UTEM

Laboratorio 2

Simulación de Sistemas

Nombre: Sebastian Cisternas Ocaranza

Rut: 17.270.695-9

Profesor: Santiago Zapata

Fecha: 28 de mayo, 2018.

Introducción

En el presente informe científico se trata de realizar el cálculo del número pi (π) mediante dos simulaciones: la de Montecarlo y de la Aguja de Buffon. Esta simulación está hecha en un el lenguaje de programación C++. Necesitaremos la clase Random () para generar números aleatorios y de esta manera, tener una estimación de cierta cantidad de decimales que el número pi tiene, ya que por teoría se sabe que tiene millones de decimales.

π (pi) es la relación entre las longitudes de una circunferencia y su diámetro, en Geometría euclidiana. Es un número irracional y una de las constantes matemáticas más importantes. Se emplea frecuentemente en matemáticas, física e ingeniería. El valor numérico de π, truncado a sus primeras cifras, es el siguiente: El valor de π se ha obtenido con diversas aproximaciones a lo largo de la historia, siendo una de las constantes matemáticas que más aparece en las ecuaciones de la física, junto con el número e. Por ello, tal vez sea la constante que más pasiones desata entre los matemáticos profesionales y aficionados. La relación entre la circunferencia y su diámetro no es constante en geometrías no euclídeas. Se emplea frecuentemente en matemáticas, física e ingeniería. El valor de π se ha obtenido con diversas aproximaciones a lo largo de la historia. Dos de éstas se lograron mediante métodos, el de Montecarlo y el de la aguja de Buffon, los mismos que utilizaremos para este informe.

Historia del número Pi

Los griegos bautizaron este número como pi, por ser la primera letra de la palabra perímetro en griego.La elección del símbolo π para referirse a este guarismo (signo gráfico simple que expresa un número en un sistema de numeración) proviene de la palabra griega "περιφέρεια" (periferia) y "περίμετρον" (perímetro), pero no fue usada por primera vez hasta el 1700 por el matemático galés William Jones al usarlo para la navegación de sus barcos. Años más tarde el también matemático Leonhard Euler popularizó el término gracias a su obra “Introducción al cálculo infinitesimal”. Esta cifra es considerada como una de las constantes más importantes dentro de las diferentes ciencias matemáticas y físicas por su relación con la longitud y diámetro de una esfera. Al ser un número irracional posee infinitos decimales, pero su valor aproximado es el de 3,14.

Las primeras civilizaciones idearon una estrategia para dividir las tierras para la agricultura y también la cosecha; la idea era calcular un perímetro. Sin tener la intención en ese momento se estaba desarrollando una relación matemática, la cual nos expresa la proporción entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. En Grecia surgió la motivación de comprender la exacta relación entre el diámetro y el perímetro de una circunferencia, consolidándose como un enigma a resolver. En este sentido, Antiphon, luego de varios intentos logró obtener un polígono que coincidió con un círculo. Simultáneamente, Brisón intervino los polígonos circunscriptos con el fin de hallar dicha relación.

Más adelante, Euclides desarrolla el método de exhaución para encontrar el área de la circunferencia. El método consistió en doblar, así como lo hizo Antiphon previamente, el número de lados de los polígonos regulares inscritos y circunscritos y expresar la convergencia del procedimiento. Estos hallazgos fueron complementados con la labor de Arquímedes que reunió y trabajó con base en estos resultados. Como resultado, evidenció que el área de un círculo es el semiproducto de su radio por su circunferencia y que la relación de la circunferencia al diámetro se expresa entre 223/71 = 3,14084 y 22/7 = 3,14285. Obtiene luego para las áreas y los perímetros de los polígonos regulares, relaciones de recurrencia de forma notable, logrando calcular pi con una aproximación dada; dicho método de cálculo es conocido como algoritmo de Arquímedes.

