Construction Of Deterministic Algorithms

Prabhakar Raghavan

Derandomisierung randomisierter Algorithmen

Sebastian Berndt

Arbeitsgruppe Diskrete Optimierung
Institut für Informatik
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Juni 2011

Inhalt

Inhalt

Inhalt

Schnelle Wiederholung

$\mathcal{NP}$-vollständige Probleme sind schwer zu lösen.

$\Rightarrow$ Approximative Lösungen

$\Rightarrow$ Randomisierte Algorithmen

Lineare & Ganzzahlige Programme

Definition (Lineares / Ganzzahliges Programm)

Seien $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, c \in \mathbb{Q}^n$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Dann heißt

$$\begin{aligned} &\max c^\top x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \\ &(x \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

lineares (ganzzahliges) Programm.

Konvention: x_i sind ganzzahlige Lösungen, x_i^* sind fraktionale Lösungen.
$\mathrm{OPT} = c^\top x, \mathrm{OPT}^* = c^\top x^*$

Wichtige Theoreme

Theorem (Karp 1972)

Ganzzahlige Lineare Programme sind $\mathcal{NP}$-vollständig.

Wichtige Theoreme

Theorem (Karp 1972)

Ganzzahlige Lineare Programme sind $\mathcal{NP}$-vollständig.

Theorem (Khachiyan 1979)

Lineare Programme sind in $\mathcal{P}$

LP$\mapsto$ ILP

Ab jetzt $x_i \in \{0,1\}$ und $x_i^* \in [0,1]$

LP$\mapsto$ ILP

Ab jetzt $x_i \in \{0, 1\}$ und $x_i^* \in [0, 1]$

- Kaufmännisches Runden

$$x_i = \begin{cases} 1 & x_i^* \geq 0.5 \\ 0 & x_i^* < 0.5 \end{cases}$$

LP$\mapsto$ ILP

Ab jetzt $x_i \in \{0,1\}$ und $x_i^* \in [0,1]$

- Kaufmännisches Runden

$$x_i = \begin{cases} 1 & x_i^* \geq 0.5 \\ 0 & x_i^* < 0.5 \end{cases}$$

- Randomisiertes Runden

$$\Pr[x_i = 1] = x_i^*$$

Derandomisierung

"Anyone who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin."
(John von Neumann)

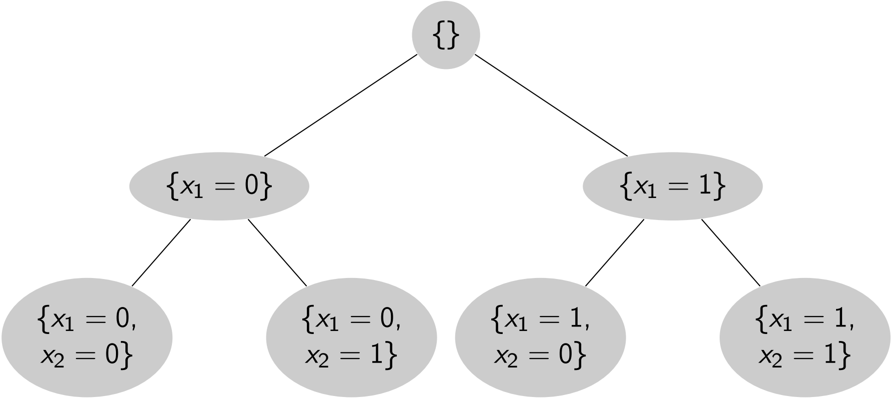
Derandomisierung

"Anyone who considers arithmetical methods of producing random digits is, of course, in a state of sin."
(John von Neumann)

Lösung: Derandomisierung!

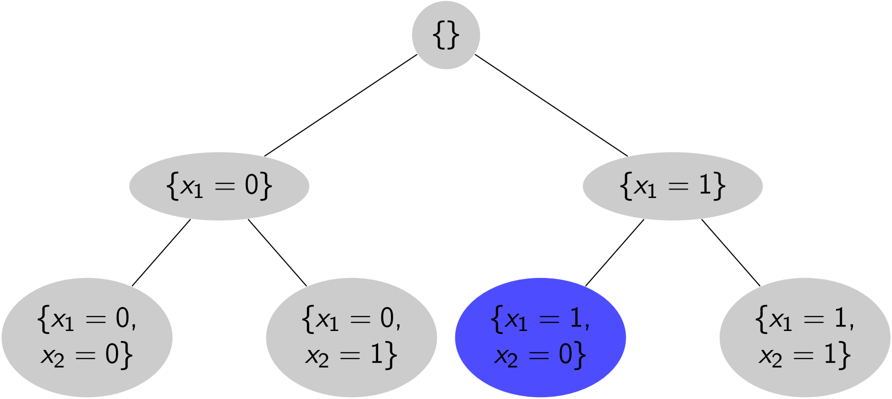
Entscheidungsbaum

Idee: Stelle Entscheidungen beim Runden als Baum dar!



