Aplicații liniare

același corp

Def Fie V, W două K-spații vectoriale. $f: V \to W$ se numește aplicație liniară (morfism liniar) dacă

1. $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$ ← morfism de grupuri cu $+$
2. $f(\alpha v)=\alpha f(v)$, $\forall v \in V$, $\forall \alpha \in K$

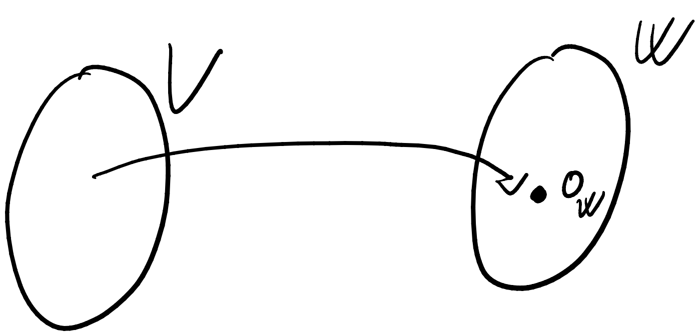
adunarea în V adunarea în W

$$1 \& 2 \iff \boxed{f(\underbrace{\alpha v_1}+\underbrace{\beta v_2})=\underbrace{\alpha f(v_1)}+\underbrace{\beta f(v_2)},\ \forall \alpha,\beta \in K\ \forall v_1,v_2 \in V}$$

înmulțirea externă în V înmulțirea externă în W

Exemple 1. $id: V \to V$, $id(v)=v$ este aplicație liniară

2. $\theta: V \to W$, $\theta(v)=0_W$, $\forall v \in V$ este apl liniară



3. $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K) \longrightarrow f_A: K^n \to K^m$ aplicația liniară asociată matricei

$f_A(x_1, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^m$ funcția de înmulțire cu A.

f_A este aplicație liniară:

Fie $\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{x}$, $\underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{y} \in K^n$, $\alpha, \beta \in K$.

$f_A(\alpha(x_1, \dots, x_n) + \beta(y_1, \dots, y_n)) = A \cdot \underbrace{(\alpha x + \beta y)}_{\text{pe coloană}} =$

distributivitate

$\stackrel{}{=} \alpha A x + \beta A y = \alpha f_A(x) + \beta f_A(y)$.

4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\boxed{f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, 3x + z)}$

Atunci f este liniară:

Obs că: $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{din 3}} f$ e liniară

5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 - 2y, xy + 1)$.

Obs Dacă $f : V \to W$ e liniară $\Rightarrow f(0_V) = 0_W$

(explicație $f(0_V) = f(\alpha \cdot 0_V) = \alpha f(0_V)$?

$\cancel{f(0_V)} = f(0_V + 0_V) = \cancel{f(0_V)} + f(0_V) \Rightarrow f(0_V) = 0_W$.)

Dar aici $f(0,0)=(0,1)$.

Th Orice $f: K^n \to K^m$ liniară este de forma f_A pentru o matrice $A \in M_{m,n}(K)$.

Dem Fie $x=(x_1, \dots x_n) \in K^n$

$$f(x) = f\Big(\underbrace{x_1(1,0,\dots 0) + x_2(0,1,\dots 0) + \dots + x_n(0,0,\dots 0,1)}_{\text{scrierea lui } x \text{ în baza canonică}}\Big)$$

$$(*)\quad = x_1 \boxed{f(\underbrace{(1,0,\dots 0)}_{\text{not } f(1,0,\dots 0)})} + x_2 \boxed{f(0,1,0,\dots 0)} + \dots + x_n \boxed{f(0,0,\dots 0,1)}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_n) \end{array}$$

D... ... $f: K^n \to K^m$ este A ($f = f_A$), Deci matricea lui $f: K^n \to K^m$ este A ($f = f_A$), unde coloanele lui A sunt $\underbrace{f(e_1), f(e_2) \dots f(e_n)}_{\text{imaginile, prin } f, \text{ ale elementelor bazei canonice.}}$

<u>Mai mult, de reținut</u>

(*) ne spune că f este perfect determinat de imaginile bazei canonice: $f(e_1), \dots f(e_n)$

Spre exemplu: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ liniară. Știu $f(1,0) = (3,5,7)$
$f(0,1) = (2,-3,0)$

$\Rightarrow f(3,-2) = ?$

$$f(3,-2) = 3f(1,0) + (-2)f(0,1) = (9,15,21) - (4,-6,0) = (5,21,21).$$

și $f = f_A$, unde $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Def</u> Dacă $f: K^n \to K^m$ liniară satisface $f = f_A \Rightarrow A$ s.n. <u>matricea lui f</u> în raport cu bazele canonice și se notează

$$\boxed{A = [f]} = M_f.$$

Prop Fie V, W K-sp. vectoriale și $B=\{b_1, \dots b_n\}$ bază în V.

