Curs 12

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ și $a\le x_1<x_2<\ldots<x_n<$
$<x_{n+1}=b$.

Presupunem că f este integrabilă. Notăm $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Considerăm $P_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $P_n(x)=\sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)f(x_k)$,

unde $L_{n,k}(x)=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$ $\forall x\in[a,b]$, $\forall k=\overline{1,n+1}$.

Fie $I_n(f)=\int_a^b P_n(x)\,dx=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n+1}L_{n,k}(x)f(x_k)\right)dx=$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\underbrace{\left(\int_a^b L_{n,k}(x)\,dx\right)}_{\overset{\text{not.}}{=}\,w_k}f(x_k)=\sum_{k=1}^{n+1}w_k f(x_k)\quad(1)$$

Formulele de cuadratură Newton-Cotes

Def.: 1) Dacă nodurile cuadraturii (1) sunt echidistante și $x_1=a$, $x_{n+1}=b$, spunem că (1) este formulă de cuadratură Newton-Cotes închisă cu $n+1$ noduri. În acest caz avem: $\begin{cases} x_1 = a, \ x_{n+1} = b \\ h = \dfrac{b-a}{n} \\ x_i = a + h(i-1) \ \forall i = \overline{1, n+1}. \end{cases}$

2) Dacă nodurile cuadraturii (1) sunt echidistante, iar $x_1 > a$, $x_{n+1} < b$, spunem că (1) este formulă de cuadratură Newton-Cotes deschisă cu $n+1$ noduri. În acest caz considerăm discretizarea: $\begin{cases} x_1 > a, \ x_{n+1} < b \\ x_0 = a, \ x_{n+2} = b \\ h = \dfrac{b-a}{n+2} \\ x_i = a + hi \ \forall i = \overline{0, n+2}. \end{cases}$

Schimbări de variabile pentru formulele de cuadratură Newton-Cotes

1) S.V. pentru formula de cuadratură Newton-Cotes închisă

$x = a + h(t-1)$, $t \in [1, n+1]$, $dx = h\,dt$.

În acest caz, $L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \dfrac{x - x_i}{x_k - x_i} =$

$$= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{(a+h(t-1)) - (a+h(i-1))}{(a+h(k-1)) - (a+h(i-1))} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{\cancel{h}(t-i)}{\cancel{h}(k-i)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i} \text{ și}$$

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,dx = h\int_1^{n+1}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\right)dt \quad \forall k=\overline{1,n+1}.$$

2) <u>S. V. pentru formula de cuadratură Newton-Cotes deschisă</u>

$x = a+ht$, $t\in[0,n+2]$, $dx = h\,dt$.

În acest caz, $L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}$ și

$$w_k = h\int_0^{n+2}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\right)dt \quad \forall k=\overline{1,n+1}.$$

<u>Cazuri particulare</u>

1. <u>Formula de cuadratură a trapezului</u>

Considerăm formula de cuadratură Newton-Cotes închisă cu $n=1$.

Nodurile cuadraturii sunt: $x_1 = \underset{\substack{\parallel\\ a+h\cdot 0}}{a}$ și $x_2 = \underset{\substack{\parallel\\ a+h\cdot 1}}{b}$, $h = b-a$.

Formula de cuadratură este $I_1(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$, unde

$$w_1 = h\int_1^2 \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{2} \frac{t-i}{1-i}\right) dt = h\int_1^2 \frac{t-2}{1-2}\, dt = \dots = \frac{h}{2},$$

$$w_2 = h\int_1^2 \frac{t-1}{2-1}\, dt = \dots = \frac{h}{2}.$$

Am obținut formula de cuadratură a trapezului

$$I_1(f) = \frac{h}{2} f(a) + \frac{h}{2} f(b) = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right].$$

Estimarea erorii formulei de cuadratură a trapezului.

Dacă $f\in C^2([a,b])$, atunci $\mathcal{E}_t(f) = |I(f) - I_1(f)| =$
$= \left| -\frac{f''(c)}{12} h^3 \right| = O(h^3)$, cu $c\in(a,b)$.

