

## ÉCOULEMENT DE FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLES

**Objectifs :** Étude d'une formulation en potentiel en domaine non borné ; exploitation des symétries du problème pour réduire le domaine de calcul ; introduction à la technique du maillage adaptatif ; un exemple de couplage « multi-physique ».

### 1 Écoulement autour d'un disque

#### Modélisation mathématique

Nous nous intéressons à l'écoulement bidimensionnel d'un *fluide parfait*<sup>1</sup> autour d'un disque centré à l'origine et de rayon  $R_1$ . On désigne par  $\Omega$  le domaine extérieur au disque et  $\Gamma$  son bord, voir la Fig. 1. On souhaite déterminer le champ des vitesses eulériennes  $\mathbf{u}$  d'une particule fluide pour cet écoulement. L'équation de bilan de la masse dans le domaine  $\Omega$  conduit à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

où  $\rho(x, t)$  désigne la masse volumique du fluide (unité SI  $\text{kg m}^{-3}$ ) au point de coordonnées  $x = (x_1, x_2)$  et au temps  $t$ .

Nous supposons que l'écoulement de ce fluide est « incompressible », c'est-à-dire que l'on suppose que les variations de masse volumique peuvent être négligées. L'équation de bilan de la masse devient dans ce cas

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2)$$

Nous supposons de plus que l'écoulement est « irrotationnel », c'est-à-dire que les particules fluides ne subissent pas de rotation pure. On a dans ce cas le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  qui vérifie

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (3)$$

Le contour  $\Gamma$  délimitant un domaine solide, le fluide ne peut la traverser. La vitesse  $\mathbf{u}$  est donc nulle dans la direction perpendiculaire à  $\Gamma$ . On impose donc la condition aux limites suivante sur  $\Gamma$  :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unité extérieure sur  $\Gamma$ . On impose aussi la condition suivante à l'infini

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}_\infty = (u_{1\infty}, 0) \quad \text{quand } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \longrightarrow \infty. \quad (5)$$

Comme la vitesse  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle, on peut introduire une fonction scalaire  $\Psi$ , appelée « fonction de courant » telle que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -u_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = u_1. \quad (6)$$

---

1. En mécanique des fluides, un fluide est dit « parfait » s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité et de conduction thermique.

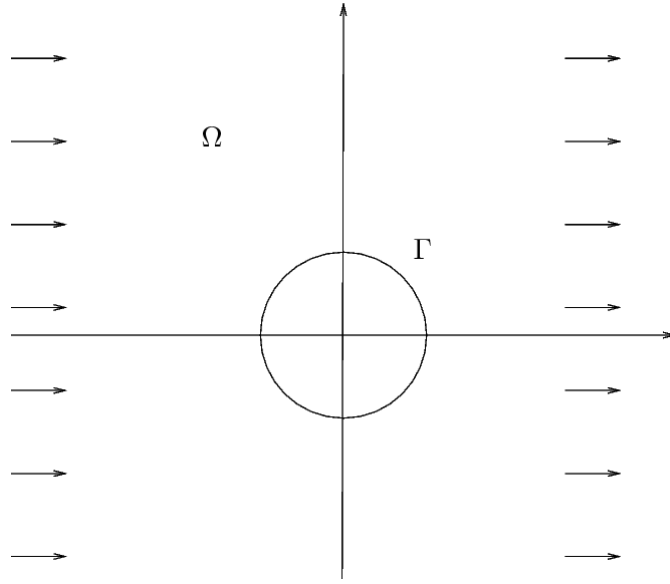


FIGURE 1 – Écoulement d'un fluide parfait incompressible et irrotationnel considéré.

La fonction de courant est définie à une constante additive près.

- [1] a) Montrer que  $\Psi$  vérifie le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta \Psi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (7)$$

où  $\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \nabla \Psi \cdot \tau$  désigne la dérivée tangentielle de  $\Psi$  sur  $\Gamma$  ( $\tau$  désignant ici le vecteur tangent à  $\Gamma$ .) Vérifier que  $\Psi$  satisfait la condition suivante à l'infini :  $\Psi(x_1, x_2) \underset{+\infty}{\sim} u_{1\infty} x_2 + C$  où  $C \in \mathbb{R}$ .

- b) Montrer que  $\Psi$  prend une valeur constant le long de  $\Gamma$ .

- [2] On considère le problème suivant : trouver  $\Psi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \Delta \Psi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Psi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \Psi(x_1, x_2) \underset{+\infty}{\sim} u_{1\infty} x_2 \end{cases} \quad (8)$$

Montrer que le problème (8) possède une unique solution donnée (en coordonnées polaires) par

$$\Psi(r, \theta) = u_{1\infty} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) \sin(\theta).$$

### Réduction du domaine de calcul par symétrie

- [3] En utilisant les symétries du problème aux limites satisfait par la fonction de courant  $\Psi$ , montrer que l'on peut calculer celle-ci en résolvant le problème aux limites suivant posé dans le premier quadrant  $\Omega_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 > R_1^2\}$

$$\begin{cases} \Delta \Psi = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \Psi = 0 & \text{sur } \Gamma_+ = \Gamma \cap \overline{\Omega} \\ \Psi = 0 & \text{si } x_2 = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 & \text{si } x_1 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

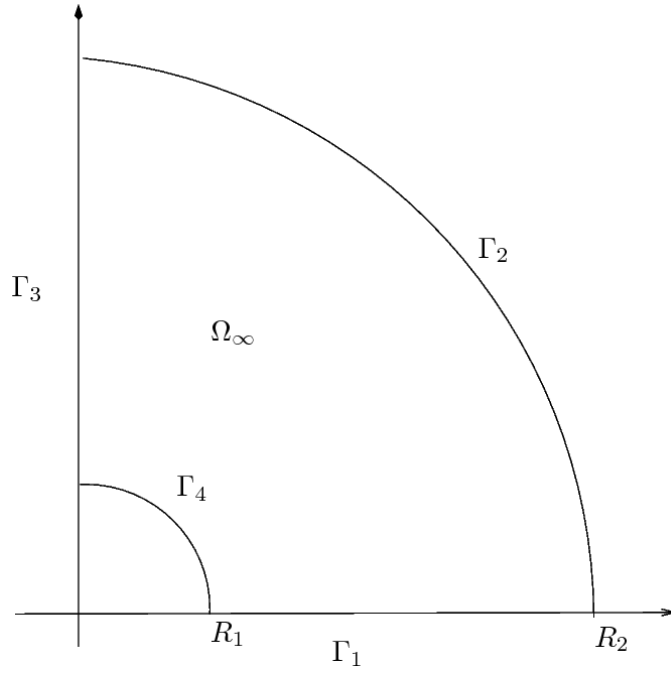


FIGURE 2 – Notations introduites pour le problème posé en domaine borné.

