Cours 4

Tie sistemul linier $A \neq = b_1$ unde $A = (Aij)_{i,j=1,m} \in M_n(R)$ si $b = (bi)_{i=1,m} \in R^n$. Listemul de mai sus se poote serie sub forma:

(a 11 x + a 12 x 2 + ... + a 1 k x - ... + a 1 m x m = b 1 (E)

Jaz171+ azz72+...+ azxxx+...+ azn xn= bz (Ez)

ans 71 + anz 72 +... + ang 72 + ... + ann xn= In (En)

În continuare ne propunem să transformam matricea extensă $\overline{A} = (A \mid b)$ într-o matrice suprior triunghiulară, obținând un sistem compatibil su al inițial.

1. Mtoda lui Gauss foira pivotare

La fiecare par $k \in \overline{1, n-1}$ re alege drept pivot conspunt Fator abounce k primul element neural ap $k \neq 0$, $k \leq p \leq n$. Daca $p \neq k$, re interchimbra limite p ri k $(L_p \hookrightarrow L_p)$.

Apri se climina toate elementele de pe colorana le situate touis dur Misgelt Date de intrare: $A = (Pi)_{i,j} = I_{i,m}$, $b = (bi)_{i=I_{i,m}}$; mil = i (ix) = x : experience state Paul 1: $\overline{A} = (A \mid b) = (A \mid b) = (A \mid b) = \overline{1, m}$; Jarul 2: for k=1:m-1 do Il coutà primul indice p, k≤p≤n a à. app≠o; if (Mi a fost gaint p) then OUTPUT (n'Sistemul este incompatibil sou compati bil nedeterminat"); endif if 1 then Li C Le (interschimboi linite p si k); libers for l= k+1:n ,olo Mex = All; Lo < mellos

replans softens Tosul 3: if ann = 0 then OUTPUT ("Sistemul este incompatibil son compati-bil nedelleminat"); Famil 4: $x = \text{Substance}((aij)_{i,j=1,m})(bi)_{i=1,m}$. matricea vectorul transformata transformat Exercitin. Saise rezolve, folosind metoda lui Gauss fara : sivil lumities, sistemul linial $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$ $\frac{\text{Sol}: \ \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 3 & 2 & 1 & | & 10 \end{pmatrix}}{3 & 2 & 1 & | & 10 \end{pmatrix}$ X= 1 le coutra primul indice p, 1≤p ≤ 3 a.s. ap1 ≠ 0. Q21 = 0 => N=2. $\uparrow \downarrow \downarrow (2 \neq 1) \Rightarrow \downarrow \downarrow (\downarrow_2 \longleftrightarrow \downarrow_1).$

Obtinem
$$\frac{1}{4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 3 & 2 & 1 & | & 10 \end{pmatrix}$$
.

Eliminam elementele de pe prima coloana situate sub pivot, apliand transformarea $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{1} L_1$.

Obline
$$\frac{1}{4}$$
 N $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | 4 \\ 0 & 1 & 2 & | 8 \\ 0 & 2 & -2 & | -2 \end{pmatrix}$.

R= 2

le courtà primule indice ρ , $2 \le \rho \le 3$ a $\hat{\lambda}$. $\alpha_{\rho 2} \ne 0$, $\alpha_{22} \ne 0 \Rightarrow \rho = 2$.

Λ= le (2=2).

Elimenam elementele de pe coboana a doua situate sub pivot, explicând tranformarea $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{7}L_2$.

Obtinum
$$7 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 0 & -6 & | & -18 \end{pmatrix}$$
.

from de regolvat sixtemul: $\begin{cases} 1. \ \chi_1 + 0. \ \chi_2 + 1. \ \chi_3 = 4 \\ 0. \ \chi_1 + 1. \ \chi_2 + 2. \ \chi_3 = 8 (=) \\ 0. \ \chi_1 + 0. \ \chi_2 - 6 \ \chi_3 = -18 \end{cases}$

$$(=) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$S = \{(1,2,3)\}, \square$$

2. Mitala lui Your en pivotare partialà

La fierare par le 5, m-1 se alege drept pivot coresponreator

Avanci k primul element app, kepen a.T.

lappe = mart laik. Daca pth, se interschimba limile p

vi k. Apri se elimina elementele de pe sobrana k situate sub pivot.

Algoritm

Date de intrave: $A = (a_{ij})_{i,j} = \overline{I_{in}}$, $b = (b_{i})_{i} = \overline{I_{in}}$;

Some de ienie: $\chi = (\chi_i)_{i=1,m}$;

Saml 1: $\overline{A} = (A | b) = (a_{ij})_{i=\overline{1,m+1}}$

Jarul 2: for &= 1: n-1 do

le coutà primul indice p, k \ p \ n a. \(\ta}.\)

lappel= max |aik|;

i=km

if app = 0 then unes libritagement este incompatibil son compatibil redeterminat "); endif if hthe then Ly S Le (interschimba limite p si k); endif for 1= 1+1: w do who will ? Le CL2 melk Lk; endfor Tarul 3: if ann = 0 then OUT PUT (,, Sixtemul este incompatibil sau com-patibil nedeterminat"); Xibns Faul 4: $\mathcal{A} = \text{full Dec}((\alpha_{ij})_{i,j=\overline{1,m}}, (\beta_{i})_{i=\overline{1,m}})$. transformat thamsformata

