Curs 4

Fie sistemul liniar $Ax = b$, unde $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ și $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$. Sistemul de mai sus se poate scrie sub forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (E_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k + \dots + a_{nn}x_n = b_n & (E_n) \end{cases}$$

În continuare ne propunem să transformăm matricea extinsă $\bar{A} = (A \mid b)$ într-o matrice superior triunghiulară, obținând un sistem compatibil cu cel inițial.
(echivalent)

1. Metoda lui Gauss fără pivotare

La fiecare pas $k \in \overline{1, n-1}$ se alege drept pivot corespunzător coloanei k primul element nenul $a_{pk} \neq 0$, $k \leq p \leq n$.
Dacă $p \neq k$, se interschimbă liniile p și k $(L_p \leftrightarrow L_k)$.

Apoi se elimină toate elementele de pe coloana k situate sub pivot.

Algoritm

Date de intrare: $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $b=(b_i)_{i=\overline{1,n}}$;

Date de ieșire: $x=(x_i)_{i=\overline{1,n}}$;

Pasul 1: $\bar{A}=(A|b)=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n+1}}}$;

Pasul 2: for $k=1:n-1$ do

Se caută primul indice p, $k\le p\le n$ a.î. $a_{pk}\neq 0$;

if (Nu a fost găsit p) then

OUTPUT („Sistemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat");

STOP

endif

if $p\neq k$ then

$L_p \longleftrightarrow L_k$ (interschimbă liniile p și k);

endif

for $\ell=k+1:n$ do

$m_{\ell k}=\dfrac{a_{\ell k}}{a_{kk}}$;

$L_\ell \longleftarrow L_\ell - m_{\ell k}L_k$;

end_for

endfor

Pasul 3: if $a_{nn} = 0$ then

OUTPUT („Sistemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat");

endif

Pasul 4: $x = SubsDesc\Big(\underbrace{(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}}_{\text{matricea transformată}}, \underbrace{(b_i)_{i=\overline{1,n}}}_{\text{vectorul transformat}}\Big)$.

Exercițiu. Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss fără pivotare, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$$

Sol.: $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$

$k = 1$

Se caută primul indice p, $1 \le p \le 3$ a.î. $a_{p1} \neq 0$.

$a_{21} \neq 0 \Rightarrow p = 2$.

$p \neq k$ $(2 \neq 1) \Rightarrow L_p \longleftrightarrow L_k$ $(L_2 \longleftrightarrow L_1)$.

Obținem $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)$.

Eliminăm elementele de pe prima coloană situate sub pivot, aplicând transformarea $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{1} L_1$.

Obținem $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$.

$\underline{k=2}$

Se caută primul indice p, $2 \le p \le 3$ a.î. $a_{p2} \neq 0$.

$a_{22} \neq 0 \Rightarrow p=2$.

$p=k$ $(2=2)$.

Eliminăm elementele de pe coloana a doua situate sub pivot, aplicând tranformarea $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{1} L_2$.

Obținem $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right)$.

Avem de rezolvat sistemul: $\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 4 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 8 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 6 x_3 = -18 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 . \end{cases}$$

$S = \{(1,2,3)\}$. $\square$

2. Metoda lui Gauss cu pivotare parțială

La fiecare pas $k \in \overline{1,n-1}$ se alege drept pivot corespunzător coloanei k primul element a_{pk}, $k \le p \le n$ a.î. $|a_{pk}| = \max\limits_{i=\overline{k,n}} |a_{ik}|$. Dacă $p \neq k$, se interschimbă liniile p și k. Apoi se elimină elementele de pe coloana k situate sub pivot.

Algoritm

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;

Date de ieșire: $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$;

Pasul 1: $\bar{A} = (A|b) = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n+1}}}$;

Pasul 2: for $k = 1 : n-1$ do

Se caută primul indice p, $k \le p \le n$ a.î.

$|a_{pk}| = \max\limits_{i=\overline{k,n}} |a_{ik}|$;

if $a_{pk} = 0$ then

OUTPUT („Sistemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat");

endif

if $p \neq k$ then

$L_p \leftrightarrow L_k$ (interschimbă liniile p și k);

endif

for $l = k+1 : n$ do

$m_{lk} = \dfrac{a_{lk}}{a_{kk}}$;

$L_l \leftarrow L_l - m_{lk} L_k$;

endfor

endfor

Pasul 3: if $a_{nn} = 0$ then

OUTPUT („Sistemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat");

endif

Pasul 4: $x = \text{SubsDesc}\Big(\underbrace{(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}}_{\text{matricea transformată}}, \underbrace{(b_i)_{i=\overline{1,n}}}_{\text{vectorul transformat}}\Big)$.

3. Metoda lui Gauss cu pivotare totală

La fiecare pas $k \in \overline{1,n-1}$ se alege drept pivot corespunzător coloanei k primul element a_{pm}, $k \le p, m \le n$ a.î.

$|a_{pm}| = \max\limits_{i,j=\overline{k,n}} |a_{ij}|$. Dacă $p \neq k$, interschimbăm liniile p și k ($L_p \longleftrightarrow L_k$). Dacă $m \neq k$, interschimbăm coloanele m și k ($C_m \longleftrightarrow C_k$) și interschimbăm ordinea necunoscutelor x_m și x_k în vectorul x ($x_m \longleftrightarrow x_k$). Apoi eliminăm elementele de pe coloana k situate sub pivot.

