Contrôle Continu Problèmes Inverses: Régression Linéaire

Sébastien Hervieu

12 janvier 2018

a Equation Linéaire

Nous disposons de données $d(t, y)$ contenant les hauteurs y du projectile à des instants t. Par ailleurs, le modèle que nous voulons trouver est de la forme :

$$y(t) = m_1 + m_2 t - \frac{1}{2} m_3 t^2$$

Nous posons donc l'équation suivante :

$$d = Gm \tag{1}$$

et donc

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & -\frac{1}{2}t_1^2 \\ 1 & t_2 & -\frac{1}{2}t_2^2 \\ & \vdots & \\ 1 & t_{25} & -\frac{1}{2}t_{25}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

où les y_i et les t_i, $(i = 1, \ldots, 25)$ sont les données et les m_n, $(n = 1, 2, 3)$ sont les inconnues.

b Solution des moindres carrés, matrices de covariance et de corrélation

La solution des moindres carrés est donnée par :

$$m = (G^T G)^{-1} G^T d \tag{3}$$

En résolvant numériquement à l'aide de scilab, nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_1 &= 21396.743 \\ m_2 &= 16.811659 \\ m_3 &= 3.7141271 \end{aligned} \tag{4}$$

Matrice de covariance des données

En utilisant la formule donnée en (3) pour le calcul des paramètres, nous faisons l'hypothèse implicite que l'erreur sur les données σ est telle que

$$\sigma^2 = 1 \tag{5}$$

Dans cette hypothèse la matrice de covariance des données C_d est égale à la matrice identité I, soit :

$$C_d = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{25}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I \tag{6}$$

Matrices de covariance du modèle

La matrice de covariance du modèle C_m est donnée de manière générale par :

$$C_m = (G^T C_d^{-1} G)^{-1} \tag{7}$$

Dans notre hypothèse où $C_d = I$, C_m devient :

$$C_m = (G^T G)^{-1} \tag{8}$$

C_m est calculée à l'aide de scilab ; nous obtenons le résultat suivant :

$$C_m = \begin{bmatrix} 0.3654177 & -0.0120938 & -0.0001784 \\ -0.0120938 & 0.0005567 & 0.0000097 \\ -0.0001784 & 0.0000097 & 0.0000002 \end{bmatrix} \tag{9}$$

La matrice de corrélation des paramètres est donnée par la formule suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{C_m(m_i, m_j)}{\sigma_i \sigma_j} \tag{10}$$

ce qui nous donne dans notre cas :

$$CorrM = \begin{bmatrix} 1 & -0.8479488 & -0.6838399 \\ -0.8479488 & 1. & 0.9535659 \\ -0.6838399 & 0.9535659 & 1. \end{bmatrix} \tag{11}$$

Interpretation

Nous constatons que Cm n'est pas diagonale, qu'aucune valeur de la matrice de $CorrM$ n'est nulle.

c Estimation des paramètres avec $\chi^2_{\nu=1,p=0.95}$

En effectuant le calcul suivant :

$$\Delta m = \sqrt{\chi^2_{\nu=1,p=0.95} \times diag(C_m)} \tag{12}$$

avec $\chi^2_{\nu=1,p=0.95} = 3.96$

nous obtenons les estimations des paramètres suivantes, avec leurs intervalles de confiance à 95% projetés en 1D :

$$\begin{aligned} m_1 &= 21396.743 \pm 1.2029356\ m \\ m_2 &= 16.811659 \pm 0.046951\ m/s \\ m_3 &= 3.7141271 \pm 0.0008587\ m/s^2 \end{aligned} \tag{13}$$

d Estimation des paramètres avec $\chi^2_{\nu=2,p=0.95}$

En effectuant un calcul similaire au précédent :

$$\Delta m = \sqrt{\chi^2_{\nu=2,p=0.95} \times diag(C_m)} \tag{14}$$

avec $\chi^2_{\nu=2,p=0.95} = 5.99$

nous obtenons les estimations des paramètres suivantes, avec leurs intervalles de confiance à 95% 3D projetés en 2D :

