Curs 14

Fie $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcție de două variabile,

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in D.$$

Definiție. S.n. curbă de nivel, curba $z = c$, $c = ct.$,

$$\mathcal{C}: f(x,y) = c.$$

Exercițiu. Fie $z = x^2 + y^2$ și $A(3,2)$.

a) Determinați curba de nivel care trece prin A.

b) Determinați curbele de nivel $\mathcal{C}_{z=1}$, $\mathcal{C}_{z=4}$, $\mathcal{C}_{z=9}$.

Sol.: a) $\mathcal{C}_A$: $\left.\begin{array}{l} z = c \\ z = x^2+y^2 \\ A(3,2) \in \mathcal{C}_A \end{array}\right| \Rightarrow c = 3^2 + 2^2 = 13.$

$\mathcal{C}_A: \underset{x^2+y^2}{\overset{\parallel}{z}} = 13 \iff \underline{x^2 + y^2 = 13 = (\sqrt{13})^2}$ (cerc centrat în origine și raza $\sqrt{13}$).

b) $\mathcal{C}_{z=1}$: $\left.\begin{array}{l} z = 1 \\ z = x^2+y^2 \end{array}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 = 1^2$ (cerc centrat în origine și raza 1).

$\mathcal{C}_{z=4}$: $\left.\begin{array}{l} z = 4 \\ z = x^2+y^2 \end{array}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 = 2^2$ (cerc centrat în origine și raza 2).

$\mathcal{C}_{z=9}: \begin{cases} z=9 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=9=3^2$ (cerc centrat în origine și rază 3). $\square$

Obs.: Curba de nivel se obține la intersecția planului $z=c$ cu suprafața $z=f(x,y)$.

Def.: Definim $\nabla f\big|_{(x,y)}$ ca fiind vectorul derivatelor parțiale ale lui f: $\nabla f\big|_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T$ și îl numim gradientul funcției f în punctul (x,y).

Exercițiu. Det. $\nabla f\big|_{(3,2)}$, unde $f(x,y)=x^2+y^2$.

Sol.: $\nabla f\big|_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^T = (2x, 2y)^T$.

$$\nabla f\big|_{(3,2)} = (6,4)^T. \quad \square$$

Def.: Fie $v=(v_1,v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ $(\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j})$ și $A(x_0,y_0)$.

Numărul $D_v f\big|_A$, definit prin

$$D_v f\big|_A = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0+\Delta v_1, y_0+\Delta v_2) - f(x_0,y_0)}{\Delta},$$

se numește derivata funcției f după vectorul v (sau după direcția v).

Propoziție. Derivata după un vector (sau după o direcție) se calculează conform formulei:

$$D_v f = \underbrace{\langle \nabla f, v \rangle}_{\text{produs scalar}}.$$

Exercițiu. Fie $v = (-1, 1)^T$ $(\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j})$ și $f(x,y) = x^2 + y^2$. Determinați $D_v f\big|_{(3,2)}$.

Sol.: $D_v f\big|_{(3,2)} = \langle \nabla f\big|_{(3,2)}, v \rangle =$

$= \langle (6,4)^T, (-1,1)^T \rangle = -6 + 4 = -2.$

Propoziție. 1) $D_v f$ maximă $\Leftrightarrow v = \dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|\nabla f\| v = \nabla f.$

2) $D_v f$ minimă $\Leftrightarrow v = -\dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\|\nabla f\| v = \nabla f.$

Obs.: 1) $D_v f$ maximă $\Leftrightarrow D_v f = \|\nabla f\|.$

2) $D_v f$ minimă $\Leftrightarrow D_v f = -\|\nabla f\|.$

Exercițiu. Fie $f(x,y)=x^2+y^2$ și $A(3,2)$. Să se determine vectorul (sau direcția) v a.î. $D_v f|_A$ să fie:

a) maximă.

b) minimă.

Sol.: a) $D_v f|_A$ maximă $\Leftrightarrow v=\dfrac{\nabla f|_A}{\|\nabla f|_A\|}=$

$$=\frac{(6,4)^T}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{52}}\cdot(6,4)^T=\frac{1}{2\sqrt{13}}(6,4)^T=\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)^T.$$

b) $D_v f|_A$ minimă $\Leftrightarrow v=-\dfrac{\nabla f|_A}{\|\nabla f|_A\|}=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}(3,2)^T.$ $\square$

Fie $A\in M_2(\mathbb{R})$ simetrică și pozitiv definită și fie $b=(b_1,b_2)^T\in\mathbb{R}^2$. Considerăm forma pătratică

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left\langle A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle-\left\langle\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Deoarece A este simetrică și pozitiv definită rezultă că f admite un punct de minim, fie acesta $(x^*,y^*)^T$.

Metoda pasului descendent

Metoda pasului descendent presupune construcția unui șir $\left((x_k, y_k)^T\right)_{k\geq 0}$ care tinde către $(x^*, y^*)^T$.

Avem următoarea schemă numerică:

$X_0 = (x_0, y_0)^T \in \mathbb{R}^2$ ales „cât mai aproape" de $(x^*, y^*)^T$;

$\forall k \geq 0,\quad V_k = \nabla f\big|_{X_k} \quad \left(X_k = (x_k, y_k)^T,\ V_k = (v_1^k, v_2^k)^T \right)$;

$$\alpha_k = \frac{\langle AX_k - b, V_k \rangle}{\langle AV_k, V_k \rangle};$$

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k V_k \quad \left(X_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})^T \right).$$

Observații. 1) $X_{k+1} = X_k - \alpha_k V_k \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{k+1} = x_k - \alpha_k v_1^k \\ y_{k+1} = y_k - \alpha_k v_k^2. \end{cases}$

2) Algoritmul se oprește atunci când $\left\| \nabla f\big|_{X_k} \right\| < \varepsilon$.

3) Se poate demonstra inductiv că $\langle \nabla f\big|_{X_k}, \nabla f\big|_{X_{k-1}} \rangle = 0$, cu alte cuvinte la fiecare

iterație noua direcție a gradientului este perpendiculară pe direcția de la iterația anterioară. Putem spune că fiecare iterație produce o deplasare în zig-zag până se ajunge suficient de aproape de punctul de minim.