FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2545

Topología

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. Definiciones y Conceptos

La topología es el estudio de las figuras y como se transforman continuamente. Se estudiarán varios conceptos generales que se ve en otros cursos, por la naturaleza de la topología habrá muchos conceptos previos estudiados.

Definición 1.1. (Topología) *Sea X un conjunto, sea $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Decimos que τ es una topología de X si satisface las siguientes condiciones,*
(a) $\emptyset, X \in \tau$.
(b) $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \in \tau$, donde $A_\alpha \in \tau$ ($\mathcal{A}$ es cualquier conjunto arbitrario).
(c) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$, donde $A_i \in \tau$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Un elemento de τ se dice abierto. Y a la tupla (X, τ) se dice espacio topológico.

Nota 1.1. Una noción clásica de topología, son los espacios métricos. Sea (X, d) un espacio métrico, es decir, cumple las siguientes propeidades,

(a) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Podemos definir la topología en X por,

$$\tau := \{A \subseteq X : A \text{ es abierto en el sentido métrico}\}$$

Ya que cumple todas las condiciones de una topología.

Ejemplo 1.1.

- Sea $X = \{0, 1\}$, entonces son topologías,
  - $\tau_1 = \{\emptyset, X\}$ (conocido como topología trivial).
  - $\tau_2 = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.
  - $\tau_3 = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.
- Sea $X = \{0, 1, 2\}$, podemos ver que $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1, 2\}\}$ no es topología de X dado que $\{0\} \cup \{1\} \notin \tau$.
- Sea X un conjunto cualquiera. Consideremos las siguientes colecciones,

$$\begin{aligned} \tau_{\text{trivial}} &= \{\emptyset, X\} \\ \tau_{\text{discreta}} &= \mathcal{P}(X) \\ \tau_{\text{cofinita}} &= \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es } X \text{ o es finita}\} \\ \tau_{\text{conumerable}} &= \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es } X \text{ o numerable}\} \end{aligned}$$

  Cada una es una topología, la trivial es evidente, lo mismo con la discreta.

  Afirmación. *La colección $\tau_{cofinita}$ es topología.*

Dem. Digamos que $\tau = \tau_{\text{cofinita}}$, para probar que es topología basta probar los axiomas de este,

(a) Notemos que $X \setminus \emptyset = X$ y $X \setminus X = \emptyset$, (el vacío es finito), entonces $\emptyset, X \in \tau$.

(b) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha \subseteq \tau$ una familia de conjuntos de τ, entonces,

$$X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha) \subseteq X \setminus A_\alpha$$

Si $X \setminus A_\alpha$ es X o finito, entonces claramente $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

(c) Sean $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, luego,

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$

Tenemos unión finita de elementos que son o bien X o finito, es decir, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Por tanto τ es topología de X. ■

Afirmación. *La topología $\tau_{\textit{numerable}}$ es una topología.*

Dem. Digamos que $\tau = \tau_{\text{conumerable}}$, probemos los tres axiomas de topología,

(a) De la demostración anterior, es claro que $\emptyset, X \in \tau$.

(b) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha \subseteq \tau$ una colección, entonces,

$$X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq X \setminus A_\alpha$$

Si el complemento de A_α es X estamos listo, si existe uno que no es el complemento de X, entonces usando la inclusión de arriba, donde $X \setminus A_\alpha$ es numerable, se tiene que el complemento de la unión es numerable, es decir, $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

(c) Sean $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, entonces,

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$$

Si el complemento de un A_i es X, claramente que el complemento de la intersección es X, si todos no son complemento de X, entonces tenemos la unión finita de conjuntos numerable, luego $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

Probando que τ es topología. ■

Ejemplo 1.2. Sea (X, d) un espacio métrico y sea la topología,

$$\tau := \{A \subseteq X : A \text{ es abierto en el sentido métrico}\}$$

Vamos a probar que en efecto es topología. Recordemos que A es abierto si para todo $x \in A$ existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$, probemos que τ satisface los axiomas de topología,

(a) Claramente $\emptyset, X$ son abiertos, luego $\emptyset, X \in \tau$.

(b) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha$ una colección de abiertos de X. Sea $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$, entonces $x \in A_\alpha$ para algún α, luego existe un $r > 0$ talque $B(x,r) \subseteq A_\alpha \subseteq \bigcup_\alpha A_\alpha$, por tanto $\bigcup_\alpha A_\alpha$ es abierto y pertenece a τ.

(c) Sean $A_1, \ldots, A_n$ abiertos. Sea $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, por lo que $x \in A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, sea $r := \min_{1 \leq i \leq n}\{r_i\}$ donde $B(x, r_i) \subseteq A_i$, entonces, $B(x,r) \subseteq A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, luego $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto y pertenece a τ.

Por tanto τ es topología. A esta topología le decimos que es una topología inducida por el espacio métrico (X, d)

Definición 1.2. (Afinidad) *Sea X un conjunto y sean τ_1, τ_2 topologías en X. Decimos que τ_1 es más fina que τ_2 si $\tau_1 \supseteq \tau_2$. y decimos que τ_2 es más gruesas que $\tau_1 0$.*

Ejemplo 1.3. Sea X conjunto, entonces,

$$\tau_{\text{trivial}} \subseteq \tau_{\text{cofinito}} \subseteq \tau_{\text{conumerable}} \subseteq \tau_{\text{discreta}}$$

Probemos que esa cadena de inclusiones. La primera inclusión es evidente, la segunda, si tenemos $A \in \tau_{\text{cofinito}}$, entonces $X \setminus A$ es finito o es directamente X, si fuera finito, entonces es numerable, de forma que se cumple la segunda inclusión. Por último, la tercera inclusión es también evidente. En particular, la topología trivial es la más gruesa y la discreta es la más fina de todas las topologías de X.

Definición 1.3. (Base) *Sea(X, τ) un espacio topológico. Sea $\mathcal{B} \subseteq \tau$ una colección de conjuntos abiertos. Decimos que $\mathcal{B}$ es una base de (X, τ) si todo abierto de τ es unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$.*

Teorema 1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$ un subconjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(a) $\mathcal{B}$ es base.

(b) Para todo $U \in \tau, x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Dem.

- **(a) implica (b).** Sea $U \in \tau$ y sea $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ es base, entonces $U = \bigcup_\alpha B_\alpha$ donde $B_\alpha \in \mathcal{B}$, entonces existe un α talque $x \in B_\alpha \subseteq U$.
- **(b) implica (a).** Sea $U \in \tau$. Luego para todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$, en particular se cumple,

$$\bigcup_{x \in U} B_x = U$$

Por tanto $\mathcal{B}$ es base.

Probando el teorema. ■

Observación 1.1.

- Sea (X, d) un espacio métrico, sea τ la topología inducida, entonces $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ es una base de τ. Ya que ser abierto en la topología inducia por la métrica, es equivalente a decir que existe una bola $B(x, r)$ contenido en el abierto.
- Sea $(X, \tau_{\text{discreta}})$ un espacio topológico, luego $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\} \subseteq \tau_{\text{discreta}}$ es una base, ya que para $U \in \tau_{\text{discreta}}$ abierto, para cada $x \in U$, podemos tomar $\{x\} \in \mathcal{B}$, tal que $x \in \{x\} \subseteq U$.

Sea $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ un conjunto, queremos ver que existe una topología que contenga a Σ y sea la menor posible. Y este si existe, además de ser único, el siguiente teorema prueba este resultado.

Teorema 1.2. *Consideremos X un conjunto y una colección de subconjuntos de X llamado $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$. Entonces existe una topología menor sobre X tal que $\tau_\Sigma \supseteq \Sigma$. Además, tal topología se escribe por τ_Σ y se describe por ¨ Los elementos $\emptyset, X$ y que son unión arbitraria de intersección finitas de elementos de Σ ¨.*

Dem. Probemos que existe tal topología. Definimos,

$$\delta := \bigcap_{\substack{\gamma \text{ topología} \\ \gamma \supseteq \Sigma}} \gamma$$

Veamos que es topología,

(a) Si $\emptyset, X \in \gamma$, entonces $\emptyset, X \in \delta$.

(b) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha$ colección de elementos de δ, entonces $\{A_\alpha\}_\alpha \subseteq \gamma$ para todo γ definido anteriormente, entonces $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \gamma$ para todo γ y por tanto $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \delta$.

(c) Sean $A_1, \ldots, A_n \in \delta$, usando el mismo argumento del punto anterior, tenemos que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \gamma$ para todo γ, y por tanto $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \delta$

De forma que δ es un topología que contiene a Σ, es más, por construcción es la menor. Vamos a probar ahora que $\delta = \tau_\Sigma$ y para ello basta probar que τ_Σ es topología y es la menor que contiene a Σ.

Afirmación. *Si $\tau \supseteq \Sigma$ es topología que contiene a Σ, entonces $\tau \supseteq \tau_\Sigma$.*

Dem. (Afirmación) Sea τ topología que contiene a Σ, supongamos que $A = \bigcap_i A_i \in \tau_\Sigma$ donde $A_i \in \Sigma$, entonces $A \in \Sigma$ y luego $A \in \tau$. Supongamos que $A = \bigcup_\alpha B_\alpha$ donde B_α es intersección finitas de elementos de Σ. Si τ es topología y $B_i \in \tau$, entonces $A \in \tau$. Por tanto $\tau \supseteq \tau_\Sigma$. ■

Nos falta probar que τ_Σ es una topología.

Afirmación. *τ_Σ es topología.*

Dem. (Afirmación) Basta probar los axiomas de topología,

(a) Por definición $\emptyset, X \in \tau_\Sigma$.

(b) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha$ una colección de elementos de τ_Σ, entonces $\bigcup_\alpha A_\alpha$ es una unión de intersecciones de elementos de Σ, es decir, $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau_\Sigma$.

(c) Sean $A_1, A_2 \in \tau_\Sigma$, digamos que $A_1 = \bigcup_i V_i$, $A_2 = \bigcup_j U_j$, luego,

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \left(\bigcup_i V_i\right) \cap \left(\bigcup_j U_j\right) \\ &= \bigcup_{i,j} (V_i \cap U_j) \end{aligned}$$

Es decir, $A_1 \cap A_2 \in \tau_\Sigma$, aplicando para n elementos llegamos a la generalización.

Por tanto τ_Σ es topología. ■

Por lo tanto $\delta = \tau_\Sigma$ y, por tanto, para $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ existe una topología menor que τ_Σ que contiene a Σ. ■

Definición 1.4. (Vecindad) *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que U es una vecindad de $x \in X$ si $x \in U$ y U es un abierto.*

Del teorema anterior podemos pensar en topología generadas a partir de uniones arbitrarias de intersecciones finitas de conjuntos. Obteniendo otro tipo de base para algunas topologías.

Definición 1.5 (Sub-base) *Sea (X, τ) espacio topológico. Decimos que $\mathcal{C} \subseteq \tau$ es sub-base de τ si todo abierto es unión de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{C}$.*

Observación 1.2. Se cumple que $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ es sub-base de τ_Σ. En particular, cualquier colección de conjuntos es sub-base de una topología. En particular, es sub-base de la topología generada.

Teorema 1.3. *Sea la colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si para todo $x \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ donde $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\tau_\mathcal{B}$*

Dem. Sabemos que $\mathcal{B}$ es una sub-base de $\tau_\mathcal{B}$, pero ahora vamos a probar que es una base. Sea $U \in \tau_\mathcal{B}$, entonces por definición,

$$U = \bigcap_{\text{arbitrario}} \bigcap_{\text{finito}} A$$

donde $A \in \mathcal{B}$. Sea $x \in U$, entonces podemos encontrar A_1, A_2 tales que $x \in A_1 \cap A_2$, luego existe un conjunto $A_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A_x \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq U$. Afirmamos que,

$$U = \bigcup_{x \in U} A_x$$

Y en efecto, la inclusión $\subseteq$ es clara y la otra es por definición de A_x. Por tanto U es unión arbitraria Notemos que $A \in \tau_\mathcal{B}$ es unión de intersecciones finitas de conjuntos en $\mathcal{B}$. Cada intersección finita es unión de conjuntos en $\mathcal{B}$, por tanto A es unión de conjuntos en $\mathcal{B}$. Es decir, $\mathcal{B}$ es base de $\tau_{\mathcal{B}}$. ■

Observación 1.3. Sea (X, d) espacio métrico, sea $\mathcal{B} = \{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$, se cumple que si $z \in B(x, r_1) \cap B(y, r_2)$, entonces existe r_3 tal que $B(z, r_3) \subseteq B(x, r_1) \cap B(y, r_2)$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de $\tau_{\mathcal{B}}$.

Definición 1.6. (Cerrado) *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que $A \subseteq X$ es cerrado si $X \setminus A \subseteq X$ es abierto.*

Proposición 1.1. *Existen infinitos números primos.*

Antes de probar la proposición necesitamos una definición.

