*, montrant que les taux swap à départ différé peuvent être modélisés comme des dynamiques gaussiennes, permettant des calculs de CVA efficaces. Deuxièmement, nous démontrons la pertinence pratique d'une approximation analytique pour le CVA d'un portefeuille de swaps de taux d'intérêt. Enfin, l'utilisation combinée des *processus gaussiens* et de la *quadrature bayésienne* met en évidence une synergie puissante entre précision et efficacité computationnelle, en faisant un outil précieux pour la gestion du risque de crédit.

Mots-clés : Credit Valuation Adjustment ; exposition attendue (*expected exposure*) ; Bâle III ; FRTB ; exposition future potentielle (*potential future exposure*) ; régression par processus gaussiens ; apprentissage automatique ; interest rate swaps.

1 Introduction

Le *risque de contrepartie* est l'un des types de risque financier les plus complexes à mesurer et à gérer, car il résulte de l'interaction entre le *risque de marché* et le *risque de crédit*, et est également influencé par des facteurs systémiques comme la défaillance de grandes institutions. Ce risque est particulièrement pertinent pour les *produits dérivés de gré à gré (OTC)* et a gagné en importance depuis la crise financière mondiale. Avant la crise de 2008, de nombreuses institutions financières géraient le risque de crédit de contrepartie en ne traitant qu'avec les contreparties les plus stables, faisant souvent confiance à la solvabilité présumée des entités considérées comme "*too big to fail*". Pourtant, la crise a révélé que ces mêmes institutions représentaient souvent le plus grand risque de contrepartie. Le risque de contrepartie résulte de la combinaison du risque de marché, qui détermine l'exposition, et du risque de crédit, qui évalue la solvabilité de la contrepartie. Il n'est pas toujours évident de savoir si une contrepartie présentant une forte probabilité de défaut mais une faible exposition est préférable à une contrepartie avec une exposition plus élevée mais une probabilité de défaut plus faible. Le *Credit Valuation Adjustment (CVA)* fournit une mesure précise du risque de contrepartie et permet de distinguer numériquement ces différents scénarios. Il évalue le risque de contrepartie auquel fait face une institution, offrant la possibilité de le gérer, de le négocier ou de le couvrir efficacement. Le calcul précis et efficace des

métriques de risque de crédit de contrepartie, telles que le *CVA*, la *Value at Risk (VaR)* et l'*Expected Shortfall (ES)*, reste un défi majeur pour les institutions financières.

Bien que les méthodes traditionnelles soient fiables, elles sont souvent coûteuses en termes de calcul et rencontrent des difficultés à s'adapter à des portefeuilles complexes, notamment ceux contenant des dérivés exotiques comme les *Bermudan swaptions*. Ces limitations peuvent freiner l'évaluation rapide des risques, une nécessité croissante dans le cadre des réglementations comme *Bâle III*. Cette recherche vise à combler cette lacune en examinant comment des techniques statistiques avancées — en particulier la *régression par processus gaussiens (GPR)* et la *quadrature bayésienne* — peuvent améliorer à la fois la précision et l'efficacité des calculs de métriques de risque. La motivation sous-jacente est la demande croissante pour que les institutions financières adoptent des outils de pointe permettant des évaluations de risque plus rapides et plus fiables. Cette approche offre un potentiel de réductions de coûts substantielles tout en garantissant la conformité aux exigences réglementaires évolutives, en faisant une solution prometteuse pour la gestion des risques contemporaine.

Diverses stratégies sont employées pour atténuer le risque de contrepartie dans les dérivés OTC. Les accords de *netting* impliquent des arrangements juridiquement contraignants qui compensent les expositions positives et négatives entre contreparties. En consolidant plusieurs transactions en une seule position nette, le *netting* réduit l'exposition de crédit globale entre les parties. Ces accords visent à réduire le risque de crédit de contrepartie en minimisant les montants en suspens qui doivent être réglés en cas de défaut. La *collatéralisation* oblige les contreparties à déposer des garanties, fournissant un coussin contre les pertes potentielles. L'annexe de support de crédit (*Credit Support Annex, CSA*) définit les conditions de collatéralisation et les exigences de marge, sécurisant davantage les transactions. De plus, la couverture à l'aide de dérivés de crédit, tels que les *credit default swaps (CDS)*, transfère le risque à des tiers, protégeant contre les défauts. Ces approches combinées renforcent la gestion des risques et la stabilité financière.

Les métriques de risque de contrepartie doivent être évaluées à des fins économiques, comptables et réglementaires. L'approche économique calcule l'*exposition future potentielle (PFE)* pour fixer des limites d'exposition. L'approche comptable intègre les ajustements de valeur (*XVAs*), en particulier le CVA, dans les prix. L'approche réglementaire évalue le capital nécessaire pour couvrir les pertes inattendues, comme l'*EEPE* et le *VaR-CVA*. L'exposition, essentielle dans ces trois approches, nécessite des estimations rapides et précises. Les banques utilisent des simulations de Monte Carlo et des bibliothèques de valorisation pour évaluer les portefeuilles, ce qui conduit à des processus complexes et chronophages, surtout sous les nouvelles réglementations. Pour surmonter ces défis, les institutions adoptent de plus en plus des approximations et des méthodes d'*apprentissage automatique*, telles que les algorithmes d'*apprentissage profond*, afin de réduire la complexité computationnelle tout en maintenant la précision.

1.1 Aperçu sur la recherche et les contributions

Dans cet article, nous nous concentrons spécifiquement sur l'application de ces techniques pour le calcul des métriques de *risque de crédit de contrepartie (CCR)*, afin de répondre à la question suivante : *comment implémenter efficacement ces métriques de risque, en réduisant le temps de calcul tout en assurant une précision satisfaisante ?* Dans la littérature académique et professionnelle, l'*apprentissage profond* et la *régression par processus gaussiens (GPR)* sont utilisés pour valoriser rapidement et précisément des dérivés financiers. Une autre application potentielle concerne l'utilisation des processus gaussiens pour estimer la *Value at Risk (VaR)* et l'*Expected Shortfall* dans la mesure du risque de marché. En outre, d'autres applications d'*apprentissage automatique*, telles que celles basées sur les réseaux de neurones ou les *tenseurs de Chebyshev*, sont exploitées pour calculer des métriques de risque. Dans cette recherche, nous avons exploré l'application conjointe de la *régression par processus gaussiens (GPR)*

et de la *quadrature bayésienne* pour relever les défis computationnels associés à l'évaluation des métriques de CCR, en mettant particulièrement l'accent sur le *Credit Valuation Adjustment (CVA)*. Cette étude introduit un cadre innovant conçu pour surmonter les problèmes de complexité et de précision dans l'estimation des métriques CCR. En utilisant des méthodes statistiques avancées au sein du modèle robuste *LGM-1F*, nous proposons une approche plus efficace et précise pour gérer le risque de crédit de contrepartie dans les portefeuilles de dérivés à revenu fixe.

Notre méthodologie exploite les atouts de la *quadrature bayésienne*, une technique fondée sur la GPR, pour calculer des intégrales numériques avec un nombre minimal d'observations. La GPR présente des avantages mathématiques uniques, notamment des évaluations rapides et numériquement stables, ainsi qu'une convergence exponentielle vers la fonction cible lorsqu'il s'agit de fonctions analytiquement bien définies. Ces caractéristiques font de la GPR un outil puissant pour l'approximation de fonctions complexes, en particulier dans le cadre de la tarification des dérivés et de l'évaluation des risques. En intégrant la quadrature bayésienne dans ce cadre, nous permettons des calculs de CVA à la fois efficaces et précis, réduisant significativement le temps de calcul sans sacrifier la précision.

Une caractéristique clé de notre approche est que la phase d'apprentissage de l'algorithme d'estimation des prix est réalisée au niveau du portefeuille, agrégé par contrepartie, plutôt qu'opération par opération. Cette méthodologie unique améliore à la fois l'efficacité et la performance du modèle, offrant un avantage significatif par rapport aux techniques classiques qui évaluent les transactions individuellement.

Le périmètre de ce travail se concentre sur des portefeuilles de dérivés à revenu fixe comprenant des *interest rate swaps*, des *swaptions* et des *cancellable swaps*, tous modélisés dans le cadre du *One-Factor Linear Gaussian Markov (LGM-1F)*. Ce modèle, largement reconnu, sert de référence pour l'évaluation et la gestion des risques liés à ces dérivés, garantissant une cohérence entre valorisation, gestion des risques et évaluation du risque de crédit.

Cet article présente trois contributions majeures :

- **Approximation de tarification** : en utilisant la formule de Bachelier, nous montrons que les taux à départ différé peuvent être efficacement modélisés comme des processus gaussiens, permettant des calculs de CVA rapides et précis.
- **Approximations pratiques du CVA** : nous proposons et validons une approximation analytique pour le CVA d'un portefeuille de swaps de taux d'intérêt, simplifiant le processus de calcul tout en maintenant une grande précision.
- **Synergie entre GPR et quadrature bayésienne** : en combinant les capacités d'approximation fonctionnelle de la GPR avec l'optimisation de l'intégration numérique par quadrature bayésienne, nous atteignons un équilibre innovant entre efficacité computationnelle et précision, offrant une solution pratique pour la gestion du risque de crédit.

1.2 Structure de l'article

La structure de cet article est organisée comme suit : la section 2 présente une vue d'ensemble des *mesures de risque de crédit de contrepartie*, en introduisant les principales métriques telles que l'*exposition attendue* et le *Credit Valuation Adjustment (CVA)*, utilisées pour quantifier le risque de crédit de contrepartie.

La section 3 aborde la modélisation par *inférence bayésienne*, en offrant une introduction à la *régression par processus gaussiens (GPR)*, aux algorithmes d'apprentissage associés, ainsi qu'au concept de *quadrature bayésienne*.

La section 4 se concentre sur le calcul du CVA dans le cadre du modèle **LGM-1F**, où des approximations analytiques du CVA sont explorées, ainsi que des techniques de valorisation de swaps au sein de ce modèle.

La section 5 présente les applications numériques pour le calcul du CVA, détaillant les tests de convergence pour les *interest rate swaps*, les approches classiques de calcul du CVA, et les résultats numériques obtenus en utilisant la GPR et la quadrature bayésienne.

Enfin, les sections 6 et 7 fournissent les **conclusions** et la **discussion**, résumant les principaux résultats et proposant des pistes pour les recherches futures.

2 Les Mesures du Risque de Contrepartie

Dans cette section, nous introduisons les concepts fondamentaux et les notations liés au **risque de crédit de contrepartie (CCR)**, aux expositions au crédit et à l'ajustement de valorisation pour le crédit (**Credit Valuation Adjustment, CVA**). Le **risque de crédit de contrepartie (CCR)** désigne la possibilité qu'une contrepartie fasse défaut ou ne remplisse pas ses obligations financières avant le règlement des paiements liés aux produits dérivés. Une perte financière survient si, au moment du défaut, le dérivé détenu par la contrepartie présente une valeur économique positive pour l'institution financière. Contrairement aux prêts traditionnels, où seul le prêteur peut subir une perte, le CCR affecte les deux contreparties : la valeur de marché peut être soit positive, soit négative pour chacune, et elle peut fluctuer dans le temps en fonction des conditions de marché.

L'**exposition à la contrepartie**, notée $E(t)$, représente la perte financière potentielle que l'institution financière pourrait subir à l'instant t sur l'ensemble des transactions dérivées en cours avec la contrepartie, en supposant que celle-ci fasse défaut à cet instant, en tenant compte des mécanismes de *netting* et de collatéral, mais en excluant tout recouvrement éventuel.

2.1 Exposition attendue

Considérons un portefeuille constitué de N transactions sur produits dérivés entre une institution financière et une contrepartie donnée. La contrepartie peut faire défaut à un instant imprévisible τ , qui suit une distribution connue sous mesure risque-neutre $Q(t) = Q[\tau \leq t]$. Soit $V_i(t)$ la valeur au temps t du i -ème dérivé du point de vue de l'institution. L'**exposition** désigne la valeur de l'ensemble des contrats dérivés détenus par l'institution vis-à-vis de la contrepartie, susceptible d'engendrer une perte si cette dernière fait défaut avant l'échéance T (correspondant à la date d'échéance du contrat le plus long du portefeuille).