1) Dacă $f: V \to W$ este aplicație liniară, f e perfect determinată de $f(b_1), f(b_2) \dots f(b_n)$.

2) Dacă $w_1, \dots w_n \in W \Rightarrow \exists$ o aplicație liniară $f: V \to W$ cu $f(b_1)=w_1$, $f(b_2)=w_2$ $\dots$ $f(b_n)=w_n$.

Obs 1) este adevărat și dacă $\{b_1, \dots b_n\}$ este doar SG.

2) este adevărat și dacă $\{b_1, \dots b_n\}$ este doar SLI

Prop a) $f: V_1 \to V_2$, $g: V_2 \to V_3$ aplicații liniare $\Rightarrow g \circ f: V_1 \to V_3$ e aplicație liniară

b) $f: V \to W$ e aplicație liniară bijectivă $\Rightarrow f^{-1}: W \to V$ este tot aplicație liniară.

Def 1) Dacă f este morfism liniar bijectiv ($\Leftrightarrow$ inversabil), f s.n. izomorfism liniar.

2) Dacă $\exists f: V \to W$ izomorfism liniar $\Rightarrow V$ și W s.n.

2) Dacă $\exists f: V \to W$ izomorfism liniar $\Rightarrow$ V și W s.n. spații liniare <u>izomorfe</u> și scriem $\boxed{V \simeq W}$

c) $K^p \xrightarrow{f} K^n \xrightarrow{g} K^m$ (compunerea $g \circ f$) $\Rightarrow f, g, g\circ f$ sunt înmulțiri cu matrice

$[f] \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$

$[g] \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$

$[g\circ f] \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$

Atunci $\boxed{[g\circ f] = [g] \overset{\text{înmulțire de matrice}}{\cdot} [f]}$

de aceea se înmulțesc așa matricele!

d) $f: K^n \to K^m$ liniară $\Rightarrow f$ are o matrice $[f]$

f izomorfism $\iff$ $[f]$ inversabilă (implicit $m=n$)

și, dacă da, $[f^{-1}] = [f]^{-1}$.

<u>Prop</u> (<u>aplicații liniare și subspații vectoriale</u>)

Fie $f: V \to W$ aplicație liniară. Atunci:

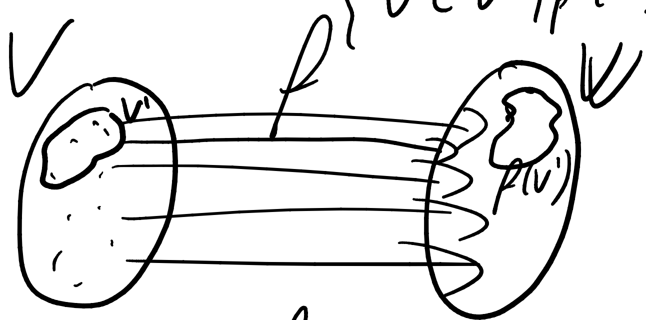
1) Dacă $V' \leq_K V$ (subsp. vect) $\Rightarrow f(V') \leq W$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|$

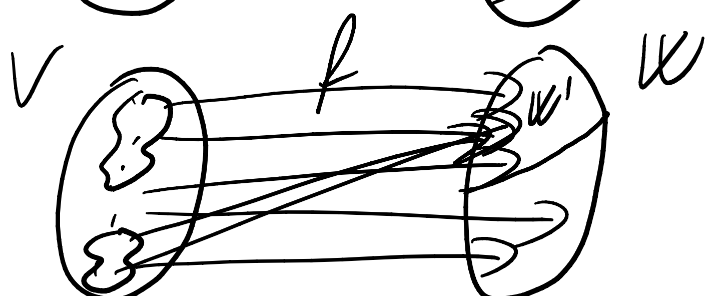
1) Dacă $V' \leq_K V$ (subsp. vect) $\Rightarrow f(V') \leq W$

$$f(V') = \{f(v') \mid v' \in V'\} \quad \underline{\text{imaginea (directă)}} \text{ a lui } V'$$

