Cursul 3

Thursday, October 21, 2021 1:47 PM

# Subspații vectoriale (cont.)

**Def** (reamintire) Fie $V$ un $K$-spațiu vectorial (corpul) și $W \subset V$. $W$ s.n. subspațiu vectorial al lui $V$ dacă:

$$\forall w_1, w_2 \in W, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \quad \alpha w_1 + \beta w_2 \in W.$$

**Data trecută**: Care sunt subspațiile lui $\mathbb{R}^2$ (ca $\mathbb{R}$-spațiu vectorial)?

**Def 1** Fie $V$ un $K$-spațiu vectorial și $v_1, v_2, \ldots v_n \in V$. S.n. combinație liniară cu vectorii $v_1, \ldots v_n$ (a vectorilor) orice sumă de tipul $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$ pt. niște scalari $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in K$.

$\boxed{\text{Def 2}}$ Fie $V$ un $K$-spațiu vectorial și $M \subset V$.

S.n. subspațiul generat de $M$:

$$\langle M \rangle = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_1, \ldots \alpha_n \in K \\ v_1, \ldots v_n \in M \end{array} \right\}$$

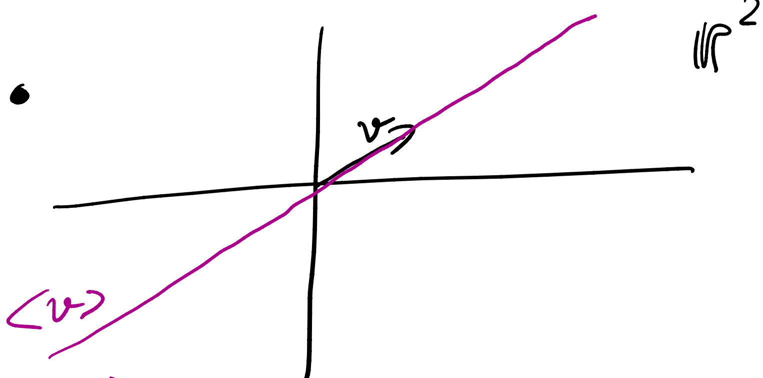
"Mulțimea tuturor combinațiilor liniare posibile cu

"Mulțimea tuturor combinațiilor liniare posibile cu vectori din M"

