Curs 9

Interpolare cu funcții spline

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$, i.e. $a=x_1<x_2<\ldots<x_n<x_{n+1}=b$.

Fie $I_j=[x_j,x_{j+1})$ $\forall j=\overline{1,n-1}$ (avem $\overline{I}_j=[x_j,x_{j+1}]$ $\forall j=\overline{1,n-1}$) și $I_n=[x_n,x_{n+1}]=\overline{I}_n$.

1. Interpolare cu funcții spline liniare

Def.: Funcția $S:[a,b]\to\mathbb{R}$ s.n. funcție spline liniară pentru $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ dacă:

a) S este liniară pe porțiuni:

$$S(x)=S_j(x)\ \forall x\in I_j,\ \forall j=\overline{1,n},\ \text{unde } S_j:\overline{I}_j\to\mathbb{R},$$

$$S_j(x)=a_j+b_j(x-x_j)\ \forall j=\overline{1,n}.$$

b) S interpolează f în nodurile x_j $\forall j=\overline{1,n+1}$:

$$S(x_j)=f(x_j)\ \forall j=\overline{1,n+1}.$$

c) S este continuă în nodurile interioare x_{j+1} $\forall j=\overline{1,n-1}$:

$$S_j(x_{j+1})=S_{j+1}(x_{j+1}) \ \forall j=\overline{1,n-1}.$$

Obs.: Avem $S(x)=\begin{cases} S_1(x) \ ; \ x\in[x_1,x_2)=I_1 \\ S_2(x) \ ; \ x\in[x_2,x_3)=I_2 \\ \text{-----------------------------} \\ S_n(x) \ ; \ x\in[x_n,x_{n+1}]=I_n \end{cases}$

În continuare determinăm a_j, b_j $\forall j=\overline{1,n}$.

Conform b) avem $S(x_j)=f(x_j)$ $\forall j=\overline{1,n+1}$.

Deoarece $x_j\in I_j$ $\forall j=\overline{1,n}$ avem $S(x_j)=S_j(x_j)=$

$=a_j+b_j(x_j-x_j)=a_j$ $\forall j=\overline{1,n}$.

Deci $a_j=f(x_j)$ $\forall j=\overline{1,n}$.

Deoarece $x_{n+1}\in I_n$ avem $S(x_{n+1})=S_n(x_{n+1})=$

$=a_n+b_n(x_{n+1}-x_n)$.

$S(x_{n+1})=f(x_{n+1}) \Rightarrow a_n+b_n(x_{n+1}-x_n)=f(x_{n+1}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_n = \frac{f(x_{n+1}) - a_n}{x_{n+1} - x_n} \underset{\substack{\uparrow \\ a_n = f(x_n)}}{=} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}.$$

Conform c) $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \ \forall j = \overline{1, n-1}$.

Deci $a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) = a_{j+1} + b_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1}) =$

$= a_{j+1}$, i.e. $b_j = \dfrac{a_{j+1} - a_j}{x_{j+1} - x_j} = \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \ \forall$

$\forall j = \overline{1, n-1}$.

Am obținut: $\begin{cases} a_j = f(x_j) \ \forall j = \overline{1, n} \\ b_j = \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \ \forall j = \overline{1, n}. \end{cases}$

<u>Exercițiu</u>. Determinați funcția spline liniară asociată funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $\{\underset{x_1}{\underset{\parallel}{-1}}; \underset{x_2}{\underset{\parallel}{0}}; \underset{x_3}{\underset{\parallel}{1}}\}$.

<u>Sol</u>.: Avem $S: [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x) & ; x\in[x_1,x_2)=[-1,0) \\ S_2(x) & ; x\in[x_2,x_3]=[0,1] \end{cases},$$ unde

$S_1:[-1,0]\to\mathbb{R}$, $S_1(x)=a_1+b_1(x-x_1)=a_1+b_1(x+1)$,

$S_2:[0,1]\to\mathbb{R}$, $S_2(x)=a_2+b_2(x-x_2)=a_2+b_2(x-0)=$

$=a_2+b_2x.$

Avem $S(x)=\begin{cases} a_1+b_1(x+1) & ; x\in[-1,0) \\ a_2+b_2x & ; x\in[0,1]. \end{cases}$

Determinăm a_1, b_1, a_2, b_2.

$$\begin{cases} S(x_1)=f(x_1) \\ S(x_2)=f(x_2) \\ S(x_3)=f(x_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S(-1)=f(-1) \\ S(0)=f(0) \\ S(1)=f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=e^{-2} \\ a_2=1 \\ a_2+b_2=e^2 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow b_2=e^2-1.$

S este continuă în nodul interior $x_2=0$.

