ŞTEFAN ALEXANDRA-MARIA 29.10.2021

TUTORIAT 2
ANALIZA MATEMATICĂ I

Exerciții:

1. Arătați, cu ajutorul definiției (cu ε), că următoarele șiruri au limită:

(a) $x_n = 2^n - \frac{1}{n^2} + 4$, $n \in \mathbb{N}^*$.

SOLUȚIE:

PE CIORNĂ: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (2^n - \frac{1}{n^2} + 4) =$

$= \lim_{n\to\infty} 2^n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + 4 = \infty - 0 + 4 = \infty.$

Arăt că $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, adică $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem $|x_n| > \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$.

$|x_n| > \varepsilon \Leftrightarrow |\underbrace{2^n - \frac{1}{n^2} + 4}_{>0}| > \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Aleg $n_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \varepsilon < 1 \\ [\log_2 \varepsilon] + 1, & \text{dacă } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$

- Pentru $\varepsilon < 1$, este evident că

$2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > 1 > \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon = 0$.

• Pentru $\varepsilon \geq 1$, arăt că $2^n - \frac{1}{n^2} + 4 > \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon = [\log_2 \varepsilon] + 1$.

Avem $\left.\begin{array}{l} n \geq [\log_2 \varepsilon] + 1 > \log_2 \varepsilon \Rightarrow 2^n > \varepsilon \\ n^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow 4 > \frac{1}{n^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n + 4 - \frac{1}{n^2} > \varepsilon$, q.e.d.

În concluzie, $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$.

$\square$

(b) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$, $n \in \mathbb{N}$

SOLUȚIE:

PE CIORNĂ: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Arăt că $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, adică $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon > 0$ astfel încât să avem $|x_n - 0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$.

$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |\sqrt{n^2+1} - n| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{2n}$

$\frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon}$.

Aleg $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$.

Arăt că $\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}}_{>0} < \varepsilon$, $\forall n \geq \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$.

$$n \geq \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1 > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

Dar $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{2n}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \varepsilon$, q.e.d.

În concluzie, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

$\square$

(c) $x_n = \ln \frac{3n+2}{n+3}$, $n \in \mathbb{N}$

PE CIORNĂ: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{3n+2}{n+3} =$
$= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{n+3}\right) = \ln 3.$

Arăt că $\lim_{n\to\infty} x_n = \ln 3$, adică $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon > 0$ astfel încât să avem $|x_n - \ln 3| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$.

$|x_n - \ln 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\ln \frac{3n+2}{n+3} - \ln 3\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Bigg|\underbrace{\ln \frac{3n+2}{3n+9}}_{<0}\Bigg| < \varepsilon \Leftrightarrow \ln \frac{3n+9}{3n+2} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{7}{3n+2} < e^\varepsilon$, $\forall n \geq n_\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{7}{3n+2} < \underbrace{e^\varepsilon - 1}_{>0} \Leftrightarrow 3n+2 > \frac{7}{e^\varepsilon - 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n > \frac{7}{e^\varepsilon - 1} - 2 \Leftrightarrow 3n > \frac{9 - 2\cdot e^\varepsilon}{e^\varepsilon - 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > \frac{9 - 2\cdot e^\varepsilon}{3(e^\varepsilon - 1)}$, $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Alegem $n_\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \varepsilon \in (\ln \frac{9}{2}, \infty) \\ \underbrace{\left[\frac{9 - 2\cdot e^\varepsilon}{3(e^\varepsilon - 1)}\right]}_{>0} + 1, & \text{dacă } \varepsilon \leq \ln \frac{9}{2}. \end{cases}$

• Pentru $\varepsilon \in (\ln \frac{9}{2}, \infty) \Rightarrow e^{\varepsilon} > \frac{9}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 9 - 2 \cdot e^{\varepsilon} < 0 \leq n, \forall n \geq n_{\varepsilon} = 0.$

• Pentru $\varepsilon \leq \ln \frac{9}{2}$, $n \geq \left[\frac{9 - 2 \cdot e^{\varepsilon}}{3(e^{\varepsilon} - 1)}\right] + 1 >$
$> \frac{9 - 2 \cdot e^{\varepsilon}}{3(e^{\varepsilon} - 1)} > 0, \forall n \geq n_{\varepsilon}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

$\square$.

2. Folosind criteriul Cauchy, arătați că următoarele șiruri sunt convergente:

(a) $x_n = \frac{(\cos 1)^3}{4^2} + \frac{(\cos 2)^3}{4^4} + \ldots + \frac{(\cos n)^3}{4^{2n}}$.

SOLUȚIE:

Fie $\varepsilon > 0$. Căutăm $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq N_{\varepsilon}$

Presupunem că $n > m \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x_n - x_m| = \left|\frac{(\cos(m+1))^3}{4^{2(m+1)}} + \frac{(\cos(m+2))^3}{4^{2(m+2)}} + \ldots + \frac{(\cos(n))^3}{4^{2n}}\right| \leq \left|\frac{(\cos(m+1))^3}{4^{2(m+1)}}\right| + \left|\frac{(\cos(m+2))^3}{4^{2(m+2)}}\right| + \ldots + \left|\frac{(\cos n)^3}{4^{2n}}\right| \leq \frac{1}{4^{2(m+1)}} + \frac{1}{4^{2(m+2)}} + \ldots + \frac{1}{4^{2n}}$$

$$= \frac{1}{4^{2(m+1)}}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{2(n-m+1)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{16^{m+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{16^{n-m}}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{16^m \cdot 15} \cdot \left(1 - \frac{1}{16^{n-m}}\right) <$$

$$< \frac{1}{16^m \cdot 15}.$$

Acum $\frac{1}{16^n \cdot 15} < \varepsilon \Leftrightarrow 15 \cdot 16^n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > \log_{16}\left(\frac{1}{15\varepsilon}\right) = -\log_{16}(15\varepsilon)$.

