Curs 6

Factorizarea (descompunerea) LU (continuare)

Teoremă. Matricele L și U se obțin prin metodele lui Gauss și anume:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ și } U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

unde $l_{hk}=\dfrac{a_{hk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ $\forall k=\overline{1,n-1}$, $\forall h=\overline{k+1,n}$,

$$u_{kj}=a_{kj}^{(k)} \quad \forall k=\overline{1,n-1}, \forall j=\overline{k,n},$$

$$u_{nn}=a_{nn}^{(n-1)}.$$

Notăm că $a_{kj}^{(k)}$ reprezintă componenta cu indici (k,j) a matricei A la etapa k, conform algoritmului lui Gauss.

Obs.: Aplicând metoda lui Gauss cu sau fără pivotare, liniile matricii A vor fi permutate. Prin acest proces de schimbare a liniilor se obțin matricele L și U a.î. $A' = LU$, unde A' este matricea A cu liniile permutate.

Fie $w = (w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$ vectorul care conține pozițiile inițiale ale liniilor matricii A (i.e. $w_1 = 1, w_2 = 2, \dots, w_n = n$). În procesul de schimbare a liniilor se vor interschimba și elementele vectorului w. Mai exact, atunci când interschimbăm liniile $L_p \leftrightarrow L_k$, vom interschimba și elementele $w_p \leftrightarrow w_k$.

Inițializăm $L = I_n$. În urma interschimbării de linii, matricea L va fi afectată și anume se vor interschimba subliniile situate sub diagonala principală.

Vectorul b se modifică după cum urmează:

$$b'_k = b_{w_k} \quad \forall\, k = \overline{1,n}.$$

Matricea U este ultima matrice superior triunghiulară obținută.
În final rezolvăm două sisteme triunghiulare:

$$\begin{cases} Ly = b' \\ Ux = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \text{SubsAsc}(L, b') \\ x = \text{SubsDesc}(U, y). \end{cases}$$

Algoritm (Factorizarea LU utilizând GPP)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$;

Date de ieșire: $L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $w = (w_i)_{i=\overline{1,n}}$;

Pasul 1. Inițializăm $L = I_n$, $w = (1, 2, \dots, n)^T$;

Pasul 2. for $k = 1 : n-1$ do

Se determină primul indice p, $k \le p \le n$ a.î. $|a_{pk}| = \max\limits_{i=\overline{k,n}} |a_{ik}|$;

if $a_{pk} = 0$ then

OUTPUT („A nu admite factorizare LU");

STOP

endif

if $p \ne k$ then

$L_p \longleftrightarrow L_k$ (interschimbă liniile L_p și L_k în A);

$w_p \longleftrightarrow w_k$;

if $k > 1$ then

$l_{p:1,k-1} \leftrightarrow l_{k:1,k-1}$ (interschimbă sub-
|| i.e. linii în L);

$(l_{p1} \leftrightarrow l_{k1},\ l_{p2} \leftrightarrow l_{k2}, \dots, l_{p\,k-1} \leftrightarrow l_{k\,k-1})$

end if

end if

for $h = k+1 : n$ do

$l_{hk} = \dfrac{a_{hk}}{a_{kk}}$;

$L_h \longleftarrow L_h - l_{hk} L_k$;

end for

end for

Pasul 3: if $a_{nn} = 0$ then

OUTPUT(„A nu admite factorizare LU");

STOP

endif

Pasul 4: U = ultima matrice echivalentă cu A (superior triunghiulară).

Factorizarea (descompunerea Cholesky)

Fie $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$.

Def.: Numim descompunere (sau factorizare) Cholesky a matricii A scrierea $A = LL^T$, unde $L \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice inferior triunghiulară.

Def.: Fie $u=(u_1,\dots,u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ și $v=(v_1,\dots,v_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Definim produsul scalar dintre u și v ca fiind

$$\langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i .$$

Def.: 1. Spunem că A este simetrică dacă $A = A^T$.

2. Spunem că A este semipozitiv definită dacă $\forall v \in \mathbb{R}^n$, avem $\langle Av, v \rangle \geq 0$.

3. Spunem că A este pozitiv definită dacă $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underset{(0,\dots,0)}{0}\}$, avem $\langle Av, v \rangle > 0$.

Teoremă (Criteriul lui Sylvester). Dacă A este simetrică, atunci A este pozitiv definită dacă și numai dacă toți minorii principali ai lui A sunt strict pozitivi (i.e. $\det(A_k) > 0 \ \forall k=\overline{1,n}$, unde $A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$).

<u>Propoziție</u>. Dacă A este simetrică și pozitiv definită, atunci A admite factorizare Cholesky.

<u>Propoziție</u>. Dacă A este simetrică și pozitiv definită și $L=(l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice inferior triunghiulară a.î. $A = LL^T$ și $l_{kk} > 0 \ \forall k=\overline{1,n}$, atunci factorizarea Cholesky este unică.

