Curs 5

Sisteme inferior triunghiulare

Def.: Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$. Spunem că A este matrice inferior triunghiulară dacă toate elementele situate deasupra diagonalei principale sunt nule (i.e. $a_{ij}=0 \ \forall i<j$).

Def.: Un sistem liniar a cărui matrice asociată este inferior triunghiulară se numește sistem inferior triunghiular.

Metoda substituției ascendente

Fie sistemul liniar $Ax=b$, unde $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice inferior triunghiulară a.î. $a_{kk}\neq 0 \ \forall k=\overline{1,n}$ și $b=(b_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$. Acest sistem inferior triunghiular se scrie sub forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \quad (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \quad (E_2) \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kk}x_k & = b_k \quad (E_k) \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \quad (E_n) \end{cases}$$

Din (E_1) avem $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$.

Presupunem că am determinat, din primele $k-1$ ecuații, $x_j \; \forall \, j = \overline{1, k-1}$.

Din (E_k) avem $x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j\right)$.

Algoritm

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;

Date de ieșire: $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$;

Pasul 1: $x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$;

Pasul 2: for $k=2:n$ do

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j\right);$$

end for

Conform algoritmului de mai sus definim procedura SubsAsc(A,b), având sintaxa $x=$ SubsAsc(A,b), procedură ce returnează soluția sistemului considerat.

Inversa unei matrice

Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă și A^{-1} inversa ei.

Avem $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Fie $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ $\forall k=\overline{1,n}$ coloana k a inversei A^{-1}, i.e.

$A^{-1} = \text{cols}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\right)$.

Fie $e^{(k)} = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{poziția } k}}{1},0,\dots,0)^T \in \mathbb{R}^n$ coloana k a matricei I_n.

$AA^{-1} = I_n \Leftrightarrow A x^{(k)} = e^{(k)} \quad \forall k = \overline{1,n} \quad (*)$

Am obținut n sisteme liniare ale căror soluții ($x^{(k)}$ $\forall k = \overline{1,n}$) sunt, pe rând, coloanele matricei A^{-1}.

Obs.: Sistemele $(*)$ se pot rezolva simultan considerând drept matrice extinsă matricea A la care se adaugă cele n coloane ale matricei I_n: $\overline{A} = (A \mid e^{(1)} \mid e^{(2)} \dots \mid e^{(n)})$.

Determinantul unei matrice

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$. Notăm $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \dots, a_{n-1\,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n-1)}$ pivoții din algoritmii lui Gauss de la fiecare etapă.

Atunci $\det(A) = (-1)^s a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{n-1\,n-1}^{(n-1)} \cdot a_{nn}^{(n-1)}$, unde s este numărul de interschimbări de linii/coloane în funcție de metodă. În timpul algoritmului, matricea A se modifică, din acest motiv am folosit notația cu indici sus ($a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}$ etc.).

Abrevieri: 1) GFP = metoda lui Gauss fără pivotare.

2) GPP = metoda lui Gauss cu pivotare parțială.

3) GPT = metoda lui Gauss cu pivotare totală.

Rangul unei matrice

Def.: Fie $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ și $r \in \mathbb{N}$. Spunem că rangul matricii A este r dacă A are măcar un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin mai mare strict decât r sunt nuli.

Fiind dat sistemul $Ax=b$, unde $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$, $b=(b_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$, se disting următoarele cazuri:

1) Sistemul este compatibil determinat (i.e. are soluție unică) dacă și numai dacă $\text{rang}\, A = \text{rang}\, \overline{A} = n$.
2) Sistemul este compatibil nedeterminat (i.e. are o infinitate de soluții) dacă și numai dacă $\text{rang}\, A = \text{rang}\, \overline{A} < n$.
3) Sistemul este incompatibil (i.e. nu are soluție) dacă și numai dacă $\text{rang}\, A \neq \text{rang}\, \overline{A}$.

Algoritm (Rangul unei matrice folosind GPP)

Date de intrare: $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$;

Date de ieșire: $\text{rang}(A)$;

Pasul 1: Se inițializează linia, coloana și rangul:

$h=1$, $k=1$, $rang(A)=0$.

Pasul 2: while $h \le m$ and $k \le n$ do

Se caută pivotul a_{pk} $(h \le p \le m)$: $|a_{pk}| = \max_{i=\overline{h,m}} |a_{ik}|$;

if $a_{pk}=0$ then

Se trece la coloana următoare: $k=k+1$;

Se trece la pasul următor al buclei while;

endif

if $p \neq h$ then

$L_p \longleftrightarrow L_h$ (Se interschimbă liniile L_p și L_h);

endif

Se elimină elementele de sub pivot.

for $l=h+1:m$ do

$m_{lk} = \dfrac{a_{lk}}{a_{hk}}$;

$L_l \longleftarrow L_l - m_{lk} \cdot L_h$;

endfor

Se avansează pe linie:

$h=h+1$;

Se avansează pe coloană:

$k=k+1$;

Se crește rangul:

rang(A) = rang(A) + 1;

endwhile

<u>Exercițiu</u>. Să se afle rangul matricei A folosind GPP, unde

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Sol.</u>: Rezolvați-l voi!

$$A \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (matricea finală).}$$

Pentru a determina rang(A), fie numărăm liniile nenule (sunt 3), fie aplicăm definiția rangului
$\left(\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0\right)$. $\square$

<u>Descompunerea LU</u>

Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$. Considerăm sistemele:

$Ax^{(1)}=b^{(1)}, \ Ax^{(2)}=b^{(2)}, \ldots, \ Ax^{(m)}=b^{(m)}$. Dacă $b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}$

sunt cunoscuți (i.e. $b^{(2)}$ nu depinde $x^{(1)}$, $b^{(3)}$ nu depinde de $x^{(2)}$ etc.) putem rezolva sistemele de mai sus simultan, utilizând algoritmii lui Gauss, considerând matricea extinsă $\overline{A}=(A|b^{(1)}|b^{(2)}|\dots|b^{(m)})$. Dacă $b^{(2)}$ este o funcție de $x^{(1)}$, $b^{(3)}$ este o funcție de $x^{(2)}$ etc. atunci sistemele nu mai pot fi tratate simultan, urmând ca algoritmii lui Gauss să fie aplicați pentru fiecare sistem în parte, mărind considerabil numărul de iterații. În astfel de cazuri folosim metode de factorizare.

Def.: S.n. descompunere (sau factorizare) LU a matricei $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$, scrierea acestei matrice ca produs de două matrice, una inferior triunghiulară, notată L și alta superior triunghiulară, notată U (i.e. $A=LU$).

Teoremă. Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice care admite descompunerea LU, cu $L=(l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară, $l_{kk}=1 \ \forall k=\overline{1,n}$ și $U=(u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară. Atunci descompunerea este unică.

Obs.: După ce am determinat L și U sistemul $Ax=b$ se poate rezolva astfel:

$$Ax=b \iff LUx=b \iff \begin{cases} Ux=y \\ Ly=b \end{cases} \iff \begin{cases} x=\text{SubsDesc}(U,y) \\ y=\text{SubsAsc}(L,b). \end{cases}$$