# TUTORIAT 1
# ANALIZĂ MATEMATICĂ I

## Exerciții:

**1.** Fie $A$ și $B \subset \mathbb{R}$. Definim suma acestor mulțimi prin $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$. Arătați că dacă $A$ și $B$ sunt mărginite, atunci $A+B$ este mărginită și $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, iar $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

**SOLUȚIE:**

Fie $\alpha_1 \overset{not}{=} \sup A$ și $\alpha_2 \overset{not}{=} \sup B$.

Din definiția supremumului unei mulțimi, avem că $a \le \alpha_1$ și $b \le \alpha_2$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$. Atunci, $a+b \le \alpha_1+\alpha_2$, pentru orice $a\in A$ și $b \in B$, adică $a+b \le \alpha_1+\alpha_2$, pentru orice $a+b \in A+B$. Așadar, $\alpha_1+\alpha_2$ este majorant pentru mulțimea $A+B$.

Fie $\varepsilon>0$. Există $a_\varepsilon \in A$ astfel încât $a_\varepsilon > \alpha_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ și există $b_\varepsilon \in B$ astfel încât $b_\varepsilon > \alpha_2 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Adunând cele două inegalități de mai sus, obținem că $a_\varepsilon + b_\varepsilon > \alpha_1+\alpha_2-\varepsilon$.

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, avem că $\alpha_1+\alpha_2$ este cel mai mic majorant pentru mulțimea $A+B$, adică $\sup(A+B) = \alpha_1+\alpha_2$. În concluzie, $\sup A + \sup B = \sup(A+B)$.

Analog se arată și pentru infimum. $\square$

2. Fie $A$ și $B$ două submulțimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$ astfel încât $A \subseteq B$. Arătați că $\sup A \le \sup B$ și $\inf A \ge \inf B$.

**SOLUȚIE**

Fie $a \in A \subseteq B$, atunci $a \in B$ și deci $\inf B \le a \le \sup B$.

Cum $a$ este element arbitrar din $A$, avem că $\inf B$ este minorant pentru mulțimea $A$.

Din definiția infimumului unei mulțimi, $\inf A$ este cel mai mare minorant pentru mulțimea $A$. Așadar rezultă că $\inf B \le \inf A$.

Analog pentru supremum: $\sup B$ este majorant pentru mulțimea $A$, $\sup A$ este cel mai mic majorant pentru mulțimea $A$, de unde rezultă $\sup A \le \sup B$.

$\square$

3. Fie $A$ și $B$ două mulțimi mărginite de numere reale. Arătați că $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ și $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

**SOLUȚIE**

Deoarece $A \subset A \cup B$ și $B \subset A \cup B$, conform exercițiului precedent, $\sup A \le \sup(A \cup B)$ și $\sup B \le \sup(A \cup B)$. De aici, $\max(\sup A, \sup B) \le \sup(A \cup B)$.

Vreau să arăt inegalitatea inversă. Presupun, prin reducere la absurd, că $\max(\sup A, \sup B) < \sup(A \cup B)$.

Cum $\sup(A\cup B)$ este cel mai mic majorant pentru mulțimea $A\cup B$, rezultă că $\max(\sup A, \sup B)$ nu este majorant pentru mulțimea $A\cup B$, deci există $x_0 \in A\cup B$ astfel încât $\max(\sup A, \sup B) < x_0$. Să presupunem că $x_0 \in A$, atunci $x_0 \le \sup A < \max(\sup A, \sup B) < x_0$ contradicție.

Așadar, presupunerea făcută la început a fost falsă, de unde

$$\left.\begin{array}{l}\max(\sup A, \sup B) \ge \sup(A\cup B)\\ \max(\sup A, \sup B) \le \sup(A\cup B)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \max(\sup A, \sup B) = \sup(A\cup B)$.

Se procedează analog și pentru cealaltă afirmație.

$\square$

<u>4</u> Să se determine $\inf(-1,1]\cup[\sqrt{2},\sqrt{5}]$ și $\sup(-1,1]\cup[\sqrt{2},\sqrt{5}]$.

<u>SOLUȚIE:</u>

Deoarece intervalele $(-1,1]$ și $[\sqrt{2},\sqrt{5}]$ sunt mărginite, putem folosi rezultatul din exercițiul anterior:

$\inf(-1,1]\cup[\sqrt{2},\sqrt{5}] = \min(\inf(-1,1], \inf[\sqrt{2},\sqrt{5}])$

$\sup(-1,1]\cup[\sqrt{2},\sqrt{5}] = \max(\sup(-1,1], [\sqrt{2},\sqrt{5}])$.