$$\begin{aligned} m_1 &= 21396.743 \pm 1.4794769\ m \\ m_2 &= 16.811659 \pm 0.0577445\ m/s \\ m_3 &= 3.7141271 \pm 0.0010561\ m/s^2 \end{aligned} \tag{15}$$

e Tracé des ellipses de confiance à 0.95 pour les 3 combinaisons de paramètres

Les ellipses de confiance à 0.95 pour les 3 combinaisons de paramètres sont les suivantes :

m1 et m2

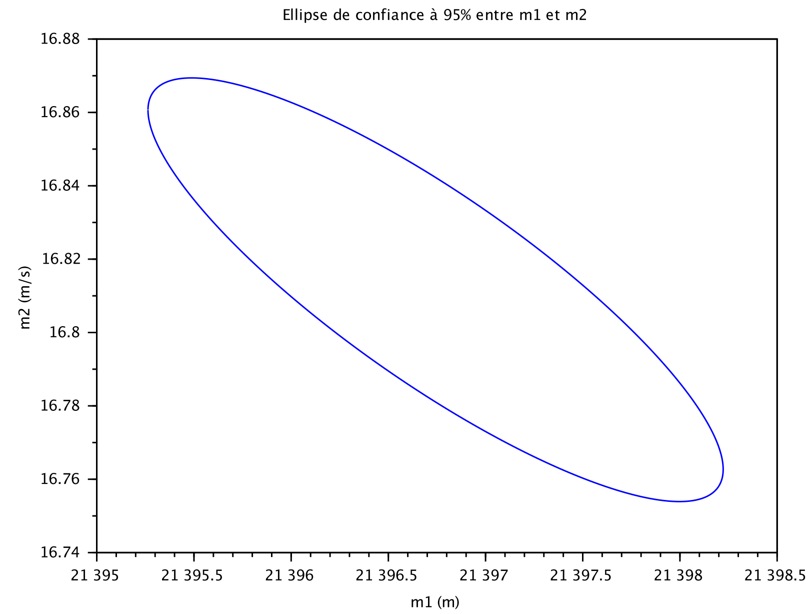

FIGURE 1 – Ellipse de confiance à 0.95 entre m1 et m2

m1 et m3

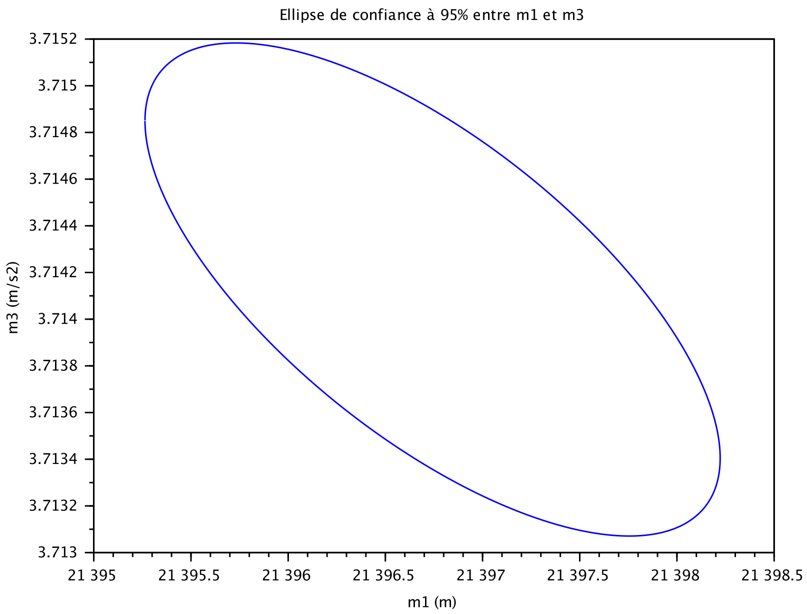

FIGURE 2 – Ellipse de confiance à 0.95 entre m1 et m3

m2 et m3

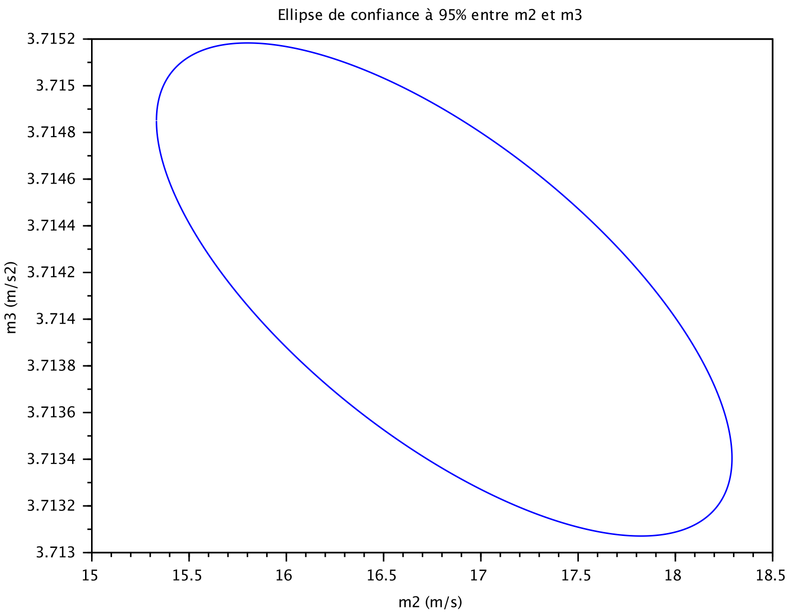

FIGURE 3 – Ellipse de confiance à 0.95 entre m2 et m3

f Comparaison valeurs de (e) et (c)

Les valeurs de (e) sont plus grandes car elles représentent la dispersion à 0.95 des couples de paramètres pris 2 à 2, alors que les valeurs de (c) représente la dispersion des valeurs de chacun des paramètres. Ces valeurs sont différentes car elles ne mesurent pas la même population de "points".

g Misfit : formule

$$\phi(m) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{d_i^{observed} - d_i^{predicted}}{\sigma_i})^2 \tag{16}$$

h Misfit expected v

La valeur du misfit est de 9339.5885 m.

Cette valeur n'est pas zéro car elle représente la somme des carrés des différences entre les mesures et les valeurs prédites par le modèle calculé.

Les mesures étant bruitées, le misfit ne peut être zéro.

i Misfit : valeur attendue

La valeur attendue du misfit dans cette formule est 1.

j Misfit avec $\sigma = 0.5$ m