Aleg $N_\varepsilon = \begin{cases} [-\log_{16}(15\varepsilon)], & \text{dacă } \varepsilon < \frac{1}{15} \\ 1, & \text{dacă } \varepsilon \geq \frac{1}{15}. \end{cases}$

- Pentru $\varepsilon < \frac{1}{15}$, avem $n \geq -\log_{16}(15\varepsilon)$,

$\forall n \geq [-\log_{16}(15\varepsilon)]$, adică $\frac{1}{16^n \cdot 15} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon, \forall m > n \geq [-\log_{16}(15\varepsilon)]$.

- Pentru $\varepsilon \geq \frac{1}{15}$, avem $n > 0 > -\log_{16}(15\varepsilon)$,

$\forall n \geq N_\varepsilon = 1$, adică $\frac{1}{16^n \cdot 15} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon, \forall m > n \geq 1$.

Așadar, $(x_n)_n$ este șir Cauchy $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ șir convergent.

$\square$

(b) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, n \geq 1$

SOLUȚIE: Căutăm $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

Fie $\varepsilon > 0$.

$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p > 0$.

$|x_{n+p} - x_n| = \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right| =$

$= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}$

Folosim inegalitatea:

$\frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{n+k} \cdot \frac{1}{n+k-1} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}$.

Avem deci:

$$|x_{n+p}-x_n| \le \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n+p-1}} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Alegem $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \ge \ \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_{n+p}-x_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \ge N_\varepsilon, p>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)_{n\ge1}$ este şir Cauchy $\Rightarrow$ şir convergent

$\square$

3. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\ge1}$, $x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2$, $x_1\in[1,2]$ este convergent şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

SOLUŢIE:

$(x_n)_{n\ge1}$, $x_1\in[1,2]$

$x_{n+1}=x_n^2-2x_n+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1}=(x_n-1)^2+1, \forall n\ge1.$

Arăt, prin inducţie, că $x_n\in[1,2]$, $\forall n\ge1$.

P(1): $x_1\in[1,2]$, adevărat

P(K) $\rightarrow$ P(K+1): Presupun $x_K\in[1,2] \Rightarrow$

$\Rightarrow x_K-1\in[0,1] \Rightarrow (x_K-1)^2\in[\ ,\ ] \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow (x_K-1)^2+1\in[1,2] \\ x_{K+1}=(x_K-1)^2+1\end{array}\right\} \Rightarrow x_{K+1}\in[1,2].$

Aşadar, $x_n\in[1,2], \forall n\ge1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)_{n\ge1}$ mărginit.

Avem: $x_n\in[1,2] \Rightarrow x_n-1\in[0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n-1)^2 \le x_n-1 \Rightarrow \underbrace{1+(x_n-1)^2}_{x_{n+1}} \le x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1}\le x_n, \forall n\ge1.$

Deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător.

Deoarece $(x_n)_{n\geq 1}$ este șir mărginit și monoton, din Teorema Weierstrass rezultă că $(x_n)_{n\geq 1}$ este șir convergent.

Fie $l = \lim_{n\to\infty} x_n \in [1,2]$

$l = l^2 - 2l + 2 \Rightarrow l^2 - 3l + 2 = 0 \Rightarrow l_1 = 1,$ $l_2 = 2.$

Dar $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător $\Rightarrow$ $\Rightarrow \boxed{l = 1}$

$\square$

4. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k}$$

SOLUȚIE:

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}, \; n \geq 1.$$

Folosim următoarele inegalități:

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

$$\frac{2}{n^2+} \leq \frac{2}{n^2+2} \leq \frac{2}{n^2+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} \quad (+)$$

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+1}. \Rightarrow$$

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \le a_n \le \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}, \forall n \ge 1.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}$,

din criteriul cleștelui rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

$\square$

5. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

SOLUȚIE:

Fie $(x_n)_{n\ge1}, (y_n)_{n\ge1}$,

$x_n = 1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$

$y_n = n\sqrt{n}$

Ptr. orice $n \ge 1$, $\left.\begin{matrix} n+1>n \\ \sqrt{n+1}>\sqrt{n} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)\sqrt{n+1} > n\sqrt{n} \Rightarrow y_{n+1} > y_n \Rightarrow$

$\Rightarrow (y_n)_{n\ge1}$ este șir strict crescător

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n} = \infty$.

Cercetăm dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{\cancel{1}+\cancel{\sqrt{2}}+\ldots+\sqrt{n+1}-\cancel{1}-\cancel{\sqrt{2}}-\ldots-\cancel{\sqrt{n}}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{(n+1)^3-n^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}\left((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}\right)}{3n^2+3n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{2}{3} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Putem aplica Teorema Stolz-Cesàro, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{2}{3}$.

$\square$