En el periodo del Renacimiento, Purbach utilizó en su tabla de senos de 10′ en 10′ el número Pi, pero le concede un valor: 377/120 = 3,14666…. es necesario mencionar, que los siglos XV y XVI la trigonometría tiene un gran desarrollo impulsado por Copérnico y Kepler. Sumado a la innovación de Purbach, Rhaeticus construye una nueva tabla de senos en la que incluyó a Pi con 8 decimales exactos. A partir de esta labor, Adrien Romain obtuvo para Pi el valor de 15 decimales y Ludolph van Ceulen llegó hasta 32, utilizando el método de los perímetros mediante un polígono regular. Por su gran labor, en Alemania se le conoció al número pi como número ludolphino.

Pronto la hazaña de Ludolph se vio ensombrecida por los perfeccionamientos de Snell y Huyghens. El primero halló la fórmula del arco; mientras que el segundo, generó una expresión importante para comprender el método. Ciertamente Snell fue el más destacado, obtuvo 34 decimales exactos, partiendo del cuadrado y doblando 28 veces el número de los lados. Huyghens, por el contrario, calculó Pi con 9 decimales exactos tomando simplemente el polígono de seis lados.

Desde el siglo XVII la relación se convirtió en un número. El primero en utilizar pi como cifra fue William Oughtred, un ministro de Inglaterra que alternó el ministerio con el estudio de la Matemática, la Astronomía y la Gnomónica. Posteriormente, William Jones, matemático galés, siguiendo sus postulados de manera inconsciente, empleó la letra griega π como símbolo matemático del número pi. Aunque, el encargado de popularizar dicha práctica fue Leonhard Euler, principal matemático suizo del siglo XVIII. A quien le debemos el legado de designar por Pi a la relación circunferencia – diámetro y quien calculó su valor, con 20 decimales.

Gracias a los cálculos infinitesimales surgieron fórmulas notables que, lograron métodos de cálculos nuevos y mucho más eficientes. A partir de este momento el papel de Pi se separó un poco de la geometría y jugó un papel fundamental en el análisis matemático. El matemático francés Viete obtuvo, a comienzos del siglo XVII, la primera fórmula de Pi por medio de un producto infinito convergente.

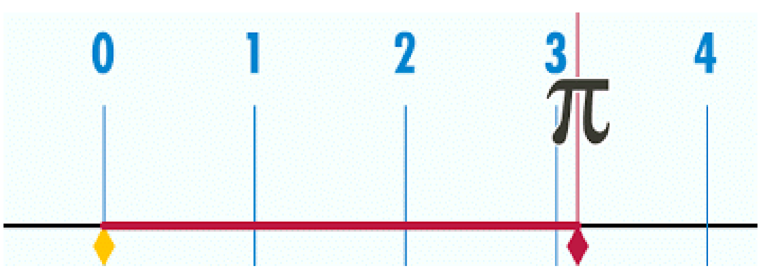
El descubrimiento más representativo del francés fue asociar el número Pi con otros números de gran relevancia en la matemática, tales como el número e, i, además los lazos que existen entre las funciones circulares seno y coseno, y la función exponencial ex: ésta es periódica y su período imaginario es 2 i Pi. Por otro lado, William Shanks, matemático inglés que trabajó arduamente en el número Pi por más de veinte años, en 1853, finalmente, obtuvo 707 decimales. Desafortunadamente, Shanks cometió un error en el 528 decimal, y su operación terminó siendo un fracaso.

