I. Șiruri de numere reale

Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ un șir de numere reale.

Spunem că șirul $(x_n)_n$ este **convergent** cu limita $l \in \mathbb{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $x_n > \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Spunem că sirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $x_n < -\varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Spunem că șirul $(x_n)_n$ este **șir Cauchy** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x_n - x_m| < \varepsilon$, pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$, $n, m \in \mathbb{N}$. Aceasta condiție poate fi reformulată astfel: dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon > 0$ astfel încât $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $n, p \in \mathbb{N}$, atunci șirul $(x_n)_n$ este **șir Cauchy**.

Teoremă (Weierstrass): Un șir **monoton** și **mărginit** este **convergent**.

Criteriul Cauchy: Un șir este **convergent** dacă și numai dacă este **șir Cauchy**.

Criteriul cleștelui: Fie $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(x_n)_n$ trei șiruri de numere reale cu proprietățile:

- există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(a_n)_n \leq (x_n)_n \leq (b_n)_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$

Atunci șirul $(x_n)_n$ este **convergent** cu limita l.

Teorema Stolz-Cesàro: Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale, astfel încât șirul $(y_n)_n$ este strict crescător și $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \bar{\mathbb{R}}$, atunci există și $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

.

II. Exerciții

1. Arătați, cu ajutorul definiției (cu ε), că următoarele șiruri au limită:
   (a) $x_n = 2^n - \frac{1}{n^2} + 4$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$, $n \in \mathbb{N}$.
   (c) $x_n = \ln \frac{3n+2}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Folosind criteriul Cauchy, arătați că următoarele șiruri sunt convergente:
   (a)
   $$x_n = \frac{(\cos 1)^3}{4^2} + \frac{(\cos 2)^3}{4^4} + ... + \frac{(\cos n)^3}{4^{2n}}, n \geq 1.$$
   (b)
   $$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, n \geq 1.$$

3. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_1 \in [1, 2]$, este convergent și calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.

4. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$,
   $$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+1}.$$

5. Calculați
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

6. Studiați convergența șirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că
   $$|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{3n}{4n-1} \cdot |x_{n+1} - x_n|, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$