

# Moderne Theoretische Informatik - Zusammenfassung

---

## 2 - NP (in polynomieller Zeit nicht deterministisch lösbare Probleme)

---

### Probleme in NP

Haben schwer zu findende Lösungen, Korrektheit ist aber leicht zu überprüfen. Folgende Probleme existieren in NP:

- k-Färbbarkeit von Graphen (k-Color)
- Hamilton'scher Pfad
- Erfüllbarkeit logischer Formeln (SAT)
- Graph Isomorphismus

### Reduzierbarkeit von NP-Probleme

Probleme sollen aufeinander reduzierbar sein, heißt: Problem A & B existieren, Lösung für Problem B existiert, Eingabe von A wird auf Eingabe von B abgebildet  $\rightarrow$  Lösung für A gefunden:  $A \leq_p B$

### NP-Vollständigkeit

Sprache B ist NP-vollständig, wenn gilt:

- $B \in NP$
- $\forall A \in NP : A \leq_p B$

Alle NP-vollständigen Probleme sind Elemente von **NPC**.

In NPC existieren:

- Graphprobleme: Längster Pfad, Graphfärbbarkeit
- Optimierungsprobleme: Bin Packing, Traveling Salesman
- Formale Sprachen: Längste gemeinsame Teilsequenz
- Spiele und Puzzles: Super Mario Bros, Minesweeper
- **SAT** (Erfüllbarkeit logischer Ausdrücke)

*Zur Lösung wichtig:* Approximationsverfahren, da sehr wahrscheinlich keine effiziente Lösung für Probleme in NPC existiert.

**Satz von Cook und Levin:** Für jedes Problem  $A \in NP$  gilt  $A \leq_p SAT$

**Satz von Ladner:**  $P = NP \Rightarrow NP - P = NPC$

### NP-Optimierungsproblem

**NPO** Optimierungsprobleme bestehen aus 4-Tupel  $F = (I_F, S_F, m_F, opt)$

- $I$ : Menge von Eingabeinstanzen (z.B. Menge der Graphen)
- $S$ : Funktion, die Eingabeinstanzen auf Lösungswörter abbildet (z.B. Bildung der Teilgraphen aus Graph)
- $m$ : eine Zielfunktion, die das Maß der Lösung berechnet (z.B. Zählen der Knoten in Teilgraphen)
- $opt$ : Optimierungsziel (max / min) (z.B. maximal viele Cliques in Menge aller Graphen  $I$ )

### NP-Intermediate

Alle Probleme von NP, die weder in P, noch in NPC enthalten sind, nennt man **NPI** oder NP-Intermediate Probleme.

## 3 - Möglichkeiten und Grenzen randomisierter Algorithmen

---

### Min-Cut

**Definition:** ungerichteter, ungewichteter Graph soll in zwei Teile aufgespalten werden, so dass möglichst wenige Kanten durchtrennt werden.

#### Karger'scher Algorithmus:

- zufällige Kante mit Knoten  $\{u, v\}$  auswählen
- Knoten  $\{u, v\}$  zu neuem Knoten  $\langle u.v \rangle$  zusammensetzen
- Kanten zwischen  $u$  und  $v$  entfernen
- wiederholen, bis 2 Teile übrig sind

Erfolgreicher Durchlauf: Minimale Verbindung zwischen 2 Knoten

Fehlerhafter Durchlauf: 2 Knoten sind mit mehr als der minimalen Kantenmenge verbunden

 Karger'scher Algorithmus

### Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

**Elementar-Ergebnisse:** Alle in einem Zufallsprozess möglicherweise vorkommenden Ergebnisse  $\Omega$

**Ereignisse:** Menge  $F$  aller erlaubten Ereignisse, jedes Ereignis  $F_i$  hat eine Wahrscheinlichkeit  $P(F_i)$

### Probabilistische Methode

Probabilistische Methode liefert Existenzbeweis für Objekte mit bestimmten Eigenschaften. Wenn die Wahrscheinlichkeit für die Wahl eines Objekts aus einem Ereignisraum  $> 0$  ist, existiert das Objekt.

Vorgehensweise:

- Ereignisraum mit geeigneten Objekten konstruieren
- Zeigen, dass gewünschtes Objekt mit Wahrscheinlichkeit  $> 0$  auftritt

## Monte Carlo / Las Vegas Algorithmen

Monte Carlo:

- vorab bestimmte Laufzeit
- Fehlerhaftes Resultat mit  $P > 0$ , Fehler kann ein- oder zweiseitig sein

Las Vegas:

- variierende Laufzeit
- **niemals** fehlerhaftes Resultat