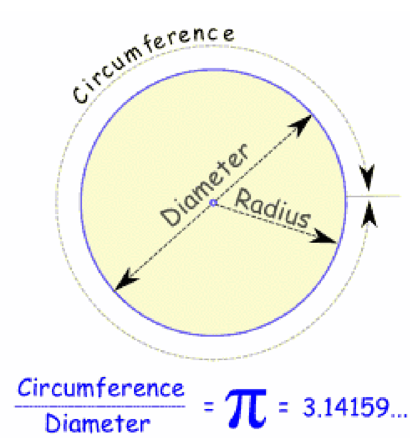
En 1949 John Von Neumann, fue un informático que se interesó en el campo de las matemáticas, especialmente en la apertura de nuevas vías al desarrollo de la matemática estadística. Además, participó en la axiomatización de las matemáticas. Contribuyó al estudio de algoritmos. Neumann es denominado el inventor del “algoritmo de merge sort” en 1945. En lo concerniente al número Pi, se valió de la computadora electrónica ENIAC, siendo participe del proyecto que la creó, para luego de setenta horas de trabajo obtener 2037 cifras decimales.

Hacia 1959, una computadora británica logró calcular las primeras 10.000 cifras. En 1986 David H. Bailey extrajo 29.360.000 cifras en un Cray-2 de la Nasa utilizando el algoritmo de Ramanujan de convergencia cuartica. Por otro lado, Kanada consiguió más de 100 millones de cifras usando un superordenador durante una semana. En resumen, los avances tecnológicos fueron un gran avance para los matemáticos, aparentemente la única desventaja es el tiempo requerido que un ordenador tarde en conseguirlos, diferente al periodo antes de esta invención donde los matemáticos duraban años en hallar una cifra.

El 14 de marzo se celebra el día internacional del número Pi. Un día que no pasa desapercibido en el mundo y mucho menos dentro de la comunidad académica y científica. Esta afamada cifra es una de las constantes más importantes dentro de las diferentes ciencias matemáticas y físicas. Actualmente sabemos que como número irracional posee infinitos decimales, y su valor aproximado es el de 3,14. La cifra es conocido por el símbolo π. Dicha cifra ha ido evolucionando en sus diversas aproximaciones decimales para acercarse al número exacto.

El responsable de la conmemoración de esta fecha es el físico estadounidense Larry Shawn que en 1988 conmemoró este día. El uso de este número irracional es muy importante porque es aplicado a la fabricación de neumáticos, galletas, relojes, vasos, botellas e infinidad de objetos circulares que contienen diámetro y perímetro. También es usado dentro de la trigonometría y la topografía, la estadística. También es habitual su utilización en la Nasa para cálculos astronómicos.





Descripción del Problema

Para el Método de Montecarlo:

Consiste en realizar un experimento aleatorio un determinado número de veces. Como sabemos que la frecuencia con que ocurre un suceso se acerca a su probabilidad, a medida que aumenta el número de ensayos nos iremos acercando más y más al valor buscado. Puede utilizarse para estimar probabilidades que serían muy difíciles de calcular de forma teórica, o para corroborar que ocurrirá lo que nosotros esperamos de un determinado experimento. Para calcular el número □, podemos seguir los siguientes pasos:

1) Inscribir un círculo en un cuadrado de lado 2. El radio del círculo será 1. 2) Elegir al azar un punto del cuadrado y observar si este punto pertenece o no al círculo. 3) La probabilidad de que el punto esté dentro del circulo es la razón entre las áreas, □/4. 4) Multiplica por 4 la frecuencia de este suceso y tendrás una aproximación de □□

El método de Montecarlo se puede aplicar a una multitud de problemas para encontrar una solución aproximada a partir de la generación de números aleatorios.

Modelo de solución

El modelo elegido es un circulo inscrito en un cuadrado (lado = 2 * radio).

Al igual que se lanza un dardo sobre una pizarra, simularemos N puntos elegidos al azar dentro del cuadrado y contaremos cuántos de ellos (M) caen dentro del circulo. La relación de estos de números, M y N será una aproximación entre las áreas del círculo y la del cuadrado, respectivamente

N área cuadrado (r*2)^2 4 --- = ------------- = -------- = --- M área círculo pi * r^2 pi

Por tanto, la aproximación de PI se obtiene multiplicando por 4 la fracción obtenida por el método de Montecarlo.

