I. Relații

Se numește **relație binară** pe o mulțime X nevidă, o submulțime nevidă $\rho \subseteq X \times X$, unde $X \times X = \{(x, x) : x \in X\}$ (numit produsul cartezian dintre mulțimile X și X). Pentru $(x, y) \in \rho$, notăm $x\rho y$ și citim "x este în relație cu y".

O relație ρ pe o mulțime X se numește:

- **reflexivă**, dacă $x\rho x, \forall x \in X$;
- **simetrică**, dacă $x\rho y \implies y\rho x, \forall x, y \in X$;
- **antisimetrică**, dacă $x\rho y$ si $y\rho x \implies x = y, \forall x, y \in X$;
- **tranzitivă**, dacă $x\rho y$ si $y\rho z \implies x\rho z, \forall x, y, z \in X$.

O relație ρ pe o mulțime X nevidă se numește de **echivalență** dacă este **reflexivă**, **simetrică** și **tranzitivă**. De obicei, relațiile de echivalență se notează cu $\sim$.

O relație ρ pe o mulțime X nevidă se numește de **ordine** dacă este **reflexivă**, **antisimetrică** si **tranzitivă**. De obicei, relațiile de ordine se notează cu $\leq$.

O mulțime X nevidă pe care definim o relație de ordine $\leq$ se numește **mulțime ordonată** și se noteaza $(X, \leq)$.

O mulțime ordonată se numește **total ordonată** dacă orice două elemente ale ei se pot compara, adică dacă pentru orice x și $y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Exemple: mulțimea $(\mathbb{C}, \leq)$ nu este total ordonată, iar mulțimea $(\mathbb{Q}, \leq)$ este total ordonată, unde $\leq$ este relația de ordine uzuală.

II. Infimumul si supremumul unei mulțimi

Fie $(X, \leq)$ o mulțime nevidă total ordonată, $A \subseteq X$ o submulțime nevidă a lui X.

- $x \in X$ se numește majorant al lui A dacă $a \leq x$, pentru orice $a \in A$. Dacă A are cel puțin un majorant, atunci A este mărginită superior;
- $x \in X$ se numește minorant al lui A dacă $x \leq a$, pentru orice $a \in A$. Dacă A are cel puțin un minorant, atunci A este mărginită inferior;
- dacă există un majorant în A, atunci acesta este unic și se numește maximul lui A (notație: $maxA$);
- dacă există un minorant în A, atunci acesta este unic și se numește minimul lui A (notație: $minA$);
- spunem că A este mărginită inferior cu infimum dacă există un cel mai mare minorant in X (notație $infA$);
- spunem că A este mărginită superior cu supremum dacă există un cel mai mic majorant in X (notație $supA$);

Observații:

1. Dacă există $minA$, atunci există $infA$ și este egal cu $minA$. Inversa nu este întotdeauna adevarată.
2. Dacă există $maxA$, atunci există $supA$ și este egal cu $maxA$. Inversa nu este întotdeauna adevarată.
3. Dacă există $infA$, atunci orice alt minorant al lui A este mai mic decât $infA$.
4. Dacă există $supA$, atunci orice alt majorant al lui A este mai mare decât $supA$.
5. A este nemărginită superior sau inferior $\iff$ există un șir $(x_n)_n \subseteq A$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$.
6. A este finită $\implies$ A este mărginită și are $minA$ și $maxA$.

Exemplu: Considerăm mulțimea $(\mathbb{R}, \leq)$, unde $\leq$ este relația de ordine uzuala și mulțimea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A = (-\sqrt{7}, \sqrt{5}) \cap \mathbb{Q}$. Atunci

- majoranți ai mulțimii A sunt 4, 5, 7.2, etc;
- mulțimea tuturor majoranților este $[\sqrt{5}, \infty)$;
- $supA = \sqrt{5}$, $infA = -\sqrt{7}$;
- nu există $maxA$, $minA$;
- A este mărginită superior și inferior.

III. Exerciții

1. Fie A și $B \subset \mathbb{R}$. Definim suma acestor mulțimi prin $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Arătați că dacă A si B sunt mărginite, atunci $A+B$ este mărginită si $sup(A+B) = supA + supB$, iar $inf(A+B) = infA + infB$.
2. Fie A și B două submulțimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$ astfel încât $A \subseteq B$. Arătați că $supA \leq supB$ și $infA \geq infB$.
3. Fie A și B două mulțimi măriginite de numere reale. Arătați că $sup(A \cup B) = max(supA, supB)$ și $inf(A \cup B) = min(infA, infB)$.
4. Să se determine $inf(-1, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ și $sup(-1, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$.
5. Determinați $infA$, $supA$ pentru mulțimile:
   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} : \frac{3x-1}{x+5} < 2\}$
   (b) $A = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m < 5n\}$

(c) $A = \{(-1)^{n+1}\frac{m+n}{2m+1} : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

(d) $A = \{n + \frac{(-1)^n}{4n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

(e) $A = \{\frac{2mp}{m^2+p^2+1} : m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$