### Introduction d'une frontière artificielle pour borner le domaine de calcul

Pour la discrétisation, nous limitons le premier quadrant par un quart de cercle de rayon  $R_2$ . Le problème que l'on résoudra est donc posé dans le domaine

$$\Omega_\infty = \{(x_1, x_2); x_1 > 0, x_2 > 0, R_1 < x_1^2 + x_2^2 < R_2\}.$$

Nous désignons par  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  les quatre parties du bord de  $\Omega_\infty$  comme indiqué à la Fig. 2. Nous sommes ainsi amenés à résoudre le problème suivant : trouver  $\Phi$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Phi = 0 & \text{dans } \Omega_\infty, \\ \Phi = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \cup \Gamma_1, \\ \Phi = u_{1\infty}x_2 & \text{sur } \Gamma_2, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (10)$$

- 4 a) Établir la formulation variationnelle du problème (10).  
b) Vérifier que le problème (10) admet une unique solution donnée, en coordonnées polaires, par

$$\Phi(r, \theta) = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Psi(r, \theta). \quad (11)$$

### Résolution du problème par la méthode des éléments finis

- 5 Calculer à l'aide de FREEFEM++ une approximation de  $\Phi$  par une méthode des éléments finis de Lagrange. Prendre les valeurs suivantes :  $R_1 = 0.5$ ,  $R = 2.5$  et 11 nœuds sur chaque ligne de la frontière.  
6 Comparer le résultat avec la solution exacte du problème posé sur  $\Omega_\infty$ . On tracera les lignes d'isovaleurs pour l'erreur et on calculera l'erreur relative en norme  $\mathbb{L}^2$  et l'erreur maximale.

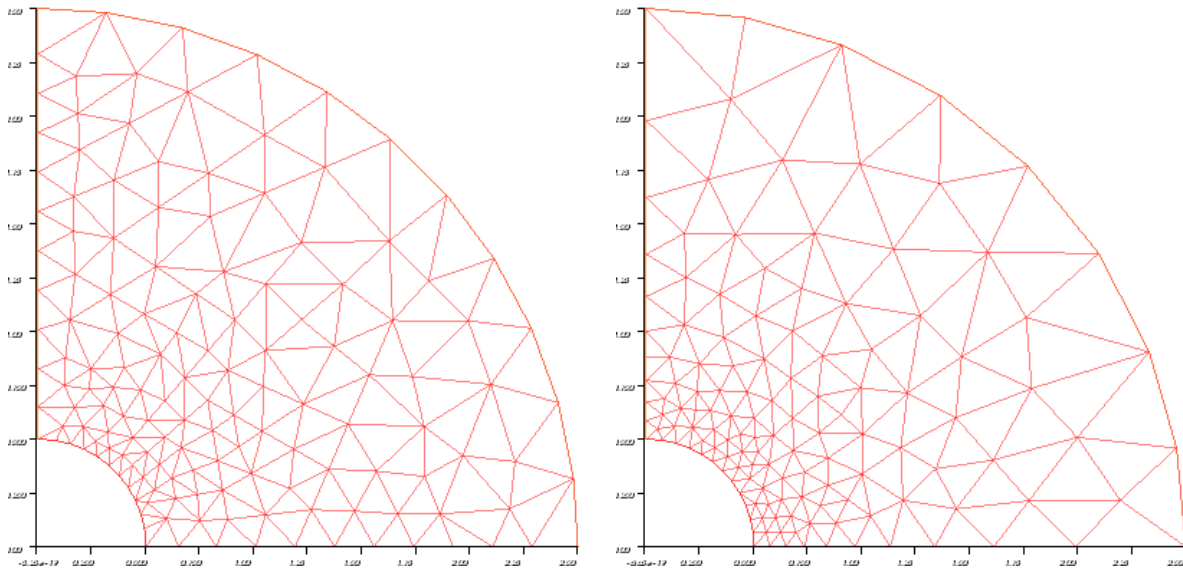


FIGURE 3 – Maillage initial avec 11 noeuds sur chaque coté du domaine possédant 250 éléments et maillage adapté possédant 232 éléments.

### Adaptation du maillage

On peut observer sur la figure représentant les lignes d'isovaleurs de l'erreur que celle-ci est plus importante au voisinage du disque. On peut utiliser un maillage adapté aux variations de la solution pour disposer de plus d'éléments dans les zones où la solution varie beaucoup et moins d'en les zones où elle varie peu. La directive `adaptmesh` de FREEFEM++ permet d'adapter le maillage de manière automatique. Elle prend pour paramètre le maillage initial et la fonction à partir des variations de laquelle le maillage est adapté. Dans l'exemple ci-dessous on utilise un paramètre optionnel `err=` où la valeur 0.005 a été ajustée pour que le maillage adapté possède à peu près le même nombre d'éléments que la maillage initial. Ce paramètre correspond au seuil d'erreur d'interpolation utilisé pour adapter le maillage à la fonction.

```
Th=adaptmesh(Th,phi,err=0.005);
plot(Th);
ecoul; // On résout à nouveau le problème sur ce nouveau maillage
phiex=(R2^2/(R2^2-R1^2))*u1oo*(1-R1^2/r^2)*y; // expression de la solution exacte
// sur le nouveau maillage
phierr=phi-phiex; // calcul de l'erreur
err=sqrt(int2d(Th)(abs(phi-phiex)^2)/int2d(Th)(phiex^2)); // calcul de l'erreur L^2
cout<< "Erreur L2 relative commise sur le potentiel (%) = "<< err*100<< endl;
cout<< "Erreur max relative commise sur le potentiel (%) = "<< phierr[].max*100<< endl;
```

On sera vigilant au fait que les solutions éléments finis (notamment l'erreur ici) doivent être recalculées. Le maillage obtenu à l'issue de cette étape est représenté à la figure 3. Pour un nombre sensiblement voisin d'éléments, on a fait chuter l'erreur  $L^2$  de 0.035% à 0.022% (soit une diminution d'un facteur 1.5 environ) et l'erreur maximale de 0.27% à 0.10% (soit une diminution d'un facteur 3 environ).

### Calcul de la vitesse de l'écoulement

La fonction courant n'ayant été qu'un intermédiaire de calcul, il convient une fois celle-ci obtenue de déterminer la vitesse de l'écoulement. `phi` désignant la solution éléments finis correspondant au problème (10) pour la fonction courant, on obtient sous FREEFEM++ la vitesse de la manière suivante :

```
Vh u1=dy(phi),u2=-dx(phi); // composantes du vecteur vitesse
plot([u1,u2]);
```

7 a) Calculer l'expression exacte du champ de vitesse de cet écoulement à partir de l'expression (11) de la fonction de courant.

b) En déduire l'erreur relative en norme  $\mathbb{L}^2$  et l'erreur relative maximale pour la norme du champ de vitesse dans le domaine  $\Omega_\infty$ . Commentez.

