Noţiunea de funcţie integrabilă Riemann

Definiţie. *Se numeşte partiţie (diviziune) a intervalului închis şi mărginit* $[a,b]$*, din* $\mathbb{R}$*, un sistem de puncte* $P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ *din* $[a,b]$ *astfel încât* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$*, unde* $n \in \mathbb{N}$*. Cea mai mare dintre lungimile intervalelor* $[x_0, x_1]$*,* $[x_1, x_2]$*, ...,* $[x_{n-1}, x_n]$ *se numeşte norma partiţiei* P *şi se notează cu* $\|P\|$*. Aşadar*

$$\|P\| = \max_{i \in \{1,2,...,n\}} (x_i - x_{i-1}).$$

Definiţie. *Fie* $P = (x_0, x_1, ..., x_n)$ *o partiţie a intervalului* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$*. Un sistem de* n *puncte* $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$*, cu proprietatea că* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *pentru orice* $i \in \{1, 2, ..., n\}$*, se numeşte sistem de puncte intermediare asociat partiţiei* P*.*

Definiţie. *Fie* $P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ *o partiţie a lui* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$*,* $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *un sistem de puncte intermediare asociat partiţiei* P *şi o funcţie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Numărul real* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$*, care va fi notat prin* $\sigma_P(f, \xi)$*, se numeşte suma Riemann asociată funcţiei* f*, partiţiei* P *şi sistemului de puncte intermediare* ξ*.*

Propoziţie. *Pentru orice funcţie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) Există un număr real I_f *cu proprietatea că şirul sumelor Riemann* $(\sigma_{P_n}(f, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge către* I_f *pentru orice şir de partiţii* $(P_n)_n$ *ale intervalului* $[a,b]$*, cu* $\lim\limits_{n \to \infty} \|P_n\| = 0$*, şi pentru orice sisteme de puncte intermediare* ξ^n *asociate partiţiilor* P_n*.*

ii) Există un număr real I_f *cu proprietatea că pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $|\sigma_P(f, \xi) - I_f| < \varepsilon$ *pentru orice partiţie* P *a intervalului* $[a,b]$ *cu* $\|P\| < \delta_\varepsilon$ *şi orice* ξ *sistem de puncte intermediare asociat partiţiei* P*.*

iii) Pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât* $|\sigma_P(f, \xi) - \sigma_Q(f, \xi')| < \varepsilon$ *pentru orice partiţii* P *ale intervalului* $[a,b]$ *cu* $\|P\| < \delta_\varepsilon$ *şi* $\|Q\| < \delta_\varepsilon$ *şi orice* ξ *şi* ξ' *sisteme de puncte intermediare asociat partiţiilor* P*şi respectiv* Q*.*

iv) Şirul sumelor Riemann $(\sigma_{P_n}(f, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ *este Cauchy pentru orice şir de partiţii* $(P_n)_n$ *ale intervalului* $[a,b]$*, cu* $\lim\limits_{n \to \infty} \|P_n\| = 0$*, şi pentru orice sisteme de puncte intermediare* ξ^n *asociate partiţiilor* P_n*.*

Definiţie. *O funcţie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte integrabilă Riemann dacă satisface condiţiile echivalente din teorema precedentă. În acest caz, I_f se numeşte integrala Riemann sau integrala definită a funcţiei f pe intervalul $[a,b]$ şi se notează $\int_a^b f(x)dx$.*

Teoremă. *Modificarea valorilor unei funcţii integrabile într-un număr finit de puncte nu afectează integrabilitatea acesteia şi nici valoarea integralei.*

Teorema de liniaritate a integralei Riemann. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $f+g$ şi αf sunt integrabile Riemann,*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

şi

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Demonstraţie.

Observăm că pentru orice partiţie P a intervalului $[a,b]$ avem

$\sigma_P(f+g,\xi) = \sum_{i=1}^{n} (f+g)(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sigma_P(f,\xi) + \sigma_P(g,\xi)$

şi

$\sigma_P(\alpha f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha f)(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha\sigma_P(f,\xi)$.

Deoarece f este integrabilă Riemann rezultă că există un număr real I_f cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta'_\varepsilon > 0$ astfel încât $|\sigma_P(f,\xi) - I_f| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice partiţie P a intervalului $[a,b]$ cu $\|P\| < \delta'_\varepsilon$ şi orice ξ sistem de puncte intermediare asociat partiţiei P.

Deoarece g este integrabilă Riemann rezultă că există un număr real I_g cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta''_\varepsilon > 0$ astfel încât $|\sigma_P(g,\xi) - I_g| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice partiţie P a intervalului $[a,b]$ cu $\|P\| < \delta''_\varepsilon$ şi orice ξ sistem de puncte intermediare asociat partiţiei P.

Notăm $I_{f+g} = I_f + I_g$ şi $\delta_\varepsilon = \max\{\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon\}$. Atunci pentru orice partiţie P a intervalului $[a,b]$ cu $\|P\| < \delta_\varepsilon$ şi orice ξ sistem de puncte intermediare asociat partiţiei P avem

$|\sigma_P(f+g,\xi) - I_{f+g}| = |\sigma_P(f,\xi) + \sigma_P(g,\xi) - I_f - I_g| \le |\sigma_P(f,\xi) - I_f| + |\sigma_P(g,\xi) - I_g| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

şi

$|\sigma_P(\alpha f,\xi)_P - \alpha I_f| = |\alpha|\,|\sigma_P(f,\xi) - I_f| < |\alpha|\,\varepsilon.$ $\square$

Caracterizarea integrabilităţii Riemann cu ajutorul sumelor Darboux

Noţiunile de sumă Darboux inferioară şi sumă Darboux superioară ne vor permite să obţinem o caracterizare a funcţiilor integrabile Riemann care nu face apel la punctele intermediare.

