Cursul 6

Wednesday, November 10, 2021 9:47 PM

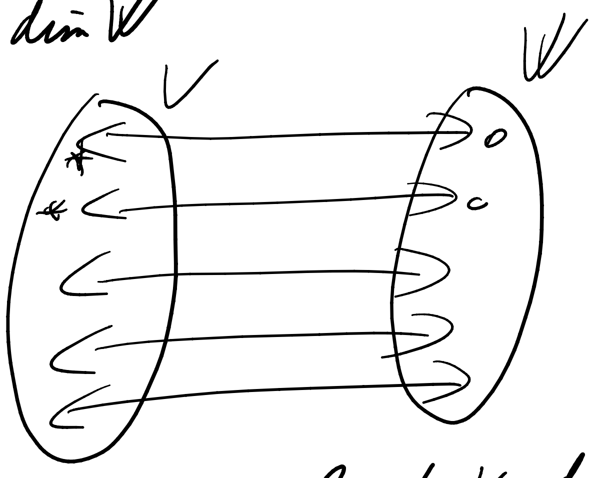
Aplicații liniare II

Data trecută **Lemă** Fie $f : V \to W$ o aplicație liniară. Atunci:

- f injectivă $\Leftrightarrow$ imaginea prin f a unei/oricărei baze este SLI (în W)
  ($\operatorname{Ker} f = \{0\}$)
- f surjectivă $\Leftrightarrow$ ______ SG
  ($\operatorname{Im} f = W$)
- f izomorfism $\Leftrightarrow$ ______ bază

Corolarul 1 Fie $f : V \to W$ liniară. Atunci:

- f injectivă $\Rightarrow \dim V \leq \dim W$
- f surjectivă $\Rightarrow \dim V \geq \dim W$
- f izomorfism $\Rightarrow \dim V = \dim W$



Obs Dacă $f : V \to W$ liniară și, de exemplu, $\dim V = \dim W$
$\Longrightarrow$ nu neapărat f izomorfism

De exemplu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(v) = 0$, $\forall v$ (aplicația nulă)

De exemplu $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(v)=0$, $\forall v$ (aplicația nulă)

$\boxed{\text{Însă}}$

Corolarul 2 Fie V, W spații vectoriale peste K.

- Dacă $\dim V \leq \dim W \Rightarrow \exists f: V \to W$ liniară injectivă
- Dacă $\dim V \geq \dim W \Rightarrow$ ______ surjectivă
- Dacă $\dim V = \dim W \Rightarrow \exists f: V \xrightarrow{\sim} W$ izomorfism.

Dem ultima Fie o bază $\{e_1, \ldots e_n\} \subset V$

$\{f_1, \ldots f_n\} \subset W$.

Aleg f a.î.: $\left.\begin{matrix} e_1 \mapsto f_1 \\ e_2 \mapsto f_2 \\ \vdots \\ e_n \mapsto f_n. \end{matrix}\right\} \overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow}$ este izomorfism.

În particular Fie V un K-sp vect n-dimensional.

Și K^n este un K-sp vect n-dimensional

Mai mult, K^n are baza canonică

$$\left\{ e_1^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots e_n^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Deci, dacă aleg o bază $B = \{e_1, \ldots e_n\}$ pt V, am un

Deci, dacă aleg o bază $B=\{b_1, \dots b_n\}$ în V, am izomorfism $\varphi_B : V \xrightarrow{\sim} K^n$

$$\boxed{\varphi_B(b_i) = e_i^n, \ \forall i=\overline{1,n}}$$

$\Rightarrow \forall v \in V$, $\boxed{v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n}$
numere

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi_B(v)}_{\in K^n} = \underbrace{x_1 \boxed{e_1^n} + x_2 \boxed{e_2^n} + \dots + x_n \boxed{e_n^n}}_{\text{vectori în } K^n} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_B(v) - \text{vectorul de coordonate ale lui } v}$

! Depinde de B - bază aleasă a lui V

Deci, imediat ce aleg o bază a unui spațiu n-dimensional am un izomorfism al său cu K^n (anume luarea coordonatelor)

Exemplu $P_n = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq n\}$.