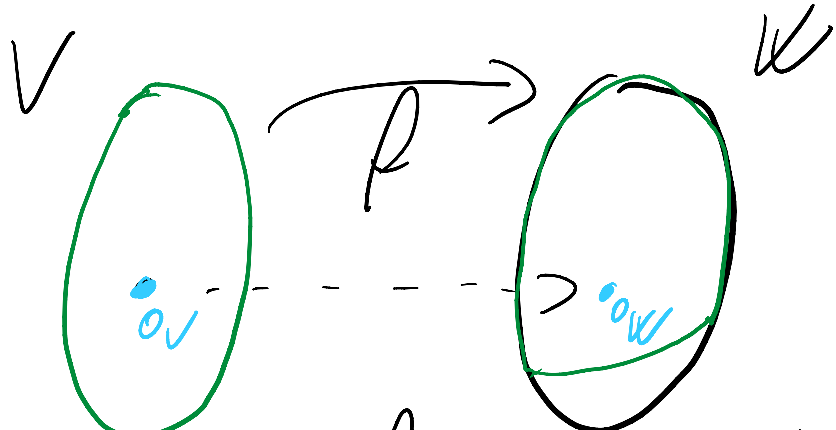
2) Dacă $W' \leq W \Rightarrow f^{-1}(W') \leq V$ $\underline{\text{imaginea inversă}}$ (preimaginea)

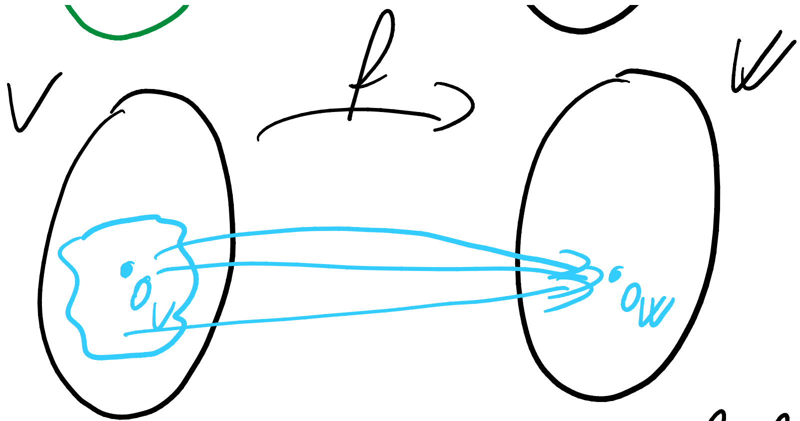
$$f^{-1}(W') = \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$





$\boxed{3)}$ În particular, $\boxed{f(V) = \operatorname{Im} f} \leq W$ imaginea lui f





şi $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_W\})$ s.n. nucleul lui f (kernel)

$$= \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

Exemplu/Ex. Fie $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,t) = (2x-3z+t,\ x+y+t,\ 2y-3z)$

a) Arătaţi că f e liniară şi scrieţi matricea lui f în raport cu bazele canonice

Dem. Obs. că
$$f(x,y,z,t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{not } A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Atunci
$$f(\alpha v + \beta w) = A(\alpha v + \beta w) = \alpha A v + \beta A w = \alpha f(v) + \beta f(w),$$
$\forall v, w \in \mathbb{R}^4$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ liniară şi $[f] = A$.

b) Găsiţi o bază în $\operatorname{Ker} f$.

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) = 0\}$$

$$= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x - 3z + t = 0 \\ x + y + t = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \right\}$$

= mulțimea soluțiilor unui sistem omogen.

Rezolvăm sistemul $\xrightarrow[\text{semnul}]{\text{vedeti}}$ o bază în $\operatorname{Ker} f$.

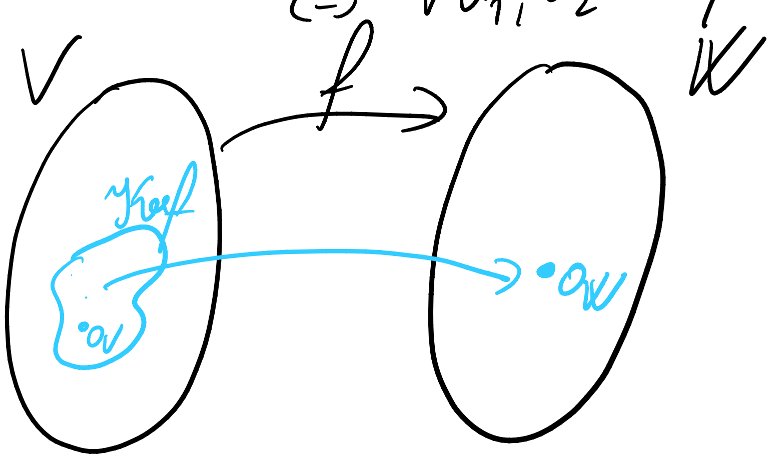
<u>Prop</u> Fie $f : V \to W$ o aplicație liniară.