Algoritm

<u>Date de intrare</u>: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;

<u>Date de ieșire</u>: $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$;

<u>Pasul 1</u>: $\bar{A} = (A|b) = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n+1}}}$;

$index_i = i \quad \forall i = \overline{1,n}$;

<u>Pasul 2</u>: for $k = 1:n-1$ do

Se caută primii indici p, m, $k \le p, m \le n$ a.î.

$|a_{pm}| = \max\limits_{i,j=\overline{k,n}} |a_{ij}|$;

if $a_{pm}=0$ then

OUTPUT („Sistemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat");

endif

if $p\neq k$ then

$L_p \leftrightarrow L_k$;

endif

if $m\neq k$ then

$C_m \leftrightarrow C_k$;

$index_m \leftrightarrow index_k$;

endif

for $l = k+1 : n$ do

$m_{lk} = \frac{a_{lk}}{a_{kk}}$;

$L_l \leftarrow L_l - m_{lk} L_k$;

endfor

endfor

Pasul 3: if $a_{nn}=0$ then

OUTPUT („Sistemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat");

endif

Pasul 4: $x_{index_i} = y_i \quad \forall i=\overline{1,n}$;

$$y = \text{SubsDesc}\Big(\underbrace{(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}}_{\text{matricea transformată}}, \underbrace{(b_i)_{i=\overline{1,n}}}_{\text{vectorul transformat}}\Big).$$

Exercițiu. Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare parțială, sistemul liniar:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2, \end{cases} \quad \text{unde } 0 < \varepsilon \underbrace{<<}_{\text{mult mai mic}} 1.$$

Sol.: $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

$k=1$

Se caută primul indice p, $1 \le p \le 2$ a.î.

$$|a_{p1}| = \max_{i=\overline{1,2}} |a_{i1}|.$$

$$\max_{i=\overline{1,2}} |a_{i1}| = |1| = |a_{21}| \Rightarrow p = 2.$$

$p \ne k$ $(2 \ne 1) \Rightarrow L_p \longleftrightarrow L_k$ $(L_2 \longleftrightarrow L_1)$.

Obținem: $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{array}\right)$

Eliminăm elementele de pe prima coloană situate sub pivot, aplicând transformarea $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\varepsilon}{1} L_1$.

Obținem $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\varepsilon & 1-2\varepsilon \end{array}\right)$.

Avem de rezolvat sistemul liniar:

$$(*) \begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + (1-\varepsilon) x_2 = 1-2\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ x_2 = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{1-\varepsilon} (\approx 1). \\ x_2 = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} (\approx 1). \end{cases} \quad \square$$

Observație. Soluția sistemului $(*)$ poate fi aproximată astfel:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + (1-\varepsilon) x_2 = 1-2\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 2-1 \\ x_2 = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 1 \\ x_2 \approx 1. \end{cases}$$

Exercițiu. Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 + Cx_2 = C \\ x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$$ unde $C \underbrace{\gg}_{\text{mult mai mare}} 1$.

<u>Sol.</u>: $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & C & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

<u>$k=1$</u>

Se caută primii indici p, m, $1 \le p, m \le 2$ a.î.

$$|a_{pm}| = \max_{i,j=\overline{1,2}} |a_{ij}|.$$

$$\max_{i,j=\overline{1,2}} |a_{ij}| = |C| = |a_{12}| \Rightarrow p=1 \text{ și } m=2.$$

$p = k$ $(1=1)$.

$m \neq k$ $(2 \neq 1) \Rightarrow C_m \longleftrightarrow C_k$ $(C_2 \longleftrightarrow C_1)$ și $x_m \longleftrightarrow x_k$ $(x_2 \longleftrightarrow x_1)$.

Obținem $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} C & 1 & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$.

Fie $y = (x_2, x_1)$.

Eliminăm elementele de pe prima coloană situate sub pivot, aplicând transformarea $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{C} L_1$.

Obținem $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} c & 1 & c \\ 0 & 1-\frac{1}{c} & 1 \end{array}\right)$.

Rezolvăm sistemul: (*) $\begin{cases} c\cdot x_2 + 1\cdot x_1 = c \\ 0\cdot x_2 + \left(1-\frac{1}{c}\right)x_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{\cancel{c} - \frac{\cancel{c}}{c-1}}{\cancel{c}} \\ x_1 = \dfrac{c}{c-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{c-2}{c-1} & (\approx 1) \\ x_1 = \dfrac{c}{c-1} & (\approx 1). \end{cases} \quad \square$$

<u>Observație</u>. Soluția sistemului (*) poate fi aproximată astfel: $\begin{cases} c\cdot x_2 + 1\cdot x_1 = c \\ 0\cdot x_2 + \left(1-\frac{1}{c}\right)x_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c x_2 \approx c-1 \\ x_1 = \dfrac{c}{c-1} \approx 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \approx \dfrac{c-1}{c} \approx 1 \\ x_1 \approx 1. \end{cases}$