Cursul 4

Thursday, October 28, 2021 11:55 AM

Sisteme liniar independente. Sisteme de generatori. Baze II

Recap Fie V un K-spațiu vectorial.

Def 1. (SLI) O mulțime $L = \{v_1, \dots v_r\} \subset V$ s.n. sistem liniar indep. (SLI)

dacă $\forall \alpha_1, \dots \alpha_r \in K$, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$

Reformulare (am demonstrat) $\forall v \in V$, există cel mult o scriere a lui v în funcție de $\{v_1, \dots v_r\}$

2. (SG) O mulțime $S = \{w_1, \dots w_k\} \subset V$ s.n. sistem de generatori (SG)

dacă $\boxed{\forall v \in V, \exists \alpha_1, \dots \alpha_k \text{ a.î. } v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k.}$

$\Leftrightarrow \langle w_1, \dots w_k \rangle = V.$

3. (Bază) O mulțime $\mathcal{B} = \{v_1, \dots v_n\}$ s.n. bază a lui V

dacă este SLI și SG.

$\Leftrightarrow \forall v \in V, \exists! \alpha_1, \dots \alpha_n$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$

unică!

Am terminat cursul 3 cu

Th Fie L un SLI, S un SG și $L \subset S$.

$\Rightarrow \exists B$ bază, $L \subset B \subset S$.

$L = \{v_1, \dots, v_l\}$ SLI

$S = \{v_1, \dots, v_l, \underbrace{v_{l+1}, \dots, v_g}\}$ SG

$\Rightarrow \exists B = \{v_1, \dots, v_l, \underbrace{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}}_{\text{dintre } v_{l+1}, \dots, v_g}\}$ bază.

<u>Ex</u> $L = \left\{ \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\,rg=2} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ e SLI

$S = \left\{ \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{rg=3}, \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ e SG

$\Rightarrow \exists B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e bază

<u>Corolar</u> 1. Orice SLI se poate completa la o bază!

2. Din orice SG se poate extrage o bază!

<u>Dem</u>

1. Am $L = \{v_1, \dots, v_p\}$. Aleg $S = V$

$\Rightarrow \exists B$ bază, $L \subset B \subset S$

$\Rightarrow \exists\, B$ bază, $\underbrace{L \subset B} \subset S$

Practic (algoritm) date $L = \left\{ \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$

Alg $S = \left\{ \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e\ SG\ pt\ \mathbb{R}^3} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

De exemplu, $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\7\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ e bază ($\det \neq 0$)

sau $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, sau $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

__Ex 2__ $L = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix} \right\} \xrightarrow[\text{la}]{\text{completat}} B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$

sau

$\cancel{\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}}$

$\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

__De fapt__ se adaugă complementării unui minor nenul

__Ex 3__ $L = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\\-9\\0\end{pmatrix} \right\} \longrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\\-9\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

sau

$= \left\{ -\ \ -, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}} \right\}$

2. Fie $S=\{v_1, \dots, v_k\}$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ L}}{\emptyset} \subset S \xRightarrow{\text{Th}} \exists B \text{ bază}, \ \emptyset \subset B \subset S$$

Practic, în K^n:
(algoritm)

$n=3$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ SG

minor nenul

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\} \text{ bază}$$

! Păstrez coloanele/vectorii corespunzători unui minor nenul.

Q Orice SLI e inclus în orice sistem de generatori?

Clar nu: în $\mathbb{R}^3$, $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Dar:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

<u>Lema schimbului</u> Fie V un K-sp vect și

Lema schimbului Fie V un K-sp ...

$L = \{v_1, \dots v_p\}$ un SLI

$S = \{w_1, \dots w_k\}$ un SG

Atunci $\exists\ A \subset S$, $|A| = |L|$ și $(S \setminus A) \cup L$ e sistem de generatori.

adică: pot înlocui elemente din S cu toate elementele lui L și mulțimea rămâne SG.

Dem Pe pași

Pasul I Înlocuiesc cu v_1 un element din S:

$v_1 \in V \overset{S\,e\,SG}{\Longrightarrow} \exists\ \alpha_1, \dots \alpha_k$ a.î. $v_1 = \boxed{\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k}$.