**Obs** $\langle M \rangle \leq_K V$ (este subspațiu).

**Exemple** • $0 \in V \Rightarrow \langle 0 \rangle = \{0\} \leq V$

• $M = V \Rightarrow \langle M \rangle = \langle V \rangle = V$

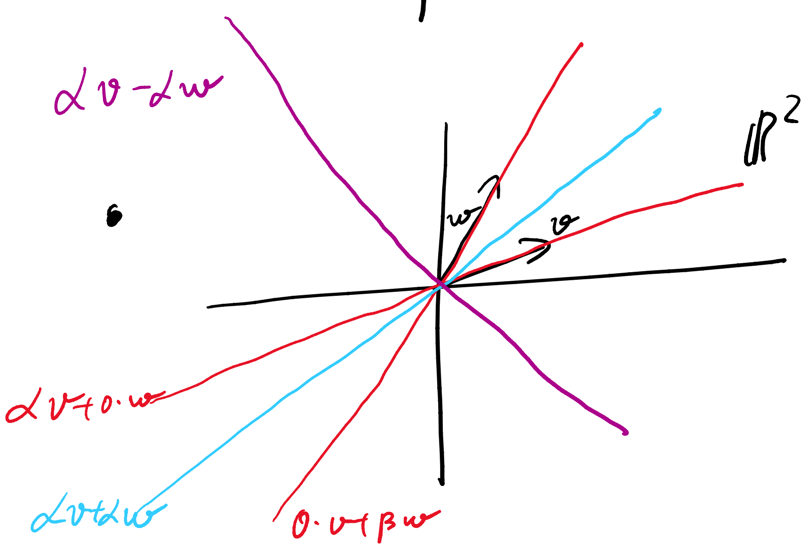
• 


$M = \{v\} \subset \mathbb{R}^2, v \neq 0.$

$\langle M \rangle \overset{\text{not}}{=} \langle v \rangle$

$= \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

= dreapta suport a lui $v$

• 


$M = \{v, w\}$,

$v, w$ neproporționale

$\langle M \rangle \overset{\text{not}}{=} \langle v, w \rangle$

$= \{\alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

---

**Obs** 1. $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \langle M_1 \rangle \subset \langle M_2 \rangle$

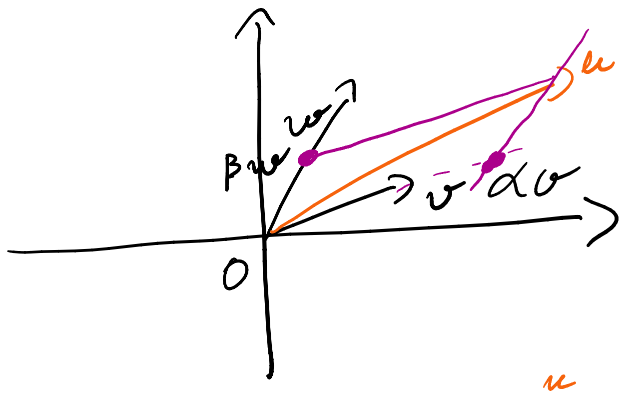
2. $M \subset W$ și $W$ subspațiu $\Rightarrow \langle M \rangle \subset W$

---

$\langle M \rangle = \langle v, w \rangle = \mathbb{R}^2$

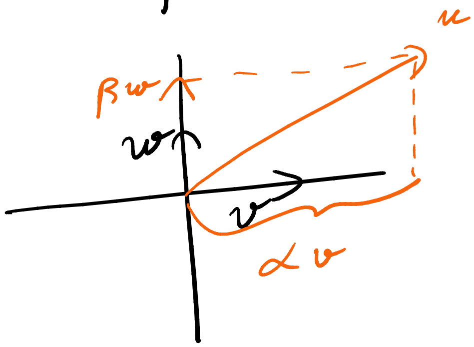
Aleg u arbitrar.

**Dem 1** (geometrică)




Aleg $u$ arbitrar.
Din desen,

$u = \alpha v + \beta w.$




**Dem 2** (algebrică)

Am $v = (a, b)$. Dacă $u = (x, y) \longrightarrow \alpha, \beta$ a.î.

$w = (c, d)$

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\left( \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \text{ nu sunt proporționali} \right)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a\alpha + c\beta = x \\ b\alpha + d\beta = y \end{cases}$$

$\alpha, \beta$ necunoscute

Vreau să pot rezolva sistemul $\forall\, x, y$

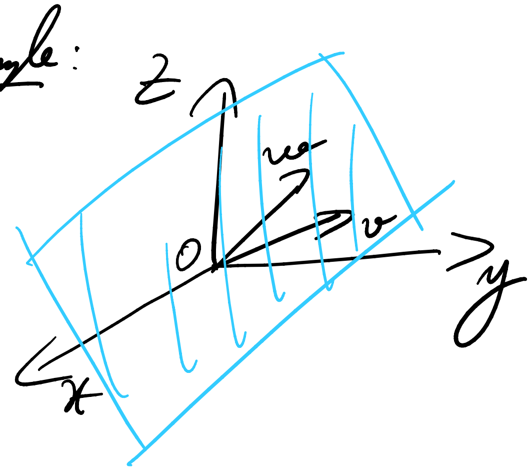
$\Updownarrow$

$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \neq 0$, ceea ce am presupus în ipoteză.

Deci $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha v + \beta w = u$.

