Cursul 1

Wednesday, October 6, 2021 10:49 PM

· Bibliografie: – cursul → pdf-uri cu ce scriu pe tabletă

– Linear Algebra and its applications, David Lay, Steven Lay, Judi McDonald

– Linear Algebra, S. Friedberg, A. Insel, L. Spence

– Bazele Algebrei, I. Ion, N. Radu

· Examen: – 10p examenul scris

+ 1p maxim din seminar

+ teme de curs

+ dacă nu este examen față în față, putem chema la oral studenți ale căror lucrări au suspiciuni.

· Office hours: la cerere, pe zoom, consultații.

---

Sisteme de ecuații liniare. Forma eșalon redusă

I Sisteme de ecuații liniare

Def O ecuație liniară:

constante (numere)

$$\boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b}$$

nedeterminate

liniară = nedeterminatele apar la puterea 1

Exemple $2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -3$

$-5x_1 + \cancel{x_2} + 3x_3 - x_4 = 0$

$3x_1 \cdot x_1$

$0 \cdot x_2$

(nu trebuie să apară explicit fiecare variabilă)

**Nu**

$$3x_1 \cdot x_2 - x_3 = 6$$

$$x_1^2 - 2x_2 = x_3$$

$$e^{x_1 x_2} - x_3 = 0$$

$$e^{x_1 + 3x_2} = 5 \iff x_1 + 3x_2 = \ln 5$$ DA!

**Constantele** În tot cazul, constante dintr-un

corp $K \subset \mathbb{C}$ : $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Z}$ nu e corp!

corp $\to$ orice element are invers în raport cu înmulțirea

$\mathbb{Z}_n$ e corp? Doar dacă $n = p$ prim!

(de ex $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_{19} \ldots$)

Dar $\mathbb{Z}_p \not\subset \mathbb{C}$!

$$\hat{1} \neq 1 \in \mathbb{C}$$

**Def** Sistem de ecuații liniare = mai multe (un nr finit de) ecuații liniare

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & \leftarrow \text{ecuația } 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & \leftarrow \text{ecuația } 2 \\ \vdots & \\ \ldots + a_{mn}x_n = b_m & \leftarrow \text{ecuația } m \end{cases}$$

$$(S)\begin{cases} \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \leftarrow \text{ecuația } m \end{cases}$$

(S) sistem cu m ecuații și n necunoscute

**Exemplu**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

4 ec, 5 necunoscute

**Def** O soluție a unui sistem $m \times n$ este un n-tuplu $(s_1, \dots s_n) \in K^n$ care verifică sistemul!

**De exemplu**: $(2, 1, 1, 0, 0)$ e soluție pt.

căutăm soluțiile în același corp K în care sunt constantele

**Def** Un sistem
- compatibil (are soluții)
  - determinat (are exact o soluție)
  - nedeterminat (are mai multe soluții)
- incompatibil (nu are soluții)

**Exemple**

- $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ compatibil determinat

- $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$ compatibil nedeterminat

- $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ incompatibil

• $\begin{cases} x+y \\ x+y=5 \end{cases}$ incompatibil

sau

$\begin{cases} x+y=3 \\ 0=1 \end{cases}$

$0\cdot x+0\cdot y=1$

---

## II Matrice și sisteme de ecuații liniare

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m\times n}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}=\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{m\times 1}$$

vectorul termenilor liberi

$$\Longleftrightarrow A\cdot x=b \quad \text{, unde } A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\in M_{m,n}(K)$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\in K^n,\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}\in K^m.$$

De acum, zicem "Fie sistemul de ecuații liniare $Ax=b$"
$A$ $m\times n$.

**Prop.** Un sistem compatibil nedeterminat are o infinitate de soluții.

**Dem.** Avem 2 soluții (cel puțin): $x$ și $y$

deci $A\cdot x=b$

$A\cdot y=b$

(cel puțin)

deci $A \cdot x = b$

$A \cdot y = b$

$x+y$ e soluție? $A \cdot (x+y) = Ax + Ay = b + b = 2b$

$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ este soluție! $A \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}Ax + \frac{1}{2}Ay = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b.$

<u>Idee</u> $x, y, z$ soluții $\longrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z$ e soluție

Dar $z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \longrightarrow \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = z$!