$\dim_{\mathbb{R}} P_n = n+1$ cu bază, de exemplu, $B = \{1, X, X^2, \dots X^n\}$ (sau $\{1, (X+2), (X+2)^2, \dots (X+2)^n\}$)

Luăm $\varphi_B : P_n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi_B(X^k) = e_k^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow k+1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Luăm $\varphi_{\mathcal{B}} : P_n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi_{\mathcal{B}}(X^{m}) = e_{k} = \begin{pmatrix} 1 \leq k+1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\varphi_{\mathcal{B}}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{\mathcal{B}}(X^n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall \boxed{P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n},$$

$$\varphi_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \varphi_{\mathcal{B}} : P_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n+1}.$$

Matricea unei aplicații în raport cu baze date

Fie $f : V \to W$ aplicație liniară, $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Alegem $\mathcal{B}$ bază în V, $\mathcal{C}$ bază în W.

$\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"', "\wr"] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, dashed, "\varphi_{\mathcal{C}} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"] & K^m \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$\boxed{\varphi_{\mathcal{C}} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}}$ ia coordonatele vectorului v din V (în raport cu $\mathcal{B}$) și dă coordonatele vectorului $f(v)$ din W (în raport cu $\mathcal{C}$)

și dă coordonatele vectorului $f(v)$ din W (în raport cu $\mathcal{C}$)

Matricea $[\varphi_{\mathcal{C}} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}] \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ s.n. matricea lui f în raport cu bazele $\mathcal{B}$ și $\mathcal{C}$

$//$

Se notează $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

<u>Reamintire</u>

$$\boxed{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [f(b_1)]_{\mathcal{C}} & [f(b_2)]_{\mathcal{C}} & \cdots & [f(b_n)]_{\mathcal{C}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}}$$

<u>Ex</u> Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+5y, -x-2y, x+y)$.

Scrieți: a) Matricea lui f în raport cu bazele canonice

b) Matricea lui f în raport cu bazele $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$.

<u>Def</u> (Caz particular)

Fie $f: V \to V$ o aplicație liniară și $\mathcal{B}$ o bază a lui V

$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \overset{not}{=} [f]_{\mathcal{B}}$ s.n. <u>matricea lui f în raport cu baza $\mathcal{B}$</u>.

<u>Formula de schimbare de bază</u>

Formula de schimbare de bază

Fie $f : V \to W$ o aplicație liniară, $\dim V = n$, $\dim W = m$

și $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ baze în V.

$\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ baze în W.

$$\boxed{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \; ? \; [f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}}$$

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{C}'} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}'}^{-1}", "{[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}}"'] & K^m \arrow[dd, bend left=60] \\
V \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{B}'}", "\wr"'] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"', "\wr"] \arrow[r, "f"] & W \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{C}'}"', "\wr"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}", "\wr"'] \\
K^n \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{C}} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}", "{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}}"'] \arrow[uu, bend left=60] & K^m
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} \, [f]_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} \, M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}}$$

formula de schimbare de bază (pt aplicații liniare)

Caz particular 1. $f : K^n \to K^m$ și $\mathcal{B}$ bază în K^n

$\mathcal{B}'$ bază în K^m

și $\mathcal{B}_0^n$ baza canonică în K^n

$\mathcal{B}_0^m$ ——————— K^m

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}_0^m,\mathcal{B}'} \cdot \underbrace{[f]_{\mathcal{B}_0^n,\mathcal{B}_0^m}}_{\text{imediată}} \cdot \underbrace{M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0^n}}_{\text{imediată}}$$

$$= \left(M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}_0^m}\right)^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}_0^n,\mathcal{B}_0^m} \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0^n}$$

Ex. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+5y, -x-2y, x+y)$.

Scrieți: a) Matricea lui f în raport cu bazele canonice

b) Matricea lui f în raport cu bazele $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}.$$

Rezolvare a) $[f] = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{B}_0^3,\mathcal{C}} \cdot [f] \cdot M_{\mathcal{B},\boxed{\mathcal{B}_0^2}} = \left(M_{\mathcal{C},\mathcal{B}_0^3}\right)^{-1} \cdot [f] \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0^2}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 4 & 11 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ $f: V \to V$ aplicație liniară

(vezi, în practică, $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

$\forall$ $\mathcal{B}$ bază a lui V $\longrightarrow$ $[f]_{\mathcal{B}}$

Întrebare grea: Pot găsi o bază în raport cu care $[f]_{\mathcal{B}}$ e foarte simplă?

