

---

# Radiometrie und Photometrie:

## Grundlagen und Definitionen

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

---

Bisher wurden nur punktartige Objekte abgebildet. → Ort, Größe und Qualität des Bildes

Physikalisch gesehen wird aber Strahlungsleistung (Photonen) vom Objekt zum Bild transportiert.

**Reale Lichtquellen** haben Eigenschaften wie:

- Größe und Form der flächen- oder volumen-artigen Lichtquelle
- (evtl. ortsabhängige) Richtungsabstrahlcharakteristik
- Spektrale Verteilung der Lichtleistung  $\Phi_{e,\lambda}(\lambda)$
- Gesamte abgestrahlte Lichtleistung  $\Phi_e$ :  $\Phi_e = \int \Phi_{e,\lambda}(\lambda) d\lambda$

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

---

**Das optische System (=Übertragungskanal)** beeinflusst die transportierte Strahlung:

- Absorption
- Reflexion
- Transmission
- Streulicht
- Dispersion

**Der Detektor** hat eine spezifische Empfindlichkeit für die Strahlung, so dass sein Signal  $\Phi$  z.B. von der Wellenlänge abhängt:

$$\Phi = K \int \Phi_{e,\lambda}(\lambda) V_{\lambda}(\lambda) d\lambda$$

$V_{\lambda}$ : spektrale Empfindlichkeit des Detektors,  $K$ : Konstante

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

---

Im Folgenden werden wir zwischen **strahlungsphysikalischen Größen (= Radiometrie)** und auf das menschliche Auge bezogene **lichttechnische Größen (= Photometrie)** unterscheiden.

Später werden wir aber stellvertretend nur eine der beiden Größensysteme verwenden, da die radiometrischen und photometrischen Größen in den allermeisten Gesetzmäßigkeiten jeweils austauschbar sind. Man darf nur nicht Größen aus beiden Systemen miteinander vermischen.

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

**Strahlungsphysikalische Größen** werden mit Detektoren gemessen, die auf die gesamte Lichtleistung sensitiv sind (z.B. Bolometer, die die Erwärmung messen). Wir kennzeichnen alle strahlungsphysikalische Größen mit einem Index „e“ (für Energie).

1. Strahlungsfluss/Strahlungsleistung  $\Phi_e$  (Einheit 1 Watt=1 W): gesamte jeweils betrachtete Lichtleistung (=Energie pro Zeit).
2. Strahlstärke  $I_e$  (Einheit 1 Watt/Steradian=1 W/sr): Strahlungsfluss  $d\Phi_e$ , der in einen (kleinen) Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlt wird.

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$$

3. Bestrahlungsstärke  $E_e$  (Einheit 1 Watt/Meter<sup>2</sup>=1 W/m<sup>2</sup>): Strahlungsfluss  $d\Phi_e$  pro bestrahltem (kleinen) Flächenelement  $dF$ . Wird bisweilen, wenn auch leicht missverständlich, als Intensität bezeichnet.

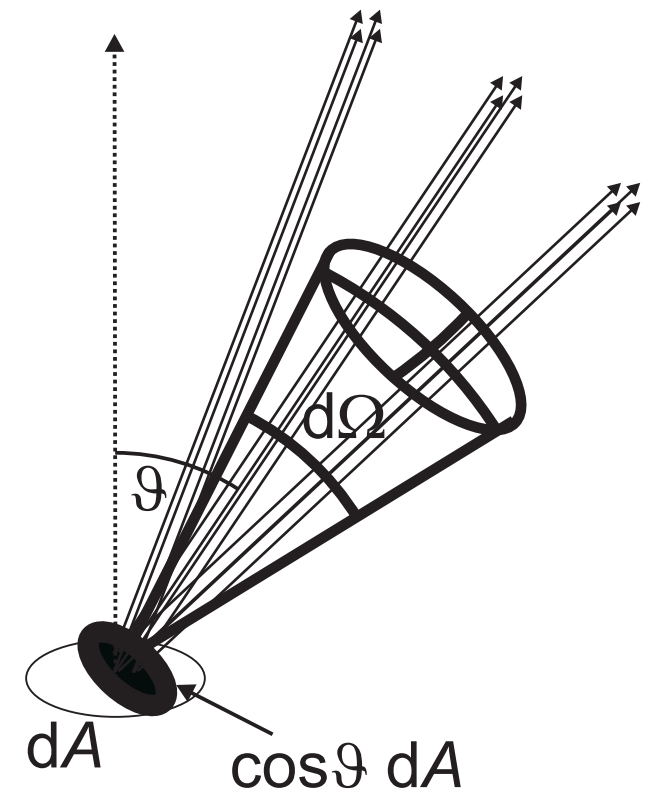
$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dF}$$

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

4. Strahldichte  $L_e$  (Einheit 1 Watt/(Meter<sup>2</sup>\*steradian)=1 W/(m<sup>2</sup> sr)): Anteil  $d\Phi_e$  des Strahlungsflusses, der von einem (kleinen) Flächenelement  $dA$  der Lichtquelle unter dem Winkel  $\vartheta$  relativ zur Flächennormalen in den (kleinen) Raumwinkel  $d\Omega$  emittiert wird.

$$L_e = \frac{d^2\Phi_e}{\cos\vartheta dA d\Omega} = \frac{dI_e}{\cos\vartheta dA}$$

Der Faktor  $\cos\vartheta$  ist nötig, da nur die Projektion des Flächenelementes  $dA$  senkrecht zur betrachteten Emissionsrichtung relevant ist.



# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

**Lichttechnische Größen** berücksichtigen die (subjektive) Hell-Empfindlichkeit des menschlichen Auges (Detektors) auf verschiedene Wellenlängen. Wir kennzeichnen alle lichttechnischen Größen wie die entsprechenden strahlungsphysikalischen Größen, aber **ohne Index „e“**.

1. Lichtfluss/Lichtstrom  $\Phi$  (Einheit 1 Lumen=1 lm): Analogon zur Lichtleistung, wobei aber die Hell-Empfindlichkeit des Auges berücksichtigt wird.
2. Lichtstärke  $I$  (Einheit 1 Candela=1 cd=1 Lumen/Steradian=1 lm/sr): Lichtstrom  $d\Phi$ , der in einen (kleinen) Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlt wird.

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}$$

3. Beleuchtungsstärke  $E$  (Einheit 1 Lux=1 lx=1 Lumen/Meter<sup>2</sup>=1 lm/m<sup>2</sup>): Lichtstrom  $d\Phi$  pro bestrahltem (kleinen) Flächenelement  $dF$ .

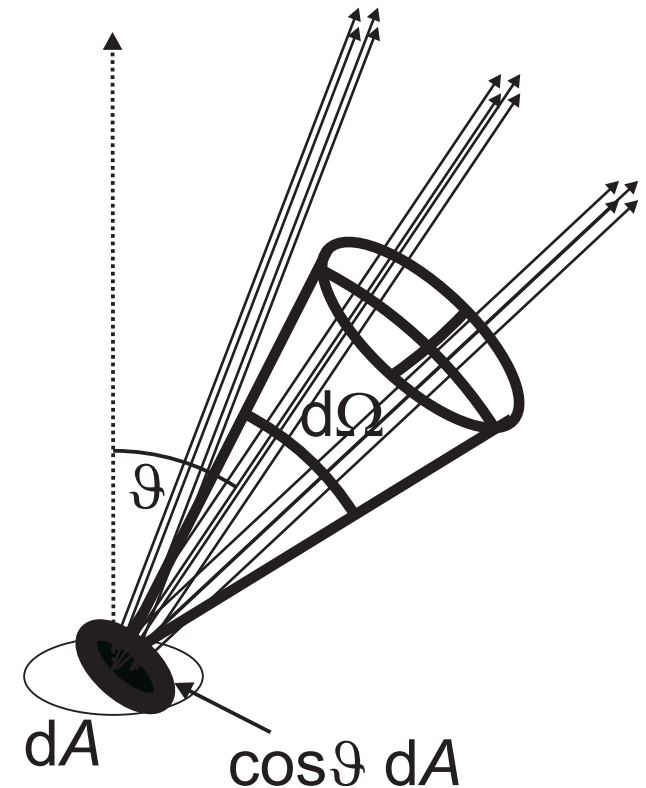
$$E = \frac{d\Phi}{dF}$$

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

4. Leuchtdichte  $L$  (Einheit 1 Lumen/(Meter<sup>2</sup>\*Steradian)=1 lm/(m<sup>2</sup> sr)=1 cd/m<sup>2</sup>): Anteil  $d\Phi$  des Lichtstroms, der von einem (kleinen) Flächenelement  $dA$  der Lichtquelle unter dem Winkel  $\vartheta$  relativ zur Flächennormalen in den (kleinen) Raumwinkel  $d\Omega$  emittiert wird.

$$L = \frac{d^2\Phi}{\cos\vartheta dA d\Omega} = \frac{dI}{\cos\vartheta dA}$$

Der Faktor  $\cos\vartheta$  ist wieder nötig, da nur die Projektion des Flächenelementes  $dA$  senkrecht zur betrachteten Emissionsrichtung relevant ist.





# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

---

## **Anmerkung zur Einheit des Raumwinkels Steradian:**

Im SI-Einheitensystem gibt es die Einheit Steradian (sr), aber deren Dimension ist 1. In diesem Fall haben aber Strahlungsfluss und Strahlstärke (bzw. Lichtstrom und Lichtstärke) die gleiche Dimension. Um beide Größen, die physikalisch verschieden sind, trotzdem unterscheiden zu können, wurden ihre Einheiten unterschiedlich gewählt. Gleiches gilt bei Bestrahlungsstärke und Strahldichte (bzw. Beleuchtungsstärke und Leuchtdichte).

Zur besseren Kennzeichnung sollte man also immer die Einheit Steradian angeben.

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

## Zusammenhang zwischen strahlungsphysikalischen und lichttechnischen Größen:

Der Lichtstrom  $\Phi$  ist der mit der Hell-Empfindlichkeitsfunktion  $V_\lambda(\lambda)$  des menschlichen Auges gewichtete spektrale Strahlungsfluss  $\Phi_{e,\lambda}(\lambda)$ , der außerdem noch mit dem photometrischen Strahlungsäquivalent  $K$  multipliziert wird.

$$\Phi = K \int_{380 \text{ nm}}^{780 \text{ nm}} \Phi_{e,\lambda}(\lambda) V_\lambda(\lambda) d\lambda \quad \text{mit} \quad \Phi_{e,\lambda} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda}$$

Photometrisches Strahlungsäquivalent  $K=683 \text{ lm/W}$  bei **Tagsehen**: Eine Strahlungsleistung von 1 Watt, die genau bei der Wellenlänge  $\lambda=555 \text{ nm}$  ausgesandt wird, erzeugt einen Lichtstrom von 683 Lumen.

