3. O particulă deplasată din poziția de echilibru cu $A_0$ este lăsată liberă. Ce distanță parcurge particula până la oprirea sa completă? Se cunoaște decrementul logaritmic D.

$$\begin{cases} x = Ae^{-bt}\cos(\omega' t+\alpha) \\ v = \dot{x} = -Abe^{-bt}\cos(\omega' t+\alpha) - Ae^{-bt}\omega'\sin(\omega' t+\alpha) \end{cases}$$

Condiții inițiale $\begin{cases} x(0) = A_0 = A\cos\alpha \\ v(0) = 0 = -Ab\cos\alpha - A\omega'\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -Ab\cos\alpha = A\omega'\sin\alpha \Rightarrow -b\cos\alpha = \omega'\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b}{\omega'} \Rightarrow tg\alpha = -\frac{b}{\omega'}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{b}{\omega'}$$

$$v(t) = 0 \Rightarrow -Abe^{-bt}\cos(\omega' t+\alpha) - Ae^{-bt}\omega'\sin(\omega' t+\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\omega' t+\alpha)}{\cos(\omega' t+\alpha)} = -\frac{b}{\omega'} \Rightarrow tg(\omega' t+\alpha) = -\frac{b}{\omega'}$$

$$tg\alpha = tg(\omega' t+\alpha) \Rightarrow \omega' t_n = n\pi \quad n \in \mathbb{N}$$

$$t = 0 \longrightarrow x(0) = A_0$$

$$\vdots$$

$$t = t_n \longrightarrow x(t_n) = Ae^{-bt_n}\cos(\omega' t_n + \alpha) =$$

$$= Ae^{-\frac{bn\pi}{\omega'}}\cos(n\pi+\alpha) \qquad (-1)^n = \cos(n\pi+\alpha)$$

$$t_n = \frac{n\pi}{\omega'}$$

$$D = bT' = \frac{b\,2\pi}{\omega'} \Rightarrow \frac{b}{\omega'} = \frac{D}{2\pi}$$

Pozițiile când corpul se oprește și se întoarce:

$x(0) = A_0 \qquad x(t_1) = -A_0 e^{-\frac{D}{2}} \qquad x(t_2) = +A_0 e^{-D} \ldots$

$$x(t_n) = (-1)^n A_0 e^{-\frac{nD}{2}}$$

Distanța parcursă:

$$d = x(0) + 2|x(t_1)| + 2|x(t_2)| + \ldots + 2|x(t_n)| =$$
$$= A_0 + 2A_0 e^{-\frac{D}{2}} + 2A_0 e^{-D} + \ldots + 2A_0 e^{-\frac{nD}{2}} =$$
$$= A_0 + 2A_0 \left(e^{-\frac{D}{2}} + e^{-D} + \ldots + e^{-\frac{nD}{2}}\right) =$$
$$= A_0 + 2A_0 e^{-\frac{D}{2}} \frac{e^{-\frac{nD}{2}} - 1}{e^{-\frac{D}{2}} - 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d = A_0 + 2A_0 \frac{e^{-\frac{(n+1)D}{2}} - e^{-\frac{D}{2}}}{e^{-\frac{D}{2}} - 1}$$

---

? d mai poate fi și scris ca //nu e de la mine

$$d = x(0) + 2|x(t_1)| + 2|x(t_2)| + \ldots + 2|x(t_n)| =$$
$$= A_0 + 2A_0 e^{-\frac{D}{2}} + 2A_0 e^{-D} + \ldots + 2A_0 e^{-\frac{nD}{2}} =$$
$$= \sum_{n=0}^{D} 2\left|(-1)^n A_0 e^{-\frac{nD}{2}}\right|$$