Contrôle Continu Problèmes Inverses: Régression Linéaire

Sébastien Hervieu

4 janvier 2018

a Equation Linéaire

Nous disposons de données $d(t, y)$ contenant les hauteurs y du projectile à des instants t. Par ailleurs, le modèle que nous voulons trouver est de la forme :

$$y(t) = m_1 + m_2 t - \frac{1}{2} m_3 t^2$$

Nous posons donc l'équation suivante :

$$d = Gm \tag{1}$$

et donc

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & -\frac{1}{2}t_1^2 \\ 1 & t_2 & -\frac{1}{2}t_2^2 \\ & \vdots & \\ 1 & t_{25} & -\frac{1}{2}t_{25}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

où les y_i et les t_i, $(i = 1, \ldots, 25)$ sont les données et les m_n, $(n = 1, 2, 3)$ sont les inconnues.

b Solution des moindres carrés, matrices de covariance et de corrélation

La solution des moindres carrés est donnée par :

$$m = (G^T G)^{-1} G^T d \tag{3}$$

En résolvant numériquement à l'aide de scilab, nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_1 &= 21396.743 \\ m_2 &= 16.811659 \\ m_3 &= 3.7141271 \end{aligned} \tag{4}$$

Matrice de covariance des données

En utilisant la formule donnée en (3) pour le calcul des paramètres, nous faisons l'hypothèse implicite que l'erreur sur les données σ est telle que

$$\sigma^2 = 1 \tag{5}$$

Dans cette hypothèse la matrice de covariance des données C_d est égale à la matrice identité I, soit :

$$C_d = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{25}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I \tag{6}$$

Matrices de covariance du modèle

La matrice de covariance du modèle C_m est donnée de manière générale par :

$$C_m = (G^T C_d^{-1} G)^{-1} \tag{7}$$

Dans notre hypothèse où $C_d = I$, C_m devient :

$$C_m = (G^T G)^{-1} \tag{8}$$

C_m est calculée à l'aide de scilab ; nous obtenons le résultat suivant :

$$C_m = \begin{bmatrix} 0.3654177 & -0.0120938 & -0.0001784 \\ -0.0120938 & 0.0005567 & 0.0000097 \\ -0.0001784 & 0.0000097 & 0.0000002 \end{bmatrix} \tag{9}$$

La matrice de corrélation des paramètres est donnée par la formule suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{C_m(m_i, m_j)}{\sigma_i \sigma_j} \tag{10}$$

ce qui nous donne dans notre cas :

$$CorrM = \begin{bmatrix} 1 & -0.8479488 & -0.6838399 \\ -0.8479488 & 1. & 0.9535659 \\ -0.6838399 & 0.9535659 & 1. \end{bmatrix} \tag{11}$$

Interpretation

Nous constatons que Cm n'est pas diagonale, qu'aucune valeur de la matrice de $CorrM$ n'est nulle.

c Estimation des paramètres avec $\chi^2_{\nu=1,p=0.95}$

En effectuant le calcul suivant :

$$\Delta m = \sqrt{\chi^2_{\nu=1,p=0.95} \times diag(C_m)} \tag{12}$$

avec $\chi^2_{\nu=1,p=0.95} = 3.96$

nous obtenons les estimations des paramètres suivantes, avec leurs intervalles de confiance à 95% projetés en 1D :

$$\begin{aligned} m_1 &= 21396.743 \pm 1.2029356\ m \\ m_2 &= 16.811659 \pm 0.046951\ m/s \\ m_3 &= 3.7141271 \pm 0.0008587\ m/s^2 \end{aligned} \tag{13}$$

d Estimation des paramètres avec $\chi^2_{\nu=2,p=0.95}$

En effectuant un calcul similaire au précédent :

$$\Delta m = \sqrt{\chi^2_{\nu=2,p=0.95} \times diag(C_m)} \tag{14}$$

avec $\chi^2_{\nu=2,p=0.95} = 5.99$

nous obtenons les estimations des paramètres suivantes, avec leurs intervalles de confiance à 95% 3D projetés en 2D :

$$\begin{aligned} m_1 &= 21396.743 \pm 1.4794769\ m \\ m_2 &= 16.811659 \pm 0.0577445\ m/s \\ m_3 &= 3.7141271 \pm 0.0010561\ m/s^2 \end{aligned} \tag{15}$$