Cum $\inf(-1,1] = -1$, $\sup(-1,1] = 1$, $\sup[\sqrt{2},\sqrt{5}] = \sqrt{5}$, $\inf[\sqrt{2},\sqrt{5}] = \sqrt{2}$, avem:

$\inf(-1,1]\cup[\sqrt{2},\sqrt{5}] = \min(-1,\sqrt{2}) = -1$.

$\sup(-1,1]\cup[\sqrt{2},\sqrt{5}] = \max(1,\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.

$\square$

5. Determinați $\inf A$, $\sup A$ pentru mulțimile:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} : \frac{3x-1}{x+5} < 2\}$

**SOLUȚIE:**

Rezolvăm inecuația $\frac{3x-1}{x+5} < 2, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+5} - \overset{x+5}{\cancel{2}} < 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x-1-2(x+5)}{x+5} < 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x-11}{x+5} < 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5.$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $11$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-11$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $x+5$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{x-11}{x+5}$ | $+$ | $+$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |

Așadar $\frac{x-11}{x+5} < 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} \Leftrightarrow x \in (-5, 11) \Rightarrow$

$\Rightarrow A = (-5, 11) \Rightarrow \inf A = -5$

$\sup A = 11$

$\square$

(b) $A = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^*, m < 5n\}$.

**SOLUȚIE:**

Arătăm că $\inf A = 0$, adică $0$ este minorant pentru $A$ și, mai apoi, că este cel mai mare minorant pentru $A$ ($0 \notin A$).

Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, avem că $m, n > 0$, de unde $\frac{m}{n} > 0$, adică $0 < a$, oricare ar fi $a \in A$. Așadar $0$ este minorant pentru $A$.

Presupun prin reducere la absurd că 0 nu este cel mai mare minorant pentru A, adică există $\alpha > 0$, $\alpha$ minorant pentru mulțimea A. Atunci $\frac{m}{n} \geq \alpha$, pentru orice $\frac{m}{n} \in A (m, n \in \mathbb{N}^*, m < 5n)$.

Luăm $m = 1$ și $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrar $\Rightarrow m < 5n \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \alpha$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \leq \frac{1}{\alpha}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, contradicție (putem lua $n_0 = \left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1 > \frac{1}{\alpha}$).

Deci 0 este cel mai mic minorant pentru mulțimea A, adică $0 = \inf A$.

Arăt că $\sup A = 5$, adică 5 - majorant pentru mulțimea A și, mai apoi, 5 cel mai mic majorant pentru mulțimea A ($5 \notin A$).

Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m < 5n \Rightarrow$ pentru orice $\frac{m}{n} \in A \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{m}{n} < 5 \Rightarrow \frac{m}{n} < 5$, pentru orice $\frac{m}{n} \in A$.

$\Rightarrow$ 5 majorant al mulțimii A.

Presupun prin reducere la absurd că 5 nu este cel mai mic majorant pentru A, deci există $\beta < 5$, $\beta$ majorant pentru A. Atunci $\frac{m}{n} \leq \beta$, pentru orice $\frac{m}{n} \in A (m, n \in \mathbb{N}^*, m < 5n)$.

Luăm $n_0 \in \mathbb{N}^*$ arbitrar și $m_0 = 5n_0 - 1 < 5n_0$. Deci $\frac{m_0}{n_0} \in A$ și atunci

$\frac{m_0}{n_0} = \frac{5n_0 - 1}{n_0} \leq \beta \Leftrightarrow 5n_0 - 1 \leq \beta \cdot n_0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n_0 (\underset{0}{\underline{5 - \beta}}) \leq 1 \Leftrightarrow n_0 \leq \frac{1}{5 - \beta}$.

Cum $n_0$ a fost ales arbitrar, pentru orice $n_0 \in \mathbb{N}^*$, avem $n_0 \leq \frac{1}{5 - \beta}$, contradicție (putem lua $n_0 = \left[\frac{1}{5 - \beta}\right] + 1 > \frac{1}{5 - \beta}$).

Deci, $5 = \sup A$.

$\square$

(c) $A = \{(-1)^{n+1} \frac{m+n}{2m+1} : m, n \in \mathbb{N}^*\}$.

**SOLUȚIE**

Vom arăta că nu există inf A, sup A (în $\mathbb{R}$). Folosesc următoarea afirmație:

$\nexists \sup A (\in \mathbb{R}) \Leftrightarrow A$ este nemărginită superior.

Presupunem prin reducere la absurd că A este mărginită superior, adică există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $(-1)^{n+1} \cdot \frac{m+n}{2m+1} \leq \alpha$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru n impar, rezultă că $\frac{m+n}{2m+1} \leq \alpha, \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in 2\mathbb{N}+1$, de unde $m+n \leq \alpha(2m+1), \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in 2\mathbb{N}+1$, adică $m(1-2\alpha)+n \leq \alpha, \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in 2\mathbb{N}+1$. Pentru $m=1$, avem $n \leq 3\alpha - 1, \forall n \in 2\mathbb{N}+1$, contradicție.

