NICOI ALEXANDRU

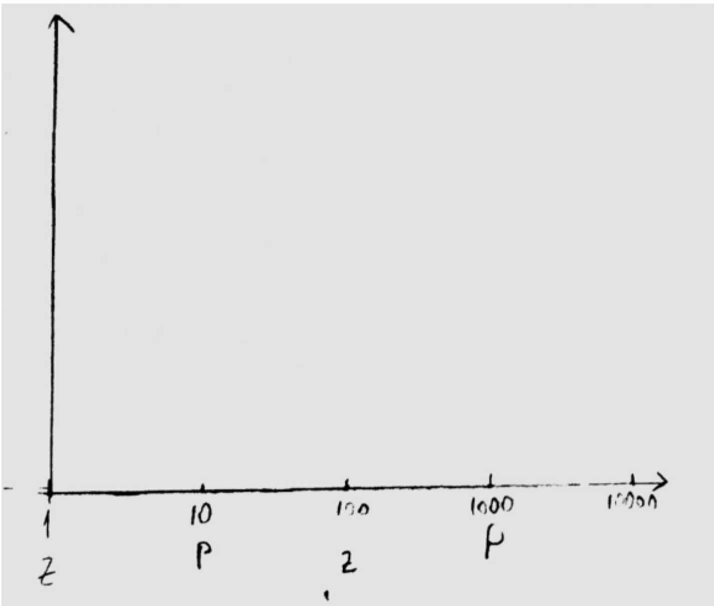
GRUPA 253

EXAMEN
TEORIA SISTEMELOR

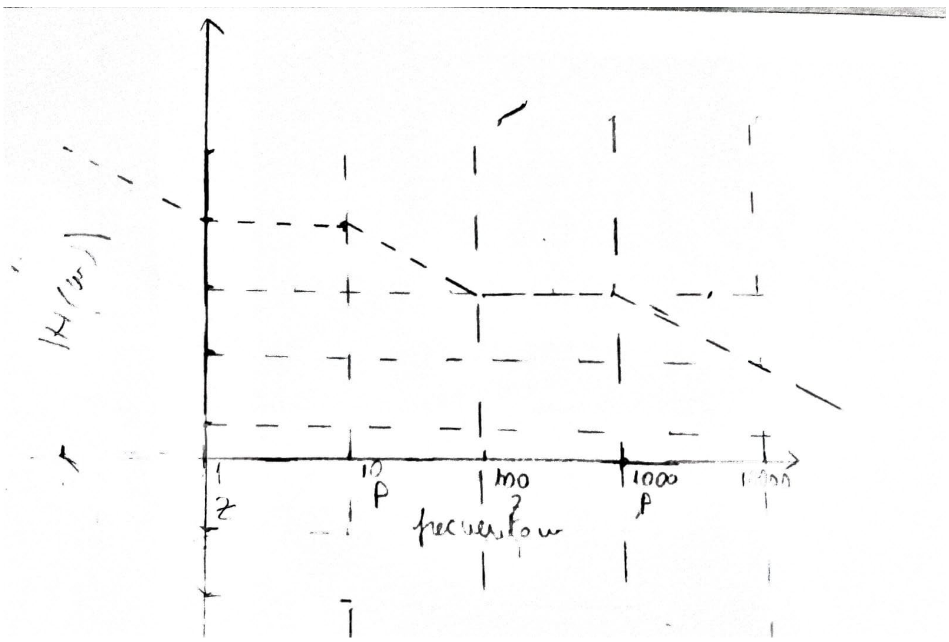
Problema A10

$$H(s) = 10^3 \frac{(s+1)(s+100)}{s\,(s+10)(s+10^3)}$$

Avem 2 zerouri, la s = -1 și s = -100. Frecvențele zerourilor sunt la 1 și 100. Avem 3 poli, în origine, la s = -10 și la s = -10^3. Frecvențele polilor sunt la 10 și 10^3. În desenul de mai jos, cea mai mică frecvență este 1, iar cea mai mare este 1000. Nu putem reprezenta 0 deoarece lucrăm pe scara logaritmică. Pe axa Ox vom desena de la 1 până la 10000.



