Université de Rennes 1 Master 2 CSM 2017-2018
UFR Mathématiques Estimation de paramètres et optimisation

TP n°1 : Optimisation

Exercice 1. (*Méthodes à pas constant*)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, nous considérons les deux fonctions suivantes

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - i)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}(x_i - i)^2,$$

ainsi que la fonction oscillante s et la fonction de Rosenbrock h définies par

$$s(x) = (x-1)^2 + \sin\left(4\pi(x - \frac{9}{8})\right) \quad \text{et} \quad h(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

1) **Gradient à pas constant**.
Écrire la fonction `[x, Jx, GJx, nit] = GCST(J, GJ, x0, pas, epsil, nitmax)` qui calcule le minimum de la fonction `J` dont le gradient est donné par la fonction `GJ`, par la méthode du gradient à pas constant ; à partir de l'initialisation `x0`, avec le pas constant `pas`, la précision `epsil` et le nombre maximum d'itérations `nitmax` : `x` est le point où le minimum `Jx` est atteint, `GJx` est le gradient en ce point et `nit` est le nombre d'itérations. Valider cette fonction par un exemple bien choisi

2) Pour `x0=0` et `epsil`$= 10^{-7}$ appliquer cette fonction de minimisation à $f(x)$ pour $n = 1$ puis $n = 2$ avec les différentes valeurs suivantes du pas : `pas = 0.1 :0.1 :5`. Représenter sur un graphique le nombre d'itérations en fonction du pas choisi et expliquer le résultat.

3) **Gradient conjugué à pas constant**.
Répondre aux mêmes questions que précédemment pour le gradient conjugué de Dai-Yuan : `[x, Jx, GJx, nit] = GCDYCST(J, GJ, x0, pas, epsil, nitmax)` et comparer avec le gradient à pas constant. Expliquer les résultats obtenus.

4) Pour la fonction g et $n = 2$, représenter sur un même graphique le nombre d'itérations en fonction du pas pour `GCST` et `GCDYCST` et expliquer les résultats.

5) Pour la fonction s, `x0 = 0 : 0.01 : 4` et `pas = 0.01` représenter la solution `x` obtenue par `GCST` en fonction de `x0`.

Exercice 2. (*Méthodes à pas optimal*)
Utiliser la même formule de calcul en fonction de la direction de descente pour le gradient à pas optimal et pour le gradient conjugué à pas optimal.

1) Écrire les fonctions qui calcule le minimum des fonctions f et g par les méthodes du **gradient à pas optimal** et du **du gradient conjugué à pas optimal**. Valider ces

fonctions pour des exemples bien choisis. Pour g, comparer avec les résultats de `GCST` pour $n = 2$ et `pas=0.5`.

2) Pour f puis g, avec `x0=0` et `epsil=` 10^{-7} calculer le minimum par les deux méthodes et comparer les résultats lorsque n augmente : $n = 1, 2, 5, 10, 100, 1000, 10000$, ... Pour g, représenter sur une même figure le logarithme en base 10 du nombre d'évaluations de la fonction et de son gradient en fonction de $\log_{10}(n)$ pour les deux méthodes. Pour g avec $n = 2$ représenter sur une même figure le trajet des différentes itérations pour les deux algorithmes.

Exercice 3. *Méthodes disponibles dans Matlab*
Étudier les fonctions disponible dans `Matlab` pour minimiser une fonction et comparer avec les fonctions précédentes sur les exemples donnés.

Exercice 4. *Fonction de Rosenbrock*
Comparer toutes les méthodes pour calculer le minimum de h.