FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT1126

Cálculo II

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. Axioma del supremo

1.1. Definiciones y Ejemplos

Sabemos algo del conjunto real $\mathbb{R}$, sabemos que es un cuerpo, es ordenado y por último, es completo. Y esta última propiedad es la que estudiaremos, que es posea un supremo. Ya que para poder definir la integral, necesitamos sumar cosas pequeñas y a la vez acercanodos a un valor real.

Definición 1.1 (Cota superior) *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Diremos que $b \in \mathbb{R}$ es cota superior de A si para todo $a \in A$, se tiene que $a \leq b$, en tal caso diremos que A es acotado superiormente.*

Ejemplo 1.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto real, definida por:

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$$

Entonces, el número 6 es cota superior de A, puesto que para todo $x \in A$ se tiene que $x < 2 < 6$, por tanto A está acotado superiormente.

Ejemplo 1.2. El conjunto $(0, \infty)$ no posee cota superior. Ya que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un $y \in (0, \infty)$ talque $x < y$.

Definición 1.2. (Cota inferior) *Sea $A \subseteq R$. Diremos que $b \in \mathbb{R}$ es cota inferior de A si para todo $a \in A$, se tiene que $b \leq a$, en tal caso diremos que A es acotado inferiormente*

Ejemplo 1.3. Considere el siguiente conjunto

$$A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

podemos ver que -1 es una cota inferior de A, en efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ $-1 < 0 < \frac{1}{n}$ entonces, para todo $n \in \mathbb{N}, -1 < \frac{1}{n}$.

Ejemplo 1.4. El conjunto $(-\infty, 0)$ no posee cota inferior. Ya que para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un $y \in (-\infty, 0)$ talque $y < x$.

Definición 1.3. (Acotado) *Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es acotado, si es acotado superiormente e inferiormente.*

Ejemplo 1.5. El conjunto $[-5, 4]$ es acotado, dado que es acotado superiormente e inferiormente.

Definición 1.4. (Máximo) *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente talque la cota b es la menor cota de las cotas superiores y $b \in A$, entonces diremos que b es máximo de A.*

Nota 1.1. Análogamente podemos definir el mínimo de un conjunto, es la mayor cota inferior que está dentro del conjunto acotado inferiomente.

Observación 1.1. El máximo y el mínimo son únicos, probemos con respecto al máximo, si M_1, M_2 son máximos de un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $M_1 \leq M_2$ como $M_1 \in A$, y si $M_2 \in A$, entonces $M_2 \leq M_1$, luego $M_1 = M_2$.

Ejemplo 1.6. Sea el conjunto

$$A := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Notemos que 1 es cota superior y está en el conjunto A, por tanto, es máximo.

Ejemplo 1.7. El conjunto $(2, 3]$ posee máximo, que es el 3, pero no posee mínimo.

Defnción 1.5. (Supremo) *Sea A un conjunto no vacío acotado superiormente. Diremos que el número $a \in \mathbb{R}$ es el supremo de A, denotado como $\sup A$, si satisface la siguientes propiedades:*

(a) El número a es cota superior de A

(b) Si b es cota superior de A, entonces $a \leq b$

es decir, a es la menor cota superior.

Nota 1.2. La definición de supremo es equivalente a decir que:

$$\text{si } b < a \text{ entonces existe un } x \in A \text{ talque } b < x$$

que también es equivalente a decir:

$$\text{para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } x \in A \text{ talque } a - \varepsilon < x \leq a$$

y esta última definición es la que se usa para determina supremos. Se puede observar que esta equivalencia nos dice que si a es el supremo del conjunto acotado A se tiene que al quitarle un $\varepsilon > 0$ este ya no es cota superior, es decir, existe un $x \in A$ talque $a - \varepsilon < x$ que sería la equivalencia mostrada.

Al igual que el supremo, que es la menor cota superior, también se puede definir la mayor cota inferior. Que sería el ínfimo.

Definición 1.6. (Ínfimo) *Sea A un conjunto no vacío acotado inferiormente. Diremso que el número $a \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de A, denotado como $\inf A$, si satisface la siguientes propiedades:*

(a) El número a es cota inferior de A

(b) Si b es cota inferior de A, entonces $b \leq a$

es decir, a es el mayor de las cotas inferiores.

Al igual que el supremo, el ínfimo presenta una equivalencia bastante últil:

$$a \text{ es ínfimo si para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe } x \in A \text{ talque } a \leq x < a + \varepsilon.$$

1.2. Axiomas y Propiedades

Estudiaremos los axiomas de supremo e ínfimo y también estudiaremos algunas propiedades derivadas de estas.

Axioma del Supremo. *Todo subconjunto A de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente, posee supremo.*

Axioma del Ínfimo. *Todo subconjunto A de $\mathbb{R}$, no vacio y acotado inferiormente, posee ínfimo.*

Ejemplo 1.8. Probemos que si $A = (a, b)$, entonces $\text{ínf } A = a$. Y en fecto, ya que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x \in A$ talque $a \leq x < a + \varepsilon$. Para $\varepsilon > 0$ fijo, se toma $x := a + \varepsilon/2$, de este modo $a \leq x < a + \varepsilon$, y por tanto $\text{ínf } A = a$.

Teorema 1.1. (Propiedad arquimediana) *Dado un número real $x \in \mathbb{R}$, existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ talque $x < n$*

Nota 1.3. Si negamos la propiedad arquimediana obtenemos que existe un x real, de modo que para todo n natural es talque $x \geq n$, es decir, los naturales son acotados superiormente, entonces el teorema es equivalente a decir que los números naturales no son acotados superiormente lo cual evidentemente es falso.

Dem. (Teorema 1.1) Supongamos que los naturales son acotados superiormente, entonces existe el supremo $S := \sup \mathbb{N}$, dado que es el supremo se cumple que $n \leq S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon = 1$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ talque

$$S - 1 < n \leq S$$

esto implica que $S < n + 1$, pero sabemos que $n + 1 \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, S no es supremo, lo que implica que $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente. Probando la propiedad arquimediana. ■

Ejemplo 1.9. Probemos que el ínfimo del conjunto

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es 0. Por definición de ínfimo, debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ talque $0 \leq 1/n < \varepsilon$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por la propiedad arquimediana ,existe un natural talque $0 < 1/\varepsilon < n$, o lo que equivale decir $0 < 1/n < \varepsilon$, por lo tanto, $0 = \text{ínf } A$.

Ejemplo 1.10. Sea el conjunto

$$A = \left\{ \frac{|\operatorname{sen}(n)|}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Probemos que el ínfimo es 0. Sea $\varepsilon > 0$, notar que $0 < \frac{|\sin(n)|}{n} \leq \frac{1}{n}$, de este modo, existe un n_0 natural talque $0 < 1/\varepsilon < n_0 \leq n \leq \frac{n}{|\sin(n)|}$, considerando $n \geq n_0$ entonces $0 < \frac{|\sin(n)|}{n} < \varepsilon$, por lo tanto $0 = \text{ínf } A$.

Ejemplo 1.11. Probemos que

$$\text{ínf} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe n natural, talque $0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$. En particular, se cumple que existe un n_0 natural talque $0 < 1/\varepsilon < n_0 \leq 2^{n_0}$, por tanto, basta considerar $n \geq n_0$, de este modo se prueba que el ínfimo es efectívamente 0.

La propiedad Arquimediana es muy útil para determinar ínfimos y supremos. Pero aun así no es suficiente, el siguiente resultado nos entrega otra herramienta para determinar supremos e ínfimos.

Teorema 1.2. (Densisdad) *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ talque $r \in (a, b)$*

Nota 1.4. El teorema anterior, nos dice que los números son densos, que dicho de otra forma, en toda colección real, existe al menos un racional.

Dem. (Teorema 1.2) Sin pérdida de generalidad, asumamos que $0 \leq a < b$. Debemos encontrar $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $a < m/n < b$. Por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ talque $1/n < b - a$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ talque

$$m - 1 \leq na < m$$

notemos que $a < m/n$. Por otra parte que $a < b - 1/n$, entonces

$$m \leq na + 1 < n\left(b - \frac{1}{n}\right) + 1 = nb$$

Por lo tanto $a < m/n < b$, que es lo que queriamos demostrar. ■

Ejemplo 1.12. Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

¿Tendrá supremo el conjunto A? Supongamos que si, digamos que $\sup A := \sqrt{2}$, pero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, esto implica que si consideramos un racional $p/q \in A$ siempre habrá un racional más grande, o si consideramos un cota p'/q' veremos que siempre habrá otro racional más pequeño y a la vez una cota superior, es decir, A no tiene supremo. Por lo tanto, el axioma de supremo no está presente en todo cuerpo, en este caso, $\mathbb{Q}$ no satisface el axioma del supremo.

Proposición 1.1. *Sean $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, donde B es un conjunto acotado superiormente. Entonces* $\sup A \leq \sup B$

Dem. Vamos a suponer que B es acotado superiormente, por tanto existe tanto el supremo de A como el de B. Sea $S_b := \sup B$, entonces, para todo $x \in A$ es talque $S_b \geq x$, es decir, S_b es cota superior de A por tanto $S_b \geq S_a := \sup A$, probando la propiedad. ■

Esto significa que el orden es invariante con respecto al supremo, esto quiere decir que si $A \subseteq B$ (A, B están ordenados por la inclusión), entonces al aplicar el supremo, la/el relación/orden preserva el orden, ya que $\sup A \leq \sup B$.

Proposición 1.2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente y sea $-A := \{-x : x \in A\}$. Pruebe que $-A$ es acotado superiormente y

$$\sup\{-A\} = -\inf\{A\}$$

Dem. Sea $I := \inf A$, entonces $I \leq x$ para todo $x \in A$, lo que es equivalente a decir $-I \geq -x$ para todo $-x \in A$ esto nos dice que $-A$ es acotado superiormente. Por tanto existe el supremo de $-A$.

Probemos que $-I = \inf\{-A\}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $x \in A$ talque $I \leq x < I + \varepsilon$ lo que equivale a decir $-I \geq x > -I - \varepsilon$ lo que a su vez equivale a decir que $-I = \inf\{-A\}$, probando la igualdad. ■

Proposición 1.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado. Dado $c > 0$ considere el conjunto*

$$cA := \{cx : x \in A\}$$

Entonces, el conjunto cA es acotado superior e inferiormente y que

$$\sup cA = c \sup A$$

Dem. Como A es acotado, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq b$ para todo x en A, si multiplicamos por $c > 0$, obtenemos $ca \leq cx \leq cb$ para todo cx en cA, de esta forma, cA es acotado y por tanto tiene supremo e ínfimo.

Probemos la igualdad. Sea $S := \sup A$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$ exite un $x \in A$ talque $S - \varepsilon < x \leq S$, sea $\varepsilon' = \varepsilon/c$, entonces, si multiplicamos $c > 0$ obtenemos que para todo $\varepsilon' > 0$ existe un $cx \in cA$ talque $cS - \varepsilon' < cx \leq cS$, de esta forma $cS = \sup cA$. ■

Proposición 1.4. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacios, acotado de números positivos. Sea el conjunto de los productos de A y de B definida por*

$$AB := \{xy : x \in A, y \in B\}$$

Entonces, AB es acotado y tiene supremo e ínfimo

$$\sup A \cdot \sup B, \;\; \inf A \cdot \inf B$$

respectívamente.

Dem. si existen $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_1 \leq x \leq a_2 \;\; \text{y} \;\; b_1 \leq y \leq b_2$$

para todo x e y. Entonces

$$a_1 \cdot b_1 \leq xy \leq a_2 \cdot b_2$$

es decir, AB es acotado, por tanto, tiene supremo.

Probemos el supremo. Sean $S_a := \sup A$, $S_b := \sup B$ y $S := \sup AB$. Notemos que $x = \frac{xy}{y}$ dado que $y \neq 0$, entonces $S_a \geq \frac{xy}{y}$ lo que implica $y \geq \frac{xy}{S_a}$, luego $S_aS_b \geq S$, para la otra desigualdad basta considerar $S \geq xy$, entonces $\frac{S}{x} \geq y$ para todo y tomando x fijo, luego por la característica del supremo se concluye $\sup AB = \sup A \cdot \sup B$. Con respecto al ínfimo, el métodod es análogo. Probando la proposición. ■

Definición 1.7. (Funciones acotadas y supremo) *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f es acotada si y sólo si $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es acotada. Se define el supremo de f por:*

$$\sup f : \sup = \{f(x) : x \in X\}$$

Y se define el ínfimo de f por:

$$\text{ínf}\, f := \text{ínf}\{f(x) : x \in X\}$$

Proposición 1.5. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Entonces $f + g : X \to \mathbb{R}$ también es acotada y*

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g \quad y \quad \text{ínf}\, f + \text{ínf}\, g \leq \text{ínf}(f + g)$$

Dem. Sean a, b reales tales que $f(x) \leq a$ y $g(x) \leq b$ para todo $x \in X$ entonces $f(x) + g(x) = (f + g)(x) \leq a + b$ para todo $x \in X$, por tanto $f + g$ es acotado y por tanto tiene supremo.

Ahora probemos la desigualdad con respecto al supremo. Sean $S_f := \sup f$ y $S_g := \sup g$, se tiene que $(f + g)(x) \leq S_f + S_g$ para todo $x \in X$ por tanto $S_f + S_g$ es cota superior y esto implica que

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

Con respecto al ínfimo es similar. ■

Daremos una última herramienta para determinar el supremo o ínfimo de un conjunto, usando convergencia de sucesiones.

Proposición 1.6. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y sea $S := \sup A$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}_n \subseteq A$ talque $x_n \overset{n \to \infty}{\to} S$*

Dem. Si S es el supremo de A, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x \in A$ talque

$$S - \varepsilon < x \leq S$$

Sea $\varepsilon_1 > 0$, entonces existe $x_1 \in A$ talque $S - \varepsilon_1 < x_1 \leq S$, podemos tomar $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, luego existe x_2 talque $S - \varepsilon_2 < x_2 \leq S$, y así sucesivamente hasta generar la sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, notemos que es acotada, luego podemos tomar una subsucesión creciente acotada superiormente, por lo que converge, en particular, converge a S. ■

Observación 1.2. Si podemos construir una sucesión que relaciona a todos los elementos de un conjunto y que es monótona acotada, entonces, ese conjunto posee supremo y/o ínfimo.

Ejemplo 1.13. Sea

$$B = \left\{ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

determine si posee cota superior y/o inferior, el supremo y/o ínfimo y si son máximo y/o mínimo.

Sol. Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$t^2 < 1 + t^1 \quad \text{aplicando la raiz cuadrada} \quad |t| < \sqrt{1+t^2}$$

por tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$-1 < \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} < 1$$

de estar forma B es acotado con supremo e ínfimo. Para encontrar el supremo se define la sucesión $\{s_n\}_n \subseteq B$

$$s_n := \frac{n}{1+n^2}$$

por la proposición tenemos que $s_n \overset{n\to\infty}{\to} 1$, por tanto $\sup B = 1$, para el ínfimo basta con definir la sucesión $i_n := -s_n$ y así $i_n \overset{n\to\infty}{\to} -1$. Así encontramos el supremo e ínfimo de B. Para saber si son máximo basta notar que nunca se toca $1, -1$. Luego no tiene maxímo ni mínimo.