<u>Var 1</u> $x, y \longrightarrow z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ e tot soluție

$x, z \longrightarrow w = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$

$w = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y$

Următorul: $\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}y$

În general: $\frac{2^n - 1}{2^n}x + \frac{1}{2^n}y$ o infinitate de soluții

<u>Var 2</u> $x, y \longrightarrow \alpha x + \beta y$

$A(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{Ax}_{b} + \beta \underbrace{Ay}_{b} = \alpha b + \beta b = (\alpha + \beta) b$

$\overset{?}{=} b$

$\nearrow b = 0, \forall \alpha, \beta \in K$
(... )

$\searrow$ ... de soluții

$\nearrow$ $b=0$, $\forall \alpha,\beta \in K$
(sistem omogen)

$\searrow$ $b\neq 0$, dacă $\alpha+\beta=1$.

$\Longrightarrow$ o infinitate de soluții

**Problemă** Cum rezolvăm *eficient* sistemele de ecuații liniare?

$\nearrow$ 1. ca în liceu: $\underbrace{\text{minor principal, rang, rang matrice extinsă}}_{\text{determinanți}}$

Un determinant $n\times n$ este o sumă de $n!$ termeni
(fiecare termen = produs de $n$ numere)

$\searrow$ 2. Găsim un alt sistem cu aceleași soluții care e mult mai simplu!

un sistem echivalent

**Def** Două sisteme $(S)$ și $(S')$ cu aceeași mulțime de soluții se numesc <u>echivalente</u>

<u>Școala generală</u>

$$\begin{cases} 3x-7y=9 \\ 5x+3y=-4 \end{cases}$$

Metoda reducerii: „scăpăm" de o necunoscută într-o ecuație

$$\begin{cases} 3x-7y=9 & \Big|\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) \\ 5x+3y=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} -5x+\frac{7\cdot 5}{3}y=-\frac{5\cdot 9}{3} \\ 5x+3y=-4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -5x+\frac{35}{3}y=-15 \\ \left(\frac{35}{3}+3\right)y=-4 \end{cases}$$

nu mai are $x \Rightarrow y \Rightarrow x$

$(3, 1)\}$

**Idee**: Să reducem sistemul ai să devină din ce în ce mai simplu, până ajunge la o formă "ideală".

**Întrebări** • Ce operații (modificări) putem face asupra sistemului ai soluțiile să se păstreze?
reversibile

1. Să înmulțim o ecuație cu un număr nenul.
2. Să înmulțesc o ecuație (1) cu un număr și să o adun la alta (2) și înlocuiesc (2)
3. Pot schimba ordinea ecuațiilor; pot schimba între ele două ecuații

• Cum arată un sistem ideal?

A)
$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad\quad = \_ \\ \quad x_2 \quad\quad\quad = \_ \\ \quad\quad x_3 \quad\quad = \_ \\ \quad\quad\quad \ddots \; x_n = \_ \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$$

B)
$$\begin{cases} \boxed{x_1 \quad x_2 \quad \ddots \quad x_k} \quad = \_ \\ \quad\quad = \_ \\ \quad\quad = \_ \\ 0 = 0 \\ \vdots \\ 0 = 0 \end{cases}$$

expresii în variabilele $x_{k+1}, \dots, x_n$

C)
$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad = \_ \\ \quad x_2 \quad\quad = \_ \\ \quad\quad \ddots \; x_k = \_ \\ 0 = 1 \end{cases}$$

variabile $x_{k+1}, \dots, x_n$

... poate fi adus la una din

**Teoremă** Orice sistem poate fi adus la una din formele de mai sus prin operațiile enumerate mai sus.

**Reformularea în termeni de matrice**

**Operații asupra sistemului** (pe linii)

1. Înmulțirea unei ecuații cu nr. nenul.
2. Adunarea unei ecuații înmulțită cu un număr la altă ecuație.
3. Interschimbarea a 2 ecuații

**Operații** pe linii **asupra matricei extinse a sistemului**

1. Înmulțirea unei linii cu $\boxed{\text{nr. nenul}}$
2. Adunarea unei linii înmulțită cu un număr la altă linie.
3. Interschimbarea a 2 linii

**Def** $Ax = b$, $\quad \bar{A} = (A \mid b) \in M_{m,(n+1)}$

$A$ $m \times n$

s.n. **matricea extinsă a sistemului**

---

**Def** (Forma eșalon redusă / reduced row echelon form)
O matrice $F \in M_{m,n}(K)$ s.n. în formă eșalon redusă dacă:

1. Pe fiecare linie nenulă, primul element nenul este 1. Acesta s.n. **pivot**.
2. Pe o coloană care conține un pivot, restul coloanei este 0.
3. Pe liniile nenule consecutive $i$ și $i+1$, pivotul de

este 0.

3. Pe liniile nenule consecutive $i$ și $i+1$, pivotul de pe linia $i+1$ este la dreapta pivotului de pe linia $i$.

4. Liniile nenule sunt deasupra liniilor nule.

Ex:
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
e în f.e.r.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
NU,
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
NU

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
este, În general $I_n$ e în forma eșalon redusă! (pt orice $n$)

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{linii nule}\left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$
DA!

