UFR de MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE RENNES I

Master Modélisation spécialité Calcul Scientifique et Applications
Pratique de Logiciels Éléments Finis

Examen du 8 décembre 2016

Avertissement : documents de cours autorisés.
Tout échange d'information sous quelque forme que ce soit est interdit.
Durée 2h.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière Σ supposée « régulière ». On considère un réel strictement positif R tel que Ω soit strictement inclu dans le disque ouvert $D(0,R)$ centré à l'origine et de rayon R. On note Ω' le complémentaire dans $D(0,R)$ de l'adhérence de Ω, *i.e.* $\Omega' = D(0,R) \setminus \overline{\Omega}$ et Γ le cercle centré à l'origine et de rayon R.

On s'intéresse au problème suivant : trouver une fonction u continue sur $D(0,R)$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{\Omega}$ et sur $\overline{\Omega'}$ telle que,

$$\begin{cases} -\,\varepsilon\Delta u(x) = \rho(x) & \text{dans } \Omega \\ -\,\Delta u(x) = 0 & \text{dans } \Omega' \\ \varepsilon\,\dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\Omega}(x) - \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\Omega'}(x) = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}(x) + \kappa_R\, u(x) = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

où ρ désigne une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, ε et κ_R sont des réels strictement positifs et où la dérivée normale $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ sur les frontières Σ et Γ est définie pour la normale unitaire sortante.

1 - Écrire la formulation variationnelle associée au problème (1). Préciser le choix des espaces fonctionnels.

2 - Montrer que la formulation variationnelle obtenue admet une unique solution. On pourra admettre le résultat suivant : il existe $C > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{H}^1(D(0,R))$

$$\|v\|^2_{\mathbb{H}^1(D(0,R))} \leq C \left(\iint_{D(0,R)} \|\nabla v\|^2 \,\mathrm{d}x + \oint_{\Gamma} v^2(x)\,\mathrm{d}\gamma_x \right).$$

3 - On souhaite calculer une approximation de la solution du problème considéré en utilisant la méthode des éléments finis. Décrire le principe de la méthode des éléments finis appliquée au problème considéré.

4 - On considère l'élément fini $(\widehat{K}, \widehat{\mathcal{P}}, \widehat{\Sigma})$ de Lagrange de type (1) associé au rectangle de référence $\widehat{K}$ de sommets $\widehat{S}_1, \widehat{S}_2, \widehat{S}_3$ et $\widehat{S}_4$ de coordonnées respectives $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ avec

$$\widehat{\mathcal{P}} = \Big\{ p \in \mathcal{C}^0(\widehat{K}) \;;\; p(x_1,x_2) = \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_0 \;\text{ avec } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, 3 \Big\}$$

et $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{\Phi}_1, \widehat{\Phi}_2, \widehat{\Phi}_3, \widehat{\Phi}_4\}$ où les degrés de libertés sont donnés par

$$\widehat{\Phi}_i : \widehat{v} \in \mathcal{C}^0(\widehat{K}) \longmapsto \widehat{v}(\widehat{S}_i) \qquad i = 1, \ldots, 4.$$

a) Montrer que pour cet élément fini la condition d'unisolvance est bien satisfaite.
b) Calculer les fonctions de base de cet élément fini.

5 - On suppose que le rectangle K de sommets $(0,-2), (1,-2), (1,-1), (0,-1)$ appartient à la triangulation du domaine Ω et qu'aucun de ses sommets n'appartient à Σ. Dans le cas où ρ est constant, calculer la matrice et le second membre élémentaires correspondant, pour l'élément géométrique K, aux termes apparaissant dans la formulation variationnelle.