Teorema privind mărginirea funcţiilor integrabile Riemann. *Dacă funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, atunci f este mărginită.*

Prin urmare, în studiul integrabilităţii Riemann, restrângerea la clasa funcţiilor mărginite este naturală.

Definiţie. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi $P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ o partiţie a intervalului $[a,b]$. Pentru orice $i \in \{1,2,...,n\}$ considerăm $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ şi $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Sumele $U(f,P) = S_P(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ şi $L(f,P) = s_P(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ se numesc sumele Darboux ale funcţiei f corespunzătoare partiţiei P. Mai precis, $U(f,P)$ se numeşte suma Darboux superioară, iar $L(f,P)$ se numeşte suma Darboux inferioară.*

Observaţii. *În contextul definiţiei anterioare, avem:*

1. $L(f,P) \le U(f,P)$.

2. $L(f,P) \le L(f,Q) \le U(f,Q) \le U(f,P)$, *pentru orice rafinare Q a lui P.*

3. *Dacă P şi Q sunt partiţii ale lui $[a,b]$, atunci* $L(f,P) \le U(f,Q)$.

Lemă. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$* o *funcţie mărginită, P o partiţie a intervalului $[a,b]$ şi ξ un sistem de puncte intermediare asociat partiţiei P.*

Atunci:

α) $L(f,P) \le \sigma_P(f,\xi) \le U(f,P)$.

β) $L(f,P)=\inf\{\sigma_P(f,\xi) \mid \xi$ sistem de puncte intermediare asociat partiţiei $P\}$ şi $U(f,P)=\sup\{\sigma_P(f,\xi) \mid \xi$ sistem de puncte intermediare asociat partiţiei $P\}$.

Demonstraţie. Fie $P=(x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n)$.

α) este imediată.

β) Conform cu α), $L(f,P)$ este un minorant al mulţimii $\{\sigma_P(f,\xi) \mid \xi$ este un sistem de puncte intermediare asociat partiţiei $P\}$. Vom arăta că el este cel mai mare minorant al acestei mulţimi, ceea ne asigură validitatea primei egalităţi. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există un minorant m al mulţimii $\{\sigma_P(f,\xi) \mid \xi$ este un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $P\}$ cu proprietatea că $L(f,P)<m$. Pentru $\varepsilon>0$ cu proprietatea că $L(f,P)+\varepsilon<m$, conform definiţiei marginii inferioare, există $\xi^0=(\xi_1^0,\xi_2^0,...,\xi_n^0)$ un sistem de puncte intermediare asociat partiţiei P cu proprietatea că $f(\xi_i^0)-\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)<\frac{\varepsilon}{b-a}$ pentru orice $i\in\{1,2,...,n\}$. Atunci

$$\sigma_P(f,\xi^0)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^0)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i^0)-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)](x_i-x_{i-1})<\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i-x_{i-1})=\varepsilon,$$

deci $\sigma_P(f,\xi^0)<L(f,P)+\varepsilon<m$, ceea ce contrazice faptul că m este un minorant al mulţimii $\{\sigma_P(f,\xi) \mid \xi$ este un sistem de puncte intermediare asociat partiţiei $P\}$. Similar se justifică şi cea de a doua egalitate de la β). $\square$

Definiţie. *Pentru funcţia mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definim:*

a) integrala inferioară a funcţiei f ca fiind $(L)\int\limits_a^b f(x)dx=\underline{\int}_b^a f(x)dx=\sup\{L(f,P) \mid P$ partiţie a lui $[a,b]\}$;

b) integrala superioară a funcţiei f ca fiind $(U)\int\limits_a^b f(x)dx=\overline{\int}_b^a f(x)dx=\inf\{U(f,P) \mid P$ partiţie a lui $[a,b]\}$.

Observaţie. *Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci $(L)\int\limits_a^b f(x)dx$*

şi $(U)\int\limits_a^b f(x)dx$ *există, sunt finite şi* $(L)\int\limits_a^b f(x)dx \leq (U)\int\limits_a^b f(x)dx$.

Lemă. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *o funcţie mărginită. Atunci pentru orice* $\varepsilon>0$ *există* $\delta_\varepsilon>0$ *astfel încât* $U(f,P_\varepsilon)-(U)\int\limits_a^b f(x)dx<\varepsilon$ *pentru orice partiţie* P *a lui* $[a,b]$ *cu proprietatea că* $\|P\|<\delta_\varepsilon$.

Teorema de caracterizare a integrabilităţii Riemann cu ajutorul sumelor Darboux. *Pentru orice funcţie mărginită* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f *este integrabilă;*

ii) $(L)\int\limits_a^b f(x)dx=(U)\int\limits_a^b f(x)dx$.

iii) pentru orice $\varepsilon>0$ *există* $\delta_\varepsilon>0$ *astfel încât pentru orice partiţie* P *a lui* $[a,b]$ *cu proprietatea că* $\|P\|<\delta_\varepsilon$ *să avem* $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

iv) pentru orice $\varepsilon>0$ *există o partiţie* P_ε *a lui* $[a,b]$ *cu proprietatea că* $U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$.

