Curs 8

Interpolare Lagrange

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$, i.e. $a=x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}=b$.

Fie $\mathcal{P}_n=\{P_n(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_{n+1}x^n \mid a_i\in\mathbb{R}\ \forall i=\overline{1,n+1}\}$.

(mulțimea polinoamelor de grad cel mult n)

Def.: Interpolarea Lagrange constă în determinarea unui polinom $P_n\in\mathcal{P}_n$ numit polinom de interpolare Lagrange asociat funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ a.î. $P_n(x_i)=f(x_i)\ \forall i=\overline{1,n+1}$.

Def.: Valorile x_i, $i\in\overline{1,n+1}$ s.n. noduri sau puncte de interpolare.

1. Metoda directă de determinare a polinomului de interpolare Lagrange P_n

Notăm $f(x_i)=y_i\ \forall i=\overline{1,n+1}$.

Fie $P_n(x)=a_1+a_2x+\ldots+a_{n+1}x^n$ un polinom de interpolare Lagrange asociat funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$.

Avem $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i \quad \forall i = \overline{1, n+1}$.

Obținem următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_1 + \dots + a_{n+1} x_1^n = y_1 \\ a_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{n+1} x_2^n = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 + a_2 x_{n+1} + \dots + a_{n+1} x_{n+1}^n = y_{n+1} \end{cases} \qquad (1)$$

($n+1$ ecuații, $n+1$ necunoscute $\rightarrow a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$).

Sub formă matriceală sistemul (1) devine:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_i - x_j) \neq 0, \text{ deoarece } x_i \neq x_j \ \forall\, 1 \le i < j \le n+1.$$

Deoarece $\det(A) \neq 0$ rezultă că sistemul (1) are soluție unică, i.e. polinomul de interpolare Lagrange este unic determinat.

Se rezolvă sistemul (1) și se scrie polinomul de interpolare Lagrange $P_n(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_{n+1} x^n$ ($a_1, \dots, a_{n+1}$ determinați mai sus).

<u>Exercițiu</u>. Să se determine, prin metoda directă, polinomul de interpolare Lagrange P_2 asociat funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $\{\underset{x_1}{-1}; \underset{x_2}{0}; \underset{x_3}{1}\}$.

<u>Sol.</u>: $y_1 = f(x_1) = e^{-2}$.

$y_2 = f(x_2) = e^0 = 1$.

$y_3 = f(x_3) = e^2$.

Fie $P_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$, $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \\ P_2(x_3) = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + a_2 \cdot (-1) + a_3 (-1)^2 = e^{-2} \\ a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0^2 = 1 \\ a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1^2 = e^2 \end{cases} \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = e^{-2} \\ a_1 = 1 \\ a_1 + a_2 + a_3 = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_2 + a_3 = e^{-2} - 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 + a_3 = e^2 - 1 \end{cases} \underset{(1)+(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{(1)+(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -a_2 + a_3 = e^{-2} - 1 \\ a_1 = 1 \\ 2a_3 = e^2 + e^{-2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} - (e^{-2} - 1) \\ a_1 = 1 \\ a_3 = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \\ a_3 = \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} \end{cases}.$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2} x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} x^2. \quad \square$$

2. <u>Metoda Lagrange de determinare a polinomului de interpolare Lagrange P_n</u>

Considerăm următoarea reprezentare:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x) f(x_k) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x) y_k, \text{ unde}$$

$$f(x_k) = y_k \ \forall k = \overline{1, n+1}$$

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n+1})}{(x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{n+1})} \ \forall$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, sau, compact, $L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Def.: Funcțiile $L_{n,k}$, $k=\overline{1,n+1}$ s.n. funcții de bază pentru interpolarea Lagrange.

Exercițiu. Determinați, folosind metoda Lagrange, polinomul de interpolare Lagrange P_2 asociat funcției $f(x)=e^{2x}$ relativ la diviziunea $\{\underset{x_1}{\underset{\parallel}{-1}}, \underset{x_2}{\underset{\parallel}{0}}, \underset{x_3}{\underset{\parallel}{1}}\}$.

Sol.: $P_2(x) = \sum_{k=1}^{3} L_{2,k}(x) f(x_k) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{3} L_{2,k}(x)\, y_k$.

$f(x_k) = y_k \;\; \forall\, k=\overline{1,3}$

$y_1 = e^{-2}$.

$y_2 = 1$.

$y_3 = e^2$.

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} =$$

$= \frac{1}{2} x(x-1) = \frac{1}{2}(x^2 - x).$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{-1}\right) \cdot (x+1)(x-1) = (-1)(x^2-1) = 1 - x^2.$$

$$L_{2,3}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} =$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)x = \frac{1}{2}(x^2+x).$$

$$P_2(x) = L_{2,1}(x) y_1 + L_{2,2}(x) y_2 + L_{2,3}(x) y_3 = \frac{1}{2}(x^2 - x) \cdot e^{-2} +$$

$$+ (1-x^2) \cdot 1 + \frac{1}{2}(x^2+x) \cdot e^2 = 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2} x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} x^2.$$

$\square$

3. Metoda Newton de determinare a polinomului de interpolare Lagrange P_n

Considerăm următoarea reprezentare:

$$P_n(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + c_{n+1}(x-x_1) \cdot \ldots \cdot (x-x_n) =$$

$$= c_1 + \sum_{i=2}^{n+1} c_i \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j).$$

Condițiile $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i \ \forall i = \overline{1, n+1}$ ne furnizează următorul sistem de ecuații liniare pentru determinarea coeficienților $c_i, i = \overline{1, n+1}$.

$$\begin{cases} P_n(x_1) = y_1 \\ P_n(x_2) = y_2 \\ \text{-------} \\ P_n(x_{n+1}) = y_{n+1} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} c_1 & = y_1 \\ c_1 + c_2(x_2 - x_1) & = y_2 \\ \text{-------------------} & \\ c_1 + c_2(x_{n+1} - x_1) + \ldots + c_{n+1}(x_{n+1} - x_1) \ldots (x_{n+1} - x_n) & = y_{n+1} \end{cases} \quad (2)$$

Necunoscute: $c_1, \ldots, c_{n+1}$.

