I. Uniform continuitatea funcțiilor reale

Definiția 1. Fie $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H \subseteq A$ o mulțime. Spunem că f este **uniform continuă** pe H dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x, y \in H$ cu $|x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Propoziția 1. O funcție continuă pe un interval compact este uniform continuă.

Propoziția 2. O funcție $f\colon H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniform continua duce orice șir Cauchy într-un șir Cauchy.

Cum folosim această propoziție în exercișii? Dacă găsim $(x_n)_n \subseteq H$ șir Cauchy (adică convergent), dar $(f(x_n))_n$ nu este șir Cauchy (convergent), atunci f nu este uniform continuă.

Propoziția 3. Fie $f\colon H \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

- f este uniform continuă pe H;
- $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \subseteq H$ cu $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, avem $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Cum folosim această propoziție în exerciții? Dacă găsim $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq H$ astfel încât $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$, dar $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$, atunci f nu este uniform continuă.

Propoziția 4. Orice funcție Lipschitz (i.e. $\exists M > 0$ astfel încât $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$, $\forall x, y$) este uniform continuă.

*În exerciții vom folosi următorul **corolar**:* Orice funcție derivabilă cu derivata mărginită este funcție Lipschitz, deci uniform continuă.

Propoziția 5. Dacă $f\colon I \cup J \to \mathbb{R}$ astfel încât $I \cap J \neq \emptyset$ și f este uniform continuă pe I si J, atunci f este uniform continuă pe $I \cup J$.

Propoziția 6. Fie $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$. Atunci sunt echivalente afirmațiile:

- f este uniform continuă pe $(a, b]$;
- $\exists \tilde{f}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, astfel încât $\tilde{f}\big|_{(a,b]} = f$.

II. Exerciții

1. Studiați continuitatea, derivabilitatea si uniform continuitatea următoarelor funcții:

   (a)
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (b)
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

   (c)
$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} + \frac{\ln(x^2+x+1)}{2x}, \text{ dacă } x > 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (d)
$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin(x+1) - \frac{2sinx}{x}, \text{ dacă } x > 0 \\ -2 + \sin 1, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (e)
$$f\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{1}{x^2}) + \frac{\ln(1-x)}{2x}, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\pi-1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$$

   (f)
$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$$

2. Studiați uniform continuitatea următoarelor funcții:
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$.
   (b) $f\colon (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
   (c) $f\colon (0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
   (d) $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{2}{x^2+3x}$.