Demonstraţie.

i)$\Rightarrow$iii) Deoarece f este integrabilă, există un număr real I_f cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice partiţie P a intervalului $[a,b]$ cu $\|P\|<\delta_\varepsilon$ şi orice sistem ξ de puncte intermediare asociat diviziunii P, are loc inegalitatea $|\sigma_P(f,\xi)-I_f|<\varepsilon$, i.e. $I_f-\frac{\varepsilon}{4}<\sigma_P(f,\xi)<I_f+\frac{\varepsilon}{4}$. Deoarece $L(f,P)=\inf\{\sigma_P(f,\xi)\mid \xi$ sistem de puncte intermediare asociat partiţiei $P\}$ şi $U(f,P)=\sup\{\sigma_P(f,\xi)\mid\xi$ sistem de puncte intermediare asociat partiţiei $P\}$, rezultă că $I_f-\frac{\varepsilon}{4}\leq L(f,P_\varepsilon)\leq U(f,P_\varepsilon)\leq I_f+\frac{\varepsilon}{4}$. Deci $0\leq U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

iii)$\Rightarrow$iv) evident.

iv)$\Rightarrow$ii) Reamintim că $L(f,P_\varepsilon)\leq(L)\int\limits_a^b f(x)dx\leq(U)\int\limits_a^b f(x)dx\leq U(f,P_\varepsilon)$. Rezultă că $0\leq(U)\int\limits_a^b f(x)dx-(L)\int\limits_a^b f(x)dx\leq U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon$ pentru orice $\varepsilon>0$. Deci $(L)\int\limits_a^b f(x)dx=(U)\int\limits_a^b f(x)dx$.

ii)$\Rightarrow$i) Fie $I_f=(L)\int\limits_a^b f(x)dx=(U)\int\limits_a^b f(x)dx$. Conform lemei anterioare, pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice partiţie P a lui

$[a,b]$ cu proprietatea că $\|P\| < \delta_\varepsilon$ *avem* $0 \leq U(f,P) - (U)\int\limits_a^b f(x)dx = U(f,P) - I_f < \frac{\varepsilon}{2}$ şi $0 \leq (L)\int\limits_a^b f(x)dx - L(f,P) = I_f - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$. Rezultă că $L(f,P) \leq I_f \leq U(f,P)$, $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ şi $L(f,P) \leq \sigma_P(f,\xi) \leq U(f,P)$ pentru orice sistem ξ de puncte intermediare asociat diviziunii P. În concluzie obţinem că $|\sigma_P(f,\xi) - I_f| \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Deci f este intgrabilă Riemann. $\square$

Teorema de caracterizare a integrabilităţii Riemann cu ajutorul integralelor Darboux. *Pentru orice funcţie mărginită* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f *este integrabilă.*

ii) $(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (U)\int\limits_a^b f(x)dx$.

În acest caz, avem $(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (U)\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Demonstraţie. i)⇒ii) Deoarece f este integrabilă, conform teoremei anterioare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie P_ε a lui $[a,b]$ cu proprietatea că $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$. Prin urmare avem $(U)\int\limits_a^b f(x)dx - (L)\int\limits_a^b f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)$, de unde deducem că $0 \leq (U)\int\limits_a^b f(x)dx - (L)\int\limits_a^b f(x)dx < \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Prin urmare $(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (U)\int\limits_a^b f(x)dx$.

ii)⇒i) Conform definiţiilor integralei inferioare a funcţiei f şi a integralei superioare a funcţiei f, pentru orice $\varepsilon > 0$ există P_ε^1 şi P_ε^2 partiţii ale lui $[a,b]$ astfel încât $U(f,P_\varepsilon^1) < (U)\int\limits_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}$ şi $(L)\int\limits_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_\varepsilon^2)$. Atunci, cum $P_\varepsilon = P_\varepsilon^1 \cup P_\varepsilon^2$ constituie o rafinare atât a lui P_ε^1, cât şi a lui P_ε^2, obţinem că $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) \leq U(f,P_\varepsilon^1) - L(f,P_\varepsilon^2) \leq (U)\int\limits_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} - (L)\int\limits_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, deci, conform teoremei precedente, f este integrabilă.

Arătăm acum că $(L)\int\limits_a^b f(x)dx = (U)\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Într-adevăr, fie $I = (L)\int\limits_a^b f(x)dx = (U)\int\limits_a^b f(x)dx$. Atunci cu notaţiile anterioare avem $L(f,P_\varepsilon) \leq I = (L)\int\limits_a^b f(x)dx = (U)\int\limits_a^b f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon)$ şi $L(f,P_\varepsilon) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon)$, de unde se obţine că $\int\limits_a^b f = I$. □

Teoremă. *Orice funcţie continuă* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann.*
Demonstraţie.

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece funcţia f este continuă pe $[a,b]$ rezultă că este uniform continuă pe $[a,b]$, deci există un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in [a,b]$ cu proprietatea că $|x - y| < \delta_\varepsilon$. Rezultă că pentru o partiţie a intervalului $[a,b]$, $P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$, astfel încât $\|P\| < \delta_\varepsilon$ avem

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(y) \right)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{y\in[x_{i-1},x_i]} f(y) \right)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{y\in[x_{i-1},x_i]} - f(y) \right)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - f(y) \right)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |f(x) - f(y)|\,(x_i - x_{i-1}) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon\,(b-a). \ \square$$

Teoremă. *Orice funcţie monotonă* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann.*

Demonstraţie.

Fie $\varepsilon > 0$ şi $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{b-a+1}$.Fie $P = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$ o partiţie a intervalului $[a,b]$ astfel încât $\|P\| < \delta_\varepsilon$. Atunci

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)(x_i-x_{i-1})\leq$$
$$\leq\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\delta_\varepsilon=\left(f(b)-f(a)\right)\delta_\varepsilon<\varepsilon.\ \square$$

Definiţie. *O submulţime A a lui $\mathbb{R}$ se numeşte neglijabilă Lebesgue (sau de măsură Lebesgue nulă) dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un şir $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervale deschise şi mărginite satisfăcând următoarele două proprietăţi: i) $A\subseteq\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$; ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l(I_n)<\varepsilon$.*

Observaţii.

