SPAŢII TOPOLOGICE

Din cele discutate mai sus se degajă, la un nivel de abstractizare mai ridicat, următoarele definiţii:

Definiţie. *Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte topologie pe X o familie de submulţimi ale lui X, notată cu τ, care verifică următoarele trei axiome:*
1) $\emptyset$, $X \in \tau$;
2) dacă D_1, $D_2 \in \tau$, atunci $D_1 \cap D_2 \in \tau$;
3) dacă $D_i \in \tau$, pentru orice $i \in I$, atunci $\underset{i\in I}{\cup} D_i \in \tau$.

Se numeşte spaţiu topologic un dublet (X, τ), unde X este o mulţime nevidă şi τ este o topologie pe mulţimea X. Elementele mulţimii τ se numesc mulţimi deschise. O submulţime F a lui X se numeşte închisă în X dacă $X - F$ este deschisă în X.

Observaţie. *Noţiunile de mulţime închisă, vecinătate a unui punct, punct interior al unei mulţimi, punct de acumulare al unei mulţimi, închidere a unei mulţimi, interior al unei mulţimi şi cea de frontieră a unei mulţimi au sens în cadrul mai general al unui spaţiu topologic.*

Proprietăţile mulţimilor închise
Fie (X, τ) un spaţiu topologic. Atunci:
1. *$\emptyset$ şi X sunt închise (în X).*
2. *Reuniunea oricăror două mulţimi închise din X este o mulţime închisă din X.*
3. *Intersecţia unei familii arbitrare de mulţimi închise din X este o mulţime închisă din X.*

Definiţie. *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $x \in X$. O mulţime V se numeşte vecinătate a lui x dacă există $D \in \tau$ astfel încât $x \in D \subset V$. Notăm cu $\mathcal{V}_x$ mulţimea vecinătăţilor lui x.*

Propoziţie. *Fie (X, τ) un spaţiu topologic, $x \in X$ şi $\mathcal{V}_x$ mulţimea vecinătăţilor lui x. Atunci:*
1) Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$ atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.
2) Dacă $V \in \mathcal{V}_x$ şi $V \subset W$ atunci $W \in \mathcal{V}_x$.
3) Dacă $V \in \mathcal{V}_x$ atunci $x \in V$.
4) Dacă $V \in \mathcal{V}_x$ atunci $W \in \mathcal{V}_x$ există astfel încât $W \subset V$ şi pentru orice $y \in W$ rezultă că $W \in \mathcal{V}_y$.

Definiţie. *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $x \in X$. Un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ se numeşte convergent la x dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$ există n_ε astfel încât $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.*

Observaţie. Intr-un spaţiu topologic limita nu este unică.

Definiţie. *Fie* (X, τ) *un spaţiu topologic şi* $A \subset X$. *Atunci*

1) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X \mid$ *există o mulţime deschisă* D *astfel încât* $x \in D \subseteq A\} = \{x \in X \mid A \in \mathcal{V}_x\}$ *se numeşte interiorul lui* A.

2) $\overline{A} = \{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset$ *pentru orice vecinătate* $V \in \mathcal{V}_x\}$ *se numeşte închiderea lui* A.

3) $A' = \{x \in X \mid V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ *pentru orice vecinătate* $V \in \mathcal{V}_x\}$ *se numeşte mulţimea punctelor de acumulare a mulţimii* A.

4) $Fr\,(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ *se numeşte frontiera lui* A.

5) $iz\,(A) = A \setminus A'$ *se numeşte mulţimea punctelor izolate.*

Propoziţie. *Fie* (X, τ) *un spaţiu topologic şi* $A \subset X$. *Atunci*

1) $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A} = A' \cup A$.

2) Dacă $A \subset B$ *atunci* $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$, $A' \subset B'$ *şi* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ *şi* $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = A \overset{\circ}{\cap} B$.

4) $Fr(A) = Fr(X - A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$;

5) $\overline{A}$ *este o mulţime închisă şi* $\overset{\circ}{A}$ *este o mulţime deschisă.*

Observaţie. *Într-un spaţiu topologic este posibil ca* A' *să nu fiie închisă.*

Structura topologică a lui $\overline{\mathbb{R}}$

Propoziţie. *Mulţimea* $\tau = \{D \mid D$ *este deschisă în* $\mathbb{R}\} \cup \{D \cup [-\infty, y) \mid D$ *este deschisă în* $\mathbb{R}$ *şi* $y \in \mathbb{R}\} \cup \{D \cup (x, \infty] \mid D$ *este deschisă în* $\mathbb{R}$ *şi* $x \in \mathbb{R}\} \cup \{D \cup (x, \infty] \cup [-\infty, y) \mid D$ *este deschisă în* $\mathbb{R}$ *şi* $x, y \in \mathbb{R}\}$ *este o topologie pe* $\overline{\mathbb{R}}$, *numită topologia uzuală pe* $\overline{\mathbb{R}}$.

