

4. Să se afle amplitudinea inițială A_0 și faza inițială α a oscilațiilor amortizate, știind constantele m, k, r și condițiile ~~sees~~ inițiale: poziția x_0 și viteza inițială v_0 la $t=0$.

$$\begin{cases} x = A_0 e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha) \\ \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \\ v = \dot{x} = -A_0 b e^{-bt} \cos(\omega' t + \alpha) - A_0 \omega' e^{-bt} \sin(\omega' t + \alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 = A_0 \cos \alpha \\ v(0) = v_0 = -A_0 b \cos \alpha - A_0 \omega' \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = A_0 \cos \alpha \\ v_0 = -A_0 (b \cos \alpha + \omega' \sin \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_0}{A_0} \\ v_0 = -x_0 b - A_0 \omega' \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A_0^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_0}{A_0} \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A_0^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_0}{A_0} \\ v_0 = -x_0 b - \sqrt{\omega_0^2 A_0^2 - A_0^2 b^2 - \omega_0^2 x_0^2 + b^2 x_0^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_0}{A_0} \\ v_0 + x_0 b = -\sqrt{\omega_0^2 A_0^2 - A_0^2 b^2 - \omega_0^2 x_0^2 + b^2 x_0^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_0}{A_0} \\ v_0^2 + 2v_0 x_0 b + \cancel{x_0^2 b^2} = \omega_0^2 A_0^2 - A_0^2 b^2 - \omega_0^2 x_0^2 + \cancel{b^2 x_0^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x_0}{A_0} \\ v_0^2 + 2v_0 x_0 b + \omega_0^2 x_0^2 = A_0^2 (\omega_0^2 - b^2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{\frac{\omega'^2 x_0^2}{v_0^2 + 2v_0 x_0 b + \omega_0^2 x_0^2}} \\ A_0 = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2v_0 x_0 b + \omega_0^2 x_0^2}{\omega'^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \arccos \sqrt{\frac{\omega'^2 x_0^2}{v_0^2 + 2v_0 x_0 b + \omega_0^2 x_0^2}} \\ A_0 = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2v_0 x_0 b + \omega_0^2 x_0^2}{\omega'^2}} \end{cases}$$