1. *Orice mulţime cel mult numărabilă este neglijabilă Lebesgue.*

2. *Orice mulţime de măsură Jordan nulă este neglijabilă Lebesgue. Reciproca nu este valabilă*, aşa cum ne arată mulţimea $[0,1]\cap\mathbb{Q}$.

3. *Orice reuniune numărabilă de mulţimi neglijabile Lebesgue este neglijabilă Lebesgue.* Într-adevăr, fie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o familie numărabilă de mulţimi neglijabile Lebesgue şi $\varepsilon>0$ arbitrar dar fixat. Atunci, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ există un şir $(I_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ de intervale deschise şi mărginite satisfăcând următoarele două proprietăţi: i) $A_n\subseteq\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k^n$; ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l(I_k^n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$. Drept urmare avem: i) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\subseteq\bigcup\limits_{k,n\in\mathbb{N}} I_k^n$; ii) limita şirului sumelor parţiale ale şirului $(l(I_k^n))_{k,n\in\mathbb{N}}$ este mai mică decât ε.

Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann. *Pentru orice funcţie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este integrabilă.

ii) f este mărginită şi mulţimea punctelor în care f este discontinuă este neglijabilă Lebesgue.

Teoremă (Darboux-Lebesgue).*Pentru orice funcţie mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este integrabilă.

ii) $(L)\int\limits_a^b f(x)dx=(U)\int\limits_a^b f(x)dx$.

iii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie P_ε a lui $[a,b]$ cu proprietatea că $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.

iv) $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice partiţie P a lui $[a,b]$ astfel încât $\|P\| < \delta_\varepsilon$ *să avem $U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$.*

v) f este integrabilă şi mulţimea punctelor în care f este discontinuă este neglijabilă Lebesgue.

Noţiunea de primitivă

Definiţie. *Vom spune că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al axei reale, admite primitive dacă există o funcţie derivabilă $F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât $F^{'} = f$. Funcţia F se numeşte o primitivă a lui f şi se notează cu $\int f$ sau cu $\int f(x)dx$.*

În continuare prezentăm primitivele câtorva funcţii uzuale:

1. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^n$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, avem $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

2. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^\alpha$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq (0,\infty)$ este un interval şi $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, avem $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

3. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = a^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, avem $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

4. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ este un interval, avem $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

5. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R}\setminus\{-a,a\}$ este un interval şi $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, avem $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

6. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, avem $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

7. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \sin x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

8. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \cos x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

9. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un interval, avem $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

10. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un interval, avem $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

11. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = tgx$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un interval, avem $\displaystyle\int tgx dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

12. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = ctgx$ pentru orice $x \in J$, unde $J \subseteq \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este un interval, avem $\displaystyle\int ctgx dx = \ln|\sin x| + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

13. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avem $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

14. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ pentru orice $x \in J$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $J \subseteq (-\infty, -a)$ sau $J \subseteq (a, \infty)$ este un interval, avem $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

15. Pentru funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ pentru orice $x \in J$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $J \subseteq (-a, a)$ este un interval, avem $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + \mathcal{C}$, unde $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$.

Teoremă (Formula Leibniz-Newton). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie care satisface următoarele două proprietăţi:*

i) f este integrabilă Riemann;

ii) f admite primitive.

Atunci $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *unde* F *este o primitivă arbitrară a lui* f.

Demonstraţie. Fie $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de partiţii ale intervalului $[a,b]$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$, unde $P_n = (x_0^n, x_1^n, ..., x_{m_n-1}^n, x_{m_n}^n)$. Având în vedere Teorema lui Lagrange, deducem că, pentru orice $i \in \{1,2,...,m_n\}$, există $\xi_i^n \in (x_{i-1}^n, x_i^n)$ astfel încât $F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = F'(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n)$, i.e. $F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n) = f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n)$. Dacă vom considera sistemul de puncte intermediare $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, ..., \xi_{m_n-1}^n, \xi_{m_n}^n)$ asociat partiţiei P_n a intervalului $[a,b]$, atunci $\sigma_{P_n}(f,\xi^n) = \sum\limits_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n) = \sum\limits_{i=1}^{m_n}(F(x_i^n) - F(x_{i-1}^n)) = F(x_{m_n}^n) - F(x_0^n) = F(b) - F(a)$, i.e.

$$\sigma_{P_n}(f,\xi^n) = F(b) - F(a), \tag{1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece f este integrabilă şi $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$, conform Teoremei anterioare, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{P_n}(f,\xi^n) = \int\limits_a^b f(x)dx$, de unde, conform cu (1), obţinem $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. $\square$

Observaţie. *Orice funcţie continuă satisface condiţiile i) şi ii) din Teorema Leibniz-Newton.*

Exemple

1. Să se calculeze $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}dx$.

Avem

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}dx = \ln(x + \sqrt{2+x^2}) \,\Big|_0^{\sqrt{2}} = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

2. Să se calculeze $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1}dx$.

Avem

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1}dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+(\frac{1}{2})^2}dx = \frac{1}{2}arctg2x \,\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

Temă. Să se calculeze:

i) $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

ii) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^3}dx$;

iii) $\int\limits_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$;

iv) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x}dx$;

v) $\int\limits_{0}^{1} e^x dx$;

vi) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Teoremele clasice ale calculului integral

Teorema de liniaritate a integralei Riemann. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $f+g$ şi αf sunt integrabile Riemann,*

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

şi

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Teorema de aditivitate de domeniu pentru integrala Riemann. *Pentru $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a,b)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f este integrabilă Riemann;

ii) f este integrabilă Riemann pe $[a,c]$ şi pe $[b,c]$.