Definición 1.7. (Topología de Fürstenberg) *Sea $(\mathbb{Z}, \tau)$ un espacio topológico. Decimos que A es abierto en $\mathbb{Z}$ si A es unión de conjuntos de la forma $S(a, b) := \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$*

Dem. Supongamos que hay finitos primos $p_1, \ldots, p_k$, notemos que,

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \coprod_{i=1}^{n} S(p_i, 0)$$

Debido a que al teorema fundamental de la aritmética. Notemos también que,

$$\mathbb{Z} \setminus \underbrace{\coprod_{i=1}^{a-1} S(a, b + i)}_{\text{abierto}} = S(a, b)$$

Por tanto $\coprod_{i=1}^{k} S(p_i, 0)$ es cerrado, pero $\{-1, 1\}$ es cerrado por lo tanto $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ es abierto, siendo una contradicción y luego hay infinitos primos. ■

Ejemplo 1.4. Pensemos en $\mathbb{R}$. Entonces la colección $\mathcal{V} = \{[a, b) : a < b\}$ es la base de $\tau_{\mathcal{V}}$, ya que para $x \in [a_1, b_1) \cap [a_2, b_2)$, podemos tomar a_3, b_3 tales que $x \in [a_3, b_3) \subseteq [a_1, b_1) \cap [a_2 b_2)$. Está topología se le conoce como de Sorgenfrey.

De forma similar podemos considerar la colección $\mathcal{B} = \{(a, b) : a < b\}$ como la base de $\tau_{\mathcal{B}}$, ya que cumple las condiciones del teorema 1.3. Y a esra topología se le conoce como topología usual de $\mathbb{R}$.

Definición 1.8. (Interior y Clausura) *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ unconjunto. Definimos el interior de A por,*

$$\mathring{A} = \textit{unión de los subconjuntos abiertos de } A$$

Y se define la clausura por,

$$\overline{A} = \textit{intersección de los conjuntos cerrados que contiene a } A$$

Nota 1.2. De forma más explícita,

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U\in\tau \\ U\subseteq A}} U$$

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{V^c\in\tau \\ V\supseteq A}} V$$

Observación 1.4. Notemos que el interior del conjunto A es el mayor conjunto abierto contenido en A, mientras que la clausura es el menor cerrado que contiene a A. Esto se puede ver por la definición, sea $B \subseteq A$ abierto, luego claramente $B \subseteq A^o$. Y para sea $A \subseteq B$ cerrado, luego $\overline{A} \subseteq B$.

Observación 1.5. Sea A un conjunto de un espacio topológico, entonces,

$$A^o \subseteq A \subseteq \overline{A}$$

Proposición 1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un conjunto. Entonces,*

(a) A es abierto si y sólo si $A = A^o$.

(b) A es cerrado si y sólo si $A = \overline{A}$

Dem. Sea A un conjunto.

(a) Supongamos que A es abierto, entonces $A \subseteq A$, por lo que $A \subseteq \mathring{A} \subseteq A$, luego $A = A^o$.

Supongamos ahora que $A = A^o$, entonces A es claramente abierto al ser una unión arbitraria de abiertos.

(b) Supongamos que A es cerrado, si $A \subseteq A$ entonces, $A \subseteq \overline{A} \subseteq A$, por lo que $A = \overline{A}$.

Supongamos ahora que $A = \overline{A}$, para probar que A es cerrado, debemos probar que la clausura es cerrado. Por definición de clausura se tiene que,

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{V^c\in\tau \\ V\supseteq A}} V$$

Luego el complemento es de la forma,

$$\overline{A}^c = \bigcup_{\substack{V^c \in \tau \\ V \supseteq A}} V^c$$

Es decir, es una unión arbitraria de abiertos y por tanto $\overline{A}^c$ es abierto, por lo que $\overline{A}$ es cerrado y por tanto A es cerrado.

■

Proposición 1.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea A un conjunto. Entonces,*

1. *$x \in A^o$ si y sólo si existe una vecindad U de x tal que $U \subseteq A$*
2. *$x \in \overline{A}$ si y sólo para toda vecindad U de x, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$*

Dem. Sea A un conjunto.

(a) Sea $x \in A^o$, entonces existe un abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U$, y tal que $U \subseteq A$, entonces $x \in U \subseteq A$.

Supongamos que existe un abierto $U \in \tau$, se tiene que $x \in U \subseteq A$, como U es abierto, entonces $U \subseteq A^o$, luego $x \in A^o$.

(b) Sea $x \in \overline{A}$, sea U abierto que tiene el elemento x. Notemos que $x \in B$ para todo B cerrado que contiene a A, Supongamos que para todo U que tiene el elemento x, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$, entonces,

■

Obserbación 1.6. De la proposición anterior, tenemos otra definición para el interior y la clausura de un conjunto,

$$\overset{\circ}{A} := \{x \in A : \exists U \text{ vecindad de } x \text{ tal que } U \subseteq A\}$$
$$\overline{A} := \{x \in X : \forall U \text{ vecindad de } x, \text{ se tiene que } U \cap A \neq \emptyset\}$$

También tenemos otra forma de probar que un conjunto es abierto o cerrado. Para ver que es abierto, basta probar que todo $x \in A$ tiene una vecindad de x contenida en A, y para ver que es cerrado, hay que probar que toda vecindad de $x \in X$ tiene interserccción no vacía con A.

Definición 1.9. (Derivada) *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subseteq X$. Definimos el conjunto derivada de A por,*

$$A' := \{x \in X : \forall\, U \text{ vecindad de } x \text{ se tiene que } (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

Proposición 1.4. *Sea (X, τ) espacio topológico, sea $A \subseteq X$, entonces $\overline{A} = A \cup A'$.*

Dem. Notemos que $A' \subseteq \overline{A}$, ya que si $x \in A'$, entonces toda vecindad de x, se tiene que $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, además de que,

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \subseteq U \cap A$$

Es claro que $U \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$. Probando la inclusión $\supseteq$. Para la otra notemos que si $x \in \overline{A}$, tenemos dos casos, $x \in A$ o bien $x \notin A$, en el primer caso estariamos listo, en el segundo se tiene que para toda vecindad U de x, se cumple que $(U \setminus \{x\}) \cap A = U \cap A$, y como $x \in \overline{A}$, entonces $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $x \in A'$. Probando la igualdad. ■

Para cerrar, vamos a trabajar con subtopologías Consideremos el espacio topológico (X, τ). Sea $Y \subseteq X$ un subconjunto cualquiera. Podemos dotar el subconjunto Y con una topología inducida por (X, τ) a la cual vamos a denotar por τ_Y. Esta se define por,

$$\tau_Y := \{A \subseteq Y : \exists\, U \subseteq X \text{ abierto de } \tau \text{ tal que } A = U \cap Y\}$$

Nota 1.3. Tener muy en presente que τ_Y toma distintos significado en distitnos conextos. Por lo que siempre dependera donde estamos trabajando y no habrá que asumir nada sin un contexto dado.

Afirmación. (Afirmación) τ_Y *es una topología en* Y*.*

Dem. Debemos probar los tres axiomas de topología.

(a) Claramente $\emptyset \in \tau_Y$ puesto que $\emptyset$ es abierto en τ, entonces $\emptyset = \emptyset \cap Y$. Y Y también es elemento de τ_Y, para ello basta tomar $U = X$, luego $Y = X \cap Y$.

(b) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha \subseteq \tau_Y$. Entonces existe $U_\alpha \subseteq X$ abierto tal que $A_\alpha = U_\alpha \cap Y$, luego $\bigcup_\alpha U_\alpha$ es abierto y entonces,

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) \cap Y$$

Luego $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau_Y$.

(c) Sean $A_1, A_2 \in \tau_Y$, luego existen $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $A_1 = U_1 \cap Y$ y $A_2 = U_2 \cap Y$, luego,

$$A_1 \cap A_2 = (U_1 \cap U_2) \cap Y$$

Como $U_1 \cap U_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau_Y$. De forma recursiva se prueba que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau_Y$

Por tanto τ_Y es topología de Y. ■

Lema 1.1. *Sea* $\mathcal{B}$ *una base* (X, τ) *y sea* $Y \subseteq X$*. Entonces el conjunto,*

$$\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base de τ_Y*.*

Dem. Sea $A \in \tau_Y$, luego existe $U \in \tau$ tal que $A = U \cap Y$, si $\mathcal{B}$ es base de τ, entonces,

$$U = \bigcup_\alpha B_\alpha$$

donde $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Entonces,

$$A = \left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) \cap Y = \bigcup_\alpha (B_\alpha \cap Y)$$

donde $B_\alpha \cap Y \in \mathcal{B}_Y$, es decir, A es unión de elementos del conjunto $\mathcal{B}_Y$, por lo que $\mathcal{B}_Y$ es base de τ_Y.

Observación 1.7.

- Digamos que $(Y, \tau_Y) \subseteq (X, \tau_X)$. Si Y es abierto en X y $A \subseteq Y$ es abierto en Y, entonces A es abierto en X. Puesto que si A es abierto en Y, entonces $A = U \cap Y$ con U abierto en X, pero si Y es abierto, entonces A es la intersección de dos abiertos, es decir, A es abierto en X.
- Si Y es cerrado en X y $A \subseteq Y$ es cerrado en Y, entonces A es cerrado en X. Puesto que si A es cerrado en Y, entonces $Y \setminus A$ es abierto en Y, luego existe U abierto en X tal que $Y \cap A^c = U \cap Y$, luego,

  $$Y^c \cup A = U^c \cup Y^c$$

  Es decir, $A = U^c$, por lo que A es cerrado en X.

Lema 1.2. *Sea (X, τ) espacio topológico. Sea $Y \subseteq X$. Entonces, $A \subseteq Y$ es cerrado en Y si y sólo si existe B cerrado en X tal que $A = B \cap Y$.*

Dem. Es solo aplicar la observación anterior. Si A es cerrado en Y, entonces $A = U^c$ con U abierto en X, si $A \subseteq Y$, entonces $A = U^c \cap Y$ encontrando nuestro B cerrado.

Por otro lado, si $A = B \cap Y$ con B cerrado, entonces,

$$Y \setminus A = Y \cap A^c = Y \cap (B^c \cup Y^c) = Y \cap B^c$$

Es decir, $Y \setminus A$ es abierto en Y, luego A es cerrado en Y. ■

1.1. Topología Producto y Funciones Continuas

Queremos definir la topología producto sobre una colección indexada no necesariamente sobre un conjunto numerable. Para ello empezaremos con el caso más sencillo, el producto entre dos espacios topológicos. Luego Definiremos y estudiaremos algunas propiedades de funciones continuas, ya que son importantes en el curso pero además, nos serviran para definir la topología producto general.

Definición 1.10. (Topología Producto) *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Definimos la topología producto denotada por $\tau_X \times \tau_Y$ en $X \times Y$ dada por los réctangulos $R = A \times B$ donde $A \subseteq X, B \subseteq Y$ son abiertos.*

Con esto podemos concluir que la colección,

$$\mathcal{R} = \{A \times B : A \subseteq X, B \subseteq Y \text{ abiertos}\}$$

es una base de la tpología $\tau_X \times \tau_Y$.

Observación 1.8. Un resultado que podemos notar, es que para todo $A_1, A_2 \subseteq X B_1, B_2 \subseteq Y$ se cumple que:

$$A_1 \times B_1 \cap A_2 \times B_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$
$$A_1 \times B_1 \cup A_2 \times B_2 = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$

Así por ejemplo, todo rectángulo $R = A \times B$ de la topología producto se puede pensar de la siguiente forma:

$$A \times B = (A \cap X) \times (B \cap Y) = A \times Y \cap X \times B$$

Ejemplo 1.5. Sea $\mathbb{R}$ bajo la topología τ euclidiana. Entonces podemos construir la topología producto $(\mathbb{R}^2, \tau \times \tau)$. Un abierto de $\mathbb{R}^2$ es de la forma,

$$U = \bigcup_\alpha \mathcal{O}_\alpha^1 \times \mathcal{O}_\alpha^2$$

donde $\mathcal{O}_\alpha^i$ son abiertos de $\mathbb{R}$.

Ahora definiremos funciones continuas en el sentido topológico, ya que habitualmente se define sobre una métrica, pero como claramente no existe la métrica de forma directa en un espacio topológico, necesitamos una definición más fuerte.

Definición 1.11. (Función Continua) *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ dos espacos topológicos. Sea $f : X \to Y$ una función. Diremos que es continua si para todo abierto $U \subseteq Y$, se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

Proposición 1.5. *Sean $(X, d_x), (Y, d_y)$ espacios métricos. Entonces $f : X \to Y$ es continua en el sentido métricos si y sólo si es continua en el sentido topológico.*

Dem. Recordemos que (X, τ_X) es una topología inducida por la métrica d_x, si su base es,

$$\mathcal{B} = \{U \subseteq X : U \text{ abierto en el sentido métrico}\}$$

Supongamos que $f : X \to Y$ es continua en el sentido topolócamente. Sea U un abierto en el sentido métrico, luego es abierto en τ_Y, entonces por continuidad topológica, $f^{-1}(U)$ es abierto en τ_X, y luego en el sentido métrico, sea $\varepsilon > 0$, digamos que $U = B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ que es abierto métricamente, entonces, $f^{-1}(U)$ es una vecindad de x_0, sea $V := B_X(x_0, \delta)$ con $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $V \subseteq f^{-1}(U)$, entonces si $d_x(x, x_0) < \delta$, se tiene que $d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, por tanto f es continua en el sentido métrico.