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \leftarrow \text{ar fi ideal}$$

Ex. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-2y+z,$

Exemplu: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-2y+z,\ -2x+5y+3z,\ x+3y-z)$

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

în raport cu baza canonică

$(\det = -5-6-6-5-9+1 \neq 0)$

$[f]^{2021} = ?$

Idee Dacă găsesc o bază (altă decât canonică) a lui $\mathbb{R}^3$ B a.î.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$[f] = M_{B,B_0}[f]_B M_{B_0,B} = M_{B,B_0}\cdot[f]_B\cdot(M_{B,B_0})^{-1}$$
$$= P\cdot[f]_B\cdot P^{-1}$$

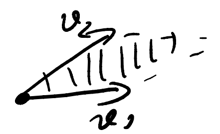
$$\Rightarrow [f]^{2021} = \underbrace{\left(P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}\cancel{P^{-1}}\right)\cdot\left(\cancel{P}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdots}_{2021 \text{ ori}}$$

$$= P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}^{2021}\cdot P^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda_1^{2021} & & \\ & \lambda_2^{2021} & \\ & & \lambda_3^{2021}\end{pmatrix}P^{-1}.$$

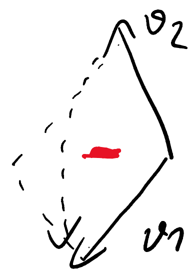
Determinanți

Arii și volume orientate

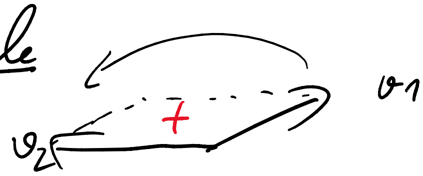
• În $\mathbb{R}^2$, fie v_1, v_2 vectori (legați în 0)



$\text{arie}(v_1, v_2)$ = aria paralelogramului pe care îl determină, cu semnul
- $+$, dacă v_1 se rotește trigonometric spre v_2 (cu unghi între 0 și 180°)
- $-$, dacă v_2 ______ v_1



Exemple



Am definit funcția $\text{arie} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

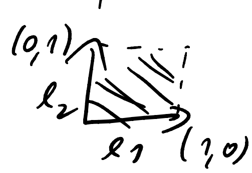
Proprietăți 1) aria este biliniară, adică liniară în fiecare argument

$$\text{arie}(\alpha v_1 + \beta v_1', v_2) = \alpha\, \text{arie}(v_1, v_2) + \beta\, \text{arie}(v_1', v_2)$$
$$\text{arie}(v_1, \alpha v_2 + \beta v_2') = \alpha\, \text{arie}(v_1, v_2) + \beta\, \text{arie}(v_1, v_2')$$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v_1, v_1', v_2, v_2' \in \mathbb{R}^2$

2) $\text{arie}(v_1, v_2) = -\,\text{arie}(v_2, v_1)$

3) $\text{arie}(v_1, \lambda v_1) = 0$, $\forall v_1 \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

4) $\text{arie}(e_1, e_2) = 1.$



$e_1 \ (1,0)$

Dem. 1) Având în vedere 2), demonstrăm doar că e liniar în al doilea argument:

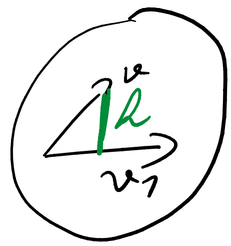
$$\text{aria}(v_1, \alpha v_2 + \beta v_2') = \alpha\, \text{aria}(v_1, v_2) + \beta\, \text{aria}(v_1, v_2'),$$

$\forall v_1 \in \mathbb{R}^2, \forall v_2 \in \mathbb{R}^2$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

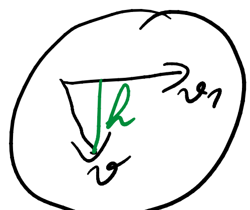
Fixez v_1. Vreau $\text{aria}(v_1, \cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \text{aria}(v_1, v)$

să fie liniară.

$$\boxed{\text{aria}(v_1, v) = \|v_1\| \cdot h} \quad h \text{ cu semn}$$

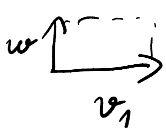


h pozitiv



h negativ

Fie $w \perp v_1$, $\|w\| = 1$.