În acest caz, avem

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Convenţie. *Fie I un interval nedegenerat al axei reale şi $f : I \to R$ integrabilă Riemann pe orice $[a, b] \subseteq I$. Pentru orice $a, b \in I$, $a < b$, adoptăm următoarea convenţie:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Exemplu. Să se calculeze $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$.

Avem

$$\int_{-1}^{1} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)dx + \int_0^1 xdx = -\frac{x^2}{2} \mid_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2} \mid_0^1 = 1.$$

Teorema de "monotonie" a integralei Riemann. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile Riemann astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Atunci*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplu. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

Deoarece $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$ pentru orice $x \in [0, 1]$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$, utilizând Teorema de "monotonie" a integralei Riemann, obţinem că

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde, cu ajutorul lemei cleştelui, concluzionăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = 0$.

Temă. Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n e^x dx$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$.

Teorema de medie pentru integrala Riemann. *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continuă. Atunci există* $c\in[a,b]$ *astfel încât*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=(b-a)f(c).$$

Demonstraţie. Conform teoremei lui Weierstrass, există $x_*,x^*\in[a,b]$ astfel încât

$$f(x_*)\le f(x)\le f(x^*),$$

pentru orice $x\in[a,b]$.

Utilizând Teorema de "monotonie" a integralei Riemann, deducem că

$$f(x_*)\le\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}\le f(x^*),$$

de unde, cum f are proprietatea lui Darboux (căci este continuă), există $c\in[a,b]$ astfel încât $f(c)=\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$, i.e. concluzia. $\square$

Teoremă. *Pentru orice* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continuă, funcţia* $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, *dată de* $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ *pentru orice* $x\in[a,b]$, *este derivabilă şi* $F'=f$ (i.e. F este o primitivă a lui f).

Demonstraţie. Pentru $c\in[a,b]$ arbitrar ales, vom arăta că există $\lim\limits_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}$ şi că valoarea ei este $f(c)$.

În acest scop, vom considera un şir arbitrar $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elemente din $[a,b]\setminus\{c\}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=c$, şi vom dovedi că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(u_n)-F(c)}{u_n-c}=f(c).$$

Într-adevăr, conform Teoremei de medie pentru integrala Riemann, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există c_n, între c şi u_n, cu proprietatea că

$$F(u_n) - F(c) = f(c_n)(u_n - c),$$

de unde

$$\frac{F(u_n) - F(c)}{u_n - c} = f(c_n). \tag{1}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ (căci $|c_n - c| \leq |u_n - c|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = c$) şi f este continuă în c, prin trecere la limită în (1), după $n \to \infty$, deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F(u_n)-F(c)}{u_n-c}$ şi că valoarea sa este $f(c)$. $\square$

Teoremă. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann şi funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, dată de $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci*

a) Funcţia F este uniform continuă.

b) Funcţia F este derivabilă în punctele în care f este continuă.

Demonstraţie a) .

Deoarece funcţia f este mărginită există $M > 0$ astfel încât $|f| \leq M$. Atunci pentru $x, y \in [a,b]$ cu $x < y$ avem $|F(y) - F(x)| = \left|\int\limits_x^y f(t)dt\right| \leq M(y-x)$. $\square$

Exemplu. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt}{\sin^3 x}$.

Conform teoremei de medie, pentru orice $x \geq 0$, există $c_x \in [0,x]$ astfel încât $\int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt = x\ln(1+c_x^2)$, de unde deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt = 0$. Similar se arată că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt = 0$, deci

$$\lim_{x\to 0} \int_0^x \ln(1+t^2)dt = 0.$$

Deoarece

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt\right)'}{(\sin^3 x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{3\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{3},$$

concluzionăm că

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \ln(1+t^2)dt}{\sin^3 x}=\frac{1}{3}.$$

Temă. Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x t^n\sqrt{1+t^2}dt}{x^{n+2}}$, unde $n\in\mathbb{N}$;

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \sin t dt}{x^2}$.

Teorema de schimbare de variabilă pentru integrala Riemann-cazul funcţiilor continue. *Fie* $\phi:[a,b]\to[\alpha,\beta]$ *şi* $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ *astfel încât:*

i) ϕ *este derivabilă;*

ii) $\phi^{'}$ *este continuă*;

iii) f *este continuă.*

Atunci:

$$\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt=\int\limits_a^b f(\phi(x))\phi^{'}(x)dx.$$

Demonstraţie. Dacă F este o primitivă a funcţiei f, atunci $F\circ\phi$ este o primitivă a funcţiei $(f\circ\phi)\phi^{'}$ şi Formula Leibniz-Newton ne îndreptăţeşte să scriem egalităţile

$$\int\limits_a^b f(\phi(x)\phi^{'}(x)dx=(F\circ\phi)(b)-(F\circ\phi)(a)=F(\phi(b))-F(\phi(a))$$

şi

$$\int\limits_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt=F(\phi(b))-F(\phi(a)),$$

de unde deducem concluzia. □

Exemplu. Să se calculeze $\int\limits_0^1 x^2e^{x^3}dx$.