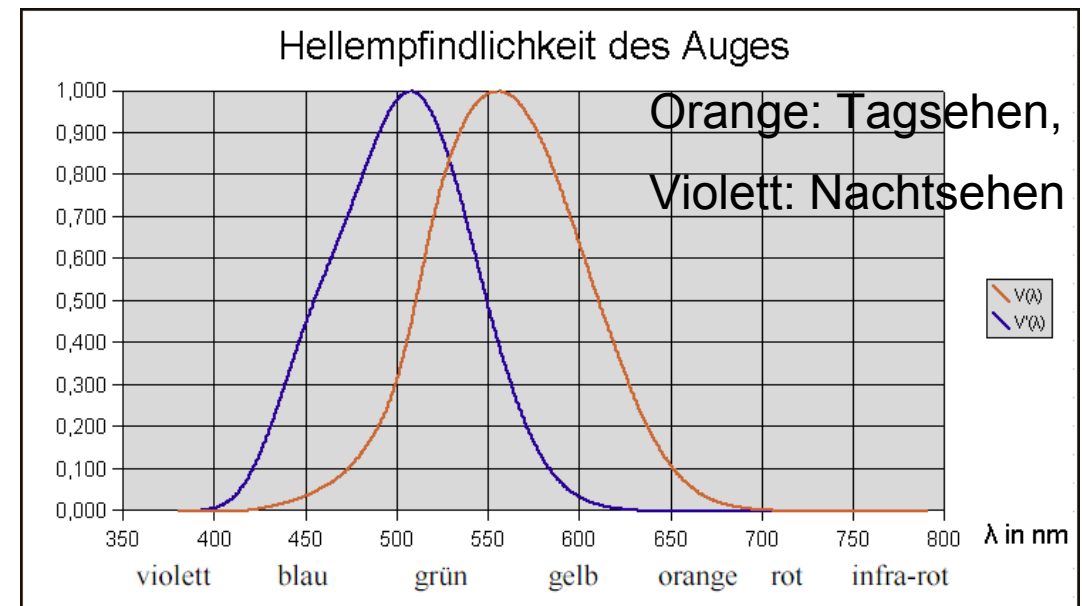
Beim **Nachtsehen** hat  $K$  einen anderen Wert ( $1699 \text{ lm/W}$ ) und auch die Hell-Empfindlichkeitsfunktion einen anderen Verlauf.

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

**Hell-Empfindlichkeitsfunktion  $V_\lambda(\lambda)$ :** dimensionslose Funktion mit Maximalwert 1 bei Wellenlänge  $\lambda=555$  nm bei Tagsehen (bei Nachtsehen liegt das Maximum bei  $\lambda=505$  nm). Beschreibt die Empfindlichkeit des menschlichen Auges auf Licht verschiedener Wellenlängen.

Hat  $V_\lambda$  zum Beispiel bei einer Wellenlänge den Wert 0.2, so benötigt man bei dieser Wellenlänge die 5-fache Strahlungsleistung, um den gleichen Helligkeitseindruck wie bei 555 nm Wellenlänge zu erzeugen.

| $\lambda$ /<br>nm | 380       | 430  | 510 | 555 | 610 | 633  | 720  | 780       |
|-------------------|-----------|------|-----|-----|-----|------|------|-----------|
| $V_\lambda$       | $10^{-5}$ | 0.01 | 0.5 | 1   | 0.5 | 0.26 | 0.01 | $10^{-5}$ |



Quelle: Wikipedia

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

## Beispiele für lichttechnische Größen bekannter Lichtquellen:

1. 100 W-Glühlampe: erzeugt ca.  $\Phi=1500$  lm Lichtstrom, Lichtstärke ist ca.  $I=1500 \text{ lm}/(4\pi \text{ sr})\approx 120 \text{ cd}$
2. HeNe-Laser mit  $\Phi_e=1$  mW Strahlungsleistung. Hat nur Lichtstrom von  $\Phi=K V_\lambda \Phi_e=683 \text{ lm/W} * 0.26 * 0.001 \text{ W}=0.18 \text{ lm}$ .  
Aber: bei Raumwinkel von  $\Omega=10^{-6} \text{ sr}\approx(1 \text{ mrad})^2$ , wie es ein kollimierter Laserstrahl aufgrund der Beugung bei ca. 1 mm Strahlquerschnitt hat, ist die Lichtstärke ca.  $I=\Phi/\Omega=0.18 \text{ lm}/10^{-6} \text{ sr}=180\,000 \text{ cd}$ .

**Deshalb ist ein Laser so gefährlich für das Auge!**

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

3. Planckscher Strahler/Schwarzkörper-Strahler: Strahlungsmaximum und Strahlungsleistung hängen von Temperatur  $T$  ab:

Spektrale spezifische Ausstrahlung:  
(in Halbraum abgestrahlte Leistung pro Flächenelement und Wellenlängenintervall)

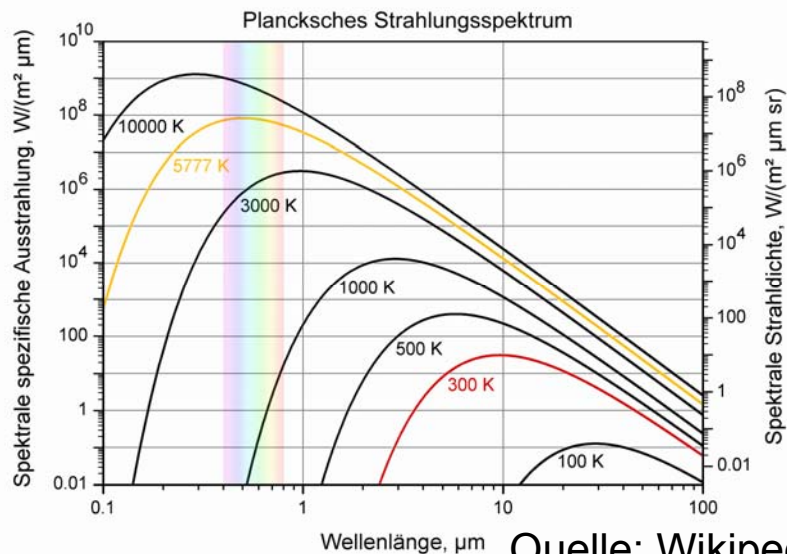
$$M_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{\max} = \frac{2897.8 \mu\text{m K}}{T}$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$M_h = \frac{d\Phi_e}{dA} = \sigma T^4 \quad \text{mit } \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$



Quelle: Wikipedia

➔ Lichtstrom eines thermischen Strahlers nimmt extrem stark mit  $T$  zu.

# Grundlagen Radiometrie/Photometrie

**Beispiele für Effizienz der Lichterzeugung**, d.h. Lichtstrom pro aufgewendeter Leistung (z.B. elektrischer Leistung):

$$\eta = \frac{\Phi}{\Phi_e} = \frac{K \int_{380 \text{ nm}}^{780 \text{ nm}} \Phi_{e,\lambda}(\lambda) V_\lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty \Phi_{e,\lambda}(\lambda) d\lambda}$$

Schwarzer Strahler bei  $T=6000 \text{ K}$ :  $\eta=100 \text{ lm/W}$

Glühlampe:  $\eta=10\text{-}20 \text{ lm/W}$  (bis zu  $20 \text{ lm/W}$  bei Halogenlampe)

Leuchtstofflampe/Energiesparlampe:  $\eta=40\text{-}55 \text{ lm/W}$

LED: bis zu  $\eta=90 \text{ lm/W}$

## Typische Beleuchtungsstärken:

Straßenbeleuchtung bei Nacht:  $15 \text{ lx}$

Empfohlene Schreibtischbeleuchtung:  $300 \text{ lx}$

Kinoleinwand:  $100 \text{ lx}$

Bei Präzisionsarbeiten:  $1000 \text{ lx}$

---

# Abbildung kleiner Lichtquellen

Im Folgenden wird nicht mehr zwischen radiometrischen und photometrischen Größen unterschieden, da die Gesetzmäßigkeiten in beiden Fällen gelten (soweit nicht anders angegeben). Der einfacheren Notation wegen wird der Index „e“ weggelassen und die Bezeichnungen der photometrischen Größen werden genommen.

# Abbildung kleiner Lichtquellen

## Verhalten der Bestrahlungsstärke für kleine (fast punktförmige) Lichtquelle: quadratisches Abstandsgesetz

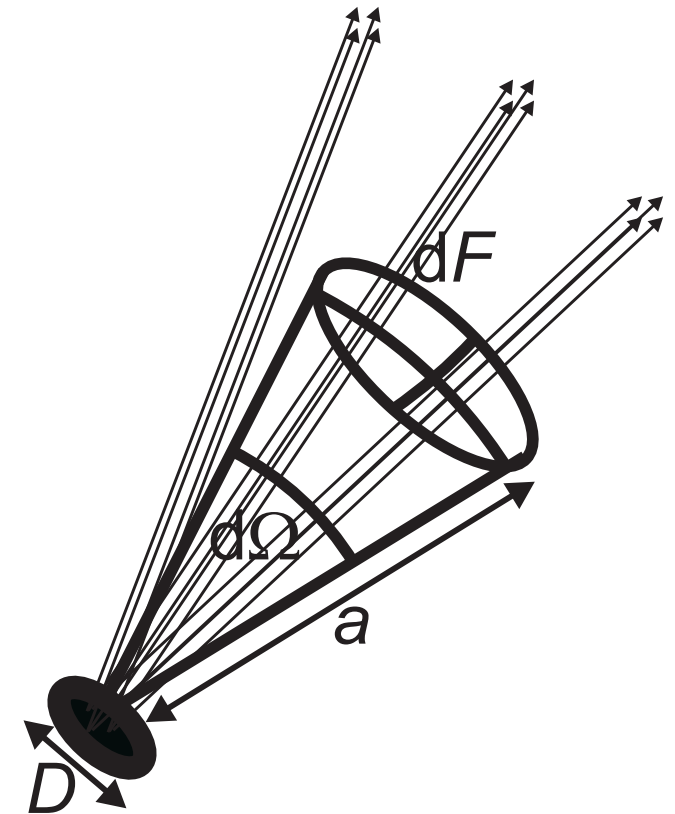
Raumwinkel  $d\Omega$ : Verhältnis zwischen Flächeninhalt  $dF$  eines kleinen Kugelsegments und dem Quadrat des Radius  $a$  der Kugel

$$d\Omega = \frac{dF}{a^2}$$

Die Beleuchtungsstärke auf der Kugeloberfläche ist dann:

$$E = \frac{d\Phi}{dF} = \frac{d\Phi}{a^2 d\Omega} = \frac{I}{a^2}$$

Dies ist das bekannte quadratische Abstandsgesetz für die Abnahme der Beleuchtungsstärke. Bei einer ausgedehnten Lichtquelle mit Durchmesser  $D$  gilt es nur für  $a \gg D$ .