À tout instant t , l'exposition $E(t)$ est déterminée à partir des valeurs actualisées de toutes les transactions avec la contrepartie, représentées par l'ensemble $\{V_i(t)\}_{i=1}^N$. La valeur totale du portefeuille vis-à-vis de la contrepartie au temps t est donnée par :

$$V(t) = \sum_{i=1}^N V_i(t).$$

Si un accord de *netting* est en place, l'exposition $E(t)$ s'écrit :

$$E(t) = \max\{V(t), 0\}.$$

Un *margin agreement* (accord de marge) définit les conditions selon lesquelles une marge (ou un collatéral) doit être déposée pour couvrir les pertes potentielles liées aux variations de valeur

des instruments financiers, tels que les dérivés. Ces accords précisent les types de collatéral acceptables, les méthodes de calcul des marges, les procédures pour les appels de marge et les mécanismes de résolution des litiges. Les exigences en matière de marge peuvent varier selon des facteurs tels que la solvabilité de la contrepartie, la volatilité des actifs et les réglementations en vigueur.

Si l'accord de *netting* est également assorti d'un accord de marge, la contrepartie doit fournir au banquier un collatéral $C(t)$, et l'exposition devient :

$$E(t) = \max\{V(t) - C(t), 0\}.$$

L'exposition au crédit ne devient pertinente qu'en cas de défaut de la contrepartie. Ainsi, les évaluations d'exposition sont conditionnées à cette occurrence. Dans la suite, nous nous concentrons sur les calculs d'exposition sans considérer explicitement les événements de défaut, en supposant implicitement qu'il n'existe pas de *wrong-way risk*.

L'***exposition attendue (EE)*** représente la valeur espérée, conditionnée au *mark-to-market* (MtM) du portefeuille dérivés étant positif. Elle reflète la moyenne des valeurs MtM positives futures, actualisées au présent en utilisant le processus du taux sans risque r_s . En notant :

$$D(t, u) := \exp\left(-\int_t^u r_s ds\right),$$

l'exposition attendue sous la mesure risque-neutre s'exprime :

$$EE(t, u) = \mathbb{E}^Q[D(t, u)E(u)].$$

Comme nous le discuterons dans la section suivante, l'***exposition attendue (EE)*** joue un rôle central dans le calcul de l'ajustement de valorisation pour le crédit (***CVA***).

2.2 Credit Valuation Adjustment (CVA)

L'***ajustement de valorisation pour le crédit (CVA)*** joue un rôle crucial pour les institutions financières dans l'évaluation et la gestion du risque de crédit de contrepartie, en particulier dans le cadre des transactions sur dérivés où les expositions sont souvent considérables. Il permet aux banques de correctement tarifier les transactions dérivées et d'allouer le capital de manière efficace. Par définition, le CVA représente la différence entre la valeur d'un portefeuille de dérivés dans un scénario sans risque et sa valeur réelle, qui intègre la possibilité de défaut de la contrepartie.

Typiquement, le CVA est calculé comme la valeur actuelle des pertes attendues résultant du défaut d'une contrepartie, actualisées au taux sans risque. Ce calcul implique de modéliser la probabilité de défaut de la contrepartie, la perte en cas de défaut (***Loss Given Default, LGD***) et l'exposition en cas de défaut (***Exposure at Default, EAD***). En supposant l'absence de *wrong-way risk* et des probabilités de survie déterministes $S(\cdot, \cdot)$, le CVA s'exprime comme suit :

$$CVA(t, T) = \mathbb{E}^Q[(1 - R)D(t, \tau)E(\tau) \times \mathbf{1}_{\{t \leq \tau \leq T\}}] = (1 - R) \int_t^T \mathbb{E}^Q[D(t, u)E(u)]dS(t, u).$$

La formule (4) peut être calculée à l'aide du schéma d'intégration suivant :

$$CVA(t, T) = (1 - R) \sum_{i=1}^m EE(t, t_i)[S(t, t_{i-1}) - S(t, t_i)],$$

où les intervalles temporels sont notés $t = t_0, t_1, t_2, \dots, t_m = T$.

On en déduit que le CVA dépend des composantes suivantes :

- **Probabilité de défaut (PD)** : pour une intensité de défaut non constante μ , la probabilité de défaut et la probabilité de survie s'écrivent :

$$P(t, u) = 1 - S(t, u) = 1 - \exp \left(- \int_t^u \mu(x) dx \right).$$

- **Perte en cas de défaut (LGD)** : c'est la portion de l'exposition qui n'est pas récupérable en cas de défaut. Elle se calcule comme $1 - R$, où R est le taux de recouvrement.
- **Exposition en cas de défaut (EAD)** : l'exposition attendue vis-à-vis de la contrepartie au moment du défaut τ est représentée par $EE(t, \tau)$.

Le CVA est influencé par divers facteurs tels que la solvabilité de la contrepartie, les conditions de marché, la volatilité des actifs sous-jacents et la maturité des instruments financiers impliqués.

3 Modélisation par Inférence Bayésienne

Cette section offre un aperçu de l'intégration numérique à travers le prisme de l'*inférence bayésienne*. Afin de garantir une présentation complète et précise des *processus gaussiens*, de l'intégration numérique et de la *quadrature bayésienne*, cette discussion s'appuie sur les approches et méthodologies issues des références. Nous commençons par présenter les outils fondamentaux nécessaires pour comprendre l'algorithme de base de l'intégration probabiliste.

Ensuite, nous abordons le problème de l'évaluation de l'intégrale d'une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ sur un domaine $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ par rapport à une mesure p sur \mathcal{X} :

$$I = \int_{\mathcal{X}} f(x) dp(x).$$

Si une solution en forme fermée pour cette intégrale n'existe pas, des méthodes numériques sont nécessaires. Ces méthodes approchent l'intégrale (7) à l'aide d'une somme pondérée des évaluations de la fonction, ce que l'on appelle une *formule de quadrature* :

$$Q(f, X, \omega) = \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i) = \omega^\top f_X,$$

où $\omega = [\omega_1, \dots, \omega_N] \in \mathbb{R}^N$ représente les poids réels, et $f_X = [f(x_1), \dots, f(x_N)]^\top \in \mathbb{R}^N$ désigne les valeurs de la fonction aux points de conception $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathcal{X}$.

En essence, l'intégration numérique vise à déterminer les poids optimaux, les points de conception optimaux, ou les deux, afin de calculer efficacement (8).

3.1 Regression de processus gaussien (GPR)

Les *processus gaussiens* représentent une classe sophistiquée de modèles qui attribuent des distributions de probabilité à des classes entières de fonctions. Ces modèles fournissent un cadre efficace pour modéliser et prédire des fonctions latentes à partir de données observées. En exploitant les propriétés de marginalisation inhérentes aux processus gaussiens, ils permettent une modélisation flexible et non paramétrique, ce qui les rend particulièrement adaptés aux tâches d'inférence bayésienne, notamment en régression et classification.

Un processus gaussien (GP) peut être vu comme une extension de la distribution normale, passant d'un ensemble fini de variables aléatoires gaussiennes à une collection infinie. Ainsi, les

GPs sont idéaux pour représenter des fonctions aléatoires de la forme $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Les réalisations d'un GP sont des fonctions à valeurs réelles $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, où les valeurs de f dépendent de $x \in \mathcal{X}$, plutôt que d'un simple indice. Plus formellement, soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble non vide. Un processus aléatoire f défini sur \mathcal{X} suit un processus gaussien $f \sim GP(m, k)$ avec fonction moyenne $m : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ et fonction de covariance $k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ si, pour toute collection finie de points $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathcal{X}$, le vecteur $f_X = [f(x_1), \dots, f(x_N)]^\top \in \mathbb{R}^N$ suit une loi normale multivariée :

$$f_X \sim \mathcal{N}(m(X), K(X, X)).$$

Le vecteur moyenne est défini par $[m(X)]_i = m(x_i)$, et la matrice de covariance par $[K(X, X)]_{ij} = k(x_i, x_j)$ pour $i, j = 1, \dots, N$. La fonction de covariance décrit la covariance entre les valeurs de la fonction en deux points x et $x' \in \mathcal{X}$, et est définie par $k(x, x') = \mathbb{E}[(f(x) - m(x))(f(x') - m(x'))]$. La fonction $k(\cdot, \cdot)$, appelée **noyau**, joue un rôle central dans l'analyse des processus gaussiens. Un noyau largement utilisé en apprentissage automatique est le noyau exponentiel quadratique :

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2l^2}\right),$$

où σ_f et l sont des paramètres d'échelle non négatifs. La matrice de covariance $K := K(X, X)$ prend des valeurs plus grandes lorsque les points sont proches, et des valeurs plus faibles lorsqu'ils sont éloignés, car les points sont plus fortement corrélés lorsque leurs valeurs sont similaires et leurs variances faibles.

La performance de la régression par processus gaussiens (GPR) dépend fortement du choix des noyaux, car ils servent de prior flexible pour modéliser les fonctions dans les tâches d'inférence bayésienne, comme la régression et la classification. La GPR a été appliquée efficacement à la modélisation financière, notamment à l'analyse de portefeuilles de dérivés, et a prouvé son utilité dans les calculs de CVA.

En GPR, l'objectif est d'inférer une fonction latente f à partir d'un ensemble fini d'observations, en supposant que f est une trajectoire échantillon d'un processus gaussien sous-jacent $f \sim GP(m, k)$. Considérons N points de données $y = \{y_1, \dots, y_N\}$ aux emplacements $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, résumés comme le jeu de données $\mathcal{D} = \{X, y\}$, perturbés par un bruit gaussien i.i.d. :

$$y_i = f(x_i) + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

À noter que $y = f(x)$ en l'absence de bruit ($\sigma^2 = 0$), ce qui correspond à des observations parfaites de la fonction latente f .

Le principal objectif de la régression par processus gaussiens est de calculer la loi postérieure $p(f \mid \mathcal{D})$ et de prédire les valeurs de la fonction à de nouveaux emplacements $x^* \in \mathcal{X}$. Plus précisément, la postérieure est obtenue en utilisant les règles de conditionnement des processus gaussiens, qui nécessitent la loi jointe des valeurs $f^* := f(x^*)$ aux nouveaux points et des données observées y :

$$\begin{bmatrix} y \\ f^* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} m(X) \\ m(x^*) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K + \sigma^2 I_N & k(X, x^*) \\ k(X, x^*)^\top & k(x^*, x^*) \end{bmatrix}\right),$$

où $[k(X, x^*)]_i = k(x_i, x^*)$ est le vecteur de covariance entre les points d'entraînement X et le nouveau point x^* .

On s'intéresse à la loi conditionnelle $p(f^* \mid \mathcal{D})$, qui représente la probabilité d'une certaine prédiction pour $f(x^*)$ étant donné les données observées. En utilisant les propriétés standards du conditionnement des processus gaussiens, la distribution conditionnelle de f^* donnée \mathcal{D} est :

$$f^* \mid \mathcal{D} \sim \mathcal{N}(m_{\mathcal{D}}(x^*), k_{\mathcal{D}}(x^*, x^*)),$$

avec moyenne postérieure

$$m_{\mathcal{D}}(x^*) = m(x^*) + k(x^*, X)(K + \sigma^2 I_N)^{-1}(y - m(X)),$$

et variance postérieure

$$k_{\mathcal{D}}(x^*, x^*) = k(x^*, x^*) - k(x^*, X)(K + \sigma^2 I_N)^{-1}k(X, x^*).$$

Si la moyenne prior m est supposée nulle, la moyenne postérieure $\mathbb{E}[f^* | \mathcal{D}]$ peut s'écrire :

$$\mathbb{E}[f^* | \mathcal{D}] = \sum_{i=1}^N \omega_i k(x_i, x^*), \quad \omega = (K + \sigma^2 I_N)^{-1}y.$$

Cette formulation permet de calculer la moyenne postérieure sans inverser explicitement $K + \sigma^2 I_N$, en résolvant le système $(K + \sigma^2 I_N)\omega = y$. En regroupant les termes $k(x^*, X)^\top (K + \sigma^2 I_N)^{-1}$, la moyenne postérieure peut aussi s'exprimer comme :

$$\mathbb{E}[f^* | \mathcal{D}] = \sum_{i=1}^N \varphi_i y_i, \quad \varphi = k(x^*, X)^\top (K + \sigma^2 I_N)^{-1}.$$

3.2 Entraînement des Algorithmes à Processus Gaussiens

L'application pratique de la **régression par processus gaussiens** repose fortement sur la sélection appropriée de la fonction de covariance. Cela nécessite une détermination minutieuse des hyperparamètres du noyau, l et σ_f . Soit $\theta = \{l, \sigma_f\}$ l'ensemble des paramètres du modèle. L'approche standard pour sélectionner ces hyperparamètres consiste à maximiser la **log-vraisemblance marginale** $l(\theta) = \ln(p(y | \theta))$, exprimée comme suit :

$$l(\theta) = \ln(p(y | \theta)) = -\frac{1}{2}y^\top (K + \sigma^2 I_n)^{-1}y - \frac{1}{2}\ln |K + \sigma^2 I_n| - \frac{n}{2}\ln(2\pi),$$

où le premier terme mesure l'ajustement aux données, le deuxième terme représente une **pénalité de complexité**, et le dernier terme est une constante de normalisation.