Entscheidungsbaum

Idee: Stelle Entscheidungen beim Runden als Baum dar!



Notationen

- Entscheidungsbaum T
- Linker/Rechter Entscheidungsbaum T_L, T_R
- Teilbaum T^j, wenn $x_1, \ldots, x_j$ schon bestimmt

Notationen

- Entscheidungsbaum T
- Linker/Rechter Entscheidungsbaum T_L, T_R
- Teilbaum T^j, wenn $x_1, \dots, x_j$ schon bestimmt
- Wahrscheinlichkeit für schlechtes Ereignis im Baum T^j, wenn die restlichen x_i per RR bestimmt werden: $\mathrm{bad}(T^j)$
- $\mathrm{bad}(T^j) \geq \min\{\mathrm{bad}(T_L^j), \mathrm{bad}(T_R^j)\}$

Algorithmische Idee

Gilt $1 > \text{bad}(T)$, so wähle also entweder T_L^j oder T_R^j!

Algorithmische Idee

Gilt $1 > \text{bad}(T)$, so wähle also entweder T_L^j oder T_R^j!
Erhalte Folge $T_1, \ldots, T_n$ mit

$$1 > \text{bad}(T) \geq \text{bad}(T_1) \geq \ldots \geq \text{bad}(T_n)$$

Algorithmische Idee

Gilt $1 > \mathrm{bad}(T)$, so wähle also entweder T_L^j oder T_R^j!
Erhalte Folge $T_1, \ldots, T_n$ mit

$$1 > \mathrm{bad}(T) \geq \mathrm{bad}(T_1) \geq \ldots \geq \mathrm{bad}(T_n)$$

T_n ist Blatt, also $\mathrm{bad}(T_n) \in \{0, 1\}$. Somit $\mathrm{bad}(T_n) = 0$!

Algorithmische Idee

Gilt $1 > \text{bad}(T)$, so wähle also entweder T_L^j oder T_R^j!
Erhalte Folge $T_1, \ldots, T_n$ mit

$$1 > \text{bad}(T) \geq \text{bad}(T_1) \geq \ldots \geq \text{bad}(T_n)$$

T_n ist Blatt, also $\text{bad}(T_n) \in \{0, 1\}$. Somit $\text{bad}(T_n) = 0$!
Problem: T hat 2^n Blätter

Pessimistischer Schätzer

Definition (Pessimistischer Schätzer)

Für einen Entscheidungsbaum T und alle seine Teilbäume T^j heißt U pessimistischer Schätzer (Pessimistic Estimator), wenn:

1. $1 > U(T)$
2. $U(T^j) \geq \text{bad}(T^j)$
3. $U(T^j) \geq \min\{U(T_L^j), U(T_R^j)\}$
4. $U(T^j)$ ist polynomiell berechenbar

Pessimistischer Schätzer

Definition (Pessimistischer Schätzer)

Für einen Entscheidungsbaum T und alle seine Teilbäume T^j heißt U pessimistischer Schätzer (Pessimistic Estimator), wenn:

1. $1 > U(T)$
2. $U(T^j) \geq \text{bad}(T^j)$
3. $U(T^j) \geq \min\{U(T^j_L), U(T^j_R)\}$
4. $U(T^j)$ ist polynomiell berechenbar

Theorem (Hauptsatz)

Erhält man zu einem Problem Π via RR einen randomisierten Algorithmus mit Güte A und gibt es einen pessimistischen Schätzer für Π, so gibt es für Π einen deterministischen, polynomiellen Algorithmus mit Güte A.

Allgemeines Vorgehen

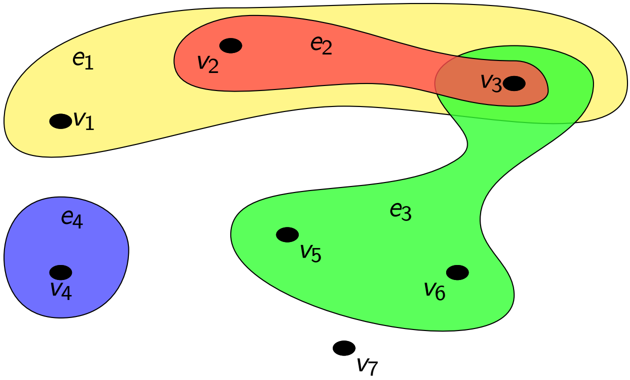
1. Löse LP
2. Zeige, dass es mit Randomisiertem Runden eine Lösung mit Güte A gibt
3. Bestimme einen pessimistischen Schätzer (durch Umbau des obigen Beweises)
4. Erhalte deterministischen Algorithmus mit Güte A

Problemstellung

Gegeben: Hypergraph H mit r Kanten und n Knoten
Gesucht: maximale Anzahl an Kanten, so dass jeder Knoten mit maximal k Kanten inzidiert.