Deoarece avem un pol în 0 înseamnă că vom avea din stânga panta de -1 decadă / decadă. Începem desenul cu o pantă de -1. În momentul în care ajunge în regiunea de frecvență 1, va întâlni un zerou, panta va crește cu 1 și va ajunge la 0 decadă / decadă. În continuare va ajunge la frecvența de 10 unde este pol unde va scădea cu 1 și va ajunge înapoi la -1 decadă / decadă. Va ajunge la 100 unde este zerou, panta va crește cu 1 și va deveni 0 (adică orizontală). Continuând, va ajunge la 1000 unde este pol și va scădea iar cu 1 și va deveni -1. Deoarece nu vor mai exista alte zerouri sau poli, panta va tinde spre ∞.



Vom seta s mult mai mic decât 1 așadar din H(s) următoarea expresie aproximativă la frecvențe mici:

$$H(s) \cong 10^3 * \frac{1 * 100}{s * 10 * 10^3} \cong \frac{10}{s}$$

$$|H(\omega)| \cong \frac{10}{\omega}$$

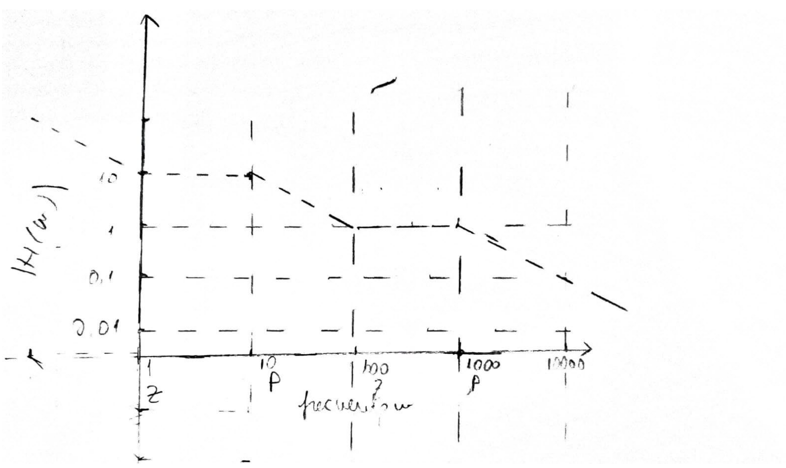
La frecvența ω = 1, amplificarea va fi 10.

La frecvența ω = 10, amplificarea va fi tot 10.

La frecvența ω = 100, amplificarea va fi 1.

La frecvența ω = 1000, amplificarea va fi tot 1.

Acest lucru se întâmplă deoarece panta va merge pe orizontală până în punctul de frecvență ω = 10 , care este pol , urmând să scadă pană la punctul ω = 100 care este zerou, unde din nou panta va merge pe orizontală astfel că la punctul ω = 1000 va fi aceeași amplificare ca cel anterior.



Perfecționare:

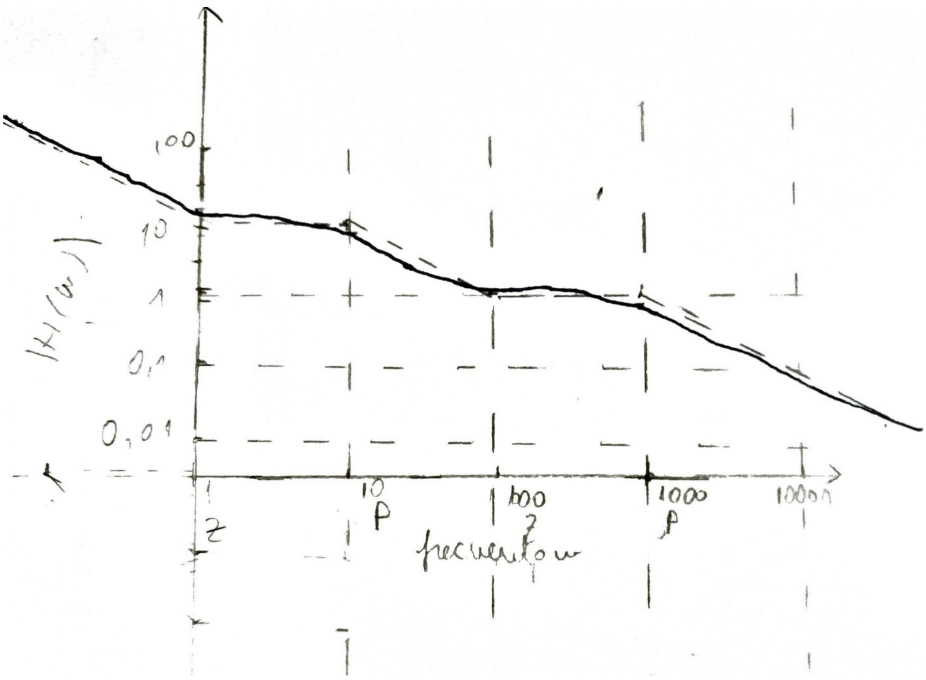
Pentru zerouri, vom calcula amplificarea corecta înmulțind valoarea aproximativă calculată anterior cu $\sqrt{2}$. Pentru poli, se înmulțeste cu $\frac{1}{\sqrt{2}}$

La frecvența 1 avem un zerou, deci caracteristica exactă trece peste valoarea 10. Zeroul va determina ca amplificarea să crească la 14.1 ($\sqrt{2} * 10$).

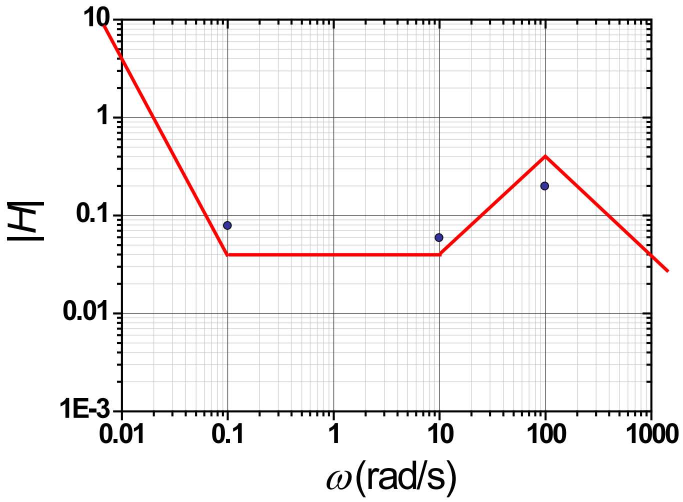
La frecvența 10 avem un pol, deci caracteristica exactă trece sub valoarea 10. Polul va determina ca amplificarea să scadă la 7.07.

La frecvența 100 avem un zerou, deci caracteristica exactă trece peste valoarea 1. Zeroul va determina ca amplificarea să crească la 1.41.

La frecvența 1000 avem un pol, deci caracteristica exactă trece sub valoarea 1. Polul va determina ca amplificarea să scadă la 0.70.



Problema B4



Panta graficului porneste cu -2 decadă / decadă inseamnă că în origine există doi poli identici. În punctul de frecvență ω = 0.1 panta devine 0 deci există două zerouri identice. În punctul ω = 10, panta devine 1 decadă/decadă, deci avem un zerou. În punctul de frecvență ω = 100, panta devine -1 decadă/decadă, deci acolo se află doi poli identici.