## 2 Écoulement autour d'un profil NACA

Les profils NACA sont des formes aérodynamiques pour les ailes d'avions développés par le NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), l'agence fédérale américaine chargée de la recherche dans le domaine de l'aéronautique entre 1915 et 1958 dont les activités ont été intégrées à la NASA à sa création en 1958.

La forme des profils NACA est décrite à l'aide d'une série de chiffres qui suit le mot "NACA". On considère le profil NACA0012 dont la forme géométrique peut être obtenue sous FREEFEM++ de la manière suivante :

```
int N=61;
func real nacca0012(real t){
return 0.17735*sqrt(t)-0.075597*t-0.212836*t^2+0.17363*t^3-0.06254*t^4;
}
border Gamma1(t=0,1){x=t;y=nacca0012(t);label=2;};
border Gamma2(t=0,1){x=t;y=-nacca0012(t);label=2;};
border Gamma4(t=0,2*pi){x=R2*cos(t);y=R2*sin(t);label=1;};
mesh Th=buildmesh(Gamma1(N)+Gamma2(-N)+Gamma4(N));
```

8 Calculer la fonction de courant autour du profil NACA0012 ainsi que le profil de vitesse dans le cas où celui-ci est placé dans un écoulement uniforme à l'infini.

## 3 Un problème « multi-physique » : calcul de la convection thermique autour du profil

On considère la situation où l'objet placé dans l'écoulement uniforme à l'infini considéré précédemment est un objet métallique occupant un domaine  $\Omega_0$  dont la température initiale est  $T_0 = 120^\circ$ . L'écoulement de l'air autour de l'objet va refroidir celui-ci par convection. La température dans et autour de l'objet est régie par l'équation suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla T) + \mathbf{u} \cdot \nabla T = 0 \quad (12)$$

où  $\mathbf{u}$  désigne la vitesse de l'écoulement. Nous sommes donc en présence de 2 problèmes couplés : on calcule dans un premier temps la vitesse en tout point de l'écoulement autour de l'objet puis on utilise cette donnée pour résoudre l'équation (12). On sera vigilant au fait que le problème (10) est posé dans le domaine extérieur à l'objet alors que l'équation (12) doit être résolue à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet. Par ailleurs, compte tenu des caractéristiques de l'écoulement, la température autour de l'objet ne présentera pas de propriétés de symétrie : le domaine bidimensionnel entier devra être maillé.

Les conditions aux limites sont les suivantes.

- La température est une fonction continue à l'interface entre l'objet et l'air extérieur et sa dérivée normale à cette interface est elle même une fonction continue, *i.e.* nous avons à travers  $\Gamma$

$$[T] = 0 \quad \text{et} \quad \left[ \frac{\partial T}{\partial n} \right] = 0. \quad (13)$$

- Nous imposons la condition aux limites naturelle  $\frac{\partial T}{\partial n}$  sur la frontière  $\Sigma$  servant à borner le domaine de calcul. Cette condition est justifiée par le fait que « assez loin » de l'objet les variations de températures induites par l'objet sont négligeables.

L'équation (12) étant une équation d'évolution, il convient d'ajouter une condition initiale de la forme : à  $t = 0$  la température dans le domaine de calcul vaut  $T_0$  où  $T_0$  désigne une fonction de la position  $(x_1, x_2)$ . Par ailleurs, pour une résolution par la méthode des éléments finis, il convient d'introduire un schéma de discrétisation en temps. Considérons une subdivision uniforme  $(t_n)_{n \in \{0, \dots, N\}}$  de l'intervalle  $[0, t_f]$  où  $t_f$  désigne le temps final d'observation. On note  $\delta t$  le pas de la subdivision. Au temps  $t_n$ , on approche la dérivée en temps de la température dans l'équation (12) par

$$\frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t_n) \approx \frac{T(\mathbf{x}, t_n) - T(\mathbf{x}, t_{n-1})}{\delta t}. \quad (14)$$

On est donc conduit à résoudre en tout temps  $t_n$  pour  $n \in \{1, \dots, N\}$

$$\frac{T(\mathbf{x}, t_n)}{\delta t} - \text{div}(k \nabla T(\mathbf{x}, t_n)) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t_n) = \frac{T(\mathbf{x}, t_{n-1})}{\delta t}. \quad (15)$$

9 Écrire la formulation variationnelle du problème aux limites associé à l'équation (15) à résoudre.

L'équation (15) est à considérer à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet, domaine où la valeur de  $k$  est différente. Les numéros de référence des domaines maillés étant affectés automatiquement lors de l'exécution du code FREEFEM++, il convient d'obtenir celui-ci pour la résolution du problème de la thermique. On obtient le numéro du domaine auquel appartient le point  $P$  de coordonnées  $(x_1, x_2)$  de la manière suivante : `Th(x_1,x_2).region` où `Th` désigne le nom du maillage.

Le programme FREEFEM++ permettant de résoudre ces problèmes couplés est le suivant.

```
// -----
// ---- Résolution du problème d'écoulement ----
// -----
// ---- Domaine géométrique et maillage ----
real R1=0.5, R2=5;
int N=61;
border Gamma1(t=0,2*pi){x=R1*cos(t);y=R1*sin(t);label=2;};
border Gamma2(t=0,2*pi){x=R2*cos(t);y=R2*sin(t);label=1;};
mesh Th=buildmesh(Gamma1(-N)+Gamma2(N));
plot(Th,ps="maillage.eps");

// ---- Espace éléments finis et formulation variationnelle ----
fespace Vh(Th,P2);
Vh phi,psi;
macro grad(u)[dx(u),dy(u)]//
real uloo=10; // valeur de la vitesse horizontale à l'infini
func phioo=uloo*y; // expression de la fonction courant à l'infini

solve ecol( phi,psi)=int2d(Th)(grad(phi)*grad(psi))
+on(2,phi=0)+on(1,phi=phioo);
Th=adaptmesh(Th,phi,err=0.0005);
plot(Th);
ecoul; // On résout à nouveau le problème sur ce nouveau maillage
plot(phi);

// -----
// ---- Résolution du problème de thermique ----
// -----
// ---- Maillage ----
mesh Th2=buildmesh(Gamma1(N)+Gamma2(N));
```

```

plot(Th2);

fespace Vht(Th2,P1); // espace éléments finis pour le pb de thermique
Vht T,v;
int dom1=Th2(0,0).region, dom2=Th2(R1+(R2-R1)/2,0).region;
Vht u1=dy(phi)*(region==dom2),u2=-dx(phi)*(region==dom2); // composantes du vecteur vitesse

real k1=0.1, k2=0.01; // constante de conductivité thermique dans l'objet et dans l'air
// Pour définir la constante k dans chacun des 2 domaines, on peut utiliser l'une des 3 formes
// suivante :
//func k=k1*(sqrt(x^2+y^2)<=R1)+k2*((sqrt(x^2+y^2)<=R2)&(sqrt(x^2+y^2)>R1));
//func k=(k1-k2)*(sqrt(x^2+y^2)<=R1)+k2*(sqrt(x^2+y^2)<=R2);
Vht k=k1*(region==dom1)+k2*(region==dom2);

// ---- Donnée initiale ----
real T01=120, T02=20; // température initiale de l'objet et dans le milieu extérieur
Vht Told=T01*(region==dom1)+T02*(region==dom2); // distribution initiale de température

// Résolution du problème de thermique
problem therm(T,v)=int2d(Th2)(T*v/dt+k*grad(T)'*grad(v)+(u1*dx(T)+u2*dy(T))*v)
-int2d(Th2)(Told*v/dt);
real tfin=0.5,dt=0.05; // temps final et pas de temps
int nt=round(tfin/dt);
for (int i=0;i<=nt;i++){
T=Told;
therm;
}
plot(T,fill=true);