**Th** Orice matrice poate fi adusă prin operații pe linii la o formă eșalon redusă. Mai mult, aceasta este unică!

la o formă eșalon redusă. Mai mult, aceasta este unică.

$\underbrace{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}_{}$ forma eșalon redusă!

**Def** Două matrice $A$ și $B$ $m \times n$ sunt echivalente dacă putem ajunge de la $A$ la $B$ prin operații pe linii.

de la $A$ la $B$ $\Updownarrow$ de la $B$ la $A$

Scriem $A \sim B$.

**Reformulare a Th** Orice matrice $A$ este echivalentă cu o (unică) matrice în formă eșalon redusă $F$: $A \sim F$.

$F$ sn formă eșalon redusă a lui $A$.

**Exemplu**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ &L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{aligned}$$

Formez pivoți:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &L_2 \leftrightarrow L_3 \\ &L_2 \leftarrow -L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ \sim \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 & -8 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ \sim \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{8} L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ \sim \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forma eșalon redusă

---

## Aplicații ale formei eșalon redusă

1 Rezolvarea sistemelor

# 1. Rezolvarea sistemelor

Sistem (S) $Ax = b$ $\longrightarrow$ $\bar{A} = (A|b)$ $m \times (n+1)$

$A_{m \times n}$

forma eșalon redusă

sistem (S') $\longleftarrow$ $F$ $(F \sim \bar{A})$

echivalent simplu

De exemplu

$$(S)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

$\leadsto$ matricea extinsă $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$

forma eșalon $\leadsto$ redusă

$$\bar{A} \sim F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ sistemul echivalent

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ sistem echivalent
$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 1 \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

coloanele cu pivoți dau un minor principal

$\Rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat, anume:

- var principale: $x_1, x_2, x_3$
- —"— secundare: $x_4, x_5$ $\quad x_4 = \alpha, \ x_5 = \beta$

Mulțimea soluțiilor $S = \left\{ \left( \overset{x_1}{2 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta}, \overset{x_2}{1 - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta}, 1 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta, \alpha, \beta \right) \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

În general, dacă matricea sistemului este în formă eșalon redusă:

- compatibil $\Leftrightarrow$ nu avem pivot pe ultima coloană
- coloană cu pivot $\Leftrightarrow$ var principală
- compatibil determinat $\Leftrightarrow$ pivoți pe fiecare coloană în afară de ultima

$0 = 1$

2. Aflarea rangului unei matrice

$A_{m \times n} \longrightarrow$ forma eșalon $F$ are același rang

rang $A$ = nr de pivoți din

A  m×n

şi $\boxed{\text{rangul } A = \text{nr de pivoţi din forma eşalon.}}$

## 3. Aflarea inversei unei matrice

$A \in M_n(K)$  n×n.

**Obs** A inversabilă $\iff$ forma eşalon a lui A este $I_n$.

Fie A inversabilă. Construim matricea

$$(A \mid I_n) \in M_{n,2n}(K)$$

Forma eşalon va fi

$$(A \mid I_n) \sim (I_n \mid A^{-1}).$$

---

Operaţii pe linii ale matricii ca înmulţiri la stânga

Fie $n \geq 1$ şi considerăm:

$$\bullet\ D_i(u) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \phantom{1} & \phantom{\ddots} & i & \phantom{\ddots} & \phantom{1} \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & u & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in M_n(K) \qquad u \neq 0$$

Ex $A \in M_{m,n}(K)$. $D_i(u)\cdot A = A$ în care linia $i$ este înmulțită cu $u$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & u & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ u- & u- & \cdots & u- \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

- $$T_{ij}(a) = \begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & | & & \\ & & \ddots & & \\ & & a & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in M_n(K)$$

$i \neq j$ $\qquad a \in K$

$T_{ij}(a)\cdot A = A$ în care la linia $j$ se adaugă linia $i$, înmulțită cu $a$.

- $$P_{ij} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} i & & j \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} i \\ \\ j \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{0} & & \boxed{1} & \\ & & & 1 & & \\ & & \boxed{1} & & \boxed{0} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$i \neq j$

De ex, $n = 4$, $P_{14} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$

$P_{ij} \cdot A = A$ în care <u>liniile</u> $i$ și $j$ sunt interschimbate

<u>Exc2</u> Ce se întâmplă la înmulțirea la dreapta?

$A \cdot D_i(u)$, $\underline{A \cdot T_{ij}(a)}$, $A \cdot P_{ij}$ ?