Ejemplo 1.14. Consideremos el siguiente conjunto

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Probemos que A tiene supremo. Bastará probar que A es acotado y por el axioma probaremos que tiene supremo. Podemos notar que $a_n > 0$ y $a_n \leq a_{n+1}$. Es más

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} < 3$$

para todo n natural, por tanto A es acotado y por tanto tiene supremo. En particular $a_n \overset{n\to\infty}{\to} e$

Teorema 1.3. (Teorema de los Intervalos Encajados) *Considere una sucesión decreciente de intervalos cerrados y acotados*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ... \supset I_n \supset ...$$

con $I_n = [a_n, b_n]$*, entonces existe* $c \in \mathbb{R}$ *talque*

$$c \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$$

Dem. Las inclusiones $I_n \supset I_{n+1}$ significa que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ...a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$$

El conjunto $A = \{a_1, a_2, ...a_n, ...\}$ es acotado y por tanto, posee supremo $c = \sup A$. Claramente $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y además como cada b_n es cota superior de A, entonces se tiene que $c < b_n$, luego $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ $\square$.

Antes de pasar a la siguiente sección es relevante ver la relación máximo y supremo de un conjunto acotado.

Proposición 1.7. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *un conjunto acotado talque* $b = \min A$ *y* $a = \max A$*, entonces si* $S := \sup A$ *y* $I := \inf A$ *se cumple que* $S = a$ *y* $I = b$*.*

Dem. Solo demostraremos una igualdad. Si a es máximo de A entonces para todo $x \in A$ se tiene que $x \leq a$, es decir, a es cota superior y por tanto $S \leq a$, ahora como $a \in A$ por definición de supremo tenemos que $a \leq S$. Por tanto $a = S$ $\blacksquare$

2. La integral de Riemann

Estudiaremos el concepto de integral como área debajo de la curva, que es la primera noción que se le da. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no negativa, el área bajo la curva, es el área generado por el conjunto

$$A := \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Estudiar el área tiene sentido cuando f es acotada, ya que si no lo fuera, entonces en algún subconjunto de $[a, b]$, al evaluarlo en f, este genera un área infinita. Por lo que asumiremos dos cosas en esta sección,

- Todas las funciones están definido en un conjunto compacto, es decir, toda función está definido en un intervarlo de la forma $[a, b]$.
- Toda función es acotada.

Para poder determinar el área debajo de la curva, usaremos rectángulos, que no da un área excacta, por lo que se irá precisando usando el infinito. El resultado es la integral, que se denota por $\int$, que es una S, para representar la suma de los rectángulos. Luego, la integral indefinida de $f(x)$ se denota como:

$$\int f(x)dx$$

Donde dx hace referencia a los trozos pequeños para formar los rectángulos.

Todo lo mencionado es la idea del matemático Darboux, que es la que estudiaremos para definir y estudiar la integral de funciones acotada.

2.1. Sumas de Darboux

Definición 2.1.(Partición) *Una partición del intervalo $[a, b]$, es un subconjunto finito $\mathscr{P} \subset [a, b]$ talque $a, b \in \mathscr{P}$. Escribiremos $\mathscr{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ donde $a = t_0$ y $b = t_n$. Los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ son llamados intervalos de la partición.*

Nota 2.1. Si una función $f : X \to \mathbb{R}$ es acotado, entnces existen $m, M \in \mathbb{R}$ talque

$$m \leq f(x) \leq M$$

para todo $x \in X$.

Definición 2.2. *Sea $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathscr{P}$ una partición de $[a, b]$, definimos*

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad y \quad M_i := \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

Observación 2.1. Los m_i, M_i están bien definidos al tomar f restringido en $[t_{i-1}, t_i]$, que es acotado, como f es acotado.

Definición 2.3. (Suma Superiores e Inferiores) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathscr{P}$ una partición de $[a,b]$. La suma superior de f con respecto a $\mathscr{P}$, se define por:*

$$S(f,\mathscr{P}) := M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + \cdots + M_n(t_n - t_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Del mismo modo, la suma inferior con respecto a $\mathscr{P}$, se define por:

$$s(f,\mathscr{P}) := m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

Ejemplo 2.1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) := x^2$. Sea $\mathscr{P} = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ una partición del intervalo $[0,1]$. Entonces

$$S(f,\mathscr{P}) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = \frac{14}{27}$$

y

$$s(f,\mathscr{P}) = 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot 1/3 + \frac{4}{9}\cdot 1/3 = \frac{5}{27}$$

Podemos ver que

$$S(f,\mathscr{P}) \neq s(f,\mathscr{P})$$

veamos como mejorar las sumas superior e inferiores.

Definición 2.4. (Afinidad) *Sean $\mathscr{P},\mathscr{L}$ dos particiones de $[a,b]$. Diremos que la partición $\mathscr{L}$ es más fina que $\mathscr{P}$ si $\mathscr{P} \subset \mathscr{L}$.*

Teorema 2.1. *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $\mathscr{P},\mathscr{L}$ dos particiones de $[a,b]$ tales que $\mathscr{L}$ es más fina que $\mathscr{P}$. Entonces*

$$s(f,\mathscr{P}) \leq s(f,\mathscr{L}) \ \ y \ \ S(f,\mathscr{L}) \leq S(f,\mathscr{P})$$

Dem. Sea $\mathscr{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$, sea $\mathscr{Q}$ una partición más fina que $\mathscr{P}$, entonces $\mathscr{Q}$ tiene almenos un elemento más que $\mathscr{P}$. Es decir, existe $r \in [a,b]$ con $t_i < r < t_{i+1}$, talque $r \in \mathscr{Q}$, de esta forma podemos considerar $\mathscr{Q} = \{t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, r, t_i, \ldots, t_n\}$, luego sean

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}, \quad m_i' := \{f(x) : x \in [t_{i-1}, r]\}, \quad m_i'' := \{f(x) : x \in [r, t_i]\}$$

podemos notar que $m_i \leq m_i'$ y $m_i \leq m_i''$. Como $(t_i - t_{i-1}) = (t_i - r) + (r - t_{i-1})$, entonces

$$
\begin{aligned}
s(f,\mathscr{P}) &= m_1(t_1-t_0)+\cdots+m_i(t_i-t_{i-1})+\cdots+m_n(t_n-t_{n-1}) \\
&\leq m_1(t_1-t_0)+\cdots+m_i''(r-t_{i-1})+m_i'(t_i-r)+\cdots+m_n(t_n-t_{n-1}) \\
&= s(f,\mathscr{S})
\end{aligned}
$$

con esto podemo generalizar con m puntos, así siempre se cumple la desigualda. Con el mismo argumento podemos probar que $S(f,\mathscr{Q}) \leq S(f,\mathscr{P})$, probando así el teorema ■

Corolario 2.1. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada y sea $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}$ particiones arbitrarias de $[a,b]$, entonces*

$$s(f,\mathscr{P}) \leq S(f,\mathscr{L})$$

Dem. Sea $\mathscr{T}=\mathscr{P}\cup\mathscr{L}$, vemos que $\mathscr{T}$ es más fina que $\mathscr{P}$ y más fina que $\mathscr{L}$, entonces

$$s(f,\mathscr{P}) \leq s(f,\mathscr{T}) \leq S(f,\mathscr{T}) \leq S(f,\mathscr{L})$$

Probando el corolario ■

Ejemplo 2.2. Sea $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 1, & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}^c \end{cases}$$

Tomemos la partición $\mathscr{P}=\{0,1/2,1\}$, entonces

$$s(f,\mathscr{P})=0 \;\text{ y }\; S(f,\mathscr{P})=1$$

Notar que si consideramos cualquier partición de $[0,1]$, siempre se cumplirá

$$s(f,\mathscr{X})=0, \quad S(f,\mathscr{X})=1$$

con $\mathscr{X}$ partición de $[a,b]$.

Ejemplo 2.3. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x$. Sea $h=(b-a)/n$ y consideremos la partición $\mathscr{P}=\{a,a+h,a+2h+\cdots+a+(n-1)h,b\}$, entonces $M_i=a+ih$ luego

$$
\begin{aligned}
S(f,\mathscr{P}) &= (a+h)(h)+(a+2h)(h)+\cdots+(a+nh)(h) \\
&= \left(an+(n+1)\frac{(b-a)}{2}\right)(h) \\
&= a(b-a)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)(b-a)^2
\end{aligned}
$$

Si definimos la partición $\mathscr{P}_n := \{a, a+h, ..., a+(n-1)h, b\}$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \mathscr{P}_n) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Con este resultado podemos ir probando en general que si consideramos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^p$ con $p \in \mathbb{N}$ y la partición $\mathscr{X}_n := \{a, a+h, ..., a+(n-1)h, b\}$ con $h = (b-a)/n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \mathscr{X}_n) = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

2.2. La integral superior e inferior

Definición 2.5. (Integral inferior y superior) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. La integral inferior se define por:*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{s(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición de } [a, b]\}$$

y la integral superior de f por: n

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{S(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición de } [a, b]\}$$

Nota 2.2. Las integrales superiores e inferiores, están bien definidas, ya que para una partición $\mathscr{P}$ fija, se tiene que

$$s(f, \mathscr{L}) \leq S(f, \mathscr{P})$$

para todo $\mathscr{L}$ partición. Entonces, el conjunto de las sumas inferiores sobre una partición, es acotado superiormente, luego tiene supremo, lo mismo se concluye con las sumas inferiores, que tienen ínfimo.

Proposición 2.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada entonces,*

(a) Para cualquier partición $\mathscr{P}$ de $[a, b]$ se tiene que

$$s(f, \mathscr{P}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $\mathscr{P}$ de $[a, b]$ tal que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon < s(f, \mathscr{P})$$

(c) Para cualquier partición $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ se tiene que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,\mathscr{P})$$

(d) Para todo $\varepsilon > 0$, exsiste una partición $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ talque

$$S(f,\mathscr{P}) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon$$

(e) Si $m \leq f(x) \leq M$, entonces

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dem. Notemos que los índices (a),(b),(c),(d) es usar la caracterización de supremo e ínfimo. Probemos la última condición. Sea la partición trivial $\mathscr{P} = \{a,b\}$, entonces

$$m(b-a) \leq s(f,\mathscr{P}) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,\mathscr{P}) \leq M(b-a)$$

Probando la proposición. ■

Ejemplo 2.4. Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

Se puede observar que

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = 0 \ \text{ y } \ \overline{\int_0^1} f(x)dx = 1$$

Ejemplo 2.5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función constante dada por$f(x) = c$, entonces

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a)$$

Teorema 2.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in (a,b)$, entonces*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

Revisemos algunos lemas antes de probar el teorema.

Lema 2.1. *Sean A, A', B', B conjuntos acotados tales que $A' \subset A$ y $B' \subset B$, si para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ existe un $a' \in A'$ y un $b' \in B'$ tales que $a \leq a', b' \leq b$, entonces*

$$\sup A' = supA \quad y \quad \inf B' = \inf B$$

Dem. Probaremos solo el supremo de A con A'. Vamos a probar que $\sup A$ es cota superior de A' y también que $\sup A'$ es cota superior de A. Notar que si para todo $a \in A$ se cumple que $a \leq \sup A$ entonces para todo $a' \in A'$ se cumple $a' \leq \sup A$, luego $\sup A' \leq \sup A$. Para el otro lado basta con ver que siempre habrá un a' que es mayor a a luego $\sup A'$ es cota superior y por tanto $\sup A \leq \sup A'$. Probando así que $\sup A = \sup A'$. Con respecto al ínfimo ser argumenta de forma similar. ∎

Lema 2.2. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos no vacío acotados, definimos $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$, entonces $A + B$ es acotado y se satisface*

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad y \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B$$

Dem. El acotamiento de A, B se deduce directamente de que A, B es acotado. Sean $S_a := \sup A, S_b := \sup B$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $a \in A, b \in B$ talque

$$S_a - \varepsilon/2 < a \leq S_a \quad \text{y} \quad S_b - \varepsilon/2 < b \leq S_b$$

entonces $S_a + S_b - \varepsilon < a + b \leq S_a + S_b$. Probando así la primera igualdad. Para la segunda el proceso es análogo, así demostramos que la suma es invariante con respecto al supremo, de forma análoga se concluye cpn el ínfimo. ∎

Dem. (Teorema 2.2) Sea $\mathscr{P}$ una partición de $[a, b]$ y consideremos la partición $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup \{c\}$. Entonces por la afinidad de particiones se cumple que

$$s(f, \mathscr{P}) \leq s(f, \mathscr{P}') \quad \text{y} \quad S(f, \mathscr{P}') \leq S(f, \mathscr{P})$$

Notemos que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición}\} = \sup\{s(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición tal que } c \in \mathscr{P}\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición}\} = \inf\{S(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición tal que } c \in \mathscr{P}\}$$

Por el lema 2.1. Aplicando el lema 2.2 para separar los supremos, vemos que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,\mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición tal que } c \in \mathscr{P}\}$$

$$= \sup\{s(f,\mathscr{P}_-) + s(f,\mathscr{P}_+) : \mathscr{P}_- \text{ partición de } [a,c], \mathscr{P}_+ \text{ partición de } [c,b]\}$$

$$= \sup\{s(f,\mathscr{P}_-)\mathscr{P}_- \text{ partición}\} + \sup\{(f,\mathscr{P}_+), \mathscr{P}_+ \text{ partición}\}$$

$$= \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$

Concluyendo con la integral inferior. Para la integral superior es de una manera análoga. Probando así el teorema ■

Ejemplo 2.6. Sea : $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1/2) \\ 5 & x = 1/2 \\ 1 & x \in (1/2,1] \end{cases}$$

Determinemos la integral superior e inferior.

- **Integral Superior.** Sea $\varepsilon > 0$, sea la partición $\mathscr{P} = \left\{0, \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, 1\right\}$, luego

  $$S(f,\mathscr{P}) = 1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + 5\varepsilon + 1\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 + 4\varepsilon$$

  Luego, paa cualquier $\varepsilon > 0$, siempre podemos tomar $\frac{1}{2}$, en el segundo intervalo, de forma que

  $$1 = \underline{\int_0^1} f(x)dx = 1 \leq S(f,\mathscr{L}) = 1 + 4\varepsilon$$

  Como el valor de ε es arbitrario, tenemos que

  $$\inf\{S(f,\mathscr{L}) : \mathscr{L} \text{ partición}\} = 1$$

  Por lo tanto

  $$\overline{\int_0^1} f(x)dx = 1$$

- **Integral Inferior.** Sea $\varepsilon > 0$, tomando la misma partición anterior, se tiene que

  $$s(f,\mathscr{P}) = 1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \varepsilon + 1\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1$$

Tomando cualquier partición, similiar a $\mathscr{P}$, determinado por $\varepsilon > 0$, en el segundo intervalo generado, está el $\frac{1}{2}$, por lo que $s(f, \mathscr{P}) = 1$, luego

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = 1$$

Por lo tanto podemos concluir que

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = \overline{\int_0^1} f(x)dx = 1$$

Esto nos dice que la aproximación por abajo es igual a la aproximación por arriba, por lo tanto, el área bajo la curva es 1. También nos dice que un punto de la gráfica, no necesariamente influye en el área, perfectamente en $\frac{1}{2}$, estár indefinido, y aun así se puede determinar la integral superior e inferior.