```

10 Modifier le programme précédent pour calculer la vitesse dans le cas du profil NACA0012.

## Solutions

[1] a) On a

$$\mathbf{rot} \mathbf{u}(x_1, x_2) = \partial_1 u_2(x_1, x_2) - \partial_2 u_1(x_1, x_2) = -\partial_1^2 \Psi(x_1, x_2) - \partial_2^2 \Psi(x_1, x_2) = -\Delta \Psi(x_1, x_2)$$

d'où l'équation aux dérivées partielles  $\Delta \Psi = 0$ . La condition de divergence nulle est automatiquement satisfaite puisque

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x_1, x_2) = \partial_1 u_1(x_1, x_2) + \partial_2 u_2(x_1, x_2) = \partial_{12}^2 \Psi(x_1, x_2) - \partial_{12}^2 \Psi(x_1, x_2) = 0.$$

La condition aux limites sur  $\Gamma$  devient

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_1 n_1 + u_2 n_2 = \partial_2 \Psi n_1 - \partial_1 \Psi n_2 = 0.$$

En notant  $\tau$  le vecteur de composantes  $\begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix}$  qui est orthogonal au vecteur normal  $\mathbf{n}$ , la condition s'exprime sous la forme

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}(x_1, x_2) = \nabla \Psi \cdot \tau = 0.$$

La condition à l'infini s'écrit

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \partial_2 \Psi(x_1, x_2) = u_{1\infty}, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \partial_1 \Psi(x_1, x_2) = 0$$

où on a posé  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . On a donc à l'infini

$$\Psi(x_1, x_2) = u_{1\infty} x_2 + \psi(x_1, x_2) + C \quad \text{avec} \quad \psi(x_1, x_2) = o_{+\infty}(r) \quad (16)$$

où  $C$  désigne une constante arbitraire, i.e.  $\Psi(x_1, x_2) \underset{+\infty}{\sim} u_{1\infty} x_2 + C$ .

b) Compte tenu de la géométrie de  $\Gamma$ , on se place en coordonnées polaires. Pour tout  $(x, y) = (R_1 \cos(\theta), R_1 \sin(\theta))$ , on a

$$\Psi|_{\Gamma}(x, y) = \Psi(R_1 \cos(\theta), R_1 \sin(\theta)) = \Psi_{\Gamma}(\theta)$$

et le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  orienté dans le sens trigonométrique a pour composantes

$$\tau = \begin{pmatrix} -R_1 \cos(\theta) \\ R_1 \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Or, la règle de dérivation en chaîne indique que

$$\begin{aligned} \Psi'_{\Gamma}(\theta) &= -R_1 \cos(\theta) \partial_1 \Psi(R_1 \cos(\theta), R_1 \sin(\theta)) + R_1 \sin(\theta) \partial_2 \Psi(R_1 \cos(\theta), R_1 \sin(\theta)) \\ &= \nabla \Psi(R_1 \cos(\theta), R_1 \sin(\theta)) \cdot \tau = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}(x, y) \end{aligned}$$

D'après la condition aux limites, on a donc  $\Psi'_{\Gamma}(\theta) = 0$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$ . La fonction  $\Psi$  est donc constante le long de  $\Gamma$ .

[2] Par simple dérivation de l'expression de la fonction de courant, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_r \Psi(r, \theta) &= u_{1\infty} \sin(\theta) \left( 1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) \\ \partial_r^2 \Psi(r, \theta) &= -2u_{1\infty} \sin(\theta) \frac{R_1^2}{r^3} \\ \partial_{\theta} \Psi(r, \theta) &= u_{1\infty} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) \cos(\theta) \\ \partial_{\theta}^2 \Psi(r, \theta) &= -u_{1\infty} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) \sin(\theta). \end{aligned}$$



En utilisant l'expression du laplacien en coordonnées polaires, il vient

$$\begin{aligned}\Delta\Psi(r, \theta) &= \partial_r^2\Psi(r, \theta) + \frac{1}{r}\partial_r\Psi(r, \theta) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\Psi(r, \theta) \\ &= -2u_{1\infty}\sin(\theta)\frac{R_1^2}{r^3} + u_{1\infty}\sin(\theta)\frac{1}{r}\left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right) - u_{1\infty}\frac{1}{r^2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\sin(\theta) \\ &= 0.\end{aligned}$$

A l'infini, on a

$$\Psi(r, \theta) = u_{1\infty}r\sin(\theta) - \frac{R_1^2}{r}\sin(\theta) = u_{1\infty}r\sin(\theta) + o_{+\infty}(r) = u_{1\infty}x_2 + o_{+\infty}(r) \underset{+\infty}{\sim} u_{1\infty}x_2.$$

La fonction considérée est donc bien solution du problème (8).