$v_1 \neq 0$ ($v_1 \in$ unui SLI) $\Rightarrow \exists\ i \in \{1, \dots k\}$ a.î. $\alpha_i \neq 0$.

Îl înlocuiesc pe w_i cu v_1!

Explicație $(\{w_1, \dots w_k\} \setminus \{w_i\}) \cup \{v_1\}$ e tot SG:

(Fie $v \in V$. $\exists\ \beta_1, \dots \beta_k$ a.î. $v = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_k w_k$)

$$v_1 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{i-1} w_{i-1} + \boxed{\underset{\neq 0}{\alpha_i}\, w_i} + \alpha_{i+1} w_{i+1} + \dots + \alpha_k w_k$$

$$\Rightarrow \quad w_i = \frac{1}{\alpha_i}\left(v_1 - \alpha_1 w_1 - \dots - \alpha_{i-1} w_{i-1} - \alpha_{i+1} w_{i+1} - \dots - \alpha_k w_k\right)$$

$\Rightarrow \quad w_i = \frac{1}{\alpha_i}\left(v_1 - \alpha_1 w_1 - \dots\right.$

$\Rightarrow \quad w_i \in \langle (S \setminus \{w_i\}) \cup \{v_1\} \rangle$

sp generat de

$$\Rightarrow \langle (S \setminus \{w_i\}) \cup \{v_1\} \rangle = \langle (S \setminus \{w_i\}) \cup \{v_1\} \cup \{w_i\} \rangle$$
$$= \langle S \cup \{v_1\} \rangle = V.$$

Deci v_1 poate înlocui orice element din S care contribuie la scrierea sa: $v_1 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_k w_k$. (adică $\alpha_i \neq 0$)

<u>Pasul II</u> Înlocuiesc cu v_2 un element din $(S \setminus \{w_i\}) \cup \{v_1\}$.

<u>Problemă</u> Nu vrem să înlocuiesc exact v_1 cu v_2!

Soluție

$$v_2 = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_{i-1} w_{i-1} + a_{i+1} w_{i+1} + \dots + a_k w_k + a_0 v_1$$

Poate fi doar $a_0 \neq 0$? (și restul $a_i = 0$?)

Dacă da, $v_2 = \underset{\neq 0}{a_0} v_1 \Rightarrow L$ nu mai e SL! ↯

$\Rightarrow \exists\, j,\ j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ a.î. $a_j \neq 0$

Înlocuiește v_j cu v_2

Pasul $\overline{II}$ ... Pasul p !

Corolar $\boxed{p \le r}$

Def. Într-un sp vectorial $V/_K$, dacă L e SLI și S e SG $\Rightarrow |L| \le |S|$. (Știam deja pt K^m, $|L| \le m \le |S|$)

Obs $V/_K$, $L = \{v_1, \dots v_p\}$ sn sistem liniar dependent

dacă nu e SLI:

SLI: $\forall \alpha_1, \dots \alpha_p \in K$, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$

non-SLI: $\exists \alpha_1, \dots \alpha_p \in K$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0$ și nu toți α_i sunt nuli

să zicem $\alpha_1 \ne 0$: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \,\Big|\cdot \frac{1}{\alpha_1}$

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 - \dots - \frac{\alpha_p}{\alpha_1} v_p$$

$$\Leftrightarrow v_1 \in \langle v_2, v_3, \dots v_p \rangle.$$

Consecințe 1. V este K-sp vect. L SLI, S SG $\Rightarrow |L| \le |S|$.

Consecinte 1. L SLI , S SG $\Rightarrow |L| \le |S|$.

2. Dacă B_1, B_2 baze $\Rightarrow |B_1| = |B_2|$

Explicație $\underset{\text{SLI}}{|B_1|} \le \underset{\text{SG}}{|B_2|}$ și $\underset{\text{SG}}{|B_1|} \ge \underset{\text{SLI}}{|B_2|}$

Deci, într-un spațiu vectorial, toate bazele au același cardinal.

→ **Def** Dacă V e un K-sp. vect, sn dimensiunea lui V (peste K) numărul de elemente dintr-o bază.