4 * M Pi = ----- donde M: nº aciertos en el círculo N N : nº total de lanzamientos

Para el Método de Buffon

La aguja de Buffon es un clásico problema de probabilidad geométrica, de realización práctica y cuyo interés radica en que es un método difícil para ir aproximando el valor del número π a partir de sucesivos intentos. Fue planteado por el naturalista francés Buffon en 1711 y reproducido por él mismo ya resuelto en 1757. Se trata de lanzar una aguja sobre un papel en el que se han trazado rectas paralelas distanciadas entre sí de manera uniforme. Se puede demostrar que, si la distancia entre las rectas es igual a la longitud de la aguja, la probabilidad de que la aguja cruce alguna de las líneas es de esa manera: siendo N el número total de intentos y A el número de veces que la aguja ha cruzado alguna línea. Si la aguja es más corta que la distancia entre las rectas la probabilidad disminuye proporcionalmente al cociente entre la longitud de la aguja y la distancia entre las rectas, tomando el valor donde L es la longitud de la aguja y D la Inter distancia entre las rectas.

En este caso: La tercera situación, en que la longitud de la aguja es mayor que la distancia entre las rectas lleva a un resultado bastante más complicado.
Una generalización obvia de este problema es el problema de la Aguja de Buffon-Laplace, donde la aguja, en vez de lanzarse sobre un papel rayado, se lanza sobre una cuadrícula. Se llama de Buffon-Laplace pues, aunque Buffon lo resolvió también en 1777, su solución contenía un error. Fue corregido por Laplace en 1812.

Algoritmos de la Simulación

- Algoritmo de Solución para el Método de Montecarlo

```
Algoritmo Montecarlo
        Entero iteración, contador
        Doble x, y, z, pi

        Escribir “Ingrese el número de iteraciones:"
        Leer iteración

        //inicializar aleatoriedad
        contador<-0

        para i<-0 hasta i<iteración hacer
                x<-Aleatorio
                y<-Aleatorio
                z<- (x*x) +(y*y)

                sí z<=1 entonces
                        contador<-contador+1
                Fin Si

        Fin Para

        pi<- contador/iteración*4
        Escribir "Valor estimado de pi", pi

Fin Algoritmo
```

- Algoritmo de solución para el Método de Buffon

Algoritmo Buffon

```
clase aguja {//definimos variables
booleano verificar(),agujavar()
}
booleana aguja_agujavar {
si(longitud<=distancia)
        retornar Verdadero
Sino
        retornar Falso
Fin Si
}
booleano aguja_verificar{  //Función verificación
doble b<-longitud*seno(Angulo)
si (agujavar) entonces
        si(x+b>=distancia)
                retornar verdadero
        Sino
                retornar Falso
        Fin Si
sino
        sí (b>=distancia) Entonces
                retornar verdadero
        Sino
                retornar Falso
        Fin Si
Fin Si
}
Programa principal {
        Doble distancia
        doble longitud, angulo, x
        entero n, i, ch, total, num.
        doble res, pical
        aguja L
        registro booleano* esaguja
        flotante p; // probabilidad

        Leer distancia //distancia entre agujas
        Leer Longitud //Longitud de la aguja
        leer n //iteraciones

                si (L.agujavar)entonces
                total<-1
                num<-1
```

```
        esaguja<-Verdadero
        para i<-1 hasta i<n de 1 hacer
                total<-total+1
        FinPara

        angulo<- aleatorio (100000) /99999*pi)
        x=Aleatorio (100000) /99999*distancia

        sí verificar Entonces
                num<-num+1
                esaguja<-verdadero
        SiNo
                esaguja<-Falso
        FinSi
    FinSi
    res=p.num/(p.tot*1.0);

    sí(L.longitud<=distancia)
        piCal<-2*L.longitud/(distancia*res);
    SiNo
        piCal<-(1/(res-1))*((2*L.longitud/distancia)-
        (2/distancia)*(sqrt(L.longitud*L.longitud-
        distancia*distancia)+distancia*arcoseno(distancia/L.longitud)));

    FinSi

    Escribir Total,num,prob,pical
    }

FinAlgoritmo
```