# Abbildung kleiner Lichtquellen

## Verhalten der Lichtstärke bei Abbildung:

Objekt der Höhe  $x$  wird mit Aperturwinkel  $u$  auf Bild der Höhe  $x'$  mit bildseitigem Aperturwinkel  $u'$  abgebildet. Objekt- und Bildweite seien betragsmäßig  $a$  bzw.  $a'$ . Ausgeleuchteter Bereich  $dF$  in Eintrittspupille des optischen Systems habe Radius  $r$ .

Helmholtz-Lagrange-Invariante bei Abbildung  
(für kleine Winkel):

$$nux = n'u'x' \Rightarrow \beta = \frac{x'}{x} = \frac{nu}{n'u'} \stackrel{\text{für } n=n'}{=} \frac{u}{u'}$$

Objektseitig:

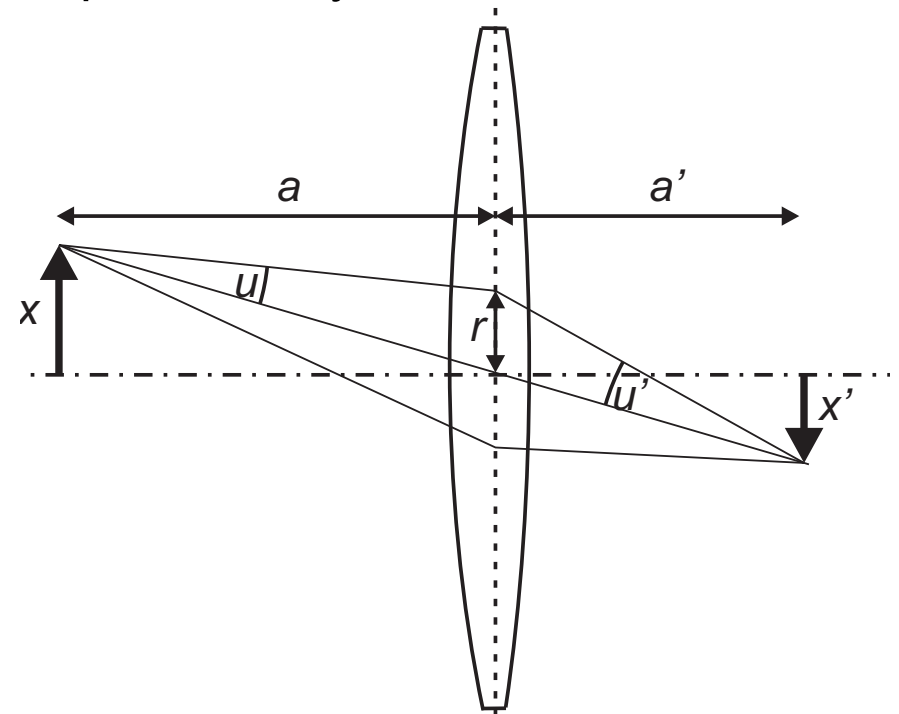
$$dF = a^2 d\Omega \wedge dF = \pi r^2 = \pi (au)^2 \Rightarrow d\Omega = \pi u^2$$

Analog gilt bildseitig:

$$d\Omega' = \pi u'^2 \Rightarrow \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{\pi u^2}{\pi u'^2} = \beta^2$$

Energieerhaltung:  $I d\Omega = d\Phi = I' d\Omega' \Rightarrow I' = \frac{d\Omega}{d\Omega'} I = \beta^2 I$

Also:  $I' = \beta^2 I$



# Abbildung kleiner Lichtquellen

## Anwendung: Der Projektor (Dia-Projektor, Beamer)

Die Leuchtfäche der Lichtquelle (z.B. Halogenlampe oder Quecksilber-Hochdrucklampe) wird mit einem Kondensor vergrößert in die Eintrittspupille des Projektions-Objektivs abgebildet (**Köhlerscher Strahlengang**). Das Projektions-Objektiv bildet das Dia oder LCD-Display vergrößert auf die Leinwand/Projektionsfläche ab.

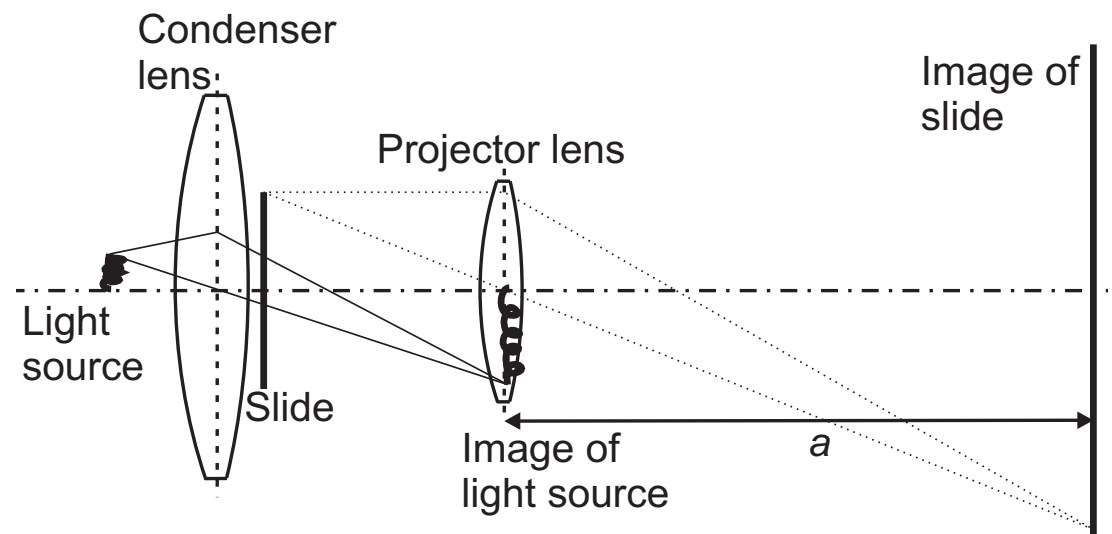
Lichtstärke  $I$  vor bzw.  $I'$  hinter Kondensor:  $I' = \beta_{\text{Kondensor}}^2 I$

Beleuchtungsstärke auf Leinwand:  $E'$  mit bzw.  $E$  ohne Kondensor:

$$E' = \frac{I'}{a^2} = \frac{\beta_{\text{Kondensor}}^2 I}{a^2} = \beta_{\text{Kondensor}}^2 E$$

Beispiel:  $E' = 100 \text{ lx}$ ,  $a = 5 \text{ m}$ ,  $I = 250 \text{ cd}$

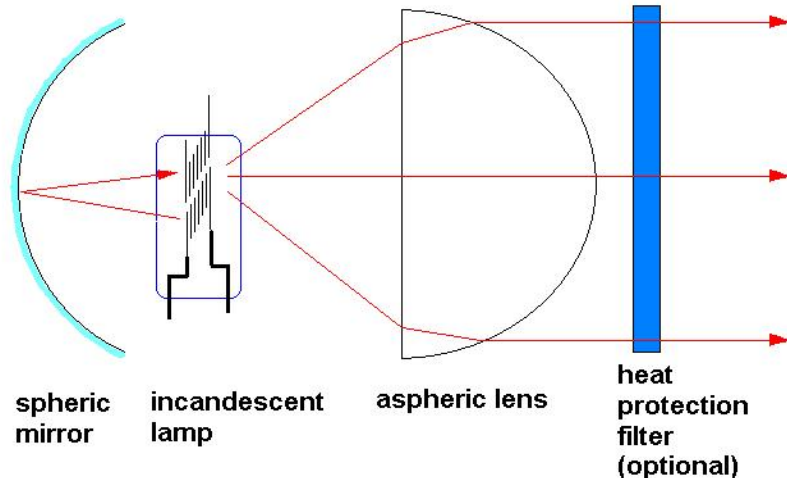
$$\Rightarrow \beta_{\text{Kondensor}}^2 = E' \frac{a^2}{I} = 10$$
$$\Rightarrow \beta_{\text{Kondensor}} = 3.2$$



# Abbildung kleiner Lichtquellen

## Kondensor eines Projektors:

Die eigentliche Glühlampe (oder andere leuchtende Fläche) wird mit einem Kugelspiegel neben sich selbst abgebildet und das Licht wird mit einer asphärischen Linse kollimiert bzw. mit einer weiteren Linse wird die Glühlampe auf die Eintrittspupille des Projektions-Objektivs abgebildet.



Quelle: Wikipedia



---

# Übergang zu ausgedehnten Lichtquellen

Es wird Rotationssymmetrie des optischen Systems und der Lichtquelle um eine Achse angenommen. → Photometrische Größen können nur vom Polarwinkel  $\vartheta$  zwischen der Achse und der Beobachtungsrichtung abhängen. Z.B. Lichtstärke  $I = I(\vartheta)$ .