Atunci • f e surjectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$. (asta înseamnă surjectivă)

• f e injectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

<u>Dem</u> Def: f injectivă: $\forall v_1 \neq v_2 \Rightarrow f(v_1) \neq f(v_2)$

$\Leftrightarrow \forall v_1, v_2$ a.î. $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$.



„$\Rightarrow$" dacă

„$\Leftarrow$" Fie $v_1, v_2 \in V$ a.î. $f(v_1) = f(v_2)$.

"$\Leftarrow$" Fie $v_1, v_2 \in V$ a.î. $f(v_1) = f(v_2)$.

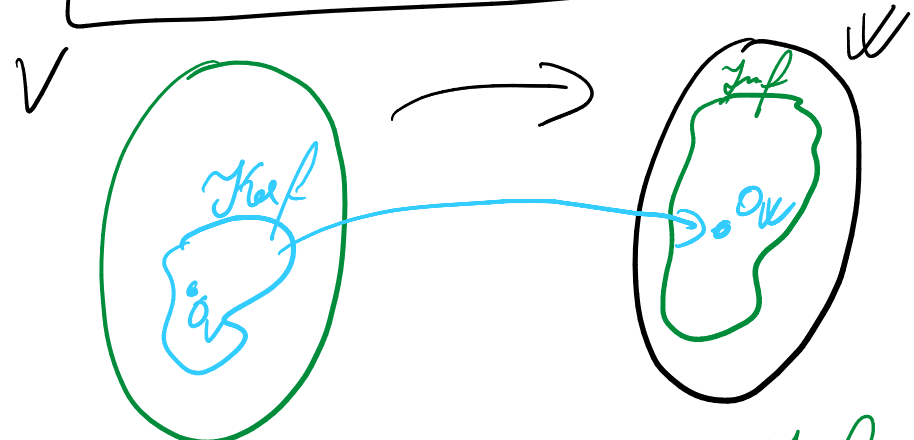
$\Leftrightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0_W \overset{f \text{ liniară}}{\Leftrightarrow} f(v_1 - v_2) = 0_W$

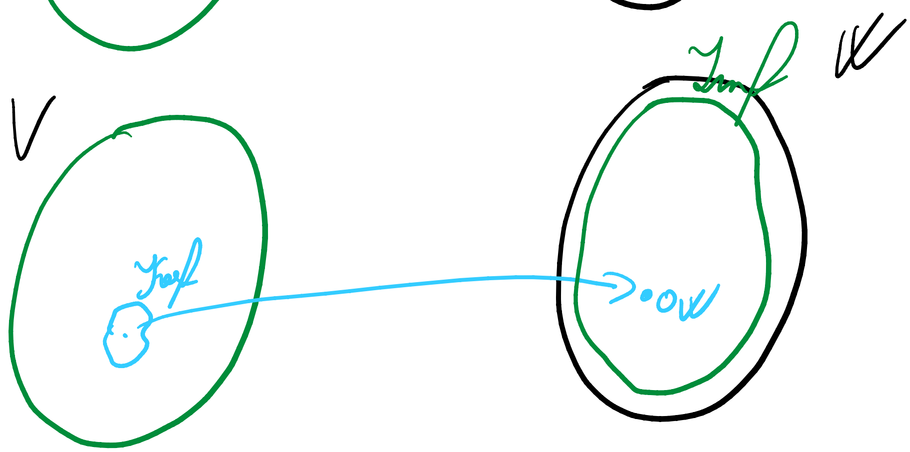
$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker} f = \{0_W\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_W \Rightarrow v_1 = v_2$