Pour établir l'unicité, supposons que l'on ait deux solutions  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  et considérons la fonction  $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$ . On vérifie sans difficulté que  $\Psi$  vérifie

$$\begin{cases} \Delta\Psi = 0 & \text{dans } \Omega \\ \Psi = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \Psi = 0 \end{cases}$$

Il résulte du théorème de Lax-Milgram que ce problème admet une unique solution dans l'espace de Sobolev  $\mathbb{W}_0^1(\Omega)$ . On a donc  $\Psi_1 = \Psi_2$  et unicité de la solution au problème (8)

**[3]** a) Lorsque l'on effectue une symétrie par rapport à l'axe des abscisses correspondant au changement de variable  $x_1 \leftrightarrow -x_1$ , on obtient en considérant le changement d'inconnue  $\widehat{\Psi}(x_1, x_2) = \Psi(-x_1, x_2)$

— pour l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}\Delta\widehat{\Psi}(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\widehat{\Psi}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\widehat{\Psi}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Psi(-x_1, x_2) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Psi(-x_1, x_2) \\ &= (-1)^2\partial_1^2\Psi(-x_1, x_2) + \partial_2^2\Psi(-x_1, x_2) = \Delta\Psi(-x_1, x_2) = 0\end{aligned}$$

— pour la condition aux limites sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial\tau}(x_1, x_2) &= \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x_1}(x_1, x_2)n_2(x_1, x_2) - \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x_2}(x_1, x_2)n_1(x_1, x_2) \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial x_1}(-x_1, x_2)n_2(x_1, x_2) - \frac{\partial\Psi}{\partial x_2}(-x_1, x_2)n_1(x_1, x_2) \\ &= -\partial_1\Psi(-x_1, x_2)n_2(x_1, x_2) - \partial_2\Psi(-x_1, x_2)n_1(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Or  $n_1(-x_1, x_2) = -n_1(x_1, x_2)$  et  $n_2(-x_1, x_2) = n_2(x_1, x_2)$ , donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial\tau}(x_1, x_2) &= -\partial_1\Psi(-x_1, x_2)n_2(-x_1, x_2) + \partial_2\Psi(-x_1, x_2)n_1(-x_1, x_2) \\ &= -\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}(-x_1, x_2) = 0.\end{aligned}$$

— pour la condition à l'infini :

$$\widehat{\Psi}(x_1, x_2) = \Psi(-x_1, x_2) \underset{+\infty}{\sim} u_{1\infty}x_2 + C.$$

On en déduit que  $\widehat{\Psi}$  vérifie le même problème aux limites que  $\Psi$ . Par unicité de la solution  $\widehat{\Psi} = \Psi$ , c'est-à-dire

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \Psi(-x_1, x_2) = \Psi(x_1, x_2).$$

Cette égalité indique que l'axe des ordonnées est axe de symétrie pour  $\Psi$ . On en déduit que, en dérivant les deux membres de l'égalité par rapport  $x_1$ ,

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad -\partial_1 \Psi(-x_1, x_2) = \partial_1 \Psi(x_1, x_2).$$

En particulier, pour  $x_1 = 0$ , on en déduit que

$$\forall x_2 \in \mathbb{R} \quad 2\partial_1 \Psi(0, x_2) = 0. \quad (17)$$

b) Lorsque l'on effectue une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées correspondant au changement de variable  $x_2 \leftrightarrow -x_2$ , on obtient en considérant le changement d'inconnue  $\tilde{\Psi}(x_1, x_2) = -\Psi(x_1, -x_2)$   
— pour l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Psi}(x_1, x_2) &= -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \tilde{\Psi}(x_1, x_2) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tilde{\Psi}(x_1, x_2) = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Psi(x_1, -x_2) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Psi(x_1, -x_2) \\ &= -\partial_1^2 \Psi(x_1, -x_2) - (-1)^2 \partial_2^2 \Psi(x_1, -x_2) = -\Delta \Psi(x_1, -x_2) = 0 \end{aligned}$$

— pour la condition aux limites sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tau}(x_1, x_2) &= \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x_1}(x_1, x_2) n_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial x_2}(x_1, x_2) n_1(x_1, x_2) \\ &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x_1, -x_2) n_2(x_1, x_2) + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x_1, -x_2) n_1(x_1, x_2) \\ &= -\partial_1 \Psi(x_1, -x_2) n_2(x_1, x_2) - \partial_2 \Psi(x_1, -x_2) n_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Or  $n_1(x_1, -x_2) = n_1(x_1, x_2)$  et  $n_2(x_1, -x_2) = -n_2(x_1, x_2)$ , donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tau}(x_1, x_2) &= \partial_1 \Psi(x_1, -x_2) n_2(x_1, -x_2) - \partial_2 \Psi(x_1, -x_2) n_1(x_1, -x_2) \\ &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \tau}(x_1, -x_2) = 0. \end{aligned}$$

— pour la condition à l'infini :

$$\tilde{\Psi}(x_1, x_2) = -\Psi(x_1, -x_2) \underset{\infty}{\sim} -(-u_{1\infty}x_2 + C) = u_{1\infty}x_2 - C.$$

On en déduit que, si  $C = 0$ , la fonction  $\hat{\Psi}$  vérifie le même problème aux limites que la fonction  $\Psi$ . Par unicité de la solution  $\hat{\Psi} = \Psi$ , c'est-à-dire

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad -\Psi(x_1, -x_2) = \Psi(x_1, x_2).$$

Cette égalité indique que l'axe des abscisses est axe de symétrie pour  $\Psi$ . On en déduit, en considérant  $x_2 = 0$  que

$$\forall x_1 \in \mathbb{R} \quad 2\Psi(x_1, 0) = 0. \quad (18)$$

Finalement, on peut se contenter de résoudre le problème aux limites suivant posé dans le premier quadrant  $\Omega_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, x_1^2 + x_2^2 > R_1\}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \Psi = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \Psi = 0 & \text{sur } \Gamma_+ = \Gamma \cap \overline{\Omega} \\ \Psi = 0 & \text{si } x_2 = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 & \text{si } x_1 = 0 \end{array} \right. \quad (19)$$

les conditions aux limites imposées sur les bords du domaine  $\Omega_+$  d'équations  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$  étant issues des relations (17) et (18).

4 a) La formulation variationnelle du problème (10) s'écrit : trouver  $\Phi \in \mathbb{H}^1(\Omega_\infty)$  tel que  $\Phi = 0$  sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_4$ ,  $\Phi(x_1, x_2) = u_{1\infty}x_2$  pour tout  $(x_1, x_2) \in \Gamma_2$  et

$$\forall v \in V \quad \iint_{\Omega_\infty} \nabla \Phi \cdot \nabla v \, dx_1 \, dx_2$$

où  $V = \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega_\infty) ; v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4\}$ .

b) L'existence et l'unicité de la solution au problème variationnel précédent est assurée par le théorème de Lax-Milgram (on vérifiera que les hypothèses du théorème sont bien satisfaites).  
Vérifions que la solution est donnée, en coordonnées polaires, par

$$\Phi(r, \theta) = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Psi(r, \theta).$$

Comme  $\Delta \Psi = 0$ , on a

$$\Delta \Phi = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Delta \Psi = 0.$$

Sur  $\Gamma_3$ , comme  $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ , on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0.$$

Sur  $\Gamma_1$ , comme  $\Psi = 0$ , on a aussi  $\Phi = 0$ . Enfin, sur  $\Gamma_2$ , on a  $r = R_2$  et pour tout  $\theta \in [0, 2\pi[$ ,

$$\Phi(R_2, \theta) = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Psi(R_2, \theta) = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} u_{1\infty} \left( R_2 - \frac{R_1^2}{R_2} \right) \sin(\theta) = R_2 \sin(\theta) u_{1\infty} = x_2 u_{1\infty}.$$

On a donc bien une solution du problème (10).

