Curs 7

Obs.: Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Presupunem că A este simetrică și pozitiv definită. Considerăm sistemul liniar $Ax = b$ și factorizarea Cholesky $A = LL^T$, unde $L \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice inferior triunghiulară.

$$Ax = b \iff LL^T x = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \text{SubsAsc}(L, b) \\ x = \text{SubsDesc}(L^T, y). \end{cases}$$

Factorizarea QR

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$.

Def.: Se numește factorizare QR a lui A scrierea $A = QR$, unde $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice *ortogonală* (i.e. $Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I_n$) și $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară.

Propoziție. Dacă A este inversabilă, atunci există o unică descompunere (factorizare) QR a lui A a.î. $Q \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală și $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este o matrice superior triunghiulară cu proprietatea că $r_{kk} > 0 \ \forall\ k = \overline{1,n}$ $(A = QR)$.

Metoda Givens de calcul al matricelor Q și R

Def: Matricea $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ cu $\theta\in\mathbb{R}$ s.n. matrice de rotație în două dimensiuni.

Obs: Matricea $R(\theta)$ rotește vectorii în planul xOy cu unghiul θ în sensul acelor de ceasornic (i.e. sens invers trigonometric).

Exemplu. Vectorul $e_1=(1,0)^T$ este vectorul $e_2=(0,1)^T$ rotit cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ în sensul acelor de ceasornic, i.e.

$e_1=R(\frac{\pi}{2})\cdot e_2$.

Verificare. $R(\frac{\pi}{2})e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=e_1$.

Def: Fie $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $i<j$ și $\theta\in\mathbb{R}$. Notăm $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$. Cu aceste notații definim matricea de rotație Givens

$$R^{(ij)}(\theta)=\begin{array}{c}\\ \\ \\ i\rightarrow\\ \\ j\rightarrow\\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} & & & i & & j & & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0\\ \cdots & & & & & & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0\\ \cdots & & & & & & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0\\ \cdots & & & & & & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 1\end{pmatrix}\end{array}.$$

Dacă notăm $R^{(ij)}(\theta) = (r_{kl})_{k,l=\overline{1,n}}$ avem:

$r_{ii} = c,\ r_{ij} = s,\ r_{ji} = -s,\ r_{jj} = c,\ r_{kl} = \delta_{kl} \stackrel{def.}{=} \begin{cases} 1 ; k=l \\ 0 ; k \neq l \end{cases}$ în rest.

<u>Observații</u>. 1) Dacă aplicăm $R^{(ij)}(\theta)$ unui vector $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ se vor modifica doar componentele de pe pozițiile i și j ale acestui vector.

Fie $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a.î. $b = R^{(ij)}(\theta) \cdot a$.

Avem $b_k = \sum_{l=1}^{n} r_{kl} a_l \quad \forall k = \overline{1,n}$.

$$b_i = \sum_{l=1}^{n} r_{il} a_l = r_{ii} a_i + r_{ij} a_j = c a_i + s a_j.$$

$$b_j = \sum_{l=1}^{n} r_{jl} a_l = r_{ji} a_i + r_{jj} a_j = -s a_i + c a_j.$$

$$b_k = a_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\},\ k \neq i, j.$$

2) Dacă aplicăm $R^{(ij)}(\theta)$ unei matrice $A = (a_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ se vor modifica liniile i și j ale matricei A.

Fie $B=(b_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$ a.î. $B=R^{(ij)}(\theta)\cdot A$.

$$b_{kl}=\sum_{t=1}^{n} r_{kt}\, a_{tl}\,.$$

$$b_{il}=\sum_{t=1}^{n} r_{it}\, a_{tl} = r_{ii}a_{il}+r_{ij}a_{jl} = c\,a_{il}+s\,a_{jl}.$$

$$b_{jl}=\sum_{t=1}^{n} r_{jt}\, a_{tl} = r_{ji}a_{il}+r_{jj}a_{jl} = -s\,a_{il}+c\,a_{jl}.$$

$$b_{kl}=a_{kl} \quad \forall k\in\overline{1,n},\ k\neq i,j,\ \forall l=\overline{1,n}.$$

Ideea metodei Givens este să aplicăm rotații succesive matricei A până când aceasta devine superior triunghiulară.