Observaţie. *Toate noţiunile topologice descrise mai sus au sens în* $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemple. Să se arate că următoarele structuri sunt spaţii topologice:

1) (X, τ) unde $\tau = P\,(X)$.

2) (X, τ) unde $\tau = \{\emptyset, X\}$.

3) (X, τ) unde $\tau = \{\emptyset, A, X\}$ şi A este o mulţime cu propritatea că $\emptyset \neq A \neq X$.

4) (X, τ) unde $\tau = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$ şi A este o mulţime cu propritatea că $\emptyset \neq A \neq X$.

5) $(\mathbb{R}, \tau)$ unde $\tau = \{(a, \infty) \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\}$.

Să se determine mulţimile închise, şirurile convergente şi familia vecinătăţilor pentru un element din spaţiile topologice de mai sus.

Exemplu. *Fie* (X, τ) *un spaţiu topologic şi* $A \subset X$. *Atunci mulţimea* $\tau_A = \{A \cap D \mid D \in \tau\}$ *formează o topologie, numită topologia indusă.*

1) $\emptyset = \emptyset \cap A$ şi $A = X \cap A$.

2) Fie $G_1, G_2 \in \tau_A$. Atunci există $D_1, D_2 \in \tau$ astfel încât $G_1 = A \cap D_1$ şi $G_2 = A \cap D_2$. Rezultă că $G_1 \cap G_2 = (A \cap D_1) \cap (A \cap D_2) = A \cap (D_1 \cap D_2) \in \tau_A$.

3) Fie $(G_i)_{i \in I} \subset \tau_A$. Atunci pentru orice $i \in I$ există $D_i \in \tau$ astfel încât $G_i = A \cap D_i$. Rezultă că $\underset{i \in I}{\cup} G_i = \underset{i \in I}{\cup} (A \cap D_i) = A \cap \left(\underset{i \in I}{\cup} D_i \right) \in \tau_A$.

Exemplu. *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $\mathcal{A} \subset P(X)$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Atunci $\tau_{\mathcal{A}} = \underset{\mathcal{A} \subset \tau \subset P(X); \tau \text{ topologie}}{\cap \tau}$ formează o topologie (* $\tau_{\mathcal{A}}$ -este cea mai mică topologie care conţine mulţimea $\mathcal{A}$*).*

PROPRIETĂŢI LOCALE ALE FUNCŢIILOR CONTINUE

Continuitatea unei funcţii într-un punct
Operaţii algebrice cu funcţii continue
Continuitatea aplicaţiilor liniare
între spaţii vectoriale finit dimensionale

Definiţia continuităţii unei funcţii într-un punct; formulări echivalente

Definiţie. *Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) spaţii topologice, $a \in X$ şi $f : X \to Y$. Spunem că funcţia f este continuă în a dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$, $f^{-1}(V)$ este o vecinătate a lui a. Dacă $D \subseteq X$, atunci spunem că f este continuă pe D dacă f este continuă în orice punct din D.*

Observaţii. Fie (X, τ_X) şi (Y, τ_Y) spaţii topologice, $a \in X$ şi $f : X \to Y$.

1) Atunci funcţia f este continuă în a dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ există W o vecinătate a lui a astfel încât $W \subset f^{-1}(V)$, echivalent cu pentru orice $x \in W$ rezultă că $f(x) \in V$.

2) Din definiţia de mai sus decurge faptul că dacă $a \in X \setminus X'$ (i.e. a este un punct izolat al lui X, adică există o vecinătate X a lui a cu proprietatea că $U \cap X = \{a\}$), atunci f este continuă în a.

Definiţie. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in D$. Spunem că funcţia f este continuă în a dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$ există o vecinătate U a lui a (care depinde de V) astfel încât $f(x) \in V$ pentru orice $x \in D \cap U$, i.e. $f(D \cap U) \subseteq V$. Dacă $D_1 \subseteq D$, atunci spunem că f este continuă pe D_1 dacă f este continuă în orice punct din D_1.*

Teoremă. *Fie (X, τ_X), (Y, τ_Y) şi (Z, τ_Z) spaţii topologice, $a \in X$, $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$. Dacă funcţia f este continuă în a şi funcţia g este continuă în $f(a)$ atunci funcţia $g \circ f$ este continuă în a.*

Demonstraţie.

