Examen[1] la Algebră şi Geometrie, seria 16, 3.02.2021

Nume și prenume: IONITA ROXANA-DIANA

Grupa: 164

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Submulţimea $\{(t, 2t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

2. Mulţimea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ este un sistem liniar independent în $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

3. Triunghiul cu vârfurile în $(0,0,0), (3,-5,1)$ şi $(3,2,1)$ este dreptunghic. **(0,5p)**

4. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ iar coloanele lui A nu generează întreg spaţiul $\mathbb{R}^m$, atunci există $b \in \mathbb{R}^m$ pentru care sistemul $Ax = b$ este incompatibil. **(0,5p)**

5. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inversabilă dacă şi numai dacă 0 nu este valoare proprie a lui A. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care are

- -1 pe toate poziţiile $(i, i+1)$ cu $1 \leq i \leq n-1$;
- -4 pe toate poziţiile $(i, i-1)$ cu $2 \leq i \leq n$;
- 1 pe toate poziţiile (i, i) cu $1 \leq i \leq n$;
- 0 pe celelalte poziţii, dacă mai rămân altele în afara de cele de mai sus.

Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

a) Arătaţi că A_3 este inversabilă şi calculaţi inversa ei. **(0,5p)**

b) Arătaţi că $\Delta_n = \Delta_{n-1} - 4\Delta_{n-2}$, pentru orice $n \geq 4$. **(0,75p)**

c) Calculaţi Δ_4 şi Δ_5. **(0,25p)**

2. Fie $\mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu vectorial euclidian şi aplicaţia liniară

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (5x + 2y - z, 2x + 2y + 2z, -x + 2y + 5z).$$

a) Scrieţi $A = [f]_{\mathcal{B}_0}$, matricea lui f în raport cu baza canonică. **(0,25p)**

b) Aflaţi $\dim \operatorname{Ker} f, \dim \operatorname{Im} f$. Este f surjectivă? **(0,25p)**

c) Găsiţi o bază ortonormală în $\operatorname{Im} f$. **(0,5p)**

d) Decideţi dacă f este diagonalizabilă; dacă da, determinaţi o bază în care are formă diagonală şi relaţia corespunzătoare între matricea lui f în baza canonică şi cea în raport cu acea bază. **(1p)**

e) Calculaţi A^{2021}. **(0,5p)**

f) Aflaţi signatura formei pătratice $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$. **(0,5p)**

3. Aflaţi toţi vectorii $x \in \mathbb{R}^3$ pentru care $\|Ax - b\|$ este minimă, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. **(1p)**

4. Fie $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Aflaţi toate matricele simetrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu o valoare proprie 3 si pentru care $Av = -5v$. **(1p)**

[1] Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!

03.02.2021

Examen la Algebră și Geometrie

Seria 16

I 1) $W = \{(t, 2t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ subspațiu al lui $\mathbb{R}^3$? DA (Adv.)

$= \langle (1, 2, -1) \rangle$ SG

$\alpha v \in W$. Fie $w \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha v + \beta w \in W$

2) $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ SLI? Nu (Fals)

$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cancel{-6} + \cancel{6} + 10 - 2 - 18 = 0 \Rightarrow$ rang $\leq 2 \neq 3 =$ nr. vectori $\Rightarrow$ nu este

3) Δ cu vf $(0,0,0), (3,-5,1), (3,2,1)$ este dreptunghic?

$v = (3, -5, 1)$

$w = (3, 2, 1)$

$\langle v, w \rangle = 9 - 10 + 1 = 0 \Rightarrow v \perp w \Rightarrow$ DA (Adv.)

4) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Coloanele lui A nu generează întreg $\mathbb{R}^m$

$b \in \mathbb{R}^m$ pt care $Ax = b$ incompatibil Adv.

5) $A \in M_n(\mathbb{R})$

$\left.\begin{array}{l} \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \\ \text{Dacă } \lambda_i = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow A$ nu este inv.

$\Rightarrow$ DA (Adv.)

