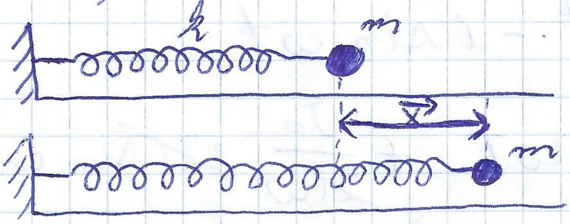
Recapitulare mecanică

I. Subiecte teoretice:

1. Scrieți ecuația de mișcare pentru un corp punctiform de masă m legat de un resort fixat, care are constanta elastică k, în limita de valabilitate a legii Hooke (ecuația oscilatorului liniar armonic). Deduceți elongația, viteza, accelerația corpului, în absența câmpului gravitațional.



$$\left.\begin{aligned} \vec{F}_e &= -k\vec{x} \\ m\vec{a} &= \vec{F}_e \\ \vec{a} &= \ddot{\vec{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -k\vec{x} = m\ddot{\vec{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{x}} + k\vec{x} = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \\ &\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x = c\,e^{kt} \qquad \dot{x} = ck\,e^{kt} \qquad \ddot{x} = ck^2 e^{kt}$$

$$c k^2 e^{kt} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x k^2 + x\omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(k^2 + \omega^2) = 0 \Rightarrow k^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = -\omega^2 \Rightarrow k = \pm i\omega$$

$$x = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \qquad x_0 = c_1 + c_2$$

$$\dot{x} = v = i\omega(c_1 e^{i\omega t} - c_2 e^{-i\omega t})$$

$$v_0 = i\omega(c_1 - c_2)$$

$$\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 \\ v_0 = i\omega(c_1 - c_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = x_0 - c_2 \\ v_0 = i\omega(x_0 - 2c_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{v_0 + i\omega x_0}{2i\omega} \\ c_2 = -\frac{v_0 - i\omega x_0}{2i\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \left(\frac{v_0}{i\omega} + x_0\right)/2 \\ c_2 = \left(x_0 - \frac{v_0}{i\omega}\right)/2 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{v_0}{2i\omega}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$$\begin{cases} e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \\ e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t \end{cases}$$

elongația $x(t) = \frac{x_0}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\cos\omega t + \frac{v_0}{\cancel{2i}\omega} \cdot \cancel{2i}\sin\omega t \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

viteza $v(t) = \dot{x}(t) = -x_0\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t$

accelerația $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -x_0\omega^2\cos\omega t - v_0\omega\sin\omega t =$

$$= -\omega^2\left(x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\right) = -\omega^2 \cdot x$$

$$x_0 = A\cos\alpha$$

$$v_0 = \pm A\omega\sin\alpha$$

elongația $x(t) = A(\cos\omega t\cos\alpha - \sin\omega t\sin\alpha) = A\cos(\omega t + \alpha)$

viteza $v(t) = -A\omega\sin\omega t\cos\alpha - A\omega\sin\alpha\cos\omega t =$

$$= -A\omega(\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha) =$$

$$= -A\omega\sin(\omega t + \alpha)$$

accelerația $a(t) = -\omega^2 x = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha)$