Fie $V \in \mathcal{V}_{g\circ f(a)}$. Deoarece funcţia g este continuă în $f(a)$ rezultă că $g^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{f(a)}$. Deoarece funcţia f este continuă în a rezultă că $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1} \circ g^{-1}(V) = f^{-1}\left(g^{-1}(V)\right) \in \mathcal{V}_a$.

Prezentăm acum o propoziţie care furnizează condiţii echivalente pentru continuitate. Ea se va dovedi utilă în cadrul demonstraţiilor rezultatelor următoare.

Teorema de caracterizare a continuităţii într-un punct. *Pentru* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *şi* $a \in D$*, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f *este continuă în* a*.*

ii) Pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ *pentru orice* $x \in D$ *cu proprietatea că* $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$*.*

iii) Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, de elemente din* D*, care converge către* a*, şirul* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge către* $f(a)$*.*

Demonstraţie.

i)$\Rightarrow$ii) Cum $B(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$, există $U \in \mathcal{V}_a$ astfel încât $f(U \cap D) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Deoarece $U \in \mathcal{V}_a$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $B(a, \delta_\varepsilon) \subseteq U$, deci $f(B(a, \delta_\varepsilon) \cap D) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$, i.e. pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ avem $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

ii)$\Rightarrow$iii) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, dar fixat. Atunci, conform ipotezei, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $f(B(a, \delta_\varepsilon) \cap D) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$ şi există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x_n - a\| < \delta_\varepsilon$, i.e. $x_n \in B(a, \delta_\varepsilon)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Prin urmare, cum $x_n \in D$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deducem că $\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, deci $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge către $f(a)$.

iii)$\Rightarrow$i) Să presupunem, prin reducere la absurd, că i) este falsă. Atunci există $V_0 \in \mathcal{V}_{f(a)}$ astfel încât pentru orice $U \in \mathcal{V}_a$ există $x_U \in D \cap U$ cu proprietatea că $f(x_U) \notin V_0$. În particular, obţinem că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in D \cap B(a, \frac{1}{n})$ astfel încât $f(x_n) \notin V_0$, fapt care contrazice iii). $\square$

Notă. Rezultatul este valabil în spaţii metrice.

Următorul rezultat se dovedeşte a fi util atunci când dorim să arătăm că o funcţie nu este continuă într-un punct.

Criteriu de discontinuitate. *Pentru* $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *şi* $a \in D$*, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f *nu este continuă în* a*.*

ii) Există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, de elemente din* D*, care converge către* a*, pentru care şirul* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *nu converge către* $f(a)$*.*

Observaţie. *Funcţiile polinomiale, raţionale (i.e. cele care sunt cât de funcţii polinomiale), putere, exponenţială, logaritmică, sin, cos, tg, ctg sunt continue.*

Exerciţii

1. Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=c$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $c\in\mathbb{R}$;

b) $f:[0,1]\cup\{\frac{3}{2}\}\cup[2,3]\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & x\in[0,1] \\ 7, & x=\frac{3}{2} \\ 2, & x\in[2,3]\end{array}\right.$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=x^2$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$;

d) $f:\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=\frac{1}{x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0, & x\leq 0 \\ 1, & x>0;\end{array}\right.$

f) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dată de $f(x,y)=(2x+y,x-3y)$ pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$;

g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dată de $f(x,y)=(x^2+y^2,2xy)$ pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2. Pentru o funcţie continuă $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, fie $g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi $g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date de $g_1(x)=f(x,0)$ şi $g_2(x)=f(0,x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Să se arate că g_1 şi g_2 sunt continue. Să se arate că dacă g_1 şi g_2 sunt continue în 0, nu rezultă, în general, că f este continuă în 0.

3. Să se studieze continuitatea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},\text{ unde } p,q\in\mathbb{Z},\ q>0,\ (|p|,q)=1, \\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\text{ sau } x=0\end{array}\right. .$$

Funcţia descrisă mai sus poartă numele de funcţia lui Riemann.

4. Fie $x_0\in\mathbb{R}$, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcţii continue şi $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $h(x)=\left\{\begin{array}{ll} f(x), & x\in\mathbb{Q} \\ g(x), & x\notin\mathbb{Q}\end{array}\right.$. Să se arate că h este continuă în x_0 dacă şi numai dacă $f(x_0)=g(x_0)$.

5. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de numere reale nenule având următoarele proprietăţi:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;

ii) $f(x+x_n)=f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ şi orice $n\in\mathbb{N}$.

Să se arate că f este constantă.

Operaţii algebrice cu funcţii continue

Rezultatele de mai jos (ale căror demonstraţii sunt lăsate pe seama cititorului) arată că familia funcţiilor continue are un comportament "bun" la operaţiile algebrice.

Teoremă. *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^p$, $f:D\to\mathbb{R}^q$, şi $a\in D$. Dacă f este continuă în a, atunci f este local mărginită.*

Teoremă. *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^p$, $f,g:D\to\mathbb{R}^q$, $\varphi:D\to\mathbb{R}$ şi $a\in D$. Dacă f,g şi φ sunt continue în a, atunci $f+g$, $f-g$, fg, φf şi $\frac{f}{\varphi}$ (dacă $\varphi(x)\neq 0$ pentru orice $x\in D$) sunt continue în a.*

Teoremă. *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^p$ şi $f:D\to\mathbb{R}^q$. Dacă f este continuă în a, atunci $\|f\|$ este continuă în a.*

Teoremă. *Fie* $D_1 \subseteq \mathbb{R}^p$, $D_2 \subseteq \mathbb{R}^q$, $f : D_1 \to D_2$ *şi* $g : D_2 \to \mathbb{R}^r$. *Dacă* f *este continuă în* a, *iar* g *este continuă în* $f(a)$, *atunci* $g \circ f$ *este continuă în* a.

LIMITA UNUI FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

Definiţie. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in D^{'} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid$ *există un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elemente din* $D \setminus \{x_0\}$ *cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\}$ *şi* $l \in \mathbb{R}^q$. *Spunem că* l *este limita funcţiei* f *în* x_0 *(şi scriem* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$*) dacă pentru orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elemente din* $D \setminus \{x_0\}$ *cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, *avem* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Observaţie. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}^q$, $x_0 \in D^{'}$ *şi* $l \in \mathbb{R}^q$. *Atunci* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ *pentru orice* $x \in D$ *cu proprietatea că* $0 < \|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$.

Exemple.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$.

Fie $(x_n, y_n) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0), \text{ i.e. } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Atunci

$$0 \le \frac{x_n^2 + y_n^2}{|x_n| + |y_n|} = \frac{(|x_n| + |y_n|)^2 - 2\,|x_n|\,|y_n|}{|x_n| + |y_n|} \le |x_n| + |y_n|\,,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} (|x_n|+|y_n|) = 0$, conform lemei cleştelui deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + y_n^2}{|x_n| + |y_n|} = 0.$$

Aşadar $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$.

2. Să se arate că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Dacă, prin absurd, ar exista $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, atunci am avea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}}$, de unde contradicţia $\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$.

Exerciţii. Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

Exemple

1. *Fie* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *dată de*

$$f(x,y)=\{\begin{array}{ll}\frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{array}.$$

Să se arate că f *este continuă în origine.*
Soluţie. Fie $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0),\text{ i.e. }\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

Atunci, cum

$$\left|\frac{x_n^4+y_n^4}{x_n^2+y_n^2}\right|\leq\frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2}x_n^2+\frac{y_n^2}{x_n^2+y_n^2}y_n^2\leq x_n^2+y_n^2,$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, deducem că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4+y_n^4}{x_n^2+y_n^2}=0. \qquad (1)$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^4+y_n^4)=0$, obţinem că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x_n^4+y_n^4)}{x_n^4+y_n^4}=1. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2), concluzionăm că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4+y_n^4}{x_n^2+y_n^2}\frac{\sin(x_n^4+y_n^4)}{x_n^4+y_n^4}=0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x_n^4+y_n^4)}{x_n^2+y_n^2}=0,\text{ i.e. }\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=f(0,0).$$

Prin urmare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0),$$

deci f este continuă în $(0,0)$.
Fie acum $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^2$ astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$$

şi

$$M=\{n\in\mathbb{N}\mid(x_n,y_n)=(0,0)\}.$$

Dacă M este finită, ignorând un număr finit de termeni ai şirului, putem presupune că $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}^2\diagdown\{(0,0)\}$ şi raţionamentul de mai sus ne asigură că $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=f(0,0)$.