Teorema rang-defect

Fie $f: V \to W$ aplicație liniară. Atunci

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}$$

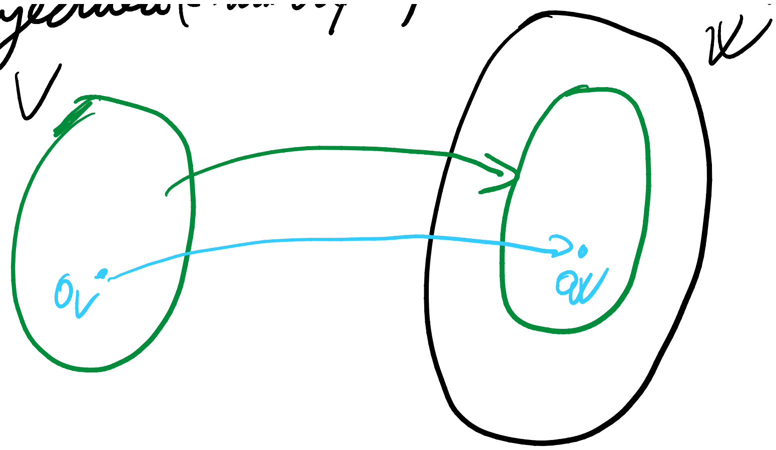




În particular

f e injectivă $(\Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0) \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

f e injectivă



Lemă Fie $f: V \to W$ liniară. Atunci:

- f injectivă $\iff$ imaginea unei/oricărei baze este $\boxed{SLI}$
- f surjectivă $\iff$ $\boxed{SG}$
- f izomorfism $\iff$ $\boxed{\text{bază}}$

Dem Ex!

Corolar Dacă $f: V \to W$ liniară, atunci:

- Dacă f injectivă $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$
- Dacă f surjectivă $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$
- Dacă f izomorfism $\Rightarrow \dim V = \dim W$.

Justificare Fie $\{b_1, \ldots, b_n\}$ bază în $V \Rightarrow \dim V = n$.

$\Downarrow$ f surjectivă

mulțime cu el. $\Rightarrow \{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ este SG în W

mulțime cu cel mult n elemente $\Rightarrow \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ este SG în W

$\Rightarrow n \geq \dim W$.

Revenim la <u>Teorema rang-defect</u>

$f: V \to W$ liniară $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$

<u>Exemplu</u> Fie $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4,\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4,\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 8x_4)$

$\dim \operatorname{Ker} f = ?$

Cât poate fi:
- ~~0~~ $\Rightarrow$ injectivă $\Rightarrow \underbrace{\dim \mathbb{R}^4}_{4} \leq \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3}$ ✗
- 1
- 2
- 3
- ~~4~~ $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^4$ evident nu

$$M_f = [f] = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; M_f \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Rezolv sistemul (de exemplu cu metoda eșalon redusă)

$$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ forma eșalon redusă

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rg = 2$, variabilele principale x_1, x_3

variabilele secundare $x_2 = \alpha$, $x_4 = \beta$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(2\alpha+\beta, \alpha, -2\beta, \beta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\alpha(2,1,0,0) + \beta(1,0,-2,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle (2,1,0,0), (1,0,-2,1) \rangle$$ are dim 2 = nr variabilelor secundare

M_f are rang 2 = nr variabilelor principale

Deci, pt un $f : K^n \to K^m$,

$$\underbrace{\text{nr. variabile principale}}_{\text{rangul lui } [f]} + \underbrace{\text{nr. variabile secundare}}_{\dim \operatorname{Ker} f} = n$$

Deci $\operatorname{rang}[f] + \dim \operatorname{Ker} f = n$.

Vom vedea mai târziu că $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang}[f]$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{} + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$$

$\underbrace{\dim}_{\text{sn defectul lui } f}$ $\quad$ rangul

---

<u>Teoremă</u> Fie V un K sp vectorial și $W \leq V$ un subspațiu. Atunci $\exists$ V' K-sp vect și $f: V \to V'$ liniară a.î. $W = \operatorname{Ker} f$.

<u>Adică</u> Orice subspațiu vectorial este Ker-ul unei aplicații liniare

<u>Dem</u> Fie $\{b_1, \dots b_\ell\}$ bază a lui W, pe care o completez la o bază a lui V: $\{\underbrace{b_1, \dots b_\ell}_{\text{bază pt } W}, b_{\ell+1}, \dots b_n\}$

Caut $f: V \to K^{n-\ell}$ a.î. f este 0 <u>exact</u> pe elementele lui W.

