I. Serii de numere reale

Definiția 1. Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ și fie $s_n = \sum\limits_{k\geq 1}^{n} x_k$ șirul sumelor parțiale asociat. Seria $\sum\limits_n x_n$ se numește convergentă dacă șirul s_n este convergent și atunci limita șirului s_n este suma seriei, notată $\sum\limits_n x_n$. În caz contrar, seria se numește divergentă.

Definiția 2. Seria $\sum\limits_n x_n$ se numește absolut convergentă dacă seria $\sum\limits_n |x_n|$ este convergentă. Orice serie absolut convergentă este convergentă, reciproca fiind falsa.

Seria geometrică. Fie seria geometrică cu rația q, $\sum\limits_{n\geq 1} q^n$. Atunci

$$\sum_{n\geq 1} q^n = \begin{cases} \text{convergentă, cu suma } \frac{q}{1-q} & \text{, dacă } q \in (-1, 1) \\ \text{divergentă} & \text{, altfel} \end{cases}$$

Seria armonică generalizată. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și fie seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. Atunci

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{convergentă} & \text{, dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă} & \text{, altfel} \end{cases}$$

II. Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

1. **Criteriul raportului (pentru expresii cu rapoarte, factorial, etc.).** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Atunci

$$\sum_n a_n = \begin{cases} \text{convergentă} & \text{, dacă } l < 1 \\ \text{divergentă} & \text{, dacă } l > 1 \\ \text{nu știm} & \text{, dacă } l = 1. \text{ Încercăm să folosim 5.} \end{cases}$$

2. **Criteriul radicalului (pentru funcții putere, etc.).** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Atunci

$$\sum_n a_n = \begin{cases} \text{convergentă} & \text{, dacă } l < 1 \\ \text{divergentă} & \text{, dacă } l > 1 \\ \text{nu știm} & \text{, dacă } l = 1. \text{ Încercăm să folosim 6.} \end{cases}$$

3. **Criteriul comparației cu limite (pentru ln de ceva care tinde la 1, pentru funcții trigonometrice).** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și seria $\sum\limits_n b_n$ (pe care trebuie să o gasim noi) astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$. Atunci seriile $\sum\limits_n a_n$ și $\sum\limits_n b_n$ au aceeași natură.

4. **Criteriul condensării (pentru ln de ceva care tinde la infinit).** Fie $a_n \geq a_{n+1} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Atunci seriile $\sum\limits_n a_n$ și $\sum\limits_n 2^n \cdot a_{2^n}$ au aceeași natură.

5. **Criteriul Raabe-Duhamel.** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Atunci

$$\sum_n a_n = \begin{cases} \text{convergentă} & \text{, dacă } l > 1 \\ \text{divergentă} & \text{, dacă } l < 1 \\ \text{nu știm} & \text{, dacă } l = 1. \text{ Încercăm să folosim 3.} \end{cases}$$

6. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, atunci seria $\sum\limits_n x_n$ este divergentă.

7. **Criteriul comparației.** Fie seria $\sum\limits_n a_n$ și seria $\sum\limits_n b_n$ și presupunem ca $a_n \leq b_n$. Atunci

   - Dacă $\sum\limits_n b_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_n a_n$ este convergentă.
   - Dacă $\sum\limits_n a_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_n b_n$ este divergentă.

III. Criterii de convergență pentru serii cu termeni alternanți

1. **Criteriul Leibniz.** Fie seria cu termeni alternanți $\sum\limits_n (-1)^n \cdot a_n$. Dacă a_n este șir descrescător care tinde la 0, atunci seria este convergentă.

2. **Criteriul Abel-Dirichlet.** Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ și $(y_n)_n \subseteq \mathbb{R}$. Dacă este îndeplinit unul dintre cele doua seturi de condiții:

   - șirul $(x_n)_n$ este descrescător și tinde la 0, și există $N \in \mathbb{R}$ astfel încât $|y_1 + y_2 + ... + y_n| \leq N, \forall n \in \mathbb{N}$;
   - șirul $(x_n)_n$ este monoton și mărginit și seria $\sum\limits_n y_n$ este convergentă.

   atunci, seria $\sum\limits_n x_n \cdot y_n$ este convergentă.

IV. Exerciții

1. Să se studieze natura următoarelor serii:

   (a)
$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(n-m+1)(n-m+2)...(n-1)n^2}{n!}.$$

   (b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}...\cos\frac{\alpha}{2^n}, \alpha \in (0,\pi).$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n}.$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n-1}).$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)\sqrt{n+1}x^{2n}}, x \in (0, \infty).$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} x^n, x \in (0, \infty).$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}, a > 0.$$

2. Să se studieze convergența și absolut convergența următoarelor serii:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n - \ln n}.$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \arctan \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}.$$