Se notează $\dim_K V$

Exemple 1. $\dim_K K^n = n$:

Bază a lui $K^n = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$e_i = i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$$

Dem că $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ e bază a lui K^n:

Var 1 Ca data trecută, $\det I_n = 1 \ne 0 \Rightarrow$ ✓

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K^n$

Var 1 Cu data trecută, ...

Var 2 Fie $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$.

$$v = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

există și sunt unici

Def $\{e_1, \dots e_n\}$ sn bază canonică a lui K^n.

2. $\dim_K M_{m,n}(K) = m \cdot n$.

Bază: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \\ & \dots & & & \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{m \cdot n \text{ elemente}}$

3. $\underline{\dim_K P_n} = n+1$

$P_n = \{ f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg f \leq n \}$

P_n are bază $\{1, X, X^2, \dots X^n\}$ (Exc!)

Revin la proprietăți / consecințe

3. (Teorema alternativei)

$\dots = K$ și $\dim V = n$.

3. (Teorema alternativei)

Fie V un K-sp vect, $B \subset V$ și $\dim_K V = n$.

<u>Următoarele afirmații sunt echivalente:</u>

(i) B e bază

(ii) B e SLI și $|B| = n$.

(iii) B e SG și $|B| = n$.

Deci despre B pot arăta că este SLI și că are n elemente $\Rightarrow$ e bază

sau că este SG și că are n elemente $\Rightarrow$ e bază

<u>Exemplu</u>: <u>Exercițiu</u> Arătați că $B = \{1, (X-1), (X-1)^2, \dots (X-1)^n\}$ e bază a lui P_n.

<u>Dem</u> Obs că $|B| = n+1 = \dim_K P_n$. E suficient deci să arăt fie că e SLI, fie că e SG.

Arăt că e SLI: Fie $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ a.î.

egalitate în P_n polinomul 0

$$f(X) = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot (X-1) + \alpha_2 (X-1)^2 + \dots + \alpha_n (X-1)^n = 0$$

Vreau $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

Var 1 Desfac parantezele:
coef liberi: $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\dots(-1)^n\alpha_n=0$

Var 2 $\underset{\substack{\| \\ 0}}{f}(1)=\alpha_0 \Rightarrow \underline{\alpha_0=0}$

polinom

$$\Rightarrow f(X)=\alpha_1(X-1)+\alpha_2(X-1)^2+\dots+\alpha_n(X-1)^n=0$$
$$=(X-1)\left(\alpha_1+\alpha_2(X-1)+\alpha_3(X-1)^2+\dots+\alpha_n(X-1)^{n-1}\right)=0$$

$$\Rightarrow g(X)=\alpha_1+\alpha_2(X-1)+\dots+\alpha_n(X-1)^{n-1}=0$$

$$0=g(1)=\alpha_1\Rightarrow \underline{\alpha_1=0}\Rightarrow\dots$$

$\Rightarrow \{1,(X-1),\dots(X-1)^n\}$ e SLI și are $n+1$ elemente

$\Downarrow$

e bază.

Subspații vectoriale și dimensiunea

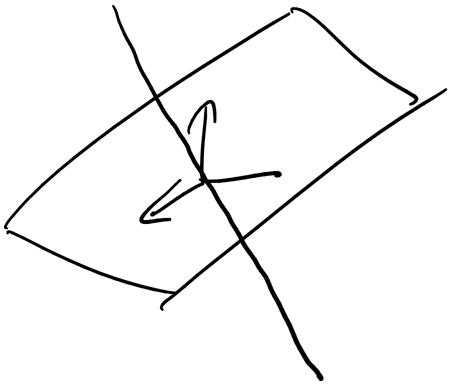
Fie V un K-sp vect și $W\leq_K V$.

Prop 1. $\dim_K W\leq \dim_K V$

2. Dacă $\dim_K W=\dim_K V\Rightarrow W=V$

Dem Exc!