Método usado para generar números aleatorios

El método utilizado son las funciones rand, la cual cada vez que la invoques ', ésta genera un número pseudo-aleatorio entre 0 y 'RAND_MAX', la cual es una constante #definida en <cstdlib>. Esta generación de números realmente sigue una fórmula la cual crea varios números enteros en una serie. Para comenzar una serie u otra, invocamos 'srand()' la cual "planta un valor semilla" el cual comienza la generación de números pseudo-aleatorios. Por lo tanto, sólo debes invocar 'srand ()' una sola vez en tu programa.Hacer esto nada más entrar en 'main()'. Para ofrecer algo más de aleatoriedad, tomar el valor que representa la fecha y hora cada vez que ejecutes tu programa. Esto lo puedes hacer invocando la función 'time ()'. Por ejemplo,

```
#include <ctime>
#include <cstdlib>
```

```
using namespace std;

int main ()
{
srand (time (0));
...
}
```

Ahora invocaríamos 'rand ()' varias veces para obtener números aleatorios. Para limitar el intervalo establecido de los valores generados por 'rand ()', tendrás que realizar algunas operaciones aritméticas. Lo que nos interesa hacer es cambiar la escala y luego mudar la serie para empezar por un número u otro. Por ejemplo, de -6 á 6, significa que hay 13 números. Por lo tanto, tenemos que reducir el valor generado por la proporción de 'RAND_MAX+1' y 13. Posteriormente, tenemos que restar 6 (o sumar -6) al valor calculado para que empiece desde -6. Esto sería:

```
valor generado = -6 + (int) (rand () *(13/(RAND_MAX+1.0)) + 0.5);
```

En general, la fórmula es:

```
valor generado = valor inicial +
(int)(rand () *(intervalo/(RAND_MAX+1.0)) + 0.5 );
```

Otros programadores usan otra fórmula sencilla pero que puede generar números menos aleatorios es usando el operador del módulo para conseguir el resto de una división.

```
valor generado = -6 + rand () % 13;
```

En general, la fórmula es:

```
valor generado = valor_inicial + rand () % intervalo;
```

Como he dicho, esta fórmula es sencilla y rápida, pero no necesariamente correcta, que depende del intervalo.

Para conseguir números no secuenciales, entonces tienes dos opciones. Si existe una lógica para tales secuencias, entonces impleméntala. Si no existe, entonces crea un array con todos los números que quieres y usa 'rand ()' para generar números enteros a modo de índice para seleccionar cada número guardado en el array. Por ejemplo,

```
int array [5] = {2,5,9,4,1};

valor generado = array [ calcular_indice(5) ];
```

donde,

```
int calcular_indice(int n )
{
return (int) (rand () *(n/(RAND_MAX+1.0)) + 0.5);}
```