Alte exemple:

•

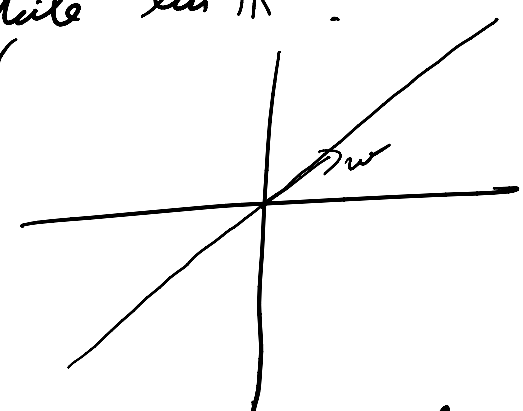



$<v, w> =$ planul generat de $v$ și $w$

• $P =$ polinoamele cu coeficienți reali

$<1, X, X^3> = \{ a + bX + cX^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

Revenim: care sunt subspațiile lui $\mathbb{R}^2$?




Fie $W \leq \mathbb{R}^2$.

Dacă $W = \{0\}$, ok!

Dacă $W \neq \{0\}$, $\exists\, w \in W$, $w \neq 0$.

$w \in W \Rightarrow <w> \subset W$

Dacă $W = <w> = \{ \alpha w \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$, ok!

Dacă $W \supsetneq <w>$, $\exists\, w' \in W$ cu $w' \notin <w>$

($w'$ și $w$ neproporționale)

$w, w' \in W \Rightarrow <w, w'> \subset W \mid \Rightarrow \mathbb{R}^2$

Lista de subspații

- $\{0\}$
- $<w>$ : dreapta care trece prin $0$
- $\mathbb{R}^2$

duale spațiile ... de ... subspații

$w, w' \in W \Rightarrow \langle w, w' \rangle \subset W$, $\langle w, w' \rangle = \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow W = \mathbb{R}^2$

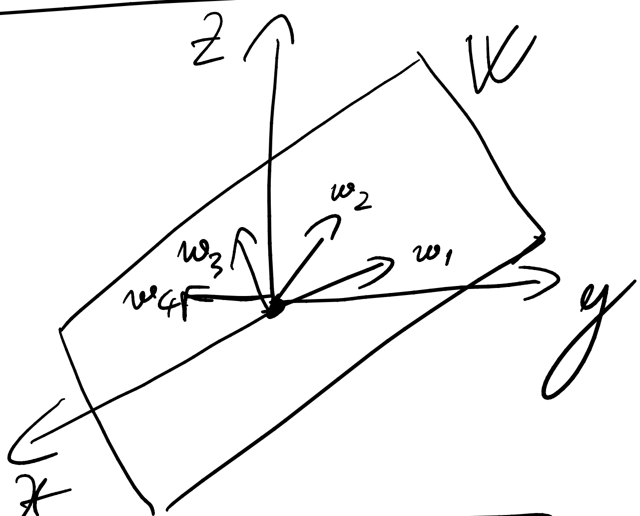
ale cu subspații

---

**Ex** La fel pt $\mathbb{R}^3$:
- $\{0\}$
- drepte prin 0
- plane care trec prin 0
- $\mathbb{R}^3$

---

**Obs**




$$W = \langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle = \dots = \langle W \rangle$$

---

**Q** Dat $V$ sp vect, de câți generatori am nevoie pentru el?

$$P_n = \{ f \in \mathbb{R}[X] \text{ polinoame} \mid \deg P \le n \}$$

De câți generatori am nevoie pt $P_n$?
(Optim, minimal!)

