Curs 10

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Notăm $I_j=[x_j,x_{j+1})$ $\forall j=\overline{1,n-1}$ $(\overline{I}_j=[x_j,x_{j+1}]$ $\forall j=\overline{1,n-1})$ şi $I_n=[x_n,x_{n+1}]$ $(=\overline{I}_n)$.

Def.: O funcţie $S:[a,b]\to\mathbb{R}$ s.n. funcţie spline cubică pentru f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ dacă:

a) S este cubică pe porţiuni:

$$S(x)=S_j(x)\ \forall x\in I_j,\ \forall j=\overline{1,n},\ \text{unde } S_j:\overline{I}_j\to\mathbb{R},$$

$$S_j(x)=a_j+b_j(x-x_j)+c_j(x-x_j)^2+d_j(x-x_j)^3\quad \forall j=\overline{1,n}.$$

b) S interpolează f în nodurile x_j $\forall j=\overline{1,n+1}$:

$$S(x_j)=f(x_j)\ \forall j=\overline{1,n+1}.$$

c) S este continuă în nodurile interioare x_{j+1} $\forall j=\overline{1,n-1}$:

$$S_j(x_{j+1})=S_{j+1}(x_{j+1})\ \forall j=\overline{1,n-1}.$$

d) S' este continuă în nodurile interioare x_{j+1} $\forall j=\overline{1,n-1}$:

$$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}) \ \forall j=\overline{1,n-1}.$$

e) S'' este continuă în nodurile interioare x_{j+1} $\forall j=\overline{1,n-1}$:

$$S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1}) \ \forall j=\overline{1,n-1}.$$

f) Unul dintre următoarele seturi de condiții este îndeplinit:

f_1) $S'(x_1) = f'(x_1)$ și $S'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$.

f_2) $S''(x_1) = f''(x_1)$ și $S''(x_{n+1}) = f''(x_{n+1})$.

În continuare determinăm a_j, b_j, c_j, d_j $\forall j=\overline{1,n}$ folosind f_1).

Conform b) avem $S(x_j) = f(x_j) \ \forall j=\overline{1,n+1}$.

$x_j \in I_j \ \forall j=\overline{1,n} \Rightarrow S(x_j) = S_j(x_j) = a_j \ \forall j=\overline{1,n}$.

Așadar $a_j = f(x_j) \ \forall j=\overline{1,n}$.

$x_{n+1} \in I_n \Rightarrow S(x_{n+1}) = S_n(x_{n+1}) = a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + $
$+ c_n(x_{n+1} - x_n)^2 + d_n(x_{n+1} - x_n)^3.$

Așadar $a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + c_n(x_{n+1} - x_n)^2 + d_n(x_{n+1} - x_n)^3 =$
$= f(x_{n+1})$ (1)

Conform c) avem $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})$ $\forall j = \overline{1, n-1}$.

Deci $a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 =$
$= a_{j+1} = f(x_{j+1})$ $\forall j = \overline{1, n-1}$ (2)

Relațiile (1) și (2) pot fi cuplate și rescrise într-o singură relație:

$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 =$
$= f(x_{j+1})$ $\forall j = \overline{1, n}$.

Notăm $h_j = x_{j+1} - x_j$ $\forall j = \overline{1, n}$.

Avem $a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = f(x_{j+1})$ $\forall j = \overline{1, n}$.

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2 \quad \forall x \in I_j, \forall j = \overline{1,n}.$$

Conform d) avem $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})$ $\forall j = \overline{1,n-1}$.

Deci $b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1}$ $\forall j = \overline{1,n-1}$ (3)

$$S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j) \quad \forall x \in I_j, \forall j = \overline{1,n}.$$

Conform e) avem $S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})$ $\forall j = \overline{1,n-1}$.

Deci $2c_j + 6d_j h_j = 2c_{j+1}$ $\forall j = \overline{1,n-1}$.

Conform f_1) avem $S'(x_1) = f'(x_1)$ și $S'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$.

$$S'(x_1) = S_1'(x_1) = b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) + 3d_1(x_1 - x_1)^2 = b_1.$$

Deci $b_1 = f'(x_1)$.

$$S'(x_{n+1}) = S_n'(x_{n+1}) = b_n + 2c_n(x_{n+1} - x_n) +$$
$$+ 3d_n(x_{n+1} - x_n)^2 = b_n + 2c_n h_n + 3d_n h_n^2.$$

Deci $b_n + 2c_n h_n + 3d_n h_n^2 = f'(x_{n+1})$ (4)

Dacă notăm $b_{n+1}=f'(x_{n+1})$ relațiile (3) și (4) pot fi cuplate și rescrise într-o singură relație:

$$b_j+2c_jh_j+3d_jh_j^2=b_{j+1}\ \forall j=\overline{1,n}.$$

Am obținut:

$$(5)\begin{cases} a_j=f(x_j)\ \forall j=\overline{1,n} \\ \overset{=f(x_j)}{a_j}+b_jh_j+c_jh_j^2+d_jh_j^3=f(x_{j+1})\ \forall j=\overline{1,n} \\ b_1=f'(x_1) \\ b_{n+1}=f'(x_{n+1}) \\ b_j+2c_jh_j+3d_jh_j^2=b_{j+1}\ \forall j=\overline{1,n} \\ 2c_{j-1}+6d_{j-1}h_{j-1}=2c_j\ \forall j=\overline{2,n}. \end{cases}$$

Conform $(5)_2$ și $(5)_5$ avem:

$$\begin{cases} b_jh_j+c_jh_j^2+d_jh_j^3=f(x_{j+1})-f(x_j) \\ 2c_jh_j+3d_jh_j^2=b_{j+1}-b_j \end{cases}\iff$$

$$\Leftrightarrow (6) \begin{cases} c_j h_j + d_j h_j^2 = \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_j} - b_j \\ 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1} - b_j . \end{cases}$$

Înmulțim $(6)_1$ cu 2 și apoi scădem $(6)_2$.