Dacă M este infinită, apar două situaţii:
a) $\mathbb{N} \setminus M$ finită;
b) $\mathbb{N} \setminus M$ infinită.
În cazul a), ignorând un număr finit de termeni ai şirului, putem presupune că $(x_n, y_n) = (0,0)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(0,0)$.

În cazul b), există două subşiruri $(f(x_{n_k}, y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(f(x_{n_p}, y_{n_p}))_{p\in\mathbb{N}}$ ale şirului $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ care converg către 0 cu proprietatea că

$$\{f(x_{n_k}, y_{n_k}) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{f(x_{n_p}, y_{n_p}) \mid p \in \mathbb{N}\} = \{f(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(0,0)$.

2. *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de*

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{array} \right. .$$

Să se arate că f nu este continuă în origine.
Soluţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că f este continuă în $(0,0)$.
Atunci pentru orice $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f((x_n, y_n)) = f(0,0) = 0$.
În particular avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 0$, deci obţinem contradicţia $\frac{1}{2} = 0$.
Aşadar f nu este continuă în origine.

3. *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Fie $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $g_1(x) = f(x,0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $g_2(x) = f(0,x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că g_1 şi g_2 sunt continue. Să se arate că dacă g_1 şi g_2 sunt continue în 0, nu rezultă, în general, că f este continuă în $(0,0)$.*
Soluţie. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Atunci $((x_n, 0))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ are proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, 0) = (x_0, 0)$, de unde, având în vedere faptul că f este continuă, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, 0) = f(x_0, 0), \text{ i.e. } \lim_{n\to\infty} g_1(x_n) = g_1(x_0).$$

Prin urmare g_1 este continuă în x_0.
Similar se arată că g_2 este continuă în x_0.
Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{dacă } xy = 0, \\ 1, & \text{dacă } xy \neq 0. \end{array} \right.$$

Atunci $g_1 = g_2 = 0$, deci g_1 şi g_2 sunt continue în 0.
Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 \neq 0 = f(0,0),$$

deducem că f nu este continuă în $(0,0)$.

Aşadar *continuitatea în ansamblul variabilelor implică continuitatea în raport cu fiecare dintre variabile, însă reciproca nu este validă.*

Exerciţii. Să se studieze continuitatea în $(0,0)$ a funcţiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dată de:

i) $f(x,y)=\{\begin{array}{cc} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{array}$;

ii) $f(x,y)=\{\begin{array}{cc} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{array}$.

Limita unei funcţii într-un punct

Cadrul în care vom lucra în această secţiune este următorul: se consideră $D\subseteq\mathbb{R}^p$, $f:D\to\mathbb{R}^q$, $x_0\in D'$ şi $l\in\mathbb{R}^q$.

Definiţie. *Vom spune că f tinde către l atunci când x tinde către x_0 dacă pentru orice $V\in\mathcal{V}_l$ există $U\in\mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $f(x)\in V$ pentru orice $x\in(U\cap D)\setminus\{x_0\}$, i.e. $f((U\cap D)\setminus\{x_0\})\subseteq V$. Vom nota această situaţie prin $f(x)\underset{x\to x_0}{\to} l$.*

Demonstraţia Teoremei următoare, fiind foarte asemănătoare cu cea a Teoremei de unicitate a limitei unui şir, este lăsată în seama cititorului.

Teorema de unicitate a limitei unei funcţii. *În cadrul de mai sus, dacă $l'\in\mathbb{R}^q$, $f(x)\underset{x\to x_0}{\to} l$ şi $f(x)\underset{x\to x_0}{\to} l'$, atunci $l=l'$.*

Observaţie. *Valoarea l, unic determinată de proprietatea $f(x)\underset{x\to x_0}{\to} l$, poartă numele de limita lui f atunci când x tinde către x_0. Vom marca această situaţie astfel: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$.*

Următorul rezultat (a cărui demonstraţie -fiind foarte asemănătoare cu cea a Teoremei de caracterizare a continuităţii într-un punct- este lăsată pe seama cititorului) prezintă formulări echivalente pentru existenţa limitei unei funcţii într-un punct.

Teorema de caracterizare a limitei unei funcţii într-un punct. *În cadrul de mai sus, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

α) Există $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$.

β) Pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât $\|f(x)-l\|<\varepsilon$ pentru orice $x\in D$ cu proprietatea că $0<\|x-x_0\|<\delta_\varepsilon$.

γ) Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $D\setminus\{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$.

Următorul rezultat precizează legătura dintre continuitate şi limită.

