Cursul 2

Wednesday, October 13, 2021 10:35 PM

Forma eșalon redusă (continuare)

Pentru A matrice

Operații pe linii		Înmulțiri la stânga cu alte matrici
1. Înmulțirea liniei i cu $u \in K$, $u \neq 0$	$\longleftrightarrow$	$D_i(u) \cdot A$, $D_i(u) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & u & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$
2. Adunarea la linia i a liniei j înmulțită cu $a \in K$	$\longleftrightarrow$	$T_{ij}(a) \cdot A$, $i \neq j$, $T_{ij}(a) = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & a & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$
3. Interschimbarea liniilor i și j	$\longleftrightarrow$	$P_{ij} \cdot A$, $P_{ij} = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & i & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \boxed{0} & \boxed{1} & \\ & \boxed{1} & \boxed{0} & \\ & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \end{array}$

De exemplu Pt. $m=2$, $T_{12}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{12}(3) \cdot A = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 3\cdot 0 & 1\cdot 4 + 3\cdot 3 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 1 & 1\cdot 0 + 3\cdot 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 13 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 13 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inverse pt $D_i(u)$, $T_{ij}(a)$, P_{ij}?

	det
$(D_i(u))^{-1} = D_i\left(\frac{1}{u}\right)$ $(u \neq 0!)$	u
$(T_{ij}(a))^{-1} = T_{ij}(-a)$	1
$(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$	-1

$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

În particular, sunt inversabile!

Th $\forall A \in M_{m,n}(K)$, $\exists!$ F $m \times n$ în formă eșalon redusă a.î. $A \sim F$

se poate aduce la F prin operații pe linii

Reformulare $\forall A$ $m \times n$, $\exists!$ F $m \times n$ în formă eșalon redusă a.î. $\exists$ D inversabilă, $D \cdot A = F$

D - compusă din operațiile pe care i le aplici lui A pe parcurs

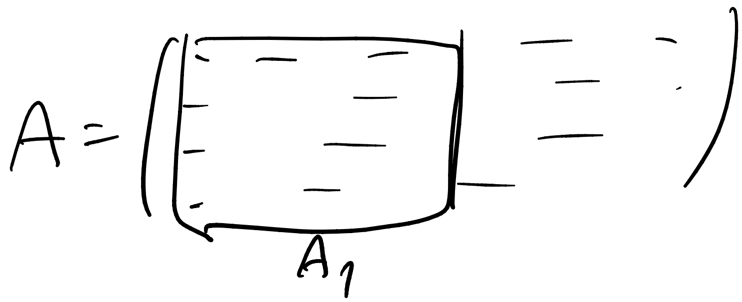
$\Rightarrow D =$ produs de P_{ij}, $D_i(u)$, $T_{ij}(a)$ (toate inversabile)

$\exists$ - există

$\exists!$ - există și e unic(ă)

$\Rightarrow D =$ produs de P_{ij}, $D_i(a)$, $T_{ij}(a)$ (toate inversabile)

<u>Obs</u> Dacă $A = (\underset{m\times k}{A_1} \mid \underset{m\times(n-k)}{A_2})$ și $A = (A_1 \mid A_2) \sim F = (\underset{m\times k}{F_1} \mid \underset{m\times(n-k)}{F_2})$



$\Rightarrow A_1 \sim F_1$ (forma eșalon redusă a lui A_1 e F_1)

<u>Explicație</u> $D\cdot(A_1 \mid A_2) = (F_1 \mid F_2)$

$\Leftrightarrow (D\cdot A_1 \mid D\cdot A_2) = (F_1 \mid F_2) \Rightarrow D\cdot A_1 = F_1$

și F_1 e în formă eșalon!

<u>Consecințe</u>

1. <u>Calculul rangului</u> $A \sim F \Rightarrow D\cdot A = F$ pt un D inversabilă

$\Rightarrow rg(A) = rg(D\cdot A) = rg(F)$

2. <u>Calculul inversei</u> A $n\times n$ inversabilă $\Rightarrow$

2. Calculul inversei A $n \times n$ ...

$\Rightarrow A \sim I_n \Rightarrow \exists D$ (pe care îl putem afla explicit) a.î.

Var 1 $\quad D \cdot A = I_n \Rightarrow D = A^{-1}$.