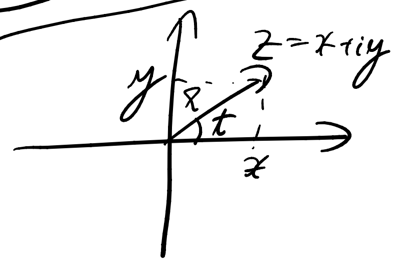
$\{v_1, w\}$ bază a lui $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2$, $v = \lambda(v)\, v_1 + h(v)\, w$

$(\lambda(v), h(v))$ coordonatele lui v în raport cu baza $\{v_1, w\}$.

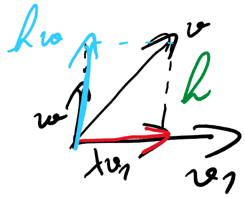
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(v)$ - a doua coordonată a lui v

$\Rightarrow$ e liniară $\Rightarrow \text{aria}(v_1, \cdot) = \|v_1\| \cdot h(\cdot)$ e liniară.



$z = r(\cos t + i \sin t)$

$z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$



h → înălțimea (cu semn) în paralelogramul det. de v_1 și v

coordonata a 2-a a lui v în baza $\{v_1, w\}$.

$\|$

liniară

Atunci, $v_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$, $v_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2$

$$\text{aria}(v_1, v_2) = \text{aria}(a_{11}e_1 + a_{12}e_2, a_{21}e_1 + a_{22}e_2)$$

$$= a_{21}\,\text{aria}(a_{11}e_1 + a_{12}e_2, e_1) + a_{22}\,\text{aria}(a_{11}e_1 + a_{12}e_2, e_2)$$

$$= a_{11}a_{21}\cancel{\text{aria}(e_1, e_1)} + a_{11}a_{22}\overbrace{\text{aria}(e_1, e_2)}^{1} + a_{12}a_{21}\overbrace{\text{aria}(e_2, e_1)}^{-1}$$

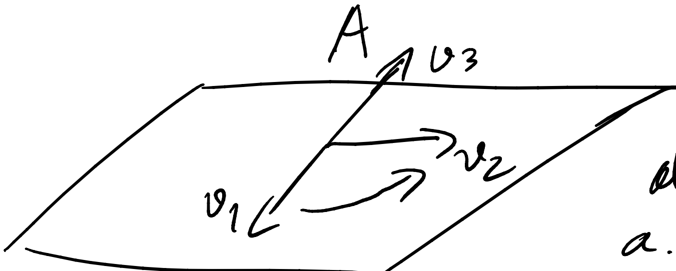
$$+ a_{12}a_{22}\cancel{\text{aria}(e_2, e_2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ determinantul calculează aria (cu semn) a liniilor sale!

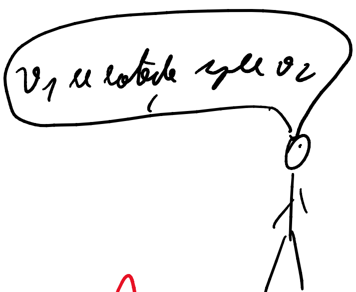
• <u>Volumul cu semn</u> v_1, v_2, v_3 vectori în $\mathbb{R}^3$

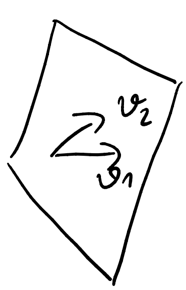
$\text{vol}(v_1, v_2, v_3)$ = volumul paralelipipedului determinat de v_1, v_2, v_3