Le misfit avec $\sigma = 0.5$ m est de 37358.354 m.

Nous en concluons que de passer le σ de 1 à 0,5m augmente le misfit. L'ajustement du σ ne doit pas se faire dans cette direction.

k Misfit avec $\sigma = 800m$

La valeur du msifit avec $\sigma = 800$m est de 0.0145931 m.

Cette valeur est beaucoup trop petite. σ ne doit pas être aussi grand.

l Evaluation de la valeur de σ

Nous pouvons essayer d'ajuster la valeur de σ en calculant le misfit pour différentes valeurs de σ pour tenter d'obtenir une valeur de $\phi(m)$ proche de 1 :

$$\begin{array}{cc} \sigma & \phi(m) \\ 2. & 2334.8971 \\ 4. & 583.72428 \\ 10. & 93.395885 \\ 20. & 23.348971 \\ 50. & 3.7358354 \\ 100. & 0.9339588 \\ 200. & 0.2334897 \\ 400. & 0.0583724 \\ 800. & 0.0145931 \end{array} \tag{17}$$

Avec les calculs ci-dessus, nous voyons que $\sigma \simeq 100$, $\phi(m) \simeq 1$. Donc $\sigma \simeq 100$ est une bonne estimation de l'écart-type.

m Où l'expérience a-t-elle eu lieu ?

m_3 correspondant à l'accélération de pesanteur à la surface de la planète, nous constatons que sa valeur calculée ($3.714 m.s^{-2}$) est différente de celle de la Terre ($9,806 m.s-2$).

Une recherche Wikipédia sur Mars nous indique que l'accélération de pesanteur à la surface de cette planète est de $3.711 m.s^{-2}$, très proche de notre valeur calculée.

Par ailleurs, l'altitude de départ de l'expérience est de 21414m, ce qui équivaut à l'altitude du volcan le plus du haut du système solaire : Olympus Mons.

L'expérience s'est donc déroulée sur la planète Mars, au sommet d'Olympus Mons.