Frecvența minimă este 0.1, iar cea maximă este 100, axa aflându-se între 0.01 și 1000.

Pentru punctul de frecvență 0.01, amplificarea are valoare 4, ceea ce rezultă că pentru frecvențe mici formula este $|H(\omega)| \cong 4 * \omega^{-2}$. La punctul de frecvență ω = 0.1 amplificarea are valoarea de 0.04 deoarece avem panta de -2 decadă/decadă. Pentru ω = 10, deoarece panta este 0, amplificarea are tot valoarea 0.04. Pentru ω = 100, deoarece se află pe panta de +1 decadă/decadă, amplificarea este 0.4.

În momentul în care alegem un s mult mai mic de 0.01, expresia aproximativă la frecvențe mici este $|H(s)| \cong \frac{4}{s^2}$.

În continuare vom verifica amplificarea corectă a frecvențelor pentru a vedea dacă cumva formula H(s) conține ecuații complexe.

În ω = 0.1 avem 2 zerouri, deci amplificarea corectă este $0.04 * \sqrt{2} * \sqrt{2} = 0{,}08$ de unde rezultă că nu există o ecuație complexă.

În ω = 10 avem 1 zerou, deci amplificarea corectă este $0.04 * \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}056$, pe care îl aproximăm la 0.06, de unde rezultă că nu există o ecuație complexă.

În ω = 100 avem 2 poli, deci amplificarea corectă este $0.4 * \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}2$ de unde rezultă că nu există o ecuație complexă.

Prin urmare, H(s) are următoarea formă:

$$H(s) = 4 * 10^5 * \frac{(s+0.1)^2 * (s+10)}{s^2(s+100)^2}$$

Problema C2

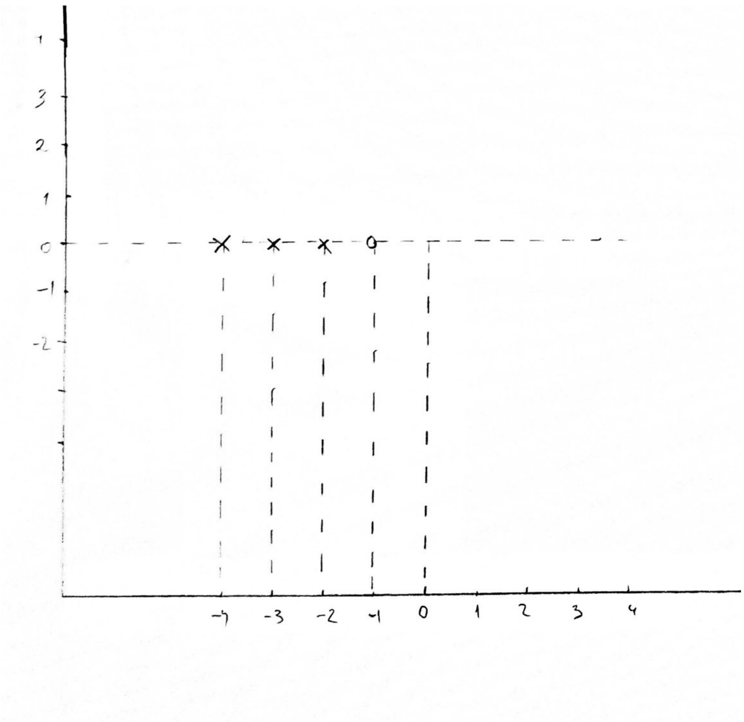
$$L(s) = k \cdot \frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Din formula din enunț, rezultă faptul că avem 3 poli în s = -2, s = -3 și s = -4, și un zerou la s = -1.

N = 3

M = 1

Locul rădăcinilor are trei ramuri, ele pornesc la k = 0 din aceste puncte.