<u>Calculul matricei L</u>

<u>Metoda I</u>

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & & & & & & \\ \cdots & \ddots & & & & O & \\ l_{k1} & \cdots & l_{kk} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & & & \\ l_{i1} & \cdots & l_{ik} & \cdots & l_{ii} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nk} & \cdots & l_{ni} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{k1} & \cdots & l_{i1} & \cdots & l_{n1} \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & l_{kk} & \cdots & l_{ik} & \cdots & l_{nk} \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & O & & & l_{ii} & \cdots & l_{ni} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & l_{nn} \end{pmatrix}^{L^T}, \quad k < i.$$

Se determină l_{11}.

$$a_{11} = (l_{11}\ 0 \ldots 0)\begin{pmatrix} l_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = l_{11}^2 \underset{l_{11}>0}{\Longrightarrow} l_{11} = \sqrt{a_{11}}.$$

Determinăm restul elementelor de pe coloana întâi, i.e. determinăm l_{i1} $\forall i = \overline{2,n}$.

$$a_{i1} = (l_{i1} \ldots l_{ik} \ldots l_{ii}\ 0 \ldots 0)\begin{pmatrix} l_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= l_{i1} \cdot l_{11} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}} = \frac{a_{i1}}{\sqrt{a_{11}}}.$$

Presupunem că am determinat toate elementele de pe primele k-1 coloane din matricea L, i.e. am determinat $l_{i1}, \forall i=\overline{1,n}$, $l_{i2}\ \forall i=\overline{2,n}$, $l_{i3}\ \forall i=\overline{3,n}$, ..., $l_{ik-1} \forall \overline{k-1,n}$.

Determinăm l_{kk}.

$$a_{kk} = (l_{k1} \dots l_{kk}\ 0 \dots 0) \cdot \begin{pmatrix} l_{k1} \\ \vdots \\ l_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = l_{k1}^2 + \dots + l_{kk}^2 =$$

$$= \underbrace{l_{k1}^2 + \dots + l_{k\,k-1}^2}_{\text{se cunoaște}} + l_{kk}^2 \Rightarrow l_{kk}^2 = a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 \underset{l_{kk}>0}{\Rightarrow}$$

$$\underset{l_{kk}>0}{\Rightarrow} l_{kk} = \sqrt{a_{k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}.$$

Determinăm elementele de pe coloana k situate sub l_{kk}, i.e. determinăm $l_{ik}\ \forall i=\overline{k+1,n}$.

$$a_{ik} = (l_{i1} \dots l_{ik} \dots l_{ii}\ 0 \dots 0) \begin{pmatrix} l_{k1} \\ \vdots \\ l_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$= l_{i1} l_{k1} + \dots + l_{ik} l_{kk} = l_{i1} l_{k1} + \dots + l_{ik-1} l_{kk-1} +$
$+ l_{ik} l_{kk} \Rightarrow l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj} \right).$

<u>Algoritm</u>

<u>Date de intrare</u>: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$;

<u>Date de ieșire</u>: $L = (l_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$;

<u>Pasul 1</u>: $\alpha = a_{11}$;

if $\alpha \le 0$ then

OUTPUT („A nu este pozitiv definită");

STOP

endif

$l_{11} = \sqrt{\alpha}$;

for $i = 2:n$ do

$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$;

endfor

<u>Pasul 2</u>: for $k = 2:n$ do

$\alpha = a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2$;

if $\alpha \leq 0$ then

OUTPUT („A nu este pozitiv definită");

STOP

endif

$l_{kk} = \sqrt{\alpha}$;

for $i = k+1 : n$ do

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}\, l_{kj}\right);$$

endfor

endfor

Metoda II

Folosim același procedeu, dar lucrăm cu blocuri de matrice. Partiționăm A și L după cum urmează.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \overbrace{a_{12} \ \dots \ a_{1n}}^{A_{21}^T} \\ \hline \left.\begin{matrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}\right\} A_{21} & \begin{matrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \underbrace{a_{n2}}_{} & \underbrace{\dots}_{A_{22}} & \underbrace{a_{nn}}_{} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline \left.\begin{matrix} l_{21} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{matrix}\right\} L_{21} & \underbrace{\begin{matrix} l_{22} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{matrix}}_{L_{22}} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} l_{11} & \overbrace{l_{21} \ \dots \ l_{n1}}^{L_{21}^T} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} l_{22} & \dots & l_{n2} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & l_{nn} \end{matrix}}_{L_{22}^T} \end{pmatrix}.$$

Deci $\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & A_{21}^T \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} l_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} l_{11} & L_{21}^T \\ \hline 0 & L_{22}^T \end{array}\right)$.

$$a_{11} = l_{11}^2 \underset{l_{11}>0}{\Longrightarrow} l_{11} = \sqrt{a_{11}}.$$

$$A_{21} = L_{21} \cdot l_{11} + L_{22} \cdot 0 \Rightarrow L_{21} = \frac{1}{l_{11}} A_{21}.$$

Am determinat prima coloană a matricii L.

$$A_{22} = L_{21} L_{21}^T + L_{22} L_{22}^T \Rightarrow \underbrace{A_{22} - L_{21} L_{21}^T}_{\overset{\text{not.}}{=} S \in M_{n-1}(\mathbb{R})} = \underbrace{L_{22}}_{\in M_{n-1}(\mathbb{R})} L_{22}^T.$$

S s.n. complementul Schur.

Se poate arăta că S este simetrică și pozitiv definită.

L_{22} este o matrice inferior triunghiulară.

Se aplică procedeul de mai sus (pentru S) pentru a determina prima coloană a matricii L_{22}, care, de fapt, reprezintă a doua coloană a matricii L.

etc.