Avem
$$\int_0^1 x^2 e^{x3} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{3} e^t \mid_0^1 = \frac{e-1}{3}.$$

Temă. Să se calculeze:

i) $\int_0^1 x(x^2-1)^2 dx$;

ii) $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1} dx$;

iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$;

iv) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \cdot e^{\sin x} dx$;

v) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$;

vi) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$;

Teorema de integrare prin părţi pentru integrala Riemann. *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ (i.e. derivabile, cu derivatele continue). Atunci*
$$\int_a^b f(x)g^{'}(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f^{'}(x)g(x)dx.$$

Demonstraţie. Deoarece
$$(fg)^{'}(x) = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x),$$
avem
$$\int_a^b (fg)^{'}(x)dx = \int_a^b (f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x))dx,$$

de unde, utilizând formula Leibniz-Newton, deducem că

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int\limits_a^b f(x)g^{'}(x)dx + \int\limits_a^b f^{'}(x)g(x)dx,$$

i.e. concluzia. $\square$

Exemplu. Să se calculeze $\int\limits_0^\pi e^x \sin x dx$.

Cu notaţia $I \stackrel{not}{=} \int\limits_0^\pi e^x \sin x dx$, avem

$$I = \int\limits_0^\pi (e^x)^{'} \sin x dx = e^x \sin x \mid_0^\pi - \int\limits_0^\pi e^x (\sin x)^{'} dx =$$

$$= -\int\limits_0^\pi e^x \cos x dx = -\int\limits_0^\pi (e^x)^{'} \cos x dx =$$

$$= -e^x \cos x \mid_0^\pi + \int\limits_0^\pi e^x (\cos x)^{'} dx = e^\pi + 1 - \int\limits_0^\pi e^x \sin x dx =$$

$$= e^\pi + 1 - I,$$

de unde $I = \frac{e^\pi+1}{2}$, i.e.

$$\int\limits_0^\pi e^x \sin x dx = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

Temă. Să se calculeze:

i) $\int\limits_1^e \ln x dx$;

ii) $\int\limits_0^1 x e^{-x} dx$;

iii) $\int\limits_0^1 arctg x dx$;

iv) $\int\limits_0^1 x \cdot arctg x dx$;

v) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

Lema de evaluare a modulului unei funcţii integrabile Riemann. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă Rie mann. Atunci avem estimarea* $\left|\int\limits_a^b f dx\right| \leq \int\limits_a^b |f|\, dx \leq \|f\|\,(b-a)$, *unde* $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. *În particular, dacă* $m \leq f(x) \leq M$ *pentru orice* $x \in [a,b]$, *atunci* $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f dx \leq M(b-a)$.

Teorema de permutare a limitei cu integrala. *Fie* $f, f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, *unde* $n \in \mathbb{N}$, *funcţii mărginite, astfel încât următoarele proprietăţi sunt satisfăcute:*

i) f_n *este integrabilă Riemann* g *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$;

ii) şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniform către funcţia* f.

Atunci:

α) f *este integrabilă Riemann;*

β) $\int\limits_a^b f dg = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n dx$.

Demonstraţie.

α) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar dar fixat. Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|f_{n_\varepsilon} - f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

şi, deorace f este integrabilă Riemann, există o partiţie P_ε a lui $[a,b]$ cu proprietatea că

$$U(f_{n_\varepsilon}, P_\varepsilon) - L(f_{n_\varepsilon}, P_\varepsilon) \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Atunci $U(f_{n_\varepsilon}, P_\varepsilon) \leq U(f+\varepsilon, P_\varepsilon) = U(f, P_\varepsilon) + \varepsilon(b-a)$. Analog $L(f_{n_\varepsilon}, P_\varepsilon) \geq L(f+\varepsilon, P_\varepsilon) = L(f, P_\varepsilon) - \varepsilon(b-a)$. Deci

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) \leq U(f_{n_\varepsilon}, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) + 2\varepsilon(b-a) \leq \varepsilon\left(1 + 2(b-a)\right).$$

Din teorema lui Darboux rezultă că f este integrabilă Riemann.

β) În acord cu Lema de evaluare a modului unei integrale Riemann-Stieltjes, avem $\left|\int\limits_a^b f_n dg - \int\limits_a^b f dg\right| = \left|\int\limits_a^b (f_n - f) dg\right| \leq \|f_n - f\|\,(b-a)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde, deoarece, conform ipotezei, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, rezultă concluzia. $\square$

Observaţie. *Ipoteza relativă la convergenţa uniformă a şirului* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este restrictivă. Există rezultate de acelaşi tip, în care restricţiile asupra modului de convergenţă sunt relaxate, dar în care se cere ca funcţia limită să fie integrabilă (vezi cele două teoreme de mai jos).*

Teorema convergenţei mărginite pentru integrala Riemann. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, *un şir de funcţii integrabile Riemann cu proprietatea că există* $M \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\|f_n\| \leq M$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Dacă* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplu către funcţia integrabilă Riemann* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *atunci* $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n$.

Aria unei suprafeţe plane

Definiţie. *Se numeşte suprafaţă poligonală o regiune din plan cuprinsă între laturile unui poligon (inclusiv linia poligonală) sau o reuniune finită de asemenea regiuni.*

Definiţie. *Aria unei suprafeţe poligonale* P *este suma ariilor triunghiurilor în care se descompune* P.

Observaţii

1. *Aria suprafeţei poligonale* P *se notează cu* $\mathcal{A}(P)$.

2. *Definiţia anterioară este coerentă,* i.e. $\mathcal{A}(P)$ nu depinde de descompunerea considerată.