II. 1) $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ $\quad A \in M_m(\mathbb{R})$

$-1 \quad (i, i+1)$
$-4 \quad (i, i-1)$
$1 \quad (i, i)$
$0 \quad$ (celelalte)

a) A_3 inv. și A_3^{-1}.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A_3 = 1+0+0-0-4-4$
$= 1-8 = -7 \neq 0 \Rightarrow A_3$ este inversabilă.

$$A_3^{t} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & -3 \end{pmatrix} ; \quad A_3^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*}$$

$a_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-4) = -3.$

$a_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1+0) = 1$

$a_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

$a_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4) = 4$

$a_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$a_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1$

$a_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 16$

$a_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4) = 4$

$a_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) = -3$

$$\Rightarrow A_3^{-1} = \frac{1}{(-7)} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{16}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

b) $\Delta_n = \Delta_{n-1} - 4 \cdot \Delta_{n-2} \quad \forall n \geq 4$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^7 \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det A_3 + 4 \cdot (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_3 - 4 \cdot \Delta_2$$

$$\Delta_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & \cancel{-0}1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{10} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^9 \cdot (-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \cancel{-0}1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \Delta_4 + 4 \cdot (-1)^8 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \Delta_4 - 4 \cdot \Delta_3$$

Pe diag pp → 1
Imediat deasupra → −1
Imediat dedesubt → −4
În rest → 0.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Dezvoltăm după linia n.

$$= 1\cdot(-1)^{2n}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} + (-4)\cdot(-1)^{2n-1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_{n-1} + 4\cdot(-1)\cdot(-1)^{2(n-1)}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-2}}$$

$$= \Delta_{n-1} - 4\cdot \Delta_{n-2} \quad \forall\, n \geq 4.$$

c) $\Delta_4 = \Delta_3 - 4\Delta_2 = -7 - 4\cdot(-3) = -7+12 = 5.$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3$

$\Delta_5 = \Delta_4 - 4\cdot\Delta_3 = 5 - 4\cdot(-7) = 5+28 = 33.$

2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (5x+2y-z;\ 2x+2y+2z;\ -x+2y+5z)$

a) $A = [f]_{B_0} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) dim Ker f, dim Im f. Este f surjectivă?

Im f = < coloanele lui $[f]_{B_0}$ >

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 50-4-4-2-20-20 = 0$

rg. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ bază pt Im f $\Rightarrow$ dim Im f = 2

$\left.\begin{array}{l} \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \\ \dim \operatorname{Im} f = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1$

Cum $\dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ nu e surjectivă.

d) f diagonalizabilă?

$[f]_{B_0} = A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculăm polinomul caracteristic $P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(2-\lambda) - 4 - 4 - (2-\lambda) - 4(5-\lambda) - 4(5-\lambda)$$

$$= (5-\lambda)^2(2-\lambda) - 8 - (2-\lambda) - 8(5-\lambda)$$

$$= (5-\lambda)^2(2-\lambda) - 8 - 2 + \lambda - 40 + 8\lambda$$

$$= (5-\lambda)^2(2-\lambda) - 50 + 9\lambda$$

$$= (25 - 10\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 50 + 9\lambda$$

$$= 50 - 25\lambda - 20\lambda + 10\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 50 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 36)$$

$$= (-\lambda)(\lambda - 6)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ sau } \lambda = 6.$$ Toate răd. sunt reale

$\lambda_1 = 0 \quad m_a(\lambda_1) = 1; \ m_g(\lambda_1) = 1$

$\lambda_2 = 6 \quad m_a(\lambda_2) = 2$

$1 \le m_a(\lambda) \le m_g(\lambda) \Rightarrow m_g(\lambda_1) = 1$

Calculăm întâi V_{λ_2} ca să aflăm dacă f este diagonalizabilă.

$$V_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = 6x \\ 2x + 2y + 2z = 6y \\ -x + 2y + 5z = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$rg\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 1 \qquad mg(\lambda_2) + rg = 3 \Rightarrow mg(\lambda_2) = 2 = ma(\lambda_2)$$

Cum $mg(\lambda_1) = ma(\lambda_1)$ și $ma(\lambda_2) = mg(\lambda_2) \Rightarrow f$ diagonalizabilă.