Problemstellung

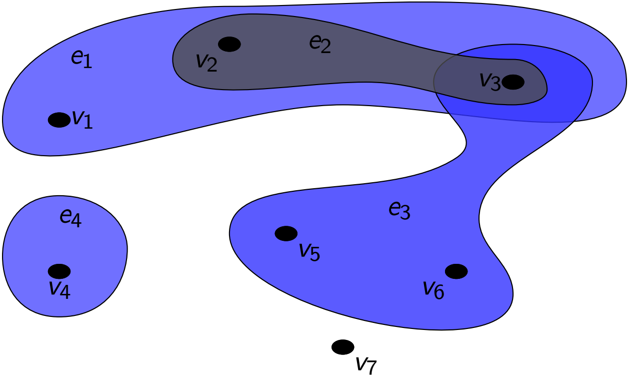
Gegeben: Hypergraph H mit r Kanten und n Knoten
Gesucht: maximale Anzahl an Kanten, so dass jeder Knoten mit maximal k Kanten inzidiert.



$k = 2$

Problemstellung

Gegeben: Hypergraph H mit r Kanten und n Knoten
Gesucht: maximale Anzahl an Kanten, so dass jeder Knoten mit maximal k Kanten inzidiert.



$k = 2$

Formulierung als IP

- $A \in \{0,1\}^{n \times r}$ Inzidenzmatrix $(a_{ij} = 1 \Leftrightarrow v_i \in e_j)$
- $b = \vec{k}$
- $c = \vec{1}$
- x_j für Kante e_j

Formulierung als IP

- $A \in \{0,1\}^{n \times r}$ Inzidenzmatrix ($a_{ij} = 1 \Leftrightarrow v_i \in e_j$)
- $b = \vec{k}$
- $c = \vec{1}$
- x_j für Kante e_j

IP für k-Matching

$$\begin{aligned} & \max c^\top x \\ & s.t. \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j \le k && \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\ & x_j \in \{0,1\} && \forall j \in \{1, \ldots, r\} \end{aligned}$$

Randomisiertes Runden

- $\Rightarrow \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{r} x_j] = \sum_{i=j}^{r} x_j^* = \mathrm{OPT}^* \geq \mathrm{OPT}$
- $\Rightarrow \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j] = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j^* \leq k$

Randomisiertes Runden

- $\Rightarrow \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{r} x_j] = \sum_{i=j}^{r} x_j^* = \mathrm{OPT}^* \geq \mathrm{OPT}$
- $\Rightarrow \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j] = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j^* \leq k$

Problem: $\Pr[\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j > k]$ ist sehr hoch!

Einschub

Lemma (Lemma 1)

X_i binäre Zufallsvariablen, $a_i \in [0,1]$, $\delta > 0, \gamma \in (0,1]$ und $X = \sum_i a_i X_i$. Dann gilt:

$$\Pr[X > (1+\delta)\mathbb{E}[X]] < \left(\frac{\exp(\delta)}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mathbb{E}[X]} =: B(\mathbb{E}[X], \delta)$$

$$\Pr[X < (1-\gamma)\mathbb{E}[X]] < B(\mathbb{E}[X], \gamma)$$

Einschub

Lemma (Lemma 1)

X_i binäre Zufallsvariablen, $a_i \in [0,1]$, $\delta > 0, \gamma \in (0,1]$ und $X = \sum_i a_i X_i$. Dann gilt:

$$\Pr[X > (1+\delta)\mathbb{E}[X]] < \left(\frac{\exp(\delta)}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mathbb{E}[X]} =: B(\mathbb{E}[X], \delta)$$

$$\Pr[X < (1-\gamma)\mathbb{E}[X]] < B(\mathbb{E}[X], \gamma)$$

Proof.

Markov-Ungleichung, $e^x \geq x + 1$, Bernoulli-Ungleichung □

Einschub

Lemma (Lemma 1)

X_i binäre Zufallsvariablen, $a_i \in [0,1]$, $\delta > 0, \gamma \in (0,1]$ und $X = \sum_i a_i X_i$. Dann gilt:

$$\Pr[X > (1+\delta)\mathbb{E}[X]] < \left(\frac{\exp(\delta)}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mathbb{E}[X]} =: B(\mathbb{E}[X], \delta)$$

$$\Pr[X < (1-\gamma)\mathbb{E}[X]] < B(\mathbb{E}[X], \gamma)$$

Proof.