5 Le programme FREEFEM++ est le suivant :

```
// ---- Domaine géométrique et maillage ----
real R1=0.5, R2=2.5;
int N=11;
border Gamma1(t=R1,R2){x=t;y=0;label=1;};
border Gamma2(t=0,pi/2){x=R2*cos(t);y=R2*sin(t);label=2;};
border Gamma3(t=R1,R2){x=0;y=t;label=3;};
border Gamma4(t=0,pi/2){x=R1*cos(t);y=R1*sin(t);label=1;};
mesh Th=buildmesh(Gamma1(N)+Gamma2(N)+Gamma3(-N)+Gamma4(-N));
plot(Th,ps="maillage.eps");

// ---- Espace éléments finis et formulation variationnelle ----
fespace Vh(Th,P2);
Vh phi,psi;
macro grad(u)[dx(u),dy(u)]//
real uloo=1; // valeur de la vitesse horizontale à l'infini
func phioo=uloo*y; // expression de la fonction courant à l'infini

solve ecoule(phi,psi)=int2d(Th)(grad(phi)'*grad(psi))
+on(1,phi=0)+on(2,phi=phioo);
plot(phi,ps="solution_isevaleurs.eps");
```

La figure 4 représente les courbes isovaleurs de la fonction de courant obtenues en exécutant le programme FREEFEM++.

On observe, comme on peut s'y attendre, que les lignes d'isovaleurs sont déformées au voisinage de l'obstacle. Plus on s'éloigne de l'obstacle, et plus les lignes d'isovaleurs sont proches d'un écoulement non déformé correspondant au terme source associé à la condition à l'infini.

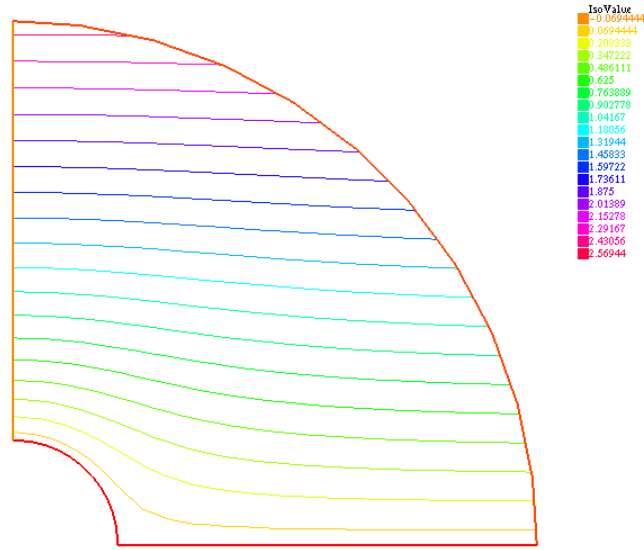


FIGURE 4 – Isovaleurs de la fonction de courant.

[6] Pour obtenir les informations demandées, on complète le programme FREEFEM++ de la manière suivante.

```
// ---- Exploitation des résultats ----
Vh phiex, phierr; // déclaration de la solution exacte et de l'erreur
func r=sqrt(x^2+y^2);
phiex=(R2^2/(R2^2-R1^2))*u1oo*(1-R1^2/r^2)*y; // expression de la solution exacte
phierr=abs(phi-phiex); // expression de l'erreur
real err=sqrt(int2d(Th)(abs(phierr)^2)/int2d(Th)(phiex^2)); // erreur L^2
cout<< "Erreur L2 relative commise sur le potentiel (%) = "<< err*100<< endl;
cout<< "Erreur max relative commise sur le potentiel (%) = "<< phierr[].max*100<< endl;
cout<< "Erreur au point P1 " << phierr(1.1*R1*cos(pi/4),1.1*R1*sin(pi/4)) << endl;
plot(phi,ps="solution_isodeurs.eps");
plot(phierr,ps="erreur_isodeurs.eps");
cout<< endl;
```

La figure 5 représente les courbes isovaleurs de la fonction d'erreur obtenues en exécutant le programme FREEFEM++.

On observe, comme on peut s'y attendre, que l'erreur est maximale au voisinage de l'obstacle, zone où l'écoulement subit le plus de perturbations.

[7] a) Par simple dérivation de l'expression (11) de la fonction de courant, on obtient :

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \partial_2 \Phi(x_1, x_2) \\ -\partial_1 \Phi(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \frac{R^2}{R^2 - R_1^2} u_{1\infty} \begin{pmatrix} 1 - \frac{R_1^2}{r^2} \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^2} \\ \frac{R_1^2}{r^2} \frac{2x_1 x_2}{r^2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

où  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

b) Les instructions FREEFEM++ suivantes permettent de calculer l'erreur sur la vitesse.

