Curs 11

Fie $f \in C^2([a,b])$.

Conform Formulei lui Taylor cu rest Lagrange, pentru orice $h>0$ (nu foarte mare), avem:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(c)\frac{h^2}{2}, \quad c \in (x-h, x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + f''(c)\frac{h}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} + O(h) \Rightarrow f'(x) \simeq \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \quad (1)$$

<u>Definiție</u>. Relația (1) s.n. formula de aproximare prin diferențe finite regresive pentru $f'(x)$.

<u>Propoziție</u>. Are loc estimarea erorii de trunchiere:

$$e_t = \left| f'(x) - \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \right| = |f''(c)|\frac{h}{2} \le \underbrace{M\frac{h}{2}}_{=O(h)}, \text{ unde}$$

$$M = \max_{t \in [x-h, x]} |f''(t)|.$$

Fie $f \in C^3([a,b])$.

Conform Formulei lui Taylor cu rest Lagrange, pentru orice

$h>0$ (nu foarte mare), avem:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+f'''(c_1)\cdot\frac{h^3}{6},\ c_1\in(x,x+h).$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+f''(x)\cdot\frac{h^2}{2}-f'''(c_2)\frac{h^3}{6},\ c_2\in(x-h,x).$$

Din prima relație o scădem pe cea de-a doua și obținem:

$$f(x+h)-f(x-h)=f'(x)\cdot 2h+\left[f'''(c_1)+f'''(c_2)\right]\frac{h^3}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\left[f'''(c_1)+f'''(c_2)\right]\cdot\frac{h^2}{12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+O(h^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\qquad(2)$$

<u>Def.</u>: Relația (2) s.n. formula de aproximare prin diferențe finite centrale pentru $f'(x)$.

<u>Propoziție.</u> Are loc estimarea erorii de trunchiere:

$$e_t=\left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right|=\left|f^{(3)}(c_1)+f^{(3)}(c_2)\right|\frac{h^2}{12}\leq$$

$$\leq M\frac{h^2}{2} = O(h^2), \text{ unde } M = \max_{t\in[x,x+h]} |f^{(3)}(t)| + \max_{t\in[x-h,x]} |f^{(3)}(t)|.$$

Fie $f\in C^4([a,b])$.

Conform Formulei lui Taylor cu rest Lagrange, pentru orice $h>0$ (nu foarte mare), avem:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(c_1)\frac{h^4}{24},$$

$c_1\in(x, x+h)$.

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{6} + f^{(4)}(c_2)\frac{h^4}{24},$$

$c_2\in(x-h, x)$.

Adunăm aceste relații și obținem:

$$f(x+h)+f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + [f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2)]\frac{h^4}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} - [f^{(4)}(c_1)+f^{(4)}(c_2)]\frac{h^2}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (3)$$

Def.: Relația (3) s.n. formula de aproximare prin diferențe finite centrale pentru $f''(x)$.

Propoziție. Are loc estimarea erorii de trunchiere:

$$e_t = \left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| =$$

$$= \left| f^{(4)}(c_1) + f^{(4)}(c_2) \right| \cdot \frac{h^2}{24} \leq M \frac{h^2}{24} = O(h^2), \text{ unde}$$

$$M = \max_{t \in [x, x+h]} |f^{(4)}(t)| + \max_{t \in [x-h, x]} |f^{(4)}(t)|.$$

Metoda de extrapolare Richardson

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilă.

Presupunem că avem o formulă de aproximare pentru $f'(x)$ de forma $f'(x) = \Phi_1(x,h) + O(h)$.

Cu ajutorul funcției Φ_1 se poate construi recurent un șir de funcții $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ a.î., $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n(x,h)$ aproximează $f'(x)$ cu ordinul $O(h^n)$.

Pentru simplitatea scrierii vom omite x ca argument al funcției Φ_n.

Avem $f'(x) = \Phi_1(h) + O(h) = \Phi_1(h) + a_1 h + a_2 h^2 + \dots$ (1)

Relația (1) are loc pentru orice $h>0$. Scriem această relație pentru $\frac{h}{2}$.

Obținem: $f'(x) = \Phi_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_1 \cdot \frac{h}{2} + a_2 \cdot \frac{h^2}{2^2} + \dots$ (2)

Înmulțim relația (2) cu 2^1 și scădem relația (1).