En supposant une moyenne a priori nulle et des observations sans bruit, les dérivées partielles de la log-vraisemblance marginale par rapport aux hyperparamètres sont données par :

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_j} = \frac{1}{2}y^\top K^{-1} \frac{\partial K}{\partial \theta_j} K^{-1}y - \frac{1}{2}\text{tr}\left(K^{-1} \frac{\partial K}{\partial \theta_j}\right),$$

où $\omega = K^{-1}y$.

Une limitation majeure des processus gaussiens réside dans leur **faible scalabilité** avec le nombre d'observations n . La complexité computationnelle pour évaluer la vraisemblance marginale est principalement dictée par l'inversion de la matrice de covariance K . Le logarithme du déterminant de K est calculé comme sous-produit de cette inversion. Pour des matrices symétriques définies positives de taille $n \times n$, les méthodes standards d'inversion nécessitent un temps en $\mathcal{O}(n^3)$. Une fois K^{-1} disponible, les dérivées peuvent être calculées en $\mathcal{O}(n^2)$ par hyperparamètre.

Par conséquent, le coût du calcul des dérivées est relativement faible, ce qui permet de résoudre efficacement le problème d'optimisation en utilisant des techniques telles que la **descente de gradient**, le **gradient conjugué** ou les **algorithmes quasi-Newton**.

3.3 Quadrature Bayésienne

Avec la régression par processus gaussiens établie comme outil de modélisation, nous pouvons maintenant revenir à l'intégrale intractable définie précédemment. La **quadrature bayésienne** offre un cadre probabiliste pour approximer de telles intégrales en modélisant la fonction cible f comme un processus gaussien. Cette approche remplace la fonction déterministe f par un processus stochastique f , transformant le problème d'intégration numérique en une variable aléatoire I , définie comme :

$$I = \int f(x) dp(x).$$

Comme l'opérateur d'intégration est un fonctionnel linéaire, l'intégrale d'un processus gaussien suit également une distribution gaussienne. Il est donc plus naturel de considérer une distribution a priori sur l'intégrande plutôt que sur l'intégrale elle-même, car les règles de quadrature reposent sur les évaluations ponctuelles $f(x_1), \dots, f(x_N)$. Pour certaines combinaisons noyau-prior, les poids de la quadrature peuvent être calculés analytiquement.

Bien que le maintien du modèle à processus gaussiens nécessite des ressources computationnelles, cette approche généralise l'information obtenue à partir des échantillons sur l'ensemble du domaine d'intégration. Cela permet une sélection ciblée des points d'échantillonnage, faisant de la quadrature bayésienne une alternative compétitive et efficace aux méthodes de Monte Carlo.

En supposant un a priori $f \sim GP(m, k)$, la distribution a priori résultante sur l'intégrale I est une loi normale univariée :

$$I \sim \mathcal{N}(m, \nu),$$

où

$$m = \mathbb{E}_f[I] = \int m(x) dp(x), \quad \nu = \mathbb{V}_f[I] = \iint k(x, x') dp(x) dp(x').$$

Étant donné les données $\mathcal{D} = \{X, y\}$, composées des points et des évaluations de la fonction, la régression par processus gaussiens peut être appliquée sur la distribution postérieure $f \mid \mathcal{D}$ à l'aide de l'opérateur d'intégration. La quadrature bayésienne fournit ainsi une méthode systématique pour traiter les observations bruitées y de l'intégrande f . La linéarité des processus gaussiens permet d'exprimer la distribution jointe de (y, I) comme :

$$\begin{bmatrix} y \\ I \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} m(X) \\ m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K + \sigma^2 I_N & \int k(X, x) dp(x) \\ \int k(x, X)^\top dp(x) & \iint k(x, x') dp(x) dp(x') \end{bmatrix} \right).$$

En conditionnant sur les données observées y , on obtient la distribution postérieure $I \mid y \sim \mathcal{N}(m_{\mathcal{D}}, \nu_{\mathcal{D}})$, où la moyenne postérieure $m_{\mathcal{D}}$ est donnée par :

$$m_{\mathcal{D}} = \mathbb{E}_{f|\mathcal{D}}[I] = \int m(x) dp(x) + \sum_{i=1}^N \int k(x, x_i) dp(x) (K + \sigma^2 I_N)^{-1} (y - m(X))_i,$$

et la variance postérieure $\nu_{\mathcal{D}}$ est donnée par :

$$\nu_{\mathcal{D}} = \mathbb{V}_{f|\mathcal{D}}[I] = \iint (k(x, x') - k(x, X)^\top (K + \sigma^2 I_N)^{-1} k(X, x')) dp(x) dp(x').$$

La mise en œuvre numérique de la quadrature bayésienne nécessite clairement le calcul de deux intégrales essentielles : la moyenne du noyau $\kappa(x) = \int k(x, x') dp(x')$ et la variance initiale $\nu = \iint k(x, x') dp(x) dp(x')$. En notant le vecteur des moyennes de noyau évaluées aux points X par $\kappa := \kappa(x)$, les équations précédentes peuvent être réécrites de manière plus compacte comme :

$$m_{\mathcal{D}} = m + \kappa^\top (K + \sigma^2 I_N)^{-1} (y - m(X)), \quad \nu_{\mathcal{D}} = \nu - \kappa^\top (K + \sigma^2 I_N)^{-1} \kappa.$$

Dans le cas spécifique d'un a priori nul et d'observations sans bruit, la moyenne postérieure de I se simplifie en :

$$m_{\mathcal{D}} = \kappa^{\top} K^{-1} f = \sum_{i=1}^N \omega_i f(x_i), \quad \omega = K^{-1} \kappa.$$

Cette formule représente la version standard d'une règle de quadrature, qui approxime l'intégrale comme une somme pondérée des évaluations de la fonction. La quadrature bayésienne reformule l'intégrale en remplaçant les intégrales de la fonction noyau. Pour améliorer l'efficacité computationnelle, le noyau utilisé en quadrature bayésienne est généralement choisi de manière à permettre un calcul analytique de la moyenne du noyau et de la variance initiale.

4 Calcul du CVA sous le Modèle Linéaire Gaussien de Markov à un Facteur

Le calcul des indicateurs de risque de contrepartie et du *credit valuation adjustment (CVA)* d'un portefeuille de trading est couramment réalisé à l'aide de *simulations de Monte Carlo*, car cette approche est généralement simple à mettre en œuvre. Cependant, son principal inconvénient réside dans ses performances, puisque la précision augmente avec le nombre de simulations. Lorsqu'on adopte un cadre de modélisation spécifique comme le *modèle linéaire gaussien de Markov à un facteur (LGM-1F)*, d'autres méthodes alternatives constituent des options sérieuses pour calculer ces indicateurs, offrant des performances très compétitives par rapport à la méthode de Monte Carlo.

Comme mentionné précédemment, le choix du modèle LGM-1F est motivé par son statut de consensus de marché pour l'évaluation de la majorité des dérivés de taux d'intérêt. Il apparaît donc naturel d'utiliser le même modèle pour estimer l'ajustement de valorisation lié au risque de contrepartie (*CVA*). Dans ce cadre, les produits dérivés constituant notre portefeuille de trading sont des *swaps de taux d'intérêt* et des *swaptions*. Nous présentons ici, aux côtés de la méthode Monte Carlo, la *méthode d'intégration numérique* pour calculer le CVA d'un portefeuille de swaps et/ou de swaptions, ainsi qu'une formule analytique servant de proxy, utilisées comme méthodes de référence pour le calcul du CVA.

Dans la suite de cet article, le modèle LGM-1F est utilisé dans un cadre *single-curve*. Cependant, il est important de noter que notre approche peut également s'appliquer dans un cadre *multi-curve* pour la valorisation et la gestion des risques des dérivés de taux. Les résultats de notre étude sont indépendants de ce choix.

Dans le cadre LGM-1F, la dynamique de l'obligation zéro-coupon $B(t, T)$ à maturité T suit un processus lognormal sous la probabilité risque-neutre Q . La volatilité de l'obligation zéro-coupon est déterministe et donnée par :

$$\Gamma(t, T) = \frac{\sigma}{\lambda} (e^{-\lambda(T-t)} - 1),$$

où σ est une constante par morceaux et λ est la constante de réversion à la moyenne.

L'hypothèse LGM-1F, dérivée du cadre HJM, spécifie la dynamique de la courbe des taux à partir de la volatilité à court terme σ et du paramètre de réversion λ :

$$dX_t = [\phi(t) - \lambda X_t]dt + \sigma(t)dW_t^Q, \quad X_0 = 0, \quad \phi(t) = \int_0^t \sigma(s)^2 e^{-2\lambda(t-s)} ds.$$

À toute date future t , les obligations zéro-coupon sont obtenues comme des fonctions déterministes de la variable d'état X_t , selon la formule de construction :

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left(-\frac{1}{2} \beta(t, T)^2 \phi(t) - \beta(t, T) X_t \right), \quad \beta(t, T) = \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda}.$$

Considérons un swap de taux d'intérêt, avec des dates de règlement $T_0 < T_1 < \dots < T_n$ pour la jambe fixe (sans flux échangé à T_0). Le taux swap fixe défini à la date $t \leq T_0$ est donné par :

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\text{LVL}(t, T_0, T_n)}, \quad \text{LVL}(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i),$$

où δ_i représente la fraction d'année entre T_{i-1} et T_i , calculée selon la base adéquate.

Dans ce cadre, la valeur d'un swap payeur à taux fixe avec strike K à une date future t s'exprime comme :

$$V(t, X_t) = B(t, T_0) - B(t, T_n) - K \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i).$$

Le calcul de l'exposition espérée $EE(t)$ à une date future t pour un portefeuille de swaps de taux d'intérêt peut être réalisé soit par simulations Monte Carlo, soit via une intégrale unidimensionnelle impliquant la fonction de valeur $V(t, \cdot)$ et la densité φ_t de la variable gaussienne X_t sous la mesure terminale Q^t :

$$EE(t) = \mathbb{E}^Q[D(0, t)V(t, X_t)^+] = B(0, t)\mathbb{E}^{Q^t}[V(t, X_t)^+] = B(0, t) \int_{-\infty}^{+\infty} V(t, x)^+ \varphi_t(x) dx,$$

où $x^+ := \max(x, 0)$.

Le CVA du portefeuille de swaps est donné par :

$$CVA = (1-R)\mathbb{E}^Q[B(0, \tau) \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau, x)^+ \varphi_\tau(x) dx \cdot 1_{\tau \leq T_e}] = (1-R) \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} B(0, t)V(t, x)^+ \varphi_t(x) dx dS(0, t),$$

où R est le taux de recouvrement.

Dans cet article, le calcul de l'exposition espérée selon la formule précédente est désigné sous le nom de **méthode d'intégration numérique (méthode NI)**.

4.1 Approximation Analytique du CVA sous le Modèle LGM-1F

Il peut parfois être utile d'estimer rapidement l'exposition espérée et le **CVA** d'un portefeuille de swaps de taux d'intérêt, ou la contribution marginale d'un swap à ce portefeuille, en dehors du système officiel de simulation. Pour ce faire, nous montrons que la distribution des valeurs d'un tel portefeuille sous le modèle **LGM-1F** peut être approximée par une distribution gaussienne.