# Ausgedehnte Lichtquellen

## Strahlertypen nach Straubel:

Jeder Punkt der ausgedehnten Lichtquelle strahlt mit Lichtstärke  $I$  der folgenden Abhängigkeit vom Polarwinkel  $\vartheta$  ( $I_0$ : Lichtstärke längs Flächennormale=Achse):  
$$I(\vartheta) = I_0 \cos^m \vartheta$$

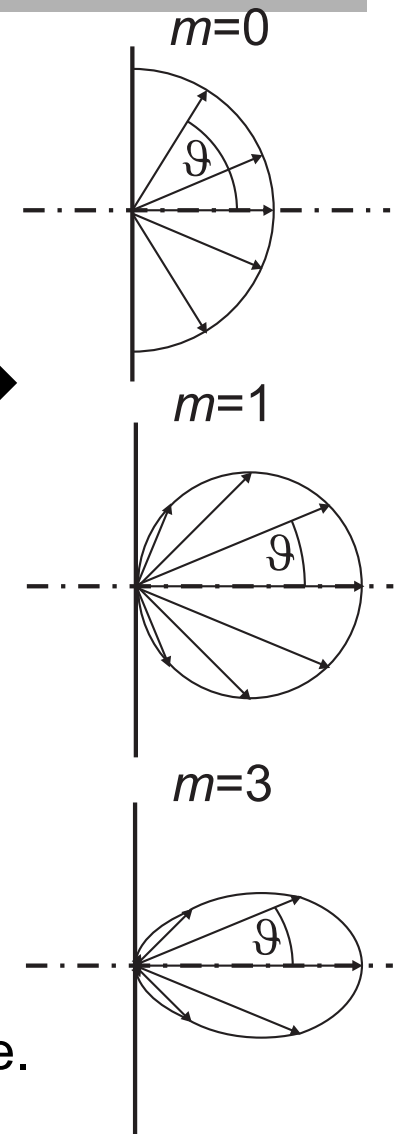
Abstrahlung sei für jeden Punkt der Lichtquelle mit Fläche  $A$  gleich  $\rightarrow$  Leuchtdichte:  
$$L(\vartheta) = I(\vartheta) / (A \cos \vartheta) = I_0 \cos^{m-1} \vartheta / A$$

$m=0$ : Kugelstrahler, d.h. Lichtstärke in allen Richtungen gleich.  
Aber Leuchtdichte wächst mit  $1/\cos \vartheta$  bei zunehmendem Winkel  $\vartheta$ .

$m=1$ : Lambert-Strahler  $\rightarrow$  Leuchtdichte konstant

$$I(\vartheta) = I_0 \cos \vartheta \Rightarrow L = \frac{I}{A \cos \vartheta} = \frac{I_0}{A}$$

$m=3$ : Keulenstrahler mit Vorzugsrichtung der Abstrahlung nach vorne.  
Leuchtdichte nimmt mit  $\cos^2 \vartheta$  ab.



# Ausgedehnte Lichtquellen

---

## Lambert-Strahler:

Der Lambert-Strahler hat die Besonderheit, dass er aus allen Richtungen betrachtet gleich hell erscheint. Man kann deshalb eine Kugel oder eine Scheibe, die wie ein Lambert-Strahler abstrahlen, nicht unterscheiden.

**Grund:** Die **Leuchtdichte ist verantwortlich für den visuellen Helligkeitseindruck** einer Fläche, da wir beim schrägen Betrachten eine Fläche  $A$  scheinbar als eine Fläche der Größe  $A \cos \vartheta$  sehen. Beim Lambert-Strahler nimmt zwar die Lichtstärke, also der in einen kleinen Raumwinkel abgestrahlte Lichtstrom, mit  $\cos \vartheta$  ab. Dafür aber sehen wir eben die Fläche  $A$ , von der wir Licht empfangen, beim schrägen Betrachten als eine Fläche der Größe  $A \cos \vartheta$ , so dass der in unser Auge fallende Lichtstrom pro abstrahlendes Flächenelement senkrecht zur Beobachtungsrichtung gleich bleibt.

Die Sonne erscheint uns als eine weitgehend homogen helle Kreisfläche, obwohl sie eine Kugel ist. Allerdings weist die Sonne eine leichte Randverdunkelung auf, so dass sie nur näherungsweise ein Lambert-Strahler ist.

Diffus streuende Flächen, z.B. eine weiße Wand, sind auch mit guter Näherung Lambert-Strahler.

# Ausgedehnte Lichtquellen

## In den Halbraum abgestrahlter Lichtstrom bei verschiedenen Strahler-Typen nach Straubel:

Integration der Lichtstärke über den Halbraum mit Raumwinkel  $2\pi$ :

$$\Phi_{\text{Halbraum}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 2\pi I_0 \int_0^{\pi/2} \cos^m \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \stackrel{x:=\cos \vartheta}{=} -2\pi I_0 \int_1^0 x^m dx = \frac{2\pi I_0}{m+1}$$
$$\Rightarrow \frac{I_0}{\Phi_{\text{Halbraum}}} = \frac{m+1}{2\pi}$$

Bei gleichem in den Halbraum abgestrahlten Lichtstrom  $\Phi_{\text{Halbraum}}$  haben die verschiedenen Strahler-Typen also unterschiedlich große Lichtstärke  $I_0$  längs der Symmetrie-Achse ( $\vartheta=0$ ):

|                  |   |
|------------------|---|
| Kugelstrahler    | $2\pi I_0 / \Phi_{\text{Halbraum}} = 1$ |
| Lambert-Strahler | $2\pi I_0 / \Phi_{\text{Halbraum}} = 2$ |
| Keulenstrahler   | $2\pi I_0 / \Phi_{\text{Halbraum}} = 4$ |



# Ausgedehnte Lichtquellen

## Beleuchtungsstärke auf ebenem Schirm bei Freiraumausbreitung:

Eine (kleine) leuchtende Fläche stehe parallel zum Schirm im Abstand  $a_0$ , wobei  $a_0$  sehr viel größer als die laterale Ausdehnung der Lichtquelle ist.

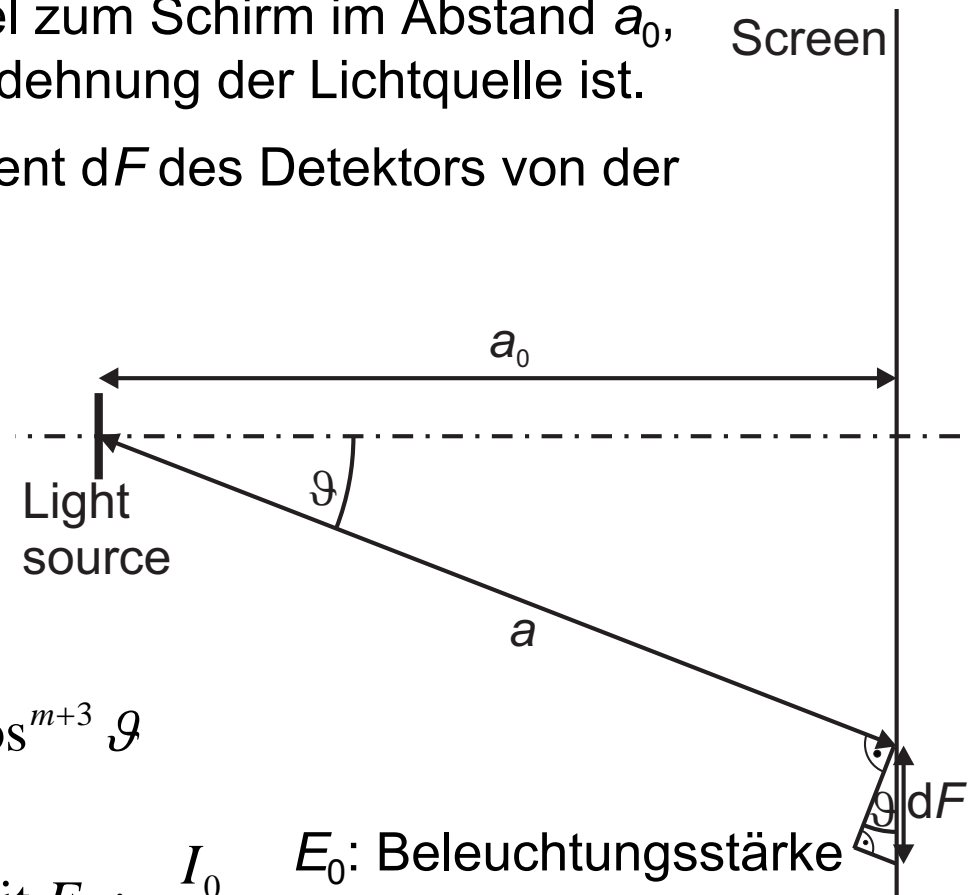
Raumwinkel  $d\Omega$ , unter dem ein Flächenelement  $dF$  des Detektors von der Lichtquelle aus erscheint:

$$d\Omega = \frac{dF \cos \vartheta}{a^2} = \frac{dF \cos^3 \vartheta}{a_0^2}$$

Der in den Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlte Lichtstrom  $d\Phi$  und die Beleuchtungsstärke  $E$  unter dem Winkel  $\vartheta$  sind dann:

$$d\Phi = I(\vartheta) d\Omega = I_0 \cos^m \vartheta \frac{dF \cos^3 \vartheta}{a_0^2} = \frac{I_0 dF}{a_0^2} \cos^{m+3} \vartheta$$

$$\Rightarrow E(\vartheta) = \frac{d\Phi}{dF} = \frac{I_0}{a_0^2} \cos^{m+3} \vartheta = E_0 \cos^{m+3} \vartheta \quad \text{mit } E_0 := \frac{I_0}{a_0^2}$$



$E_0$ : Beleuchtungsstärke des Schirms auf der Achse

Institut für Optik,  
Information und  
Photonik



# Ausgedehnte Lichtquellen

Für einen Lambert-Strahler ( $m=1$ ) ist die Beleuchtungsstärke auf dem Schirm also:

$$E(\vartheta) = E_0 \cos^4 \vartheta$$

Unter  $23.4^\circ$  (halber diagonalen Bildwinkel einer Kleinbildkamera mit normalem Objektiv) ist die Beleuchtungsstärke z.B. nur noch 71% so groß wie auf der Achse.

In der Photographie ist dieser Effekt der Randverdunkelung einer Szene bei Beleuchtung mit einem einfachen Blitzlicht gut bekannt. Immerhin ist das von einem Objekt zurück gestreute Licht im Idealfall nur von der Beleuchtungsstärke abhängig.

