Curs 1

Erori

1. Erori de trunchiere

Fie x un parametru real reprezentat prin valoarea sa exactă. Fie F o funcție în baza căreia se evaluează exact o formulă matematică și F_t o funcție obținută în urma operației de trunchiere a formulei exacte.

Definiție. Definim $e_t(x) = |F(x) - F_t(x)|$ și numim $e_t(x)$ eroare de trunchiere.

Teoremă (Dezvoltarea în serie Taylor). Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat (i.e. $I \neq \emptyset$ și I nu se reduce la un element), $x_0 \in I$ fixat și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă pe I. Presupunem că $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, unde $x \in I$, $x \neq x_0$. Atunci

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

<u>Teoremă (Reprezentarea restului Formulei lui Taylor sub forma lui Lagrange).</u> Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $x_0\in I$, $n\in\mathbb{N}$ și $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori pe I.

Atunci $\forall\, x\in I$, $x\neq x_0$, există c între x_0 și x (i.e. $c\in(x_0,x)$ sau $c\in(x,x_0)$) a.î.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n''(x)}.$$

Exemplu. Avem $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \forall x \in \mathbb{R}$ $(x_0 = 0)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x-0)^n.$$

Deci $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, unde $e = e^1$.

Fie $F(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \forall x \in \mathbb{R}$. Așadar $F(1) = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Fixăm $n \in \mathbb{N}$.

Fie $F_t(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

$$e_t(1) = |F(1) - F_t(1)| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e^c}{(n+1)!},$$

unde c este între 0 și 1.

2. Erori de rotunjire

Def.: Un număr mașină reprezentat în baza 10 cu virgulă mobilă normalizată este un număr de forma

$$x^* = \pm 0,d_1 d_2 \dots d_k \cdot 10^n,$$

$$0 \le d_1, \dots, d_k \le 9, \quad d_1 \ne 0.$$

Cifrele $d_1, \dots, d_k$ se numesc cifre semnificative.

Obs.: Reprezentarea se numește normalizată deoarece cifra care precede virgula este 0.

Obs.: Orice număr real $x \ne 0$ poate fi reprezentat sub forma

$x = \pm 0{,}d_1 d_2 \ldots d_k \ldots \cdot 10^n$. Acestui număr x îi asociem numărul mașină x^* (având k cifre semnificative) după următoarea regulă:

$$x^* = \begin{cases} \pm 0{,}d_1 \ldots\ldots d_k \cdot 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} < 5 \\ \pm 0{,}d_1 \ldots\ldots (d_k + 1) \cdot 10^n, & \text{dacă } d_{k+1} \geq 5. \end{cases}$$

<u>Exemplu</u>. Numărul real π poate fi reprezentat sub forma $\pi = 3{,}14159\ldots = 0{,}314159\ldots \cdot 10^1$. Acestui număr îi asociem numărul mașină cu 5 cifre semnificative $0{,}31416 \cdot 10^1$.

Fie $x \in \mathbb{R}^*$ și x^* aproximarea sa.

Definiție: 1) Definim $e_a(x) = |x - x^*|$ și numim $e_a(x)$ eroarea absolută a aproximării.

2) Definim $e_r(x) = \dfrac{|x - x^*|}{|x|}$ și numim $e_r(x)$ eroarea relativă a aproximării.

Def: Spunem că x^* aproximează x cu k cifre semnificative dacă acest k este cel mai mare număr natural a.î.

$$e_r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|} \leq 5 \cdot 10^{-k}.$$

Fie $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R}$ a.î.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Def.: Spunem că $(y_n)_n$ converge cel puțin liniar către y dacă există un șir de numere reale pozitive $(\varepsilon_n)_n$ convergent la 0 și există $\alpha \in (0,1)$ a.î.

$$\boxed{|y_n - y| \le \varepsilon_n \text{ și } \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \alpha. \quad (1)}$$

Def.: 1) Dacă relația (1) are loc pentru $\varepsilon_n = |y_n - y|$ $\forall n \ge 0$ și $\alpha = 0$ spunem că $(y_n)_n$ converge superliniar către y.

2) Dacă relația (1) are loc pentru $\varepsilon_n = |y_{n} - y| \ \forall n \geq 0$ și $\alpha \in (0,1)$ spunem că $(y_{n})_n$ converge liniar către y.

3) Dacă relația (1) are loc pentru $\varepsilon_n = |y_{n} - y| \ \forall n \geq 0$ și $\alpha = 1$ spunem că $(y_{n})_n$ converge subliniar către y.

<u>Def</u>: Spunem că $(y_{n})_n$ converge către y cu viteza (ordinul) de convergență cel puțin r dacă există $(\varepsilon_n)_n$ un șir de numere reale pozitive convergent la 0 și există $\alpha > 0$ a.î.

$$\boxed{|y_n - y| \le \varepsilon_n \quad \forall n \geq 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^r} = \alpha \quad (2)}$$

Def: Dacă relaţia (2) are loc pentru $\varepsilon_n = |y_n - y| \; \forall n \geq 0$ spunem că $(y_n)_n$ converge către y cu ordinul (viteza) de convergenţă egal (egală) cu r.
Dacă $r = 2$ spunem că $(y_n)_n$ converge pătratic către y.