Supongamos ahora que $f : X \to Y$ es continua en el sentido métrico, sea U un abierto en el sentido métrico, debemos probar que $f^{-1}(U)$ es abierto. Sea $x \in f^{-1}(U)$, luego $f(x) \in U$, entonces existe una bola $B_Y(f(x), \varepsilon) \subseteq f^{-1}(U)$, luego por continuidad en el sentdio métrico, existe un $\delta > 0$ tal que $B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(f(x), \varepsilon) \subseteq f^{-1}(U)$, esto implica que hay una bola de centro x contenido en U, es decir, $f^{-1}(U)$ es abierto y por tanto, es continua en el sentido topológico. ■

Proposición 1.6. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y), (Z, \tau_Z)$ espacios topológicos. Sean $f : X \to Y, g : Y \to Z$ funciones continuas, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(a) $g \circ f : X \to Z$ es una función continua.

(b) Sea $X_1 \subseteq X$, entonces $f\big|_{X_1} : X_1 \to Y$ es continua.

(c) La función $\overline{f} : X \to Im(f)$ es continua.

Dem.

(a) Para probar que $g \circ f$ es continua, debemos probar que todo abierto $U \subseteq Z$, el conjunto preimagen $(g \circ f)^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. Sea $U \subseteq Z$ abierto, afirmamos que,

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

por lo que debemos probarlo. Si $x \in (g \circ f)^{-1}(U)$, entonces $g(f(x)) \in U$, pero entonces $f(x) \in g^{-1}(U)$, y luego $x \in f^{-1}(g^{-1}(U))$. Para la otra dirección es análoga.

A partir de loa anterior se tiene que $g^{-1}(U) \subseteq Y$ es abierto y entonces $f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$ es abierto. Por lo tanto $g \circ f$ es continua.

(b) La función restringida $f\big|_{X_1}$ es una función topológica sobre el espacio (X_1, τ_{X_1}), es decir,

$$\tau_{X_1} = \{B \subseteq X : \exists V \in \tau, B = V \cap X_1\}$$

Sea $U \subseteq Y$ abierto, entonces $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. Se tiene que,

$$f^{-1}\big|_{X_1}(U) = f^{-1}(U) \cap X_1 \in \tau_{X_1}$$

Luego $f\big|_{X_1}$ es continua.

(c) Sea $(Im(f), \tau^*)$ la topología donde,

$$\tau^* = \{B \subseteq Y : \exists V \in \tau, B = V \cap Im(f)\}$$

Sea $U \subseteq Im(f)$ abierto, luego existe un $V \subseteq Y$ abierto tal que $U = V \cap Im(f)$. Afirmamos que,

$$\overline{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

Y en efecto,

$$\overline{f}^{-1}(U) = \overline{f}^{-1}(V \cap Im(f)) = \overline{f}^{-1}(V) \cap X = \overline{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \in \tau_X$$

Por tanto $\overline{f}$ es continua.

■

Probar continuidad a veces es complicado, por lo que queremos un resultado que nos diga que algo es continua usando otras hipótesis.

Teorema 1.4. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(a) f es continua.

(b) Toda preimagen de un cerrado, es cerrado.

(c) Sea $\mathcal{B}$ base de Y. Luego la preimagen de todo elemento de la base es abierto.

(d) Para todo $x \in X$ y para toda vecindad $W(f(x))$ de $f(x)$, existe una vecindad $V(x)$ de x tal que $f(V(x)) \subseteq W(f(x))$.

(e) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.

(f) $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subseteq Y$.

Dem. Vamos a solamente probar algunas implicancia y luego llegaremos a que todas son equivalentes.

- **(a) equivalente (b).** Sea f continua. Sea $D \subseteq Y$ un conjunto cerrado. Entonces D^c es abierto, entonces $f^{-1}(D^c) \subseteq X$ es abierto. En particular, se cumple que $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$, entonces $f^{-1}(D) \subseteq X$ es cerrado.

  Supongamos que se cumple (b). Sea $U \subseteq Y$ abierto, entonces $U^c \subseteq Y$ es cerrado y entonces $f^{-1}(U^c) = (f^{-1}(U))^c \subseteq X$ es cerrado. Por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto.

- **(a) equivalente (c).** Sea f continua. Sea $\mathcal{B}$ base de Y. Si $B \in \mathcal{B}$, por definición se tiene que B es abierto, entonces $f^{-1}(B) \subseteq X$ es abierto.

  Supongamos que se cumple (c). Sea $U \subseteq Y$ abierto, entonces,

  $$U = \bigcup_{\alpha} B_\alpha$$

  donde $B_\alpha \in \mathcal{B}$. Luego,

  $$f^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_\alpha)$$

  Como $f^{-1}(B_\alpha)$ son abiertos, entonces su unión arbitraria es abierto, es decir, $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto, y luego f es continua.

- **(a) implica (d).** Sea $x \in X$, sea $U = W(f(x)) \subseteq Y$ vecindad de $f(x)$, definimos $V(x) := f^{-1}(U)$ que es abierto que contiene a x al ser f continua, luego se tiene que,

  $$f(V(x)) = f(f^{-1}(U) \subseteq U = W(f(x))$$

  Como queriamos probar.

- **(d) implica (e).** Sea $y \in f(\overline{A})$. Luego existe $x \in \overline{A}$ tal que $f(x) = y$. Sea $U = W(f(x))$ vecindad de $f(x)$, entonces existe una vecindad $V(x)$ de x tal que $f(V(x)) \subseteq W(f(x))$, notemos que $f(V(x)) \cap f(A) \subseteq W(f(x)) \cap f(A)$, si $f(V(x)) \cap f(A) \neq \emptyset$ entonces, toda vecindad U de $f(x)$ se tiene que $U \cap f(A) \neq \emptyset$, es decir, $f(x) \in \overline{f(A)}$. Como queriamos probar.

- **(e) implica (f).** Sea $A = f^{-1}(B)$, entonces $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, luego,

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B}$$

Entonces,

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$$

- **(f) implica (b).** Sea $D \subseteq Y$ cerrado, entonces $D = \overline{D}$ y,

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$$

Es decir, $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$, por lo que $f^{-1}(B)$ es cerrado.

De esta forma demostramos que todas son equivalentes. ■

Definición 1.12. (Continuidad en un Punto) *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es continua en $x \in X$ si para toda vecindad $W(f(x))$, existe una vecindad $V(x)$ de x tal que $f(V(x)) \subseteq W(f(x))$.*

Finalmente podemos concluir que una función $f : X \to Y$ es continua si es continua en todo $x \in X$, y claramente está todo bien definido por el teorema anterior.

Ejemplo 1.7.

- Una función constante es siempre continua, si consideramos $f : X \to Y$ de constante y_0, se tiene que para todo $U \subseteq Y$ abierto, se tiene que,

$$f^{-1}(U) = \begin{cases} X & y_0 \in U \\ \emptyset & y_0 \notin U \end{cases}$$

Luego es claro que $f^{-1}(U)$ es abierto.

- Consideremos la función identidad:

$$\begin{aligned} id : (X, \tau_1) &\to (X, \tau_2) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Entonces es continua si y sólo si $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Si la identidad es continua, entonces para U abierto en τ_2 se tiene que $id^{-1}(U) = U$ es abierto en τ_1. Y para la otra dirección consideramos U abierto en τ_2, luego $id^{-1}(U) = U$ y entonces U es abierto en τ_1 siendo id continua.

Observación 1.9. Notemos que la identidad no implica que las topologías se conserven. Por tanto es importante el comportamiento de la topología τ_2.

Propocisión 1.7. *Sea X un espacio topológicos con dos topología τ_1, τ_2. Entonces $\tau := \tau_1 \cap \tau_2$ es una topología en X.*

Dem. Basta probar los axiomas de topologías.

- Si $\emptyset, X \in \tau_1, \tau_2$, entonces $\emptyset, X \in \tau_1 \cap \tau_2$.
- Sea $\{A_\alpha\}_\alpha \subseteq \tau_1 \cap \tau_2$, entonces, tenemos la misma colección en τ_1, τ_2, entonces,

  $$\bigcup_\alpha A_\alpha \in \tau_1, \tau_2$$

  Luego la unión arbitraria está en $\tau_1 \cap \tau_2$.
- Sean $A_1, \ldots, A_n \in \tau_1 \cap \tau_2$, usando el mismo argumento anterior, se tiene que la intersección finita está en $\tau_1 \cap \tau_2$.

Luego $\tau_1 \cap \tau_2$ es topología.

Corolario 1.1. *Sea X un espacio topológico con n topologías $\tau_1, \ldots, \tau_n$. Entonces,*

$$\tau := \bigcap_{i=1}^{n} \tau_i$$

es una topología de X.

Dem. Basta aplicar la propocisión anterior de forma recursiva. ∎

Proposición 1.8. *Consideremos la siguiente función topológica $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Sea el conjunto preimagen de la topología τ_Y definida por:*

$$f^{-1}(\tau_Y) := \{f^{-1}(U) : U \subseteq Y \textit{es abierto}\}$$

Entonces $f^{-1}(\tau_Y)$ es una topología.

Dem. Probemos los axiomas de topología.

(a) Notemos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y que $f^1(Y) = X$, entonces $\emptyset, X \in \tau_X$.

(b) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha \subseteq f^{-1}(\tau_Y)$, con $A_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$, entonces,

$$\bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1} \underbrace{\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right)}_{\in \tau_Y} \in f^{-1}(\tau_Y)$$

(c) Sean $A_1, A_2 \in f^{-1}(U_\alpha)$, donde $A_1 = f^{-1}(U_1), A_2 = f^{-1}(U_2)$, entonces,

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(U_1 \cap U_2) \in f^{-1}(\tau_Y)$$

Por tanto $f^{-1}(\tau_Y)$ es topología. ■

Proposición 1.9. *Sea la función topológica $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Entonces es continua si y sólo si $f^{-1}(\tau_Y) \subseteq \tau_X$. También se cumple que $f^{-1}(\tau_Y)$ es la menor topología tal que f es continua.*

Dem. Vamos a probar primero la equivalencia y luego probaremos que es la menor topología donde f es continua.

- **Equivalencia.** Supongamos que f es continua, sea U un abierto en $f^{-1}(\tau_Y)$, entonces $U = f^{-1}(V)$ con V abierto en Y, luego $f^{-1}(U)$ es también abierto en τ_X, luego $f^{-1}(\tau_Y) \subseteq \tau_X$.

  Por otro lado, sea $U \subseteq Y$ abierto, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en$f^{-1}(\tau_Y) \subseteq \tau_X$, por tanto $f^{-1}(U)$ es abierto en la topología de X, probando que f es continuo.

- **La menor topología.** Basta usar la equivalencia anterior, si τ es una topología de X tal que f es continua, entonces necesariamente $f^{-1}(\tau_Y) \subseteq \tau$. Por lo tanto, $f^{-1}(\tau_Y)$ es la menor topología de X donde f es continua.

Propocisión 1.10. *Sea (X, τ_X) un espacio topoloógico. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto con topología inducida τ_A. Consideremos la función inclusión:*

$$i : (A, \tau_A) \hookrightarrow (X, \tau_x)$$

Entonces $i^{-1}(\tau_X)$ es la topología inducida en A.

Dem. Primero que nada, notemos que i es una función continua, dado que si U es abierto en τ_X, entonces,

$$i^{-1}(U) = U \cap A$$

debido a que i es la inclusión, luego $i^{-1}(U)$ es abierto en τ_A. De esta forma $i^{-1}(\tau_X) \subseteq \tau_A$.

Probemos que $\tau_A \subseteq i^{-1}(\tau_X)$. Sea U abierto en τ_A, entonces $U = V \cap A$ donde V es abierto en τ_X, ahora notemos que,

$$i^{-1}(U) = i^{-1}(V) \cap i^{-1}(A) = i^{-1}(V) \cap A = i^{-1}(V) \in i^{-1}(\tau_X)$$

Por tanto $\tau_A = i^{-1}(\tau_X)$. ■

Consideremos los espacios topológicos $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$. Entonces podemos construir la topología producto $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ con base,

$$\mathcal{B} = \{U \times V \subseteq X \times Y : U \subseteq X, V \subseteq Y \text{ abiertos}\}$$

Definamos las proyecciones canónicas:

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \\ \pi_2 : X \times Y &\to Y \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

Se puede verificar que las proyecciones canónicas son funciones continuas. Verifiquemos con π_1. Sea $U \subseteq X$ abierto, luego $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$, donde $U \times Y$ es un rectángulo, luego es abierto.

Propocisión 1.11. *Sean los espacios topológicos $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$. Entonces la topología producto $\tau_X \times \tau_Y$ es la menor topología de $X \times Y$ donde las proyecciones π_1, π_2 son continuas.*

Dem. Probemos que es la menor topología. Sea τ una topología de $\tau_X \times \tau_Y$ de forma que π_1, π_2 son continuas. Sea $U \times V$ un abierto de la base de $\tau_X \times \tau_Y$, se tiene que,

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V)$$

Donde $U \times Y = \pi_1^{-1}(U), X \times V = \pi_2^{-1}(V)$, como π_1, π_2 son continuas en τ, se tiene que $U \times V$ es la intersección de dos abiertos en τ, es decir, $U \times V$ es abierto en τ. Por lo tanto $\tau_X \times \tau_Y \subseteq \tau$. ■

1.2. Topología Producto Generalizado

Hemos estudiamos el producto de dos conjuntos con espacios topológicos. Ahora vamos a generalizar este concepto sobre un conjunto $\mathcal{A}$ arbitrario.