2. Formula de cuadratură Simpson

Considerăm formula de cuadratură Newton-Cotes închisă cu $n=2$.

Nodurile cuadraturii sunt: $x_1 = \underset{a+h\cdot 0}{\overset{\parallel}{a}}$, $x_2 = \underset{a+h\cdot 1}{\overset{\parallel}{\frac{a+b}{2}}}$,

$x_3 = \underset{\underset{a+h\cdot 2}{\parallel}}{b}$, $h = \dfrac{b-a}{2}$.

Formula de cuadratură este $I_2(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$, unde

$$w_1 = h\int_1^3 \left(\frac{t-2}{1-2}\cdot\frac{t-3}{1-3}\right)dt = \ldots = \frac{h}{3},$$

$$w_2 = h\int_1^3 \left(\frac{t-1}{2-1}\cdot\frac{t-3}{2-3}\right)dt = \ldots = \frac{4h}{3},$$

$$w_3 = h\int_1^3 \left(\frac{t-1}{3-1}\cdot\frac{t-2}{3-2}\right)dt = \ldots = \frac{h}{3}.$$

Am obținut formula de cuadratură Simpson

$$I_2(f) = \frac{h}{3}f(a) + \frac{4h}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{h}{3}f(b) =$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

<u>Estimarea erorii formulei de cuadratură Simpson</u>. Dacă $f \in C^4([a,b])$, atunci $e_t(f) = \left| -\frac{f^{(4)}(c)}{90}h^5 \right| = O(h^5)$, $c \in (a,b)$.

3. Formula de cuadratură a dreptunghiului

Considerăm formula de cuadratură Newton-Cotes deschisă cu $n=0$.

Singurul nod al cuadraturii este $x_1 = \frac{a+b}{2}$.

Avem $\underset{a+h\cdot 0}{\underset{\parallel}{x_0 = a}}$, $\underset{a+h\cdot 1}{\underset{\parallel}{x_1 = \frac{a+b}{2}}}$, $\underset{a+h\cdot 2}{\underset{\parallel}{x_2 = b}}$, $h = \frac{b-a}{2}$.

[Convenție. $L_{0,1}(x) = 1 \ \forall x \in [a,b]$.

Formula de cuadratură este $I_0(f) = w_1 f(x_1)$, unde

$$w_1 = \int_a^b L_{0,1}(x)\,dx = \int_a^b 1\,dx = b-a.$$

Am obținut formula de cuadratură a dreptunghiului

$$I_0(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2h\, f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

[Estimarea erorii formulei de cuadratură a dreptunghiului.

Dacă $f \in C^2([a,b])$, atunci $e_t(f) = |I(f) - I_0(f)| =$

$$= \left| \frac{f''(c)}{3} h^3 \right| = O(h^3), \ c \in (a,b).$$

Formule de cuadratură sumate

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă și $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

1. Formula de cuadratură sumată a trapezului

Fie diviziunea echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1} = b$, $m \in \mathbb{N}^*$, a intervalului $[a,b]$.

Avem $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m} [x_k, x_{k+1}]$, unde $x_k = a + h(k-1)$ $\forall$
$\forall k = \overline{1,m+1}$, $h = \dfrac{b-a}{m}$.

Are loc identitatea $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$.

În fiecare subinterval $[x_k, x_{k+1}]$ considerăm nodurile de interpolare x_k şi x_{k+1} $\forall$ $k = \overline{1,m}$.

Aplicăm formula de cuadratură a trapezului pe fiecare subinterval $[x_k, x_{k+1}]$ $\forall$ $k = \overline{1,m}$.

