2) Să se studieze convergența simplă și uniformă a seriei de funcții $(f_n)_{n\geq 1}$ pe intervalele $[0, 3]$ și $[1, \infty]$,

unde $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ și

$$f_n(x) = \frac{2nx^2+1}{2nx+1}$$

a) Pentru intervalul $[0, 3]$:

Convergența simplă:

Fie $x \in [0, 3]$ fixat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2+1}{2nx+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\left(x^2+\frac{1}{2n}\right)}{2n\left(x+\frac{1}{2n}\right)} =$$

$$= \frac{x^2}{x} = x \quad , \text{ pentru } x \neq 0$$

Pentru $x = 0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2+1}{2nx+1} = \frac{1}{1} = 1$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[{[0,3]}]{(S)} f, \text{ unde } f : [0, 3] \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x, & x \neq 0 \end{cases}$$

Convergența uniformă:

$\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) \Rightarrow f$ nu e continuă în 0

Din teorema transferului continuității rezultă că $f_n \overset{(U)}{\not\to} f$

b) Pentru intervalul $[1, \infty)$

Convergență simplă:

S-a verificat anterior că $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$ pentru $x \neq 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[{[1,\infty)}]{CS} f$, unde $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

Convergență uniformă:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\infty)} \left| \frac{2nx^2+1}{2nx+1} - x \right|$$

Fie $g_n : [1, \infty] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{2nx^2+1}{2nx+1} - x$

$$= \frac{2nx^2+1-2nx^2-x}{2nx+1} = \frac{1-x}{2nx+1}$$

$$g_n'(x) = \frac{(1-x)'(2nx+1)-(1-x)(2nx+1)'}{(2nx+1)^2} =$$

$$= \frac{-2nx-1-2n(1-x)}{(2nx+1)^2} = \frac{-1-2n}{(2nx+1)^2}$$

$-1-2n < 0$ $(n \geq 1)$, $(2nx+1)^2 > 0$

$\Rightarrow g_n'(x) < 0 \Rightarrow g_n(x)$ monotonă descrescătoare

x	1		∞
$\left(\frac{1-x}{2nx+1}\right)'$	$-$	$- - - - - - - - - - -$	
$\frac{1-x}{2nx+1}$	0	$\searrow$	

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[1,100]} g_n(x) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[1,\infty)} \left| \dfrac{2nx^2+1}{2nx+1} - x \right| = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[x\in[1,\infty)]{CU} f$