$$P_n = \langle 1, X, X^2, \dots, X^n \rangle.$$

Q Oare nu se poate găsi și o mulțime cu mai puține

**Q** Oare nu se poate găsi și o mulțime cu mai puține elemente?

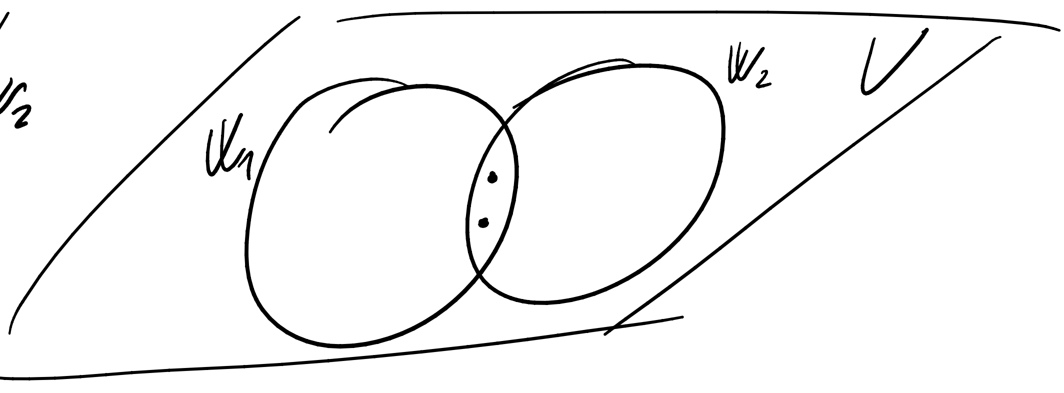
## Operații cu subspații vectoriale

$V$ sp. vect peste $K$, $W_1, W_2 \leq V$ $\to$ $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$ subspații?

**Obs 1.** Dacă $W_1, W_2 \leq_K V \implies W_1 \cap W_2 \leq_K V$

**Dem** Fie $u, v \in W_1 \cap W_2$. Vrem $\alpha u + \beta v \in W_1 \cap W_2$, $\forall \alpha, \beta \in K$

Da: $\left.\begin{array}{l} \overbrace{\alpha u + \beta v}^{\in W_1} \in W_1 \text{ pt că } W_1 \text{ subsp} \\ \underbrace{\alpha u + \beta v}_{\in W_2} \in W_2 \text{ — } W_2 \text{ —} \end{array}\right\} \implies \alpha u + \beta v \in W_1 \cap W_2$




**Obs 2** Dacă $\{W_i\}_{i \in I}$ ($I$ mulțime de indexare, posibil infinită)

și $W_i \leq V$, $\forall i$

$$\implies \bigcap_{i \in I} W_i \leq_K V$$

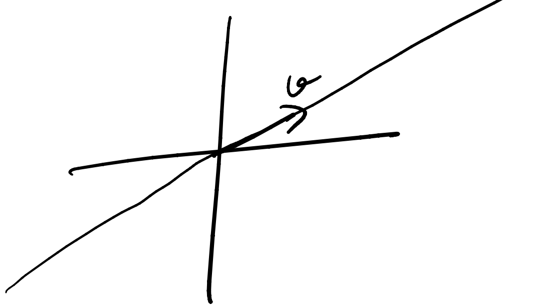
## Def alternativă a spațiului generat de o mulțime

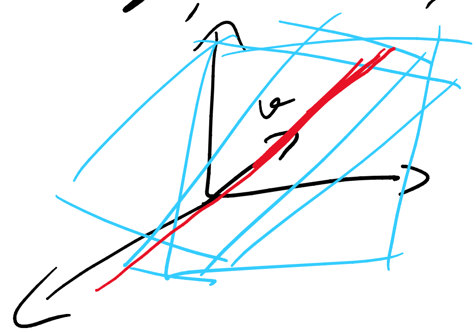
$M \subset V$ submulțime

$$\langle M \rangle = \bigcap_{\substack{W \le V \\ W \supset M}} W$$

intersecția tuturor subspațiilor care conțin $M$

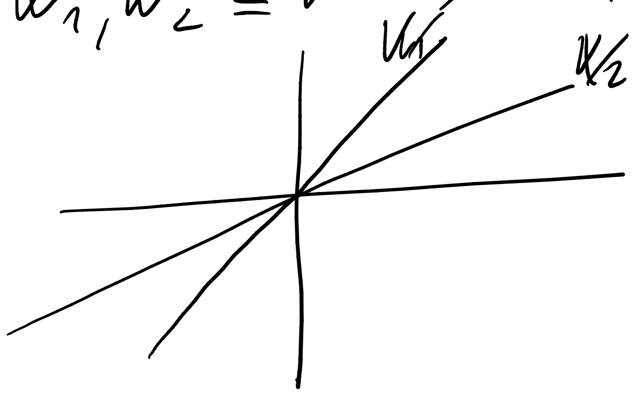
Deci $\langle M \rangle$ este "cel mai mic subspațiu care conține $M$"




---

$W_1, W_2 \le V \Rightarrow W_1 \cup W_2$ subspațiu?