Obținem: $-d_j h_j^2 = \dfrac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - 2b_j - b_{j+1} + b_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow d_j h_j^2 = -\frac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) + b_{j+1} + b_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_j = -\frac{2}{h_j^3}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) + \frac{b_{j+1} + b_j}{h_j^2} \quad \forall j = \overline{1,n} \quad (7)$$

Înmulțim $(6)_1$ cu 3 și scădem $(6)_2$.

Obținem: $c_j h_j = \dfrac{3}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - 3b_j - b_{j+1} + b_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_j h_j = \frac{3}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - b_{j+1} - 2b_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_j = \frac{3}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - \frac{b_{j+1} + 2b_j}{h_j} \quad \forall j = \overline{1,n} \quad (8)$$

Introducem (7) și (8) în $(5)_6$ și obținem:

$$\frac{6}{h_{j-1}^2}\left(f(x_j)-f(x_{j-1})\right)-\frac{2(b_j+2b_{j-1})}{h_{j-1}}-$$

$$-\frac{12}{h_{j-1}^2}\left(f(x_j)-f(x_{j-1})\right)+\frac{6(b_j+b_{j-1})}{h_{j-1}}=\frac{6}{h_j^2}\left(f(x_{j+1})-f(x_j)\right)-$$

$$-\frac{2(b_{j+1}+2b_j)}{h_j}\quad\Big|:2\quad\Rightarrow-\frac{3}{h_{j-1}^2}\left(f(x_j)-f(x_{j-1})\right)+$$

$$+\frac{2}{h_{j-1}}b_j+\frac{1}{h_{j-1}}b_{j-1}=\frac{3}{h_j^2}\left(f(x_{j+1})-f(x_j)\right)-\frac{1}{h_j}b_{j+1}-$$

$$-\frac{2}{h_j}b_j\Rightarrow\frac{1}{h_{j-1}}b_{j-1}+\left(\frac{2}{h_{j-1}}+\frac{2}{h_j}\right)b_j+\frac{1}{h_j}b_{j+1}=$$

$$=-\frac{3}{h_{j-1}^2}f(x_{j-1})+\left(\frac{3}{h_{j-1}^2}-\frac{3}{h_j^2}\right)f(x_j)+\frac{3}{h_j^2}f(x_{j+1})\ \forall j=\overline{2,n}.$$

Putem scrie:

$$\begin{cases} a_j = f(x_j) \quad \forall j=\overline{1,n} \\ b_1 = f'(x_1) \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ \frac{1}{h_{j-1}} b_{j-1} + \left(\frac{2}{h_{j-1}} + \frac{2}{h_j}\right) b_j + \frac{1}{h_j} b_{j+1} = \\ = -\frac{3}{h_{j-1}^2} f(x_{j-1}) + \left(\frac{3}{h_{j-1}^2} - \frac{3}{h_j^2}\right) f(x_j) + \frac{3}{h_j^2} f(x_{j+1}) \quad \forall j=\overline{2,n} \\ c_j = \frac{3}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - \frac{b_{j+1}+2b_j}{h_j} \quad \forall j=\overline{1,n} \\ d_j = -\frac{2}{h_j^3}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) + \frac{b_{j+1}+b_j}{h_j^2} \quad \forall j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Obs.: În cazul în care diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ este echidistantă avem $h_j = h \quad \forall j=\overline{1,n}$.

Exercițiu. Să se determine funcția spline cubică pentru funcția $f(x)=e^{2x}$ relativ la diviziunea $\{\underset{x_1}{-1}; \underset{x_2}{0}; \underset{x_3}{1}\}$ folosind f_1).

Sol.: Rezolvați-l voi! $\square$

Derivare numerică

Formula lui Taylor cu rest Lagrange. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori pe I. Atunci $\forall x \in I$, $x \neq x_0$, $\exists c$ între x și x_0 a.î.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Fie $f \in C^2([a,b])$. Atunci, conform Formulei lui Taylor cu rest Lagrange, avem, pentru orice $h > 0$ (nu foarte mare):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(c)}{2} h^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f''(c)\frac{h}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h) \Rightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (1)$$

Def.: Relația (1) s.n. formula de aproximare prin diferențe finite progresive pentru $f'(x)$.

Propoziție. Are loc următoarea estimare a erorii de trunchiere: $e_t(x) = \left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| =$

$$= \left| -f''(c)\,\frac{h}{2} \right| \le \underbrace{M \cdot \frac{h}{2}}_{= O(h)}, \text{ unde } M = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$

Reamintire. Orice funcție continuă pe un interval închis este mărginită și își atinge marginile.