Ejemplo 2.7. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ talque $f(x) = c$ excepto en el conjunto $\{r_0, r_1, \ldots, r_n\} \subset [0,1]$. donde f asume otros valores. Entonces

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx = \overline{\int_0^1} f(x)dx = c$$

Para poder verlo basta separar la integral en varías sumas, luego usar el argumento del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.8. Diremos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada si existe una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ y $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{R}$ talque $f|_{(t_{i-1},t_i)} = c_i$, así, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada tenemos que la integral superior e inferior coinciden. Es más, se obtiene la siguiente fórmula:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1})$$

Revisemos algunas propiedades importantes de las integrable superiores e inferiores.

Teorema 2.3. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas. Entonces*

(a) las siguientes desigualdades se satisfacen:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))dx \leq \overline{\int_a^b} (f(x) + g(x))dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

(b) Si $c > 0$, entonces

$$\underline{\int_a^b} cf(x)dx = c\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad y \quad \overline{\int_a^b} cf(x)dx = c\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

(c) Si $c < 0$, entonces

$$\underline{\int_a^b} cf(x)dx = c\overline{\int_a^b} f(x)dx \quad y \quad \overline{\int_a^b} cf(x)dx = c\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

(d) Si $f(x) \leq g(x)$, entonces

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx \quad y \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

Dem.

(a) Recordamos que dadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones acotadas, se cumple que

$$\text{ínf}(f+g) \geq \text{ínf}\, f + \text{ínf}\, g$$

entonces se satisface que $m_i(f+g) \geq m_i(f) + m_i(g)$. Luego

$$s(f, \mathscr{P}) + s(g, \mathscr{L}) \leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))dx$$

En general, dado dos particiones $\mathscr{P}$ y $\mathscr{L}$ se tiene que

$$s(f, \mathscr{P}) + s(g, \mathscr{L} \leq s(f, \mathscr{P} \cup \mathscr{L}) + s(g, \mathscr{P} \cup \mathscr{L}) \leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))dx$$

Por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))dx$$

De forma similar se concluye con la integral superior, luego

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} g(x)dx \leq \underline{\int_a^b} (f(x) + g(x))dx \leq \overline{\int_a^b} (f(x) + g(x))dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

(b) Para $c > 0$ basta con analizar el conjunto $A := \{s(f, \mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ partición}\}$ donde $s(cf, \mathscr{P}) = c \cdot s(f, \mathscr{P})$, entonces

$$\underline{\int_a^b} cf(x) = \sup(cA) = c \cdot \sup A = c \cdot \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

(c) Si $c < 0$ entonces $s(cf, \mathscr{P}) = c \cdot S(f, \mathscr{P})$ de esta forma $\sup\{s(cf, \mathscr{P})\} = c \cdot \text{ínf}\{S(f, \mathscr{P})\}$. Por tanto

$$\underline{\int_a^b} cf(x)dx = c\overline{\int_a^b} f(x)dx \ \text{ y } \ \overline{\int_a^b} cf(x)dx = c\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

(d) Notar que para todo $x \in [a, b]$ se tienen que $f(x) \leq g(x)$, entonces $m_i(f) \leq m_i(g)$ y $M_i(f) \leq M_i(g)$. Luego, consideremos una partición $\mathscr{P}$, tenemos que

$$s(f, \mathscr{P}) \leq s(g, \mathscr{P}) \ \text{ y } \ S(f, \mathscr{P}) \leq S(g, \mathscr{P})$$

Y por lo tanto

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx \ \text{ y } \ \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

Probando el teorema. ■

Corolario 2.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada talque para todo $x \in [a, b]$ se tiene que $f(x) \geq 0$ entonces*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \geq 0$$

Dem. Notamos que 0 es cota inferior de f. Entonces

$$0(b - a) = 0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

■

2.3. Funciones Integrables

Hemos visto que hay funciones acotadas donde las integrales inferiores coinciden con las superiores, y que este es el valor del área y por tanto, el valor de la integral de la función en donde está definido. Ahora definiremos de forma formal la integral de una función acotada y de las propiedades de estas.

Definición 2.6. (Integral) *Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable si y sólo si*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Si ocurre tal caso, denotaremos la integral de f por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 2.9. Algunos ejemplos de funciones integrable:

- La función constante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ es integrable con valor
$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$
- Las funciónes escalonadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrable con integral
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(t_i - t_{i-1})$$
- Las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ constantes excepto en un número finito de puntos son integrables.

Ejemplo 2.10. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

Podemos verificar que f no es integrable. En efecto, recordemos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = 1 \quad \text{y} \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0$$

y evidentemente son distintos. Por tanto, no es integrable.

Definición 2.7. (Oscilación) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. La oscilación de f en el conjunto $X \subset [a,b]$ se define por*

$$w(f,X) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\}$$

Si $\mathscr{P}$ es una partición de $[a,b]$, anotaremos por $w_i = M_i - m_i$ la oscilación de f en $[t_{i-1}, t_i]$.

Lema 2.3. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos acotados tales que para todo $s \in A$ y $S \in B$ se tiene que $s \leq S$, entonces $\sup A = \text{ínf}\, B$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existen $s_1 \in A$ y $S_1 \in B$ tales que $S_1 - s_1 < \varepsilon$*

Dem. Supongamos que $S := \sup A = \text{ínf}\, B$, sea $\varepsilon > 0$, entonces existen un $s_1 \in A, S_1 \in B$ talque

$$S - \frac{\varepsilon}{2} < s_1 \leq S \leq S_1 \leq S + \frac{\varepsilon}{2}$$

por la caracterización del supremo e ínfimo. Entonces

$$|S_1 - s_1| = |S_1 - S + S - s_1| \leq |S_1 - S| + |S - s_1| < \varepsilon$$

Luego $S_1 - s_1 < \varepsilon$.

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$, existen $s_1 \in A, S_1 \in B$ tales que $S_1 - s_1 < \varepsilon$, probemos que el supremo de A es igual al ínfimo de B. Por hipótesis tenemos que para todo $S \in B$ fijo, se tiene que para todo $s \in A$ es talque $s \leq S$, por lo que S es cota superior y entonces $\sup A \leq S$, esto se puede hacer para todo $S \in B$, luego es cota inferior de B, y entonces

$$\sup A \leq \text{ínf } B$$

Ahora, podemos ver que para todo $s_1 \in A, S_1 \in B$ se tiene

$$0 \leq \text{ínf } B - \sup A \leq S_1 - s_1$$

Entonces, se tiene que para todo ε

$$0 \leq \text{ínf } B - \sup A \leq S_1 - s_1 \leq \varepsilon$$

Luego se tiene que necesariamente

$$\text{ínf } B - \sup A = 0$$

Por lo tanto $\sup A = \text{ínf } B$. Probando el lema. ■

Teorema 2.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotadas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalente:*

(a) La función f es integrable

(b) Para todo $\varepsilon > 0$, existen particiones $\mathscr{P}, \mathscr{L}$ de $[a, b]$ talque

$$S(f, \mathscr{L}) - s(f, \mathscr{P}) < \varepsilon$$

(c) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mathscr{P}$ partición de $[a, b]$ talque

$$S(f, \mathscr{P}) - s(f, \mathscr{P}) < \varepsilon$$

(d) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mathscr{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ talque

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$$

Dem. La equivalencia (a),(b) es aplicar el lema 2.3, en particular, se toma el conjunto B como las sumas superiores, dadas por una partición, y A las sumas inferiores, dadas por una partición, es claro que para todo elemento de B, es mayor a todo elemento de A, por tanto, ocurre (a) si y sólo si se cumple (b).

También se puede ver que la equivalencia (c),(d) es evidente por definición de oscilación.

La equivalencia (b),(c) es evidente que (c) implica (b), por otro lado, si se cunple (b), entonces se puede tomar $\mathscr{P}_0 := \mathscr{P} \cup \mathscr{L}$, luego se concluye la condición (c). Probando que las cuatros afirmaciones son equivalente. ■

Ejemplo 2.11. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas que difieren a lo más un subconjunto de finitos elementos de $[a,b]$. Entonces f es integrable si y sólo si g es integrable. En efecto, la función $f - g$ es igual a cero, excepto en un número finito de puntos, por lo tanto

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = 0$$

De este modo

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) + (f(x) - g(x))dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 2.5. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables. Entonces*

(a) Si $a < c < b$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(b) Si $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

(c) La función $f + g$ es integrable y

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(d) $f(x) \leq g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(e) La función $f \cdot g$ es integrable.

(f) La función $|f(x)|$ es integrable y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Lema 2.4. (Desigualdad de Schwarz) *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Entonces*

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

Dem. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos $(f(x)+\lambda g(x))^2 \geq 0$ tenemos que $\int (f(x)+\lambda g(x))^2 dx \geq 0$, por lo tanto

$$\lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f^2(x) \geq 0$$

Como tenemos una parabola positiva, tenemos que el discriminante es menor o igual que 0. Luego

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right) \leq 0$$

Obteniendo el resultado. ■

Notación. Utilizaremos la siguientes convenciones

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad y \quad -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

Claramente tiene sentido cada notación ya que la integral de f sobre un punto es algo que no tiene área, por lo que nulo, y si $f : [b,a] \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $-f : [a,b] \to \mathbb{R}$, también integrable y entonces se puede invertir los límites de la integral agregando un menos.

Teorema 2.6. *Toda función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona es integrable.*

Dem. Sin pérdida de generalidad, supongamos que f es no decreceinte. Sea $\varepsilon > 0$ y $\mathscr{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ talque para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$|t_i - t_{i-1}| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$$

Esto se puede hacer ya que estamos tomando una partición conveniente. Como la función es no decreciente, tenemos que para todo $i = 0, \ldots, n$, $w_i = f(t_i) - f(t_{i-1})$. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \sum_{i=1}^{n} w_i = \varepsilon$$

O en otras palabras, f es integrable. ■

Teorema 2.7. *Toda función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable.*

Nota 2.1. Decimos que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (que depende de ε), talque para todo $x, y \in X$ si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ahora, si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua sobre un conjunto compacto (conjuntos de la forma $[a,b]$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$), entonces f es uniformemente continua. Este es un resultado que no probaremos, pero que tomaremos por válido.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, como la función es uniformemente continua al ser continua en $[a,b]$, existe un $\delta > 0$ talque si $x, y \in [a,b]$ con $|x-y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Luego con la oscilación, podemos ver que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon$$

Es decir, f es integrable. ■

Nota 2.2. Por tanto, toda función continua definida en un conjunto compacto, es integrable, y esto tiene sentido, ya que al ser continua sobre un compacto, necesariamente está acotada y la gráfica de f, genera un área fácil conveniente para ver que existe el área y por ende, la integral.

Ejemplo 2.12. La función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Es continua ya que

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

Teorema 2.8. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada con un número finito de discontinuidades, entonces es integrable.*

Dem. Denotemos por $\{t_1, ..., t_n\}$ los puntos de discontinuidad de f. Notemos que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^{t_1}} f(x)dx + ... + \overline{\int_{t_{n-1}}^b} f(x)dx$$

Por lo tanto, basta probar que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que

$$\overline{\int_{t-i}^{t_i}} f(x)dx = \underline{\int_{t-i}^{t_i}} f(x)dx$$

Recordemos que la función f es continua en (t_{i-1}, t_i). Sea $\varepsilon > 0$. Como las funciones continuas definidas en intervalos cerrados son integrables, existe $\delta > 0$ y una partición $\mathscr{P} = \{q_1 = t_{i-1} + \delta, ..., q_m = t_i - \delta\}$ talque $\sum_{j=1}^{m} w_j(q_{j+1} - q_j) < \varepsilon/4$. Notemos que la siguiente constante es independiente del valor de ε,

$$K := \max\{w(f, [t_{i-1}, q_1]), w(f, [q_m, t_i])\} = \max\left\{|f(t_i) - \lim_{x \to t-i-1} f(x)|, |f(t_i) - \lim_{x \to t-i} f(x)|\right\}.$$

Sean $q_o = t_{i-1}$ y $q_{m+1} = t_i$. Considerando la partición $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup \{q_o, q_{m+1}\}$. Tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m} w_j(q_j - q_{j+1}) > \frac{\varepsilon}{4} + 2K\varepsilon$$

Como la constante K no depende de ε, podemos hacer este valor tender a cero, obteniendo el resultado. ■

Ejemplo 2.13. (Compuesta de funciones integrable no integrable) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función definida en en el ejemplo 2.12 y sea $g : [0, 1] \to [0, 1]$ la función definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, 1] \end{cases}$$

Ambas funciones son integrable, sin embargo la función $g \circ f$ no es integrable.

2.4. La definición de Riemann

Estudiaremos la integral de Riemann, la cual es una modificación de la integral que hemos definido a partir de las sumas de Darboux.

Definición 2.8. (Partición marcada) *Sea $\mathscr{P} = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $\mathscr{E} = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset [a, b]$ un conjunto tal que $e_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Una partición marcada de $[a, b]$ es un par $\mathscr{P}^* = (\mathscr{P}, \mathscr{E})$. Definimos la suma de Riemann de f respecto a $\mathscr{P}^*$ por:*

$$\sum(f, \mathscr{P}^*) := \sum_{i=1}^{n} f(e_i)(t_i - t_{i-1})$$

Con respecto a las sumas superiores e inferiores, es evidente que

$$s(f,\mathscr{P}) \leq \sum(f,\mathscr{P}^*) \leq S(f,\mathscr{P})$$

Definición 2.9. (Norma de una partición) Sea $\mathscr{P} = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$. La norma de la partición se define por $|\mathscr{P}| = \sup\{|t_i - t_{i-1}| : t_i \in \mathscr{P}\}$.

Proposición 2.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathscr{P}^*|\to 0} \sum(f,\mathscr{P}^*)$$

Dem. Si f es integrable, entonces podemos determinar su valor, digamos que

$$I := \int_a^b f(x)dx$$

Luego, para $\varepsilon > 0$ existe una partición $\mathscr{P}$ talque

$$S(f,\mathscr{P}) - s(f,\mathscr{P}) < \varepsilon$$

Luego, tomando una partición marcada $(\mathscr{P},\mathscr{E})$, donde $\mathscr{E}$ es cualquier colección de puntos, entonces

$$\left|\sum(f,\mathscr{P}^*) - I\right| \leq |S(f,\mathscr{P}) - s(f,\mathscr{P})| < \varepsilon$$

Ya que

$$s(f,\mathscr{P}) \leq I \leq S(f,\mathscr{P})$$

Entonces

$$\left|\sum(f,\mathscr{P}^*) - I\right| < \varepsilon$$

Tomando $|\mathscr{P}^*| \to 0$, se puede ver que

$$\left|\lim_{|\mathscr{P}^*|\to 0} \sum(f,\mathscr{P}^*) - I\right| < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, como I, ε son independientes de la partición, es más, si la norma de la partición tiende a 0, entonces su distancia con I, es menor a la primera partición marcada que tomamos y luego es menor a ε. Luego

$$\lim_{|\mathscr{P}^*|\to 0} \sum(f,\mathscr{P}^*) = I$$

■

Ejemplo 2.14. (La integral como promedio de una función) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uan función integrable y sea $\mathscr{P} = \{a, a+h, \ldots, b\}$ una partición de $[a.b]$ donde $h = (b-a)/n$. Sea $\mathscr{E} = \{a+h, \ldots, b\}$ y consideremos la partición marcada $\mathscr{P}^* = (\mathscr{P}, \mathscr{E})$. La media arimética de los números $\{f(a+h), \ldots, f(b)\}$ será denotada por

$$M(f, n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a+ih).$$

Definimos el valor medio de f en $[a, b]$ por

$$M(f) := \lim_{n\to\infty} M(f, n).$$

Notemos que

$$M(f, n) = \frac{1}{b-a} \sum (f, \mathscr{P}^*).$$

Por lo tanto

$$M(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum (f, \mathscr{P}^*) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Es decir, el número

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

puede entenderse como el promedio de la función f en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 2.15. (Cálculo de límites utilizando integración) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Como es integrable puesto que es continua, utilizando la definición de Riemann, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x)dx$$

Si $a = 0$ y $b = 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

Por ejemplo, si consideramos $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$ entonces $f(k/n)=k^2/n^2$, luego

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}$$

De esta forma

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+...+\frac{n^2}{n^2}\right) = 1/3$$

Esto nos permite determinar límites mas interesantes.