Considérons un portefeuille de n swaps de taux d'intérêt, où la valeur de chaque swap à une date future t est notée $V_i(t)$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Sans perte de généralité, en supposant que les swaps sont des payeurs, on peut écrire :

$$V_i(t) = \sum_{k=0}^{m_i} c_k^i B(t, T_k^i),$$

où

$$c_0^i = 1, \quad c_{m_i}^i = 1 - (T_{m_i}^i - T_{m_i-1}^i)K_i, \quad c_k^i = -(T_k^i - T_{k-1}^i)K_i, \quad k = 1, \dots, m_i - 1.$$

En effectuant un développement limité d'ordre 1 de $B(t, T_k^i)$ (selon la formule donnée précédemment) par rapport à X_t , on obtient :

$$B(t, T_k^i) \approx A(t, T_k^i) - A(t, T_k^i)\beta(t, T_k^i)X_t,$$

avec

$$A(t, T_k^i) = \frac{B(0, T_k^i)}{B(0, t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta(t, T_k^i)^2\phi(t)\right).$$

En prenant cette approximation en compte, la valeur future $V_i(t)$ de chaque swap i s'exprime comme une fonction affine de la variable gaussienne X_t :

$$V_i(t) \approx \sum_{k=0}^{m_i} c_k^i A(t, T_k^i) - \sum_{k=0}^{m_i} c_k^i A(t, T_k^i)\beta(t, T_k^i)X_t.$$

Comme la somme de variables normales reste normale, la valeur totale du portefeuille $V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t)$ est normalement distribuée et s'exprime :

$$V(t) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i} c_k^i A(t, T_k^i) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i} c_k^i A(t, T_k^i)\beta(t, T_k^i)X_t.$$

L'espérance et l'écart-type de $V(t)$ à un instant futur t sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_P(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i} c_k^i A(t, T_k^i) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i} c_k^i A(t, T_k^i)\beta(t, T_k^i)\mathbb{E}[X_t], \\ \sigma_P^2(t) &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i} c_k^i A(t, T_k^i)\beta(t, T_k^i) \right)^2 \mathbb{V}[X_t]. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'exposition espérée $EE(t)$ du portefeuille est :

$$EE(t) = B(0, t)\mathbb{E}^{Q^t}[\max(\mu_P(t) + \sigma_P(t)Z, 0)] = B(0, t) \left(\mu_P(t)N\left(\frac{\mu_P(t)}{\sigma_P(t)}\right) + \sigma_P(t)\Phi\left(\frac{\mu_P(t)}{\sigma_P(t)}\right) \right),$$

où Φ est la fonction de densité de la loi normale standard et N est sa fonction de répartition.

Le calcul effectif de $\mu_P(t)$ et $\sigma_P(t)$ repose sur l'espérance et la variance de X_t . Dans le modèle LGM-1F, la forme intégrée de la dynamique de X_t est :

$$X_t = \int_0^t \phi(s)e^{-\lambda(t-s)}ds + \int_0^t \sigma(s)e^{-\lambda(t-s)}dW_s^Q = \int_0^t (\phi(s) + \sigma(s)\Gamma(s, t))e^{-\lambda(t-s)}ds + \int_0^t \sigma(s)e^{-\lambda(t-s)}dW_s^Q.$$

Ainsi, sous Q^t , on obtient analytiquement :

$$\mathbb{E}[X_t] = \int_0^t (\phi(s) + \sigma(s)\Gamma(s, t))e^{-\lambda(t-s)}ds, \quad \mathbb{V}[X_t] = \int_0^t \sigma(s)^2 e^{-2\lambda(t-s)}ds.$$

Le **Credit Valuation Adjustment** est évalué au niveau de la contrepartie, mais il peut être utile d'identifier les contributions individuelles des transactions à ce CVA. Cela peut être obtenu facilement à l'aide d'une formule analytique lorsque la distribution de l'exposition est gaussienne, comme c'est le cas ici.

4.2 Valorisation des Swaptions sous le Modèle LGM-1F

Considérons un swap avec date d'expiration T_e . Soient $T_0 < T_1 < \dots < T_n$ (avec $T_e < T_0$) les dates de règlement de la jambe fixe (aucun flux échangé à T_0). Le taux swap fixe défini à la date T_e est donné par :

$$S(T_e, T_0, T_n) = \frac{B(T_e, T_0) - B(T_e, T_n)}{\text{LVL}(T_e, T_0, T_n)}, \quad \text{LVL}(T_e, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i B(T_e, T_i),$$

où δ_i représente la fraction d'année entre T_{i-1} et T_i , calculée selon la base adéquate.

Une swaption payeur de strike K écrite sur ce swap est une option arrivant à échéance en T_e , avec un payoff :

$$\left(B(T_e, T_0) - B(T_e, T_n) - \sum_{i=1}^n \delta_i K B(T_e, T_i) \right)^+.$$

Dans le cadre du modèle LGM-1F, on peut démontrer que ce payoff peut être exprimé comme une somme pondérée d'options d'achat (call) avec des sous-jacents et des strikes appropriés :

$$\sum_{i=1}^n c_i \left(\frac{B(T_e, T_i)}{B(T_e, T_0)} - K_i \right)^+,$$

où $c_i = \delta_i K$ pour $i = 1, \dots, n-1$, $c_n = 1 + \delta_n K$, et $K_i = \frac{B(T_e, T_0)(x_0)}{B(T_e, T_i)(x_0)}$.

En effet, si l'on écrit $B(T_e, T_i)(x) = B_{T_e, T_i}(X_{T_e})$, on observe (selon la formule précédente) que, pour tout i , la fonction $x \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \frac{B_{T_e, T_i}(x)}{B_{T_e, T_0}(x)}$ est strictement décroissante, formant une bijection entre \mathbb{R} et $]0, +\infty[$. Par conséquent, il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{B_{T_e, T_i}(x_0)}{B_{T_e, T_0}(x_0)} = 1.$$

Par construction, les n options d'achat de cette décomposition partagent le même domaine d'exercice, défini par $X_{T_e} < x_0$ pour la swaption payeur. Selon la théorie de Black-Scholes, le prix d'une swaption à la date $t = 0$ s'exprime comme :

$$\begin{aligned} V^*(0, T_e, T_0, T_n) &= B(0, T_e) \mathbb{E}^{Q^{T_e}} \left[\left(B(T_e, T_0) - B(T_e, T_n) - \sum_{i=1}^n \delta_i K B(T_e, T_i) \right)^+ \right], \\ &= B(0, T_e) \sum_{i=1}^n c_i P_{bs}(F_i, 0, \sigma_i^{bs}, K_i, T_e), \end{aligned}$$

où P_{bs} désigne le prix Black-Scholes d'une option d'achat, et :

$$F_i = \frac{B(0, T_i)}{B(0, T_e)}, \quad \sigma_i^{bs} = \sqrt{T_e} \beta(T_e, T_i) \phi(T_e).$$

La formule de valorisation des swaptions européennes est dite quasi-fermée, car le calcul des strikes K_i (pour $i = 1, \dots, n$) nécessite de résoudre numériquement les zéros d'une fonction non linéaire. Cela peut devenir coûteux en temps de calcul si cette formule est utilisée de façon répétée, par exemple pour calculer le CVA d'un portefeuille de trading incluant des swaptions via des simulations Monte Carlo.

Pour contourner cette limitation, nous proposons dans la section suivante une méthode plus efficace.

4.3 Valorisation des Swaptions avec le Modèle de Bachelier

Nous proposons ici une méthode alternative pour valoriser une swaption, basée sur une approximation des dynamiques du taux swap dans le cadre du modèle **LGM-1F**. Pour cela, nous cherchons à calculer le différentiel $dS(t)$ à partir de la Formule (30), en appliquant le lemme d'Itô et en négligeant les termes présents dans la dérive (pour simplifier les notations, nous omettons la dépendance en T_0 et T_n : $S(t) := S(t, T_0, T_n)$) :

$$dS(t) = \frac{dB(t, T_0) - dB(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)} - \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{(\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i))^2} \sum_{i=1}^n \delta_i dB(t, T_i) + (\dots)dt.$$

En utilisant les hypothèses faites sur les dynamiques des taux zéro-coupon dans le cadre du LGM-1F, on obtient l'expression suivante pour $\lambda \neq 0$:

$$dS(t) = \frac{\sigma(t)}{\lambda} e^{\lambda t} S(t) \frac{B(t, T_0)e^{-\lambda T_0} - B(t, T_n)e^{-\lambda T_n}}{B(t, T_0) - B(t, T_n)} - \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)e^{-\lambda T_i}}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)} dW_t^Q + (\dots)dt.$$

Pour simplifier la notation, nous introduisons une fonction $g(\cdot)$ telle que :

$$dS(t) = \sigma(t)e^{\lambda t} g(t) S(t) dW_t^Q + (\dots)dt.$$

L'équation (53) suggère deux types d'approximations :

- Supposer des dynamiques log-normales pour le taux swap avec g figé.
- Supposer des dynamiques gaussiennes pour le taux swap avec une dérive figée.

Pour obtenir l'approximation gaussienne, on écarte le terme de dérive et on fige l'expression de $g(t)S(t)$ à sa valeur initiale, c'est-à-dire : $\forall t > 0, g(t)S(t) \approx g(0)S(0)$. On obtient alors l'approximation suivante pour les dynamiques normales du taux d'intérêt $S(t)$:

$$dS(t) = \sigma(t)e^{\lambda t} g(0)S(0) dW_t^Q.$$

Nous avons conduit une étude comparative entre la distribution empirique LGM-1F du taux swap et les distributions gaussienne et log-normale des deux approximations. Les tests numériques révèlent que la distribution du taux swap est plus proche d'une distribution **gaussienne** que log-normale.

Pour illustrer cela, les résultats de l'étude comparative sont résumés dans la Figure 1. Dans la suite, nous nous limiterons au cas $\lambda \neq 0$, mais les équations et la fonction g peuvent être adaptées au cas $\lambda = 0$.

Une manière de tester la validité de l'hypothèse de normalité des taux swap sous le modèle LGM-1F utilisé dans l'approximation est de comparer la distribution empirique d'un taux swap avec la distribution gaussienne du taux à une date donnée t . Pour ce faire, nous nous concentrons sur la distribution du taux swap à la date $t = 3Y$. Ce swap débute à $T_0 = 3Y$ et arrive à maturité à $T_n = 10Y$. La fréquence des paiements est semestrielle.

Nous avons utilisé 30 000 simulations. La distribution empirique a été construite sur la base de 30 classes homogènes. Dans la Figure 1, l'histogramme correspond à la distribution empirique obtenue via les simulations Monte Carlo. La courbe représente la distribution gaussienne théorique de l'approximation. Les tests de distribution montrent que l'approximation gaussienne des dynamiques du taux swap est très proche des dynamiques obtenues dans le cadre LGM-1F. La qualité de l'approximation reste stable pour différents niveaux de volatilité instantanée σ et de

réversion à la moyenne λ . L'approximation apparaît donc comme plus adaptée à notre choix de modélisation.