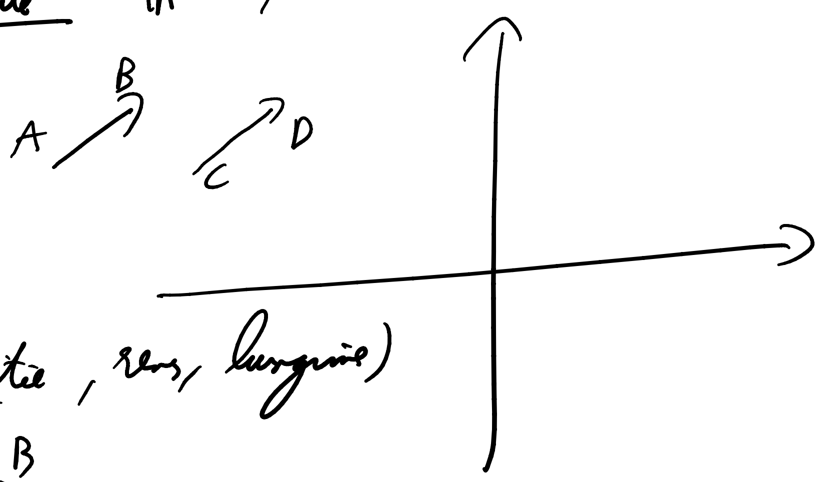
Var 2 (mai rapidă) $\quad n \overbrace{(A \mid I_n)}^{2n} \sim (I_n \mid B)$

$\Rightarrow \exists D$ a.î. $\quad D \cdot (A \mid I_n) = (I_n \mid B)$

$$\begin{aligned} &\| \\ &(D \cdot A \mid D \cdot I_n) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &D \cdot A = I_n \Rightarrow D = A^{-1} \\ &B = D \end{aligned}$$

Spații vectoriale

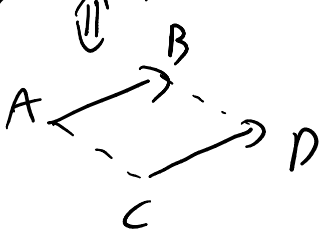
Exemplu/reamintire $\quad \mathbb{R}^2$, lucrăm cu vectori liberi



$\vec{AB} = \vec{CD}$

(au aceeași: direcție, sens, lungime)

$\Updownarrow$



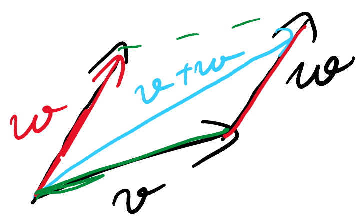
ABDC paralelogram

V = mulțimea vectorilor liberi

ABDC paralelogram

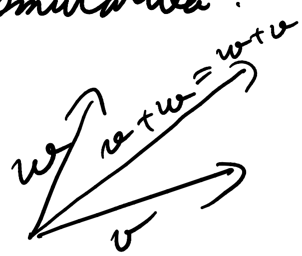
Ce operații pot face cu vectorii liberi (în plan)?

• **Adunare** – regula paralelogramului / triunghiului



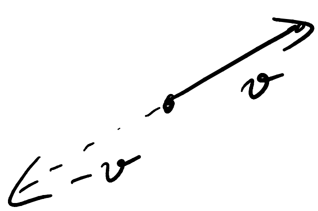
Obs "+" : $V \times V \to V$ are proprietățile:

– e comutativă:

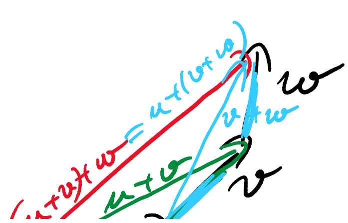


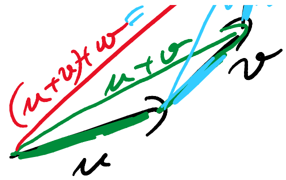
(prin definiția regulii paralelogramului)

– are opus: $\forall v \in V$, $\exists -v$ a.î. $v+(-v)=\vec{0}$

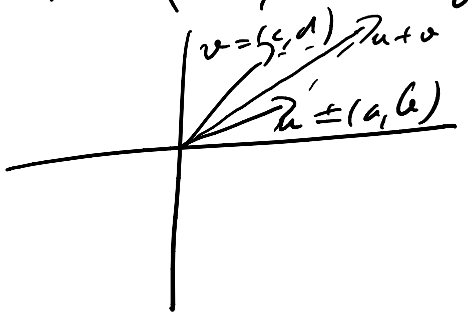


– e asociativă: $\forall u, v, w$, $(u+v)+w = u+(v+w)$



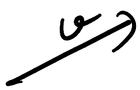


$\Longrightarrow$ $(V, +)$ grup abelian (comutativ)