Consideremos la colección $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de espacios topológicos. Consideramos el producto de los conjuntos α por,

$$\mathcal{X} := \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$$

Sobre este conjunto producto queremos formar una topología. Podriamos pensar igual que $\tau_X \times \tau_Y$, pero esto sirve cuando trabajamos en una colección $\mathcal{A}$ finita y problemente numerable. Para ello vamos a estudiar las proyecciones sobre el producto $\mathcal{X}$ y a partir de eso definiremos la topología producto generalizada.

Una proyección en $\mathcal{X}$ es de la forma:

$$p_\beta : \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \to X_\beta$$

Para todo $\beta \in \mathcal{A}$. Para la construcción recordemos que en el producto de dos topologías, de X y de Y, que un rectángulo abierto $U \times V$ puede ser expresado de la siguiente forma:

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$$

Ahora, un abierto O de esta topología producto tiene forma:

$$O = \bigcup_\alpha U_\alpha \times V_\alpha = \bigcup_\alpha \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$$

Por tanto, todo abierto de $X \times Y$ puede ser expresado como una unión arbitraria de una interseccón numerable de preimagenes, es decir, la colección,

$$\mathcal{B}^* = \{\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) : U \subseteq X, V \subseteq Y \text{ abiertos}\}$$

es una base de $X \times Y$. O bien la colección de las proyecciones canónicas conforman una sub-base de la topología $X \times Y$.

Definiremos la topología producto general $\mathcal{X}$ (o topología producto a partir de ahora), por la unión arbitraria de intersecciones finitas de conjuntos de la forma:

$$p_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in \mathcal{X} : x_\beta \in U_\beta\}$$

donde $\beta \in \mathcal{A}$. También se puede pensar que la colección de los elementos de la forma:

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$$

conforma una base de $\mathcal{X}$.

Observación 1.9. Notemos que la colección:

$$\mathcal{B} = \{\{(x_\alpha)_\alpha : x_{\alpha_1} \in U_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n} \in U_{\alpha_n}\}, U_{\alpha_i} \subseteq X_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\}$$

es una base. Debido a que,

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \{(x_\alpha)_\alpha \in \mathcal{X} : x_{\alpha_1} \in U_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n} \in U_{\alpha_n}\}$$

Pero no es la única base explícita que poseé $\mathcal{X}$.

Proposición 1.12. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de espacios topológicos. Sea $\mathcal{X}$ el espacio producto de esta colección. Consideremos la siguiente colección:*

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha : U_\alpha \textit{ abierto en } X_\alpha,\ U_\alpha = X_\alpha \textit{ excepto en infinitos índices} \right\}$$

Entonces $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{X}$.

Dem. Basta usar la primera base que usamos. Recordemos que un rectángulo abierto de $\mathcal{X}$ es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) &= \{(x_\alpha)_\alpha \in \mathcal{X} : x_{\alpha_1} \in U_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n} \in U_{\alpha_n}\} \\ &= \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \end{aligned}$$

donde en el producto ocurre que $U_\alpha = X_\alpha$ cuando $\alpha \neq \alpha_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como queriamos probar. ■

Observación 1.10. Las funciones proyecciones son continuas sobre la topología producto. Y eso es claro puesto que la preimagen de una proyección de un abierto $U \subseteq X_\alpha$, es un producto donde un solo factor no es X_α.

Definición 1.13. (Función Abierto y Cerrado) *Sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que es abierta si la imagen de todo abierto, es abierto. Decimos que es cerrada si la imagen de todo cerrado es cerrado.*

Ejemplo 1.6. Sean X, Y espacios topológicos. Luego las proyecciones π_1, π_2 sobre la topología $\tau_X \times \tau_Y$ son abiertas. Para verificarlo baste ver que un rectángulo abierto $U \times V$ de $X \times Y$, al ser evaluado en π_1, toma forma,

$$\pi_1(U \times V) = U$$

De forma general, si,

$$O = \bigcup_\alpha U_\alpha \times V_\alpha$$

Entonces,

$$\pi_1(O) = \pi_1\left(\bigcup_\alpha U_\alpha \times V_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \pi_1(U_\alpha \times V_\alpha) = \bigcup_\alpha U_\alpha$$

Siendo π_1 abierto. Para π_2 el procedimiento es análogo.

Propocisión 1.13. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ una colección de espacios topológicos. Sea $\mathcal{X}$ el topología producto. Entonces las proyecciones canónicas de $\mathcal{X}$ son abiertas.*

Dem. Sea $B^* := \bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, donde $U_{\alpha_i} \subseteq X_{\alpha_i}$ son abiertos. Notemos que,

$$p_\beta(B^*) = \begin{cases} U_{\alpha_i}, & \text{si } \beta = \alpha_i \text{ para algún } i. \\ X_\beta, & \text{si } \beta \neq \alpha_i \text{ para todo i.} \end{cases}$$

Claramente p_β es abierto. Para la generalización basta ver que si $U = \bigcup_\alpha B_\alpha^*$ (donde B_α^* es definido similarmente como B^*). Entonces,

$$p_\beta(U) = \bigcup_\alpha p_\beta(B_\alpha^*)$$

Es decir, la imagen de U es unión de abiertos, luego es abierto. Por tanto la proyección es una función abierta. ■

Teorema 1.5. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una colección de espacios topológicos. Sean $\mathcal{X}$ la topología producto y sea (X, τ) otro espacio topológico. Sea $f : X \to \mathcal{X}$ una función topológica. Decimos que es continua si y sólo si*

$$p_\beta \circ f : X \to X_\beta$$

es continua para todo $\beta \in \mathcal{A}$.

Dem. Supongamos que f es continua. Si p_β es continua para todo $\beta \in \mathcal{A}$, entonces por la composición de continuas, se tiene que $p_\beta \circ f$ es continua para todo $\beta \in \mathcal{A}$.

Supongamos ahora que la función $p_\beta \circ f$ es continua para todo $\beta \in \mathcal{A}$. Vamos a probar que la preimagen de un elemento de la base, es un abierto. Consideremos el conjunto:

$$B^* := \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$$

donde U_{α_i} son abiertos para todo $i = 1, \dots, n$. Luego,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B^*) &= \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} (p_{\alpha_i} \circ f)^{-1}(U_{\alpha_i}) \end{aligned}$$

Por tanto, f^{-1} es intersección finita de conjunto abierto y entonces $f^{-1}(B^*)$ es abierto. En el caso general, notemos que para $U = \bigcup_\alpha B_\alpha^*$ (B_α^* definido similarmente a B^*), se tiene que,

$$f^{-1}(U) = \bigcup f^{-1}(B^*)$$

Luego sería una unión de abiertos, es decir, $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. ■

Observación 1.11, Consideremos la colección finita de espacios topológicos $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1}^n$ y sean $\mathcal{X}$ la topología producto y (X, τ) otro espacio topológico. Una función topológica $f : X \to \mathcal{X}$ se puede pensar de la siguiente forma:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

para todo $x \in X$. Entonces se cumple que $f_i(x) = (p_i \circ f)(x)$, es decir, f es continua si y sólo si sus coordenadas son continuas. Por lo que el teorema anterior es simplemente una generalización de las coordenadas continuas de una función topológica. En particular, si consideramos las condiciones del teorema antrerior, se tiene que las corodenadas de f son de la forma:

$$f_\alpha = p_\alpha \circ f : X \to X_\alpha$$

Corolario 1.2. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de espacios topológicos. Sean $\mathcal{X}$ la topología producto y (X, τ) otro espacio topológico. Sean $f_\alpha : X \to X_\alpha$ funciones topológicas y sea la función $f : X \to \mathcal{X}$ donde $f(x) = (f_\alpha(x))_\alpha$. Entonces f es continua si y sólo si f_α es continua para todo α.*

Dem. De la observación anterior, sabemos que $f_\alpha = p_\alpha \circ f$, entonces basta usar el teorema anterior. ■

Proposición 1.14. *Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una colección de espacios topológicos y sea $\mathcal{X}$ la topología producto. Entonces se cumple las siguientes afirmaciones:*

(a) Sean $A_\alpha \subseteq X_\alpha$, entonces,

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \overline{A_\alpha} = \overline{\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha}$$

(b) Sean $A_i \subseteq X_i$ donde $i = 1, \dots, n$; entonces,

$$\prod_{i=1}^{n} A_i^o = \left(\prod_{i=1}^{n} A_i \right)^o$$

Dem.

(a) Sean $A_\alpha \subseteq X_\alpha$. Supongamos que,

$$(x_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} \overline{A_\alpha}$$

Luego $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$, por lo que para toda vecindad U de x_α se tiene que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$.

Sea U^* vecindad de $(x_\alpha)_\alpha$, probemos que:

$$U^* \cap \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \neq \emptyset$$

Supongamos que fuera vacío la intersección, entonces,

$$\emptyset = p_\alpha(\emptyset) = p_\alpha \left(U^* \cap \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right) = p_\alpha(U^*) \cap A_\alpha$$

Es decir,

$$p_\alpha(U^*) \cap A_\alpha = \emptyset$$

donde $p_\alpha(U^*)$ es vecindad de x_α al ser abierto la proyección, llegando a una contradicción. De forma que la intersección que impusimos es no vacío, y por tanto,

$$(x_\alpha)_\alpha \in \overline{\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha}$$

Probando la inclusión $\subseteq$. Para la otra inclusión sea,

$$(x_\alpha)_\alpha \in \overline{\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha}$$

Entonces toda vecindad U^* de $(x_\alpha)_\alpha$ cumple que:

$$U^* \cap \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \neq \emptyset$$

Supongamos que hay una vecindad U_α de x_α tal que $U_\alpha \cap A_\alpha = \emptyset$. Tomando la preimagen, llegamos a que,

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \mathcal{Y} = \emptyset$$

donde $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es una vecindad de $(x_\alpha)_\alpha$, y además, $\mathcal{Y}$ contiene al producto de los A_α, probando que:

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = \emptyset$$

Siendo contradicción. Por tanto $x_\alpha \in \overline{A_\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. De esta forma probamos la igualdad.

(b) Sean $A_i \subseteq X_i$. Supongamos que,

$$(x_i)_i \in \prod_{i=1}^n A_i^o$$

Entonces $x_i \in A_i^o$ para todo $i = 1, \ldots, n$, luego existe U_i vecindad de x_i tal que $U_i \subseteq A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Por tanto,

$$\prod_{i=1}^n U_i \subseteq \prod_{i=1}^n A_i$$

Notemos que el producto de los U_i es un abierto en $\mathcal{X}$, por lo que es una vecinda de $(x_i)_i$ y por tanto,

$$(x_i)_i \in \left(\prod_{i=1}^n A_i\right)^o$$

Probando la inclusion $\subseteq$. Probemos la otra inclusión, consideremos,

$$(x_i)_i \in \left(\prod_{i=1}^n A_i\right)^o$$

Entonces existe un abierto U de $(x_i)_i$ tal que,

$$U \subseteq \prod_{i=1}^n A_i$$

Como U es abierto **termiar**

Probando la proposición. ∎

Nota 1.4. Consideremos la topología producto arbitraria $\mathcal{X}$. Existe otra topología más general, la cual es basicamente el producto de abierto, es decir, es la topología con base:

$$\mathcal{B}^* := \left\{ \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha : U_\alpha \text{ abierto en } X_\alpha \right\}$$

La topología con base $\mathcal{B}^*$ se le llama **topología caja**.

Observación 1.12.

- La topología caja es más fina que la topología producto.
- La topología producto tiene la característica de que todo espacio topológico que compone al producto, este se traslada al producto (producto de conexos, es un conexo), esto no ocurre en la topología caja.

Observación 1.13. Sea $\{(X_i, \tau_n)\}_{i=1}^n$ una colección finita de topologías. Entonces la topología producto es igual a la topología caja. En particular, esto se cumple solo para un producto finito.

Ejemplo 1.7.

- Sea $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto donde $\{0, 1\}$ está dotada con la topología discreta. X se define nautalmente de la siguiente manera:

$$X = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{0, 1\}\}$$

Por otro lado, X es metrizable (es decir, existe una métrtica en X tal que la topología inducida en X sea precisamente la topología de X, de partida). Esta métrica es,

$$d((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

Afirmación. *La métrica d induce la topología producto en $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.*

Dem. Claramente d es una métrica bien definida. Estudiemos las bolas. Por definición,

$$B(x, r) = \left\{ y \in X : \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} < r \right\}$$

Determinemos los valores de y. Sean $x \in X$ y $r > 0$ fijos, notemos que existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\frac{1}{2^i} < r < \frac{1}{2^{i-1}}$$

Esto implica que al tomar $x_j \neq y_j$ con $j < i$ se tiene que $d(x, y) > r$ ya que es mayor o igual a $1/2^{i+1}$, que es la menor suma posible de las combinaciones considerando $x_i \neq y_i$ (el resto se considerar $x_j = y_j$), ahora se cumple claramente que:

$$\frac{1}{2^{i+1}} < \frac{1}{2^i} < r$$

Además, si consideramos la mayor suma posible para que $d(x, y) < r$ (considerando $x_i = y_i$), la cual es cuando $x_s \neq y_s$ para $s > i$ la cual tiene valor,

$$d(x, y) = \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^i} < r$$

Si consideramos $x_i \neq y_i$ entonces debemos tener cuidado con $s > i$, pero como,

$$\sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}} > r$$

entonces para algún $i < k < \infty$, la suma supera a r cuando en $k-1$ la suma es menor a r, de aquí concluimos que:

$$B(x,r) = (\{x_1\} \times \dots \{x_i\} \times \{0,1\} \times \dots \{0,1\} \times \dots) \cup (\{x_1\} \times \cdots \times \{|1-x_i|\} \times)$$

terminar

- Sea la función $T : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ una transformación dada por,

$$T((x_1, x_2, \dots)) = (x_2, x_3, \dots)$$

Afirmación. *T es continua.*

Dem. Se tiene que,

$$T(x) = (T)$$

- Definimos el cilindro de largo n por,

$$[a_1, \dots, a_n] := \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : x_i = a_i, i = 1, \dots, n\}$$

Es decir, son las sucesiones que tienen los primeros n elementos iguales.

