Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

Master 2 CSM 2017-2018
Estimation de paramètres et optimisation

TP n°2 : Estimation de paramètres pour l'équation de Poisson

Soit $\Omega =]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^2(\Omega)$ solution du problème de Poisson

$$\begin{cases} -u"(x) = f(x), & \text{sur } \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Pour une observation $u_{obs} \in H^2(\Omega)$, nous cherchons le contrôle $f \in L^2(\Omega)$ qui minimise la fonctionnelle définie sur $L^2(\Omega)$ par

$$J(f) = \frac{1}{2}\|u - u_{obs}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

avec $u = \mathscr{F}(f)$ solution de (1) et $u_{obs} = \sin(\pi x)$.

Exercice 1. *Problème direct*

Soit $n \in \mathbb{N}^*, h = \frac{1}{n}$ et $x_i = ih$ $(0 \leq i \leq n)$ une discrétisation régulière de l'intervalle $]0,1[$. Pour f donné, on cherche à calculer une approximation U_i de $u(x_i)$. L'approximation par différences finies centrées conduit aux équations

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2}[-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1}] = f(x_i), & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ U_0 = U_n = 0, \end{cases}$$

qui s'écrivent sous forme de système linéaire $\frac{1}{h^2}AU = F$ à résoudre, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \text{ où } F_i = f(x_i).$$

La méthode des éléments finis P_1 conduit au même système linéaire si l'on choisit la méthode des trapèzes comme méthode d'intégration numérique.

1) Écrire la fonction `[A]=spmata(n)` qui crée la matrice A en utilisant `spdiags`.

2) Écrire la fonction `[U]=direct(F)` qui résout (1) pour la source $F \in \mathbb{R}^{n-1}$ où n est le nombre d'intervalles de discrétisation et la tester pour $F_i = \pi^2 \sin(\pi x_i)$, $1 \leq i \leq n-1$.

3) Vérifier l'ordre de convergence des différences finies centrées en représentant le $\log_{10}$ de l'erreur en fonction du $\log_{10}$ de h pour différentes valeurs de n et en calculant la pente de la droite obtenue.

Exercice 2. *Problème adjoint*
Le problème adjoint de (1) pour J s'écrit

$$\begin{cases} -v"(x) = u(x) - u_{obs}(x), & \text{sur } \Omega, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

avec le gradient de J qui s'en déduit

$$\nabla J(f) = v.$$

1) Écrire la fonction `[V]=adjoint(U)` qui résout (2) pour le vecteur $U \in \mathbb{R}^{n-1}$ où n est le nombre d'intervalles de discrétisation et la tester pour $U_i = (\pi^2 + 1)\sin(\pi x_i)$, $1 \leq i \leq n-1$.

2) Vérifier à nouveau l'ordre de convergence.

3) Refaire le calcul en prenant U obtenu par `direct`.

Exercice 3. *Gradient et Gradient conjugué à pas constant*

1) Écrire les fonctions `[Y]=J(F)` et `[G]=GJ(F)` qui calcule la valeur de J et son gradient pour la discrétisation F d'une fonction f donnée.

2) Pour une initialisation $F^{(0)} = 0$, utiliser la fonction `GCST` programmée au premier TP pour rechercher le minimum de J.

- Faire des tests pour plusieurs valeurs du pas.
- Pour `pas=64`, vérifier la convergence à l'aide des formules analytiques établies en TD, représenter sur une première figure la courbe du logarithme en base 10 de l'erreur sur $F^{(k)}$ en fonction de l'itération k, puis sur une seconde figure les différentes courbes $F^{(k)}$ (pour certains k bien choisis).
- Vérifier l'ordre de convergence de $F^{(k)}$ vers la valeur exacte F_{ex} quand n augmente. Représenter la courbe de convergence et le nombre d'itérations en fonction de n.
- Représenter sur une même figure le logarithme en base 10 de l'erreur sur $F^{(k)}$ en fonction de l'itération k pour plusieurs valeurs de n.
- Quel est le pas optimal ? Tester cette valeur.

3) Répondre aux mêmes questions pour la fonction `GCDYCST`, comparer et exliquer les résultats.

Exercice 4. *Calcul de la différentielle de $\mathscr{F}$*
On note $w = \mathscr{F}'(f).d$, la différentielle de $\mathscr{F}$ en f dans la direction d qui est solution du problème

$$\begin{cases} -w"(x) = d(x), & \text{sur } \Omega, \\ w(0) = w(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

1) Écrire la fonction `[W]=differentielle(D)` qui résout (3) pour le vecteur $D \in \mathbb{R}^{n-1}$ où n est le nombre d'intervalles de discrétisation et la valider sur un exemple bien choisi.

Exercice 5. *Gradient et Gradient conjugué à pas optimal*

1) Écrire une fonction `[rho]=pasopt(F,D)` qui calcule le pas optimal en `F` dans la direction `D` à partir de la différentielle $w = \mathscr{F}'(f).d$ selon la formule :

$$\rho = -\frac{(u - u_{obs}, w)_{L^2(\Omega)}}{\|w\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

2) Écrire une fonction `[F, JF, GJF, nit] = GOPT(J, GJ, F0, epsil, nitmax)` qui minimise la fonctionnelle $J(f)$ à partir de l'initialisation $F0$ par la méthode du gradient à pas optimal (adapter la fonction écrite au TP 1) et la tester pour `F0=0`, `epsil=1e-7`, `nitmax=1000`. Vérifier la convergence des différences finies et afficher le pas optimal pour les différentes valeurs de n.

3) Écrire une fonction `[F, JF, GJF, nit] = GCDYOPT(J, GJ, F0, epsil, nitmax)` qui minimise la fonctionnelle $J(f)$ à partir de l'initialisation $F0$ par la méthode du gradient de Dai-Yuan à pas optimal (adapter la fonction écrite au TP 1) et la tester pour `F0=0`, `epsil=1e-7`, `nitmax=1000`.

4) Comparer les résultats des 4 méthodes.