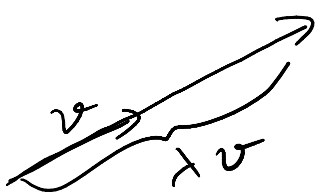
$u+v=(a+c, b+d)$

- **<u>Înmulțire cu scalari (numere din $\mathbb{R}$)</u>**



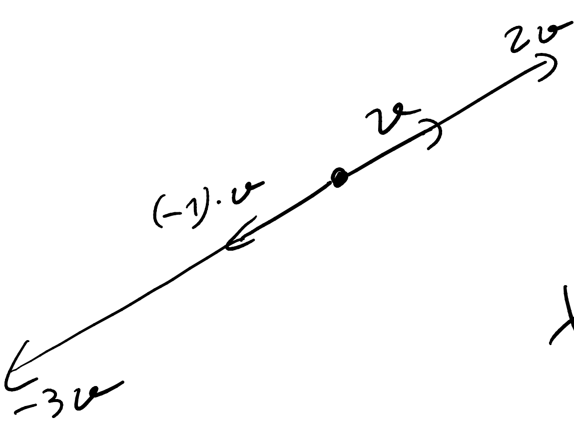
v dat, $\lambda \in \mathbb{R}$ dat

$\Rightarrow$ are sens $\lambda \cdot v \in V$



$$\frac{\|\lambda v\|}{\|v\|} = \lambda$$ raport cu semn

adică
- $\lambda > 0$ și $v, \lambda v$ au același sens
- $\lambda < 0$ și $v, \lambda v$ au sensuri opuse



<u>În coordonate</u>

$v = (x, y)$

$\lambda v = (\lambda x, \lambda y)$.

<u>Deci</u>: $(V,+)$ grup comutativ, $\mathbb{R}$ corp și am o înmulțire <u>externă</u> "$\cdot$": $\mathbb{R}\times V \longrightarrow V$ a.î.:
(între scalari și vectori)

$$(\lambda, v) \longmapsto \lambda\cdot v$$

1. $(\alpha+\beta)\odot v = \alpha\odot v + \beta\odot v$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\forall v\in V$
2. $\alpha\odot(v+w) = \alpha\odot v+\alpha\odot w$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $\forall v,w\in V$
3. $\alpha\odot(\beta\odot v) = (\alpha\cdot\beta)\odot v$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\forall v\in V$.
4. $1\odot v = v$, $\forall v\in V$.

Mai sus am "$\cdot$" pt
- înmulțirea a două numere în $\mathbb{R}$
- înmulțirea unui vector cu un scalar din $\mathbb{R}$

<u>Definiție</u> Fie $(V,+)$ grup comutativ și K corp
(la noi $K\subset\mathbb{C}$, de exemplu $\mathbb{R}$)

V s.n. <u>spațiu vectorial peste corpul K</u> dacă există o înmulțire externă "$\cdot$": $K\times V\longrightarrow V$ astfel încât:

1. $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v+\beta\cdot v$
2. $\alpha\cdot(v+w) = \alpha\cdot v+\alpha\cdot w$, $\forall v,w\in V$
3. $(\alpha\cdot\beta)\cdot v = \alpha\cdot(\beta\cdot v)$, $\forall \alpha,\beta\in K$.

4. $1 \cdot v = v$

<u>Terminologie</u> V este K-spațiu vectorial și se notează V/K.

<u>Informal</u> K-spațiu vectorial: mulțime în care elementele (vectorii) se pot aduna între ei și înmulți cu scalari din K.

Exemple 1. V de mai sus, V = vectori liberi în plan

În coordonate, $V = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

se adună și se înmulțesc cu scalari **pe componente**

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y).$$

$\Rightarrow V$ este $\mathbb{R}$-sp. vect.

2. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,n}\}$ este $\mathbb{R}$-spațiu vectorial

$$(x_1, x_2, \dots x_n) + (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n)$$

$$\alpha \cdot (x_1, \dots x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots \alpha x_n).$$

$\forall i = \overline{1,n}$ înseamnă $\forall i \in \{1,2,\dots n\}$

3. a) Polinoame cu coeficienți reali

$$P = \{\underbrace{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \dots}_{\text{nr finit de termeni}} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

$X^3 - X^2 + 9$ $\quad X^{1001} + X^{1000} + \dots + X + 1$

Ex $X^2 \in \mathcal{P}$, $X^3 - 5X^2 + 9$, $X^{1001} + X^{1000} + \dots + X + 1$

deg = 2 deg = 3 deg = 1001

$f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

$g = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$

$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + \dots + (a_n + b_n) X^n$

$0 \cdot X^4 + X^3 - 5X^2 + 0 \cdot X + 9$

$X^4 + 0X^3 + 0X^2 + X + 0$

$X^4 + X^3 - 5X^2 + X + 9$

$\alpha \cdot f = \alpha a_0 + (\alpha a_1) X + \dots + (\alpha a_n) X^n$

degree

b) $\mathcal{P}_n = \{ f \in \mathcal{P} \mid \deg f \le n \}$, unde

$\deg f =$ cel mai mare n pt care apare X^n

4. $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ este K-spațiu vectorial

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, $B = (b_{ij})_{i,j} \Rightarrow$

$A + B$ tot $m \times n$, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$

$\underset{\substack{\Uparrow \\ K \text{ numar}}}{\alpha} \cdot A = (\alpha a_{ij})_{i,j}$

TOT PE COMPONENTE!

Defapt 4 și 3b) revin la 2.

4. $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ e la fel cu $K^{m \cdot n}$ $\in K$ sp. vectorial

Vom scrie $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ "$\simeq$" $K^{m \cdot n}$

3b. $\mathcal{P}_n$ "$\simeq$" K^{n+1}

5. Spații de funcții

$$\mathcal{F} = \{ f : A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ funcție} \}, \quad A - \text{mulțime arbitrară}$$

$\mathcal{F}$ este $\mathbb{R}$-spațiu vectorial:

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

adunare de numere

$\rightsquigarrow f+g : A \to \mathbb{R}$, $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$

$\alpha \cdot f : A \to \mathbb{R}$, $(\alpha f)(a) = \alpha \cdot f(a)$

înmulțire între numere.

De exemplu, $\mathcal{F}_{[0,1]} = \{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \}$

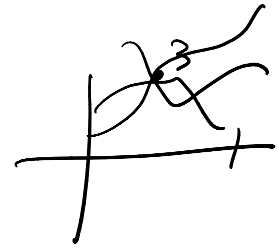
Alte exemple de spații de funcții

$\checkmark$

[illegible]

$\mathcal{C} = \{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$ ✓

$\mathcal{D} = \{ \text{———————} \text{ derivabile}\}$ ✓



$M_1 = \{f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid f(\tfrac{1}{2}) = 3\}$ ✗

<u>Criteriu de excludere:</u> 0 trebuie să aparțină oricărui spațiu vectorial

$M_2 = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \geq 0\}$ ✗ $(-3\cdot f \leq 0)$

$M_3 = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$ ✓ $f(1)=0,\ g(1)=0$: $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 0$

$M_4 = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ crescătoare}\}$ ✗ ($-f$ este descrescătoare)

$M_5 = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f(5) \in \mathbb{Z}\}$ ✗

<u>Obs</u> $\{0\}$ este sp vectorial peste orice corp K

(spațiul nul)

<u>Propoziție / Consecințe</u> (alte proprietăți care rezultă din axiome)

V sp vect peste K

Atunci:

1. $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
2. $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$
3. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

3. $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$
4. $1\cdot v=v$

Atunci:

a) $0_K \cdot v = 0_V$, $\forall v\in V$

b) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$, $\forall \alpha \in K$

c) $\alpha \cdot v = 0_V \iff \alpha = 0_K$ sau $v = 0_V$, $\forall v \in V, \forall \alpha\in K$

d) $(-1_K)\cdot v = -v$, $\forall v \in V$.

