I. Continuitatea, derivabilitatea funcțiilor. Exerciții

1. Studiați continuitatea și derivabilitatea următoarelor funcții:

   (a)
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (b)
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

   (c)
$$f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{2x}, \text{ dacă } x > 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (d)
$$f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin(x+1) - \frac{2sinx}{x}, \text{ dacă } x > 0 \\ -2 + \sin 1, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (e)
$$f\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x^2}) + \frac{\ln(1-x)}{2x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\pi-1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (f)
$$f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$$

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Studiați dacă există funcții bijective $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ și care au proprietatea lui Darboux.

3. Fie $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, f, g continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b). Știind că $f(a) = f(b) = 0$, arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) + f(c) \cdot g'(c) = 0$.

4. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. Demonstrați că $f(x+1) - f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.