Așadar A este nemărginită superior $\Rightarrow \nexists \sup A$ (în $\mathbb{R}$).

**Obs**: în $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\sup A = \infty$.

Analog, se arată că $\nexists \inf A (\in \mathbb{R})$.

**Obs**: în $\overline{\mathbb{R}}$, $\inf A = -\infty$.

$\square$

(d) $A = \{n + \frac{(-1)^n}{4n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

**SOLUȚIE**:

Vom arăta că $\inf A = \frac{3}{4}$ și că $\nexists \sup A$.

Arăt că $\frac{3}{4}$ este minorant al mulțimii A, adică $n + \frac{(-1)^n}{4n} \geq \frac{3}{4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4n^2 + (-1)^n \geq 3n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4n^2 - 3n \geq -(-1)^n \Leftrightarrow n(4n-3) \geq (-1)^{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Dar $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow 4n - 3 \geq 1 \Rightarrow n(4n-3) \geq 1$

$(-1)^{n+1} \in \{\pm 1\} \Rightarrow \quad 1 \geq (-1)^{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow n(4n-3) \geq (-1)^{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{4}$ minorant al mulțimii A.

Pentru $n = 1$: $n + \frac{(-1)^n}{4n} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{4} \in A$ și cum $\frac{3}{4}$ este minorant al lui A, rezultă că $\frac{3}{4} = \min A = \inf A$.

Arăt că A este nemărginită superior. Presupun prin reducere la absurd că A este mărginită superior, adică există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $n + \frac{(-1)^n}{4n} \leq \alpha$,

$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n + 1 + \frac{(-1)^n}{4n} \leq \alpha + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \text{Dar } \frac{(-1)^n}{4n} > -1 \Rightarrow 1 + \frac{(-1)^n}{4n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \leq \alpha + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, contradicție

(dacă $\alpha > 0$, putem lua $n_0 = [\alpha] + 2 > \alpha + 1$, iar dacă $\alpha < 0$, luăm $n_0 = 1 > \alpha + 1$).

Atunci A este nemărginită superior, de unde $\nexists \sup A$ (în $\mathbb{R}$).

$\square$

(e) $A = \left\{ \frac{2mp}{m^2 + p^2 + 1} : m, p \in \mathbb{N}^* \right\}$

**SOLUȚIE:**

Arăt că $\inf A = 0$ și $\sup A = 1$.

$m, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2mp > 0 \\ m^2 + p^2 + 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ pentru orice $m, p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2mp}{m^2 + p^2 + 1} > 0$, pentru orice $a \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow a > 0$, pentru orice $a$ al mulțimii A.

$\Rightarrow 0$ este minorant al mulțimii A.

Acum, arăt că 0 este cel mai mare minorant al mulțimii A. Presupun prin reducere la absurd că există

$\alpha>0$ astfel încât $\dfrac{2mp}{m^2+p^2+1}\geq\alpha$, pentru orice $m,p\in\mathbb{N}^*$.

Luăm $m=1$ şi avem $\dfrac{2p}{p^2+1}\geq\alpha$, pentru orice $p\in\mathbb{N}^*$.

Fie şirul $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, $a_p=\dfrac{2p}{p^2+1}$. Evident

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{p\to\infty} a_p=\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{2p}{p^2+1}=0\\ a_p\geq\alpha,\ \forall p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\lim\limits_{p\to\infty}a_p\geq\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 0\geq\alpha$, contradicţie cu $\alpha>0$.

Deci 0 este cel mai mare minorant al mulţimii A, adică $\inf A=0$.

Din inegalitatea $(m-p)^2\geq 0\Rightarrow$
$\Rightarrow m^2+p^2\geq 2mp\Rightarrow m^2+p^2+1>2mp\Rightarrow$
$\Rightarrow\dfrac{2mp}{m^2+p^2+1}<1$, pentru orice $m,p\in\mathbb{N}^*$,
de unde avem că 1 este majorant pentru mulţimea A.

Arătăm că 1 este cel mai mic majorant al lui A. Presupunem, prin reducere la absurd că există $\beta<1$ astfel încât $\dfrac{2mp}{m^2+p^2+1}\leq\beta$, pentru orice $m,p\in\mathbb{N}^*$.

Luăm $m=p\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\dfrac{2m^2}{2m^2+1}\leq\beta$, pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$. Procedând ca mai sus, deoarece $1=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{2m^2}{2m^2+1}\leq\beta$, rezultă că $1\leq\beta$, contradicţie cu $\beta<1$.

Deci 1 este cel mai mic majorant pentru mulţimea A, adică $1=\sup A$.

În concluzie, $\inf A=0$ şi $\sup A=1$.

$\square$