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$ se reduce la $-x + 2y - z = 0$

Var. secundare: $y = \alpha, z = \beta$.

$$x = 2y - z = 2\alpha - \beta$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (2\alpha - \beta; \alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_2} = \{(+2\alpha - \beta; \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (2, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \Rightarrow B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ bază pt V_{λ_2}.

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \qquad rg\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ var. secundare: $z = \alpha$.

$$\begin{cases} 5x + 2y - \alpha = 0 \\ 2x + 2y + 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y = \alpha \\ 2x + 2y = -2\alpha \end{cases} \quad -$$
$$3x = 3\alpha \Rightarrow x = \alpha$$

$$\Rightarrow 5\alpha + 2y = \alpha \Rightarrow 2y = -4\alpha \Rightarrow y = -2\alpha$$

$$\Rightarrow V_{\lambda_1} = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle 1, -2, 1 \rangle$$

$\Rightarrow B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ bază a lui V_{λ_1}

$\exists$ o bază $B = B_1 \cup B_2$ în care f are formă diagonală.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \qquad [f]_{B_0} = M_{B,B_0} \cdot [f]_B \cdot M_{B_0,B}.$$

$$= M_{B,B_0} \cdot [f]_B \cdot (M_{B,B_0})^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

c) Bază ortonormală în $\operatorname{Im} f$

B = bază oarecare pt $\operatorname{Im} f = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\}$

Pasul 1: $f_1' = b_1 = (5, 2, -1)$

$$f_2' = b_2 - \frac{\langle b_2, f_1' \rangle}{\langle f_1', f_1' \rangle} \cdot f_1' = (2,2,2) - \frac{12}{30} \cdot (5,2,-1)$$

$$= (2,2,2) - \frac{2}{5}(5,2,-1) = \left(0, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

Pasul 2: $f_1 = \dfrac{f_1'}{\|f_1'\|} = \dfrac{(5,2,-1)}{\sqrt{30}} = \left(\dfrac{5}{\sqrt{30}}, \dfrac{2}{\sqrt{30}}, \dfrac{-1}{\sqrt{30}}\right).$

$$f_2 = \frac{f_2'}{\|f_2'\|} = \frac{\left(0, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)}{\sqrt{\frac{180}{25}}} = \frac{\left(0, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)}{\frac{6\sqrt{5}}{5}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

e) A^{2020}

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$A^{n} = P \cdot D^{n} \cdot P^{-1}$

$$A^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{pmatrix}^{2020} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^{2020} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{2020} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \cdot 6^{2020} & -6^{2020} \\ 0 & 6^{2020} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{2020} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

f) $Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

$sgn(Q) = m_+ - m_-$

$Q = (5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3.$

$= \frac{1}{5}(5^2x_1^2 + 4\cdot 5x_1x_2 - 2\cdot 5x_1x_3) + 2\cdot x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3.$

$\cancel{= \frac{1}{5}(5x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_2x_3.}$

$\cancel{= \frac{1}{5}(5x_1 + 2x_2 - x_3)^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_2x_3}$

$\cancel{S.V: y_1 = 5x_1 + 2x_2 - x_3.}$

$\cancel{\Rightarrow \frac{1}{5}y_1^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 + 4y_3^2}$

$\cancel{= \frac{1}{5}y_1^2}$

$$= \frac{1}{5}(5x_1+2x_2-x_3)^2 - \frac{1}{5}(4x_2^2+x_3^2-4x_2x_3)+2x_2^2+5x_3^2+4x_2x_3.$$

$$= \frac{1}{5}y_1^2 + \left(\frac{6}{5}y_2^2 + \frac{24}{5}y_3^2 + \frac{24}{5}y_2y_3\right)$$

$$\cancel{= \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{5}{6}\left(\left(\frac{6}{5}\right)^2 y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2y_3\right)}$$

$$= \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{6}{5}\left(y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_2y_3\right)$$

$$= \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{6}{5}(y_1+2y_2)^2$$

S.V: $\frac{1}{\sqrt{5}}y_1 = z_1$

$\sqrt{\frac{6}{5}}(y_1+2y_2) = z_2$

$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2$

sign $= 2 - 0 = 2$.