Pentru o suprafaţă plană mărginită S (i.e. există un pătrat care include pe S) vom considera

$$\mathcal{I} = \{P \mid P \text{ este o suprafaţă poligonală şi } P \subseteq S\}$$

şi

$$\mathcal{E} = \{Q \mid Q \text{ este o suprafaţă poligonală şi } S \subseteq Q\}.$$

Deoarece avem $P \subseteq S \subseteq Q$, deducem că

$$\mathcal{A}(P) \leq \mathcal{A}(Q),$$

pentru orice $P \in \mathcal{I}$ şi orice $Q \in \mathcal{E}$, deci putem considera

$$\mathcal{A}_*(S) = \sup\{\mathcal{A}(P) \mid P \in \mathcal{I}\}$$

şi

$$\mathcal{A}^*(S) = \inf\{\mathcal{A}(Q) \mid Q \in \mathcal{E}\},$$

numite aria interioară şi respectiv aria exterioară a lui S.

Observaţie. *În cadrul de mai sus, avem*

$$\mathcal{A}_*(S) \leq \mathcal{A}^*(S).$$

Definiţie. *Spunem că o suprafaţă plană mărginită S are arie dacă $\mathcal{A}_*(S) = \mathcal{A}^*(S)$, caz în care această valoare comună defineşte aria lui S care este notată cu $\mathcal{A}(S)$.*

Observaţie. *Pentru o suprafaţă plană mărginită S, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) S are arie;

ii) există $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ şi $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}(P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}(Q_n)$.

În acest caz, valoarea comună a celor două limite este $\mathcal{A}(S)$.

Observaţie. *Pentru două suprafeţe plane mărginite S_1 şi S_2 care nu au puncte comune interioare şi care au arie, suprafaţa $S_1 \cup S_2$ are arie şi*

$$\mathcal{A}(S_1 \cup S_2) = \mathcal{A}(S_1) + \mathcal{A}(S_2),$$

i.e. aria este aditivă.

Teoremă. *Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ continuă. Atunci suprafaţa plană $S = \{(x, y) \mid x \in [a, b]$ şi $y \in [0, f(x)]\}$ are arie şi*

$$\mathcal{A}(S) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemplu. Să se calculeze aria suprafeţei plane care este determinată de curbele $y = \frac{8}{x^2}$, $y = x$ şi $x = 4$.

Aria cerută este

$$\int_2^4 x dx - \int_2^4 \frac{8}{x^2} dx = 2.$$

Temă. Să se calculeze aria suprafeţei plane care este determinată de curbele:

i) $y = x^2$, $x = -4$, $y = 0$;

ii) $y = x^2 - 6x + 5$, $x + y = 11$.

Volumul unui corp de rotaţie

Definiţie. *Se numeşte corp poliedral o reuniune finită de tetraedre.*

Definiţie. *Volumul unui corp poliedral P, notat cu $\mathcal{V}(P)$, este suma volumelor tetraedrelor în care se descompune P.*

Observaţii

1. *Volumul corpului poliedral P se notează cu $\mathcal{V}(P)$.*

2. *Definiţia anterioară este coerentă,* i.e. $\mathcal{V}(P)$ nu depinde de descompunerea considerată.

Pentru un corp geometric mărginit C (i.e. există un cub care include pe C) vom considera

$$\mathcal{I} = \{P \mid P \text{ este un corp poliedral şi } P \subseteq C\}$$

şi

$$\mathcal{E} = \{Q \mid Q \text{ este un corp poliedral şi } C \subseteq Q\}.$$

Deoarece avem $P \subseteq C \subseteq Q$, deducem că

$$\mathcal{V}(P) \leq \mathcal{V}(Q),$$

pentru orice $P \in \mathcal{I}$ şi orice $Q \in \mathcal{E}$, deci putem considera

$$\mathcal{V}_*(C) = \sup\{\mathcal{A}(P) \mid P \in \mathcal{I}\}$$

şi

$$\mathcal{V}^*(C) = \inf\{\mathcal{A}(Q) \mid Q \in \mathcal{E}\},$$

numite volumul interior şi respectiv volumul exterior al lui C.

Observaţie. *În cadrul de mai sus, avem*

$$\mathcal{V}_*(C) \le \mathcal{V}^*(C).$$

Definiţie. *Spunem că un corp geometric mărginit C are volum dacă $\mathcal{V}_*(C) = \mathcal{V}^*(C)$, caz în care această valoare comună defineşte volumul lui C care este notat cu $\mathcal{V}(C)$.*

Observaţie. *Pentru un corp geometric mărginit C, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) C are volum;

ii) există $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}$ şi $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{V}(P_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{V}(Q_n)$.

În acest caz, valoarea comună a celor două limite este $\mathcal{V}(C)$.

Observaţie. *Pentru două corpuri geometrice mărginite C_1 şi C_2 care nu au puncte comune interioare şi care au volum, corpul $C_1 \cup C_2$ are volum şi*

$$\mathcal{V}(C_1 \cup C_2) = \mathcal{V}(C_1) + \mathcal{V}(C_2),$$

i.e. volumul este aditiv.

Teoremă. *Fie $f : [a,b] \to [0,\infty)$ continuă. Atunci corpul geometric $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a,b]$ şi $y^2 + z^2 \le f^2(x)\}$ are volum şi*

$$\mathcal{V}(C) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Exemplu. Să se calculeze volumul elipsoidului de rotaţie, i.e. volumul corpului obţinut prin rotirea mulţimii $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$, unde $a, b > 0$, în jurul axei Ox.