Caut V' a.î. $f(b_1) = 0_{V'}$
$f(b_2) = 0_{V'}$
$\vdots$
$f(b_\ell) = 0_{V'}$
$f(b_{\ell+1}), \dots f(b_n)$ să fie SLI

Fie $\{e_1, \dots\}$ baza canonică în $K^{n-\ell}$

Fie $\{e_1, \ldots, e_{n-l}\}$ baza canonică în K^{n-l}

$$W \begin{cases} b_1 \xmapsto{f} 0 \\ b_2 \longmapsto 0 \\ \vdots \\ b_l \longmapsto 0 \end{cases}$$

$$b_{l+1} \longmapsto e_1$$

$$b_{l+2} \longmapsto e_2$$

$$\vdots$$

$$b_n \longmapsto e_{n-l}$$

$\overset{!}{\Longrightarrow}$ f are $\operatorname{Ker} f = W$ și, de altfel, este surjectivă.

Îm particular

Prop $V = K^n \Rightarrow$ orice subspațiu al lui K^n este mulțimea soluțiilor unui sistem liniar omogen

Dem $W \le K^n \overset{\text{Th}}{\Longrightarrow} \exists f : K^n \to K^{n-l}$ a.î. $W = \operatorname{Ker} f$

$l = \dim W$

$= \{v \in K^n \mid Av = 0\}$

$A = [f]$

De exemplu / Exerciții

$W \le \mathbb{R}^4$, $W = \langle (1,2,3,-4), (1,0,0,1), (2,-3,1,4) \rangle$.

Vreau W = mulțimea soluțiilor unui sistem omogen.

Vrem W = mulțimea soluțiilor unui sistem omogen.

Obs $\dim W = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 3$

Idee Fie $w \in W \Rightarrow w = a(1,2,3,-4) + b(1,0,0,1) + c(2,-3,1,4)$, $w = (x,y,z,t)$
pt niște $a,b,c \in \mathbb{R}$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1\cdot a + 1\cdot b + 2\cdot c = x \\ 2\cdot a + 0\cdot b + (-3)\cdot c = y \\ 3\cdot a + 0\cdot b + 1\cdot c = z \\ -4a + 1\cdot b + 4\cdot c = t \end{cases} \quad \text{e compatibil}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=3} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & -3 & y \\ 3 & 0 & 1 & z \\ -4 & 1 & 4 & t \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & -3 & y \\ 3 & 0 & 1 & z \\ -4 & 1 & 4 & t \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 4 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} t = 0$$

$$\Longleftrightarrow 11x - 11y - 11z - 11t = 0 \Longleftrightarrow x - y - z - t = 0.$$

$$\Rightarrow \quad W = \langle (1,2,3,-4), (1,0,0,1), (2,-3,1,4) \rangle =$$
$$= \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z - t = 0 \}$$

<u>Obs</u> Am văzut dejа: $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rang}[f] = n}$ dacă $f: K^n \to K^m$.

Dacă este dat $W \leq K^n$, $\dim W = k$ $\xrightarrow{\text{Prop anterioară}}$

W poate fi dat ca un $\operatorname{Ker} f$ i.e. ca mulțimea soluțiilor unui sistem omogen

<u>Q</u> Minim câte ecuații are acest sistem?

$$W = \{ v \in K^n \mid [f] \cdot v = 0 \in K^m \}, \quad [f] \in M_{m,n}(K)$$

cât poate fi luat minim?

$$\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{= k} + \boxed{\operatorname{rang}[f]} = n$$

nr de ecuații neredundante din sistem

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow W$ poate fi dat ca soluțiile unui sistem cu $n-k$ ecuații

↑

Optim, nu poate fi mai mic.

Ex 2 $W_2 = \langle (1,2,2,-5), (3,0,-5,2) \rangle \leq \mathbb{R}^4$

Vreau W_2 ca mulțime de soluții ale unui sistem omogen

$\dim W_2 = 2 \Rightarrow$ caut $4 - 2 = 2$ ecuații

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Fie $w = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. $w \in W_2 \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ a.î.

$a(1,2,2,-5) + b(3,0,-5,2) = (x,y,z,t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} a + 3b = x \\ 2a = y \\ 2a - 5b = z \\ -5a + 2b = t \end{cases}$ e compatibil

$$\Leftrightarrow \underbrace{rg\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}}_{2} = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 0 & y \\ 2 & -5 & z \\ -5 & 2 & t \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 0 & y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{și} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 0 & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{!}{\Longleftrightarrow} \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 0 & y \\ 2 & -5 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{și} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 2 & 0 & y \\ -5 & 2 & t \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -10x + 11y - 6z = 0 \quad \text{și} \quad 4x - 17y - 6t = 0$$

$$\Rightarrow W_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -10x + 11y - 6z = 0 \\ 4x - 17y - 6t = 0 \end{cases} \right\}$$