Avem $a_1+b_1=a_2$, i.e. $b_1=a_2-a_1=1-e^{-2}$.

Am obținut $S(x)=\begin{cases} e^{-2}+(1-e^{-2})(x+1) & ; x\in[-1,0) \\ 1+(e^2-1)x & ; x\in[0,1] \end{cases}=$

$$= \begin{cases} (\cancel{e^{-2}} + 1 - \cancel{e^{-2}}) + (1-e^{-2})x & ; x \in [-1,0) \\ 1 + (e^2-1)x & ; x \in [0,1] \end{cases} = \begin{cases} 1+(1-e^{-2})x ; x\in[-1,0) \\ 1+(e^2-1)x ; x\in[0,1]. \end{cases}$$

2. Interpolare cu funcții spline pătratice

Def.: Funcția $S:[a,b]\to\mathbb{R}$ s.n. funcție spline pătratică pentru $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ dacă:

a) S este pătratică pe porțiuni:

$S(x)=S_j(x)\ \forall x\in I_j, \forall j=\overline{1,n}$, unde $S_j : I_j \to \mathbb{R}$,

$S_j(x)=a_j+b_j(x-x_j)+c_j(x-x_j)^2\ \forall j=\overline{1,n}$.

b) S interpolează f în $x_j\ \forall j=\overline{1,n+1}$:

$S(x_j)=f(x_j)\ \forall j=\overline{1,n+1}$.

c) S este continuă în nodurile interioare $x_{j+1}\ \forall$ $\forall j=\overline{1,n-1}$:

$S_j(x_{j+1})=S_{j+1}(x_{j+1})\ \forall j=\overline{1,n-1}$.

d) S' este continuă în nodurile interioare $x_{j+1}\ \forall$ $\forall j=\overline{1,n-1}$:

$S'_j(x_{j+1})=S'_{j+1}(x_{j+1})\ \forall j=\overline{1,n-1}$.

e) Una dintre următoarele condiții este îndeplinită:

$e_1)$ $S'(x_1) = f'(x_1)$.

$e_2)$ $S'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$.

În continuare determinăm $a_j, b_j, c_j \ \forall j=\overline{1,n}$.

Conform b) avem $S(x_j) = f(x_j) \ \forall j = \overline{1,n+1}$.

Deoarece $x_j \in I_j \ \forall j=\overline{1,n}$ avem $S(x_j) = S_j(x_j) =$

$= a_j + b_j(x_j - x_j) + c_j(x_j - x_j)^2 = a_j \ \forall j = \overline{1,n}$.

Așadar $a_j = f(x_j) \ \forall j = \overline{1,n}$.

Deoarece $x_{n+1} \in I_n$ avem $S(x_{n+1}) = S_n(x_{n+1}) =$

$= a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + c_n(x_{n+1} - x_n)^2$.

Deci $a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + c_n(x_{n+1} - x_n)^2 = f(x_{n+1})$ (1)

Conform c) avem $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) \ \forall j = \overline{1,n-1}$, i.e.

$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 = a_{j+1} + b_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1}) +$

$+ c_{j+1}(x_{j+1} - x_{j+1})^2 \ \forall j = \overline{1,n-1}$, i.e. $\underset{\substack{\| \\ f(x_{j+1})}}{a_j + b_j(x_{j+1}-x_j) + c_j(x_{j+1}-x_j)^2 = a_{j+1}}$ $\forall j=\overline{1,n-1}$ (2)

Relațiile (1) și (2) pot fi cuplate și rescrise într-o singură relație pentru $j=\overline{1,n}$:

$$a_j + b_j(x_{j+1}-x_j) + c_j(x_{j+1}-x_j)^2 = f(x_{j+1}) \ \forall j=\overline{1,n}.$$

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x-x_j) \quad \forall x \in I_j, \forall j=\overline{1,n}.$$

Conform d) avem $S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1}) \ \forall j=\overline{1,n-1}$,

i.e. $b_j + 2c_j(x_{j+1}-x_j) = b_{j+1} \quad \forall j=\overline{1,n-1}$ (3)

Conform e_1) avem $S_1'(x_1) = f'(x_1)$, i.e.