Considerând funcţia $f : [0,a] \to [0,\infty)$ dată de $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ pentru orice $x \in [0,a]$, volumul cerut este

$$2\pi \int\limits_0^a f^2(x)dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int\limits_0^a (a^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

În particular obţinem că volumul sferei de rază r este $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Temă. Să se calculeze volumul corpului de rotaţie determinat de:
i) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \sin x$ pentru orice $x \in [0, \pi]$;
ii) $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = e^{-x}$ pentru orice $x \in [0, 2]$.

Derivabilitatea în raport cu parametrul
Formula lui Leibniz
Teorema de inversare a ordinii de integrare

Studiul integralelor cu parametru este impus de reprezentarea integrală a funcţiilor reale de o variabilă reală care apare în descrierea matematică a multor fenomene din economie, fizică, tehnică etc.

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci, pentru orice $t \in [c, d]$ fixat, aplicaţia dată de $x \to f(x, t)$, pentru orice $x \in [a, b]$, este integrabilă Riemann, deci putem defini $F(t) = \int\limits_a^b f(x, t)dx$ pentru orice $t \in [c, d]$. Vom studia, în cele ce urmează, proprietăţile funcţiei F.

Continuitatea în raport cu parametrul

Teorema de mai jos se va folosi în cadrul demonstraţiei Teoremei de continuitate în raport cu parametrul pentru integrala infinită.

Teorema de continuitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci funcţia dată de $F(t) = \int\limits_a^b f(x, t)dx$ pentru orice $t \in [c, d]$, este continuă.*

Demonstraţie. Deoarece, conform Teoremei continuităţii uniforme, f este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|f(x, t) - f(x, t_0)| < \varepsilon$ pentru orice $t, t_0 \in [c, d]$ cu $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$ şi orice $x \in [a, b]$. Atunci, pentru $t, t_0 \in [c, d]$, cu $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$, avem $|F(t) - F(t_0)| = \left|\int\limits_a^b \{f(x, t) - f(x, t_0)\}dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)|\, dx < \varepsilon(b - a)$, deci F este continuă în t_0, arbitrar ales în $[a, b]$. $\square$

Derivabilitatea în raport cu parametrul

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstraţiei Formulei lui Leibniz, precum şi în cadrul demonstraţiei Teoremei de derivabilitate în raport cu paramaetrul pentru integrala infinită.

Teorema de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann. *Fie* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x,t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$, $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pentru care există* $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ *şi este continuă pe* D *şi funcţia* $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ *dată de* $F(t) = \int\limits_a^b f(x,t)dx$ *pentru orice* $t \in [c,d]$. *Atunci:*

α) *F este derivabilă.*

β) $F'(t) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ *pentru orice* $t \in [c,d]$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar, dar fixat.

Deoarece, conform Teoremei continuităţii uniforme, $\frac{\partial f}{\partial t}$ este uniform continuă, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

pentru orice $t, t_0 \in [c,d]$ astfel încât $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$ şi orice $x \in [a,b]$. Atunci, pentru t şi t_0 ca mai sus, în conformitate cu Teorema lui Lagrange, există t_1, între t şi t_0, cu proprietatea că $f(x,t) - f(x,t_0) = (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,t_1)$ şi, prin urmare, folosind (1), obţinem

$$\left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \right| < \varepsilon, \tag{2}$$

deci

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dx \right| = \left| \int\limits_a^b \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b \left| \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0) \right| dx \overset{(2)}{<} \varepsilon(b-a),$$

pentru orice $t, t_0 \in [c, d]$ astfel încât $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$ şi orice $x \in [a, b]$.

Inegalitatea anterioară ne asigură că F este derivabilă în t_0 şi că $F'(t_0) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)dx$. $\square$

Formula lui Leibniz

O generalizare a rezultatului precedent este următoarea:

Formula lui Leibniz. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ astfel încât:*

i) f este continuă;

ii) există $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ şi este continuă;

iii) α şi β sunt derivabile.

Atunci:

α) *Funcţia $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$, dată de $\varphi(t) = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t)dx$ pentru orice $t \in [c, d]$, este derivabilă.*

β) $\varphi'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dx.$

Demonstraţie. Avem

$$\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{f(x, \tau) - f(x, t)}{\tau - t}dx + \frac{1}{\tau - t}\int\limits_{\beta(t)}^{\beta(\tau)} f(x, \tau)dx - \frac{1}{\tau - t}\int\limits_{\alpha(t)}^{\alpha(\tau)} f(x, \tau)dx, \tag{1}$$

pentru orice $t, \tau \in [c, d]$.

Conform Teoremei de derivabilitate în raport cu parametru pentru integrala Riemann, avem

$$\lim_{\tau \to t}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{f(x, \tau) - f(x, t)}{\tau - t}dx = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)dx, \tag{2}$$

pentru orice $t \in [c, d]$.

Folosind prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes, derivabilitatea lui α şi β în t, precum şi continuitatea lui f, obţinem

$$\lim_{\tau\to t}\frac{1}{\tau-t}\int\limits_{\beta(t)}^{\beta(\tau)} f(x,\tau)dx = f(\beta(t),t)\beta^{'}(t) \text{ şi } \lim_{\tau\to t}\frac{1}{\tau-t}\int\limits_{\alpha(t)}^{\alpha(\tau)} f(x,\tau)dx = f(\alpha(t),t)\alpha^{'}(t), \tag{3}$$

pentru orice $t \in [c,d]$.

Având în vedere (2) şi (3), prin trecere la limită în (1), obţinem

$$\lim_{\tau\to t}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} = \lim_{\tau\to t}[f(\beta(t),t)\beta^{'}(t) - f(\alpha(t),t)\alpha^{'}(t)] + \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx,$$

adică concluzia. $\square$