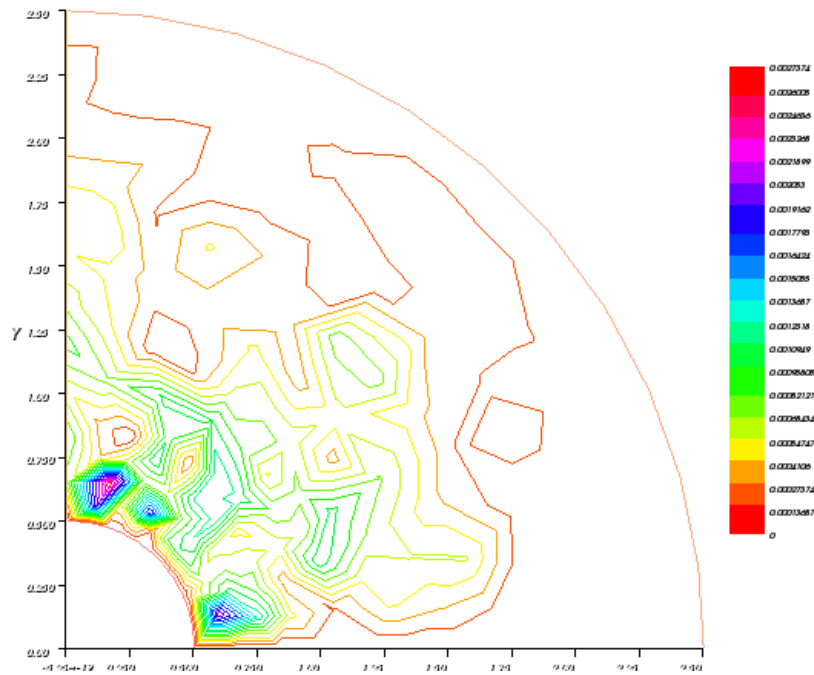


FIGURE 5 – Isovaleurs de la fonction d'erreur.

```
// ----- Calcul de la vitesse -----
cout << " ***** Calcul de la vitesse *****" << endl;
Vh u1=dy(phi),u2=-dx(phi); // composantes du vecteur vitesse
plot([u1,u2],ps="ecoul_vitesse.eps");
// Expression exacte pour la vitesse
Vh uex1=(R2^2/(R2^2-R1^2))*u1oo*(1-R1^2*(x^2-y^2)/r^4),
    uex2=-(R2^2/(R2^2-R1^2))*u1oo*2*R1^2*x*y/r^4,
    uerr1=uex1-u1,
    uerr2=uex2-u2,
    erra=abs(uerr1)+abs(uerr2);
plot(erra);
// erreur L2 sur la vitesse
err=sqrt(int2d(Th)(uerr1^2+uerr2^2)/int2d(Th)(uex1^2+uex2^2));
cout<< "Erreur L2 relative commise sur la vitesse (%) = " << err*100<< endl;
err=abs(uerr1[]).max()+abs(uerr2[]).max(); // get the infity norm of vector of degree of freedom
cout<< "Erreur max relative commise sur la vitesse (%) = " << err*100<< endl;
```

On obtient les résultats suivants :

Erreur L2 relative commise sur la vitesse (%) = 3.00098  
 Erreur max relative commise sur la vitesse (%) = 47.635

L'erreur est assez grande comparée à la précision du calcul de la fonction courant. Cela s'explique par le fait que la fonction courant étant approchée par des éléments finis Lagrange de degré 1, la dérivation effectuée sur chaque élément pour obtenir la vitesse conduit à une approximation polynomiale de degré 0 sur chaque triangle.

On observe par ailleurs sur la figure 7 que la vitesse est mal approchée autour du disque.

La précision du calcul sur la vitesse peut être améliorée en utilisant des éléments finis de Lagrange de degré 2 et en utilisant plus d'éléments pour le maillage. Par exemple, en utilisant pour paramètre d'erreur

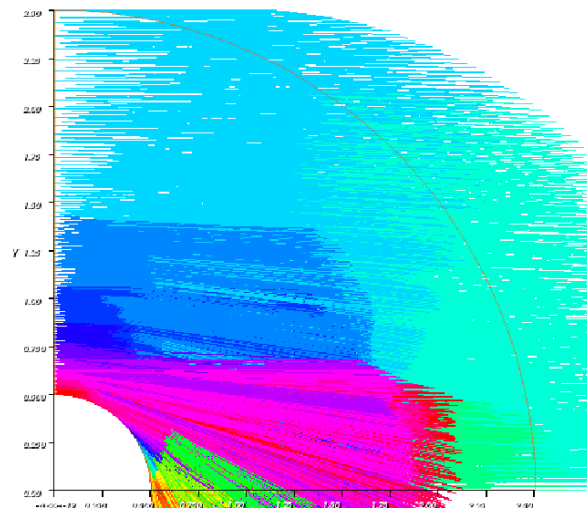


FIGURE 6 – Vitesse de l'écoulement.

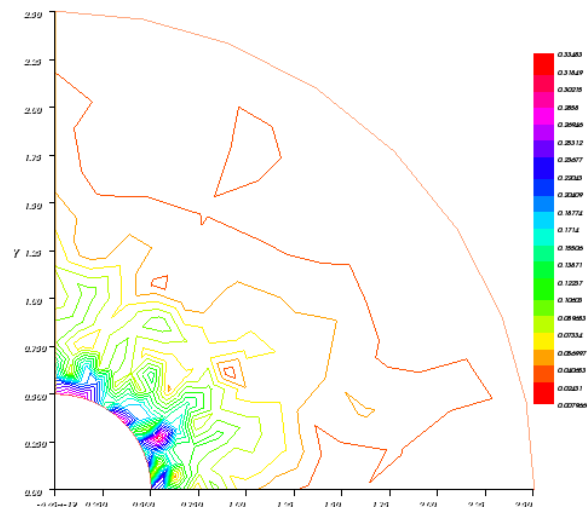


FIGURE 7 – Module de l'erreur sur la vitesse.

dans la directive `adaptmesh` 0.0005 au lieu de 0.005 (ce qui multiplie environ par 10 le nombre de triangles, ce nombre valant 2298), on obtient les résultats suivants :

Erreur L2 relative commise sur la vitesse (%) = 0.0670719

Erreur max relative commise sur la vitesse (%) = 8.48181

[8] Le programme FREEFEM++ suivant permet de calculer la fonction de courant autour du profil NACA0012 ainsi que le profil de vitesse.

```
// ---- Domaine géométrique et maillage ----
real R2=2.5;
int N=21;
func real nacca0012(real t){
return 0.17735*sqrt(t)-0.075597*t-0.212836*t^2+0.17363*t^3-0.06254*t^4;
}
border Gamma1(t=0,1){x=t;y=nacca0012(t);label=2;};
border Gamma2(t=0,1){x=t;y=-nacca0012(t);label=2;};
border Gamma4(t=0,2*pi){x=R2*cos(t);y=R2*sin(t);label=1;};
mesh Th=buildmesh(Gamma1(N)+Gamma2(-N)+Gamma4(2*N));
plot(Th);

// ---- Espace éléments finis et formulation variationnelle ----
fespace Vh(Th,P2);
Vh phi,psi;
macro grad(u)[dx(u),dy(u)]//
real uloo=1; // valeur de la vitesse horizontale à l'infini
func phioo=uloo*y; // expression de la fonction courant à l'infini

solve ecoule(phi,psi)=int2d(Th)(grad(phi)'*grad(psi))
+on(2,phi=0)+on(1,phi=phioo);
Th=adaptmesh(Th,phi,err=0.0005);
plot(Th);
ecoule; // On résout à nouveau le problème sur ce nouveau maillage
plot(phi,ps="isovaleurs_naca.eps");
Vh u1=dy(phi), u2=-dx(phi);
plot([u1,u2],ps="vitesse_naca.eps");
```

[9] Notons  $T^{[n]}(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}, t_n)$  pour tout  $n \in \{0, \dots, N\}$ . Soit  $S$  une fonction “test” appartenant à  $\mathbb{H}^1(D(0, R_2))$ . Multiplions chaque membre de l’équation (15) par  $S$  et intégrons sur  $D(0, R_2) = \bar{\Omega}_0 \cup \Omega_\infty$ . On a