Obţinem $I_{1,m}(f) = \sum_{k=1}^{m} I_1^k(f) = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right] =$

$= \dfrac{h}{2} \sum_{k=1}^{m} \left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right] = \dfrac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots +\right.$

$\left. + f(x_m) + f(x_{m+1})\right] = \dfrac{h}{2}\left[f(x_1) + 2\sum_{k=2}^{m} f(x_k) + f(x_{m+1})\right]$,

unde $I_{1,m}(f)$ reprezintă formula de cuadratură sumată a trapezului, iar $I_1^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură a trapezului pe subintervalul $[x_k, x_{k+1}]$ $\forall k=\overline{1,m}$.

<u>Estimarea erorii formulei de cuadratură sumată a trapezului</u>. Eroarea formulei de cuadratură sumată a trapezului este de ordinul $O(h^2)$.

2. <u>Formula de cuadratură sumată Simpson</u>

Fie diviziunea echidistantă $a=x_1<x_2<\ldots<x_{2m}<x_{2m+1}=b$, $m\in\mathbb{N}^*$, a intervalului $[a,b]$.

Avem $[a,b]=\bigcup\limits_{k=1}^{m}[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$, unde

$x_k=a+h(k-1)$ $\forall k=\overline{1,2m+1}$, $h=\dfrac{b-a}{2m}$.

Are loc identitatea $I(f)=\sum\limits_{k=1}^{m}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}}f(x)\,dx$.

În fiecare subinterval $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$ considerăm nodurile de interpolare x_{2k-1}, x_{2k} și x_{2k+1} $\forall k=\overline{1,m}$.

Pe fiecare subinterval $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$ $\forall k=\overline{1,m}$ aplicăm formula de cuadratură Simpson.

Obținem $I_{2,m}(f)=\sum\limits_{k=1}^{m}I_2^k(f)=\sum\limits_{k=1}^{m}\Big[\dfrac{x_{2k+1}-x_{2k-1}}{6}\cdot$

$$\cdot\left(f(x_{2k-1})+4f(x_{2k})+f(x_{2k+1})\right)\Bigg)\Bigg] = \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{2h}{6}\left(f(x_{2k-1})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+4f(x_{2k})+f(x_{2k+1})\right)\right] = \frac{h}{3}\left(f(x_1)+4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k})+\right.$$

$$\left.+2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k+1})+f(x_{2m+1})\right),$$ unde $I_{2,m}(f)$ reprezintă formula de cuadratură sumată Simpson, iar $I_2^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură Simpson pe subintervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$ $\forall\, k=\overline{1,m}$.

Estimarea erorii formulei de cuadratură sumată Simpson

Eroarea formulei de cuadratură sumată Simpson este de ordinul $O(h^4)$.

3. **Formula de cuadratură sumată a dreptunghiului**

Fie diviziunea echidistantă $a=x_1<x_2<\ldots<x_{2m}<x_{2m+1}=b$, $m\in\mathbb{N}^*$, a intervalului $[a,b]$.

Avem $[a,b]=\bigcup_{k=1}^{m}[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$, unde

$x_k=a+h(k-1)$ $\forall\, k=\overline{1,2m+1}$, $h=\dfrac{b-a}{2m}$.

Are loc identitatea $I(f)=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x)\,dx$.

În fiecare subinterval $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$ considerăm nodul de interpolare x_{2k} $\forall$ $k=\overline{1,m}$.

Pe fiecare subinterval $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$ aplicăm formula de cuadratură a dreptunghiului $\forall$ $k=\overline{1,m}$.

Obținem $I_{0,m}(f)=\sum_{k=1}^{m} I_0^k(f) = \sum_{k=1}^{m}(x_{2k+1}-x_{2k-1})f(x_{2k}) = 2h\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k})$, unde $I_{0,m}(f)$ reprezintă formula de cuadratură sumată a dreptunghiului, iar $I_0^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură a dreptunghiului pe subintervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$ $\forall$ $k=\overline{1,m}$.

Estimarea erorii formulei de cuadratură sumată a dreptunghiului. Eroarea formulei de cuadratură sumată a dreptunghiului este de ordinul $O(h^2)$.