Dem a) $0_K \cdot v = (\alpha-\alpha)\cdot v = (\alpha+(-\alpha))\cdot v \overset{Ax1}{=}$

$= \alpha\cdot v + (-\alpha)\cdot v \overset{Ax3}{=} \alpha\cdot v + (-1)\cdot(\alpha\cdot v)$

$\alpha = 1,\ \beta=-1 \Rightarrow 0_K\cdot v = (1-1)\cdot v = (1+(-1))\cdot v \overset{Ax1}{=} 1\cdot v + (-1)\cdot v$

$\overset{Ax4}{=} v + (-1)\cdot v$

$$\boxed{\cancel{0_K\cdot v}} = (0+0)\cdot v = \boxed{0\cdot v + \cancel{0\cdot v}} \Rightarrow 0_V = 0_K\cdot v$$

egalitate în grupul $(V,+)$

(în orice grup: $a = a + a \mid +(-a)$

$\cancel{a-a} = a + \cancel{a-a}$

$0 = a$)

b) la fel

d) $0_K\cdot v = 0_V \leftarrow$ știu

$(1+(-1))\cdot v = 0_V$
$\Vert Ax1$
$1\cdot v + (-1)\cdot v$

$\Rightarrow (-1)\cdot v = -v$

$$1\cdot v + (-1)\cdot v \overset{A\times4}{=} v + (-1)\cdot v \implies (-1)\cdot v = -v$$

c) Fie $\alpha \in K$, $v \in V$ a.î. $\alpha \cdot v = 0$

$\Rightarrow \alpha = 0_K$ ok!

$\alpha \neq 0_K$, $\alpha \cdot v = 0_V \mid \cdot \frac{1}{\alpha}$

$$\boxed{\alpha \neq 0 \overset{K\text{ corp comutativ}}{\implies} \exists \frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha\cdot v) = \frac{1}{\alpha}\cdot 0_V \overset{b)}{=} 0_V$$

$$\overset{A\times3}{=} \left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right)\cdot v = 1\cdot v \overset{A\times4}{=} v$$

Subspații vectoriale

Def Fie V un K-spațiu vectorial și $W \subset V$ submulțime.

W s.n. subspațiu vectorial al lui V dacă:

- $\forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$
- $\forall \alpha \in K, \forall w \in W \Rightarrow \alpha w \in W$.

$$\boxed{\text{Notație } W \leq_K V}$$

• $\forall \alpha \in K, \forall w \in W \Rightarrow \alpha w \in W$.

Obs 1. W este el însuşi un spaţiu vectorial cu operaţiile "$+|_{W\times W}$" şi "$\cdot|_{K\times W}$".

2. $W \leq_K V \Rightarrow 0_V \in W$ (orice subspaţiu conţine vectorul nul)

2,5. $W \leq_K V \Rightarrow W$ e şi subgrup în V

3 (Exc!) $W \leq_K V \Leftrightarrow \boxed{\forall \alpha, \beta \in K \text{ şi } \forall w_1, w_2 \in W, \ \alpha w_1 + \beta w_2 \in W}$

folosit în practică

Exemple 1. $V = \mathbb{R}^n$ (n fixat) $= \{(x_1, x_2, \dots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$W = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\ ???\ }\}$ ai $W \leq V$?

• $W = \{\underline{\qquad\qquad} \mid x_i \in \cancel{\mathbb{N}}\ \mathbb{Z}, \forall i = \overline{1,n}\}$ X pt că $\sqrt{2}(1,2,3)$

$= (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
$\notin \mathbb{Z}$

• $W = \{\underline{\qquad\qquad} \mid x_i \in \mathbb{Z}, x_i = 2l\}$ X

• $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$

$= \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \mid x_1, x_2, \dots x_{n-1} \in \mathbb{R}\} \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$

• $W = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_3 = x_5 = 0\} \leq \mathbb{R}^n$

(sau oricare, oricâte)

• $W = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots x_n) = 0\}$

unde $f: \mathbb{R}^n \to ?$

Merge $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots x_n) = \cos x_1$?

$(x_1, \dots x_n)$ și $(y_1, \dots y_n)$ și știu $\left.\begin{array}{l}\cos x_1 = 0 \\ \cos y_1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$

$(x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$ are $\cos(x_1 + y_1) = 0$

$\left.\begin{array}{l}x_1 = \frac{\pi}{2} \\ y_1 = \frac{3\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2\pi$, $\cos 2\pi = 1$.

• $W = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 2x_1 - 3x_3 = 0\}$ ✓

$= 5$ ✗

<u>Întrebare</u> Care sunt funcțiile "bune" ?