$\Longrightarrow W_1 \cup W_2$ NU este subspațiu

În general, dacă $W_1$ și $W_2 \le V \Rightarrow W_1 \cup W_2$ nu este aproape niciodată subspațiu!

(dacă $W_1 \subset W_2$ sau $W_2 \subset W_1$, $W_1 \cup W_2 = W_1$ sau $W_2 \Rightarrow$ e subsp)

(dacă $W_1 \subset W_2$ … )

**Def** Date $W_1, W_2 \le V$, definim suma subspațiilor

$$\boxed{W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle}$$

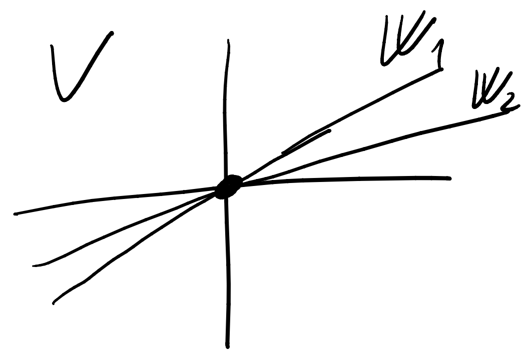
cel mai mic subspațiu care conține reuniunea.

**Prop** $= \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \}$

$$\begin{tikzcd} & W_1+W_2 & \\ W_1 \arrow[ur, dash] & & W_2 \arrow[ul, dash] \\ & W_1 \cap W_2 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

$W_1 \subset W_1 + W_2$

$W_2 \subset W_1 + W_2$




**Def** Dacă $W_1 + W_2 = V$

și $W_1 \cap W_2 = \{0\}$,

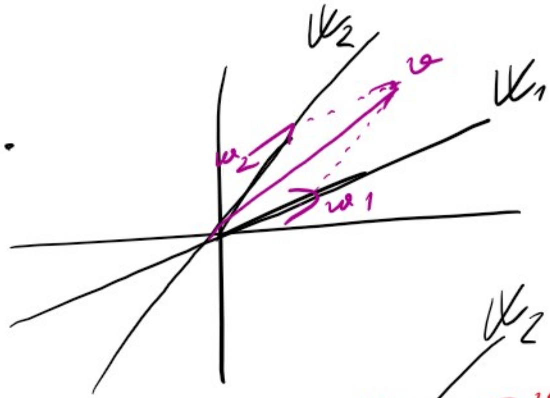
spunem că suma directă a lui $W_1$ și $W_2$ este $V$ și scriem $W_1 \oplus W_2 = V$

Deci $W_1 \oplus W_2 = V$ ⟹

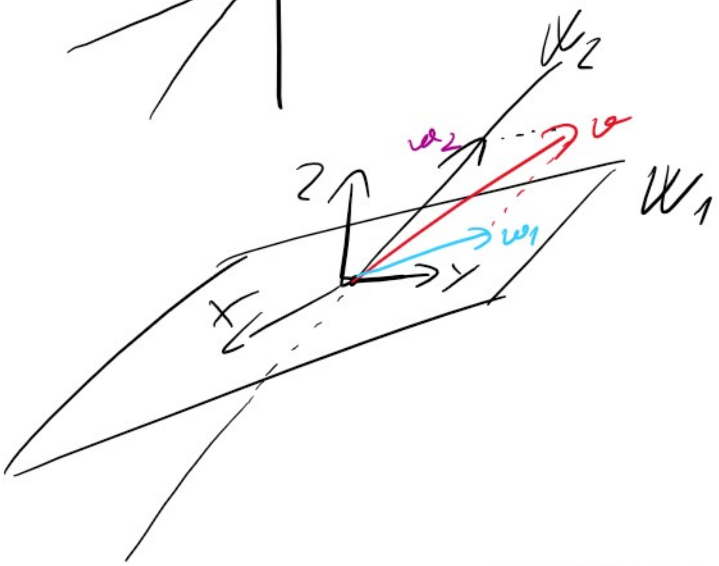
- $W_1 + W_2 = V$ ($\forall v \in V, \exists w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ cu $w_1 + w_2 = v$)
- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