➔ Moderne Blitzlichter zur Ausleuchtung einer Szene, die mit einem Weitwinkelobjektiv (halber Bildwinkel kann größer als  $50^\circ$  sein) photographiert wird, versuchen mit Freiformflächen bzw. speziellen Fresnel-Linsen (=lokale Prismen) eine speziell präparierte Lichtstärke zu erzielen, so dass die Randverdunkelung minimal wird. Ideal wäre natürlich eine Lichtstärke der Form:  $I(\vartheta) = I_0 / \cos^3 \vartheta$ , d.h.  $m=-3 \rightarrow E(\vartheta) = E_0$

# Ausgedehnte Lichtquellen

## Abbildung einer Fläche mit Lambert-Abstrahlung:

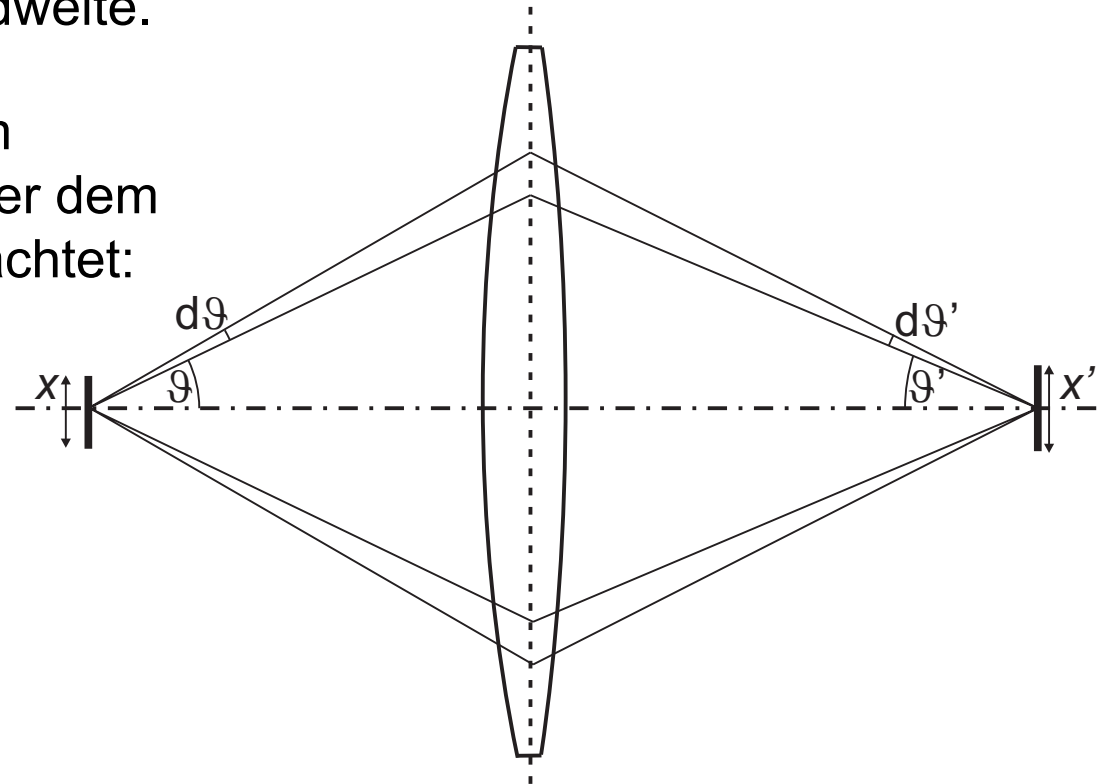
Die Abbildung sei ohne sphärische Aberration und die strahlende Fläche sei relativ klein gegenüber Gegenstands- und Bildweite.

Dünner ringförmiger Raumwinkel  $d\Omega$  im Objektraum (bzw.  $d\Omega'$  im Bildraum) unter dem Winkel  $\vartheta$  (bzw.  $\vartheta'$ ) zur Achse wird betrachtet:

$$d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \quad \wedge \quad d\Omega' = 2\pi \sin \vartheta' d\vartheta'$$

Ohne Absorption und Streuung ist der in diesem Ring transportierte Lichtstrom  $d\Phi$  im Objekt- und Bildraum gleich und für die Lichtstärke  $I$  im Objekt- bzw.  $I'$  im Bildraum gilt:

$$I(\vartheta)d\Omega = d\Phi = I'(\vartheta')d\Omega' \Rightarrow 2\pi I(\vartheta)\sin \vartheta d\vartheta = 2\pi I'(\vartheta')\sin \vartheta' d\vartheta'$$



# Ausgedehnte Lichtquellen

Damit ein Lambert-Strahler wieder auf einen Lambert-Strahler abgebildet wird, muss gelten:

$$I(\vartheta) = I_0 \cos \vartheta \quad \wedge \quad I'(\vartheta') = I'_0 \cos \vartheta'$$

$$\Rightarrow I_0 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = I'_0 \cos \vartheta' \sin \vartheta' d\vartheta'$$

$$\Rightarrow I_0 d(\sin^2 \vartheta) = I'_0 d(\sin^2 \vartheta')$$

Für die Lichtstärke auf der Achse, d.h. paraxiale Näherung ist gültig, gilt:  $I'_0 = \beta^2 I_0$

$$\Rightarrow d(\sin^2 \vartheta) = \beta^2 d(\sin^2 \vartheta')$$

Integration

$$\Rightarrow \sin^2 \vartheta = \beta^2 \sin^2 \vartheta'$$

$\beta = x'/x$

$$\Rightarrow x \sin \vartheta = x' \sin \vartheta'$$

Dies ist aber gerade die Sinus-Bedingung (für Brechzahlen  $n=n'$ ).

Ein Lambert-Strahler wird also wieder auf einen Lambert-Strahler abgebildet, wenn das optische Abbildungssystem die Sinus-Bedingung erfüllt.

# Ausgedehnte Lichtquellen

## Verhalten der Beleuchtungsstärke $E'$ bei Abbildung (mit kleinem Aperturwinkel):

Ein kleiner Raumwinkel um die optische Achse wird betrachtet. Ohne Absorption und Streuung gilt also Energieerhaltung für den Lichtstrom  $d\Phi$  im Objekt- bzw.  $d\Phi'$  im Bildraum:  $d\Phi = Id\Omega = d\Phi' = I'd\Omega'$  mit  $d\Omega = \beta^2 d\Omega'$

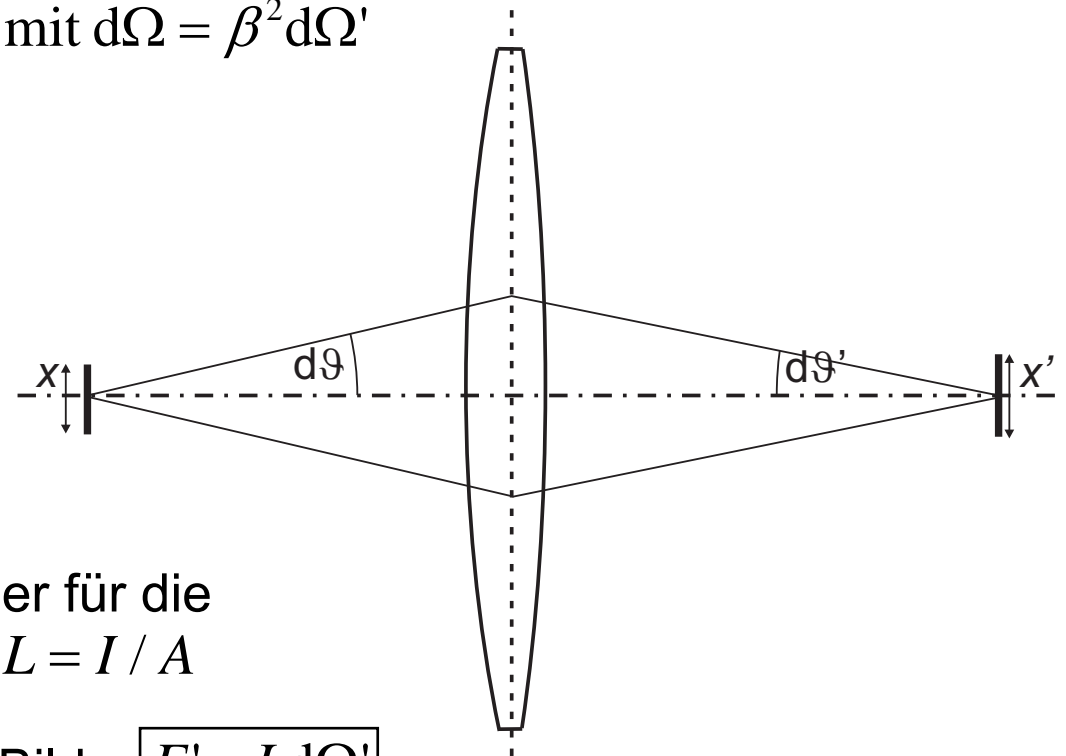
Aufgrund der Abbildung gilt für die Flächeninhalte der strahlenden bzw. beleuchteten Fläche:

$$A' = x'^2 = \beta^2 x^2 = \beta^2 A$$

$$\Rightarrow E' = \frac{d\Phi'}{A'} = \frac{d\Phi}{\beta^2 A} = \frac{Id\Omega}{\beta^2 A} = \frac{Id\Omega'}{A}$$

Für kleine Aperturwinkel ( $\cos \vartheta \approx 1$ ) gilt aber für die Leuchtdichte  $L$  der strahlenden Fläche:  $L = I / A$

Also folgt für die Beleuchtungsstärke im Bild:  $E' = Ld\Omega'$



# Ausgedehnte Lichtquellen

## Interpretation des Ergebnisses:

Die Beleuchtungsstärke  $E'$  im Bild hängt nur von der Leuchtdichte  $L$  des Objekts und dem Raumwinkel  $d\Omega'$  ab, unter dem die Austrittspupille der Linse vom Bild aus erscheint.

**Beispiel 1: Brennglas** (Achtung: Hier nehmen wir die radiometrischen Größen, benutzen aber weiterhin die Symbole ohne Index „e“)

Ohne Brennglas ist die Bestrahlungsstärke  $E'_{\text{ohne}}$  der Sonne auf der Erde bei wolkenlosem Himmel:  $E'_{\text{ohne}} = L d\Omega' = L \pi u'^2$  mit  $2u' = 0.0093$

$2u'$  ist die Winkelgröße der Sonne ( $\approx 0.5^\circ$ ).

Mit Brennglas der Brennweite  $f'$ , Aperturdurchmesser  $D_{EP}$  und Aperturfläche  $F_{EP}$  ist die Bestrahlungsstärke  $E'_{\text{mit}}$  (Sonne ist im Unendlichen, d.h. Bild in Brennebene):

$$E'_{\text{mit}} = L \frac{F_{EP}}{f'^2} = L \pi \left( \frac{D_{EP}}{2f'} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \frac{L}{f\#^2} \quad \text{mit der Blendenzahl } f\# = f' / D_{EP}$$

# Ausgedehnte Lichtquellen

Das Verhältnis der Bestrahlungsstärken mit und ohne Brennglas ist also:

$$\frac{E'_{mit}}{E'_{ohne}} = \left( \frac{D_{EP}}{2f'u'} \right)^2 = \frac{1}{(2u'f\#)^2} \stackrel{2u' \approx 0.01}{=} \left( \frac{100 D_{EP}}{f'} \right)^2 = \left( \frac{100}{f\#} \right)^2$$

Bei einer Blendenzahl von  $f\#=1$  würde sich die Bestrahlungsstärke mit Brennglas also um einen Faktor 10000 erhöhen! Allerdings gilt für eine so hohe numerische Apertur unsere Theorie nur noch näherungsweise, da wir ja kleine Winkel vorausgesetzt hatten.