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \frac{T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x})}{\delta t} d\mathbf{x} - \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \operatorname{div}(k \nabla T^{[n]}(\mathbf{x})) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ = \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \frac{T^{[n-1]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x})}{\delta t} d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Puisque  $k$  est constant dans  $\Omega_0$ , on a

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_0} \operatorname{div}(k \nabla T^{[n]}(\mathbf{x})) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega_0} \partial_i(k \partial_i T^{[n]}(\mathbf{x})) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = k \sum_{i=1}^3 \iint_{\Omega_0} \partial_i^2 T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= k \iint_{\Omega_0} \Delta T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

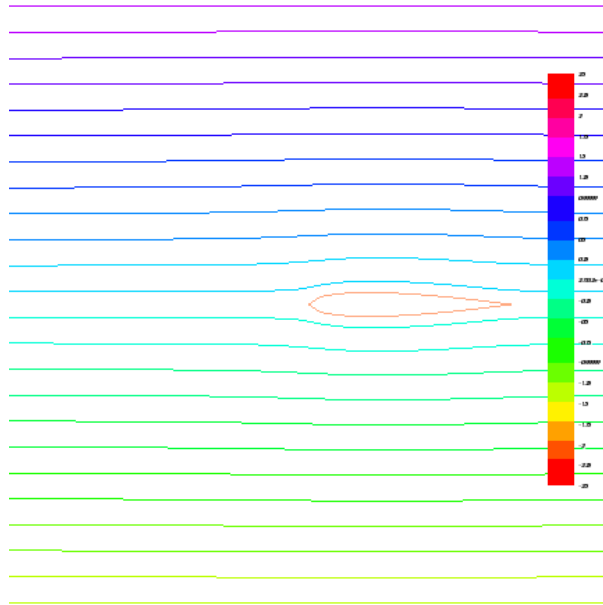


FIGURE 8 – Lignes d'isovaleurs de la fonction courant.

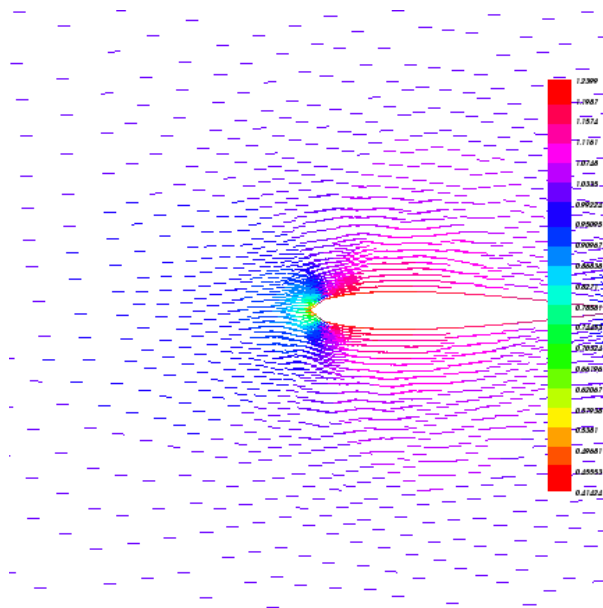


FIGURE 9 – Vitesse de l'écoulement.



Or, d'après la seconde formule de Green, pour tout  $u \in \mathbb{H}^2(\Omega_0)$  et pour tout  $v \in \mathbb{H}^1(\Omega_0)$ ,

$$\iint_{\Omega_0} \Delta u v \, d\mathbf{x} = - \iint_{\Omega_0} \nabla u \nabla v \, d\mathbf{x} + \oint_{\partial\Omega_0} \partial_n u v \, d\tau(\mathbf{x}).$$

On a donc

$$\iint_{\Omega_0} \operatorname{div}(k \nabla T^{[n]}(\mathbf{x})) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = -k \iint_{\Omega_0} \nabla T^{[n]}(\mathbf{x}) \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + k \oint_{\Gamma} \partial_n T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\tau(\mathbf{x}).$$

De manière analogue, on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_\infty} \operatorname{div}(k \nabla T^{[n]}(\mathbf{x})) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= -k \iint_{\Omega_\infty} \nabla T^{[n]}(\mathbf{x}) \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad + k \oint_{\Gamma} \partial_n T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\tau(\mathbf{x}) + k \oint_{\Sigma} \partial_n T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\tau(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

où on a noté  $\Sigma$  le cercle  $C(0, R_2)$ . En sommant ces deux expressions, et en tenant compte des conditions d'interface (13) à travers  $\Gamma$ , et du fait que  $\partial_n T^{[n]}(\mathbf{x}) = 0$  sur  $\Sigma$ , on obtient

$$\iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \operatorname{div}(k \nabla T^{[n]}(\mathbf{x})) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = -k \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \nabla T^{[n]}(\mathbf{x}) \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

On en déduit que la formulation variationnelle du problème de thermique est : trouver  $T^{[n]} \in \mathbb{H}^1(D(0, R_2))$  tel que pour tout  $S \in \mathbb{H}^1(D(0, R_2))$ , on a

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \frac{T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x})}{\delta t} \, d\mathbf{x} + k \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \nabla T^{[n]}(\mathbf{x}) \nabla S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla T^{[n]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ = \iint_{\Omega_0 \cup \Omega_\infty} \frac{T^{[n-1]}(\mathbf{x}) S(\mathbf{x})}{\delta t} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

10 Il suffit de modifier les lignes générant le maillage.

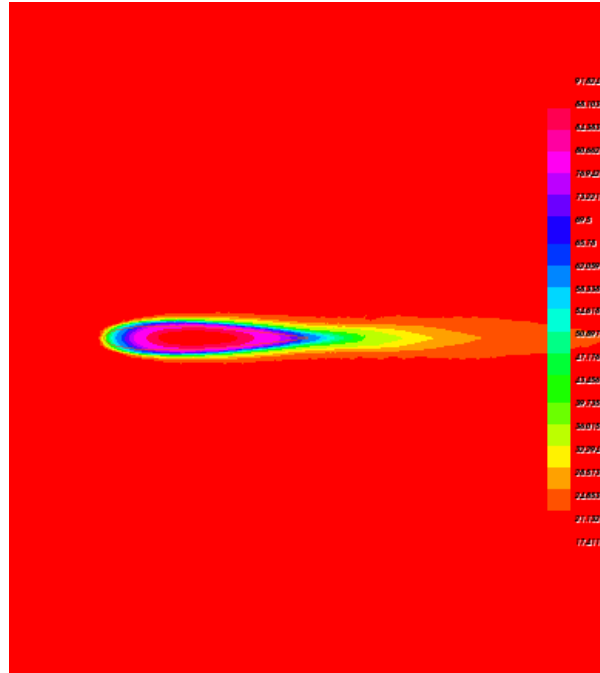


FIGURE 10 – Température autour du profil NACA0012