Afirmación. *La colección de cilindro forma una base de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$*

Definición 1.14. (Homeomorfismos) *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ función. Decimos que es homeomorfismo si f es continua, biyectiva y su inversa es continua. Si entre los espacios $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ existe una función homeomorfismo, entonces decimos que X, Y son homeomorfos.*

Definición 1.15. (Incrustación) *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ una función. Decimos que es eubedding o incrustación, si f es homeomorfismo de X a su imagen, (es decir, f es inyectiva, continua, invertible continua desde la imagen).*

Ejemplo 1.8.

- $\mathbb{R}$ es homemorfo a $(-1,1)$. Para ello se considera la función,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to (-1,1) \\ x &\mapsto \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$$

- $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a la bola $B(0,1)$. Para ello se considera la función,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to (-1,1) \\ x &\mapsto \frac{x}{1+\|x\|} \end{aligned}$$

- Sea $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = mx + n\}$ los puntos de una recta en $\mathbb{R}^2$.

  Afirmación. *L con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$ es homeomorfa a $\mathbb{R}$ con al topología usual.*
  Dem. (Afirmación) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) := (x, mx+n)$. Notar qe f es continua (posee coordenadas continuas), y que $f(\mathbb{R}) = L$. Consideremos la proyección canónica $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\pi_1(x,y) = x$. La proyección es continua, entonces $\pi_1\big|_L : L \to \mathbb{R}$ es continua con la topología de L. Notar que f y $\pi_1\big|_L$ son inversas y continuas. (f con codominio L).

1.3. Conjunto de Cantor

Recordemos algunas cosas. Todo elemento $x \in [0,1]$ puede ser escrito de la siguiente forma,

$$x = \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{3^i}$$

donde $a_i \in \{0,1,2\}$. Para poder ver esto podemos estudiar término por término. Consideremos una recta dividida en tres dos partes, formando tres segmentes,

Figura. cuaderni

Si $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ entonces podemos ver que $x = \frac{1}{3} + R_1$, donde R_1 es el resto positivo. Ahora al segmento del intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, podemos volver a separarlo en tres segmentos y proceder de forma análoga, si $\frac{4}{9} < x < \frac{5}{9}$, entonces $x = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + R_2$, de forma sucesivamente podemos ver que,

$$x = \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{3^i}$$

Notemos también que x es expresado por una suma finita, si en algún momento x toca una límite de intervalo de la forma $\left[\frac{k}{3^N}, \frac{k+1}{3^N}\right]$. Si x es de la forma,

$$x = \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{3^i}$$

Entonces podemos expresar $x = (a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots, a_N, \overline{0})$, en particular, x tiene dos forma de ser expresado ya que,

$$x = (a_1, a_2, \ldots, a_N, \overline{0}) = (a_1, a_2, \ldots, a_N - 1, \overline{2})$$

donde $a_N \geq 1$. Por otro lado, si x es una serie, entonces su representación es única.

Ejemplo 1.9. Para $x = (0, \overline{2})$ se tiene que,

$$x = (0, \overline{2}) = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots = \frac{2}{3^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots\right) = \frac{2}{3^2}\frac{3}{2} = \frac{1}{3} = (1, \overline{0})$$

Por lo que tiene dos forma de ser expresado.

Definición 1.16. *Definimos* $\varphi : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ *dado por,*

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots) = \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{3^i}$$

Como la función que toma una sucesión de elementos del conjunto $\{0,1,2\}$ *a un valor en* $[0,1]$.

Vamos a construir y definir el conjunto de Canto. Consideremos $I_0 = [0,1]$, vamos a tomar tres segmentos de largos iguales y vamos a quitar el del medio, generando,

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Ahora volvemos hacer esto para los dos segmentos, generando,

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Y así sucesivamente. Definimos el conjunto de Cantor-$\frac{1}{3}$ por,

$$K := \bigcap_{k \geq 1} I_k$$

Que es un conjunto no vacío por el teorema de los intervalos cerrados. Además es no numerable.

Teorema 1.6. *La función* $\varphi\big|_{\{0,2\}^{\mathbb{N}}} : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to K$ *es una función homeomorfa tomando* $K \subseteq \mathbb{R}$ *la topologia inducida, y* $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ *la topología producto.*

Dem. Debemos probar que es inyectiva, sobreyectiva, continua y la inversa es continua.

- φ **inyectiva.** Si no fuera inyectiva, entonces $x \in [0,1]$ tendría dos representaciones, es decir, x sería una suma finita. Probemos que es inyectiva, si $(a_1, a_2, \ldots), (b_1, b_2, \ldots)$ son tales que,

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots) = \varphi(b_1, b_2, \ldots) = \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{3^i} = \sum_{i \geq 1} \frac{b_i}{3^i}$$

  Luego,

$$\sum_{i \geq 1} \frac{a_i - b_i}{3^i} = 0$$

  Terminar

  Luego φ es inyectiva.

- φ **sobreyectiva.** Notemos que $I_1 = \varphi([0]) \cup \varphi([2])$, luego,

$$I_2 = \varphi([0,0]) \cup \varphi([0,2]) \cup \varphi([2,0]) \cup \varphi([2,2])$$

  Es decir, I_k es unión de imagenes de cilindros. Si $x \in K$ entonces $x \in I_i$ para todo $i \geq 1$, entonces x se puede escribir como $(a_1, a_2, \dots)$ donde $a_i \in \{0,2\}$, es decir, φ es sobreyectiva y por tanto biyectiva.

- φ ■

Observación 1.17. Podemos definir la función,

$$\begin{aligned} \psi : \{0,2\}^{\mathbb{N}} &\to [0,1] =: I \\ \psi(a_1, a_2, \dots) &= \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{2^{i+1}} \end{aligned}$$

Que sería la expansión en base 2 de un número $[0,1]$.

Afirmación. *ψ es una función continua.*

Observación 1.18. Existe una función sobreyectiva continua de K a $[0,1]^n = I^n$. Luego existe una función $f : K \to I$ de forma que,

$$K \underset{\varphi^{-1}}{\longmapsto} \{0,2\}^{\mathbb{N}} \underset{\psi}{\longmapsto} I$$

Observación 1.19. Notar que $\{0,2\}^{\mathbb{N}} \underset{\text{homeo}}{\sim} \{0,2\}^{\mathbb{N}} \times \{0,2\}^{\mathbb{N}}$, luego,

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}} \underset{\text{homeo}}{\sim} (\{0,2\}^{\mathbb{N}})^n$$

Por tanto,

$$K \underset{\text{homeo}}{\sim} K^n \underset{\text{homeo}}{\sim} (\{0,2\}^{\mathbb{N}})^n \underset{\psi \times \cdots \times \psi}{\to} I^n$$

Donde $\psi \times \cdots \times \psi$ es una función continua y sobreyectiva. Por lo tanto,

$$K \longmapsto I^n$$

es un mapeo continuo y sobreyectiva.

Teorema 1.7. *Existen funciones continuas y sobreyectiva de I a I^n $(n \in \mathbb{N})$.*

Dem. Sabemos que existe una función $f : K \to I^n$.

Lema. *Si $g : K \to I$ es continua, entonces existe $g^* : I \to I$ una extensión continua de g.*

Idea. (Lema) El intervalo I_1 tiene una parte faltante, pero podemos llenarlo de forma obvia, y así con todo I_k, por lo que claramente existe una extensión continua de g. ■

Tenemos $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ donde $f_i = p_i \circ f$, que es claramente continua y por lo que tiene una extensión continua f_i^*, formando la función,

$$f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*) : I \to I^n$$

Que es extensión continua sobreyectiva. ■

En resumen **falta algo**

Definición 1.17. (Curva) *Una conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva si es la imagen continua del intervalo $I = [0, 1]$, es decir,*

$$\varphi : I \to C$$

continua.

Teorema 1.7. $\mathbb{R}^n$ *es homeomorfismo* $\mathbb{R}^m$ *si y sólo* $n = m$ *(la dimensión es topológicamente invariante).*

1.4. Conexidad

Definición 1.18. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es conexo si no es unión de dos abiertos disjuntos no triviales.*

Observación 1.20 La definición de conexidad está relacionada con el espacio topológico, es decir, $Y \subseteq X$ es conexo si Y es conexo en el sentido topológico inducido por Y.

Lema 1.4. *Sea X un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(a) X es conexo.

(b) Los únicos subconjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo son $\emptyset, X$.

(c) Toda función $f : X \to \{0, 1\}$ continua, no son sobreyectivos, ($\{0, 1\}$ sobre la topología discreta).

Dem.

- **(a) implica (b).** Sea $A \subseteq X$ abierto y cerrado al mismo tiempo, entonces se tiene que,

$$A \cup A^c = X$$

  Es decir, X es la unión de abiertos por lo que $A = \emptyset$ o bien $A = X$. En cualquier caso, A es vacío o es x.

- **(b) implica (c).** Sea $f : X \to \{0, 1\}$ una función continua sobreyectiva, entonces se tiene que $f(X) = \{0, 1\}$, y que,

$$f^{-1}\{0\} \cup f^{-1}\{1\} = X$$

  Si f es continua, entonces $f^{-1}\{0\}, f^{-1}\{1\}$ son conjuntos abiertos no triviales disjuntos al ser f sobreyectivo, pero entonces X no es conexo, siendo una contradicción.

- **(c) implica (a).** Supongamos que X no es conexo, entonces existen A, B abiertos no triviales tales que $A \cup B = X$, luego definimos la función,

$$\begin{aligned} f : X &\to \{0, 1\} \\ a \in A &\mapsto 0 \\ b \in B &\mapsto 1 \end{aligned}$$

  Esta función es continua, ya que los abiertos de la topología discreta son $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$, claramente todos tiene una preimagen abierta. Pero también notemos que f es sobreyectiva siendo imposible, por lo que tenemos una contradicción. Luego X es conexo.

Probando el lema ■

Proposición 1.7. *Los subconjuntos conexos de* $\mathbb{R}$ *son intervalos.*

Dem Debemos probar que los subconjuntos de $\mathbb{R}$ con conexos si y sólo si es un intervalo.

Sea $Y \subseteq \mathbb{R}$ conexo, supongamos que no es un intervalo, entonces existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a, c \in Y$ y $b \notin Y$, luego podemos ver que,

$$Y = ((-\infty, b) \cap Y) \cup ((b, \infty) \cap Y)$$

Es decir, Y es la unión de dos conjuntos abierto en Y, luego no es conexo.

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Supongamos que no es conexo, luego existen A, B abierto en Y disjuntos no triviales tales que $A \cup B = Y$. Sean $a \in A, b \in B$ tales que $a < b$ y sea,

$$\alpha := \sup\{z : [a, z) \subseteq A\}$$

Notar que $\alpha \leq b$, como I es un intervalo, se tiene que $\alpha \in Y$, entonces $\alpha \in \overline{A_Y}$ (clausura respecto a al topología de Y), luego $\alpha \in A = \overline{A_Y}$, entonces existe una vecindad de α tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subseteq A$, pero entonces α no es supremo, siendo contradicción. Por tanto I necesariamente es conexo. ■

Ejemplo 1.10.

- En $\mathbb{R}$, los conjuntos conexo son $[a, b], [a, b)$ y así.
- X con la topología discreta no es conexo ($|X| > 1$), ya que todo subconjunto de X es abierto, luego $X = U \cup U^c$ donde U, U^c son abiertos.
- $X = \{0, 1\}$ con la topología de Zariski $\{0\}$ es abierto y $\{0, 1\}$ también.
- K el conjunto cantor-$\frac{1}{3}$ no es conexo ya que $K \subseteq \mathbb{R}$ y no es un intervalo, dado que $0, 1 \in K$ pero $1/2 \notin K$.

Teorema 1.8. *Sea* X *conexo y sea* $f : X \to Y$ *continua, entonces* $f(X) \subseteq Y$ *es conexo.*

Dem. Consideremos una función $g : f(X) \to \{0, 1\}$ continua, luego $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ es una función continua, como X es conexo, se tiene que $g \circ f$ no es sobreyectivo, esto implica que g no puede ser sobreyectivo y por tanto podemos probar para todo $g : f(X) \to \{0, 1\}$ continua, es decir, $f(X)$ no es conexo. ■

Observación 1.21. La conexidad es invariente topológicamente, es decir,

$$X \underset{\text{homeo}}{\sim} Y \Rightarrow X \text{ conexo si y sólo si } Y \text{ conexo}$$

Ya que si $f : X \to Y$ es homeomorfismo entonces es claro que si X es conexo, entonces $f(X) = Y$ es conexo por la continuidad y si $f^{-1} : Y \to X$ es continua con Y, conexo, entonces $f^{-1}(Y) = X$ es conexo.