$b_1 = f'(x_1)$.

Conform e_2) avem $S_n'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$, i.e.

$b_n + 2c_n(x_{n+1}-x_n) = f'(x_{n+1})$ (4)

Dacă definim $b_{n+1} = f'(x_{n+1})$, relațiile (3) și (4) pot fi cuplate și rescrise într-o singură relație pentru $j=\overline{1,n}$:

$$b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) = b_{j+1} \quad \forall j=\overline{1,n}.$$

Notăm $x_{j+1} - x_j = h_j \ \forall j=\overline{1,n}$.

Obținem următoarele sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = f(x_{j+1}) \quad \forall j=\overline{1,n} \\ b_j + 2c_j h_j = b_{j+1} \quad \forall j=\overline{1,n-1} \\ b_1 = f'(x_1) \end{cases} \quad (\underline{\mathrm{I}})$$

, lucrând cu e_1)

și $$\begin{cases} a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = f(x_{j+1}) \ \forall j=\overline{1,n} \\ b_j + 2c_j h_j = b_{j+1} \ \forall j=\overline{1,n} \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \end{cases} \quad (\underline{\mathrm{II}}),$$

lucrând cu e_2).

Vom rezolva sistemul $(\underline{\mathrm{I}})$.

Din (I_1) avem $c_j = \frac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - a_j - b_j h_j\right) =$

$$= \frac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - b_j h_j\right) \quad \forall j = \overline{1,n}.$$

Introducem c_j în (I_2) și obținem:

$$b_j + \frac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - b_j h_j\right) = b_{j+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b_j + \frac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - 2b_j = b_{j+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) = b_{j+1} + b_j \quad \forall j = \overline{1,n-1}.$$

Sistemul (I) devine:

$$\begin{cases} b_1 = f'(x_1) \\ b_{j+1} = \frac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - b_j \quad \forall j = \overline{1,n-1} \\ c_j = \frac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - b_j h_j\right) \quad \forall j = \overline{1,n}. \end{cases} \quad (I)$$

Analog se procedează pentru sistemul (II) și obținem:

$$\begin{cases} b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ b_j = \frac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - b_{j+1} \quad \forall\, j = \overline{1,n} \left(\forall j = \overline{n,1}\right) \\ c_j = \frac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - b_j h_j\right) \quad \forall\, j = \overline{1,n} \left(\forall j = \overline{n,1}\right). \end{cases} \quad (\mathrm{II})$$

În ambele cazuri $\left((\mathrm{I}) \text{ și } (\mathrm{II})\right)$ $a_j = f(x_j)\ \forall j = \overline{1,n}$.

<u>Exercițiu</u>. Determinați funcția spline pătratică pentru funcția $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $\{\underbrace{-1}_{x_1}; \underbrace{0}_{x_2}; \underbrace{1}_{x_3}\}$.

<u>Sol</u>: Avem $S(x) = \begin{cases} S_1(x)\ ;\ x \in [x_1, x_2) = [-1, 0) \\ S_2(x)\ ;\ x \in [x_2, x_3] = [0, 1], \end{cases}$

unde $S_1 : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 =$

$= a_1 + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2$, $S_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$S_2(x) = a_2 + b_2(x - \underbrace{x_2}_{0}) + c_2(x - \underbrace{x_2}_{0})^2 = a_2 + b_2 x + c_2 x^2.$

În final obținem:

$$S(x)=\begin{cases} e^{-2}+2e^{-2}(x+1)+(1-3e^{-2})(x+1)^2 & ; x\in[-1,0) \\ 1+(2-4e^{-2})x+(e^2+4e^{-2}-3)x^2 & ; x\in[0,1]. \end{cases}$$