2.5. Teorema Fundamental del Cálculo

Definición 2.10. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable. La función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

se denomina integral definida de f.

Lema 2.5. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada integrable, la integral definida de f es una función continua.*

Dem. Como la función f es integrable es acotada. Es decir, existe $K\geq 0$ talque $|f(t)|\leq K$ para todo $t\in[a,b]$. Así dado $x,y\in[a,b]$ se tiene que

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq K\int_x^y dt = K|y-x|$$

En particular, la función F es continua en el intervalo $[a,b]$. De hecho, la función F es Lipschitz ■

Teorema 2.9. (Teorema Fundamental del Cálculo I) *Sea : $[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable. Si f es continua en el punto $c\in[a,b]$, entonces la función $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por:*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

es diferenciable en el punto c y además $F'(c) = f(c)$

Dem. Como la función f es continua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $t \in [a,b]$ y $|t-c| < \delta$ entonces $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Luego si $0 < h < \delta$ y $c + h \in [a,b]$ tenemos que

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h} - f(c)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h} f(t)dt - hf(c)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h} (f(t)-f(c))dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_c^{c+h} |f(t)-f(c)|dt \leq \varepsilon$$

Luego $F'_+(c) = f(c)$. De modo análogo se prueba $F'_-(c) = f(c)$ y por lo tanto $F'(c) = f(c)$. ■

Podemos interpretar la derivada de la integral definida en un punto c como

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(t)dt = f(c)$$

Corolario 2.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces existe $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable talque $F' = f$.*

Dem. Basta con considerar

$$F(x) := \int_a^x f(x)dx$$

Luego por el primer teorema fundamental del cálculo, F es direfenciable en todo $[a,b]$ y $F' = f$.

Definición 2.11. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función tal que para todo $x \in (a,b)$ se tiene que $F'(x) = f(x)$, diremos que F es una primitiva de f.*

Nota.

- Podemos encontrar funciones que sean integrable pero no poseen primitivas
- Podemos encontrar funciones discontinua con primitiva
- Podemos encontrar funciones no integrable que posean primitiva

Notemos que las primitivas de una función, no es única, ya que si F es primitiva de f, entonces podemos tomar $F + C$ con $C \in \mathbb{R}$ constante, luego

$$(F + C)' = F' + 0 = f$$

Teorema 2.10. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y sean $F_1, F_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos primitivas de f, entonces existe $C \in \mathbb{R}$ talque*

$$F_1(x) - F_2(x) = C$$

Dem. Sea $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

Derivando obtenemos que

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

Es decir que G es una constante $C \in \mathbb{R}$ Probando el teorema. ■

Teorema 2.11. (Teorema Fundamental del Cálculo II) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable que posee una primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dem. Para cualquier partición $\mathscr{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a, b]$, por el teorema del valor medio tenemos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(t_i) - F(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

donde $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Si

$$m_i' = \text{ínf}\, F'(x) : x \in [t_{i-1}, t_i] \quad \text{y} \quad M_i' = \sup F'(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]$$

tenemos que $m_i' \leq F'(\xi_i) \leq M_i'$. Por lo tanto

$$s(F', \mathscr{P}) \leq F(b) - F(a) \leq S(F', \mathscr{P})$$

Luego

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$$

■

Por lo tanto, podemos determinar la integral de una función, encontrando una primitiva y restar. Este es un resultado muy útil, ya que es más fácil encontrar primitivas que determinar supremos o ínfimos de sumas superiores e inferiores.

Ejemplo 2.16. Determinemos la derivada de la función $f : [3, 10] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) := (1 + \sin^2 x)^{\int_2^x \sqrt{1+t^3}dt}$$

Por propiedades de derivadas, tenemos que

$$f'(x) = (1 + \sin^2 x)^{\int_2^x \sqrt{1+t^3}dt}((\sqrt{1 + x^3})ln(1 + \sin^2 x) + \int_2^x \sqrt{1 + t^3}dt\frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}$$

Ejemplo 2.17. Sea

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_0^{t^2} e^{u^2} du \right) dt$$

Encontremos la segunda derivada de F. La primera derivada es de la forma

$$F'(x) = \int_0^{x^2} e^{u^2} du$$

Para la segunda derivada notemos que si $f(x) = \int_0^x e^{u^2} du$ y $g(x) = x^2$, luego $f(g(x)) = F'(x)$, luego $F''(x) = f'(g(x))g'(x)$, entonces

$$F''(x) = 2xe^{x^4}$$

Ejemplo 2.18. Sea $x > 0$ y consideremos la función definida por:

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{1 + t^2} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1 + t^2}$$

Probemos que F es constante y determinemos su valor. Sea

$$H(x) := \int_1^x \frac{dt}{1 + t^2}$$

Luego

$$H(1/x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1 + t^2}$$

Entonces $F(x) = H(x) + H(1/x)$. Para demostrar que F es constante, debemos probar que su derivada es nula. Y en efecto

$$F'(x) = H'(x) - H'(1/x)\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Reemplazando obtenemos que

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(1/x)^2}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Por tanto $F(x) = K$, para algún $K \in K$, si $F(1) = 0 - 0 = K$, entonces $F(x) = 0$.

3. Técnicas de Integración

En esta sección estudiaremos distintas técnicas para encontrar primitivas. Estudiaremos la integración por partes, el cambio de variable, sustituciones y fracciones parciales.

3.1. Integración por Parte y Cambio de Variable

Teorema 3.1. (Integración por partes) *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas con derivadas integrables, entonces*

$$\int_a^b f(x)g'(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)$$

Dem. Basta demostrar que $f(x)g(x)$ es una primitiva de $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$. Y en efecto

$$\int_a^b (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$$

Despejando de forma conveniente obtenemos el resultado. ■

Notación. Sea f integrable, usaremos

$$\int f(x)dx$$

para denotar la integral indefinida y para denotar la primitiva de f.

Ejemplo 3.1. Determinemos

$$\int x\sin(x)dx$$

Sean $f(x) = x$ y $g'(x) = \sin(x)$, luego

$$\int x\sin(x)dx = -\cos(x)x + \int cos(x)dx = -\cos(x)x + \sin(x) + C$$

Ejemplo 3.2. Determinemos

$$\int \log(x)dx$$

Sean $f(x) = \ln(x)$ y $g'(x) = 1$, entonces

$$\int \log(x)dx = \log(x)x - \int dx = \log(x)x - x + C$$

Ejemplo 3.3. Determinemos

$$\int x^2 e^x dx$$

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$, entonces

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2\int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4. Determinemos

$$\int \arctan(x) dx$$

Sean $g'(x) = x$ y $f(x) = \arctan(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= \arctan(x)x - \int \frac{x}{1+x^2} \\ &= \arctan(x)x - \frac{\ln|1+x^2|}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. Determinemos

$$\int 3^x dx$$

Sean $g'(x) = 1$ y $f(x) = \frac{3^x}{\ln(3)}$. De este modo

$$\begin{aligned} \int 3^x dx &= \frac{3^x x}{\ln(3)} - \int \frac{3^x}{\log(3)} dx \\ &= \frac{3^x x}{\log(3)} - \frac{3^x}{\log^2(3)} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3.6. Determinemos

$$\int \arctan(x) dx$$

Sean $f(x) = \arctan(x), g'(x) = 1$, entonces $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = x$, luego

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= x \arctan(x) \\ &= -\frac{\log(1+x^2)}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7. Determinemos

$$\int e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}dx$$

Consideremos $f(x) = e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}$, entonces $f'(x) = \frac{e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}$, luego

$$\begin{aligned}
\int e^{arcsen(x)}dx &= \int \frac{e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}dx \\
&= e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}\sqrt{1-x^2} + \int \frac{e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}xdx \\
&= e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}\sqrt{1-x^2} + e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}x - \int e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}
\end{aligned}$$

Digamos que

$$I := \int e^{arcsen(x)}dx$$

entonces

$$2I = e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}\sqrt{1-x^2} + e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}x$$

Por lo tanto

$$I = \int e^{arcsen(x)}dx = \frac{1}{2}e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}\sqrt{1-x^2} + e^{\operatorname{arc\,sen}(x)}x + C$$

Teorema 3.2. (Cambio de variable) *Sean $f, [a,b] \to \mathbb{R}$ una funcion continua y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ difereciable con derivada integrable talque $g([c,d]) \subset [a,b]$. Entonces*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Dem. Sabemos que f al ser continua en un intervalo compacto tenemos que es integrable, además $f \circ g$ está bien definida. Sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ la primitiva de f, entonces por el TFC

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(c)) - F(g(d))$$

Sea $F(g(x)) : [c,d] \to \mathbb{R}$, como F es una primtiva entonces es diferenciable, en efecto

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

encontrando una primitiva de $f(g(x))g'(x)$, luego por el TFC

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$$

Por tanto

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(c)) - F(g(d))$$

■

Observación 3.1. Para el cálculo de primitiva simplificamos expresiones, si $u = g(x)$ entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

donde $du = g'(x)dx$.

Ejemplo 3.8. Determinemos

$$\int \sec x dx$$

Notemos que

$$\sec x = \frac{\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tg} x}$$

consideremos $u = \sec x + \operatorname{tg} x$, entonces $du = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)dx$, luego

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \log|u| + C \\ &= \log|\sec x + \operatorname{tg} x| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9. Determinemos

$$\int \sqrt{2x+1}dx$$

Consideremos $u = 2x + 1$ entonces $du = 2dx$, luego

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x+1}dx = \int \sqrt{u}du &= \frac{2\sqrt{u^3}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{(2x+1)^3}}{3} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3.10. Determinemos

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

Sea $u = 1 - 4x^2$ entonces $du = -8xdx$. Así

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx &= -\frac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= -\frac{\sqrt{1-4x^2}}{4} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 3.11. Determinemos

$$\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Notemos que $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{-(x-1)^2+1}$. Sea $u = x - 1$, entonces $du = dx$. Luego

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} &= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \operatorname{arc\,sen} u + C \\ &= \operatorname{arc\,sen}(x-1) + C\end{aligned}$$

Ejemplo 3.12. Determinemos

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+2}$$

Sea $u = x + \frac{1}{2}$, entonces $du = dx$. Así

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{4x^2+4x+2} &= \int \frac{du}{4u^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\arctan(2u) + C \\ &= \frac{1}{2}\arctan(2x+1) + C\end{aligned}$$

Ejemplo 3.13. Determinemos

$$\int \sin^m \sin^n$$

donde $m, n \in \mathbb{N}$. Consideremos tres casos

- n **impar.** Si $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, entonces

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \operatorname{sen}^m x(1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x dx$$

Tomando $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos x dx$, luego

$$\int u^m (1-u)^k du$$

que es determinable.

- m **impar.** Si la potencia de $\operatorname{sen} x$ es impar se procede de forma análoga.
- $n, , m$ **pares.** Si las potencias de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$ son pares, entonces consideremos las siguientes identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 x)$$

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$$

Luego llegamos a cosas que conocemos.

Ejemplo 3.14. Determinemos

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))\frac{1}{2}(1 + \cos(2x))dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 x)dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - \frac{1}{2}(1 + \cos(4x))dx \\
&= \frac{1}{4}\left(x - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right) + C
\end{aligned}$$

3.2. Sustitución trigonométrica

A partir de algunas expresiones, podremos usar la trigonometría para encontrar expresiones convenientes.

Expresión	$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\sqrt{a^2 + x^2}$	$\sqrt{x^2 - a^2}$
Sustitución	$x = a \operatorname{sen} \beta$	$x = a \operatorname{tg} \beta$	$x = a \sec \theta$
Identidad	$1 - \operatorname{sen}^2 = \cos^2$	$1 + \operatorname{tg}^2 = \sec^2$	$\sec^2 - 1 = \operatorname{tg}^2$

donde $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Ejemplo 3.15. Determinemos una primitiva para

$$\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}$$

Sea $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, entonces $dx = 3 \cos \theta d\theta$, luego

$$\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \theta$$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx &= \int \frac{3 \cos \theta}{9 \operatorname{sen}^2 \theta} 3 \cos \theta d\theta \\
&= \int \cot^2 \theta d\theta \\
&= -\cot \theta - \theta + C
\end{aligned}$$

Notemos que $\operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} = \theta$, entonces $\cot \theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$, y luego

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{3} + C$$

3.3. Fracciones parciales

Se desarrollará un método para encontrar primitivas de funciones racionales, es decir, funciones de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P, Q polinomios reales.

Antes de introducir el método es imporante tener en cuenta que $\deg(p) < \deg(q)$, en caso de no ser así se puede utilizar la división de polinomios, por ejemplo: Si $\deg(P) \geq \deg(Q)$ usando división de polinomios tenemos que existe dos polinomios $S(x) y K(x)$ tales que

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

donde necesariamente $\deg(K) < \deg(Q)$

Dicho esto se pueden presentar 4 casos importantes donde en cada una actuan las fracciones parciales.

