I. Exerciții rămase de data trecută

1. Folosind criteriul Cauchy, arătați că următorul șir este convergent:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, n \geq 1.$$

2. Arătați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_1 \in [1, 2]$, este convergent și calculați $\lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+1}.$$

4. Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

5. Studiați convergența șirului de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| < \frac{3n}{4n-1} \cdot |x_{n+1} - x_n|, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

II. Limita superioară și inferioară a unui șir

Definiție 1. Fie $(x_n)_n$ un șir de numere reale și $l \in \bar{\mathbb{R}}$. l se numește **punct limită** al șirului (x_n) dacă există un subșir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al șirului (x_n) astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = l$.

Notație 2. Notăm cu $\mathcal{L}(x_n) = \{l \in \bar{\mathbb{R}} | l\text{-punct limită al șirului } (x_n)\}$ mulțimea punctelor limită ale șirului (x_n).

Exemplu 3. Fie șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = (-1)^n$. Atunci $\mathcal{L}(x_n) = \{-1, 1\}$.

Observația 4. Condiția necesară si suficientă ca un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să aibă limită este ca mulțimea punctelor sale limită să se reducă la un singur punct: $|\mathcal{L}(x_n)| = 1$.

Definiția 5. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Limita superioară a șirului (x_n) este

$$\limsup(x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = sup(\mathcal{L}(x_n))$$

iar limita inferioară a șirului (x_n)este

$$\liminf(x_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = inf(\mathcal{L}(x_n)).$$

III. Exerciții

1. Determinați limita superioară și inferioară a șirurilor:

   (a)
$$x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}, n \geq 0.$$

   (b)
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n} \cdot \left[1+\left(\frac{-1}{6}\right)^n\right] + 3\sin\frac{n\pi}{2}, n \geq 1.$$

   (c)
$$x_n = \sin\left(\frac{2n\pi+\pi}{4}\right) + (-1)^{3n}\sqrt[n]{\ln n}, n \geq 2.$$

   (d)
$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} + \left(\frac{-1}{6}\right)^n + \cos n\pi, n \geq 0.$$

   (e)
$$x_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1} + \frac{n^2}{2n^2+3} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n \geq 1.$$