Examen[1] de restanţă la Algebră şi Geometrie, seria 16, 31.05.2022

Nume și prenume: Brinzea CM Victor

Grupa: 164

I. Pentru fiecare din obiectele cerute mai jos, daţi un exemplu justificat sau explicaţi de ce nu există:

1. Subspaţiu vectorial $V \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ cu $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ şi $W \subset V$, unde $W = \{(t, 2t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. **(0,5p)**

2. Vector $v \in \mathbb{R}^3$ astfel încât mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ -4 \end{pmatrix}, v \right\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

3. Punct $C \in \mathbb{R}^2$ astfel încât triunghiul ABC este degenerat, unde $A = (1, -1)$ şi $B = (0, 6)$. **(0,5p)**

4. Matrice $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ şi $b \in \mathbb{R}^2$ astfel încât sistemul $Ax = b$ are exact o soluţie. **(0,5p)**

5. Matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât A este diagonalizabilă dar ${}^tA$ nu este diagonalizabilă. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu J_n matricea $n \times n$ având 1 pe fiecare poziţie şi I_n matricea identitate. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, considerăm matricea $A_n(a, b) = (a - b)I_n + bJ_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Demonstraţi că $A_3(-1, 3)$ este inversabilă şi calculaţi inversa ei. **(0,75p)**

b) Eventual folosind transformări elementare asupra matricei $A_n(a, b)$, arătaţi că

$$\det(A_n(a, b)) = (a - b)^{n-1}(a + (n - 1)b),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{R}.$$ **(0,75p)**

c) Folosind punctul anterior, demonstraţi că valorile proprii ale matricei $A_n(a, b)$ sunt $a - b$ şi $a + (n - 1)b$. Aflaţi multiplicităţile lor algebrice. **(0,5p)**

d) Este $A_n(a, b)$ diagonalizabilă? Justificaţi răspunsul. **(0,5p)**

2. Fie $\mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu vectorial euclidian şi aplicaţia liniară

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (5x - y + 2z, -x + 5y + 2z, 2x + 2y + 2z).$$

a) Scrieţi $A = [f]_{\mathcal{B}_0}$, matricea lui f în raport cu baza canonică. **(0,25p)**

b) Aflaţi $\dim \operatorname{Ker} f, \dim \operatorname{Im} f$. Este f bijectivă? **(0,25p)**

c) Găsiţi o bază ortonormală în $\operatorname{Im} f$. **(0,5p)**

d) Decideţi dacă f este diagonalizabilă; dacă da, determinaţi o bază în care are formă diagonală şi relaţia corespunzătoare între matricea lui f în baza canonică şi cea în raport cu acea bază. **(1p)**

e) Calculaţi A^{2021}. **(0,5p)**

f) Aflaţi signatura formei pătratice $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$. **(0,5p)**

3. Fie polinomul $P(X) = X^3 - X^2 + 2X + 4 \in \mathbb{R}[X]$. Există o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalizabilă (peste $\mathbb{R}$) astfel încât $P(X)$ este polinomul său caracteristic? Justificaţi răspunsul. **(1p)**

[1] Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!