Caso 1. El polinomio $Q(x)$ puede escribirse como el producto d factores lineales sin repetición

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(\dots)(a_nx + b_n)$$

En este caso es posible escribir

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Luego

$$\int \frac{A}{ax + b}dx = \frac{A}{a}\log|ax + b| + C$$

es posible encontrar la primitiva de R

Ejemplo 3.16. Determinemos

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}dx$$

Notemos que

$$2x^3 + x^2 - 2x = x(2x - 1)(x + 2)$$

entonces es posible determinar $A, B, C \in \mathbb{R}$ mediante un sistema de ecuaciones

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

obteniendo un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C =& 1 \\ 3A + 2B - C =& 2 \\ 2A =& 1 \end{aligned}$$

luego $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{5}, C = \frac{3}{20}$, y por tanto

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}dx = \frac{1}{2}\log|x| + \frac{1}{10}\log|2x - 1| + \frac{3}{20}\log|x + 2| + C$$

Caso 2. El polinomio $Q(x)$ puede escribirse como factores lineales donde algunos se repiten

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r} + ... + \frac{A_{k+1}}{a_ix + b_i} + \cdots + \frac{A_{k+s}}{(a_ix + b_i)^s}$$

Ejemplo 3.17. Determinemos

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$$

Vemos que el numerador es mayor al denominador, entonces necesitamos usar la división de polinomios

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Luego

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x^2 - 1)(x - 1) = (x + 1)(x - 1)^2$$

Entonces, usando fracciones parciales obtenemos

$$\frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}$$

Y así $A = 1, B = 2, C = -1$, luego

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|x + 1| + 2(x - 1) - \log|x + 1|$$

Caso 3. La factorización del polinomio $Q(x)$ contiene factores cuadráticos, si ninguno se repite, entonces

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \cdots + \frac{A_r}{a_rx + b_r} + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \cdots + \frac{Cx + D}{dx^2 + ex + f}$$

Ejemplo 3.18. Determinar

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Notemos que $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, entonces

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Luego $A = 1, B = 1, C = -1$, por tanto

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{1}{x} + \int \frac{x}{x^2+4} - \int \frac{1}{x^2+4} = \log|x| + \frac{1}{2}\log|x^2+4| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Caso 4. El polinomio $Q(x)$ posee factores cuadráticos repetidos. Supongamos que el factor $ax^2 + bx + c$ es irreducible y se repite r-veces en la factorización de $Q(x)$. En tal caso la descomposición de la función racional es de la siguiente forma

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \cdots + \frac{A_r x + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

Ejemplo 3.19. Determinemos

$$\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} dx$$

Por fracciones parciales

$$\frac{1 - x + 2x^2 - 3x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$$

entonces $A = 1, B = -1, C = -1, D = 1, E = 0$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} &= \int \frac{1}{x} - \int \frac{x+1}{x^2+1} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} \\ &= \log|x| - \frac{1}{2}\log|x^2+1| - \arctan x - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2} + C\end{aligned}$$

Teorema 3.3. (Fórmula de Taylor con resto integral) *Sea $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ una función que posee derivada de orden n+1 y estás derivada son integrables. Entonces*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) + f''(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^{n+1}\left(\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th)dt\right)$$

Dem. Notemos que si $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función que posee derivada de orden $n+1$ y esta derivada es integralbe. Entonces

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{\phi''(0)}{2} + \cdots + \frac{\phi[(n)(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)dt$$

para probar esto usaremos inducción.

- **Caso $n = 1$.** Queremos probar
$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \int_0^1 (1-t)\phi''(t)dt$$
Supongamos que ϕ posee una segunda derivada integrable, notemos que si $u(t) = 1 - t$ y $v(t) = \phi'(t)$, entonces
$$\int_0^1 \phi'(t)dt = -\int_0^1 u'(t)v(t)dt$$
Integrando por partes
$$\int -0^1\phi(t)dt = (u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 u(t)v'(t)dt = \phi'(0) + \int_0^1 (1-t)\phi''(t)dt$$
por TFC
$$\phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(t)dt$$
Luego
$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \int_0^1 (1-t)\phi''(t)dt$$
Siendo válido para $n = 1$.

- **Paso Inductivo.** Supongamos que la fórmula es válido ahora para n y deduscamos que vale para $n+1$. Supongamos que $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función que posee derivada de orden $n+2$ con derivada $n+2$ integrable. Luego
$$\phi(1) = \phi(o) + \cdots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{n+1}(t)dt$$
Notemos que si $u(t) = \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ y $v(t) = \phi^{n+1}(t)$, entonces
$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)dt = -\int_0^1 u'(t)v(t)dt = -(u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 u(t)v'(t)dt)$$

Y Por tanto

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)dt = \frac{\phi^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{(n+1)}}{(n+1)!)}\phi^{(n+2)}(t)dt$$

Concluyendo para n en general.

Probando por inducción. Para concluir el teorema basta definir

$$\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \phi(t) := f(a+th)$$

donde $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ y además $\phi^{(i)}(0) = f^i(a)h^i$. Obteniendo la identidad del enunciado. ■

4. Aplicaciones de la integral

4.1. Logaritmo y exponencial

En cálculo I definimos la función exponencial, pasando de naturales, racionales hasta los reales, luego vimos que está función es biyectiva con inversa definida como logaritmo. Definiremos de otra forma la función logartimo, como una integral definida.

Definición 4.1. (Logaritmo) *Se define la función* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *como:*

$$\log(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Comprobemos algunas características conocidas de logaritmo.

Proposición 4.1. *La función logaritmo satisface las siguientes condiciones*

(a) $\log(1) = 0$

(b) Si $x \in (0,1)$ *entonces* $\log(x) < 0$

(c) La función $\log$*, es una función creciente y cóncava*

(d) La función $\log$ *es infinitamente diferenciable*

Dem.

(a) Por definición tenemos

$$\log(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

(b) Sea $x \in (0,1)$ entonces

$$\log(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t} < 0$$

Luego $\log(x) < 0$.

(c) Notemos que el logaritmo es la primitiva, con primera derivada

$$(\log(x))' = \frac{1}{x}$$

Como $x > 0$ tenemos que la derivada de log es positiva y por tanto es creciente, si derivamos nuevamente, obtenemos

$$(\log(x))'' = -\frac{1}{x^2}$$

Que es negativo por tanto es cóncavo en todo $\mathbb{R}^+$.

(d) Con ver la primera derivada es facil ver que es infinitamente diferenciable en todo $\mathbb{R}^+$. En particular

$$\log \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$$

Demostrando la proposición. ■

Por lo tanto, la función logaritmo es creciente, y cada vez crece menos. Revisemos propiedades del logaritmo.

Teorema 4.1. *Si $x, y > 0$, entonces*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

Dem. Por definición

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \tag{1}$$

Sea $t(a) = xa$ donde $t : [1, a] \to \mathbb{R}$, luego $dt = xda$ entonces

$$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{xda}{xa} = \int_1^y \frac{da}{a} = \log(y)$$

por tanto

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

■

Corolario 4.1. *Sea $x > 0$, entonces* $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

Dem. Consideremos $1 = \frac{x}{x}$, entonces

$$0 = \log(1) = \log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log(x) + \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

Luego

$$-\log(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$$

Corolario 4.2. *Sea $r \in \mathbb{Q}$, entonces*

$$\log(x^r) = r\log(x)$$

Dem. Probaremos primero para los naturales luego en los enteros y finalmente a los racionales. Sea $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\log(x^n) = \underbrace{\log(x) + \cdots + \log(x)}_{n \text{ sumados}} = n\log(x)$$

Ahora para los enteros, para ello basta probar que $\log(x^{-n}) = -n\log(x)$, en efecto

$$0 = \log\left(x^{-n} \cdot \frac{1}{x^{-n}}\right) = \log(x^n) + \log\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)$$

Añadiendo que para que $0 = \log(1) = \log(x^0)$, tenemos probado para todo los enteros. Para los racionales se aplicará el siguiente truco, sin pérdida de generalidad, consideremos $p, q \in \mathbb{N}$, entonces

$$p\log(x) = \log(x^p) = \log(x^{\left(\frac{p}{q}\right)q}) = q\log(x^{\left(\frac{p}{q}\right)})$$

Entonces

$$\frac{p}{q}\log(x) = \log(x^{\left(\frac{p}{q}\right)})$$

Probando así el corolario. ■

Corolario 4.3. *La función* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es una biyección continua con inversa continua*

Dem. Por definición log es continua, además al ser creciente esto la hace inyectiva, veamos la sobreyectividad. Para ello considéremos los siguientes límites

$$\lim_{n\to\infty} \log(2^n) \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty} \log(2^{-n})$$

Notamos que

$$\lim_{n\to\infty} \log(2^n) = \infty \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty} \log(2^{-n}) = -\infty$$

Luego por continuidad log es sobreyectiva. Por tanto log es biyectiva continua con inversa continua por el teorema de inversa continua. ■

Definición 4.2. (Exponencial) *La función exponencial* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *se define como la inversa del logaritmo, en particular*

$$\exp(x) = y \iff \log(y) = x$$

Teorema 4.2. *La función* exp *es una biyección creciente de* $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}^+$*, es infinitamente diferenciable, en particular* $(\exp)' = \exp$ *y* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$*.*

Dem. Como $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es la inversa de log, es biyectiva y creciente. Veamos la derivada, por la derivada de la inversa tenemos que

$$\exp'(x) = \frac{1}{\log'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \exp(x)$$

Probando que la exponencial es invariante sobre la derivada. Sean $x^* = \exp(x), y^* = \log(y)$, entonces

$$x = \log(x^*), y = \log(y^*)$$

Luego

$$\exp(x+y) = \exp(\log(x^*) + \log(y^*)) = \exp(\log(x^*y^*)) = x^*y^* = \exp(x)\exp(y)$$

Probando el teorema. ■

Proposición 4.2. *El número e definido por*

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es talque

$$\log(e) = 1$$

Dem. Como la función $\log(x)$ es continua tenemos que

$$\log(e) = \log\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

por el teorema del valor intermedio por integral existe un $\varepsilon(n) \in (1, 1+\frac{1}{n})$ talque

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\varepsilon(n)} \cdot \frac{1}{n}$$

Luego

$$\log(e) = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon(n)} = 1$$

■

Ejemplo 4.1. Veamos si la siguiente sucesión

$$x_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

es convergente

Dem. Probaremos que la sucesión es decreciente.

$$x_n - x_{n+1} = -\log(n) + \log(n+1) - \frac{1}{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$$

Por otra parte

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Por tanto

$$x_n - x_{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \geq 0$$

de modo que x_n es decreciente.

Probemos que la sucesión está acotado inferiormente. Si

$$\log(n) = \int_1^n \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

Luego

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n) \geq 1 + \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, x_n es decreciente y acotada inferiormente, por lo que es convergente.

Ejemplo 4.2. Probemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$$

Sol. Consideremos la siguiente suma parcial

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\right) \\
&= x_{2n} - x_n + \log(2) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L - L + \log(2) = \log(2)
\end{aligned}$$

Obteniendo que la serie converge a $\log(2)$.

Proposición 4.3. *El número e es irracional.*

Dem. Supongamos que e es racional, es decir, existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $e = \frac{p}{q}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ talque $n > \text{máx}\{q, 3\}$. Así $n! \cdot e$ es un número natural. Por la fórmula de Taylor, existe un $\theta \in (0, 1)$ talque

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

Luego, multiplicando por $n!$ tenemos que

$$n! \cdot e = 2n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1 + \frac{e^\theta}{n+1}$$

Es decir,

$$n! \cdot e - (2n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + 1) = \frac{e^\theta}{n+1}$$

El lado izquierdo de la igualdad, es un número entero. Por otra parte, si

$$1 < e^\theta < e < 3$$

dado que e^x es creciente. Luego

$$\frac{1}{n+1} < \frac{e^\theta}{n+1} < \frac{3}{n+1}$$

Pero $n > \text{máx}\{q, 3\}$, por lo tanto

$$0 < \frac{e^\theta}{n+1} < 1$$

Y como no existe ningun entero entre 0 y 1 tenemos que e no puede ser racional. Por tanto es irracional. ■

4.2. Áreas, Volúmenes y Curvas

Como hemos definido la integral, es el área bajo la curva, pero también vimos que es una suma infinita de pequeños pedazos, con esta idea podemos determinar claramente distintas áreas, también podemos determinar volúmenes, ya que podemos tomar pedazos pequeños de áreas e ir sumando, de forma que se genera un volumen y por último, la curva, que podemos determinar el largo de una curva usando la misma idea.

4.2.1. Área

Definición 4.3. *El área A de la región limitada por las curvas $f(x) = y, g(x) = y$ y las rectas $x = a, x = b$ donde f, g son continuas y $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ se define por:*

$$A := \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Observación 4.1. Si $g = 0$ tenemos la integral de f.

Ejemplo 4.3. Determinemos el área de la región acotada por $e^x = y$ y por $x = y$ en el intervalo $[0, 1]$. Notemos que $e^x \geq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces por definición tenemos

$$\int_0^1 (e^x - x)dx = e^x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}$$

Ejemplo 4.4. Determinemos el área encerrada por la parábola $x^2 = y, 2x - x^2 = y$. Notemos que ambas funciones se intersectan en dos puntos, por tanto, el área que nos interesa es entre esos dos puntos. Si se intersectan cuando $x = 0, 1$ entonces

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Nota 4.1.

- Para determinar el área de una región encerrada es necesario
  (a) Determinar los puntos de intersección
  (b) Calcular la integral
- La definición de área se puede generalizar, si tenemos dos funciones f, g donde varía quien es mayor que la otra, consideramos los puntos cuando la otra es mayor a la otra, es decir, consideremos $\{x_0, \ldots x_n\}$ donde f y g difieren en el orden, entonces podemos trabajar por separado las integrales y contruir el área pedida. Entonces, la definición nos quedaría que el área de la región formada entre $f(x) = y, g(x) = y$ entre $x = a, x = b$ viende dada por:

$$A := \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Ejemplo 4.5. Determinemos el área de la región acotada por las curvas $\text{sen}(x) = y, \cos(x) = y$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$. Notemos que $\cos(x) \geq \text{sen}(x)$ cuando $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ y $\cos(x) \leq \text{sen}(x)$ cuando

$x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(x) - \operatorname{sen}(x)|dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x))dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}2 - 1 + \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

4.2.2. Volúmenes

Consideremos un sólido S (Objeto tridimensional como esfera, cono, etc). Intersectamos S con un plano A, dicha intersección la denominamos sección transversal. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal que se obtiene intersectando el sólido con el plano Px que es perpendicular al eje x y que pasa por el punto X.

Definición 4.4. (Volumen) *Sea S un sólido definido entre $x = a$ y $x = b$. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en el plano Px a travez de x y perpendicular al eje x. El volumen S se define por:*

$$V := \int_a^b A(x)dx$$

Ejemplo 4.6. Determinemos el volumen de la esfera de radio r. Consideremos la esfera de radio r centrada en el origen. Notemos que al intersectar la esfera con un plano Px $(-r < x < r)$, obtenemos una circuferencia, luego por pitagoras $x^2 + y^2 = r^2$, y entonces $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Por lo tanto

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Encontrando el volumen de una esfera de radio r.

Ejemplo 4.7. Determinemos el volumen de un sólido que se obtiene al girar la región de la curva $y = \sqrt{x}$ respecto a x. Notemos que $A(x) = \pi x$, entonces

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi x dx = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 4.8. Determinemos el volumen de la región R encerrada por las curvas $y = x, y = x^2$ gira alrededor del eje y. Obtenemos en Px dos circuferencia a la cual se restan, en particular

$$A(x) = \pi(x^2 - x^4)$$

Luego

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4) = \frac{2\pi}{15}$$

4.2.3. Longitud de Arco

Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definimos $P_i := (x_i, y_i)$ donde $y_i = f(x_i)$, podemos calcular la distancia de cada punto como

$$d(P_{i-1}, P_i) := \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Observación 4.2. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua. Por TVM tenemos que existe un $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ talque

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Así

$$d(P_i, P_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}$$

Observación 4.3. Si L es la longitud del arco, entonces

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d(P_{i-1}^n, P_i^n)$$

Definición 4.5. (Largo de una curva) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función talque su derivada es continua. La longitud de la curva $f(x) = y$ con $a \leq x \leq b$, se define por:*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Ejemplo 4.9. Determinemos la longitud del arco de la curva $y^2 = x^{\frac{3}{2}}$ entre los puntos $(1, 1)$ y $(4, 8)$. Por definición

$$\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx$$

Sea $u = 1 + \frac{9x}{4}$, entonces $du = \frac{9dx}{4}$. Luego

$$\int_{\frac{13}{4}}^{10} \sqrt{u}\frac{4du}{9} = \frac{4}{9}\left(\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - \sqrt{10^3}\right)$$

Definición 4.6. (Función longitud) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con diferencia continua. La función longitud del arco se define por*

$$\begin{aligned} S &: [a, b] \to \mathbb{R} \\ S(x) &:= \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \end{aligned}$$

Ejemplo 4.10. Sea $y = x^2 - \frac{\log(x)}{8}$, determinemos la función longitud. Notemos que $f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_1^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt &= \int_1^x \left(2 + \frac{1}{8t}\right) dt \\ &= x^2 + \frac{\log(x)}{8} - 1 \end{aligned}$$

5. Integrales Impropias

La integral de Riemann trabaja con funciones acotadas en un intervalo compacto, pero que ocurre en un intervalo que no está acotado o en un intervalo donde la función se indefine en algunos puntos, por lo que en está sección se extendera la definición de Riemann. Para ello destacamos dos tipos de integrales, la de tipo I que estudia hacía el infinito y la de tipo II que estudia hacía puntos indefinidos.