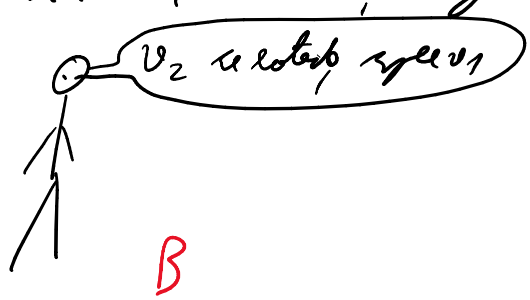
cu semnul
- $+$, dacă $\{v_1, v_2, v_3\}$ este pozitiv orientat
- $-$, dacă $\{v_1, v_2, v_3\}$ este negativ orientat



pozitiv orientat: v_3 este "spre" observatorul care vede planul $\langle v_1, v_2 \rangle$ a.î. v_1 se rotește trigonometric spre v_2

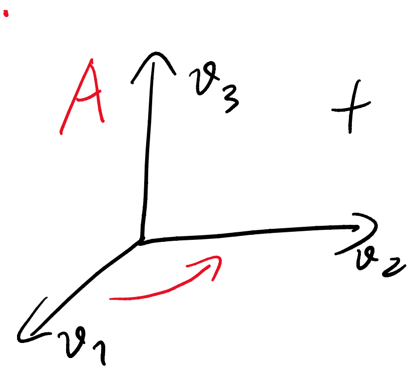


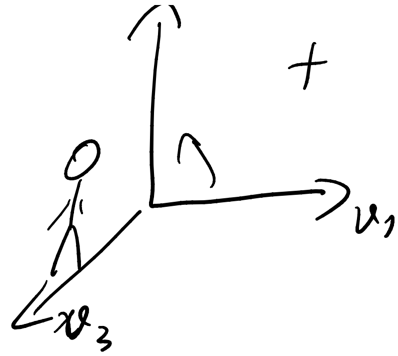


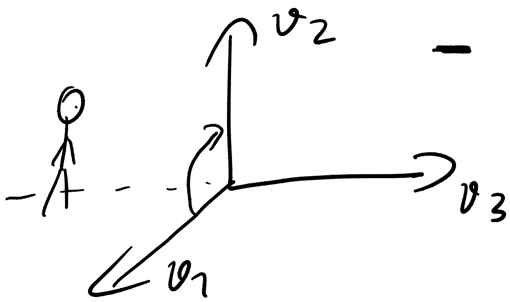


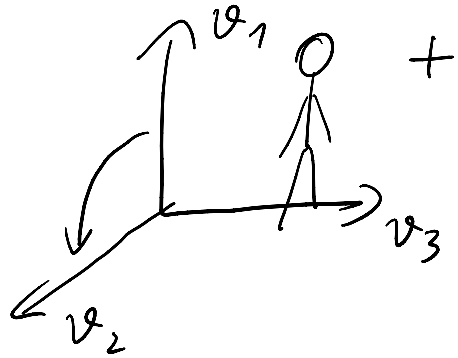
A $\uparrow v_3$

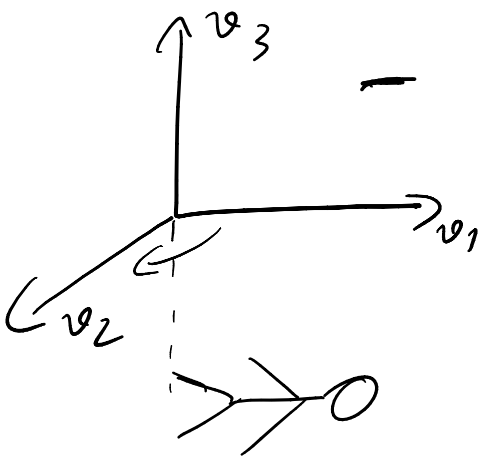
$\uparrow v_2$ $+$











<u>Proprietățile</u> $vol(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

1) este <u>multiliniară</u> adică liniară în fiecare din cele 3 argumente

2) $vol(v_1, v_2, v_3) = -\, vol(v_2, v_1, v_3)$
$= -\, vol(v_1, v_3, v_2)$
$= -\, vol(v_3, v_2, v_1)$

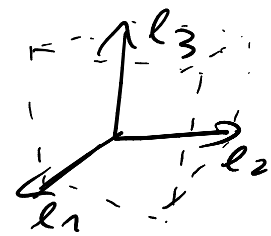
$vol(v_1, v_2, v_3) = +\, vol(v_2, v_3, v_1)$