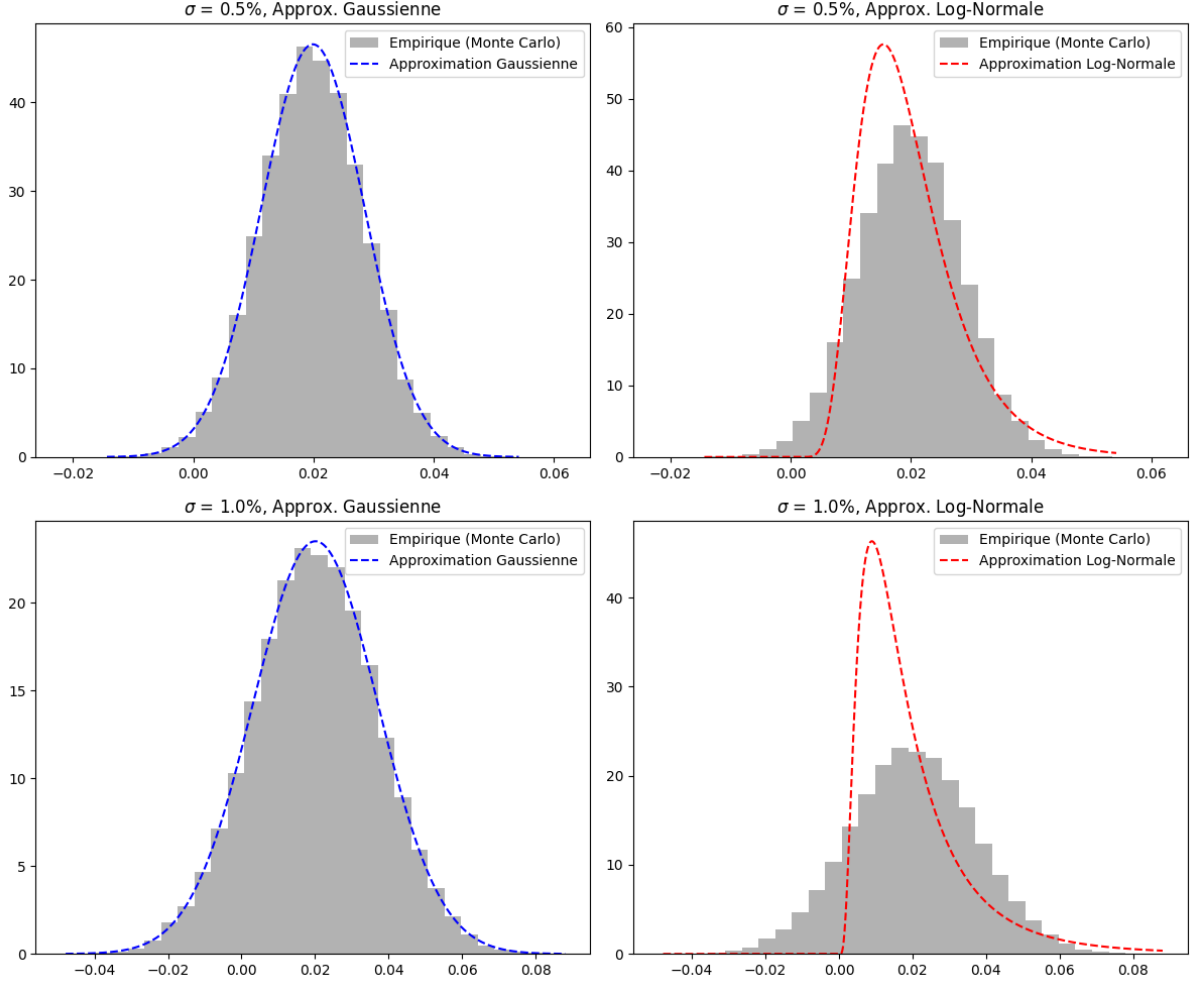


FIGURE 1 – Simulations d'un processus gaussien avant et après l'apprentissage

Lorsque les dynamiques du taux swap $S(t)$ sont gouvernées par le processus normal, l'évaluation d'une swaption peut être obtenue en utilisant la *formule de Bachelier* comme suit :

$$\begin{aligned}
 V^*(0) &= \mathbb{E}^Q[D(0, T_e) \text{LVL}(T_e)(S(T_e) - K)^+] = \text{LVL}(0) \mathbb{E}^{Q^{\text{LVL}}}[(S(T_e) - K)^+], \\
 &= \text{LVL}(0) \left(S(0)\sigma^* \sqrt{T_e} \Phi\left(\frac{K - S(0)}{S(0)\sigma^* \sqrt{T_e}}\right) + (S(0) - K) \left(1 - N\left(\frac{K - S(0)}{S(0)\sigma^* \sqrt{T_e}}\right)\right) \right), \\
 \text{où } \sigma^* &:= \frac{\sigma g(0)}{\sqrt{T_e}} \sqrt{\frac{e^{2\lambda T} - 1}{2\lambda}}.
 \end{aligned}$$

(Remarquons que nous négligeons le terme de dérive associé au changement de mesure dans la dynamique du taux swap $S(t)$, et la validité de cette approximation est confirmée par les tests numériques de la Section 5. Pour plus de détails sur le changement de mesure, voir l'Annexe A.)

Dans ce cadre, l'exposition espérée $EE(t)$ d'un swap unitaire à une date future t correspond simplement à la valeur de la swaption écrite sur ce swap, avec maturité t :

$$EE(t) = \mathbb{E}^Q[D(0, t)V(t, X_t)^+] = V^*(t).$$

En réalité, l'exposition espérée peut être calculée exactement en utilisant soit la formule fermée précédente, soit l'approximation de Bachelier. Ainsi, le CVA du swap est exprimé comme :

$$CVA = (1 - R) \sum_{i=1}^m [S(0, t_{i-1}) - S(0, t_i)] \times V^*(t_i),$$

où m représente le nombre de pas de discrétisation (par exemple, $m \approx 2500$ pour le calcul du CVA d'un swap à 10 ans avec une discrétisation quotidienne).

Maintenant, si l'on note la valeur d'une swaption européenne à une date future t par $V^*(t, X_t)$, alors le CVA peut se réécrire :

$$CVA = \mathbb{E}^Q [(1 - R) \times D(0, \tau) V^*(\tau, X_\tau)^+ \times 1_{\tau \leq T_e}] = (1 - R) \times \mathbb{E}^Q [D(0, \tau) V^*(\tau, X_\tau)] \times \mathbb{E}^Q [1_{\tau \leq T_e}].$$

Comme l'exposition d'une position longue en swaption ne peut jamais être négative, le CVA peut se simplifier :

$$CVA = (1 - R) \times P(0, T_e) \times V^*(0).$$

En revanche, si l'exposition à la contrepartie consiste en un portefeuille comprenant des positions longues et courtes en swaptions, celle-ci peut devenir négative et, par conséquent, aucune formule fermée n'est disponible pour le calcul du CVA, rendant son évaluation plus complexe.

5 Applications Numériques pour le Calcul du CVA

Cette section a pour objectif d'évaluer numériquement la *précision* et la *rapidité* de la quadrature bayésienne pour le calcul du CVA dans un portefeuille de dérivés. Nous nous concentrons sur une étude de cas unique portant sur un portefeuille de 400 swaps de taux d'intérêt libellés dans une seule devise. La *régression par processus gaussiens (GPR)* est entraînée sur la maturité résiduelle du portefeuille et un unique facteur de risque, à savoir le taux d'intérêt à court terme X_t du modèle LGM à un facteur. Bien que nous considérions ici un portefeuille en devise unique, cette approche peut être facilement généralisée à un portefeuille multidevises.

Dans ce contexte, les *simulations de Monte Carlo* servent de méthode de référence pour notre étude comparative sur les calculs d'exposition espérée (EE) et de CVA. La majorité des calculs de CVA sont réalisés au niveau des ensembles de compensation (*netting sets*) à l'aide de simulations Monte Carlo. L'exposition espérée peut être évaluée au niveau du portefeuille, mais dans cette étude, nous nous concentrons, sans perte de généralité, sur le calcul du CVA au niveau du netting set.

Pour les simulations Monte Carlo, nous avons simulé 60 000 trajectoires des facteurs de risque de marché sur 500 pas de temps futurs, aboutissant à 30 000 000 de simulations, utilisées comme référence pour les comparaisons.

Pour l'implémentation numérique, nous avons utilisé Python et nous nous sommes appuyés sur des bibliothèques largement adoptées pour la simulation et la modélisation. Plus précisément, *NumPy* a été utilisé pour générer les échantillons aléatoires des simulations Monte Carlo, tandis que *GPy* et *Emukit* ont été employés pour la régression par processus gaussiens et la quadrature bayésienne, respectivement. Ces bibliothèques offrent des outils robustes et efficaces pour les modèles statistiques et d'apprentissage automatique requis dans ce travail.

Les paramètres et données d'entrée utilisés dans les tests numériques, tels que les caractéristiques du portefeuille de swaps de taux d'intérêt, les paramètres du modèle LGM-1F, et la configuration des méthodes GPR et quadrature bayésienne, sont détaillés dans l'Annexe B. Cette annexe fournit

une spécification complète de tous les éléments numériques, garantissant *reproductibilité* et *transparence*.

Les figures présentées dans cette section complètent visuellement les expériences numériques, offrant des perspectives sur la précision, l'efficacité computationnelle et l'applicabilité des méthodes étudiées. Chaque figure a un objectif spécifique pour démontrer la méthodologie et valider les résultats.

5.1 Tests de Convergence pour un Swap Unitaire

Avant de présenter la méthode de calcul de l'exposition espérée (EE) et du *credit valuation adjustment* (CVA) pour un portefeuille de swaps, nous abordons d'abord le calcul pour un swap unique. Celui-ci peut être calculé avec précision en utilisant l'expression fermée (49) ou la *formule de Bachelier* (55) pour l'exposition espérée (56). Dans ce test numérique, nous avons vérifié les conditions de convergence de la méthode de quadrature bayésienne lors du calcul de l'EE et du CVA pour un swap unique.

La Figure 2 illustre le profil d'exposition espérée (EE) d'un swap de taux d'intérêt à 8 ans, calculé selon trois méthodes : la formule quasi-fermée (49) sous le modèle LGM-1F avec discrétisation quotidienne, l'approximation gaussienne (55), et les simulations de Monte Carlo. Les simulations Monte Carlo ont été effectuées avec 10 000 échantillons (graphique de gauche) et 60 000 échantillons (graphique de droite).

La figure met en évidence des enseignements clés sur les propriétés de convergence des profils d'EE. Elle démontre que l'approximation gaussienne est valide et que 60 000 simulations suffisent pour atteindre la convergence vers les prix de swaption de référence (LGM-1F). Pour la suite, l'hypothèse gaussienne sur les taux swap et la formule de Bachelier servent de références pour la valorisation des swaptions.

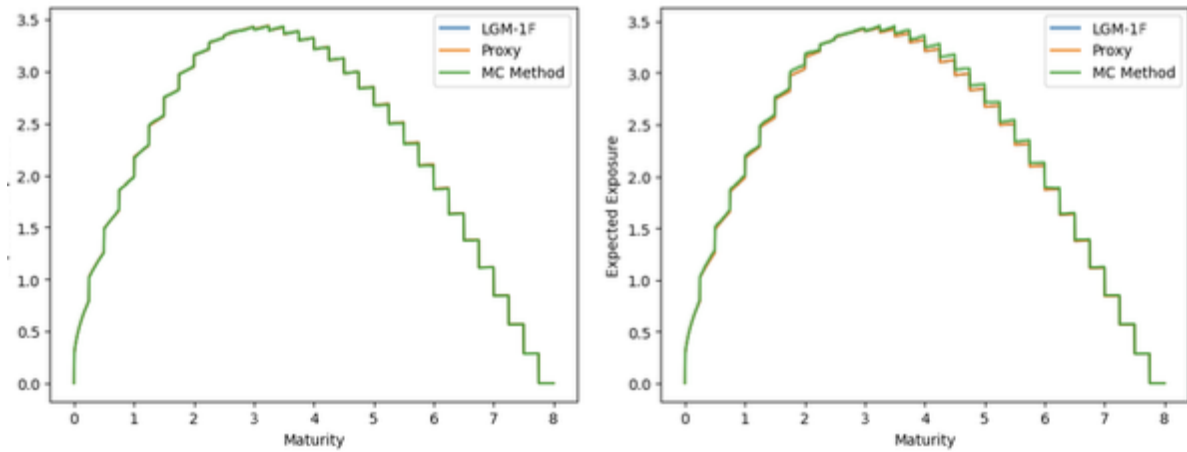


FIGURE 2 – Figure 2. Exposition espérée (Expected Exposure) d'un swap de taux d'intérêt à 8 ans avec paiements semi-annuels, calculée selon trois méthodes : formule quasi-fermée LGM-1F (49), formule fermée basée sur l'approximation gaussienne (55), et évaluation par simulation Monte Carlo. (Graphique de gauche) La méthode Monte Carlo utilise 10 000 simulations, et (graphique de droite) elle utilise 60 000 simulations.

La Figure 3 présente le *profil d'exposition espérée (EE)* d'un swap de taux d'intérêt à 8 ans, calculé en utilisant la *formule quasi-fermée* (49) sous le modèle LGM-1F avec une discrétisation quotidienne, ainsi que la *régression par processus gaussiens (GPR)*.

Le panneau de gauche utilise 10 observations de prix issues du LGM-1F, tandis que le panneau de droite est basé sur 20 observations. Cette analyse démontre que la GPR offre un ajustement précis au profil d'EE avec un nombre limité de points d'entraînement, mettant en évidence à la fois son *efficacité computationnelle* et sa *précision*.