5.1. Integrales de tipo I

Definición 5.1. (Integral tipo I) *Sea $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ una función talque para todo $b \in \mathbb{R}, b > a$, la restricción $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable. Diremos que la integral impropia de tipo I*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

Es convergente si

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

existe. En tal caso definimos

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Si el límite no existe diremos que

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

diverge.

Con respecto la integral impropia con límite inferior hacía el infinito negativo, se define de igual forma análoga.

Definición 5.2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque para cualquier intervalo acotado $[a, b]$ se tiene que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable. Diremos que la integral impropia*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

converge si

$$\int_0^\infty f(x)dx \quad y \quad \int_{-\infty}^0 f(x)dx$$

convergen. En tal caso definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)dx$$

si algunas de las integrales diverge, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

diverge.

Observación 5.1. La definición entregada es más fuerte que la existencia del siguiente límite

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)dx$$

En efecto, para todo real a se tendría

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Ejemplo 5.1. Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, veamos la convergencia de

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Por definición

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1\end{aligned}$$

Es decir, la integral converge.

Ejemplo 5.2. Revisemos $f(x) = \frac{1}{x}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b\to\infty} \log(b) = \infty\end{aligned}$$

Es decir, diverge.

Con esto podemos generalizar cuando converge y cuando no con una función de la forma $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, el siguiente ejemplo ilustra está generalización.

Ejemplo 5.3. Sea $\alpha > 0$, estudiemos la convergencia de

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Distinquimos tres casos:

- **Caso 1.** Si $\alpha > 1$ entonces
$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1)$$
Luego
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{a-1}$$

- **Caso 2.** Si $\alpha \in (0,1)$ entonces
$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1) \overset{b\to\infty}{\to} \infty$$
Por tanto diverge.

- **Caso 3.** Si $\alpha = 1$ entonces
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \log(b) = \infty$$

Concluimos que la integral
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$
converge si y sólo si $\alpha > 1$.

Ejemplo 5.4. Calculemos
$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx$$
Sea $u = x^2$, entonces
$$\int_0^\infty xe^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b xe^{-x^2} dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b^2} \frac{1}{2} e^{-u} du$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-b^2})$$
$$= \frac{1}{2}$$

Teorema 5.1. (Criterio de Weierstrass) *Si para todo $x \geq a$ se tiene*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad y \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad converge.$$

Entonces

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad converge.$$

Dem. Notemos que si $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función creciente y acotada, entonces existe

$$\lim_{x\to\infty} F(x)$$

Apliquemos esta propiedad a $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ y que $f(x) \geq 0$. Entonces se tiene que $F(x)$ es creciente y además para todo $x \geq a$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^\infty g(t)dt$$

Probando el teorema. Además también podemos concluir que si

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ diverge, entonces } \int_a^\infty g(x)dx \text{ diverge}$$

■

Proposición 5.1. (Criterio de comparación) *Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones tales que existe un $K > 0$ talque*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

entonces

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \textit{converge si y sólo si} \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad converge$$

Dem. Dado $\varepsilon = \frac{K}{2} > 0$ existe $R > 0$ talque si $x > R$ entonces

$$\frac{K}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3K}{2}$$

Notar que si $X > R$ se tiene que f y g son de igual signo, sin pérdida de generalidad supongamos que ambas son positivas, entonces, para todo $x > R$ se tiene

$$\frac{Kg(x)}{2} < f(x) < \frac{3Kg(x)}{2}$$

Luego por el criterio de Weierstrass se concluye el resultado. ■

Ejemplo 5.5. (La integral de Bertrand) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}+$, estudiemos la convergencia de

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \log^\beta(x)}$$

Sea $u = \frac{1+\alpha}{2}$, distingimos tres casos

- **Caso 1.** Si $\alpha > 1$, entonces $\alpha > u > 1$. Como para todo $\beta \in \mathbb{R}^+$ se tiene

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^u}{x^\alpha \log^\beta(x)} = 0$$

  por lo tanto existe $A > 0$ talque para todo $X > A$ se tiene que

  $$\frac{x^u}{x^\alpha \log^\beta(x)} \leq 1$$

  En particular

  $$\frac{1}{x^\alpha \log^\beta(x)} \leq \frac{1}{x^u}$$

  Como

  $$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \log^\beta(x)} \leq \int_2^\infty \frac{dx}{x^u} < \infty$$

  Por tanto converge.

- **Caso 2.** Si $\alpha < 1$, entonces $\alpha < u < 1$, notemos que para todo $\beta \in \mathbb{R}^+$ se tiene

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^u}{x^\alpha \log^\beta(x)} = \infty$$

Luego existe $A > 0$ talque para todo $x > A$ se tiene que

$$\frac{x^u}{x^\alpha \log^\beta(x)} > 1$$

Y como

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^u} = \infty$$

Entonces, por el criterio de comparación, tenemos que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \log^\beta(x)} = \infty$$

De forma que diverge.

- **Caso 3.** Si $\alpha = 1$, para todo $A > 2$, haciendo el siguiente cambio de variable $u = \log(x)$ se tiene

$$\int_2^A \frac{dx}{x \log^\beta(x)} = \int_{\log(2)}^{\log(A)} \frac{du}{u^\beta}$$

Y esta integral converge si $\beta > 1$, es decir

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \log^\beta(x)} \quad \text{converge si y sólo si } \beta > 1$$

Teorema 5.2. (El test de la integral) *Sea $\phi : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función decreciente y positiva. Entonces, la serie*

$$\sum_{n=1}^\infty \phi(n) \quad \textit{converge si y sólo si} \quad \int_1^\infty \phi(x)dx \quad \textit{converge}$$

Dem. Como ϕ es monótona, tenemos que

$$\phi(n+1) \leq \int_k^{k+1} \phi(x)dx \leq \phi(n)$$

por lo tanto

$$\phi(2) + \cdots + \phi(N) \leq \int_2^N \phi(x)dx \leq \phi(1) + \cdots + \phi(N-1)$$

Aquí concluimos que la serie converge si y sólo si la integral converge. ■

Ejemplo 5.6. Sea $p > 0$, entonces la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p(n)} \quad \text{es convergente si y sólo si } p > 1$$

Observación 5.2. Si $\int_a^\infty f(x)dx$ converge y $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ se tiene que f cambia de signo.

Teorema 5.3. (Criterio de cauchy) *Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable en todo $[a, b]$. La integral*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

converge si y sólo para todo $\varepsilon > 0$ existe $A > a$ tal que si $t_1, t_2 > A$ entonces

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Dem. Sea $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ y supoganmos que $\int_a^\infty f(x)dx$ existe. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ talque si $t > A$ entonces

$$\left| F(t) - \int_a^\infty f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego si $t_1, t_2 < A$ se tiene

$$|F(t_1) - F(t_2)| \leq \left| F(t_1) - \int_a^\infty f(x)dx \right| + \left| F(t_2) - \int_a^\infty f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A > 0$ talque si $t_1, t_2 > A$ se tiene que

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx \right| \leq \varepsilon$$

Notemos que la integral converge si para toda la sucesión $\{t_n\}_n$ se tiene que $\{F(t_n)\}_n$ es convergente, es decir, $\{F(t_n)\}$ es de cauchy. Probando así el teorema. ■

Teorema 5.4. (El test Abel) *Sean $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones tales que*

(a) La función g es monótona y acotada

(b) La integral $\int_a^\infty f(x)dx$ *es convergente.*

Entonces la integral

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \quad \textit{es convergente}$$

5.2. Integrales de tipo II

Definición 5.3. *Sea* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ *una función tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *se tiene que* $f : [a+\varepsilon, b] \to \mathbb{R}$ *es integrable. Diremos que la integral impropia de tipo II*

$$\int_a^b f(x)dx$$

es convergente si y sólo el siguiente límite existe

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

En caso de no exisitr, diremos que la integral diverge. De manera análoga para una función $f : [a,b) \to \mathbb{R}$*. Si* $f : (a,b) \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ *es una función talque*

$$\int_a^c f(x)dx \quad y \quad \int_c^b f(x)dx \quad \textit{convergen}$$

entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Si alguna diverge, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \quad \textit{diverge.}$$

Ejemplo 5.7. Sea $\alpha > 0$, determinemos la convergencia de

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

Si $a \neq 1$ entonces

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha})$$

Si $\alpha > 1$, entonces

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$$

si $0 < \alpha < 1$, entonces

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

Y Si $\alpha = 1$, entonces

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -\log(\varepsilon) = \infty$$

Ejemplo 5.8. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}^c \\ \infty & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Notemos que f no es acotada y por lo tanto no es integrable

Ejemplo 5.9. Calculemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sea $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{arc\,sen}(1-\varepsilon) \\ &= \operatorname{arc\,sen}(1) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Teorema 5.5. *Sean $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ funciones tales que para todo $c \in (a,b)$ son integrale en $[a,c]$. Si*

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = \infty$$

y, si existe $K > 0$ talque

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

Entonces

$$\int_a^b f(x)dx \quad \textit{converge si y sólo si} \quad \int_a^b g(x)dx \quad \textit{converge}$$

Dem. Existe $\delta > 0$ talque si $x \in (b-\delta, b)$ tanto f como g son positivias en ese intervalo y

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \frac{K}{2}$$

es decir, si $x \in (b-\delta, b)$ entonces

$$\frac{K}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}K$$

luego

$$\frac{Kg(x)}{2} \leq f(x) \leq \frac{3Kg(x)}{2}$$

si $\int_a^b f(x)dx$ converge, entonces $\int_a^b g(x)dx$ converge, si $\int_a^b g(x)dx$ converge entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge. ■

Ejemplo 5.10. La integral

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$$

diverge. En efecto, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \ \text{ y } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x} \ \text{ diverge, entonces } \int_0^\pi \frac{dx}{sen(x)} \ \text{ diverge}$$

5.3. La función Gamma

Usaremos una aplicación de las integrales impropias, la cual es la famos función gamma, una función que es una extrapolación de los factoriales, ya que permite determinar los factoriales de $1/2$, o de constantes como la de e, π, entre similares.

Definición 5.4. (Función gamma) *La función Gamma se define como*

$$\begin{aligned} \Gamma : (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \Gamma(t) &:= \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}dx \end{aligned}$$

Probemos que $\Gamma(t)$ está bien definido y para ello debemos ver que para todo $t > 0$

$$\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx \quad \text{y} \quad \int_1^\infty e^{-x}x^{t-1}dx$$

convergen

Si $t \geq 1$ entonces $\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx$ es una integral de Riemman, por lo que es convergente. Si $t \in (0,1)$, entonces

$$0 < e^{-x}x^{t-1} < x^{t-1}$$

con $x \in (0,1)$, luego

$$\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx \leq \int_0^1 x^{t-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-t}} < \infty$$

es decir, para todo $t > 0$

$$\int_0^1 e^{-x}x^{t-1}dx$$

converge. Estudiemos la otra convergencia

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{t-1}dx$$

Observación 5.3. Para todo $t > 0$ se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}x^{t-1} = 0$$

entonces existe un $A > 0$ tal que si $x > A$ entonces

$$x^2e^{-x}x^{t-1} < 1$$

Si además

$$\int_1^A x^2e^{-x}x^{t-1}dx$$

es una integral de Riemman de una función continua. Notemos que

$$\int_A^\infty e^{-x}x^{t-1}dx \leq \int_A^\infty \frac{dx}{x^2} < \infty$$

Por lo tanto

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{t-1}dx \leq \int_1^A e^{-x}x^{t-1}dx + \int_A^\infty e^{-x}x^{t-1}dx < \infty$$

Por lo que $\Gamma(t)$ está bien definida.

Proposición 5.2. *Para todo* $t > 1$, *se tiene que*

$$\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$$

Dem. Probaremos que $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$. Si $t = n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)! \int_0^\infty e^{-x}dx = (n-1)!$$

Notar que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} (-e^{-b}+1) \\ &= 1\end{aligned}$$

entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$. Probemos en general $t > 1$. Sean $0 < a < b < \infty$, $u = x^{t-1}, dv = e^{-x}$, entonces

$$\int_a^b e^{-x}xt - 1dx = -e^{-b}b^{t-1} + e^{-a}a^{t-1} + (t-1)\int_a^b e^{-x}x^{t-2}dx \overset{b\to\infty, a\to 0^+}{\longrightarrow} (t-1)\Gamma(t-1)$$

Por tanto

$$\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$$

Probando la proposición. ■

Ejemplo 5.11. (La integral de Dirichlet) Una integral impropia conocida es la integral de Dirichlet, dada por:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

6. Sucesiones y series de funciones

Recordemos que una sucesión es una colección de elementos de un conjunto ordenado, una sucesión de funciones, es una colección de funciones. Estudiaremos la convergencia de una sucesión de funciones y las series de funciones.

6.1. Convergencia Puntual y Uniforme

Definición 6.1. (Convergencia puntual) *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Una sucesión $\{f_n\}_n$ donde $f_n : X \to \mathbb{R}$. Diremos que la sucesión converge puntualmente a la función $f : X \to \mathbb{R}$ si y sólo si para todo $x \in X$ se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Observación 6.1. Notemos que para un $x \in X$ fijado la colección $\{f_n(x)\}_n$ es una sucesión de números reales que convergen a $f(x)$, es decir, para un x fijo se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Además N depende de ε y de $x \in X$.

Ejemplo 6.1. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y $\{a_n\}_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$ talque $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y sea $g : X \to \mathbb{R}$ una función. Definamos la siguiente sucesión de funciones

$$f_n : X \to \mathbb{R}$$

$$f(x) := a_n \cdot g(x)$$

donde $g(x)$ es una función cualquiera. La sucesión $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a la función $f : X \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = a \cdot g(x)$$

En efecto, dado $x \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} a_n g(x)\\ &= g(x) \lim_{n\to\infty} a_n\\ &= a \cdot g(x) = f(x)\end{aligned}$$

Nota 6.1 La convergencia puntual también se le llama convergencia simple o convergencia punto a punto.

Ejemplo 6.2. Sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f_n(x) := x^n$ Entonces ocurre dos cosas

- **Caso 1.** Si $x = 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$$

- **Caso 2.** Si $x \in [0,1)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Por lo tanto, sucesión converge puntualmente a la sucesión $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Nota 6.2. La convergencia simple no preserva la continuidad.