2. $V = P$ spațiul polinoamelor

$\mathcal{P}_n \leq_{\mathbb{R}} \mathcal{P}$

poli de grad n

3. $V = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $W = \{ A \in V \mid a_{11} = 0 \}$

sau $a_{nm} = 0$

4. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

• $W = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det A = 0 \}$ X

$$\underset{\det 0}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{\det 0}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{\det \neq 0}{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$$

• $W = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA \}$

<u>Dem</u> Vrem : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall A, B \in W \Rightarrow \alpha A + \beta B \in W$

Fie $\alpha, \beta \in K$, $A, B \in W$

$${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha \underbrace{{}^tA}_{=A} + \beta \underbrace{{}^tB}_{=B} = \alpha A + \beta B$$

$\Rightarrow \alpha A + \beta B \in W.$

• $W' = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = -{}^tA \}$

$${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB = -\alpha A - \beta B = -(\alpha A + \beta B).$$

$$^t(\alpha A+\beta B) = \alpha \underset{\substack{\| \\ -A}}{{}^tA} + \beta\, {}^tB = -\alpha A - \beta B = -(\alpha A+\beta B)$$

• $\underline{sl_n(\mathbb{R})} = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0 \} \subseteq M_n(\mathbb{R})$

$$\left(tr(\alpha A+\beta B) = \alpha\, tr A + \beta\, tr B \right)$$

5. Subspații ale spațiilor de funcții — aproape toate de la capitolul de spații de funcții

$\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$\mathcal{G} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ continuă $\}$ ✓

f crescătoare ✗

derivabilă ✓

$f(5) = 0$ ✓

$f(5) = -3$ ✗

— —

— —

6. <u>Mulțimea de soluții a unui sistem liniar</u> $\boxed{\text{omogen}}$

$A \in M_{\ldots}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A\cdot x = 0_{\mathbb{R}^m} \}$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S} \le_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$

i.e. = id est (adică)

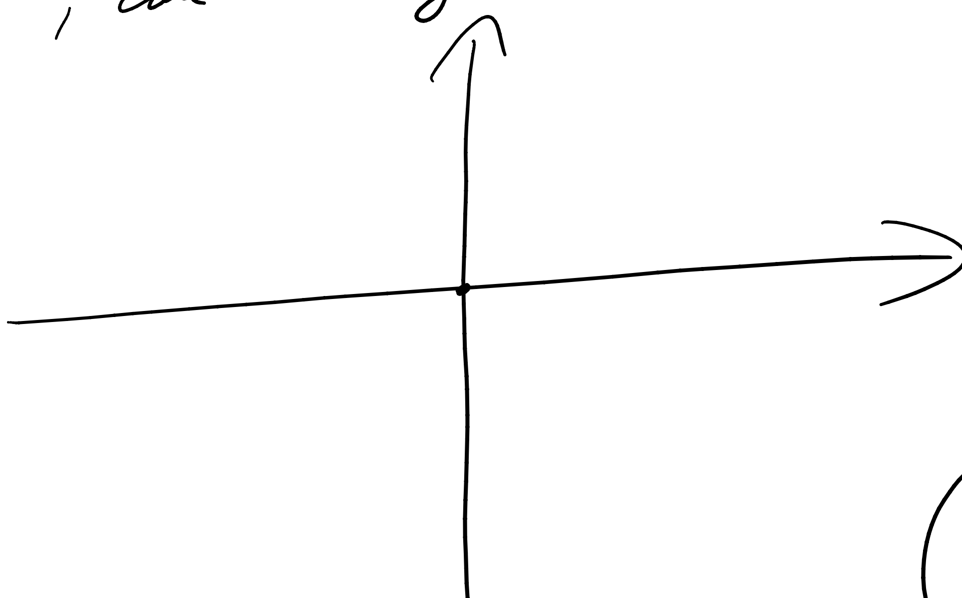
Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $x, y \in \mathcal{S}$ (adică soluţii)

Vrem $\alpha x + \beta y$ soluţie i.e. $A(\alpha x + \beta y) = 0$

Dar $A(\alpha x + \beta y) = \alpha \underbrace{Ax}_{0} + \beta \underbrace{Ay}_{0} = 0.$

$V = \mathbb{R}^2$, care sunt (geometric) subspaţiile?

