Curs 3

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă a.î. $f(a)f(b) < 0$.
Atunci $\exists\, x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*) = 0$.

Vrem să determinăm un șir $(x_k)_{k \geq 0} \subset [a,b]$

a.î. $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$.

3. Metoda secantei

Metoda secantei presupune construcția șirului $(x_k)_{k \geq 0}$ conform următoarei scheme grafice. La pasul k aproximarea x_k se obține prin intersecția axei Ox cu secanta AB, unde $A(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ și $B(x_{k-2}, f(x_{k-2}))$.

$Ox : y = 0$.

$$AB : \frac{x - x_{k-1}}{x_{k-2} - x_{k-1}} = \frac{y - f(x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})}.$$

$$\{(x_k, 0)\} = Ox \cap AB \Rightarrow \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-2} - x_{k-1}} = \frac{0 - f(x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k - x_{k-1} = \frac{-f(x_{k-1})(x_{k-2} - x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})(x_{k-2} - x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{x_{k-1}\left(f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})\right) - f(x_{k-1})(x_{k-2} - x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{x_{k-1} f(x_{k-2}) - x_{k-2} f(x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})} \quad \forall\, k \geq 2, \text{ unde } x_0, x_1 \in [a,b].$$

Teoremă (Teorema de convergență). Presupunem că $f \in C^1([a,b])$ a.î. $f(a)f(b) < 0$ și $f'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in [a,b]$. Atunci $\exists!\, x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*) = 0$. Mai mult, $\exists\, \delta > 0$ cu proprietatea că dacă $x_0, x_1 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$, atunci șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ rămâne în $[x^* - \delta, x^* + \delta] \subset [a,b]$ și converge către x^* cu ordinul (viteza) de convergență $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,63$.

Strategie de lucru. Din punct de vedere computațional, valorile x_0 și x_1 se aleg într-o vecinătate a soluției x^*, iar la fiecare **iterație k se testează dacă** x_k rămâne în $[a,b]$. Pentru optimizarea metodei se va alege intervalul maxim $[a,b]$ pe care f este definită și pe care f nu-și schimbă monotonia.

Criteriu de oprire. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru metoda secantei putem alege drept criteriu de oprire una dintre următoarele condiții:

- $|f(x_k)| < \varepsilon$.
- $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} < \varepsilon$.

Algoritm (Metoda secantei)

Date de intrare: f, a, b, ε;

Date de ieșire: x_{aprox};

Pasul 1: Alegem $x_0, x_1 \in [a,b]$;

$k = 1$;

Pasul 2: while $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} \geq \varepsilon$ do

$k = k+1$;

$$x_k = \frac{x_{k-1} f(x_{k-2}) - x_{k-2} f(x_{k-1})}{f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})};$$

if $x_k < a$ or $x_k > b$ then

OUTPUT („Introduceți alte valori pentru x_0 și x_1");

endif;

endwhile;

Pasul 3: $x_{aprox} = x_k$.

4. Metoda poziției false (regula falsi)

Metoda poziției false construiește trei șiruri: $(a_k)_{k \geq 0}$, $(b_k)_{k \geq 0}$ și $(x_k)_{k \geq 0}$.

La fiecare pas k aproximarea x_k se determină prin intersecția axei Ox cu dreapta AB, unde $A(a_k, f(a_k))$ și $B(b_k, f(b_k))$. Intervalul $[a_k, b_k]$ se determină conform metodei bisecției.

$Ox: y=0.$

$$AB: \frac{x-a_k}{b_k-a_k} = \frac{y-f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}.$$

$$\{(x_k,0)\} = Ox \cap AB \Rightarrow \frac{x_k-a_k}{b_k-a_k} = \frac{0-f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k - a_k = \frac{-f(a_k)(b_k-a_k)}{f(b_k)-f(a_k)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}$$

$$\forall k \geq 0.$$

Avem următoarea schemă generală: $(a_k, b_k, x_k) =$

$$= \begin{cases} a_k = a_{k-1},\ b_k = b_{k-1},\ x_k = x_{k-1} & ;\ \text{dacă } f(x_{k-1}) = 0 \\ a_k = a_{k-1},\ b_k = x_{k-1},\ x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)} & ;\ \text{dacă } f(a_{k-1}) f(x_{k-1}) < 0 \\ a_k = x_{k-1},\ b_k = b_{k-1},\ x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)} & ;\ \text{dacă } f(a_{k-1}) f(x_{k-1}) > 0 \end{cases}$$

unde $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$.

<u>Teoremă (Teorema de convergență).</u> Presupunem că $f \in C^2([a,b])$, $f(a)f(b) < 0$ și f', f'' nu se anulează pe $[a,b]$

Atunci $\exists!\, x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*)=0$, iar șirul $(x_k)_{k\geq 0}$ rămâne în $[a,b]$ și converge către x^* cu ordinul (viteza) de convergență $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}63$.

__Criteriu de oprire.__ Fie $\varepsilon > 0$. Pentru metoda poziției false putem alege drept criteriu de oprire una dintre următoarele condiții:

- $|f(x_k)| < \varepsilon$.
- $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} < \varepsilon$.

__Algoritm (Metoda poziției false)__

Date de intrare: f, a, b, ε;

Date de ieșire: x_{aprox};

__Pasul 1__: $k=0$;

$a_0 = a,\ b_0 = b,\ x_0 = \dfrac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$;

__Pasul 2__: while $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} \geq \varepsilon$ do

$k = k+1$;

if $f(x_{k-1}) = 0$ then

$x_k = x_{k-1}$;

STOP

elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ then

$a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_{k-1}$, $x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$;

elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0$ then

$a_k = x_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$, $x_k = \dfrac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$;

endif

endwhile

<u>Pasul 3:</u> $x_{aprox} = x_k$.

<u>Metode numerice pentru rezolvarea sistemelor liniare</u>

1. <u>Metoda substituției descendente</u>

<u>Def</u>: 1. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$. Spunem că A este matrice superior triunghiulară dacă toate elementele situate sub diagonala principală sunt nule (i.e. $a_{ij} = 0 \ \forall i > j$).

2. Un sistem liniar a cărui matrice asociată este superior triunghiulară s.n. sistem superior triunghiular.

Considerăm sistemul liniar $Ax=b$, unde $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară a.î. $a_{kk}\neq 0 \ \forall k=\overline{1,n}$ şi $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\in \mathbb{R}^n$.

Acest sistem se poate scrie sub forma:

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1k}x_k+\dots+a_{1n}x_n=b_1 & (E_1) \\ a_{22}x_2+\dots+a_{2k}x_k+\dots+a_{2n}x_n=b_2 & (E_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{kk}x_k+\dots+a_{kn}x_n=b_k & (E_k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{nn}x_n=b_n & (E_n) \end{cases}$$

Din (E_n) avem $x_n=\dfrac{b_n}{a_{nn}}$.

Presupunem că din ultimele $n-k$ ecuaţii am determinat x_j, $j=\overline{k+1,n}$.

Din (E_k) avem $x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\, x_j\right)$.

Algoritm (Metoda substituției descendente)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$;

Date de ieșire: $x \in \mathbb{R}^n$;

Pasul 1: $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$;

$k = n-1$;

Pasul 2: while $k > 0$ do

$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}\, x_j\right)$;

$k = k-1$;

endwhile

Conform algoritmului metodei substituției descendente definim procedura SubsDesc având sintaxa $x = \text{SubsDesc}(A, b)$, unde $Ax = b$.