# Moderne Theoretische Informatik - Zusammenfassung

# 2 - NP (in polynomieller Zeit nicht deterministisch lösbare Probleme)

#### Probleme in NP

Haben schwer zu findende Lösungen, Korrektheit ist aber leicht zu überprüfen. Folgende Probleme existieren in NP:

- k-Färbbarkeit von Graphen (k-Color)
- Hamilton'scher Pfad
- Erfüllbarkeit logischer Formeln (SAT)
- Graph Isomorphismus

#### Reduzierbarkeit von NP-Probleme

Probleme sollen aufeinander reduzierbar sein, heißt: Problem A & B existieren, Lösung für Problem B existiert, Eingabe von A wird auf Eingabe von B abgebildet  $\rightarrow$  Lösung für A gefunden:  $A \leq_{\mathcal{D}} B$ 

#### NP-Vollständigkeit

Sprache B ist NP-vollständig, wenn gilt:

- $B \in NP$
- $\forall A \in NP : A \leq_p B$

Alle NP-vollständigen Probleme sind Elemente von NPC.

In NPC existieren:

- Graphprobleme: Längster Pfad, Graphfärbbarkeit
- Optimierungsprobleme: Bin Packing, Traveling Salesman
- Formale Sprachen: Längste gemeinsame Teilsequenz
- Spiele und Puzzles: Super Mario Bros, Minesweeper
- SAT (Erfüllbarkeit logischer Ausdrücke)

Zur Lösung wichtig: Approximationsverfahren, da sehr wahrscheinlich keine effiziente Lösung für Probleme in NPC existiert.

**Satz von Cook und Levin:** Für jedes Problem  $A \in NP$  gilt  $A \leq_p SAT$ 

Satz von Ladner:  $P = NP \Rightarrow NP - P = NPC$ 

#### NP-Optimierungsproblem

**NPO** Optimierungsprobleme bestehen aus 4-Tupel  $F = (I_F, S_F, m_F, opt)$ 

Sebastian Mohr 2024-07-17

• I: Menge von Eingabeinstanzen (z.B. Menge der Graphen)

- S: Funktion, die Eingabeinstanzen auf Lösungswörter abbildet (z.B. Bildung der Teilgraphen aus Graph)
- m: eine Zielfunktion, die das Maß der Lösung berechnet (z.B. Zählen der Knoten in Teilgraphen)
- opt: Optimierungsziel (max / min) (z.B. maximal viele Cliquen in Menge aller Graphen I)

#### **NP-Intermediate**

Alle Probleme von NP, die weder in P, noch in NPC enthalten sind, nennt man **NPI** oder NP-Intermediate Probleme.

## 3 - Möglichkeiten udn Grenzen randomisierter Algorithmen

#### Min-Cut

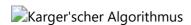
**Definition**: ungerichteter, ungewichteter Graph soll in zwei Teile aufgespalten werden, so dass möglichst wenige Kanten durchtrennt werden.

#### Karger'scher Algorithmus:

- zufällige Kante mit Knoten {u, v} auswählen
- Knoten {u, v} zu neuem Knoten <u.v> zusammensetzen
- Kanten zwischen *u* und *v* entfernen
- wiederholen, bis 2 Teile übrig sind

Erfolgreicher Durchlauf: Minimale Verbindung zwischen 2 Knoten

Fehlerhafter Durchlauf: 2 Knoten sind mit mehr als der minimalen Kantenmenge verbunden



#### Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

**Elementar-Ergebnisse:** Alle in einem Zufallsprozess möglicherweise vorkommenden Ergebnisse  $\Omega$ 

**Ereignisse:** Menge F aller erlaubten Ereignisse, jedes Ereignis  $F_i$  hat eine Wahrscheinlichkeit  $P(F_i)$ 

#### Probabilistische Methode

Probabilistische Methode liefert Existenzbeweis für Objekte mit bestimmten Eigenschaften. Wenn die Wahrscheinlichkeit für die Wahl eines Objekts aus einem Ereignisraum > 0 ist, existiert das Objekt.

#### Vorgehensweise:

- Ereignisraum mit geeigneten Objekten konstruieren
- Zeigen, dass gewünschtes Objekt mit Wahrscheinlichkeit > 0 auftritt

# Monte Carlo / Las Vegas Algorithmen

#### Monte Carlo:

- vorab bestimmte Laufzeit
- ullet Fehlerhaftes Resultat mit  $P \geq 0$ , Fehler kann ein- oder zweiseitig sein

### Las Vegas:

- variierende Laufzeit
- **niemals** fehlerhaftes Resultat