Teorema 1.9. *Sea X espacio topológico. La unión de conjuntos conexas que comparte un punto es conexo.*

Dem. Sea $\{X_\alpha\}_\alpha$ los subconjutnos conexos tal que $z_0 \in X_\alpha$ para todo α. Queremos demostrar que la unión arbitraria es conexo. Sea la función,

$$f : \bigcup_\alpha X_\alpha \to \{0, 1\}$$

continua. Si,

$$f\big|_{X_\alpha} : X_\alpha \to \{0, 1\}$$

es la restricción de una continua, por lo que es continua, como X_α es conexo, entonces no es sobreyectivo, es decir, 0 o 1 no tienen preimagen, en particular, $f(X_\alpha) = \{f(z_0)\} \neq \{0, 1\}$, luego,

$$f\left(\bigcup_\alpha X_\alpha\right) = \{f(x_0)\} \neq \{0, 1\}$$

Por lo que f no es sobreyectiva y por tanto la unión arbitraria es conexo. ■

Ejemplo 1.10. ...

Ejemplo 1.11.

Teorema 1.10. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto numerable, entonces $\mathbb{R}^n \setminus C$ es conexo para todo $n \geq 2$.*

Dem. Supongamos que $0 \in \mathbb{R}^n \setminus C$.

Afirmación. *Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$, podemos conectarlo con un camino conexo al origen dentro de $\mathbb{R}^n \setminus C$.*

Figura.

Generando el camino $z \mapsto l_z$.

Afirmación. *Existe $z \in l$ tal que l_z no tiene puntos de C.*

Luego $\mathbb{R}^n \setminus C$ es la unión de caminos conexos que comparten un punto 0 en común, es decir, $\mathbb{R}^n \setminus C$ es conexo. ■

Corolario 1.2. $\mathbb{R}^n$ *no es homeomorfo a* $\mathbb{R}$ *si* $n > 1$.

Dem. Si existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entonces podemos considerar la función,

$$h^* : \mathbb{R}^n \setminus \{v\} \to \mathbb{R} \setminus \{h(v)\}$$

La función homeomorfismo, pero ocurre que el dominio es conexo pero la imagen de esta es disconexo. Por tanto $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{R}$. ∎

Lema 1.5. *Sea X espacio topológico y sean $A \subseteq Y \subseteq X$. Entonces,*

$$\overline{A_Y} = \overline{A} \cap Y$$

Dem. Debemos probar que la clausura de A con respecto a Y, es igual a la clausura de A en X intersectado con Y. Por definición, la clausura de A con respecto a Y es la intersección de los cerrados en Y que contienen a A. Sea $x \in \overline{A_Y}$, entones $x \in V$ donde V es cerrado en Y que contiene a A. Sea B cerrado en X que contiene a A, luego $B \cap Y$ es cerrado en Y que contiene a A, entonces $x \in B$ para todo $x \in \overline{A_Y}$, por lo que $x \in \overline{A} \cap Y$.

Por otro lado, si $x \in \overline{A} \cap Y$, consideremos V cerrado en Y que contiene a A, luego existe un B cerrado en X tal que $V = B \cap Y$, en particular, B contiene a A, entonces $x \in V$, es decir, $x \in \overline{A_Y} \cap Y$. Por tanto,

$$\overline{A_Y} = \overline{A} \cap Y$$

∎

Teorema 1.11. *Sea X espacio topológico y $A \subseteq X$ conexo. Sea B tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Entonces B es conexo.*

Dem. Sea $f : B \to \{0, 1\}$ una función continua. Podemos restringir la función sobre A, obteniendo la función continua,

$$f\big|_A : A \to \{0, 1\}$$

Una función que no es sobreyectiva, en particular, es constante. Notemos que si consideramos la topología inducida por B, observamos que $\overline{A_B} = \overline{A} \cap B = B$, entonces por continuidad de f,

$$f(B) = f(\overline{A_B}) \subseteq \overline{f(A)} = \text{un punto}$$

Es decir, f es no sobreyectivo. Por tanto B es conexo. ∎

Corolario 1.3. *Sea X espacio topológico. Si $A \subseteq X$ es coenxo, entonces $\overline{A}$ es también conexo.*

Dem. Basta notar que $A \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{A}$, luego aplicando el teorema anterior, se tiene que $\overline{A}$ es conexo. ∎

Lema 1.6. *Sean $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ espacios topológicos conexos. Entonces $(X \times Y, \tau_X \times \tau_Y)$ es conexo.*

Dem. Pensemos de forma geométrica.

Figura.

Sean $x_0, y_0 \in X$ fijo, podemos considerar los filamentos $\{x_0\} \times Y, X \times \{y_0\} \subseteq X \cap Y$ y unirlos, generando el conjunto,

$$C_z := \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y_0\}$$

Donde z es la intersección de los filamentos generados por x_0, y_0. Este conjunto es conexo. Si fijamos y_0 y vamos variando x_0 obtenemos qe,

$$\bigcup_{z:y_0 \text{fijo}} C_z = X \times Y$$

Luego todos los C_z coinciden en y_0, entonces la unión es conexa, es decir, $X \times Y$ es conexo. ■

Corolario 1.4. *Producto finito de espacios topologicos conexos, es conexo.* **Dem.**

Teorema 1.12. *Sean $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ espacios topológicos conexos. Entonces,*

$$\mathcal{X} := \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha \text{ es conexo si y sólo si } X_\alpha \text{ es conexo para todo } \alpha \in \mathcal{A}$$

Dem. Supongamos que el producto es conexo. Sea la proyección $p_\alpha : \mathcal{X} \to X_\alpha$ que es una función continua sobreyectiva, luego $p_\alpha(\mathcal{X}) = X_\alpha$ es conexa.

Supongamos que X_α es conexa para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Sea $\hat{z} := (z_\alpha)_\alpha \in \mathcal{X}$. Sea $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \mathcal{A}$ una colección finita. Definimos el conjunto,

$$z_I := X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n} \times \prod_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \notin I}} \{z_\alpha\}$$

Veamos que el producto,

$$\mathcal{Z} := \prod_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \notin I}} \{z_\alpha\}$$

Es conexo, sea la función $f : \mathcal{Z} \to \{0, 1\}$ continua. Si fuera sobreyectiva, entonces $0, 1$ tendrían preimagen, pero $\mathcal{Z}$ es simplemente un punto, es decir, $f(\mathcal{Z}) = \{p\}$ donde $p = 0$ o $p = 1$. De esta forma z_I es producto finito de conexos, luego es conexo.

Afirmación. *Z_I es homeomorfo al producto $X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$.*

Dem. Consideremos la función,

$$\varphi : X_{i_1} \times \ldots X_{i_n} \to Z_I$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \times \prod_{\substack{\alpha \in \mathcal{A} \\ \alpha \notin I}} \{z_\alpha\}$$

La inversa es clara por lo que φ es invertible. La inversa es continua ya que es continua por coordenadas y φ es continua también por coordenadas. Luego φ es un homeomorfismo. ■

Afirmación. *Se tiene que $\hat{z} \in z_I$ para todo I finito.*

Dem. Revisar.

Afirmación. *Se cumple que,*

$$\overline{\bigcup_{I \text{ finito}} z_I} = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$$

Revisar.

Por tanto, el producto es la clausura de un conjunto conexo, por lo tanto $\mathcal{X}$ es conexo. ■

Definición 1.19. (Componente Conexa) *Sea (X, τ_X) espacio topológico. Sea $z \in X$, definimos el conjunto $C(z)$ como la componenta conexa de z, donde,*

$$C(z) = \textit{es la unión de todos los subconjuntos conexos que contienen a } z.$$

Observación 1.22. Sea X espacio topológico.

- $\{z\} \subseteq C(z)$.
- Se tiene que $C(z) = X$ si X es conexo.
- $C(z)$ es conexo ya que es la unión de conexos con un elemento en comun.

Podemos definir una relación. Diremos que $x \sim y$ si y sólo si, hay un conjunto conexo que contiene a ambos. Notemos que $\sim$ es una relación de equivalencia, ya que,

- Se cumple la reflexión: $x \sim x$.
- Se cumple la simetria: $x \sim y$, entonces $y \sim x$.
- Se cumple la transitividad: $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $x \sim z$.

Afirmación. *Sea $\mathcal{O}$ una clase de equivalencia. Entonces si $z \in \mathcal{O}$ se tiene que $\mathcal{O} = C(z)$.*

Dem. La clase de equivalencia $\mathcal{O}$ de z son los elementos x tales que $x \sim z$, es decir, existe un conexo que contiene a x y a z. Si $x \in \mathcal{O}$, entonces existe un conexo A tal que $x, z \in A$, si $A \subseteq C(z)$, entonces $x \in C(z)$. Probando la inclusión $\subseteq$. Para la otra, consideremos $x \in C(z)$, entonces hay un conjunto conexo que contiene a z tal que contiene a x, luego por definición $x \in \mathcal{O}$. Por tanto $\mathcal{O} = C(z)$. ■

Por tanto, las componenetes conexas, están bien definidas como relación, es más, estas particionan a X, ya que,

$$\bigcup_{z \in X} C(z) = X$$

y como las componenetes son clases de equivalencia, estas no se intersectan. Siendo una partición.

Lema 1.7. *Sea X espacio topológico. Las comoponentes conexas, son maximales y también son cerrados.*

Dem. Sea $C(z)$ una componenete conexa de z. Sea W un conexo tal que $C(z) \subseteq W$, luego $z \in W$ y por definición de componenete, se tiene que $W \subseteq C(z)$, es decir, $W = C(z)$.

Probemos que es cerrado. Notemos que $\overline{C(z)}$ es conexo que contiene a z, luego $C(z) = \overline{C(z)}$. Por lo que $C(z)$ es cerrado. ■

Ejemplo 1.12. Pensemos en $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con la topología inducida. Notemos que $\mathbb{Q}$ no es conexo, ya que,

$$\mathbb{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$$

Es decir, es la unión de dos abierto en $\mathbb{Q}$.

Afirmación. *Las componenetes conexas de $\mathbb{Q}$ son de la forma $C(z) = \{z\}$ para todo $z \in \mathbb{Q}$.*

Dem. Vamos a probar que si $A \subseteq \mathbb{Q}$ es conexo, entonces $|A| = 1$. Supongamos que $x, y \in A$, con $x \neq y$, luego por la densidad de los irracionales, existe $r \in (x, y)$ tal que,

$$((-\infty, r) \cap A) \cup ((r, \infty) \cap A) = A$$

Es decir, A es disconexo. Luego necesariamente $|A| = 1$. Con esto tenemos que $C(z) = \{z\}$. ■

> **Definición 1.20. (Totalmente Disconexo)** *Sea X espacio topológico. Decimos que es totalmente disconexa si $C(z) = \{z\}$ para todo $z \in X$.*

Ejemplo 1.13. El conjunto $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo con la topología usual inducida.

> **Definición 1.21. (Localmente Conexo)** *Sea X espacio topológico. Decimos que X es localmente conexo si existe una base donde todos los elementos son conexos.*

Nota 1.3. Lo que nos importa de la localidad conexa, es el comportamiento local de algunos puntos.

Ejemplo 1.14.

- $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo.
- El espacio topológico $(X, \tau_{\text{discreta}})$ no es conexo pero es localmente conexo. (Considerando $|X| > 1$).
- En $\mathbb{R}^2$, sea l_n un segmeneto de $(0,0)$ a $(1, 1/n)$ para todo $n \geq 1$. Entonces el conjunto,

$$Y := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} l_n\right) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \{0\}$$

Es no localmente conexo. Ya que si lo pensamos, en una vecindad de $\frac{3}{4}$, tendremos que rectas l_n pasan pero que no se toca, es decir, que no es conexo en término de localia. Pero

Y si es conexo. Notemos que la unión de los l_n es conexo al ser la unión de caminos y que comparten el punto $(0,0)$. Luego se tiene que,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} l_n \subseteq Y \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} l_n} = [0,1]\times\{0\}$$

Por tanto Y es conexo.

Lema 1.8. *Sea X espacio topológico. X es localmente conexo si y sólo si para todo $p\in X$ y para toda vecindad U de p, existe una vecindad V de p contenida en U que es conexa.*

Dem. Supongamos que X es localmente conexa. Sea $p\in X$ fijo, sea U una vecindad de p, luego U es de la siguiente forma,

$$U = \bigcup B$$

donde B es elemento de la base que son abiertos conexos. Luego $p\in B\subseteq U$ con B vecindad de p que es conexo.