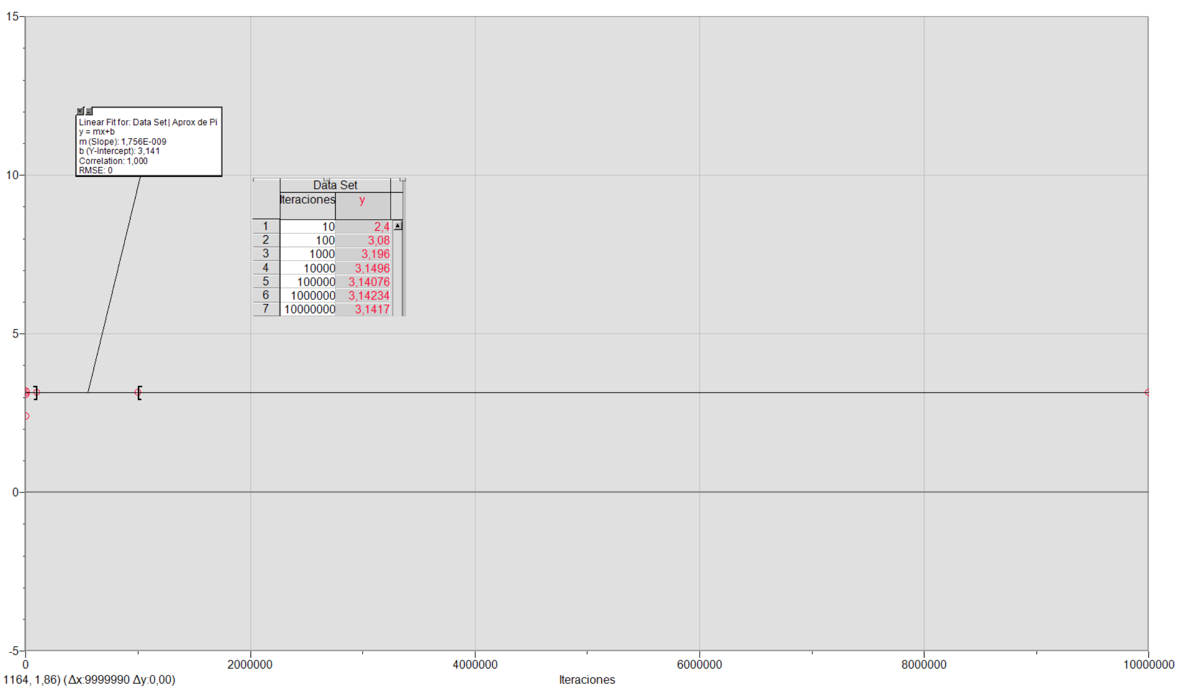
Resultados, tablas y gráficos de salida.

Medidas para el método de Montecarlo

Tabla con valores de iteración y su correspondiente valor aproximado de pi.

Dato	N° de Iteraciones	Valor aprox. de pi	Error %
1	10	2,4	23.6
2	100	3,08	1.9
3	1000	3,196	1.7318
4	10000	3,1496	0.2548
5	100000	3,14076	0.0265
6	1000000	3,14234	0.0237
7	10000000	3,1417	0.0034