Reamintire Subsp lui $\mathbb{R}^3$



- $\{0\} \le \mathbb{R}^3$ ← dim 0
- drepte (prin 0) ← dim 1
- plane (prin 0) ← dim 2
- $\mathbb{R}^3 \le \mathbb{R}^3$ ← dim 3

Obs $\dim_K\{0\} = 0$ (și este singurul spațiu de dimensiune 0)

Q V : $W_1, W_2 \le V$

$\longrightarrow$
$$\begin{tikzcd} & W_1+W_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr] & \\ W_1 \arrow[dr, dash] & & W_2 \arrow[dl, dash] \\ & W_1 \cap W_2 & \end{tikzcd}$$

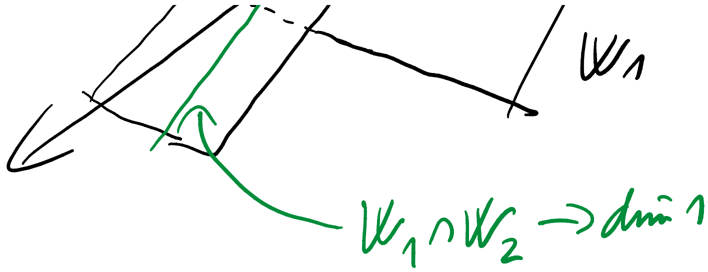
Care e legătura între dimensiuni?

E plauzibil $\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$?

$\mathbb{R}^3$

$\dim_{\mathbb{R}} W_1 = \dim_{\mathbb{R}} W_2 = 2$

$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$



$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

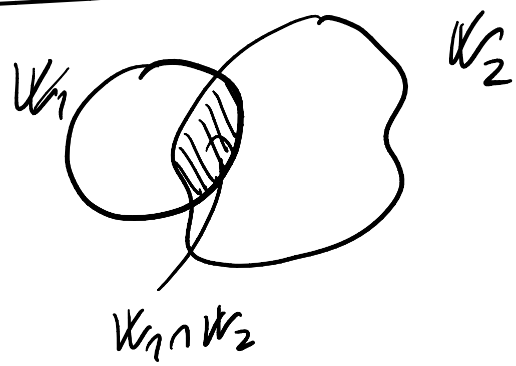
$\Rightarrow \dim(\underbrace{W_1 + W_2}_{\mathbb{R}^3}) = 3$

Th Grassmann

$$\boxed{\dim_K (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)}$$

Analogie

W_1, W_2 mulțimi



$|W_1 \cup W_2| = |W_1| + |W_2| - |W_1 \cap W_2|$

Dem **Planul** Aleg $\{v_1, \dots, v_p\}$ bază în $W_1 \cap W_2$.
$(0 \le p \le \dim V)$

Completez $\{v_1, \dots, v_p\}$ la o bază $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q\}$ a lui W_1

——— $\{v_1, \dots, v_p\}$ ——— $\{v_1, \dots, v_p, z_1, \dots, z_l\}$ a lui W_2.

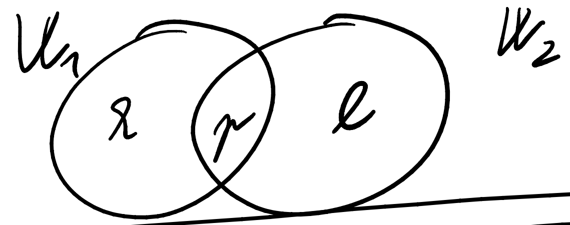
Demonstrez că $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q, z_1, \dots, z_l\}$ e bază a lui $W_1 + W_2$.

(Temă!)

Deci dacă: $\dim W_1 = p + q$, $\dim W_2 = p + l$

$\dim W_1 + W_2 = p + q + l$

$\dim W_1 \cap W_2 = p$



Coordonatele unui vector în raport cu o bază

Fie V un K-sp vect, $\dim_K V = n$.

Fie $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bază.

$\Rightarrow \forall v \in V, \ \exists! \ v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n$ $\in K$

unice!

Def $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ sn coordonatele lui v în raport cu baza B.