Sistemul (2) este sistem inferior triunghiular și se rezolvă prin metoda substituției ascendente.

Elementele matricei asociate sistemului (2) sunt:

$a_{i1} = 1 \ \forall i = \overline{1, n+1}$, $a_{ij} = \prod_{k=1}^{j-1} (x_i - x_k) \ \forall i = \overline{2, n+1}, \forall j = \overline{2, i}$.

<u>Exercițiu</u>. Determinați, prin metoda Newton, polinomul de interpolare Lagrange P_2 asociat funcției $f(x)=e^{2x}$ relativ la diviziunea $\{\underset{x_1}{\underset{\|}{-1}};\underset{x_2}{\underset{\|}{0}};\underset{x_3}{\underset{\|}{1}}\}$.

<u>Sol.</u>: $y_1 = e^{-2}$,

$y_2 = 1$,

$y_3 = e^2$.

Considerăm $P_2(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2)$.

$$\begin{cases} P_2(x_1)=y_1 \\ P_2(x_2)=y_2 \\ P_2(x_3)=y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = e^{-2} \\ c_1 + c_2(0+1) = 1 \\ c_1 + c_2(1+1) + c_3(1+1)(1-0) = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = e^{-2} \\ c_2 = 1 - e^{-2} \\ e^{-2} + 2(1-e^{-2}) + 2c_3 = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = e^{-2} \\ c_2 = 1-e^{-2} \\ c_3 = \dfrac{e^2+e^{-2}-2}{2} \end{cases}.$$

$$P_2(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) =$$

$$= e^{-2} + (1-e^{-2})(x+1) + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}(x+1)(x-0) =$$

$$= (\cancel{e^{-2}} + 1 - \cancel{e^{-2}}) + {}^{2)}\left(1-e^{-2} + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}\right)x + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}x^2 =$$

$$= 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2} x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} x^2. \quad \square$$

4. Metoda Newton cu diferențe divizate de determinare a polinomului de interpolare Lagrange P_n

Def.: 1. S.n. diferență divizată (DD) de ordinul 0 a funcției f în raport cu nodul x_1: $f[x_1] = f(x_1)$.

2. S.n. DD de ordinul 1 a funcției f în raport cu nodurile x_1 și x_2: $f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

3. S.n. DD de ordinul 2 a funcției f în raport cu nodurile x_1, x_2 și x_3: $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$.

4. S.n. DD de ordinul n a funcției f în raport cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$:

$$f[x_1, \ldots, x_{n+1}] = \frac{f[x_2, \ldots, x_{n+1}] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_{n+1} - x_n}.$$

Teoremă. Polinomul de interpolare Lagrange P_n asociat funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ este: $P_n(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) +$

$$+ f[x_1, x_2, x_3](x-x_1)(x-x_2) + \ldots +$$

$$+ f[x_1, \ldots, x_{n+1}](x-x_1) \cdot \ldots \cdot (x-x_n) =$$

$$= f[x_1] + \sum_{i=2}^{n+1} f[x_1, \ldots, x_i] \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Construim următorul tabel cu DD.

x_i	DD de ordin 0	DD de ordin 1	DD de ordin 2	...
x_1	$f[x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	
$\vdots$				

Fie Q matricea care are următoarele elemente:

$Q_{i1} = f[x_i] \ \forall i = \overline{1, n+1}$.

$Q_{ij} = f[x_{i-j+1}, \ldots, x_i] \ \forall j = \overline{2, n+1}, \forall i = \overline{j, n+1}$.

Observăm că elementele matricei Q sunt chiar elementele din tabelul cu DD.

Avem $Q_{ij} = \dfrac{Q_{i\,j-1} - Q_{i-1\,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}} \ \forall j = \overline{2, n+1}, \forall i = \overline{j, n+1}$

Exercițiu. Determinați, folosind metoda Newton cu DD, polinomul de interpolare Lagrange P_2 asociat funcției $f(x)=e^{2x}$ relativ la diviziunea $\{\underset{x_1}{-1}; \underset{x_2}{0}; \underset{x_3}{1}\}$.

Sol.:

x_i	DD de ordin 0	DD de ordin 1	DD de ordin 2
x_1	$f[x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1,x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$

$$P_2(x)=f[x_1]+f[x_1,x_2](x-x_1)+f[x_1,x_2,x_3](x-x_1)(x-x_2).$$

$$f[x_1]=f(x_1)=f(-1)=e^{-2}.$$

$$f[x_2]=f(x_2)=f(0)=1.$$

$$f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1-e^{-2}}{0+1}=1-e^{-2}.$$

$$f[x_3]=f(x_3)=f(1)=e^{2}.$$

$$f[x_2,x_3]=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{e^2-1}{1-0}=e^2-1.$$

$$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}=\frac{e^2-1-1+e^{-2}}{1+1}=$$

$$= \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}.$$

$$P_2(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2) =$$

$$= e^{-2} + (1 - e^{-2})(x + 1) + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}(x + 1)(x - 0) =$$

$$= (e^{-2} + 1 - e^{-2}) + \left(1 - e^{-2} + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}\right)x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}x^2 =$$

$$= 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}x^2. \quad \square$$