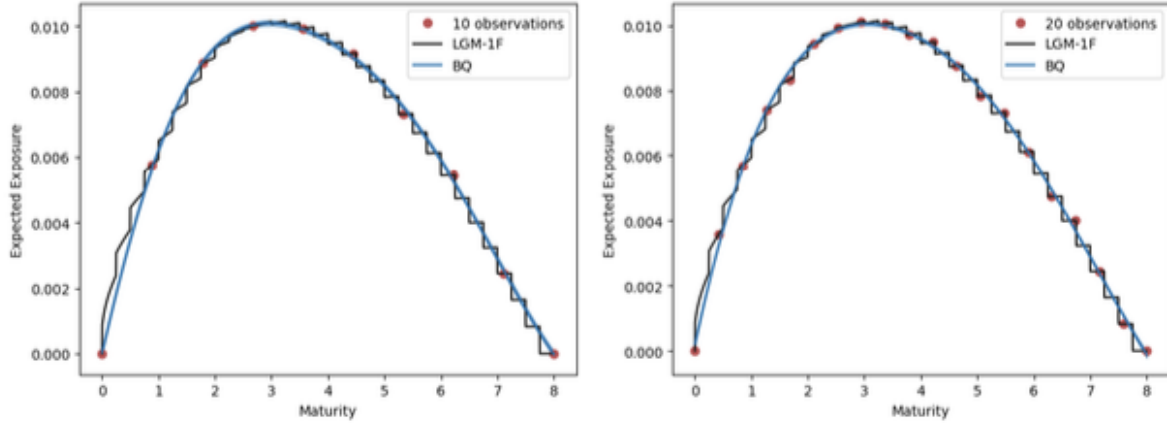


FIGURE 3 – Profil d'Exposition Espérée d'un Swap à 8 Ans — Comparaison entre LGM-1F et GPR

5.2 Calcul du CVA d'un Portefeuille de Swaps de Taux d'Intérêt par les Approches Classiques

Nous présentons ici un exemple numérique appliqué à un portefeuille de swaps de taux d'intérêt. Le nombre de swaps a été arbitrairement fixé à 400, avec des montants notionnels uniformément définis à 10 000 EUR. Les autres caractéristiques des swaps, telles que la fréquence des paiements et la maturité, ont été assignées aléatoirement. Sans perte de généralité, le cadre de valorisation utilisé repose sur une approche à courbe unique. Cependant, cela n'a pas d'impact sur notre analyse quantitative, car notre approche peut être facilement adaptée à un cadre multicroissance (*multicurve*).

Comme référence, nous avons considéré deux approches : (i) la valorisation complète par la méthode de Monte Carlo combinée à une intégration numérique, et (ii) deux intégrations numériques successives. Plus précisément, le profil d'exposition espérée a été calculé soit via la méthode de Monte Carlo, soit par intégration numérique (Formule 32). Ensuite, le CVA a été déterminé par intégration numérique par rapport au temps jusqu'à maturité.

Le Tableau 1 présente la valeur du CVA calculée à l'aide de la méthode Monte Carlo en fonction du nombre de simulations, ainsi que les temps de calcul correspondants. Par ailleurs, le Tableau 2 affiche les mêmes résultats en fonction du nombre de pas de discrétisation. Le test numérique a montré que la méthode Monte Carlo converge à 60 000 simulations, donnant une valeur de CVA de 431 EUR avec un temps de calcul de 33 minutes. En revanche, l'intégration numérique a atteint presque la même valeur avec un pas de discrétisation de 300, mais avec un temps de calcul de seulement 40 secondes.

Il est important de noter que dans l'exemple présenté ici, la mise en œuvre de l'intégration numérique est relativement simple. Cependant, dans le cas général où le portefeuille est influencé par plusieurs facteurs de risque, cette approche devient plus complexe. Par conséquent, la méthode Monte Carlo est généralement la seule option viable pour une implémentation numérique efficace

TABLE 1 – Calculation of CVA using Monte Carlo simulations

No. of Simulations	CVA Value (EUR)	Computation Time (Seconds)
10,000	434	822
40,000	434	1053
60,000	431	2006
80,000	431	3165
100,000	431	9866

TABLE 2 – Calculation of CVA using the numerical integration method

Discretization Steps	CVA Value (EUR)	Computation Time (Seconds)
50	436	6
100	430	13
300	431	41
500	432	72
700	432	96

La Figure 4 illustre le *profil d'exposition espérée (EE)* d'un portefeuille de 400 swaps de taux d'intérêt, calculé en utilisant trois méthodes : *Monte Carlo*, *intégration numérique (NI)*, et *proxy gaussien*. L'alignement étroit des profils obtenus par ces différentes méthodes souligne la *précision* du proxy gaussien, en particulier dans les scénarios de faible volatilité.

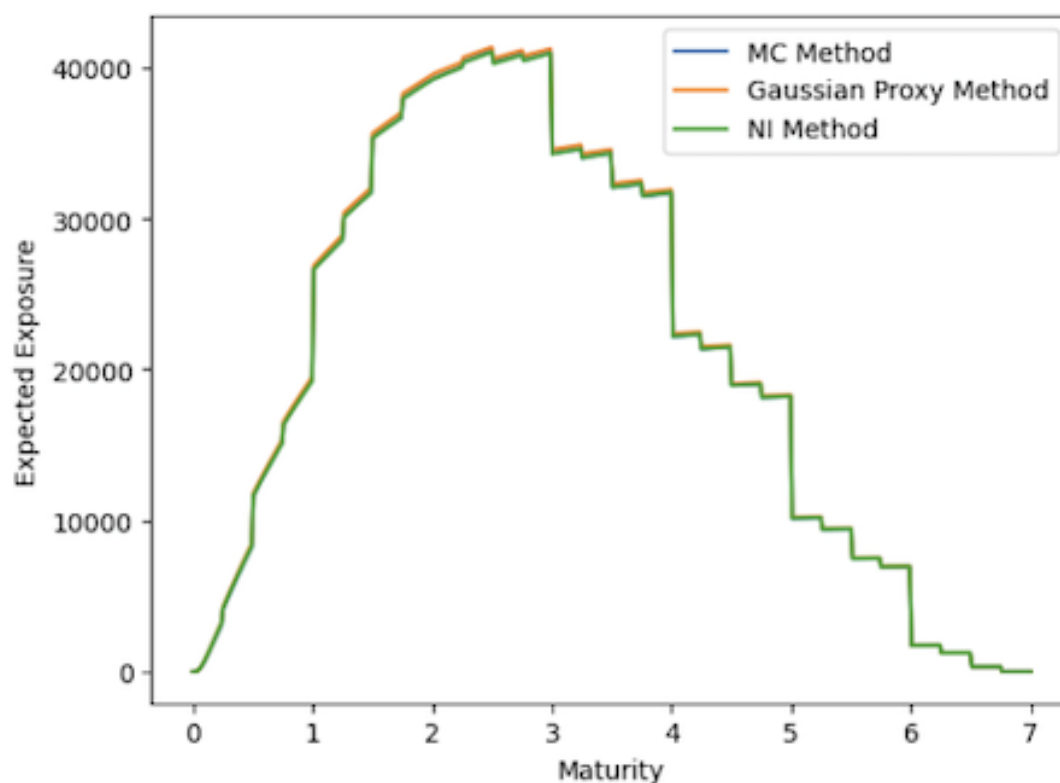


FIGURE 4 – Profil d'Exposition Espérée d'un Portefeuille de 400 Swaps de Taux d'Intérêt

Le Tableau 3 présente les résultats numériques d'une *étude comparative* entre la méthode de Monte Carlo, l'*intégration numérique (NI)*, et le *proxy gaussien*. Le proxy fournit de bons résultats, en particulier pour des niveaux de volatilité relativement faibles.

TABLE 3 – Calculation of CVA using Gaussian proxy method

LGM-1F Volatility	MC Value (EUR)	NI Value (EUR)	Proxy Value (EUR)
0.5%	432	431	435
1%	629	628	642
1.5%	845	841	874
2%	1066	1062	1116

Afin d'assurer la robustesse de l'approximation gaussienne, nous avons comparé la densité de la valeur simulée d'un portefeuille de swaps de taux d'intérêt à une date future avec les densités obtenues en utilisant les deux autres méthodes alternatives, pour des niveaux de volatilité LGM-1F compris entre 50 et 200 points de base. Les densités des trois méthodes sont illustrées dans la Figure 5.

Ce test démontre que le proxy gaussien offre un bon compromis entre *précision* et *temps de calcul* (13 s pour la méthode du proxy gaussien, 72 s pour la méthode d'intégration numérique, et 33 min pour la méthode Monte Carlo).

La Figure 5 compare les fonctions de densité des valeurs de portefeuille à une date future, calculées à l'aide de Monte Carlo, NI, et du proxy gaussien pour différents niveaux de volatilité. Les résultats montrent que le proxy gaussien constitue un compromis raisonnable entre *précision* et *rapidité*, avec des temps de calcul significativement inférieurs à ceux de Monte Carlo.

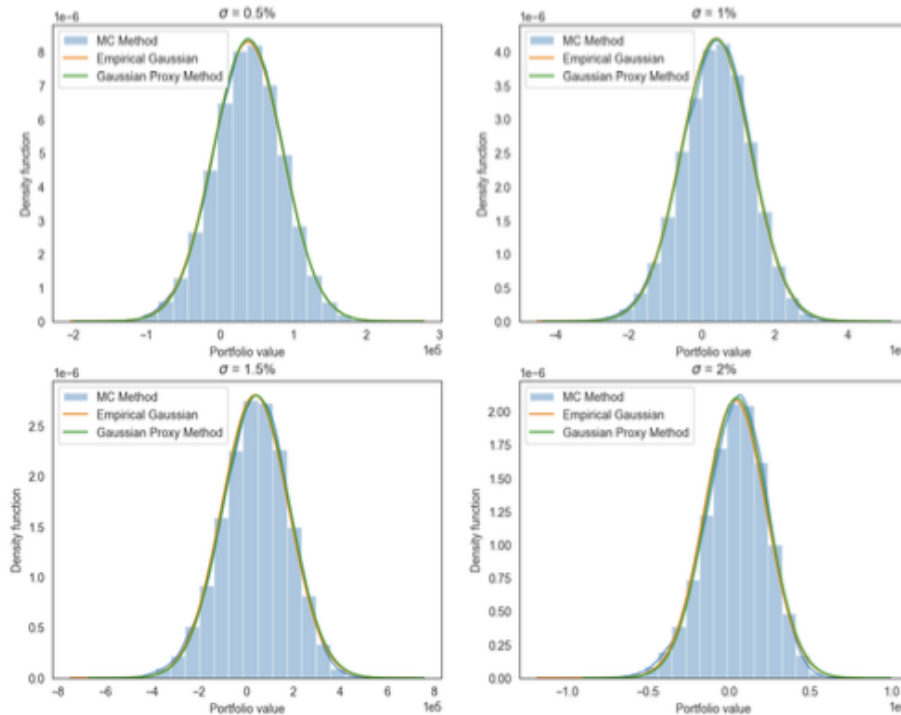


FIGURE 5 – Comparaison des Densités de Valeurs de Portefeuille à une Date Future

5.3 Tests Numériques pour le Calcul du CVA par GPR et Quadrature Bayésienne

Dans cette sous-section, nous reprenons l'exemple numérique précédent d'un portefeuille de swaps de taux d'intérêt afin d'évaluer les performances de la *quadrature bayésienne* en termes de *précision* et d'*efficacité computationnelle*. Comme référence, nous avons comparé cette approche au calcul du CVA utilisant la méthode de Monte Carlo avec 60 000 simulations et 500 pas de temps pour obtenir le profil d'exposition espérée sur toute la maturité maximale du portefeuille. La valeur du portefeuille de swaps de taux d'intérêt a été estimée à EUR $-54\,507$, avec une valeur de CVA correspondante de EUR 432. Le temps d'exécution pour le calcul du CVA avec la méthode de Monte Carlo était d'environ 33 minutes (cf. Tableau 1).