$\mathbb{R}^2$

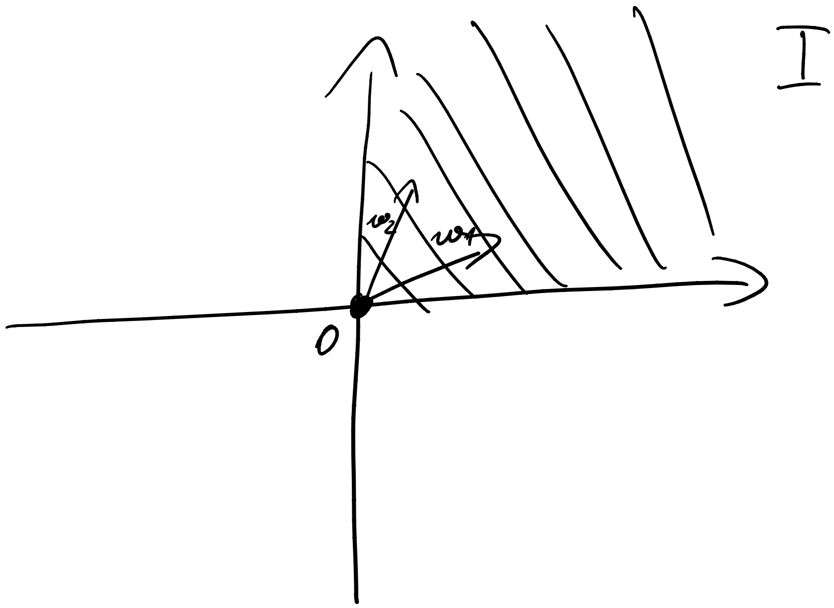


$\underline{P_1}$ $w_1 + w_2 \in W$

$\underline{P_2}$ $\alpha w \in W$

$-\ \{0\} \le V$ şi $V \le V$.

- Altele:

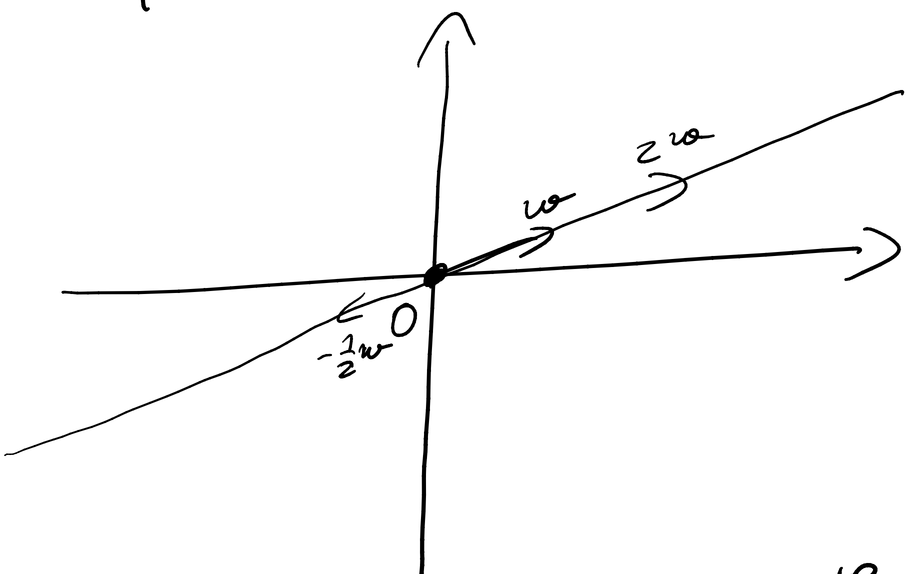


P_1 ✓

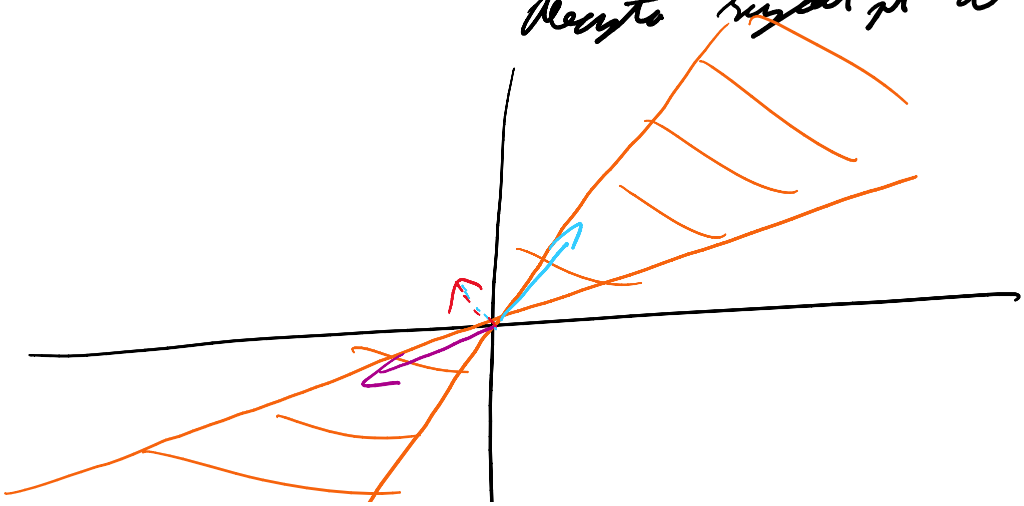
P_2 X

(pt $\alpha < 0$)

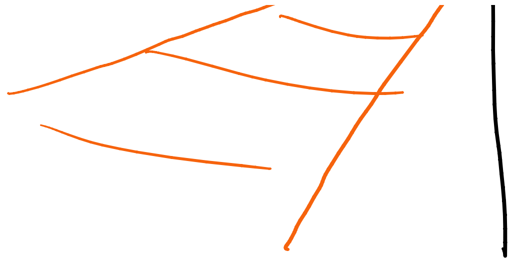
$W = \{ w \in \mathbb{R}^2 \mid w$ în cadranul I$\}$

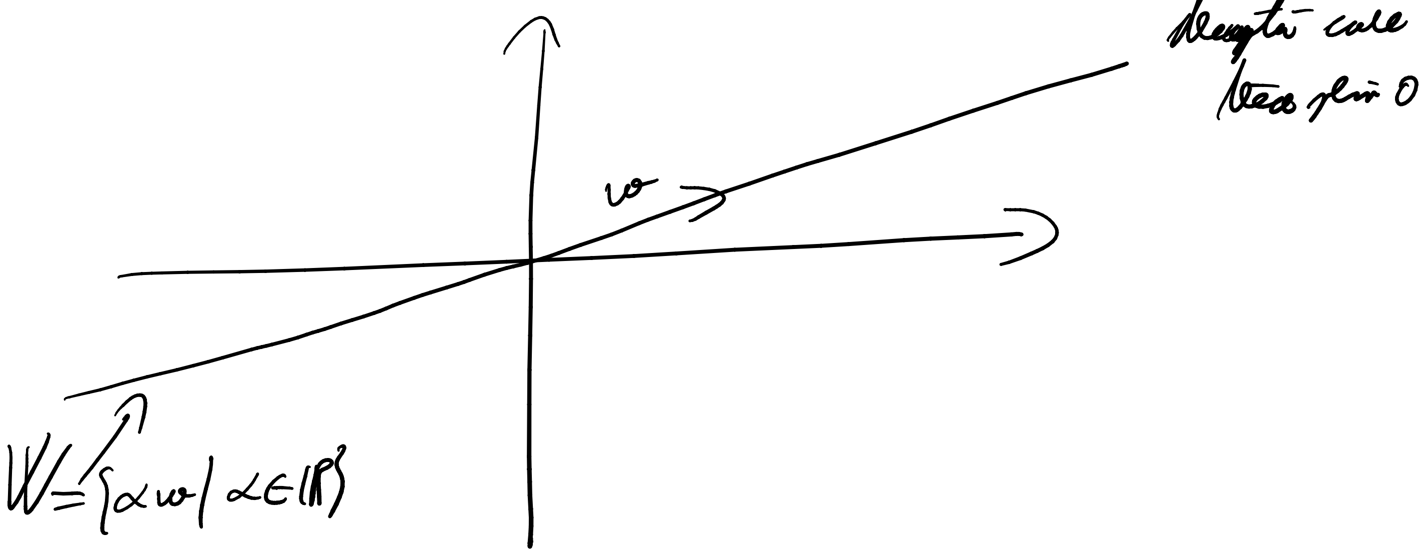


Dacă $w \in W \Rightarrow \underbrace{\alpha w \in W, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}_{\text{dreapta suport pt } w}$



Are P_2, dar nu P_1





Vom dem. că acestea sunt toate:

- $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- dreapta prin origine
- $\mathbb{R}^2$