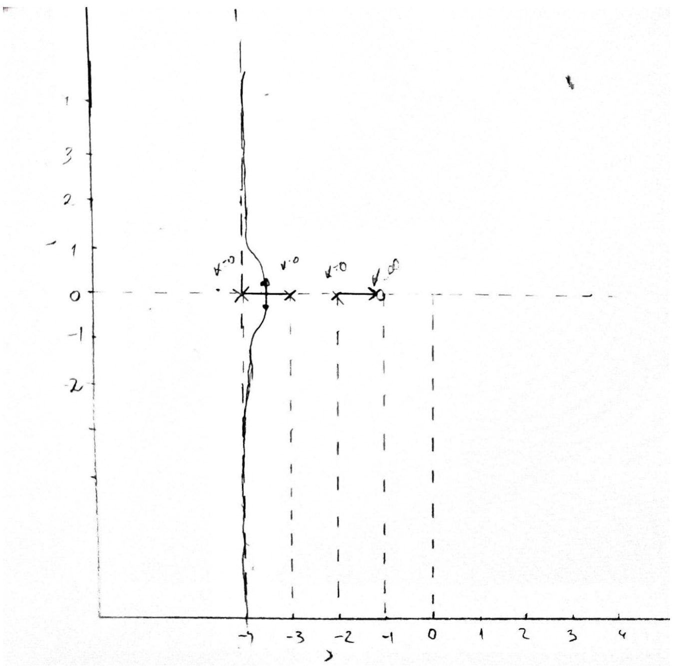
Avem 3 poli de unde rezultă faptul că sunt 3 ramuri care vor porni din -2, -3 și -4. Una dintre ele se va termina în zeroul din -1, iar celelalte două vor forma un punct de break out.

Vom număra de la dreapta la stânga câte puncte speciale. La dreapta zeroului s = -1 nu avem niciun punct. În punctul s = -1 întâlnim primul punct special care este impar și vom trasa spre următorul punct (s = -2) care este par, locul rădăcinilor. Când ajungem la s = -2, oprim trasarea și mergem la următorul punct care este impar (s = -3), de unde vom trasa spre următorul punct care este par (s =-4). Din punctul s = -4 nu mai trasăm nimic deoarece este par.

Din trasarea dintre s = -3 și s = -4 pornesc dintr-un punct break out două ramuri.

Calculăm centrul de greutate:

$$Scg = \frac{Sumapoli - Sumazerouri}{N-M} = \frac{-2-3-4+1}{2} = -4$$



În continuare vom calcula intersecțiile cu axa imaginară:

$$1 + k * \frac{(s+1)}{(s+2)*(s+3)*(s+4)} = 0,\ \ unde\ s = j\omega$$

$$(j\omega + 2) * (j\omega + 3) * (j\omega + 4) + k * (j\omega + 1) = 0$$

$$(j^2\omega^2 + 5j\omega + 6) * (j\omega + 4) + kj\omega + k = 0$$

$$(j^3\omega^3 + 5j^2\omega^2 + 6j\omega + 4j^2\omega^2 + 20j\omega + 24) + kj\omega + k = 0$$

$$j^3\omega^3 + 9j^2\omega^2 + 26j\omega + 24 + kj\omega + k = 0$$

$$-j\omega^3 - 9\omega^2 + 26j\omega + 24 + kj\omega + k = 0$$

$$j\omega(26 - \omega^2 + k) - 9\omega^2 + 24 + k = 0$$

REAL:

$-9\omega^2 + 24 + k = 0$

$k = 9\omega^2 - 24$

IMAGINAR:

$\omega(26 - \omega^2 + k\omega) = 0$

$\omega(26 - \omega^2 + 9\omega^3 - 24\omega) = 0$

1. $\omega = 0 \rightarrow k = -24$
2. $\omega \cong -1.97 \rightarrow k = 54$

Având rezultatele de mai sus, deducem că sistemul este stabil, polii aflându-se în semiplanul stâng al planului complex s (în stanga dreptei imaginare).