Comme expliqué précédemment, l'entraînement des méthodes de *quadrature bayésienne (BQ)* et de *régression par processus gaussiens (GPR)* se fait à la fois sur l'axe temporel pour l'intégration numérique, et sur les facteurs de risque pilotant le portefeuille, représentés ici par la variable gaussienne X_t . Nous avons donc mené des tests en faisant varier le nombre de points utilisés pour entraîner la GPR et la BQ.

La Figure 6 illustre les valeurs du portefeuille de 400 swaps de taux d'intérêt à une date future, calculées à l'aide d'un pricer classique de swaps et de l'algorithme GPR, pour 60 000 valeurs simulées de la variable gaussienne X_t . Cette figure démontre l'efficacité de la GPR pour estimer les valeurs de portefeuille avec un nombre limité de points d'entraînement. Les résultats révèlent que la GPR atteint des approximations précises avec seulement cinq points d'entraînement, réduisant ainsi significativement les coûts computationnels tout en maintenant la précision.

Le calcul du CVA et de l'exposition espérée implique 60 000 simulations de la valeur du portefeuille de taux swap sur 500 dates de discrétisation. Ce processus est coûteux en temps, car chacun des 400 swaps est valorisé individuellement pour les 60 000 simulations. Dans le test numérique suivant, au lieu de calculer la valeur du portefeuille 60 000 fois, nous l'avons réalisée un nombre bien plus limité de fois (par exemple, de 5 à 15 fois). Ces valorisations ont servi de points d'entraînement pour la GPR. Les deux graphiques ci-dessus montrent que la GPR fournit une excellente approximation avec seulement cinq points d'entraînement. Nous avons donc sélectionné cinq prix pour entraîner l'algorithme

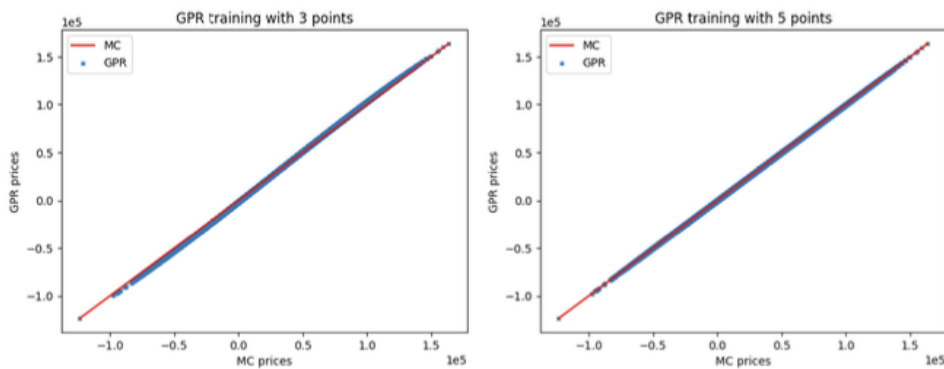


FIGURE 6 – Comparaison des Prix Monte Carlo et des Prix GPR pour 60 000 Simulations sur une Date de Discrétisation Donnée

La Figure 7 présente les *profils d'exposition espérée (EE)* du portefeuille de 400 swaps de taux d'intérêt pour 15, 20, 30 et 40 points d'observation utilisés lors de l'entraînement de l'algorithme de *quadrature bayésienne*. Cette figure démontre l'impact de la variation du nombre de points d'entraînement (15, 20, 30 et 40) sur les profils EE du portefeuille de swaps en utilisant la quadrature bayésienne. Les résultats indiquent qu'augmenter le nombre d'observations améliore

la précision, offrant ainsi une flexibilité pour équilibrer précision et efficacité computationnelle.

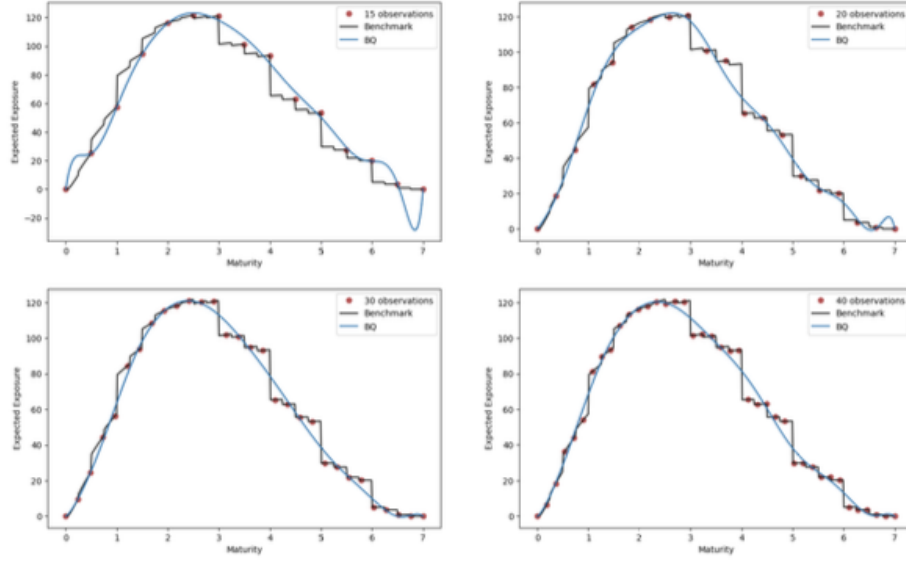


FIGURE 7 – Comparaison des Prix Monte Carlo et des Prix GPR pour 60 000 Simulations sur une Date de Discrétisation Donnée

Nous avons mené un test numérique utilisant 40 points d’entraînement pour la *quadrature bayésienne*, avec un entraînement actuellement effectué sur l’axe temporel, et où la valeur du portefeuille a été calculée via une *régression par processus gaussiens (GPR)* entraînée avec seulement cinq points pour les 60 000 simulations. La méthode de quadrature bayésienne a atteint un niveau de précision élevé tout en réduisant significativement le temps de calcul à 9 secondes (cf. Tableau 4), comparé à 33 minutes pour les simulations Monte Carlo.

Ces résultats indiquent que, dans les conditions de ce test numérique, la méthode de quadrature bayésienne est **276 fois plus rapide** que la méthode Monte Carlo tout en garantissant un niveau de précision très élevé.

TABLE 4 – CVA via Bayesian quadrature (GPR trained on time to maturity and X_t)

Training Points	Prediction (EUR)	Rel. Error	Time (s)	Time Savings
15	446	0.26	4	615
25	434	0.01	6	400
30	423	0.17	7	369
35	435	0.05	8	317
40	432	0.00	9	276

Remarque 1. Nous avons mené des tests numériques similaires, cette fois pour une étude comparative entre les méthodes traditionnelles de calcul du CVA (intégration numérique et simulations Monte Carlo) et la méthode de quadrature bayésienne sur un portefeuille d’environ une centaine de swaptions. Pour ce faire, nous avons utilisé un *proxy* pour valoriser les swaptions avec la *Formule de Bachelier*, en supposant que le taux swap forward suivait une distribution gaussienne dans le cadre du modèle LGM-1F. Cette approche a permis d’améliorer significativement le temps de calcul par rapport à la valorisation des swaptions en utilisant la *Formule LGM-1F*. Les résultats numériques ont confirmé que la méthode de quadrature bayésienne surpassait

les approches traditionnelles (intégration numérique et simulations Monte Carlo) en termes de temps de calcul, tout en maintenant une précision comparable.

6 Discussion

Nous explorons actuellement de nouvelles applications des *processus gaussiens*, spécifiquement pour l'évaluation du risque de marché. En combinant la *régression par processus gaussiens (GPR)* avec le *modélisation multifidélité*, nous visons à améliorer le calcul de la *Value at Risk (VaR)* et de l'*Expected Shortfall (ES)* pour des portefeuilles complexes, notamment ceux incluant des *swaptions bermudéennes*. Ces dérivés exotiques posent des défis importants aux approches traditionnelles de mesure du risque, en particulier en termes de coûts computationnels. La *machine learning multifidélité* combine des données de niveaux de précision variés afin de développer des modèles précis tout en réduisant la nécessité de recourir à des données haute-fidélité, souvent coûteuses ou difficiles à obtenir.

Dans notre approche, nous utilisons des modèles de pricing basse-fidélité pour obtenir des approximations générales, puis nous affinons les résultats avec des modèles haute-fidélité, garantissant ainsi la précision dans le calcul des métriques de risque.

Les résultats préliminaires montrent que la *régression par processus gaussiens multifidélité (mGPR)* offre des économies computationnelles substantielles tout en maintenant une précision élevée, en particulier pour les portefeuilles de swaptions bermudéennes. Cette méthode réduit les coûts liés à la valorisation de ces dérivés exotiques tout en préservant l'exactitude des mesures de risque telles que la VaR et l'ES. Nous préparons actuellement un article détaillé sur ce travail, qui explorera davantage les améliorations possibles de cette méthodologie, notamment l'optimisation de la sélection des points dans les modèles multifidélité. De plus, nous prévoyons d'étendre cette approche à d'autres instruments financiers et métriques de risque, avec l'objectif de soumettre cette recherche dans un avenir proche.

7 Conclusion

Dans cette étude, nous avons démontré les avantages significatifs de l'utilisation de la *quadrature bayésienne* pour le calcul du *Credit Valuation Adjustment (CVA)* dans le cadre du modèle *One-Factor Linear Gaussian Markov (LGM-1F)*. Bien que les méthodes traditionnelles soient robustes, elles s'avèrent souvent intensives en calcul et chronophages. Nos recherches ont porté sur l'application de la quadrature bayésienne, une méthode fondée sur la *régression par processus gaussiens (GPR)*, pour le calcul du CVA, et l'ont comparée aux approches classiques. Nous avons constaté que la quadrature bayésienne, grâce à sa convergence exponentielle et sa stabilité numérique, permet des réductions substantielles de temps de calcul sans sacrifier la précision, ce qui en fait une alternative convaincante pour la gestion du risque en temps réel.

Les résultats numériques confirment que la quadrature bayésienne surpasse non seulement les méthodes traditionnelles en termes d'efficacité, mais conserve également une précision comparable. Cet équilibre entre rapidité et exactitude est crucial pour l'implémentation pratique des calculs de CVA, en particulier dans un contexte réglementaire de plus en plus exigeant. De plus, notre application à un portefeuille de produits dérivés à revenu fixe, incluant des *swaps de taux d'intérêt* et des *swaptions*, dans le cadre du modèle LGM-1F, met en évidence la *versatilité* et la *robustesse* de la quadrature bayésienne. Ce modèle est largement reconnu pour la valorisation et la gestion des risques associés à ces dérivés, rendant nos conclusions particulièrement pertinentes pour les institutions financières souhaitant améliorer leurs processus d'évaluation du risque de contrepartie.

Les trois principales contributions de cette étude sont les suivantes :

- L'approximation des prix des swaptions en utilisant la **formule de Bachelier**, permettant de modéliser les taux swaps à départ différé comme des processus gaussiens et de faciliter les calculs de CVA.
- La proposition d'une **approximation analytique** pour le CVA d'un portefeuille de swaps de taux d'intérêt, simplifiant le processus de calcul tout en maintenant la précision.
- La démonstration de la **synergie entre la régression par processus gaussiens et la quadrature bayésienne**, optimisant l'intégration numérique pour atteindre un équilibre innovant entre efficacité computationnelle et précision en gestion du risque de crédit.

L'intégration de la quadrature bayésienne et des processus gaussiens ouvre également la voie à des améliorations futures. Par exemple, des recherches futures pourraient explorer l'optimisation des méthodes de sélection des points afin d'améliorer encore davantage l'efficacité et la précision computationnelle. De plus, l'adoption d'une approche **multifidélité** pourrait combiner des modèles de différents niveaux de précision et de coût computationnel, permettant une utilisation plus efficace des ressources et une amélioration de la précision des calculs de CVA.

En conclusion, la quadrature bayésienne représente un outil puissant pour le calcul efficace et précis du CVA, offrant une direction prometteuse pour les recherches futures et les applications pratiques en gestion des risques financiers.

Appendice A. Changement de Mesure de Probabilité via un Numéraire

Dans cet appendice, nous décrivons une technique essentielle pour le **pricing** des dérivés à revenu fixe : le changement de mesure de probabilité via un **numéraire**. Plus spécifiquement, nous nous concentrons sur deux mesures de probabilité fondamentales utilisées tout au long de ce document : la **mesure terminale** et la **mesure niveau**. Pour formaliser ce cadre, nous énonçons le Théorème A1 du changement de numéraire, qui établit la transformation entre ces mesures. Pour des détails supplémentaires, preuves et implications pratiques, nous renvoyons le lecteur à [50].

