I. Analiza topologică a unei mulțimi din $\mathbb{R}$

Definiția 1. Fie $x, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Intervalul deschis $(x-r, x+r)$ se numește **bila de centru x si raza r** și se notează $\mathcal{B}(x,r) = (x-r, x+r)$.

Definiția 2. O mulțime $V \subseteq R$ se numește **vecinătate a punctului** $x \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ astfel încât $\mathcal{B}(x,r) \subseteq V$. Notăm cu V_x mulțimea tuturor vecinătăților punctului x.

Definiția 3. Fie o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că $x \in A$ se numește **punct interior al mulțimii** A dacă A este vecinătate pentru x (altfel spus, dacă există $r > 0$ astfel încât $(x-r, x+r) \subseteq A$). Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii A se numește interiorul mulțimii A și se notează cu $\mathring{A}$.

Definiția 4. Mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește **deschisă** dacă $\forall x \in G$, $\exists r > 0$ astfel încât $\mathcal{B}(x,r) \subseteq A$.

Proprietăți:

- $\mathring{A}$ este cea mai mare mulțime deschisă inclusă în A.
- $\mathring{A} \subseteq A$ si $\mathring{A}$ este mulțime deschisă.
- A este deschisă dacă și numai dacă $\mathring{A} = A$.
- $A \subseteq B \implies \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.
- $A \mathring{\cap} B = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
- $A \mathring{\cup} B \supseteq \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Teorema 5. O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numește **închisă** dacă $C_F = \mathbb{R} \setminus A$ este mulțime deschisă.

Proprietăți:

1. $\emptyset$ și $\mathbb{R}$ sunt mulțimi deschise;
2. intersecția a două mulțimi deschise este mulțime deschisă;
3. $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Z}$ sunt mulțimi închise;
4. reuniunea a doua mulțimi închise este mulțime închisă;
5. există mulțimi care sunt și deschise și închise;
6. există mulțimi care nu sunt deschise, nici închise ($A = [1,3)$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$);
7. mulțimile deschise din R sunt de forma $(a,b), (-\infty, a), (a, \infty)$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Definiția 6. $x \in \mathbb{R}$ se numește **punct aderent mulțimii** A dacă, $\forall\ V \in V_x$, $V \cap A \neq \emptyset$. Notăm cu $\bar{A}$ mulțimea punctelor aderente.

Teorema 7. O mulțime A este **închisă** dacă și numai dacă $A = \bar{A}$.

Definiția 8. $x \in \mathbb{R}$ se numește **punct de acumulare al mulțimii** A dacă, $\forall\ V \in V_x$, $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Notăm cu A' mulțimea punctelor de acumulare a mulțimii A.

Definiția 8'. $x \in \mathbb{R}$ este **punct de acumulare al mulțimii** A dacă și numai dacă în orice vecinătate a punctului x se găsesc o infinitate de elemente din A.

Definiția 9. Frontiera mulțimii A este $FrA = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Proprietăți:

- $C_{\bar{A}} = \mathring{C}_A$.
- $C_{\mathring{A}} = \bar{C}_A$.
- $\bar{A}$ este cea mai mică mulțime închisă care conține pe A.
- $\bar{A} \supseteq A$ și $\bar{A}$ este mulțime închisă.
- A este închisă dacă și numai dacă $\bar{A} = A$.
- $A \subseteq B \implies \bar{A} \subseteq \bar{B}$.
- $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cap \bar{B}$.
- $A \bar{\cup} B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.
- $A' \subseteq \bar{A}$.
- $\bar{A} = A' \cup A$.
- $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$.
- $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
- $(A')' \subseteq A'$.
- $\bar{A}' = A'$.
- A este deschisă $\iff A \cap FrA = \emptyset$.
- A este închisă $\iff FrA \subseteq A$.
- FrA este mulțime închisă.
- $Fr(A \cup B) \subseteq FrA \cup FrB$
- $Fr(A \cap B) \subseteq FrA \cup FrB$
- A este **mărginită** dacă și numai dacă $\exists\ x, r \in \mathbb{R}, r > 0$ astfel încât $A \subseteq \mathcal{B}(x - r, x + r)$.

II. Exerciții

1. Determinați $\mathring{A}, \bar{A}, A', FrA$ și decideți dacă A este închisă, deschisă sau mărginită:

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

   (b) $A = (0, 5] \cup \{7\}$

   (c) $A = \mathbb{Q}$

   (d) $A = [1, 2) \cap \mathbb{Q}$

   (e) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

   (f) $A = [0, 1) \cup \{-\frac{1}{4^n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (g) $A = [-4, 7) \cup \{10, 11\} \cup [(-9, -8) \cap \mathbb{Q}]$

   (h) $A = (-3, 0] \cup \{\frac{n+\sqrt{2}}{3n+\sqrt{3}} : n \in \mathbb{N}\}$