

Calcul Numeric
Examen - Proba practică – Calculatoare și Tehnologia Informației, Anul I

INSTRUCȚIUNI:

1. Toate problemele sunt **obligatorii**.
2. Comentați și explicați toate rezolvările trimise. Codurile necomentate/neexplicate nu se punctează.
3. **TIMP DE LUCRU: 2 ore**
4. Rezolvările problemelor corespunzătoare acestui test vor fi trimise prin email de pe adresa **instituțională**:
 - **ca fișier .txt**, cu denumirea `Nume_Prenume_Grupa_Examen.txt`
 - la adresa `alexandru.ghita@unibuc.ro`;
 - vor avea următoarea **linie de subiect**:
`Examen CN - Proba scrisă - Nume și prenume student, Grupa 16X`
5. **Termenul limită** de trimitere prin email a rezolvărilor problemelor: **18 iunie 2021, orele 20:00**.

Metoda Romberg: Metoda Romberg este o metodă de aproximare a integralei $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ pornind de la o formulă simplă de aproximare a integralei (*e.g. metoda trapezului*).

Algorithm 1: Metoda Romberg

Input: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ (n - ordinul de aproximare)

Result: $I \in \mathbb{R}$

Pasul 1: Determină h (lungimea intervalului $[a, b]$).

Pasul 2: Construiește o matrice $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\overline{n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- $q_{11} \leftarrow \frac{h}{2} (f(a) + f(b))$ (formula trapezului)
- Pentru $i = \overline{2, n}$, completează prima coloană a matricei Q :

$$q_{i1} \leftarrow \frac{h}{2^i} \left(f(a) + 2 \sum_{k=2}^{2^{i-1}} f\left(a + (k-1) \frac{h}{2^{i-1}}\right) + f(b) \right)$$

- Pentru $i = \overline{2, n}$ și $j = \overline{2, i}$, completează restul matricei Q :

$$q_{ij} \leftarrow \frac{4^{j-1} q_{i,j-1} - q_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$$

Pasul 3: $I \leftarrow q_{nn}$

Pasul 4: OUTPUT(I)
STOP.

Algorithm 2: Interpolare Lagrange (metoda Lagrange)

Input: $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}$ **Result:** $\mathbf{t} \in \mathbb{R}$ **Pasul 1:** (Determină funcțiile de bază $L_{n,k}(\mathbf{z})$)

```
for  $k \leftarrow 1$  to  $n + 1$  do
     $L_{n,k} \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \frac{\mathbf{z} - x_j}{x_k - x_j}$ 
end
```

Pasul 2: (Determină aproximarea în punctul \mathbf{z})

$$\mathbf{t} \leftarrow \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k} \cdot y_k.$$

Pasul 3: OUTPUT(\mathbf{t})
STOP.

Oficiu: 1 punct**Ex. 1** (3 puncte)

- (a) Implementează în **python** metoda Romberg cu numele **int_romberg**. Pentru implementare, urmărește algoritmul de mai sus.
- (b) Să se calculeze integrala exactă $I_{exact}(f) = \int_{-4}^4 \frac{1}{1+x^2} dx$;
- (c) Să se aproximeze integrala de la punctul (b) folosind *metoda Romberg* cu $n = 4$;
- (d) Să se calculeze eroarea $E = |I_{exact}(f) - I_{Romberg}(f)|$.

Ex. 2 (6 puncte)

Presupunem că avem datele cunoscute \mathbf{X} în punctele obținute din discretizarea intervalului $[0, \pi]$ în 15 puncte echidistante. Valorile corespunzătoare punctelor rezultate \mathbf{Y} sunt obținute prin evaluarea funcției $f(x) = \cos(2x)$ în acele puncte.

- (a) Implementează în **python** *metoda Lagrange de interpolare Lagrange* cu numele **interp_lagrange**. Pentru implementare, urmărește algoritmul de mai sus.
- (b) Generează datele cunoscute \mathbf{X} și \mathbf{Y} și afișează-le la consolă.
- (c) Într-o figură, afișează datele cunoscute \mathbf{X} și \mathbf{Y} (sub formă de puncte discrete)
- Graficul trebuie să includă minim notarea axelor OX și OY , titlul și legenda.
- (d) Aproximează valorile funcției în toate punctele din discretizarea cu 110 puncte echidistante a domeniului. Pentru aproximarea valorilor lipsă, folosește datele cunoscute \mathbf{X} și \mathbf{Y} și *metoda Lagrange de interpolare Lagrange*;
- (e) În figura de la pasul (c), adaugă graficul funcției exacte și aproximarea de la pasul (d);
- (f) Într-o figură nouă, generează graficul erorii de interpolare $e_t = |P_n(x) - f(x)|$.