## Alternative Ableitung für die obere Formel (ohne Formalismus):

Die gesamte Strahlungsleistung, die auf das Brennglas fällt, wird in das Bild der Sonne konzentriert. Die Erhöhung der Bestrahlungsstärke ist also gleich dem Verhältnis zwischen der Aperturfläche  $\pi(D_{EP}/2)^2$  des Brennglases und der Bildfläche  $\pi(f'u')^2$  (Bild der Sonne ist in der Brennebene, so dass der Radius des Bildes  $f'u'$  ist). Dies ergibt die gleiche Formel wie oben.

# Ausgedehnte Lichtquellen

## Beispiel 2: Vergleich der Fotografie einer Landschaft und des Mondes

Mond und Erde sind beide Sekundärstrahler, die die Sonnenstrahlung streuen bzw. reflektieren, und praktisch gleichen Abstand von der Sonne haben.

→ Die Leuchtdichte/Strahldichte des Mondes und die Leuchtdichte/Strahldichte einer „sonnigen“ Landschaft auf der Erde sind fast gleich.

→ Auf dem Detektor einer Kamera erzeugen beide eine ähnliche Bestrahlungsstärke, so dass zur Fotografie des Mondes gleiche Parameter wie bei einer sonnigen Landschaft erforderlich sind.

Anmerkung: Winkelgröße des Mondes ca.  $2\vartheta' = 0.01$  → Bild des Mondes auf dem Detektor einer Kleinbildkamera mit  $f' = 50$  mm winzig (0.5 mm Durchmesser verglichen mit 35 mm Seitenlänge im klassischen Kleinbildformat). → Um Mond in voller Größe auf dem Detektor zu haben, ist ein Teleobjektiv mit extrem langer Brennweite erforderlich → Zur Fotografie des Mondes gleiche Parameter wie bei der Fotografie einer sonnigen Landschaft **mit diesem Teleobjektiv** erforderlich. Obere Erklärung macht aber klar, dass bei einer normalen Fotografie entweder die nächtliche Landschaft richtig belichtet wird oder der Mond, aber kaum beides.

# Ausgedehnte Lichtquellen

## Beispiel 3: Berechnung der Strahlungsleistung der Sonne pro Flächenelement

Bestrahlungsstärke der Sonne oberhalb der Erdatmosphäre:  $E_e = 1.367 \text{ kW/m}^2$ .

Raumwinkel  $d\Omega' = \pi u'^2$ , unter dem wir die Sonne sehen (Winkeldurchmesser  $2u' = 0.0093$ ). → Strahldichte  $L_S$  der Sonne unter Annahme eines Lambert-Strahlers:

$$E_e = L_S d\Omega' \Rightarrow L_S = \frac{E_e}{d\Omega'} = \frac{E_e}{\pi u'^2} = 20.12 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2 \text{ sr}}$$

→ In den Halbraum emittierte Strahlungsleistung der Sonne pro Flächenelement:

$$M_h = \frac{d\Phi_h}{dA} = \int \frac{d^2\Phi_h}{dA d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} L_S \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \stackrel{x:=\sin \vartheta}{=} 2\pi L_S \int_0^1 x dx = \pi L_S = 63.22 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$$

## Alternative Berechnung:

Gesamte von der Sonne emittierte Strahlungsleistung  $\Phi_S$  ist Produkt aus  $E_e$  und der Fläche einer Kugel mit Erdbahnradius  $r_E = 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}$ :

$$\Phi_S = 4\pi r_E^2 E_e = 3.845 \cdot 10^{26} \text{ W}$$



# Ausgedehnte Lichtquellen

Die pro Flächenelement von der Sonne emittierte Strahlungsleistung  $M_h$  folgt aus  $\Phi_S$  und der Oberfläche der Sonne (Sonnenradius  $r_S = 6.957 \cdot 10^8 \text{ m}$ ):

$$M_h = \frac{\Phi_S}{4\pi r_S^2} = 63.21 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$$

Dieser Wert stimmt mit dem Vorherigen (von Rundungsfehlern abgesehen) überein. Natürlich ist dies kein Zufall, denn aus den beiden letzten Gleichungen folgt für  $M_h$  (Winkelradius der Sonne  $u' = r_S/r_E$ ):

$$M_h = \frac{4\pi r_E^2}{4\pi r_S^2} E_e = \left(\frac{r_E}{r_S}\right)^2 E_e = \frac{E_e}{u'^2} \Rightarrow L_S = \frac{M_h}{\pi} = \frac{E_e}{\pi u'^2} = \frac{E_e}{d\Omega'}$$

## Vergleich mit Planck'schem Strahlungsgesetz:

Stefan-Boltzmann-Gesetz → Aus  $M_h$  folgt effektive Temperatur  $T$  der Sonne unter der Annahme eines Schwarzen Strahlers. Wiensches Verschiebungsgesetz

→ Wellenlänge  $\lambda_{\max}$  des Strahlungsmaximums:

$$M_h = \sigma T^4 \Rightarrow T = (M_h / \sigma)^{1/4} = 5778 \text{ K} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{2897.8 \mu\text{m K}}{T} = 501.5 \text{ nm}$$

# Ausgedehnte Lichtquellen

## Unterschied zwischen der Abbildung einer ausgedehnten Lichtquelle und einer Punktlichtquelle:

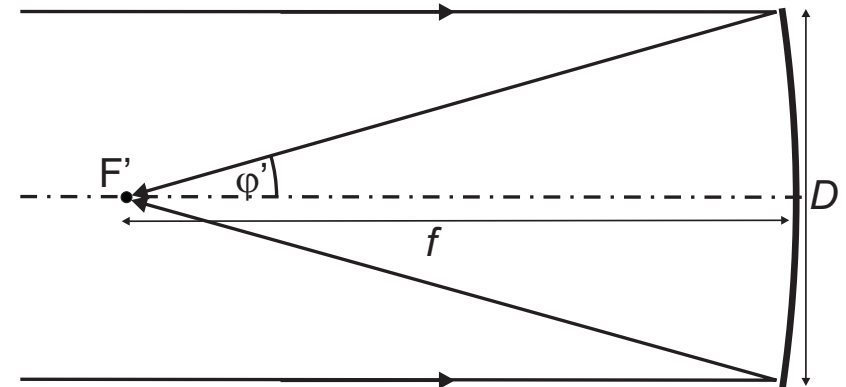
Ausgedehnte Lichtquelle → geometrisch optisches Bild der Lichtquelle

Punktlichtquelle → Airy disc

In der Brennebene eines Spiegels/Linse mit Durchmesser  $D$  und Brennweite  $f'$  ( $>D$ ) ist die Fläche  $F_{\text{Airy}}$  der Airy disc (Fläche der zentralen Scheibe bis 1. Minimum):

$$\varphi' \approx \frac{D}{2f'} \Rightarrow r_{\text{Airy}} = 0.61 \frac{\lambda}{NA} \stackrel{n=1}{=} 0.61 \frac{\lambda}{\sin \varphi'} \approx 0.61 \frac{\lambda}{\varphi'} \approx 1.22 \frac{\lambda f'}{D}$$

$$\Rightarrow F_{\text{Airy}} := \pi r_{\text{Airy}}^2 \approx \pi (1.22)^2 \left( \frac{\lambda f'}{D} \right)^2 \approx 4.68 \left( \frac{\lambda f'}{D} \right)^2$$



# Ausgedehnte Lichtquellen

Die über die Fläche der Airy disc gemittelte Bestrahlungsstärke  $E_*$ , die ein Stern (Punktlichtquelle) in der Brennebene eines Teleskopspiegels erzeugt, ist:

$$E_* = \frac{\Phi_{\text{Apertur}}}{F_{\text{Airy}}} = \frac{E_0 \pi (D/2)^2}{\pi (1.22)^2 \left( \frac{\lambda f'}{D} \right)^2} = \frac{E_0}{(2.44 \lambda f')^2} D^4$$

$E_0$ : Bestrahlungsstärke des Sterns in der Eintrittspupille des Spiegels

Die Bestrahlungsstärke  $E_B$  in der Brennebene des Spiegels aufgrund von Hintergrundstrahlung (z.B. Streulicht) der Strahldichte  $L_B$  ist:

$$E_B = L_B d\Omega' \approx L_B \pi \varphi'^2 \approx L_B \pi \left( \frac{D}{2f'} \right)^2$$

Das Verhältnis der Bestrahlungsstärken von Stern und Hintergrundstrahlung ist:

$$\frac{E_*}{E_B} = \frac{E_0 D^2}{\pi (1.22 \lambda)^2 L_B} \propto D^2$$

Der **Kontrast** zwischen der Strahlung des Sterns und der diffusen Hintergrundstrahlung wächst also **proportional zur Spiegelfläche!**

# Ausgedehnte Lichtquellen

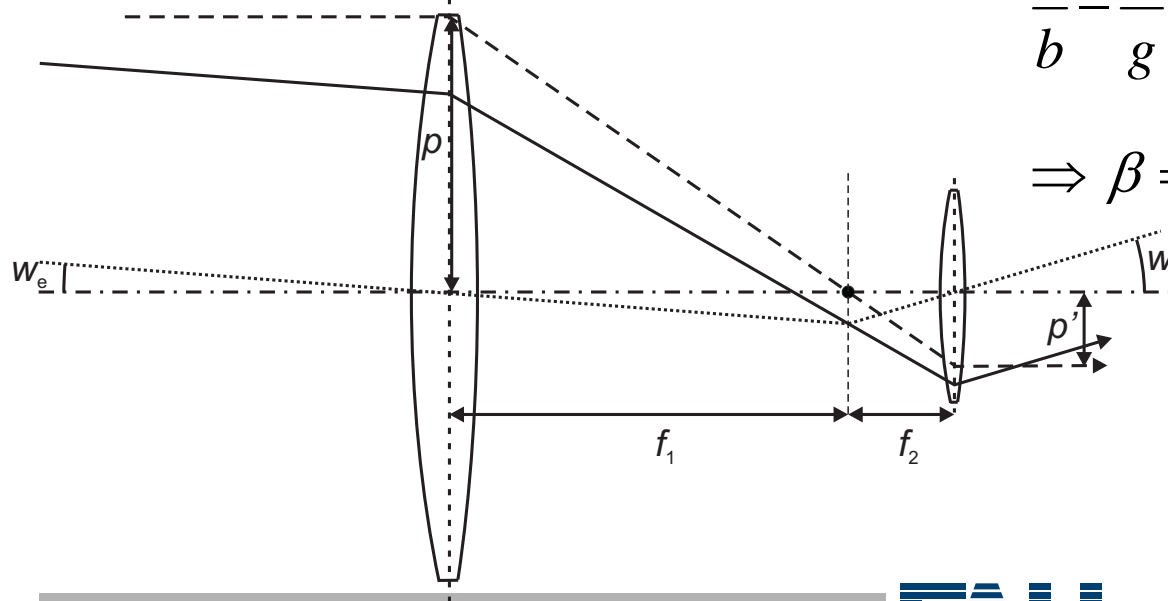
## Visuelle Beobachtung scheibchenförmiger Objekte mit einem Kepler-Teleskop:

Durchmesser Objektiv/Eintrittspupille  $2p$ , Brennweiten  $f'_1$  und  $f'_2$  von Objektiv bzw. Okular, halber Winkeldurchmesser  $w_e$  des Objekts, halber Winkeldurchmesser  $w_t$  des Bildes, Winkelvergrößerung  $\gamma = w_t/w_e = -f'_1/f'_2$

Die Austrittspupille liegt etwa im Abstand  $f'_2$  hinter dem Okular und hat den Durchmesser  $2p'$ :

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{g} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{g}{f'_2} = \frac{-(f'_1 + f'_2)}{f'_2}$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{f'_2}{f'_1} \Rightarrow 2p' = |\beta|2p = 2p \frac{f'_2}{f'_1} = \frac{2p}{|\gamma|}$$



Bestrahlungsstärke des Objekts:  $E_0$

# Ausgedehnte Lichtquellen

**Bloßes Auge ohne Teleskop:** Brennweite  $f'_e$  und Pupillenradius  $\rho$  des Auges, Radius  $r_e$  und Fläche  $A_e$  des Bildes auf der Netzhaut, einfallende Strahlungsleistung  $\Phi_e$ , Bestrahlungsstärke  $E_e$  auf Netzhaut

$$r_e = f'_e w_e \Rightarrow A_e = \pi r_e^2 = \pi (f'_e w_e)^2$$

$$\Phi_e = E_0 \pi \rho^2$$

$$E_e = \frac{\Phi_e}{A_e} = E_0 \left( \frac{\rho}{f'_e w_e} \right)^2$$

## Mit Teleskop:

Radius  $r_t$  und Fläche  $A_t$  des Bildes auf der Netzhaut

$$r_t = f'_e w_t = \gamma f'_e w_e \Rightarrow A_t = \pi r_t^2 = \gamma^2 \pi (f'_e w_e)^2 = \gamma^2 A_e \Rightarrow \frac{A_t}{A_e} = \gamma^2$$

Auf das Teleskop einfallende Strahlungsleistung  $\Phi_t$ :

$$\Phi_t = E_0 \pi \rho^2$$

# Ausgedehnte Lichtquellen

Im Fall der Bestrahlungsstärke  $E_t$  auf der Netzhaut mit Teleskop müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1.  $p \leq \rho$ , d.h. die gesamte vom Objekt auf das Teleskop einfallende Strahlung fällt auch auf die Netzhaut:

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{\Phi_t}{A_t} \frac{A_e}{\Phi_e} = \frac{p^2}{\rho^2 \gamma^2} = \frac{p'^2}{\rho^2} \leq 1$$

2.  $p > \rho$ , d.h. die Augenpupille begrenzt die Strahlungsleistung → effektiver Objektivradius  $p_{\text{eff}}$ , von dem Licht auf die Augenpupille fällt, ist:  $p_{\text{eff}} = \rho$ :

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{\Phi_{t,\text{eff}}}{A_t} \frac{A_e}{\Phi_e} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{\rho^2 \gamma^2} = \frac{\rho^2 \gamma^2}{\rho^2 \gamma^2} = 1$$

**Die Bestrahlungsstärke eines ausgedehnten Objektes auf der Netzhaut kann also mit einem Teleskop nicht erhöht werden!**

# Ausgedehnte Lichtquellen

**Aber trotzdem darf man nie durch ein Teleskop oder einen Feldstecher die Sonne ohne Schutzfilter betrachten!**

Erklärung:

Auch wenn die Bestrahlungsstärke, d.h. die Leistung pro Netzhautflächenelement, nicht erhöht wird, wird das Bild der Sonne um die Winkelvergrößerung vergrößert.

**Auch mit bloßem Auge wird das Auge geschädigt, wenn man länger als ein paar Sekunden in die Sonne starrt!** Aber das Bild der Sonne ist mit bloßem Auge auf der Netzhaut „nur“ etwa  $2r_e = f'_e w_e = 17 \text{ mm} * 0.0093 = 0.16 \text{ mm}$  groß.

Durch schnelle Augenbewegungen verschiebt sich also das Sonnenbild recht schnell und der Energieeintrag kann noch einigermaßen abgeleitet werden.

Mit Teleskop ist das Bild der Sonne um die Winkelvergrößerung  $\gamma$  vergrößert bzw. die Fläche des Sonnenbildes sogar um  $\gamma^2$ . Der Energieeintrag ist deshalb auch um den Faktor  $\gamma^2$  vergrößert und ein riesiger Bereich der Netzhaut wird bestrahlt.

**→ Die Energie kann nicht mehr abgeleitet werden und schädigt sofort das Auge.**

---

# Verallgemeinerung der Strahlungsformeln



# Verallgemeinerte Strahlungsformeln

## Allgemeine Formel für den Strahlungstransport zwischen Strahler und Detektor:

kleines Flächenelement der Größe  $dA$  der Lichtquelle

kleines Flächenelement der Größe  $dF$  des Detektors

Strahldichte  $L$

Abstand zwischen beiden Flächenelementen  $r$

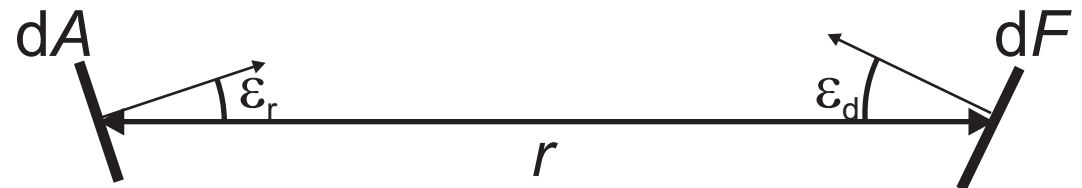
Winkel zwischen Flächennormalen und Verbindungslinie  $\varepsilon_r$  bzw.  $\varepsilon_d$

→ Strahlungsfluss  $d\Phi$  zwischen beiden Flächen:

$$d\Phi = L \cos \varepsilon_r dA d\Omega \quad \text{mit} \quad d\Omega = \frac{\cos \varepsilon_d dF}{r^2} \Rightarrow d\Phi = L \frac{\cos \varepsilon_r dA \cos \varepsilon_d dF}{r^2}$$

Gesamter Strahlungsfluss  $\Phi$  zwischen der Lichtquelle und dem Detektor folgt durch Integration über beide Flächen ( $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_d$ ,  $L$  und  $r$  hängen dann i.a. von  $dA$  und  $dF$  ab):

$$\Phi = \iint_{A F} L \frac{\cos \varepsilon_r \cos \varepsilon_d}{r^2} dA dF$$



# Verallgemeinerte Strahlungsformeln

## Anwendung auf Ulbricht-Kugel (=diffus streuende Kugel=Lambert-Strahler):

Strahlungsfluss  $\Phi_{ab}$  zwischen zwei kleinen Flächenelementen  $F_a$  und  $F_b$ :

$$\Phi_{ab} = L \frac{F_a \cos \varepsilon_r F_b \cos \varepsilon_d}{a^2}$$

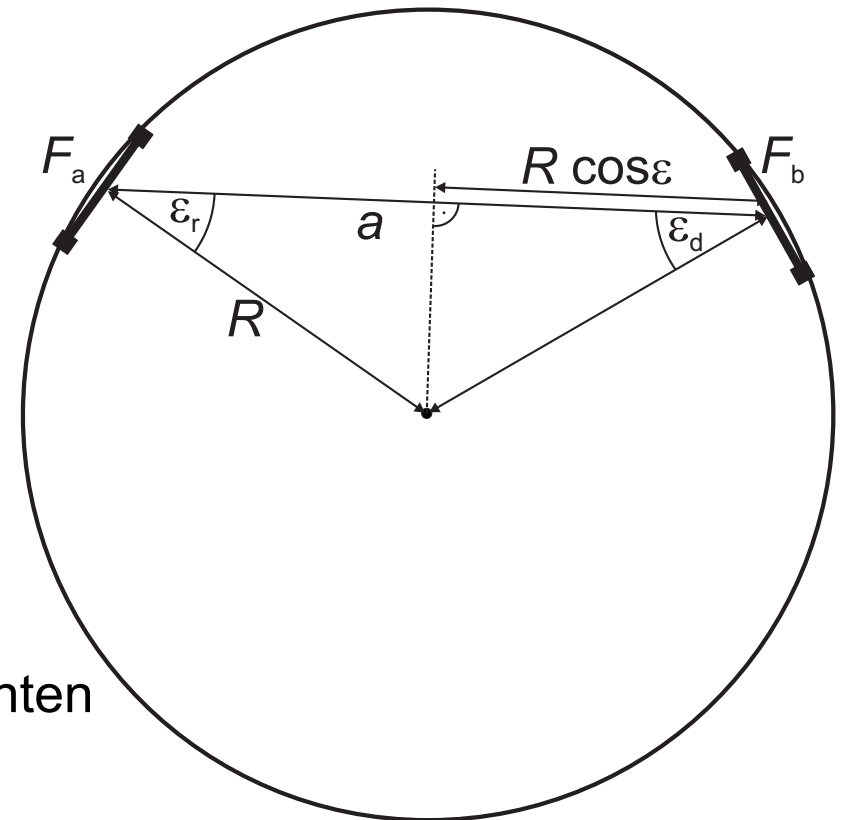
Aus Symmetriegründen ist  $\varepsilon_r = \varepsilon_d := \varepsilon$  und für den Abstand  $a$  gilt:  $a = 2R \cos \varepsilon$  mit Kugelradius  $R$

$$\Rightarrow \Phi_{ab} = L \frac{F_a F_b \cos^2 \varepsilon}{(2R \cos \varepsilon)^2} = L \frac{F_a F_b}{4R^2}$$

$$\Rightarrow E_{ab} = \frac{\Phi_{ab}}{F_b} = L \frac{F_a}{4R^2} \quad E_{ab}: \text{Bestrahlungsstärke auf Fläche } F_b$$

Der Strahlungsfluss zwischen zwei Flächenelementen ist also unabhängig von der Position der Flächen konstant wegen  $L$  konstant (Lambert-Strahler).