Pt σ permutare, $\sigma \in S_3$, Pt σ permutare, $\sigma \in S_3$,

$$vol(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) = \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\text{signatura permutării}} vol(v_1, v_2, v_3)$$

$= (-1)^m$, m - nr de transpoziții ale lui σ

3) $vol(e_1, e_2, e_3) = 1$



Atunci
$$v_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{13} e_3$$
$$v_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + a_{23} e_3$$
$$v_3 = a_{31} e_1 + a_{32} e_2 + a_{33} e_3$$

$$vol(v_1, v_2, v_3) = (a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{13} e_3, a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + a_{23} e_3, a_{31} e_1 + a_{32} e_2 + a_{33} e_3)$$

27 de termeni

$$= a_{11} a_{21} a_{31} \cancel{vol(e_1, e_1, e_1)} + a_{11} a_{21} a_{32} \cancel{vol(e_1, e_1, e_2)} + \underline{a_{11} a_{21} a_{33} \overbrace{vol(e_1, e_2, e_3)}^{1}}$$
$$+ a_{11} a_{23} a_{32} \overbrace{vol(e_1, e_3, e_2)}^{-1} + a_{12} a_{21} a_{33} \overbrace{vol(e_2, e_1, e_3)}^{-1} +$$
$$+ a_{12} a_{23} a_{31} \overbrace{vol(e_2, e_3, e_1)}^{1} + a_{13} a_{21} a_{32} \overbrace{vol(e_3, e_1, e_2)}^{1} +$$
$$+ a_{13} a_{22} a_{31} \underbrace{vol(e_3, e_2, e_1)}_{-1}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$ $\Rightarrow$ determinantul calculează volumul cu semn determinat de liniile sale

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \ldots$$

cu semn determinat de liniile sale

Def $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

$$\Rightarrow \det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \leftarrow n! \text{ termeni}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

apare cu semnul permutării

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow -1$$

Ex. Calculați semnul permutării:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 8 & 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 1+ \\ 7+ \\ 6+ \\ 2+ \\ 3+ \\ 0+ \\ 0+ \\ 1+ \\ 0 \\ \hline 20 \rightarrow \text{par} \end{array}$$

$$\sigma \xrightarrow[\text{cicli disjuncți}]{\text{ca produs de}} (1\ 2\ 9\ 5\ 6)(3\ 8\ 7) =$$

Ciclu: permutare de tipul $6 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$

se rotează $(1\ 3\ 5\ 6)$

$$= (1\ 2)(2\ 9)(9\ 5)(5\ 6)(3\ 8)(8\ 7) \leftarrow 6 \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = 1.$$

$= (1\ 2)(2\ 9)(9\ 5)(5\ 6)\ (3\ 8)(8\ 7) \in 6 \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = 1.$

Ex $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

$\det A$ are 720 de termeni.

Cu ce semn apare $a_{11}\, a_{25}\, a_{32}\, a_{46}\, a_{54}\, a_{63}$?

Cu $\varepsilon(\sigma)$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$!

$\sigma = (2\ 5\ 4\ 6\ 3) = (2\ 5)(5\ 4)(4\ 6)(6\ 3) \rightarrow$ par!

$\Rightarrow$ apare cu $+$!

Proprietăți ale determinantului

Fie $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

1) $\det(A) = \det({}^tA)$.

2) Dacă A are o linie nulă $\Rightarrow \det A = 0$.

3) $$\begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \det(A)$$

4)
$$
\begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ - & - & - & - \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \ldots & a'_{in}+a''_{in} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}
=
\begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & - - & a_{1n} \\ & & & \\ a'_{i1} & a'_{i2} & & a'_{in} \\ - & - & - & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}
+
\begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & - - & a_{1n} \\ & & & \\ a''_{i1} & a''_{i2} & - - & a''_{in} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

5) Dacă permut 2 linii în A, det își schimbă semnul

6) Dacă liniile i și j sunt proporționale, det $A = 0$

7) $B = A$ în care la linia i adaug linia j înmulțită cu un număr $\Rightarrow \det A = \det B$

8) Punctele 2)- 7) sunt adevărate și pentru coloane.