

2) Să se studieze convergența simplă și uniformă a seriei de funcții $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ pe intervalele $[0, 3]$ și $[1, \infty]$, unde $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ și

$$f_n(x) = \frac{2nx^2 + 1}{2nx + 1}$$

a) Pentru intervalul $[0, 3]$:

Convergența simplă:

Fie $x \in [0, 3]$ fixat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx^2 + 1}{2nx + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(x^2 + \frac{1}{2n})}{2n(x + \frac{1}{2n})} =$$

$$= \frac{x^2}{x} = x, \text{ pentru } x \neq 0.$$

$$\text{Pentru } x=0: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2nx^2 + 1}{2nx + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{(s)} f \text{ pe } [0, 3], \text{ unde } f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \\ x, & x \neq 0 \end{cases}$$

Convergența uniformă:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq f(0) \Rightarrow f \text{ nu e continuă în } 0$$

din teorema transferului continuității rezultă că $f_n \not\xrightarrow{(u)} f$

b) Pentru intervalul $[1, \infty)$

Convergență simplă:

S-a verificat anterior că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$ pentru $x \neq 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{CS} f$, unde $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$

Convergență uniformă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, \infty)} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, \infty)} \left| \frac{2nx^2 + 1}{2nx + 1} - x \right|$$

$$\text{Fie } g_n: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g_n(x) = \frac{2nx^2 + 1}{2nx + 1} - x$$

$$= \frac{2nx^2 + 1 - 2nx^2 - x}{2nx + 1} = \frac{1 - x}{2nx + 1}$$

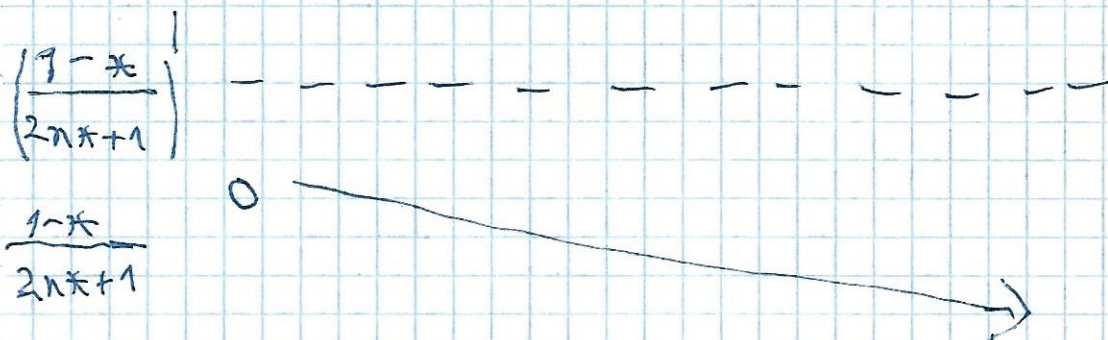
$$g'_n(x) = \frac{(1-x)'(2nx+1) - (1-x)(2nx+1)'}{(2nx+1)^2} =$$

$$= \frac{-2nx - 1 - 2n(1-x)}{(2nx+1)^2} = \frac{-1-2n}{(2nx+1)^2}$$

$$-1-2n < 0 \quad (n \geq 1), \quad (2nx+1)^2 > 0$$

$\Rightarrow g'_n(x) < 0 \Rightarrow g_n(x)$ monotonică descrescătoare

$x \quad 1 \quad \quad \quad \infty$



$$\Rightarrow \sup_{x \in [1, \infty)} g_n(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [1, \infty)} \left| \frac{2nx^2 + 1}{2nx + 1} - x \right| = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{(U)} f$$