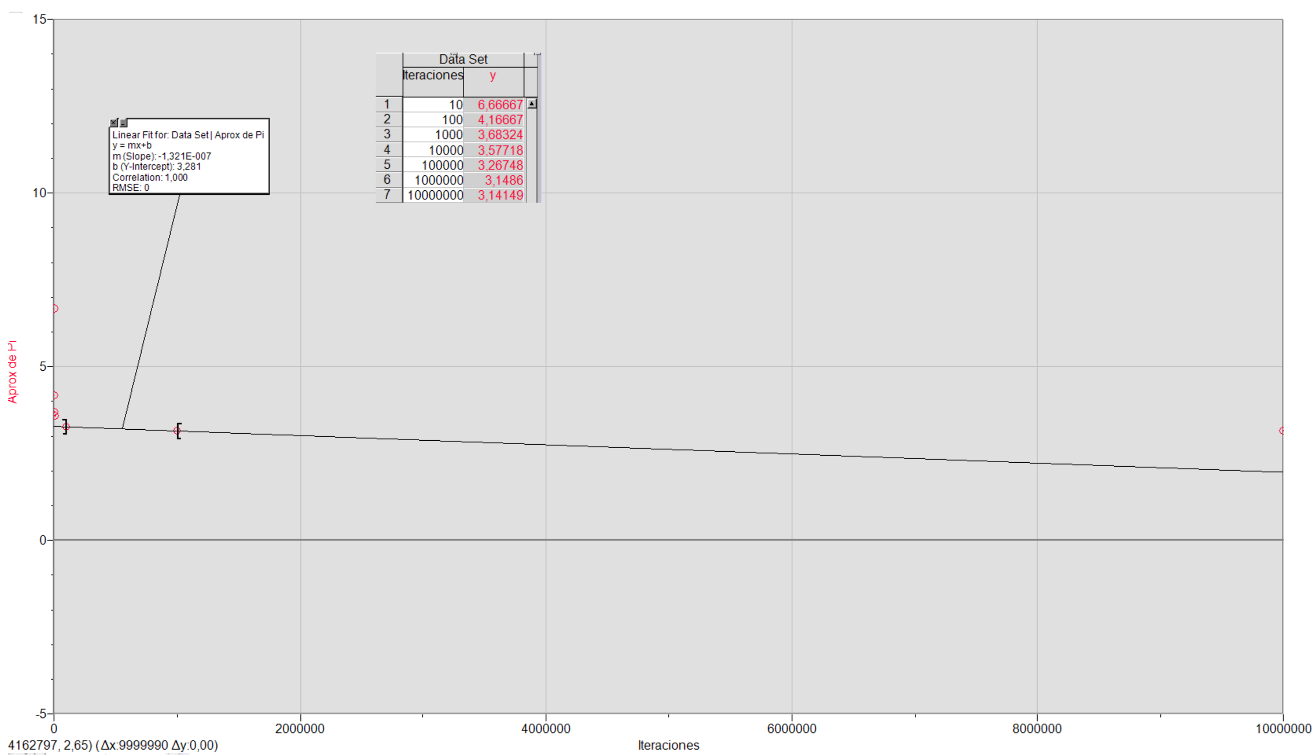
Grafico de esta tabla



Podemos observar que, con el método de Montecarlo, mientras más iteraciones realicemos mayor es la tendencia del número hacia pi, es así como podemos decir que este método es muy efectivo mientras mas iteraciones realicemos.

Tabla con valores de iteración y su correspondiente valor de pi para a y b igual a 1.

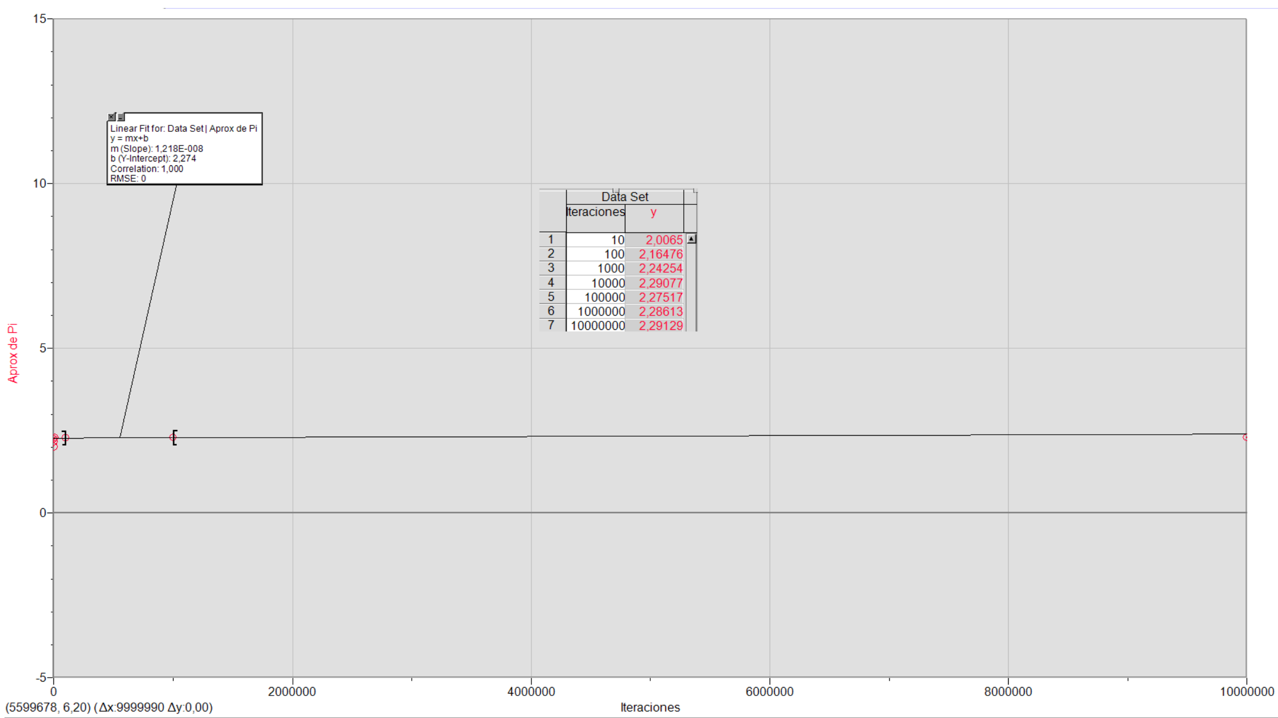
Dato	Iteraciones	Distancia	Largo Aguja	Valor de pi	Error%	Probabilidad
1	10	1	1	6.66667	112	0.6
2	100	1	1	4.16667	32	0.67
3	1000	1	1	3.68324	17.24	0.578
4	10000	1	1	3.57718	13.86	0.5585
5	100000	1	1	3.26748	4.002	0.55804
6	1000000	1	1	3.1486	0.0032	0.5594
7	10000000	1	1	3.14149	0.0016	0.5585