Nous considérons un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, Q)$, où Q représente la mesure risque-neutre.

En pratique, un **numéraire** sert d'unité de référence pour le pricing d'un actif financier.

Définition A1. Un numéraire $(N_t)_{t \in [0, T]}$ est tout processus stochastique (\mathcal{F}_t) -adapté strictement positif tel que son processus de valeur actualisée $(D(0, t)N_t)_{t \in [0, T]}$ est une martingale sous la mesure Q .

Pour tout numéraire $(N_t)_{t \in [0, T]}$, on peut définir la **mesure de probabilité forward** associée Q^N par sa dérivée de Radon–Nikodym :

$$\frac{dQ^N}{dQ} = \frac{D(0, T)N_T}{N_0}.$$

Le pricing des dérivés financiers se formule généralement comme le calcul d'une espérance risque-neutre d'un payoff G actualisé au taux sans risque. Le changement de numéraire dans le pricing correspond à passer de la mesure risque-neutre Q à la mesure forward Q^N . Par le théorème de Girsanov, nous avons le résultat suivant :

Théorème A1. Étant donné un numéraire $(N_t)_{t \in [0, T]}$, le prix à l'instant 0 d'un dérivé financier avec un payoff G Q -intégrable à l'instant terminal T est donné par :

$$E^Q[D(0, T)G] = N_0 E^{Q^N} \left[\frac{G}{N_T} \right].$$

De plus, si (W_t) est un mouvement brownien sous Q , alors le processus (W_t^N) est un brownien sous Q^N , défini par :

$$dW_t^N = dW_t - \frac{1}{N_t} dN_t dW_t.$$

Dans cet article, nous utilisons ce théorème pour deux numéraires spécifiques :

- Le prix d’une obligation zéro-coupon $B(t, T)$, qui sert de numéraire et dont la mesure forward associée est appelée *mesure terminale*, notée Q^T .
- Le niveau associé à un taux swap ou une swaption européenne, qui agit comme numéraire, avec pour mesure forward associée la *mesure niveau*, notée Q^{LVL} .

Appendice B. Spécifications Numériques

Dans cet appendice, nous présentons brièvement les données complémentaires utilisées dans les tests numériques décrits dans la Section 5.

Tout d’abord, nous avons utilisé les taux zéro-coupon initiaux présentés dans le Tableau A1 pour construire l’ensemble de la courbe par interpolation *cubic-spline* de degré 3.

Tableau A1. Données initiales des taux zéro-coupon.

Tenor	1M	6M	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	10Y	15Y	20Y
Rate	3%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	3%	4%	4%	5%	5%

Pour les simulations Monte Carlo, nous avons simulé la variable gaussienne X_t dans le modèle LGM-1F à l’aide de la Formule (45). Numériquement, les échantillons ont été générés par la fonction `random.normal` de la bibliothèque Python `numpy`. Avec les taux zéro-coupon interpolés, nous avons obtenu les courbes d’obligations zéro-coupon simulées (à une date future) en utilisant la formule de reconstruction (29). Les paramètres numériques du LGM-1F sont reportés dans le Tableau A2 ; nous soulignons que nous avons utilisé une volatilité constante dans nos tests.

Tableau A2. Paramètres du modèle LGM-1F.

Mean Reversion λ	1%
Volatility σ	0.5%

Le profil de risque de la contrepartie, utilisé dans tous nos calculs de CVA, est caractérisé par le taux de recouvrement et l’intensité de défaut constante reportés dans le Tableau A3.

Tableau A3. Caractéristiques de risque de contrepartie.

Recovery Rate R	40%
Default Intensity μ	0.5%

Nous reportons dans le Tableau A4 les caractéristiques du portefeuille de swaps utilisé pour les tests numériques. Sauf pour le notionnel et la date de départ, les paramètres ont été choisis aléatoirement selon des intervalles prédéfinis. En particulier, la maturité a été choisie comme une valeur semi-entière entre 1 an et 7 ans ; la fréquence comme semi-annuelle, trimestrielle ou annuelle ; le taux fixe entre 2% et 5% ; et le type en tant que swap receveur ou payeur.

Tableau A4. Caractéristiques des swaps du portefeuille.

Deal ID	Start Date	Frequency	Notional	Fixed Rate	Maturity	Type
0	0	0.25	10,000	4%	2.5	Payer
1	0	0.25	10,000	5%	1	Payer
2	0	0.25	10,000	5%	1	Payer
3	0	0.5	10,000	3%	7	Receiver
4	0	1	10,000	4%	6.5	Payer
5	0	1	10,000	3%	4.5	Payer
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
395	0	0.5	10,000	4%	4.5	Receiver
396	0	1	10,000	2%	2.5	Payer
397	0	0.5	10,000	4%	5.5	Payer
398	0	1	10,000	4%	3.5	Payer
399	0	0.25	10,000	3%	4.5	Payer

Finalement, la régression par processus gaussiens et la quadrature bayésienne ont été implémentées en utilisant les bibliothèques Python `GPpy` et `emukit`, respectivement. Les deux méthodes ont utilisé un noyau exponentiel au carré (Formule 10), avec les paramètres numériques initiaux (avant entraînement) reportés dans le Tableau A5. Pour la quadrature bayésienne, l'intégration a été réalisée par rapport à la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, T]$, les probabilités de survie étant déterministes et simples à calculer.

Tableau A5. Paramètres du noyau exponentiel au carré utilisés pour GPR et quadrature bayésienne.

Variance σ_f	1
Longueur d'échelle l	10

Les entrées et spécifications numériques détaillées dans cet appendice sont fournies comme ressource complémentaire afin d'améliorer la compréhension de l'implémentation et des résultats présentés en Section 5. Ces détails garantissent la transparence et la reproductibilité des méthodologies et résultats discutés dans le texte principal.

Références

- [1] Green, A. *XVA : Credit, Funding and Capital Valuation Adjustments* ; John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2015.
- [2] Gregory, J. *Counterparty Credit Risk and Credit Value Adjustment : A Continuing Challenge for Global Financial Markets* ; John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2012.
- [3] Hoffman, F. *Credit Valuation Adjustment* ; Oxford University, Mathematical Institute : Oxford, UK, 2011.
- [4] Basel Committee on Banking Supervision. *Basel III : A Global Regulatory Framework for More Resilient Banks and Banking Systems* ; Technical Report ; Revised June 2011 ; Bank for International Settlements (BIS) : Basel, Switzerland, 2010.
- [5] Basel Committee on Banking Supervision. *Minimum Capital Requirements for Market Risk* ; Technical Report ; Bank for International Settlements : Basel, Switzerland, 2019.
- [6] Basel Committee on Banking Supervision. *Credit Valuation Adjustment Risk : Targeted Final Revisions—Consultative Document* ; Technical Report ; Bank for International Settlements : Basel, Switzerland, 2020.

- [7–10] Sokol, A. *Learning Quantitative Finance with R : From Models to Applications* ; Packt Publishing : Birmingham, UK, 2016. Hull, J.C. *Risk Management and Financial Institutions* ; John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2014. Rockafellar, R.T. ; Uryasev, S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *J. Risk* 2000, 2, 21–42. Abad, P. ; Benito, S. ; Lopez, C. A Comprehensive Review of Value at Risk Methodologies. *Span. Rev. Financ. Econ.* 2013, 12, 15–32.
- [11–13] Dowd, K. *An Introduction to Market Risk Measurement* ; John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2003. Duffie, D. ; Pan, J. An Overview of Value at Risk. *J. Deriv.* 1997, 4, 7–49. Lichteners, R. ; Stamm, R. ; Gallagher, D. *Modern Derivatives Pricing and Credit Exposure Analysis* ; Palgrave Macmillan : London, UK, 2015.
- [14] Liu, Q. Calculation of Credit Valuation Adjustment Based on Least Square Monte Carlo Methods. *Math. Probl. Eng.* 2015, 2015, 959312.
- [15–17] Basel Committee on Banking Supervision. *Fundamental Review of the Trading Book : A Revised Market Risk Framework* ; Technical Report ; Bank for International Settlements : Basel, Switzerland, 2013. Zeron-Medina, M. ; Ruiz, I. Denting the FRTB IMA Computational Challenge via Orthogonal Chebyshev Sliding Technique ; Risk Books : London, UK, 2021. ISDA. User’s Guide to the ISDA Credit Support Documents Under English Law ; Technical Report ; International Swaps and Derivatives Association : New York, NY, USA, 1999.
- [18–19] Crépey, S. ; Dixon, M. Gaussian Process Regression for Derivative Portfolio Modeling and Application to CVA Computations. arXiv 2019. Gonzalvez, J. ; Lezmi, E. ; Roncalli, T. ; Xu, J. Financial Applications of Gaussian Processes and Bayesian Optimization. arXiv 2019.
- [20–21] Qian, F. Advanced Estimation of Credit Valuation Adjustment. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Netherlands, 2017. Mu, G. ; Godina, T. ; Maffia, A. ; Sun, Y.C. Supervised Machine Learning with Control Variates for American Option Pricing. *Found. Comput. Decis. Sci.* 2018, 43, 207–217.
- [22–24] Sambasivan, R. ; Das, S. A Statistical Machine Learning Approach to Yield Curve Forecasting. ICCIDS, Chennai, India, 2017. Buehler, H. ; Gonon, L. ; Teichmann, J. ; Wood, B. Deep Hedging. *Quant. Financ.* 2019, 19, 1271–1291. Culkin, R. ; Das, S.R. Machine Learning in Finance : The Case of Deep Learning for Option Pricing. *J. Investig. Manag.* 2017, 15, 92–100.
- [25–27] DeBrusk, C. ; Du, E. Why Wall Street Needs to Make Investing in Machine Learning a Higher Priority ; Oliver Wyman, 2018. FSB. *Artificial Intelligence and Machine Learning in Financial Services* ; Technical Report ; Basel, Switzerland, 2017. Leo, M. ; Sharma, S. ; Maddulety, K. Machine Learning in Banking Risk Management : A Literature Review. *Risks* 2019, 7, 29.
- [28–30] Wilkens, S. Machine Learning in Risk Measurement : Gaussian Process Regression for Value-at-Risk and Expected Shortfall. *J. Risk Manag. Financ. Inst.* 2019, 12, 374–383. Cao, J. ; Chen, J. ; Hull, J. ; Poulos, Z. Deep Hedging of Derivatives Using Reinforcement Learning. arXiv 2021. De Spiegeleer, J. ; Madan, D.B. ; Reyners, S. ; Schoutens, W. Machine Learning for Quantitative Finance. *Quant. Financ.* 2018, 18, 1635–1643.
- [31–33] Lehdili, N. ; Oswald, P. ; Guéneau, H. Market Risk Assessment of a Trading Book Using Statistical and Machine Learning. Preprint 2019. Ruiz, I. ; Zeron, M. Machine Learning for Risk Calculations : A Practitioner’s View ; John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2021. Glau, K. ; Mahlstedt, M. ; Pötz, C. A New Approach for American Option Pricing : The Dynamic Chebyshev Method. *SIAM J. Sci. Comput.* 2019, 41, B153–B180.
- [34–50] Pykhtin, M. ; Rosen, D. Pricing Counterparty Risk at the Trade Level and CVA Allocations ; FEDS Working Paper ; Washington, DC, USA, 2010. Jooma, Y. ; Liu, H. An Analysis of the ISDA Model for Calculating Initial Margin ; GARP Research Fellowship, 2018. Bielecki,

T. ; Brigo, D. ; Patras, F. *Credit Risk Frontiers* ; John Wiley & Sons : Hoboken, NJ, USA, 2011.
Chen, Z. ; Naslidnyk, M. ; Gretton, A. ; Briol, F.X. Conditional Bayesian Quadrature. arXiv 2024.
Gessner, A. Numerical Integration as and for Probabilistic Inference ; Universität Tübingen, 2022.
Kanagawa, M. ; Sriperumbudur, B.K. ; Fukumizu, K. Convergence Guarantees for Kernel-Based Quadrature. arXiv 2016. Osborne, M. ; Garnett, R. ; Ghah