Teorema de caracterizare a continuităţii în punctele de acumulare. *În cadrul de mai sus, facem presupunerea suplimentară că* x_0 *este punct al lui* D. *Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

α) f este continuă în x_0.

β) Există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *şi* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Demonstraţie.

$\alpha) \Rightarrow \beta)$ Pentru a arăta că există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ este suficient să arătăm că pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$. Acest fapt decurge din caracterizarea continuităţii lui f în x_0 cu ajutorul şirurilor.

$\beta) \Rightarrow \alpha)$ Faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$ este imediat din ipoteză. Acest lucru arată că f este continuă în x_0. $\square$

Teorema următoare prezintă comportamentul limitei la compunere. Ea va fi folosită în cadrul demonstraţiei regulii lui l'Hospital.

Teorema privind limita compunerii de funcţii. *Fie* $D_1 \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D_1 \to \mathbb{R}^q$, $Imf \subseteq D_2 \subseteq \mathbb{R}^q$, $g : D_2 \to \mathbb{R}^s$, $x_0 \in D_1'$, $l \in \mathbb{R}^q$ *şi* $l' \in \mathbb{R}^s$ *astfel încât:*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$;

ii) $\lim\limits_{y \to l} g(y) = l'$;

iii) există $U \in \mathcal{V}_{x_0}$ *astfel încât* $f(x) \neq l$ *pentru orice* $x \in (U \cap D_1) \setminus \{x_0\}$ *(deci* l *este punct de acumulare pentru* $f(D_1)$*).*

Atunci există $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$ *şi* $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l'$.

Demonstraţie. Conform Teoremei de caracterizare a limitei unei funcţii într-un punct este suficient să arătăm că pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_1 \setminus \{x_0\}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} (g \circ f)(x_n) = l'$. Conform ipotezei i), şirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent şi limita sa este l. Mai mult, conform ipotezei iii), există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(x_n) \neq l$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Aşadar, ignorând primii $n_0 - 1$ termeni ai şirului, putem presupune că $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_2 \setminus \{l\}$. Utilizând ipoteza ii), tragem concluzia că şirul $((g \circ f)(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent şi limita sa este l'. $\square$

Observaţie. *Condiţia iii) din teorema de mai sus este esenţială,* aşa cum arată exemplul următor: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{array} \right.$, $g = f$ şi $x_0 = 0$.

Definitie. *O funcţie* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *se numeşte aplicaţie liniară dacă:*

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}^p$

2) $f(ax) = af(x)$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in \mathbb{R}$.

Observaţie.

1) Fie $A \in M_{q,p}(\mathbb{R})$. Funcţia $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ dată de $f(x) = Ax^t$ este o aplicaţie liniară.

2) Orice aplicaţie liniară $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este de forma $f(x) = Ax^t$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, unde $A \in M_{q,p}(\mathbb{R})$.

Teorema de continuitate a aplicaţiilor liniare între spaţii vectoriale finit dimensionale. *Pentru orice aplicaţie liniară $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ există $M \in [0, \infty)$ cu proprietatea că $\|f(x)\| \leq M\|x\|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$. În particular, o astfel de funcţie este continuă.*

Demonstraţie. Pentru simplitate vom alege $p = 3$ şi $q = 2$ (cazul general fiind similar). Aşadar $f = (f_1, f_2)$.

Avem

$$\|f(x)\| = \sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x)} =$$

$$= \sqrt{(f_1(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3))^2 + (f_2(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1f_1(e_1) + x_2f_1(e_2) + x_3f_1(e_3))^2 + (x_1f_2(e_1) + x_2f_2(e_2) + x_3f_2(e_3))^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(f_1^2(e_1) + f_1^2(e_2) + f_1^2(e_3)) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(f_2^2(e_1) + f_2^2(e_2) + f_2^2(e_3))} \leq$$

$$\leq M\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = M\|x\|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$, unde

$$M = \sqrt{f_1^2(e_1) + f_1^2(e_2) + f_1^2(e_3) + f_2^2(e_1) + f_2^2(e_2) + f_2^2(e_3)}.$$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Vom arăta că f este continuă în x_0. În acest scop vom considera un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^3$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Atunci, având în vedere că f este liniară, obţinem

$$0 \leq \|f(x_n) - f(x_0)\| = \|f(x_n - x_0)\| \leq M\|x_n - x_0\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde, conform lemei cleştelui, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Aşadar f este continuă în x_0. $\square$