Para la otra dirección, definimos,

$$\mathcal{B} := \{\text{los conjuntos abiertos conexos}\}$$

Probemos que $\mathcal{B}$ es una base. Sea $U\subseteq X$ abierto, sea $p\in U$, luego existe una vecindad conexa V_p de p, de forma que $p\in V_p\subseteq U$. Afirmamos que,

$$U = \bigcup_{p\in U} V_p$$

Y en efecto, es claro la inclusión $\supseteq$. Y la otra es solo aplicar lo anterior. Por tanto, U es unión arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$. Es decir, $\mathcal{B}$ es una base de elementos conexos y por tanto X es localmente conexo. ■

Ejemplo 1.15. Del ejemplo 1.14, es más fácil ver que son y que no son localmente conexo. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, ya que $\mathbb{R}$ es localmente conexo, (por definición, su base son intervalos que son conexos), luego podemos construir una base de $\mathbb{R}^n$ de elementos conexos. Y con respecto a Y, tiene más sentido que en una vecindad de un punto, no existe una vecindad conexa del mismo punto.

Teorema 1.13. *Sea X espacio topológico. X es localmente conexo si y solo las componenetes conexas del todo conjunto abierto, son abiertos.*

Terminar. Falta cuaderno

Eje

> **Definición 1.22. (Conexo por Caminos)** *Decimos que X es conexo por caminos si dado $x,y\in X$, existe la curva continua $\gamma:[0,1]\to X$ tal que $\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$.*

Observación 1.23. Decir que X es conexo por caminos, es lo mismo decir que dado $x_0 \in X$ fijo, todo punto de X tiene un camino con x_0. Probémoslo. Si X es conexo por **Terminar**

Foto celular.

Teorema 1.. *Si X es conexo por caminos, entonces X es conexo.*

Dem. Sea $x_0 \in X$, sea $\gamma_x : [0,1] \to X$ un camino continuo donde $\gamma_x(0) = x_0, \gamma_x(1) = x$, entonces $\gamma_x([0,1]) \subseteq X$ es conexa. Luego se tiene que,

$$\bigcup_{x \in X} \gamma_x([0,1]) = X$$

Si $\gamma_x([0,1])$ comparten el punto x, entonces X es conexo. ■

Observación 1.24. Como hemos visto, la conexidad no implica ser localmente conexo, y ser localmente conexo no implca conexidad.

Ejemplo 1.16. Consideremos el conjunto,

$$Y = [0,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \cup \{0\} \times [0,1]$$

Este conjunto es conexo ya que, es la unión de caminos conexos que comparten un punto. Pero si trabajamos con un punto de la recta $[0,1] \times \{0\}$, observamos que no es localmente conexo.

Por otro lado, $Y = [0,1] \cup [2,3]$ es localmente conexo, ya que todo punto $p \in Y$ y para toda vecindad de p, podemos tomar un conexo que contiene a p y que está contenido en la vecindad de p. Pero no es conexo por ser la unión de dos abiertos relativos.

Definición 1.23. (Componente Conexa por Caminos) *Sea $z \in X$, la componente conexa por camino de z, se define como la unión de los conjuntos conexos por caminso que contienen a z.*

De forma similar a la componente conexa, algunas propiedades se cumplen.

Proposición 1.8. *Componentes conexos por caminos son conexos por caminos.*

Dem. Sea $A(z)$ la componente conexa por caminos de z, entonces,

$$A(z) = \bigcup_{\substack{\mathcal{C}_z \text{ conexa} \\ \text{por caminos}}} \mathcal{C}_z$$

Sea z fijo, si $y \in A(z)$, entonces $y \in \mathcal{C}_z$, si $\mathcal{C}_z$ es conexa por camino, se tiene que existe un camino continuo entre z e y, es decir, todo punto de $C(z)$ tiene un camino continuo con z y por tanto $A(z)$ es conexo por camino. ■

Observación 1.25. Los componenetes por camino no necesariamente son cerrados.

Ejemplo 1.17.

Lema 1.9. *Sea X un espacios topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Cada comoponente conexa por camino es abierto (y cerrado).

(b) Cada punto de X tiene una vecindad conexa por camino.

Dem. Vamos a probar con abiertos. **Terminar con cerrado.**

- **(a) implica (b).** Sea $x \in X$ un punto cualquiera. Existe la componente conexa por caminos de x, digamos que $A(x)$, luego por la proposición anterior, se tiene que $A(x)$ es una vecindad conexa por camino.
- **(b) implica (a).** Sea A una componente conexa por caminos. Sea $p \in A$, luego existe una vecindad conexa por camino U_p de p. Por definición, $U_p \subseteq A$, afirmamos que,

$$A = \bigcup_{p \in U} U_p$$

  Es decir, A es la unión arbitraria de abiertos, luego A es abierto.

■

Teorema 1.14. *Sea X espacio topológico. X es conexo por camino si y sólo si X es conexo y cada punto tiene vecindad conexa por camino.*

Dem. Supongamos que X es espacio topológico conexo por caminos. Claramente X es conexo y que X es una vecindad conexa por camino para todo punto de X.

Supongamos que X es conexo y que cada punto tiene una vecindad conexa por camino. Por el lema anterior, se tiene que todo conexo por camino es abierto y cerrado, y si X es conexo, se tiene que los únicos conexos por caminos que cumplen ser cerrado y abierto, es X y $\emptyset$. Luego X es conexo por caminos. ■

2. Axioma de Separación.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico. Diremos que es un espacio de Hausdorff si para todo $x, y, \in X$, existen U, V vecindades de x, y respectívamente tales que $U \cap V = \emptyset$.*

Ejemplo 2.1.

- $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff y X también sobre la topología discreta.
- Sierpinski no es Hausdorff.
- Si X es infinito, entonces no es Hausdorff con la topología cofinita. En efecto, sean $p, q \in X$, y supongamos que existen abiertos $p \in X \setminus F_1, q \in X \setminus F_2$, entonces,

  $$X \setminus F_1 \cap X \setminus F_2 = X \setminus (F_1 \cup F_2) \neq \emptyset$$

  Luego no puede ser Hausdorff.

Teorema 2.1. *Sea X espacios topológicos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es Hausdorff.

(b) Para todo $p \in X$,

$$\bigcap_{\substack{U \text{ vecindad} \\ \text{de } p}} \overline{U} = \{p\}$$

(c) $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ es cerrado en $X \times X$.

Dem.

- **(a) implica (b).** Sea $q \in X$ un punto distinto de p. Existen vecindades U, V de p, q respectívamente tales que,

  $$U \cap V = \emptyset$$

  Entonces $q \notin \overline{U}$ y por tanto, q no puede ser elemento de la intersección de las vecindades de p. Luego se cumple la igualdad.

- **(b) implica (a).** Sea $q \in X$ distinto de p, entonces $q \notin \overline{U}$ para alguna vecindad U de p, notemos que la clausura es cerrado, luego el complemento es abierto, de esta forma $q \in \overline{U}^c$ vecindad, entonces,

  $$U \cap \overline{U}^c = \emptyset$$

  Por tanto, X es espacio de hausdorff.

- **Terminar...**

Probando el teorema. ■

Proposición 2.1. *Se cumple las siguientes afirmaciones:*

(a) Todo subespacio de un espacio de Hausdorff es Hausdorff.

(b) El producto es Hausdorff si y sólo si cada componente es Hausdorff.

Dem.

(a) Sea X de Hausdorff. Sean $p, q \in A$, luego con respecto a X, existen vecindades U, V de p, q respectívamente tales que,

$$U \cap V = \emptyset$$

Luego,

$$\underbrace{U \cap A}_{\text{abierto en } A} \cap \underbrace{V \cap A}_{\text{abierto en } A} = \emptyset$$

Es decir, A es espacio de Hausdorff.

(b) Supongamos que cada componente es Hausdorff. Digamos que elk **Terminar** .-..

Ejemplo 2.2. Si X es infinito con la topología cofinita, no es Hausdorff.

Definición 2.2 *Sea X espacio topológico. Diremos que es T_1 si para todo $p, q \in X$, existe una vecindad U de p tal que $q \notin U$.*

Ejemlplo 2.3. El espacio X infinito con la topología cofinita, no es Hausdorff pero si es T_1. Ya que para $p, q \in X$ podemos pensar...

Proposición 2.2. *X es T_1 si y sólo si los puntos son cerrados.*

Dem. Sea $p \in X$ un punto, supongamos que X es T_1. Queremos probar que $X \setminus \{p\}$ es abierto. Sea $q \in X \setminus \{p\}$, como $p \neq q$, existe U vecindad de q tal que $p \notin U$, entonces se tiene que $q \in u \subseteq X \setminus \{p\}$, es decir, $X \setminus \{p\}$ es un abierto y luego $\{p\}$ es cerrado.

Supongamos que todo punto $\{p\}$ es cerrado para todo $p \in X$. Sean $p, q \in X$ distintos, si $\{p\}$ es cerrado, entonces $X \setminus \{p\}$ es un abierto que contiene a q pero no contiene a p, es decir, X es T_1. ■

Definición 2.3. *Sea X espacio topológico. Diremos que es T_2 si es de Hausdorff.*

Definición 2.4. *Sea X espacio topológico. Diremos que X es T_3 o regular, si es Hausdorff y para todo $p \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado donde $p \notin A$, existen vecindades u, V de p, A respectivamente, tales que, $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 2.5. *Sea X espacio topológico. Diremos que X es T_4 o normal, si es Hausdorff y para todo $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, existen vecindades U, V de A, B respectivamente, tales que $U \cap B = \emptyset$.*

Proposición 2.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es regular.

(b) X es Hausdorff y para todo $p \in X$ y vecindad U de p, existe V abierto tal que,

$$p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

Dem.

(a) **(a) implica (b).** Sea $p \in X$ y una vecindad U de p. Sea U^c cerrado, entonces como X es regular, existen vecindades W_1, W_2 de p y de u^c tales que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Afirmamos que $V = W_1$ y en efecto, notemos que $W_1 \subseteq W_2^c$ entonces $\overline{W}_1 \subseteq W_2^c$ y también $U^c \subseteq W_2$, entonces $W_2^c \subseteq U$, luego se tiene que,

$$p \in W_1 \subseteq \overline{W_1} \subseteq U$$

(b) **(b) implica (a).** Sea X Hausdorff. Sean $p \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado donde $p \notin A$. Notemos que $p \in A^c$ donde A^c es una vecindad de p, luego existe una vecindad V de p tal que,

$$p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A^c$$

Luego se tiene que $A \subseteq \overline{V}^c$ donde $\overline{V}^c$ es vecindad de A. Escogemos las vecindades $V, \overline{V}^c$ de p, A respectivamente, y observamos que,

$$V \cap \overline{V}^c = \emptyset$$

Es decir, X es regular.

■

Proposición 2.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X es normal.

(b) X es Hausdorff y para todo $A \subseteq X$ cerrado y U vecindad de A, existe V vecindad de A tal que,

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

Dem. La demostración es análoga.

- **(a) implica (b).** Supongamos que X es n**Terminar**

Teorema 2.2. (Uryshn) *Sea X espacio de Hausdorff. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(a) X normal.

(b) Dados A, B cerrados disjuntos. Existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que,

$$f\big|_A = 0$$
$$f\big|_B = 1$$

y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

Dem Etermina

2.1. Topología Cociente

Sea X una topología cualquier. Podemos definir una relación $\mathcal{R}$ de equivalencia en X. De las clases de equivalencia particionan X, y vamos a ver cuando $X/\mathcal{R}$ (cociente) es una topología. Recordemos que,

$$X/\mathcal{R} := \{[x]_\sim : x \in X\}$$

Definición 2.6. (Abierto) *Sea X espacio topológico y sea R una relación de equivalencia. En $X/\mathcal{R}$ consideramos la proyección canónica $\pi : X \to X/\mathcal{R}$. Decimos que $U \subseteq X/\mathcal{R}$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U) \subseteq U$ es abierto.*

En particular, π no es una biyección, ya que si $x \sim y$ con $x, y \in X$, entonces $\pi(x) = \pi(y)$ donde $x \neq y$.

A patir de X topología, podemos definir una topología en $X/\mathcal{R}$ de la siguiente forma. Sea

$$\tau := \{U \subseteq X/\mathcal{R} : \pi^{-1}(U) \subseteq X \text{ abierto}\}$$

entonces τ es una topología en X.

Definición 2.7. (Topología Imagen Directa) *Sea $f : (X, \tau_X) \to Y$, definimos $f(\tau_X)$ la topología imagen directa de τ_X vía f, donde,*

$$f(\tau_X) := \{U \subseteq Y : f^{-1}(U) \in \tau_X\}$$

Lema 2.1. *$f(\tau_X)$ es una topología en Y.*

Dem. Probemos los tres axiomas de topología.

(a) Vemos que $\emptyset \subseteq Y$ y que $f^{-1}(\emptyset) \in \tau_X$. Y que $Y \subseteq Y$ donde $f^{-1}(Y) = X \in \tau_X$. Entonces $\emptyset, Y \in f(\tau_X)$.

(b) Sea $\{U_\alpha\}_\alpha$ donde $f^{-1}(U_\alpha) = A_\alpha \in \tau_X$, entonces,

$$\begin{aligned}\bigcup_\alpha A_\alpha &= \bigcup_\alpha f^{-1}(U_\alpha) \\ &= f^{-1}\left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) \in \tau_X\end{aligned}$$

Entonces $\bigcup_\alpha U_\alpha \in f(\tau_X)$.

(c) Sean $U_1, \ldots, U_n$ tal que $f^{-1}(U_i) = A_i \in \tau_X$, entonces,

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^n A_i &= \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_\alpha) \\ &= f^{-1}\left(\bigcap_i U_\alpha\right) \in \tau_X\end{aligned}$$

Entonces $\bigcap_i U_i \in f(\tau_X)$.