**Prop** $W_1 \oplus W_2 = V \iff \forall v \in V$, $\exists!$ $w_1 \in W_1$ și $w_2 \in W_2$ a.î. $w_1 + w_2 = v$.

**Exemple**

• 


$W_1 \oplus W_2 = V$

• 


---

## Sisteme de generatori. Sisteme liniar independente

**Def** Fie $V$ un $K$-sp vectorial.

1. O mulțime $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ s.n. sistem de generatori (S.G.) pentru $V$ dacă $\boxed{\langle S \rangle = V}$

$\iff \forall v \in V$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ a.î.

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

ca o combinație

Orice vector din $V$ se poate scrie ca o combinație liniară cu elemente din $S$.

<u>Ex</u> $\{1, x, x^2, \dots x^n\}$ pt $P_n$.

2. O mulțime $L = \{w_1, \dots w_p\} \subset V$ s.n. <u>sistem liniar independent</u> (S.L.I.) dacă:

$$\forall \alpha_1, \dots \alpha_p \in K, \ \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_p w_p = 0_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0_K$$

Adică: Singurul fel în care pot obține $0 \in V$ ca o combinație liniară cu elemente din $L$ este să aleg toți coeficienții $0$.

$\Leftrightarrow$ "$0$ se scrie într-un singur fel ca o comb. lin. cu elementele $w_1, \dots w_p$"

<u>Obs</u> $L$ este S.L.I. $\Leftrightarrow \forall v \in V$ are <u>cel mult</u> o scriere de tipul $v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p$.

<u>Dem</u> "$\Leftarrow$" Clar!

"$\Rightarrow$" Pp că

$$v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p$$
$$v = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p \quad \text{scădem}$$
$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) w_1 + \dots + (\alpha_p - \beta_p) w_p$$

$$0 = (\alpha_1-\beta_1)w_1 + \dots + (\alpha_p-\beta_p)w_p$$

$$\stackrel{\text{LeSLI}}{\Longrightarrow} \alpha_1=\beta_1, \dots, \alpha_p=\beta_p$$

## Reformulare

S.L.I.: Orice vector din $V$ se scrie în $\boxed{\text{cel mult}}$ un fel ca o combinație liniară cu elemente din mulțime.

S.G.: ______ $\boxed{\text{cel puțin}}$ ______

---

**Exemple** $V$ sp. vect.

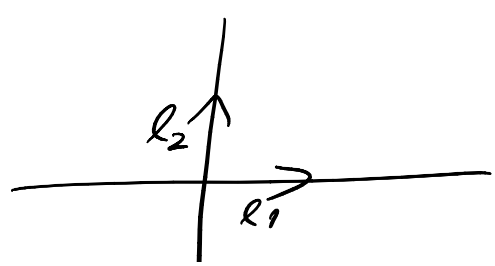
$\Rightarrow$ • $V$ e sistem de generatori

• $\emptyset$ e sistem liniar independent (prin convenție, $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$)

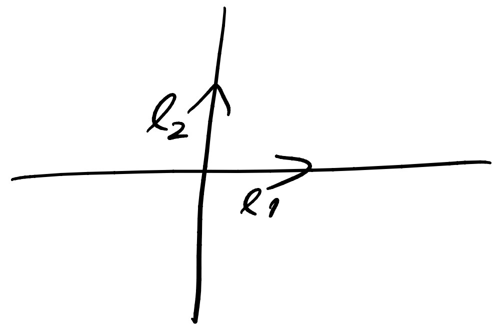
• $v \neq 0$, $\{v\}$ este S.L.I. $\Leftrightarrow \forall \alpha \in K, \alpha v = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$\Leftrightarrow v \neq 0$.

**Obs** $0$ nu aparține niciunui S.L.I.

• În $\mathbb{R}^2$, $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



• În $\mathbb{R}^2$, $\left\{ e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$




S.L.I.: $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha e_1+\beta e_2=0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$.