3) $x \in \mathbb{R}^3$

$\|Ax - b\|$ este minimă.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rezolvăm sistemul ${}^tA \cdot A \cdot x = {}^tA \cdot b$.

$${}^tA\, A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & -5 & -3 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -27 & 38 \\ -27 & 59 & -83 \\ 38 & -83 & 117 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{x = y} \quad A^t A\, x = \begin{pmatrix} 13 & -27 & 38 \\ -27 & 59 & -83 \\ 38 & -38 & 117 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$${}^tA \cdot b = \begin{pmatrix} -17 \\ 36 \\ -51 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 13x - 27y + 38z = -17 \\ -27x + 59y - 83y = 36 \\ +38x - 98y + 117z = -51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -2 \\ 2x - 4y + 6z = -3 \\ 2x - 5y + 7z = -3 \\ x - 3y + 4z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = -2 \\ x - 3y + 4z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -2 - 3y + 4z = -2 \Rightarrow \boxed{-3y + 4z = 0.}$$

$-$

$$\boxed{x = -1}$$

$$-2 - 5y + 7z = -3.$$

$$-5y + 7z = -1.$$

$$\begin{cases} 3y + 4z = 0 \;\; |\cdot 5 \\ -5y + 7z = -1 \;\; |\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 15y + 20z = 0. \\ -15y + 21z = -3 \\ \hline -z = 3 \Rightarrow \boxed{z = -3} \end{array}$$

$$\Rightarrow -3y + 4\cdot(-3) = 0$$

$$-3y - 12 = 0 \Rightarrow -3y = 12$$

$$\boxed{y = -4}.$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (-1, -4, -3)$$

4) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A \in M_2(\mathbb{R})$ simetrică cu o $\lambda = 3$. $A = A^T$.

~~$Av = 3v$~~

$Av = -5v$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

~~$3v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$~~. $-5v = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$Av = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ b+2c \end{pmatrix}$

~~$\begin{pmatrix} a+2b \\ b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a+2b = 3, \; b+2c = 6$~~

$Av = -5v \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b \\ b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+2b = -5 \Rightarrow a = -5-2b \\ b+2c = -10 \Rightarrow c = \dfrac{-10-b}{2} \end{cases}$

$\lambda = 3$ e răd. a polinomului caract

$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0$

$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a-3 & b \\ b & c-3 \end{vmatrix} = (a-3)(c-3) - b^2 = 0$

$\Rightarrow ac - 3a - 3c + 9 - b^2 = 0.$

$(-5-2b) \cdot \dfrac{(-10-b)}{2} - 3(-5-2b) - 3\dfrac{(-10-b)}{2} + 9 - b^2 = 0 \; | \cdot 2$

$(-5-2b)(-10-b) - 6(-5-2b) - 3(-10-b) + 18 - 2b^2 = 0.$

$(-10-b)(-5-2b-3) - 6(-5-2b) + 18 - 2b^2 = 0.$

$(-10-b)(-8-2b) - 6(-5-2b) + 18 - 2b^2 = 0.$

$80 + 20b + 8b + \cancel{2b^2} + 30 + 12b + 18 - \cancel{2b^2} = 0$

$\Rightarrow 40b + 128 = 0 \Rightarrow 40b = -128$ $\quad b = -\dfrac{128}{40} = -\dfrac{32}{10} = -\dfrac{16}{5}$

$\Rightarrow a = -5 + \dfrac{32}{5} = \cancel{\dfrac{-57}{5}} \; \dfrac{7}{5}$

$$c = \frac{-10-b}{2} = \frac{-10+\frac{16}{5}}{2} = \frac{-34}{10} = -\frac{17}{5}$$

$$\begin{cases} a = \frac{7}{5} \\ b = -\frac{16}{5} \\ c = -\frac{17}{5} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 7/5 & -16/5 \\ -16/5 & -17/5 \end{pmatrix}$$