Matricea rezultată este matricea R din factorizarea QR.

Prin înmulțiri succesive ale matricelor de rotație Givens se obține matricea Q^T.

La fiecare iterație se vor calcula valori pentru c și s a.î. elementul b_{ji} din matricea rezultată să se anuleze, i.e.

$$b_{ji}=-s\,a_{ii}+c\,a_{ji}=0.$$

$$\begin{cases}-s\,a_{ii}+c\,a_{ji}=0\\ c^2+s^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=\dfrac{s\,a_{ii}}{a_{ji}}\\ c^2+s^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=\dfrac{s\,a_{ii}}{a_{ji}}\\ \dfrac{s^2a_{ii}^2}{a_{ji}^2}+s^2=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{s\, a_{ii}}{a_{ji}} \\ s^2 \cdot \dfrac{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}{a_{ji}^2} = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c = \pm \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \\ s = \pm \dfrac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \end{cases}.$$

Alegem
$$\begin{cases} c = \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \\ s = \dfrac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \end{cases}.$$

Cu aceste c și s definim

$$R^{(ij)} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & & i & & j & \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ j \to \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots\ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots\ 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Procedeul se repetă pentru $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$, obținându-se

$$R = R^{(n-1\ n)} \cdot \ldots \cdot R^{(2n)} \cdot \ldots \cdot R^{(23)} \cdot R^{(1n)} \cdot \ldots \cdot R^{(13)} R^{(12)} A.$$

R este matrice superior triunghiulară.

Fie $Q^T = R^{(n-1\ n)} \cdot \ldots \cdot R^{(2n)} \cdot \ldots \cdot R^{(23)} \cdot R^{(1n)} \cdot \ldots \cdot R^{(13)} \cdot R^{(12)}$.

Deci $Q = \left[R^{(n-1\ n)} \cdot \ldots \cdot R^{(2n)} \cdot \ldots \cdot R^{(23)} \cdot R^{(1n)} \cdot \ldots \cdot R^{(13)} \cdot R^{(12)} \right]^T$.

Avem $Q^T Q = Q Q^T = I_n$ și $A = QR$.

Sistemul liniar $Ax = b$ devine: $QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \text{SubsDesc}(R, Q^T b)$.

În timpul algoritmului vom aplica rotații succesive și asupra vectorului b.

Algoritm (Rezolvare sistem $Ax = b$ folosind factorizarea QR)

Date de intrare: $A = (a_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$;

Date de ieșire: $Q = (q_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$; $R = (r_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R})$;

$x = (x_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n$;

Pasul 1: Inițializăm $Q = I_n$.

Pasul 2: for $i = 1 : n-1$ do

for $j = i+1 : n$ do

$\sigma = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}$; $c = \frac{a_{ii}}{\sigma}$; $s = \frac{a_{ji}}{\sigma}$;

for $l = 1 : n$ do

$u = c a_{il} + s a_{jl}$; $v = -s a_{il} + c a_{jl}$;

$a_{il} = u$; $a_{jl} = v$;

$u = c q_{il} + s q_{jl}$; $v = -s q_{il} + c q_{jl}$;

$q_{il} = u$; $q_{jl} = v$;

end for

$u = cb_i + sb_j$; $v = -sb_i + cb_j$;

$b_i = u$, $b_j = v$;

end for

end for

Pasul 3: $R = A$; $Q = Q^T$;

Pasul 4: $x = \text{SubsDesc}(R, b)$.

Exerciții:

1. Fie sistemul: $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Să se afle factorizarea LU a matricei asociate sistemului utilizând GPP. Să se determine soluția sistemului folosind factorizarea LU.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că A este simetrică și pozitiv definită.

b) Să se determine factorizarea Cholesky a lui A.

c) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, unde $b = (12, 30, 10)^T$ prin metoda Cholesky.

3. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine factorizarea QR a matricei A.

b) Să se rezolve sistemul $Ax = b$ folosind factorizarea QR.