Într-adevăr, $\alpha e_1+\beta e_2 = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\overset{\text{vector}}{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \alpha=\beta=0$

S.G.: $\forall v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\exists\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ a.î. $\alpha e_1+\beta e_2=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

$\underbrace{a}_{} e_1+\underbrace{b}_{} e_2=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ DA, e și S.G.

$\alpha=a$

$\beta=b$.

– În $\mathbb{R}^2$, $\left\{ \boxed{\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix}} \right\}$ e SLI? e SG?

SLI: $\underbrace{-3}_{}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\underbrace{2}_{}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\underbrace{1}_{}\begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

NU este SLI

S.G: $\alpha\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

?

$\forall a, b,\ \exists\ \alpha, \beta, \mu$?

Agasi $\alpha, \beta, \mu \iff \begin{cases} 3\alpha + 4\beta + \mu = a \\ 5\alpha + \beta + 13\mu = b \end{cases}$ ...?

a rezolva sistemul

– În $P_n$, $\{1, X, X^2, \dots X^n\}$

polinomul 0

S.L.I.: Fie $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ a.î. $\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot X + \dots + \alpha_n X^n = 0$

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

din definiția polinom $= 0$

S.G.: DA, $\forall$ polinom se scrie ca $\_ + \_X + \_X^2 + \dots + \_X^n$ (de grad $\leq n$)

---

<u>După pauză</u>: În $K^m$, cum recunoaștem sistemele liniar indep. și sistemele de generatori?

$\boxed{\text{S.L.I.}}$ Avem $\{v_1, \dots v_n\} \subset K^m$. Când e S.L.I.?

E SLI $\iff \forall \alpha_1, \dots \alpha_n \in K$, $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

$\alpha_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} v_2^1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} | \\ v_n \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{v_1} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{v_2} + \dots + \alpha_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{v_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(*) \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = 0 \end{cases}}$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ e SLI $\Leftrightarrow$ sistemul $(*)$ are doar soluția trivială $\underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n}$

$\Leftrightarrow$ sistemul <u>omogen</u> $(*)$ e compatibil determinat

$\Leftrightarrow$ toate variabilele sunt principale

$\Leftrightarrow$ (un) minor principal de toate coloanele

$\Leftrightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = n \leftarrow$ câți vectori sunt.

<u>Recap</u> $\{v_1, \dots, v_n\}$ e SLI $\Leftrightarrow \operatorname{rang}\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = n.$

$M_{m \times n}(K)$ poate să aibă rang $n \Leftrightarrow \boxed{n \leq m}$

__Obs__ $A \in M_{m,n}(K)$ poate să aibă rang $n \iff \boxed{n \le m}$

Am demonstrat: Un sistem liniar independent în $K^m$ are cel mult $m$ elemente.

---

S.G.: $\{v_1, \dots v_n\} \subset K^m$.

e SG $\iff \forall v \in K^m$, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ cu $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = v$.

$$\iff \alpha_1 \begin{pmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} | \\ v_n \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ v \\ | \end{pmatrix} \quad (\exists \alpha_1, \dots \alpha_n, \forall v)$$

$$\underset{(**)}{\iff} \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

Vrem ca sistemul $(**)$ să fie compatibil pentru orice $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$!

(rang $A$ = rang $(A|b)$)

$\iff$ rang $A = m \leftarrow$ nr de coordonate în $K^m$

Deci $\boxed{\{v_1, \dots v_n\} \overset{\subset K^m}{e} \text{ SG} \iff \text{rang}\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = m.}$

nr de coord

__Obs__ $A$ $m \times n$ $\Rightarrow$ rang $A$ poate fi $m \iff m \le n$

n [illegible] în $K^m$ are cel puțin $m$

**Deci** $\boxed{\text{Un sistem de generatori în } K^n \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}}$

---

**Exemple** 1. În $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}$ e SLI? e SG?

- SLI: are 3 elemente $> 2$
- SG: $rg \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 13 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ este SG!

2. În $\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e SLI? e SG?

$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ e și S.L.I., și S.G.

