Curs 2

Examenul se compune din două probe: proba scrisă și proba practică (pe calculator)

Nota examen = 0,6 · Nota proba scrisă + 0,4 · Nota proba practică.

Nota finală = 0,3 · Nota laborator + 0,2 · Nota seminar +

+ 0,5 · Nota examen.

Metode de aproximare pentru soluțiile ecuațiilor neliniare

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă a.î. $f(a)f(b) < 0$.

Deci $\exists\, x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*) = 0$.

Vrem să construim un șir $(x_k)_{k\geq 0} \subset [a,b]$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.

1. Metoda bisecției.

Metoda bisecției constă în înjumătățirea intervalului $[a,b]$ la fiecare pas k și selectarea intervalului $[a_k, b_k]$ în care se găsește soluția x^*. Avem următoarea formulă:

$$(a_k, b_k, x_k) = \begin{cases} a_k = a_{k-1},\ b_k = b_{k-1},\ x_k = x_{k-1}; & \text{dacă } f(x_{k-1}) = 0 \\ a_k = a_{k-1},\ b_k = x_{k-1},\ x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}; & \text{dacă } f(a_{k-1}) \cdot f(x_{k-1}) < 0 \\ a_k = x_{k-1},\ b_k = b_{k-1},\ x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}; & \text{dacă } f(a_{k-1}) f(x_{k-1}) > 0, \end{cases}$$

unde $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

<u>Teoremă (Teorema de convergență)</u>. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă a.î. $f(a) f(b) < 0$. Dacă f admite soluție unică $x^* \in (a, b)$, atunci șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ de mai sus converge către x^* și

$$|x^* - x_k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \quad \forall k \geq 0.$$

<u>Observație</u>. Fie $\varepsilon_k = \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$ $\forall k \geq 0$.

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\cancel{b-a}}{\underset{2}{\cancel{2^{k+2}}}} \cdot \frac{\cancel{2^{k+1}}}{\cancel{b-a}} = \frac{1}{2} \in (0, 1).$$

Deci convergența din teorema de mai sus este cel puțin liniară.

<u>Criteriu de oprire</u>. Fie $\varepsilon > 0$. Căutăm $N \in \mathbb{N}$ a.î.

$$\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon.$$

$$\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon \iff b-a < 2^{N+1}\cdot\varepsilon \iff \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^{N+1} \iff$$

$$\iff \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} < N+1 \iff \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1 < N \iff$$

$$\iff N > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1.$$

Alegem $N = \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right]$.

Algoritm (Metoda bisecției)

Date de intrare: f, a, b, ε;

Date de ieșire: x_{aprox}

Pasul 1: $a_0 = a$, $b_0 = b$, $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$;

$N = \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right]$;

Pasul 2: for $k = 1:N$ do

if $f(x_{k-1}) = 0$ then

$x_k = x_{k-1}$;

STOP

elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ then

$a_k = a_{k-1}$, $b_k = x_{k-1}$, $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;

elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0$ then

$a_k = x_{k-1}, \; b_k = b_{k-1}, \; x_k = \frac{a_k + b_k}{2};$

endif

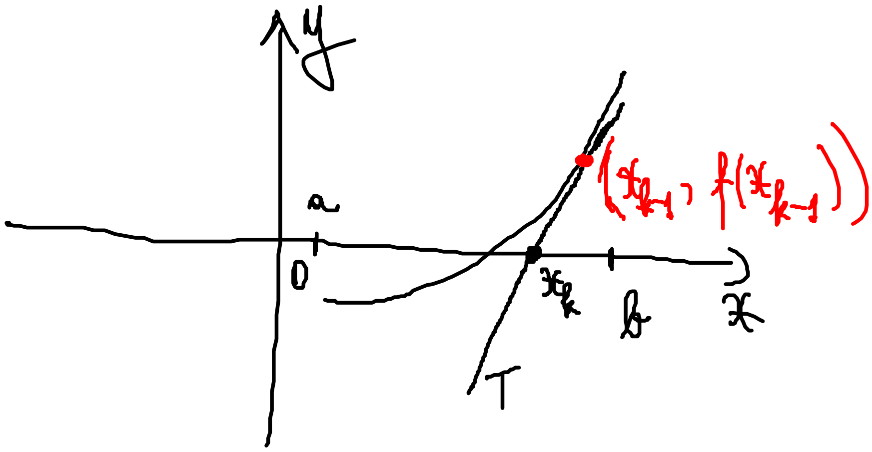
end for

<u>Pasul 3</u>: $x_{aprox} = x_k$.

2. <u>Metoda Newton-Raphson</u>

Presupunem că f este derivabilă pe $[a,b]$ și $f(a)f(b) < 0$.

Metoda N-R presupune construcția șirului $(x_k)_{k\geq 0}$ conform următoarei scheme grafice. La pasul k aproximarea x_k se obține prin intersecția axei Ox cu tangenta T la graficul funcției f în punctul $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$.



$Ox: y = 0$

$T: y - f(x_{k-1}) = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1})$

$\{(x_k, 0)\} = Ox \cap T \Rightarrow -f(x_{k-1}) = f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k - x_{k-1} = -\dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \Rightarrow x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$ $\forall k \geq 1$, unde $x_0 \in [a,b]$.

Def: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $g: I \to \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$. Spunem că g este de clasă C^n pe I dacă g este derivabilă de n ori pe I și $g^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ este continuă.

Notație. $C^n(I) = \{ g: I \to \mathbb{R} \mid g$ este de clasă C^n pe $I \}$.

Def: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $g: I \to \mathbb{R}$. Spunem că g este de clasă C^∞ pe I dacă g este indefinit derivabilă pe I.

Notație. $C^\infty(I) = \{ g: I \to \mathbb{R} \mid g$ este de clasă C^∞ pe $I \}$.

Teoremă (Teorema de convergență). Presupunem că $f \in C^2([a,b])$, f', f'' nu se anulează pe $[a,b]$ și $f(a) \cdot f(b) < 0$. Alegem $x_0 \in [a,b]$ a.î. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Atunci $\exists!\, x^* \in (a,b)$ a.î. $f(x^*) = 0$, iar șirul $(x_k)_{k \geq 0}$ construit prin metoda N-R converge pătratic către x^* (și rămâne în $[a,b]$).

Obs.: Deoarece f' și f'' nu se anulează pe $[a,b]$, atunci funcția f este monotonă (crescătoare sau descrescătoare) și f nu își schimbă concavitatea pe intervalul $[a,b]$.

Strategie de lucru. Din punct de vedere computațional se alege, conform graficului funcției f, un interval pe care funcția este monotonă și nu-și schimbă concavitatea.

Valoarea x_0 se alege astfel:

1) Dacă f este convexă (i.e. $f''(x_0) > 0$), alegem $x_0 \in [a,b]$ a.î. $f(x_0) > 0$.

2) Dacă f este concavă (i.e. $f''(x_0) < 0$), alegem $x_0 \in [a,b]$ a.î. $f(x_0) < 0$.

Criteriu de oprire. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru metoda N-R putem alege drept criteriu de oprire una dintre următoarele condiții:

1) $|f(x_k)| < \varepsilon$.

2) $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} < \varepsilon$.

Algoritm (Metoda N-R)

Date de intrare: $f, a, b, x_0, \varepsilon, f'$;

Date de ieșire: x_{aprox};

Pasul 1: $k = 0$;

Pasul 2: do

$k = k + 1$;

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})};$$

while $$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_{k-1}|} \geq \varepsilon$$

$x_{aprox} = x_k$.