Ejemplo 6.3. Sea $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, la sucesión definida por:

$$f_n(x) := \cos(nx)$$

esta función no converge puntualemnte. Si $x = \pi$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n = \nexists$$

Entonces $\{f_n\}_n$ no converge puntualmente

Ejemplo 6.4. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) := x^n(1-x)^n$$

Notemos que para todo $x \in [0,1]$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Definición 6.2. (Convergencia uniforme) *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones. Diremos que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a la función $f : X \to \mathbb{R}$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque para todo $n > N$ y para todo $x \in X$ se tiene que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Nota 6.3. En la convergencia uniforme, N depende de ε y no de x.

Ejemplo 6.5. Sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f_n(x) := x^n$, tenemos que f_n no converge uniformemente a f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Para ver esto, basta notar que existe un $\varepsilon > 0$, talque para todo N, existe un $n > N$ y un $x \in X$, talque $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, digamos que $\varepsilon = 1/2$, podemos tomar cualquier N, tomando $n = N + 1$ y considerando $x = \sqrt[N+1]{1/2}$, se puede ver que

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2} - 0 \right| \geq \frac{1}{2}$$

Otro argumento que se puede usar, es que si f_n converge uniformemente a f, entonces se converga la continuidad, pero f no es continua, por tanto no converge uniformemente. Más adelante probaremos esto.

Proposición 6.1. *Si la sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f entonces la sucesión converge puntualmente a f.*

Dem. Basta aplicar la definición de convergencaia uniforme, para $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, talque para todo $n > N$ y para todo $x \in X$, se tiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Tomando x fijo, se ve que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $n > N$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Y esto se peude hacer para todo $x \in X$. Por lo tanto, f_n converge puntualemnte a f. ■

Lema 6.1. *Sea $\{a_n\}_n$ una sucesión de números reales talque converge a a, entonces la sucesión $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a $f = a \cdot g$ si y sólo si la función g es acotada.*

Dem. Supongamos que g es acotado, entonces, existe un $K > 0$ talque para $x \in X$ se tiene $|g(x)| < K$. Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, existe $N \in \mathbb{N}$ talque para todo $n > N$ se tiene

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{K}$$

Por lo tanto, para todo $n > N$ y para todo $x \in X$ se tiene

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| \\
&= |a_n - a||g(x) < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Para el otro lado, supongamos que g no es acotado y probemos que f_n no converge uniformemente a f. Sea $\varepsilon = 1$, probaremos que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$ y $x \in X$ tales que

$$|a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| \geq 1$$

Para ello, dado $N \in \mathbb{N}$ talque $a_n \neq a$, como g no es acotada existe un $x \in X$ talque $|g(x)| \geq \frac{1}{|a_n - a|}$. Así, para tales $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tenemos que

$$|a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| = |a_n - a||g(x)| \geq 1$$

Probando el lema. ■

Defineción 6.3. (Sucesión de Cauchy) *Una sucesión de funciones $\{f_n\}_n$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ talque si $n, m > N$, entonces para todo $x \in X$ se tiene que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Teorema 6.1. (Criterio de Cauchy) *Una sucesión de funciones $\{f_n\}_n, f_n : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Dem. Supongamos que $f_n \to f$ converge uniformemente. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ talque si $n > N$ entonces para todo $x \in X$ se tiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n, m > N$, entonces, para todo $x \in X$ se tiene

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\
&\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora que $\{f_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy, luego, para todo $x \in X$, la sucesión $\{f_n\}_n$ es de Cauchy con número reales, por lo tanto posee límite. En particular

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ para todo } x \in X$$

o dicho de otra forma, f_n converge puntualmente a una función f.

Veamos la convergencia uniforme. Sea $\varepsilon > 0$, dado que la sucesión es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ talque si $n, m > N$ entonces, para todo $x \in X$ se tiene

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Mantegamos n, x fijos y $m \to \infty$. Así

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

es decir, f_n converge uniformemente a f. Probando el teorema. ■

6.2. Series de funciones

Definición 6.4. (Serie de funciones) *Sea $\{f_n\}_n, f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones. La serie de funciones que denotamos por:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

es la sucesión de sumas parciales de f_n.

$$S_n := f_1 + \cdots + f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

La serie converge puntualmente a la función $f : X \to \mathbb{R}$ si la sucesión de funciones $\{S_n\}_n$ converge puntualmente a f. Del mismo modo diremos que $\sum f_n$ converge uniformemente a f si $\{S_n\}_n$ converge uniformemente a f.

Observación 6.2. Diremos que $r_n(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f(x) - (f_1(x) + \cdots + f_n(x))$ es el resto de orden n de la serie $\sum f_n$ converge uniformemente a f si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ talque si $n > N$ entonces para todo $x \in X$

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

Definición 6.5. (Normalmente convergente) *Una serie de funciones $\sum f_n$ es normalmente convergente si existe una sucesión de números, reales $\{a_n\}_n, a_n \geq 0$ tales que $\sum a_n$ converge y para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$*

$$|f_n(x)| \leq a_n$$

Ejemplo 6.6. Sea $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$ entonces $\sum f_n$ es normalmente converge basta considerar $a_n := \frac{1}{n^2}$

Teorema 6.2. (Test de Weierstrass) *Si $\sum f_n$ es normalmente convergente. Entonces*

$$\sum |f_n| \quad y \quad \sum f_n$$

son uniformemente convergente.

Dem. Dados $n, p \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tenemos

$$|f_n(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)|$$

$$\leq a_n + \cdots + a_{n+p}$$

por el criterio de Cauchy se tiene que $\sum |f_n|$ converge uniforme. ■

Ejemplo 6.7. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$$

Converge uniformemente por el test de Weierstrass.

Observación 6.3. Hemos probado que la convergencia normal implica converge uniformemente. El recíproco, sin embargo, es falso. El siguiente ejemplo lo ilustra.

Ejemplo 6.8. Consideremos la sucesión $\{f_n\}_n, f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in [n, n+1) \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Para todo $x \in [1, \infty)$ tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$$

La serie converge uniformemente a $\frac{1}{x} : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ y no es normalmente convergente. La convergencia es uniforme, en efecto, para todo $x \in X$ se tiene

$$0 \leq f(x) - (S_n) \leq \frac{1}{n}$$

La convergencia no es normal, en efecto si $f_n(x) \leq a_n$ para todo $x \in [1, \infty)$ entonces $f_n(n) = \frac{1}{n} \leq a_n$. Luego

$$\sum \frac{1}{n} \leq \sum a_n$$

no existe sucesión $\{a_n\}_n$ que satisface la convergencia normal. (La primera serie es la armónica que diverge luego la serie diverge).

Ejemplo 6.9. Sea $f_n(x) = x^n$, Sabemos que f_n converge puntamente a f, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Vemos que

$$\lim_{x \to 1} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \to 1} f(x) = 0$$

Pero, por otra parte

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to 1} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} (1) = 1$$

Esto significa que no podemos cambiar los índices de límite, a menos que agregemos la convergencia uniforme.

Teorema 6.3. (Cambio de índices) *Sea $a \in X$ un punto de acumulación de X. Si una sucesión de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a $f : X \to \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ el siguiente límite existe*

$$L_n := \lim_{x \to a} f_n(x)$$

entonces

(a) El siguiente límite existe $L := \lim_{n \to \infty} L_n$

(b) $L = \lim_{x \to a} f(x)$

es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)$$

Dem. Para probar que existe $L = \lim_{n\to\infty} L_n$ basta demostrar que $\{L_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ como f_n converge uniformemente a f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces para todo $x \in X$ se tiene

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sean $n, m > N$, existe $x \in X$ talque

$$|L_m - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y } |f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Luego

$$\begin{aligned} |L_m - L_n| &\leq |L_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |L_n - f_n(x)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Probando la primera parte. Probemos ahora que la función $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ posee límite L cuando $x \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$ existe $N' \in \mathbb{N}$ talque si $n > N'$ entonces

$$\begin{aligned} &|L - L_n| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ y para todo } x \in X \text{ se tiene} \\ &|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Sea $n > N'$ fijo, como $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, existe δ talque si $x \in X$ y $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$|f_n(x) - L_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Así, si $x \in X, 0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

en efecto

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| < \varepsilon$$

Probando el teorema. ■

Corolario 6.1. *Sea a un punto de acumulación de X. Si $\sum f_n$ converge uniformemente a f y para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $L_n := \lim_{x\to a} f_n(x)$, entonces*

$$\sum L_n \quad \textit{es una serie convergente y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \lim_{x\to a} f(x)$$

Teorema 6.4. (Continuidad en un punto) *Si $\{f_n\}_n$ converge uniformente a f en X y para todo $n \in \mathbb{N}$ la función $f_n : X \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $x = a$ entonces f es continua en $x = a$*

Dem. Supongamos que a es un punto de acumulación. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$$

Probando el teorema ■

Corolario 6.2. (Continuidad) *La convergencia uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua.*

Dem. Es solo aplicar el teorema 6.4 en cada punto de la función, de forma que f es continua. ■

Observación 6.4.

- Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$, converge a una función discontinua, por tanto no puede converger uniformemente.
- Recordemos la sucesión de funciones definidas por $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x)^n$ que converge a $f = 0$ pero la convergencia no es uniforme, entonces, existen sucesiones que convergen a funciones continua que no necesariamente son uniformes.

Definición 6.6. *Una sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ converge monótonamente a la función $f : X \to \mathbb{R}$ si para todo $x \in X$ la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}_n$ es monótona y*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Teorema 6.5. (Diri) *Sea $X \subseteq$ un conjunto compacto. Si la sucesión de funciones $\{f_n\}_n, f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monótonamente a una función continua $f : x \to \mathbb{R}$ entonces la convergencia es uniforme.*

Para poder demostrar el teorema de Diri debemos recordar el teorema de los compactos encajados.

Teorema 6.6. (Compactos encajados) *Sea $\{K_n\}_n$ una sucesión de conjuntos compactos $K_n \subseteq \mathbb{R}$ talque $K_n \neq \phi$ y*

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \dots$$

Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \phi$$

Dem. (Teo. Diri) Sea $\varepsilon > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$K_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

como f_n y f son continuas, el conjunto K_n es cerrado. Como $K_n \subset X$ y X es compacto, entonces K_n es compacto. Además la monotonia de $\{f_n\}_n$ implica que

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \dots$$

Pero $\bigcap K_n = \phi$ ya que si $x \in \bigcap K_n$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Pero además

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Por lo tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ talque $K_n = \phi$, es decir, f_n converge uniformemente a f. ■

Corolario 6.2. *Una serie convergente de funciones continuas y no negativos en un conjunto compacto es uniformemente si y sólo si la suma es una función continua.*

Ejemplo 6.10. Estudiemos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

en $\mathbb{R}$. Si $x = 0$ entonces la serie es igual a 0. Si $x \neq 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \\
&= x^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} - 1}{\frac{1}{1+x^2} - 1} \right) \\
&= 1 + x^2
\end{aligned}
$$

Es decir

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 1 + x^2
$$

Luego la serie converge puntualmente a una función discontinua en 0. Y como es discontinua con la serie una suma de continuas, se tiene que no puede converge uniformemente esta función.

Corolario 6.3. *Si la función $f_n : X \to \mathbb{R}$ son continuas y para todo $x \in X$, la serie $\sum f_n(x) = f(x)$ donde f es continua. Entonces la serie $\sum f_n$ converge uniformemente.*

Ejemplo 6.11. Sea $\{r_n\}_n$ una numeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Defina $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$
f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{x_1, x_2, \dots x_n\} \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}
$$

Cada función f_n es continua excepto en puntos finitos, por lo tanto es integrable. Notemos que $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}
$$

Pero f no es integrable.

Teorema 6.7. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$ tales que $\{f_n\}_n$ converge uniformemente a f. Entonces f es integrable y además*

$$
\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx
$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$ por la convergencia uniforme tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ talque para todo $n > N$ y para todo $x \in [a,b]$

$$
|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}
$$

Luego, si $n > N$ entonces

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx - \overline{\int_a^b} f_n(x)dx\right| \leq \overline{\int_a^b} |f(x) - f_n(x)|dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Es análogo para la integral inferior, entonces para todo $n > N$

$$\left|\underline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f_n(x)dx\right| \leq \underline{\int_a^b} |f(x) - f_n(x)|dx$$

$$< \varepsilon$$

Por tanto

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Es decir, f es integrable y

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

■

Teorema 6.8. *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable con diferencia integrable y f_n converge puntalmente a f. Supongamos que $\{f_n'\}_n$ converge uniformemente a una función continua g, entonces f es diferenciable y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Dem. La función g es el límite unifomre de funciones integrable, por lo tanto, es una función integrable en $[a,b]$ y en particular $[a,x]$ con $x \in (a,b]$ entonces

$$\int_a^x g(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt$$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a))$$

$$= f(x) - f(a)$$

Como g es continua tenemos que derivando

$$g(x) = f'(x) \quad \text{si además} \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{entonces} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Observación 6.5. Sea $\sum f_n$ una serie uniformemente converge de funciones integrables, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces su suma es integrable y

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Ejemplo 6.12. Si

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

Y en virtud del test de Weierstrass, la serie

$$1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+t^2}$$

es uniformemente convergente en todo intervalo cerrado contenido en $(-1,1)$, luego

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Además

$$\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} < \infty$$

Para $x = -1, 1$. Luego

$$\arctan(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

se extiende de $(-1, 1)$ a $[-1, 1]$. Así por ejemplo

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

6.3. Series de potencias

Definición 6.7. (Serie de pontencia) *Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ una serie de funciones de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Se denomia serie de potencia.

Observación 6.6. Si $x_0 = 0$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Que es la forma simple de la serie de potencia.

Ejemplo 6.13.

(a) La serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

converge para todo $\mathbb{R}$, en particular

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

(b) La serie de potencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

converge solo en $x = 0$.

(c) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

converge a $\frac{1}{1-x}$ si $x \in (-1,1)$ y diverge fuera de ese intervalo.

(d) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

converge a $\log(1+x)$ en $(-1,1]$.

(e) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

converge a $\arctan(x)$ en $[-1,1]$ y diverge fuera de ese intervalo.

.

Teorema 6.9. *Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencia. Entonces, o bien*

(a) La serie converge solo en $x = 0$

(b) Sea $\frac{1}{r} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. La serie $\sum a_n x^n$ converge absolutamente en $(-r, r)$ y diverge fuera de este, en $x = -r, r$ puede o no converger.

Dem.

(a) Si $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_n$ no es acotado entonces $\sum a_n x^n$ no converge, solo cuando $x = 0$.

Si $x \neq 0$ entonces $\{|x| \sqrt[n]{|a_n|}\}_n$ no es acotado y por lo tanto

$$|a_n x^n| = \left(|x| \sqrt[n]{|a_n|}\right)^n \quad \text{no converge a 0, entonces} \quad \sum a_n x^n \quad \text{no converge}$$

(b) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ entonces la serie $\sum a_n x^n$ converge absolutamente en $\mathbb{R}$.

