Examen[1] la Algebră şi Geometrie, seria 16, 3.02.2021

Nume și prenume: STANA ANDREEA-THEODORA

Grupa: 163

I. Decideţi dacă următoarele afirmaţii sunt adevărate sau false, justificând pe scurt alegerea:

1. Submulţimea $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x = 4y\}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

2. Mulţimea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$. **(0,5p)**

3. Triunghiul cu vârfurile în $(0, 0, 0), (2, 3, -1)$ şi $(-3, 2, 0)$ este dreptunghic. **(0,5p)**

4. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $b \in \mathbb{R}^m$ nenul, dacă sistemul $Ax = 0$ are doar soluţia trivială, atunci sistemul $Ax = b$ nu are soluţie. **(0,5p)**

5. Dacă A este pătratică şi $A = PDP^{-1}$ cu D diagonală, atunci coloanele lui P sunt vectori proprii ai lui A. **(0,5p)**

II. Redactaţi rezolvările complete:

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care are

- -3 pe toate poziţiile $(i, i + 1)$ cu $1 \leq i \leq n - 1$;
- 3 pe toate poziţiile $(i, i - 1)$ cu $2 \leq i \leq n$;
- 1 pe toate poziţiile (i, i) cu $1 \leq i \leq n$;
- 0 pe celelalte poziţii, dacă mai rămân altele în afara de cele de mai sus.

Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

a) Arătaţi că A_3 este inversabilă şi calculaţi inversa ei. **(0,5p)**

b) Arătaţi că $\Delta_n = \Delta_{n-1} + 9\Delta_{n-2}$, pentru orice $n \geq 4$. **(0,75p)**

c) Calculaţi Δ_4 şi Δ_5. **(0,25p)**

2. Fie $\mathbb{R}^3$ cu structura de spaţiu vectorial euclidian şi aplicaţia liniară

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (5x + 2y - z, 2x + 2y + 2z, -x + 2y + 5z).$$

a) Scrieţi $A = [f]_{\mathcal{B}_0}$, matricea lui f în raport cu baza canonică. **(0,25p)**

b) Aflaţi $\dim \operatorname{Ker} f, \dim \operatorname{Im} f$. Este f injectivă? **(0,25p)**

c) Găsiţi o bază ortonormală în $\operatorname{Im} f$. **(0,5p)**

d) Decideţi dacă f este diagonalizabilă; dacă da, determinaţi o bază în care are formă diagonală şi relaţia corespunzătoare între matricea lui f în baza canonică şi cea în raport cu acea bază. **(1p)**

e) Calculaţi A^{2021}. **(0,5p)**

f) Aflaţi signatura formei pătratice $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ Q(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$. **(0,5p)**

3. Aflaţi toţi vectorii $x \in \mathbb{R}^3$ pentru care $\|Ax - b\|$ este minimă, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ şi $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. **(1p)**

4. Fie $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Aflaţi toate matricele simetrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu o valoare proprie 4 si pentru care $Av = 3v$. **(1p)**

[1] Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 3 ore. Succes!