3. Mtoda lui Yans en pivotare totalà La filcare par $k \in I, m-I$ re alege drept pivot corresponde to colorne k primal element apm, $k \leq p, m \leq n$ a 2. lapm/= max laij! Doca p = k, interschimbam limile p is k (Lp <> Lp), Daca m + k, interschimban coloqnele m ji k (Cm \Cx) ji intershimbin sodinea neamsteathle Xm xi xx în vectorul x (Xm < xx). Agri eliminaim elementele de pe coloana le situate sub pivot. Date sole intrave: $A = (a_{ij})_{i,j} = \overline{I_{im}}$, $b = (b_{i})_{i} = \overline{I_{im}}$; Date de ieure: $\chi = (\chi_i)_{i=1,m}$ $\frac{\text{Saxul 1}: \overline{A} = (A|A) = (a_{ij})_{i=\overline{1,m+1}};}{\dot{j} = \overline{1,m+1}};$

 $j = \overline{J_1 m + 1}$ $j = \overline{J_1 m$

Toul 2: for k=1:m-1 do le courtà primire indici $p, m, k \in p, m \in n$ a. \bar{x} . $|Apm| = \max_{i,j=k,m} |A_{ij}|;$

if apm=0 then OUTPUT (" Sixtemul este incompatibil sau compatibil nedeterminat"); endif if 1 then Lk; endif if m = & then Cm Ch 5 index = indexe; endif for l= k+1: m do my = mek; Le < Le - mer Le; end for Tasul 3: if ann = 0 then OUTPUT (" Sixtemul este incompatibil san compatibil nedeterminat"); Endif

Saul 4: Linderi = Gi + i=Im;

y = Subs Dex ((aij)ij=Im, (bi) i=Im).

matricia rectorul

transformat

transformat

Exercitive. La se vezelve, febrind metoda lui Gauss cu pivolare partialà, sistemul limar:

 $\begin{cases} \xi x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ unde $0 < \xi < < 1$.

mult mai

 $\underline{\text{Yol}}: \overline{A} = \begin{pmatrix} \xi & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Le soutà primul indice ρ, 1≤ρ ∈ 2 α λ. |αρ1 |= max |α11 |. i=1/2

max |ai1 = |1) = |a_21 | => = 2.

 $\uparrow \neq k (2 + 1) \Rightarrow \downarrow_{\uparrow} \longleftrightarrow \downarrow_{\downarrow} (\downarrow_{2} \longleftrightarrow \downarrow_{\downarrow}).$

Obtinem:
$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2 \\ \varepsilon & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminam elementele de pe prima coloanà situate sub pivot, aplicand transformarea $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{L}_1}$.

Objinem
$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\epsilon & 1-2\epsilon \end{pmatrix}$$
.

Aven de rezolvat sistemul liniar:

$$(=) \begin{cases} x_1 = \frac{1}{1-\varepsilon} (\approx 1), \\ x_2 = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} (\approx 1). \end{cases}$$

Observatie. Solutia sistemului (*) pootle fi aproximatà attle : $\begin{cases} 1.74 + 1.92 = 2 \\ 0.74 + (1.6) + 2 = 1.26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7.3 \times 2 - 1 \\ 2 = \frac{1.26}{1.6} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \mathfrak{A}_1 & \cong \Lambda \\ \mathfrak{A}_2 & \cong \Lambda \end{cases}.$$

<u>Exercitiu</u>. Là re revolve, fobsind metodor lui Gauss eu pivolare totalà, sistemul liniar:

$$\begin{cases} \chi_1 + C\chi_2 = C \\ \chi_1 + \chi_2 = 2, \text{ unde } C \gg 1. \\ \text{will mai mare} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \chi_1 + C\chi_2 = C \\ \chi_1 + \chi_2 = 2, \text{ unde } C \gg 1. \\ \text{will mai mare} \end{cases}$$

$$k=1$$

le coutà primire indici p.m., 1 < p.m < 2 a. î.

|apm/= max |aij|,

max | aij = | c| = | a₁₂ | => f=1 si m = 2.

1= k (1=1).

 $m \neq k(2 \neq 1) =)$ $C_{m} \longleftrightarrow C_{k} (C_{2} \longleftrightarrow C_{1}) \Rightarrow (\chi_{2} \longleftrightarrow \chi_{k}).$ $(\chi_{2} \longleftrightarrow \chi_{4}).$

Obtinem $\overline{A} \sim \begin{pmatrix} c & 1 & | & c \\ & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$.

Tie y= (x21x1).

Eliminam elementele de pe prima coloanà situate sub pirot, aplicand transformarea $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{C}L_1$.

Obtinem
$$\overline{A} \sim \begin{pmatrix} c & 1 & c \\ 0 & 1 - \frac{1}{c} & 1 \end{pmatrix}$$

Furtherm sistemul: (*)
$$(x)$$
 (x) (x)

$$(=) \begin{cases} \chi_{2} = \frac{C - \frac{C}{C - 1}}{C} \\ \chi_{1} = \frac{C}{C - 1} \end{cases} (=) \begin{cases} \chi_{2} = \frac{C - 2}{C - 1} \\ \chi_{1} = \frac{C}{C - 1} \end{cases} (=) \begin{cases} \chi_{1} = \frac{C}{C - 1} \\ \chi_{1} = \frac{C}{C - 1} \end{cases} (=) \end{cases}$$

Derivatie. Solution sixtemului (*) poate fi aproximatà astfel:
$$\begin{cases} C \cdot x_2 + 1 \cdot x_1 = C \\ 0 \cdot x_2 + (-\frac{1}{C})x_1 = 1 \end{cases} = \begin{cases} C \cancel{x}_2 \sim C - 1 \\ \cancel{x}_1 = \frac{C}{C - 1} \sim 1 \end{cases} / \begin{cases} x_2 \sim \frac{C - 1}{C} \sim 1 \\ \cancel{x}_1 \sim \frac{C}{C} \sim 1 \end{cases}$$