Sea $x \in R$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

Por tanto, por el criterio de raiz la serie converge en todo $\mathbb{R}$

(c) Supongamos que $0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$, es decir

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} \quad \text{luego} \quad \sum a_n x^n \quad \text{converge absolutamente en } I$$

donde $I = (-r, r)$ y diverge fuera de I. En efecto

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{r}$$

por el criterio de raiz $\sum a_n x^n$ converge absolutamente cuando

$$\frac{|x|}{r} < 1$$

y diverge cuando $\frac{|x|}{r} > 1$, mientras en $x = -r, r$ no podemos saberlo, depende de la serie. ■

Defínción 6.8. (Radio de convergencia) *Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencia, definimos el radio de convergencia de la serie por:*

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Teorema 6.10. *Toda serie de potencias converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado (compacto) contenido en el intervalo de convergencia.*

Dem. Sea $(-r, r)$ el intervalo de convergencia de $\sum a_n x^n$. Basta probar con un intervalo de la forma $[-s, s]$ con $s \in (0, r)$. Como para todo $x \in [-s, s]$ se tiene

$$|a_n x^n| \leq |a_n| s^n$$

y la serie $\sum a_n s^n$ converge absolutamente y por el test de Weierstrass se concluye la demostración. ■

Corolario 6.4. *La función, $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es continua.

Teorema 6.11. (Integración término a término) *Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potnecias y $(-r, r)$ su intervalo de convergencia. Si $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ entonces*

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^\infty a_n x^n dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$$

Dem. La serie $\sum a_n x^n$ converge uniformemente en $[\alpha, \beta]$ entonces

$$\int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^\infty a_n x^n dx = \sum_{n=0}^\infty a_n \int_\alpha^\beta x^n dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$$

■

Teorema 6.12. (Derivación término a término) *Sea $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ la función definida por la serie de potencia $f(x) = \sum a_n x^n$ y r el radio de convergencia correspondiente. Entonces f es diferenciable en $(-r, r)$ y*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1}$$

y el radio de convergencia de f' es r.

Dem. Recordademos que

(a) Es posible derivar una serie si sus derivadas converge uniformemente

(b) Una serie de potencia converge uniformemente en todo intervalo cerrado y actoado dentro de $(-r, r)$

Por lo tanto, para probar el teorema, basta probar que tienen igual radio de convergencia. Notemos que

$$\sum_{n=1}^\infty n a_n x^n = x \sum_{n=1}^\infty n a_n x^{n-1}$$

entonces poseen el mismo radio de convergencia. En efecto

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

entonces el radio de convergencia de $\sum n a_n x^{n-1}$ coincide con $\sum a_n x^n$ □

Corolario 6.5. *La función $f(x) = \sum a_n x^n$ posee derivada de todas las ordenes en todo punto de su intervalo de convergencia $(-r, r)$. Las derivadas pueden calcularse término a término. Si $x \in (-r, r)$ entonces*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)(\dots)(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

en particular

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Por lo tanto, la serie de potencia de $f(x)$ en $(-r, r)$ corresponde a la serie de Taylor de f alrededor de $x = 0$.

Dem. Notemos que

$$f^{(k)} = \sum_{n \geq k} n(n-1)(\dots)(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

Si $x = 0$ entonces $f^{(k)}(0) = k! a_k$. Luego basta despejar a_k. ■

Observación 6.7. Sean $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ series de potencias que converge en el intervalo $(-r, r)$ entonces la suma

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n$$

Converge en el mismo intervalo, además es igual a

$$\sum (a_n + b_n) x^n$$

Observación 6.8. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\sum a_n x^n$ una serie de potencia que converge en $(-r, r)$, entonces $\lambda \sum a_n x^n = \sum \lambda a_n x^n$ converge en $(-r, r)$

Proposición 6.2. *Si las series de potencias $\sum a_n x^n$ y $\sum b_n x^n$ convergen en $(-r, r)$, entonces si*

$$c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_0$$

Entonces la serie $\sum c_n x^n$ converge en $(-r, r)$ y

$$\sum c_n x^n = \left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right)$$

Teorema 6.13. (Abel) *Sea $\sum a_n x^n$ una serie de potencia cuyo radio de convergencia es igual a $r \in (0, \infty)$. Si $\sum a_n x r^n$ converge, entonces la serie converge uniformemente en $[0, r]$. En particular*

$$\lim_{x \to r^-} \left(\sum a_n x^n \right) = \sum a_n r^n$$

Ejemplo 6.14. Sean las funciones trigonométricas

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$
$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Además, ambas son infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$.

Lema 6.2. *Para todo $x \in \mathbb{R}$*

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Dem. Sea $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$. Derivando obtenemos

$$f'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 0$$

Es decir, f es constante, luego $f(0) = 1$. Por tanto $f = 1$ probando el lema. ■

6.4. Funciones analíticas

Definición 6.9. (Función analítica) *Sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que la función f es analítica en el punto $c \in (a, b)$ si existe un $r > 0$ talque para todo $x \in (c - r, c + r) \subset (a, b)$ se tiene*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - c)^n$$

Si f es analítica en todo punto (a, b), diremos que f es analítica real en (a, b).

Observación 6.9.

- Una función analítica puede tener expansiones distintas en distintos puntos. Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es analítica en $d_1, d_2 \in (a, b)$ y

$$f(x) = \sum c_n(x-d_1)^n, \quad x \in (d_1 - r, d_1 + r)$$

$$f(x) = \sum c_n'(x-d_2)^n, \quad x \in (d_2 - r, d_2 + r)$$

con $c_n \neq c_n'$

- Las funciones analíticas son infinitamente diferenciable.
- La suma de funciones analíticas es una función analítica
- El producto de funciones analítica es una función analítica
- Si f es analítca en $c \in (a,b)$ entonces tiene una única expansión, es deicr

$$\text{Si } \; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-c)^n \; \text{ y } \; f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-c)^n$$

Entonces $c_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema 6.14. *Sea f analítica con $f(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entoncees f se anula en un intervalo.*

Dem. Sea A el conjunto de todos los puntos I done f y sus derivadas se anulan. Afirmamos que A es abierto. Como f es analitica existe $r > 0$ talque para todo $x \in (a-r, a+r)$ se tiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n$$

Luego $f(x) = 0$. Para todo $x \in (a-r, a+r)$, es decir, A es abierto. ■

Teorema 6.15. *Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función analítica talque existe $x_0 \in (a,b)$ con*

$$f(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

Entonces f es la función nula.

Corolario 6.6. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones analítica. Si existe $x_0 \in (a,b)$ talque, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene*

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$$

Entonces $f = g$

Lema 6.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞. Sea $\{X_n\}$ una sucesión monótona en (a,b) que converge al punto $x_0 \in (a,b)$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x_n) = 0$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ $f(x_0) = f^{(n)}(x_0) = 0$.*

Dem. Notemos que f es continua, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = 0$$

Por otra parte

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0$$

Puesto que $f(x_0) = 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = 0$, por el teorema de Rolle, existe $y_n \in (x_n, x_{n+1})$ talque $f'(y_n) = 0$. Notemos que $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$. Luego

$$f''(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(y_n) - f'(x_0)}{y_n - x_0} \quad \text{pero} \quad f'(x_0) = 0$$

Y para todo $n \in \mathbb{N}$ $f'(y_n) = 0$, es decir, $f''(x_0) = 0$. Inductivamente se tiene el resultado. ■

Teorema 6.16. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función analítica y $E \subset [a, b]$ talque posee un punto de acumulación $x_0 \in (a, b)$. Si para todo $x \in E$ se tiene $f(x) = 0$, entonces f es nula.*

Corolario 6.7. *Sean $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$, series de potencias que convergen en $(-r, r)$ y $E \subset (-r, r)$ un conjunto que posee un punto de acumulación. Si para todo $x \in E$ se tiene*

$$\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$$

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n$.

Dem. Si $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$ entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

Luego por el teorema anterior, es evidente que $a_n = b_n$. ■

7. Equicontinuidad

7.1. Definicion y Ejemplos

Definición 7.1. (Equicontinuidad) *Sea E un conjunto de funciones $f : X \to \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in X$, diremos que el conjunto E es equicontinua en x_0 si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque para todo $f \in E$ y para todo $x \in X$ talque si $|x - x_0| < \delta$ se tiene*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Notar que si E es equicontinua en x_0 entonces toda función en E es continua x_0. Además g es independiente de la función f en E.

Notación. Una sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ es equicontinua en x_0 si el conjunto $E := \{f_1, f_2, \dots\}$ es equicontinua x_0. E es equicontinua si es equicontinua en todo su dominio.

Ejemplo 7.1. Sea $E = \{f\}$, donde f es continua, entonces E es equicontinua. Si $E_1, \dots, E_n$ son conjuntos de funciones equicontinuas, entonces

$$E = E_1 \cup \cdots \cup E_n$$

es equicontinua. Si E es equicontinua y $F \subset E$ entonces F es equicontinua.

Ejemplo 7.2. Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones que converge uniformente a f. Entonces

$$E := \{f, f_1, \dots, f_n, \dots\}$$

Ejemplo 7.3. Sea E un conjunto de funciones diferenciable. $f : I \to \mathbb{R}$ tales que existe $c > 0$ de modo que para todo $x \in I$.

$$|f'(x)| \leq c$$

Entonces el conjunto E es equicontinua. En efecto, sean $x_0 \in I$ y $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Si $x \in I$ y $|x - x_0| < \varepsilon$ entonces por el teorema de valor medio.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| < \varepsilon$$

Ejemplo 7.4. Sea F una colección de funciones continuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ supongamos que existe $c > 0$ talque para todo $f \in F$ y $x \in [a, b]$ se tiene $|f(x)| < c$. Sea E la colección de funciones $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\rho(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Entonces E es equicontinia.

Definición 7.2. (Uniformidad continua) *Un conjunto de funciones E $f : X \to R$, es uniformemente equicontinua si para todo $\varepsilon > 0$ para todo $f \in E$ existe δ talque si $x, y \in X$*

$$|x - y| < \delta \text{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Ejemplo 7.5. Una función continua no implica que sea uniformemente continua, es un ejemplo de un conjunto equicontinio pero no uniformemente continua.

Ejemplo 7.6. Si E es una colección de funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable con $|f'(x)| < c$, para todo f y para todo x, entonces E es uniformemente equicontinua.

Teorema 7.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Todo conjunto equicontinuo de funciones $f : K \to \mathbb{R}$ es uniformemente equicontinuo.*

Teorema 7.2. *Si una sucesión equicontinuo $\{f_n\}_n$ $f_n : X \to \mathbb{R}$ de funciones que convergen puntualmente en un conjunto $D \subset X$ denos, entonces $\{f_n\}_n$ converge uniformemente en todo subconjunto compacto $K \subset X$.*

Dem. Debemos probar que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ talque si $m, n > N$ y $x \in K$ entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

(a) Sea $d \in D$, existe $n_d \in \mathbb{N}$ talque si $m, n > n_d$ entonces

$$|f_m(d) - f_n(d)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(b) Sea $y \in K$, existe un intervalo abierto de centro y, que denotaremos por J_y talque si $x, z \in X \cap J_y$, entonces

$$|f_n(x) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

(c) Como K es compacto y $K \subset \bigcup_{y \in K} J_y$, existe un sub-cubrimiente finito $K \subset S_1 \cup \cdots \cup S_p$

Como D es denso en X en cada intervalo S, podemos escoger $d_i \in J_i \cap D$. Sean $n_0 = \text{máx}\{n_{d_1}, \ldots n_{d_p}\}$, entonces si $m, n > n_0$, $x \in K$ existe i talque $x \in J_i$, luego

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(d_i)| + |f_m(d_i) - f_n(d_i)| + |f_n(d_i) - f_n(x)|$$

$$< \varepsilon$$

Probando el teorema. ■

Definición 7.3. (Uniformemente acotada) *Sea E una familia de funciones $f : X \to R$. Diremos que E es uniformemente acotado sipara cada $x \in X$, existe $c_x \in \mathbb{R}$ talque para todo $f \in E$ se tiene*

$$|f(x)| < c_x$$

Diremos que E es uniformemente acotada si existe $c \in \mathbb{R}$ talque para todo $x \in X$ y para todo $f \in E$ se tiene

$$|f(x)| < c$$

Teorema 7.3. (Cauchy-Tychonoff) *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto numerable. Toda sucesión $f_n : X \to \mathbb{R}$ puntualmente acotado posee una subsucesión puntualmente converge.*

Dem. Sea $X = \{x_1, \dots\}$ como la sucesión $\{f_n(x_1)\}_n$ es acotada existe un conjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_1$ talque

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_1) = a_1$$

Del mismo modo la sucesión $\{f_n(x_2)\}_n$ es acotado y por tanto existe un subconjunto infinito $\mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}$

$$\lim_{n\in\mathbb{N}_2} f_N(x_2) = a_2$$

Así obtenemos

$$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathbb{N}_k \supseteq \dots$$

Basta escoger $\mathbb{N}^*$ de modo que talque el $i-$ésimo elemento de $\mathbb{N}^*$ es el $i-$ésimo elemento de $\mathbb{N}_i$. ■

Teorema 7.4. (Arzelo-Ascoli) *Sea $K \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto compacto. Toda sucesión equicontinua y puntualmente acotada de funciones $f_n : X \to \mathbb{R}$ posee una subsucesión uniformemente convergente.*

Dem. Existe un subconjunto $X \subset K$ numerable y denso en K por Cauchy-Tychonff. $\{f_n\}_n$ posee una subsucesión que converge puntualmente en X. Luego la sucesión como es equicontinua converge uniformemente. ■

Teorema 7.5. (Arzela-Ascoli) *Sea E una familia de funciones $f : K \to \mathbb{R}$ definidas en el compacto K. Son equivalentes*

(a) E es equicontinua y uniformemente acotada

(b) E es equicontinua y puntualmente acotada

(c) Toda sucesión $\{f_n\}_n$ en E posee una sucesión uniformemente convergente.

7.2. Series de fourier

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función integrale y sea

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$
$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx$$

La serie de fourier de f, formalmente es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

Teorema 7.6. *Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es una función Hölder entonces la serie fourier de f converge uniformemente a f.*

Recordad que f es Hölder si existe $\alpha, c > 0$ talque para todo $x.y \in [-\pi, \pi]$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| < c|x - y|^{\alpha}$$

Teorema 7.7. *Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ posee variación total acotada $V(f) < \infty$, entonces la serie de fourier de f converge a f.*

Definición 7.4. (Variación total) *La variación total f se define por:*

$$V(f) := \sup_{\mathscr{P}} \sum_{i=0}^{n} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

donde $\mathscr{P} := \{-\pi = x_0 < \ldots < x_n = \pi\}$ es una partición finitia de $[-\pi, \pi]$

Observación 7.1. Si $L^p(Leb)$ entonces

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) - b_n \operatorname{sen}(nx)) \right)^p \right| = 0$$

Definición 7.5. *Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua en trozos, si existe una partición finitia de $[-\pi, \pi]$, $\mathscr{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ talque*

$$f|_{(a_i, a_{i-1})} \quad \textit{es continua}$$

Sea f talque es dos veces diferenciable a trozoso. En los puntos de discontinuidad

$$f(x_i) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to x_i^+} f(x) + \lim_{x \to x_i^-} f(x) \right)$$

En particular existen los límites laterales de f en todo punto.

Teorema 7.8. *Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua a trozos y f' y f'' también lo son, entonces la serrie de fourie de f converge en todo punto a la función f.*