Examen[1] la Algebră şi Geometrie, seria 16, 25.01.2022

Nume și prenume: Vîrtopeanu M.S Sebastian-Filip

Grupa: 164

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Submulţimea $\{(-6t-s, s-2t, t+4s^2) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

2. Vectorul $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aparţine subspaţiului $\left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$. **(0,5p)**

3. Patrulaterul cu vârfurile în $(0,0,0), (2,2,6), (0,5,4)$ şi $(-2,3,-2)$ este un dreptunghi. **(0,5p)**

4. Dacă liniile matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formează o bază ortonormală, atunci şi coloanele lui A formează o bază ortonormală. **(0,5p)**

5. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, matricea ${}^tA \cdot A$ este diagonalizabilă. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1 & & + 4x_3 & - 6x_4 & + 9x_5 & = 6 \\ x_1 & + x_2 & - 2x_3 & + 8x_4 & - 12x_5 & = 1 \\ -x_1 & + x_2 & - 9x_3 & + 18x_4 & - 27x_5 & = -10 \\ x_1 & + x_2 & - 2x_3 & + 8x_4 & - 12x_5 & = \alpha \end{cases}.$$

a) Aflaţi $\alpha \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil. **(0,5p)**

b) Pentru α aflat anterior, rezolvaţi sistemul peste $\mathbb{R}$ şi apoi precizaţi soluţiile pentru care $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{N}^*$. **(1p)**

2. Fie $\mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu vectorial euclidian şi aplicaţia liniară

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (5x - 4y - 14z, -2x + 12y + 24z, x - 4y - 8z).$$

a) Scrieţi $A = [f]_{\mathcal{B}_0}$, matricea lui f în raport cu baza canonică. **(0,25p)**

b) Aflaţi $\dim \operatorname{Ker} f, \dim \operatorname{Im} f$. Este f injectivă? **(0,25p)**

c) Decideţi dacă f este diagonalizabilă; dacă da, determinaţi o bază în care are formă diagonală şi relaţia corespunzătoare între matricea lui f în baza canonică şi cea în raport cu acea bază. **(1p)**

d) Fie şirurile $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n \geq 0}$ şi $(w_n)_{n\geq 0}$ date de $u_0 = v_0 = 1, w_0 = 2$ şi relaţiile de recurenţă

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 4v_n - 14w_n, \\ v_{n+1} &= -2u_n + 12v_n + 24w_n, \\ w_{n+1} &= u_n - 4v_n - 8w_n. \end{aligned}$$

Calculaţi u_n, v_n şi w_n pentru orice $n \geq 0$. **(1p)**

3. Fie forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_2x_3.$$

a) Determinaţi o bază în care Q este în formă normală. **(1p)**

b) Calculaţi $\operatorname{sign}(Q)$. Este Q nedegenerată? Dar pozitiv definită? **(0,5p)**

4. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A^2) = \operatorname{Tr}(A^3) = 0$. Demonstraţi că $A^3 = O_3$. **(1p)**

[1] Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!