$\det = 3 + 4 - 6 + 4 \neq 0$

---

**Obs** 1. Dacă $L_1 \subset L_2$ și $L_2$ e SLI $\Rightarrow L_1$ e SLI

2. Dacă $S_1 \subset S_2$ și $S_1$ e SG $\Rightarrow S_2$ e tot SG

**Prop** Fie $V$ un sp. vect., $L \subset V$ un SLI și $v \notin \langle L \rangle$

... $L \cup \{v\}$ este tot SLI

Vrem să ...

$\Rightarrow$ $L \cup \{v\}$ este tot SLI

Contraex: $\left\{ \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{2\cdot}, \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \right\}$ NU mai e SLI

$$\left\{ \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \underset{\alpha\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}}} \right\}$$ NU mai e SLI: $1\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \underset{-(\alpha+\beta)}{(-1)}\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix} = 0$

Dem: Pp că $L \cup \{v\}$ nu mai e SLI:

$\exists\, v_1, \dots, v_m \in L$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha \in K$ a.î.

$\alpha_1 \underset{L}{\underset{\cap}{v_1}} + \dots + \alpha_m \underset{L}{\underset{\cap}{v_m}} + \alpha v = 0$ și nu toate $\alpha_i$ și $\alpha$ sunt 0.

Dacă $\alpha = 0 \Rightarrow$ rămân doar vectori din L Abs e SLI

$\alpha \neq 0 \Rightarrow v = \underbrace{-\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha}\right) v_2 + \dots + \left(-\frac{\alpha_m}{\alpha}\right) v_m}_{\in \langle L \rangle}$ Abs

---

Def: Fie V un sp vect și $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$.

B s.n. <u>bază a lui V</u> dacă
- e SLI.
- e SG.

De ex. 
- $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ e bază a lui $\mathbb{R}^2$
- $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ —— $\mathbb{R}^3$
- $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ —— $P_n$.
- $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ este SLI, dar nu bază în $\mathbb{R}^3$ (dar nu SG)

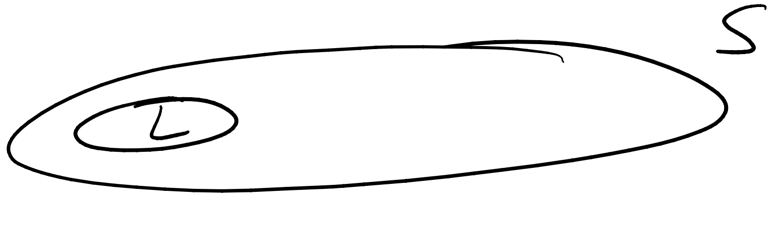
În $K^m$: $\{v_1, \dots, v_n\}$ e bază $\Leftrightarrow$ $m=n$ și

$$\det \begin{vmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \\ | & | & & | \end{vmatrix} \neq 0.$$

În particular, în $K^m$, orice bază are $m$ elemente.

---

Teoremă: Dacă $\underset{\substack{\uparrow \\ SLI}}{L} \subset \underset{\substack{\uparrow \\ SG}}{S} \Rightarrow \exists B$ cu $L \subset B \subset S$ și $B$ bază




Dem (schiță)

Dem (schiță)

Pornesc de la $L$ și adaug elemente

- $L$ e bază $\Rightarrow$ ok!
- Dc $L$ nu e bază $\Rightarrow$ nu e sistem de generatori

$\Rightarrow \exists\, v \in S \setminus \langle L \rangle$ $\left( \text{altfel } S \subset \underbrace{\langle L \rangle}_{\text{subsp}} \Rightarrow \langle S \rangle \subset \langle L \rangle \right)$

$\langle S \rangle = V$, $\langle L \rangle = V$

$V = \langle L \rangle$ abs

Adaug $v$ la $L$:

- $L \cup \{v\}$ e bază $\Rightarrow$ ok!
- Dc $L \cup \{v\}$ nu e bază $\Rightarrow \exists\, v' \in S \setminus (\langle L \cup \{v\} \rangle)$

"inducție", procedeul se oprește la o bază $B$.