Markov-Ungleichung, $e^x \geq x + 1$, Bernoulli-Ungleichung □

Zur Abkürzung: $D(\mathbb{E}[X], x)$ mit $B(\mathbb{E}[X], D(\mathbb{E}[X], x)) = x$.

Lösung

Skalierung

Skaliere $\Pr[x_i = 1]$ mit $\alpha \in (0,1)$, so dass $B(\alpha k, \frac{1-\alpha}{\alpha}) \leq \frac{1}{n+1}$
Erhalte dann x_j^S mit $\Pr[x_j^S = 1] = \alpha x_j^*$.

Lösung

Skalierung

Skaliere $\Pr[x_i = 1]$ mit $\alpha \in (0, 1)$, so dass $B(\alpha k, \frac{1-\alpha}{\alpha}) \leq \frac{1}{n+1}$
Erhalte dann x_j^S mit $\Pr[x_j^S = 1] = \alpha x_j^*$.

Lemma (Lemma 2)

Falls $k > \ln(n)$, so ist α konstant.
Falls $k \leq \ln(n)$, so ist α abhängig von n.

Lösung

Skalierung

Skaliere $\Pr[x_i = 1]$ mit $\alpha \in (0, 1)$, so dass $B(\alpha k, \frac{1-\alpha}{\alpha}) \leq \frac{1}{n+1}$
Erhalte dann x_j^S mit $\Pr[x_j^S = 1] = \alpha x_j^*$.

Lemma (Lemma 2)

Falls $k > \ln(n)$, so ist α konstant.
Falls $k \leq \ln(n)$, so ist α abhängig von n.

Theorem

Es gibt ein k-Matching mit Kardinalität K mit

$$K \geq \alpha \,\mathrm{OPT}^* \cdot (1 - D(\alpha \,\mathrm{OPT}^*, 1/(n+1)))$$

Warnung

Ab hier:
Ein konkreter pessimistischer Schätzer für k-Matchings.

Warnung

Here be dragons! $(e^x, \ln(x), \dots)$

Einschub 2

Lemma (Lemma 3)

Es gilt mit $t = \ln(1 + D(\alpha k, \frac{1-\alpha}{\alpha}))$, $t' = \ln(1 + D(\alpha\,\mathrm{OPT}^*, 1/(n+1)))$ *und* $\mu = \alpha\,\mathrm{OPT}^*$*:*

$$\Pr[\sum_{j=1}^{r} a_{ij} x_j^S > k] \leq \exp(-tk) \prod_{j=1}^{r} [x_j^* \exp(t a_{ij}) + 1 - x_j^*]$$

$$\Pr[\sum_{j=1}^{r} x_j^S < \mu(1 - D(\mu, 1/(n+1)))] \leq$$

$$\exp(t'\mu(1 - D(\mu, 1/(n+1))) \prod_{j=1}^{r} [x_j^* \exp(-t') + 1 - x_j^*]$$

Proof.

Zwischenergebnis Lemma 1 □

Der gesuchte Schätzer

Theorem (Pessimistischer Schätzer für k-Matching)

Das folgende U ist ein pessimistischer Schätzer für k-Matching mit $\mu = \alpha \, \mathrm{OPT}^*$*:*

$$U(T) = \sum_{i=1}^{n} e^{-tk} \prod_{j=1}^{r} [x_j^* e^{a_{ij} t} + 1 - x_j^*] + e^{t' \mu (1 - D(\mu, 1/n+1))} \prod_{j=1}^{r} [x_j^* e^{-t'} + 1 - x_j^*]$$

mit $t = \ln(1 + D(\alpha k, \frac{1-\alpha}{\alpha}))$, $t' = \ln(1 + D(\mu, 1/n + 1))$

Ziellinie

Theorem

Für einen Hypergraphen lässt sich deterministisch in polynomieller Zeit ein k-Matching der Kardinalität K mit

$$K \geq \alpha \, \mathrm{OPT}^* \cdot (1 - D(\alpha \, \mathrm{OPT}^*, 1/(n+1))) = \mu(1 - D(\mu, 1/(n+1)))$$

bestimmen.

Allgemeines Vorgehen

1. Löse LP
2. Zeige, dass es mit Randomisiertem Runden eine Lösung mit Güte A gibt
3. Bestimme einen pessimistischen Schätzer (durch Umbau des obigen Beweises)
4. Erhalte deterministischen Algorithmus mit Güte A

Danke!

Fragen?