➔ Integrale Messung unabhängig von der Richtungscharakteristik der Lichtquelle



# Verallgemeinerte Strahlungsformeln

## Beleuchtungsstärke bei der Abbildung eines Schirms:

Flächenelement der Größe  $A$  wird durch Linse auf Flächenelement der Größe  $A'$  abgebildet, wobei die Eintrittspupille und Hauptebene der Linse zusammen fallen sollen. Hauptstrahl hat Winkel  $w$  mit optischer Achse und die Eintrittspupille habe die Fläche  $F$ , die auch als klein angenommen wird.

Dann gilt für die Winkel zwischen Hauptstrahl und Flächennormale der Flächenelemente:

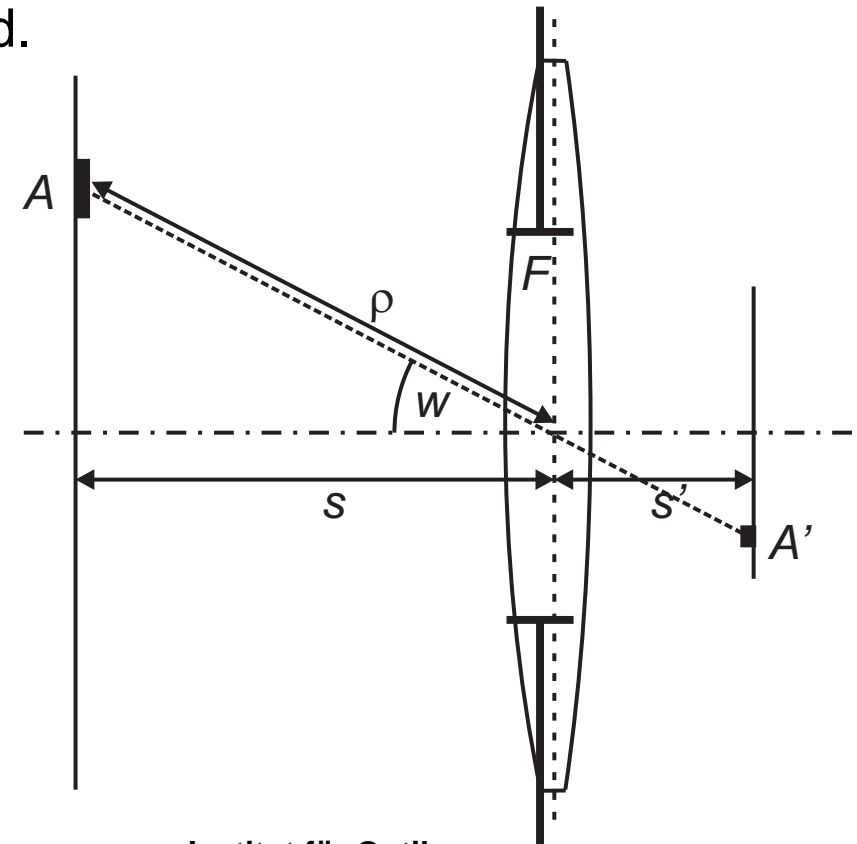
$$\varepsilon_r = \varepsilon_d = w$$

Entfernung  $\rho$  zwischen Flächenelement  $A$  und Zentrum der Eintrittspupille:

$$\rho = s / \cos w$$

Lichtfluss zwischen Flächenelement  $A$  und Eintrittspupille:

$$\begin{aligned}\Phi_{AF}(w) &= L \frac{A \cos w \cdot F \cos w}{\rho^2} = L \frac{AF}{s^2} \cos^4 w = \\ &= \Phi_{AF}(w=0) \cos^4 w\end{aligned}$$



# Verallgemeinerte Strahlungsformeln

Linse sei verzeichnungsfrei → Flächenelemente in Objekt- und Bildraum hängen über Abbildungsmaßstab  $\beta$  zusammen, wobei  $\beta$  unabhängig von  $w$  ist:

$$A' = \beta^2 A$$

Wenn kein Licht absorbiert wird, muss der Lichtfluss zur Eintrittspupille auch im Bild  $A'$  ankommen. Die Beleuchtungsstärke  $E'$  im Flächenelement  $A'$  ist dann:

$$E'(w) = \frac{\Phi_{AF}(w)}{A'} = \frac{F}{\beta^2 s^2} L \cos^4 w = E'_0 \cos^4 w \quad \text{mit} \quad E'_0 = \frac{F}{\beta^2 s^2} L$$

Die Beleuchtungsstärke  $E'_0$  auf der Achse kann auch folgendermaßen interpretiert werden:

$$s' = \beta s \Rightarrow E'_0 = L \frac{F}{s'^2} = L \Omega'$$

Hierbei ist  $\Omega'$  der Raumwinkel, unter dem die Eintrittspupille=Austrittspupille der Linse vom Bild aus gesehen wird, wenn sich Objekt und Bild auf der optischen Achse befinden. Dieses Ergebnis hatten wir auch schon vorher abgeleitet.

---

# Invarianz der Leuchtdichte bei Abbildung

# Invarianz der Leuchtdichte bei Abbildung

## Invarianz der Leuchtdichte bei der Abbildung:

Wir betrachten nur kleine Flächenelemente in Objekt, Bild und Eintrittspupille.

Helmholtz-Lagrange-Invariante sagt aus:

$$nxu = n' x' u'$$

Geometrische Verhältnisse liefern:

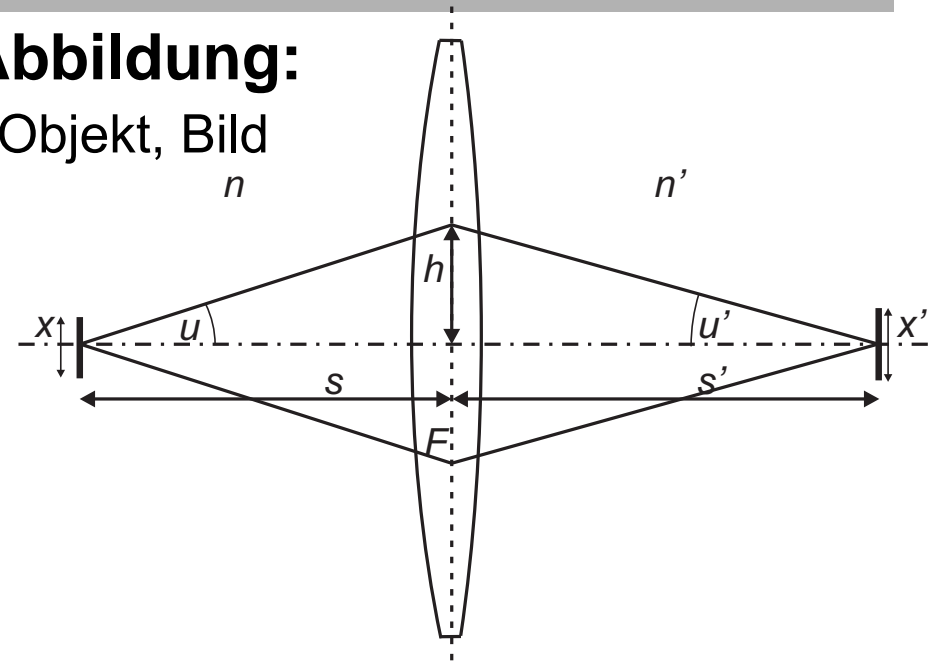
$$us = h = u' s' \Rightarrow \frac{u}{u'} = \frac{s'}{s}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{x'}{x} = \frac{nu}{n'u'} = \frac{ns'}{n's} \Rightarrow s' = \frac{n'}{n} \beta s \Rightarrow A' = \pi (x'/2)^2 = \pi (\beta x/2)^2 = \beta^2 A$$

Wegen Energieerhaltung (Absorption sei nicht vorhanden) gilt für die Leuchtdichte:

$$L' = \frac{\Phi' s'^2}{A' F} = \frac{\Phi s^2 n'^2}{A F n^2} = \frac{n'^2}{n^2} L \Rightarrow \frac{L'}{n'^2} = \frac{L}{n^2}$$

**Effektive Leuchtdichte  $L/n^2$  ist also bei Abbildung invariant, falls keine Absorption auftritt. Insbesondere kann sie bei der Abbildung nicht vergrößert werden!**



# Invarianz der Leuchtdichte bei Abbildung

## Zusammenfassung der Verhältnisse bei der Abbildung einer ausgedehnten Lichtquelle:

- Lichtfluss  $\Phi$  und effektive Leuchtdichte  $L_{\text{eff}}$  sind invariant
- Beleuchtungsstärke  $E$  verändert sich mit  $1/\beta^2$  (Abbildungsmaßstab  $\beta$ )

$$E' = \frac{\Phi'}{A'} = \frac{\Phi}{\beta^2 A} = \frac{1}{\beta^2} E$$

- Lichtstärke  $I$  verändert sich mit  $\beta^2 n'^2/n^2$

$$I' = \frac{\Phi'}{\Omega'} = \frac{\Phi' s'^2}{F} = \frac{\Phi \beta^2 s^2 n'^2}{F n^2} = I \beta^2 \frac{n'^2}{n^2}$$

---

# Leuchtdichte einer Streuplatte



# Leuchtdichte einer Streuplatte

## Leuchtdichte einer idealen Streuplatte:

Eine ideale Streuplatte/Mattscheibe ist ein Lambert-Strahler, der die gesamte gerichtet einfallende Strahlung ungerichtet in den Halbraum abstrahlt.

Wir hatten abgeleitet, dass der in den Halbraum abgestrahlte Lichtfluss eines Lambert-Strahlers ( $m=1$ ) folgenden Wert hat:

$$\Phi_{\text{Halbraum}} = \frac{2\pi I_0}{m+1} = \pi I_0$$

Der auf die Fläche  $dF$  einfallende Lichtfluss bei der Beleuchtungsstärke  $E$  ist:

$$\Phi = E dF$$

Aus der Energieerhaltung folgt dann für einen Lambert-Strahler:

$$L = \frac{I}{\cos \vartheta dF} = \frac{I_0 \cos \vartheta}{\cos \vartheta dF} = \frac{I_0}{dF} \Rightarrow I_0 = L dF$$

$$\Phi_{\text{Halbraum}} = \Phi \Rightarrow \pi I_0 = \pi L dF = E dF \Rightarrow L = \frac{E}{\pi}$$