Avem: $2^1 f'(x) - f'(x) = 2^1 \Phi_1\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi_1(h) + a_2\left(\frac{1}{2} - 1\right) h^2 + \dots \Rightarrow f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2^1-1}\left[2^1 \Phi_1\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi_1(h)\right]}_{=\Phi_2(h)} + b_2 h^2 + b_3 h^3 + \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2^1-1}\left[\left(2^1-1+1\right)\Phi_1\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi_1(h)\right]}_{=\Phi_2(h)} + b_2 h^2 + b_3 h^3 + \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \underbrace{\Phi_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2^1-1}\left[\Phi_1\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi_1(h)\right]}_{=\Phi_2(h)} + b_2 h^2 + b_3 h^3 + \dots$$

Așadar $f'(x) = \Phi_2(h) + b_2 h^2 + b_3 h^3 + \dots = \Phi_2(h) + O(h^2)$ (3)

Relația (3) are loc pentru orice $h>0$. Scriem această relație pentru $\frac{h}{2}$.

Avem $f'(x) = \Phi_2\left(\frac{h}{2}\right) + b_2 \frac{h^2}{2^2} + b_3 \frac{h^3}{2^3} + \dots \quad (4)$

Efectuăm următoarea operație: $2^2 \cdot (4) - (3)$ (înmulțim relația (4) cu 2^2 și scădem relația (3)).

Obținem: $2^2 f'(x) - f'(x) = 2^2 \Phi_2\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi_2(h) +$

$$+ b_3\left(\frac{1}{2} - 1\right) h^3 + \dots \Rightarrow f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2^2-1}\left[2^2 \Phi_2\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi_2(h)\right]}_{= \Phi_3(h)} +$$

$$+ c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots =$$

$$= \underbrace{\Phi_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2^2-1}\left[\Phi_2\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi_2(h)\right]}_{= \Phi_3(h)} + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots .$$

Am obținut $f'(x) = \Phi_3(h) + c_3 h^3 + c_4 h^4 + \dots = \Phi_3(h) + O(h^3)$.

Inductiv avem $f'(x) = \Phi_n(h) + d_n h^n + d_{n+1} h^{n+1} + \dots =$

$$= \Phi_n(h) + O(h^n), \text{ unde } \Phi_n(h) = \frac{1}{2^{n-1}-1}\left[2^{n-1} \Phi_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \Phi_{n-1}(h)\right] = \Phi_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2^{n-1}-1}\left[\Phi_{n-1}\left(\frac{h}{2}\right) - \Phi_{n-1}(h)\right].$$

Vom construi următorul tabel:

$\frac{h}{2^n}$	$O(h)$	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$
h	$\Phi_1(h)$			
$\frac{h}{2}$	$\Phi_1\left(\frac{h}{2}\right)$	$\Phi_2(h)$		
$\frac{h}{2^2}$	$\Phi_1\left(\frac{h}{2^2}\right)$	$\Phi_2\left(\frac{h}{2}\right)$	$\Phi_3(h)$	
$\frac{h}{2^3}$	$\Phi_1\left(\frac{h}{2^3}\right)$	$\Phi_2\left(\frac{h}{2^3}\right)$	$\Phi_3\left(\frac{h}{2}\right)$	$\Phi_4(h)$

Integrare numerică

Formule de cuadratură

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă și fie $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ (1)

Def.: S.n. formulă de cuadratură a lui f o formulă de aproximare a integralei (1) de forma

$$I_n(f)=\sum_{k=1}^{n+1} w_k f(x_k) \quad (2),$$ unde $w_k\in\mathbb{R}$ $\forall k=\overline{1,n+1}$

și x_k $\forall k=\overline{1,n+1}$ sunt a.î. $a\le x_1<x_2<\ldots<x_{n+1}\le b$.

Def.: 1) Elementele w_k $\forall k=\overline{1,n+1}$ din definiția precedentă s.n. coeficienții (sau ponderile) cuadraturii (2).

2) Elementele x_k $\forall k=\overline{1,n+1}$ din definiția precedentă s.n. nodurile cuadraturii (2).

Def.: Mărimea $e_t(f)=|I(f)-I_n(f)|$ s.n. eroarea cuadraturii (2).