Al ser la distancia entre líneas y la medida de la aguja son iguales, el valor tiende a pi entre mayor sea el número de iteraciones, como evidencia los valores del error porcentual para cada dato.

Tabla con valores de iteración y su correspondiente valor de pi para a y b distintos.

Dato	Iteraciones	Distancia	Largo Aguja	Valor aprox. de pi	Error %	Probabilidades
1	10	1	2	2.0065	36	0.9
2	100	1	2	2.16476	34.2	0.76
3	1000	1	2	2.24254	31.222	0.78
4	10000	1	2	2.29077	29.003	0.7782
5	100000	1	2	2.27517	28.1	0.77582
6	1000000	1	2	2.28613	27.9	0.777
7	10000000	1	2	2.29129	27.3	0.7768



Al ser diferentes los valores de la distancia entre líneas y la medida de la aguja se evidencia que los valores no tienden gradualmente a pi, con grandes valores en el error porcentual.

Conclusiones

El método de generación de números aleatorios mediante rand y srand es muy eficiente para el calculo de nuestro programa. Esto podemos verlo al comprobar que los tiempos de ejecución son bastante pequeños, no superando los 2 segundos de ejecución para iteraciones superior a 1 millon.

Se evidencio que la prueba de cálculo de pi mediante con el método de Montecarlo depende exclusivamente del número de iteraciones realizadas (en este caso entre 10 y 10.000.000) siempre y cuando los algoritmos de generación de números aleatorios sean eficientes para que este método sea efectivo.

El problema de la aguja de Buffon solo se cumple cuando la longitud de la aguja es menor o igual a la separación de las líneas paralelas del papel. El porcentaje de error del problema cuando a es igual a b disminuye al aumentar el número de intentos y va desde un 112% en 10 intentos hasta un 0.0016% para 10000000 intentos. Mientras que al ser la longitud de la aguja mayor que la separación de líneas el valor no tiende a

Bibliografía

- El número π: de la Geometría al Cálculo Numérico, Roberto Rodríguez del Río Departamento de Matemática Aplicada Facultad de Ciencias Químicas Universidad Complutense de Madrid

Webgrafía

- https://www.20minutos.es/noticia/2984641/0/numero-pi-origen-y-usos/#xtor=AD-15&xts=467263
- http://mathworld.wolfram.com/Pi.html
- https://prezi.com/pt3tamzsjld9/historia-numero-pi/
- https://www.mathsisfun.com/definitions/pi.html
- http://www.estadisticaparatodos.es/taller/buffon/buffon.html