Notație $[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$.

$$V \ni v \xrightarrow{B \text{ bază}} [v]_B \in K^n.$$

Exemplu $\mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ bază

Coordonatele lui $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sunt

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

<u>Obs</u>

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha v]_{\mathcal{B}} = \alpha\,[v]_{\mathcal{B}}\\ [v+w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}}\end{array}\right\} \Leftrightarrow [\alpha v+\beta w]_{\mathcal{B}} = \alpha[v]_{\mathcal{B}} + \beta[w]_{\mathcal{B}}$$

egalitate în K^n

$\forall v, w \in V$
$\forall \alpha, \beta \in K$

<u>Întrebare</u>

$$\left[\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}_0} = \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_0 = \text{baza canonică a lui } \mathbb{R}^3.$$

<u>Schimbare de coordonate</u>

V, $\dim V = n$, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ baze

$\mathcal{B}' = \{b_1', \dots, b_n'\}$

$v \in V$, $[v]_{\mathcal{B}} \overset{?}{\sim} [v]_{\mathcal{B}'}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}} = [x_1' b_1' + x_2' b_2' + \dots + x_n' b_n']_{\mathcal{B}} \overset{\text{Obs}}{=}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

În baza B', $v = x_1' b_1' + \dots + x_n' b_n'$

$$= x_1' \underbrace{[b_1']_B}_{\in K^n} + x_2' \underbrace{[b_2']_B}_{\in K^n} + \dots + x_n' \underbrace{[b_n']_B}_{\in K^n}$$

$$= x_1' \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2' \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_n' \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \dots + a_{1n}x_n' \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [b_1']_B & [b_2']_B & \dots & [b_n']_B \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

<u>Def</u> $M_{B',B}$ = matricea ce are pe coloane coordonatele elementelor din B' în raport cu baza B

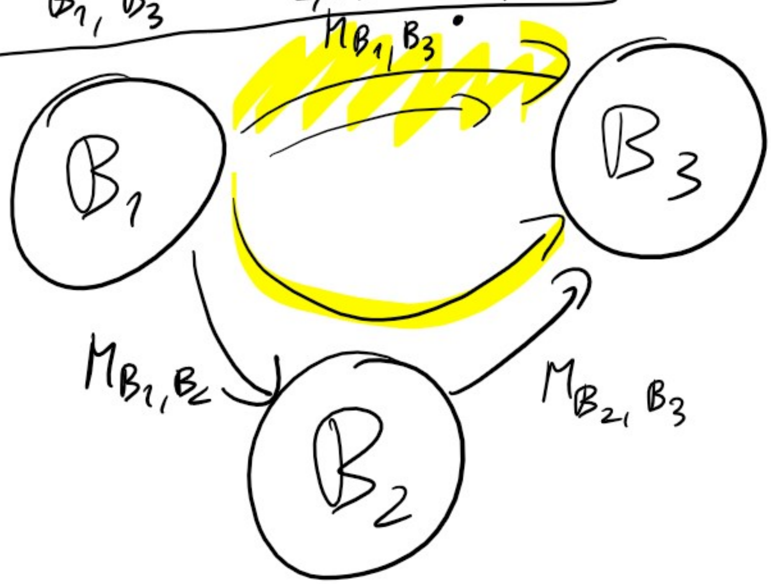
Sn matricea de trecere de la B la B'!

... $\boxed{[v]_B = M_{B',B} \cdot [v]_{B'}}$

Am dem mai sus: $\boxed{[v]_{B} = M_{B',B}\cdot [v]_{B'}}$

Prop. 1. V și trei baze: B_1, B_2, B_3:

$$\boxed{M_{B_1,B_3} = M_{B_2,B_3}\cdot M_{B_1,B_2}}$$



2. Consecință: $M_{B_1,B_2} = \left(M_{B_2,B_1}\right)^{-1}$

Caz particular $V = K^n$. Fie B_1, B_2 baze și B_0 baza canonică

$$M_{B_1,B_2} = M_{B_0,B_2}\cdot M_{B_1,B_0}$$

simplu de scris: $M_{B_1,B_0} = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$B_1 = \{b_1, \dots, b_n\}$, $B_2 = \{b_1', \dots, b_n'\}$

$$\Rightarrow \boxed{M_{B_1,B_2} = \left(M_{B_2,B_0}\right)^{-1} \cdot M_{B_1,B_0}}$$

Exemplu Coord lui $\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$ în baza $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix}\right\}$?

$$\left[\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\right]_{B_0} = \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}\right]_{B} = M_{B_0,B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}}_{\text{coord în } B_0} = \left(M_{B,B}\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & 1 & 5\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}6 & -2 & -10\\1 & 1 & 5\\1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix}8\\16\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$