Inverse Problems 2017
Contrôle Continue
Régression linéaire: Inférence des paramètres physiques à partir des observations

Un canon est tiré directement vers le haut à partir d'une position inconnue au-dessus de la surface, m1, avec une vitesse initiale inconnue, m2 et une accélération gravitationnelle inconnue, m3.

Les lois du mouvement de Newton nous disent que la relation entre la position (hauteur) et le temps suit

$$y(t) = m_1 + m_2 t - \frac{1}{2} m_3 t^2$$

Les hauteurs du boulet de canon, yi, (i = 1, ..., 25) sont mesurées à divers moments, ti, en secondes. Nous obtenons les données dessous

Temps (s)	Hauteur (m)
0.10000	21414
9.5044	21588
9.9264	21277
11.402	21299
28.358	20291
36.096	19591
39.524	19094
43.501	18579
43.577	18740
50.549	17395
52.637	17058
57.652	16166
57.724	16146
59.248	15997
60.344	15831
62.610	15050
70.382	13291
74.505	12363
76.031	11870
80.252	10948
82.323	10319
84.268	9639.3
85.122	9383.8
95.678	5906.3
111.69	76.365

(a) Écrivez l'équation linéaire (matrice - vectorielle) reliant les données et les paramètres de modèle inconnus pour ce problème.

(b) Trouvez la solution des moindres carrés pour les paramètres du modèle, et calculez les matrices de covariance et de corrélation. Expliquer la nature de toute corrélation entre les paramètres.

(c) Ci-dessous sont les valeurs de pour p = 95% et différents degrés de liberté (v)

$\chi^2_{v=1,p=0.95}$ =3.96;

$\chi^2_{v=2,p=0.95}$ =5.99;

$\chi^2_{v=3,p=0.95}$ =7.81;

Écrivez les estimations des paramètres du modèle et leurs intervalles de confiance à 95% projetés, en utilisant $m \pm sqrt(\chi^2_{v=1} * diag(C_m))$

(d) Calculer l'intervalle de confiance pour chaque paramètre en projetant l'ellipsoïde de confiance à 95% 3D vers 2D en utilisant $m \pm sqrt(\chi^2_{v=2} * diag(C_m))$

(e) Calculez et tracez des ellipses de confiance à 95% pour les 3 combinaisons de paramètres (avec $\chi^2_{v=2}$).

(f) Pourquoi les valeurs de (e) sont-elles plus grandes que les valeurs de (c)?

(g) La fonction de misfit des moindres carrés permettant l'erreur ou le bruit (σ) sur les données est donnée comme

$$\phi(m) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d_i^{observed} - d_i^{predicted}}{\sigma_i}\right)^2$$

(h) Quelle est la valeur du misfit et pourquoi ce n'est pas zero ?

(i) Quelle valeur attendez-vous pour $\phi(m)$?

(j) En supposant que les données sont générées avec un bruit gaussien indépendant avec σ, l'écart type de 0,5 m, calcule la valeur de ϕ (m). Que concluez-vous?

(k) Supposons maintenant que les observations ont une valeur d'écart type σ = 800 m. Calculez la valeur correspondante de $\phi(m)$. Que concluez-vous?

(l) Selon vous, que pourrait être le bon σ pour les données et pourquoi? (Cela suggère-t-il une manière générale d'estimer l'écart-type de la distribution d'erreur pour les données lorsque vous ne les connaissez pas?)

(m) Où pensez-vous que cette expérience a eu lieu et pourquoi?