■

Observación 2.1.

- Si pensamos Y con la topología $f(\tau_X)$, entonces $f : (X, \tau_X) \to (Y, f(\tau_X))$ es una función continua.
- También se cumple que $f(\tau_X)$ es la topología más fina tal que f es continua. Ya que si consideremamos τ topología de Y tal que f es continua, entonces para $U \subseteq Y$ abierto en τ, se tiene que $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto en la topología τ_X, por definición $U \in f(\tau_X)$. Luego $\tau \subseteq f(\tau_X)$.
- De lo anterior, se deduce que $\pi(\tau_X)$ es la topología más fina en $X/\mathcal{R}$.

Algunos comportamientos en X se trasladan a $X/\mathcal{R}$.

- Si X es conexo, entonces $X/\mathcal{R}$ es conexo. Claramente, si consideremos $f : X/\mathcal{R} \to \{0, 1\}$ continua, entonces la función $f \circ \pi : X \to \{0, 1\}$ es continua, como X es conexo, se tiene que $f \circ \pi$ es no sobreyectivo, luego f no es sobreyectivo.
- Si X es conexo por camino, entonces $X/\mathcal{R}$ es conexo por camino. Para probar esto se requiere de la siguiente afirmación:

  Afirmación. *Sea $f : X \to Y$ continua y sobreyectiva. Si X es conexa por caminos, entonces Y es conexa por caminos.*

  Dem. Sean $x, y \in Y$ puntos distintos, entonces, con respectos a los puntos $f^{-1}(x), f^{-1}(y) \in X$, existe una curva $\gamma : [0, 1] \to X$ tal que $\gamma(0) = f^{-1}(x), \gamma(1) = f^{-1}(y)$. Consideremos $f \circ \gamma : [0, 1] \to Y$ que es una curva continua (composición de continuas), donde $(f \circ \gamma)(0) = x, (f \circ \gamma)(1) = y$. Luego Y es conexa por caminos. ■

  Notemos que $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proyección canónica es sobreyectiva continua. Entonces $X/\mathcal{R}$ es conexa por caminos.
- X con los axiomas de separación no implica que $X/\mathcal{R}$ tenga axiomas de separación.

  Ejemplo 2.3.

Proposición 2.5. *Sea X espacio topológico. $X/\mathcal{R}$ es Hausdorff si y sólo si $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ es abierto y $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ es cerrado con X es Hausdorff.*

Dem. Terminar

2.2. Funciones Continuas entre $X/\mathcal{R}$

Teorema 2.3. *Sea $f : X/\mathcal{R} \to Y$. Entonces f es continua si y sólo si $f \circ \pi : X \to Y$ es continua.*

Dem. Si f es continua, entonces $f \circ \pi$ es una composición de continuas, luego es continua.

Sea $f \circ \pi : X \to Y$ es continua. Sea $U \subseteq Y$ abierto, entonces $(f \circ \pi)^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto, en particular, $(f \circ \pi)^{-1} = \pi^{-1} \circ f^{-1}$ y que $V \subseteq X/R$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(V) \subseteq X$ es abierto, por lo que $f^{-1}(U) \subseteq X/R$ es abierto y luego f es continua. ■

Diagrama cuaderno

Observación 2.2.

- Si conocemos las funciones continuas desde $X/\mathcal{R}$ si y sólo se levanta a continuas.
- Si $g : X \to Y$ es tal que g toma igual valor en una clase de equivalencia **Terminar**

Ejemplo 2.4. Consideremo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por la relación $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Z}$.

Afirmación. *$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$.*

Dem. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ que es continua por la continuidad real de $\cos, \operatorname{sen}$. Si $x \sim y$, entonces $f(x) = f(y)$. Si pensamos $f = f^* \circ \pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$, entonces la función $f^* : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ es continua, es más, es homeomorfismo, para alguna función f^*. La función f^* toma una clase $[t]_\sim$, luego se manda a $f(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$ que está bien definida ya que al tomar otro representante s de la misma clase, se tiene que $t = s + k$, luego,

$$f(t) = f(s + k) = (\cos(2\pi k + 2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi k + 2\pi s)) = f(s)$$

Ahora para ver que es homeomorfismo, notemos que f^* es continua por el teorema 2.3, es sobreyectiva y es inyectiva ya que dos clases distintas manda distinta imagen. Falta ver que la inversa es continua y para ello basta ver que f es abierta. Sea $U \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ abierto, entonces $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$ es un abierto, es decir, es unión arbitraria de intervalosa abiertos. Si es simplemente un intervalo abierto, por la continuidad real de f, se tiene que $f(U)$ es un intervalo abierto sobre $\mathbb{S}^1$. Luego f es abierto y por tanto f^* es homeomorfismo. ■

Definición 2.8. (Identificación) *Sea $f : X \to Y$. Decimos que f es una identificación o mapa cociente si $f(\tau_X) = \tau_Y$ y f es sobreyectiva.*

Ejemplo 2.5. Sea $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proyección canónica, claramente π es identificación ya que $\pi(\tau_X) = \{U \subseteq X/\mathcal{R} : \pi^{-1}(U) \in \tau_X\} = \tau_{X/\mathcal{R}}$, además, π es sobreyectiva.

Dado $f : X \to Y$, podemos definir $\mathcal{R}_f$ en X donde $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$, donde $\mathcal{R}_f$ es una relación de equivalencia.

Teorema 2.4. *Sea $f : X \to Y$ identificación. Entonces $f^* : X/\mathcal{R}_f \to Y$ es homeomorfismo.*

Dem. Si f es identificación, entonces es sobreyectivo. Sea f^* dado por proyecta X a $X/\mathcal{R}_f$, luego mandarlo a Y usando f como muestre el diagramda de abajo,

Diagrama

Notemos que f^* es continua por el teorema anterior. Si f es sobreyectiva, entonces al punto $y \in Y$ podemos tomar $x \in X$ tal que $f(x) = y$, luego proyectando, obtenemos $[x]_\sim \in X/\mathcal{R}_f$, donde $f^*([x]_\sim) = y$, de forma que f^* es sobreyectiva, además es inyectiva por el comportamiento de las clases, luego f^* es continua y biyectiva. Para ver que su inversa es continua, basta ver que f^* es abierta. Sea $U \subseteq X/\mathcal{R}_f$ abierto, entonces $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. Queremos probar que f^* es abierto, notemos que $f^*(U) \subseteq Y$ lo podemos mandar a X usando f, de forma que obtenemos $f^{-1}(f^*(U)) \subseteq X$, en particular,

$$f^{-1}(f^*(U)) = \pi^{-1}(U)$$

que es abierto en X. Luego f^* es homeomorfismo. **Revisar**.

Lema 2.2. *Sea $f : X \to Y$ sobreyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces f es identificación.*

Dem. Sea $f : X \to Y$, debemos probar que f es sobreyectiva y que $f(\tau_X) = \tau_Y$. Claramente se tiene que $\tau_Y \subseteq f(\tau_X)$. Sea $U \subseteq Y$ abierto en $f(\tau_X)$, luego $f^{-1}(U) \subseteq X$ abierto en τ_X. Sin pérdida de generalidad supongamos que f es abierta, luego $f(f^{-1}(U)) = U \subseteq Y$ es abierto en τ_Y, luego $\tau_Y = f(\tau_X)$. ■

Ejemplo 2.6. Sea X espacio topológico. Sea la relación $\mathcal{R}_0$ dada por $x \sim y$ si y sólo si $C(x) = C(y)$.

Afirmación. *$X/\mathcal{R}_0$ es totalmente disconexo.* ***Por probar***

Ejemplo 2.7. Figuta

2.3. Compacidad

Definición 2.9. (Compacto) *Decimos que X es compacto, si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito.*

Definición 2.10. (Cubrimiento Abierto) *Un cubrimiento X es una colección $\{A_\alpha\}_\alpha$ de abiertos tal que,*

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = X$$

Proposición 2.6. *Si X es compacto y $A \subseteq X$ es cerrado, entonces A es compacto.*

Dem. Sea $\{A_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento abierto de A. Como A_α son abiertos sobre A, existen B_α abiertos en X tal que $A_\alpha = B_\alpha \cap A$. Notemos que $\{B_\alpha \cup A^c\}$ es cubrimiento de X, entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que $B_{\alpha_1} \cup \dots \cup B_{\alpha_n} \cup A^c = X$, luego tomando $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}$ vemos que es un cubrimiento finito de A. ■

Proposición 2.7. *Todo subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.*

Dem. Sea X espacio Hausdorff. Sea $A \subseteq X$ compactos. Probemos que $X \setminus A$ es abierto. Sea $p \in X \setminus A$ fijo y sea $q \in A$, entonces existen U_p^q, V_q vecindades de p, q, donde U_p^q depende de q, tal que $U_p^q \cap V_q = \emptyset$, luego $V_p \subseteq (U_p^q)^c$. Notemos que,

$$A \subseteq \bigcup_{q \in A} V_q$$

Luego existen $q_1, \ldots, q_n$ tal que,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{q_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_p^{q_n})^c$$

Entonce,

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_q^p \subseteq X \setminus A$$

Donde $p \in \bigcap_{i=1}^{n} U_p^q$, es decir, $X \setminus A$ es abierto. Luego A es cerrado. ■

Teorema 2.7. *Sea $f : X \to Y$ continua, si X es compacto, entonces $f(X)$ compacto.*

Dem. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\}}$ cubrimiento abierto de $f(X) \subseteq Y$, entonces existe $B_\alpha \subseteq Y$ abierto tal que $B_\alpha \cap f(X) = A_\alpha$ para todo α. Notemos que $\{f^{-1}(B_\alpha)\}_\alpha$ cubrimiento abierto de X. Si X es compacto, entonces existen $B_1, \ldots, B_n$ tal que $\{f^{-1}(B_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ cubrimiento abierto de X. Entonces $A_1, \ldots, A_n$ es cubrimiento abierto de $f(X)$. ■

En particular, si $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva, entonces si X es compacto, se tiene que Y es compacto.

Teorema 2.8. *Sea $f : X \to Y$ biyectiva continua, si X es compacta e Y es Hausdorff, entonces f es homeomorfismo.*

Dem. Vamos a mostrar que f es cerrada. Sea $A \subseteq X$ cerrado, como f es contina, se tiene que $f(A)$ es compacto, entonces $f(A)$ es cerrado. ■

Ejemplo 2..

- $\mathbb{R}$ no es compacta.
- X con la topología discreta es compacta si y sólo si X es finito.
- $[a, b]$ es compacto.
- $X = \{0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{1/n\}$ es compato.

Proposición 2.. *En $\mathbb{R}$, el intervalo $[0, 1]$ es compacto.*

Dem. Sea $\{U_\alpha\}$ cubrimiento abierto de $[0, 1]$. Definimos,

$$\mathcal{B} := \{b \in [0, 1] : [0, b] \text{ es cubierto por finitos elementos del cubrimiento}\}$$

Sea $s = \sup \mathcal{B}$, como 1 es cota superior de $\mathcal{B}$, se toene que $s \leq 1$.

Afirmación. *Se tiene o bien $\mathcal{B} = [0, s)$ o bien $\mathcal{B} = [0, s]$.*

Dem. (Afirmación) E...

Por tanto $[0, 1]$ es compacto. ■

Proposición 2.. *Si X es compacto y Hausdorff, entonces X es normal y regular.*

Dem. Probemos que es regular. Sean $p \in X$ y $A \subseteq X$ cerrado que no contiene a p. Sea $q \in A$, como $p \neq q$, entonces existen vecindades U_p^q, U_q de p y q respectivamente tal que $U_p^q \cap U_q = \emptyset$. Notemos que,

$$A = \bigcup_{q \in A} U_q$$

donde A es compacto dado que es cerrado. Luego existen $q_1, \ldots, q_n$ tales que,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} U_{q_i} =: U_A$$

Vemos que U_A es vecindad de A y además si definimos,

$$U_p := \bigcap_{i=1}^{n} U_p^{q_i}$$

se tiene que $U_p \cap U_A = \emptyset$ y además U_p es vecindad de p. Por tanto X es regular.

Vamos a probar ahora que X es normal. Sean A, B cerrados disjuntos. Para $p \in A$ fijo existen U_p, U_B^p tales que $U_p \cap U_B^p = \emptyset$. Notemos que,

$$A \subseteq \bigcup_{p \in A} U_p$$

y como A es cerrado, se tiene que es compacto, luego existe un subcubrimiento de la forma,

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{p_i} =: U_A$$

Por otro lado, podemos definir,

$$U_B := \bigcap_{i=1}^{n} U_B^{p_i}$$

que es vecindad de B, además $U_A \cap U_B = \emptyset$, por tanto X es normal.

Definición 2.11. *Una colección de conjuntos satisface la propiedad de la intersección finita si toda subcolección fninta tiene intersección no vacía.*

Teorema 2.. *X es compacto si y sólo si toda colección de cerrados con la propiedad anterior, se tiene que la intersección de todas es no vacia.*

Dem. Sea X compacto. Sea $\mathcal{C}$ una colección de cerrados tal que toda subcolección finita tiene intersección no vacía. Supongamos que,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \emptyset$$

entonces,

$$X \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A^c$$

donde A^c es un abierto. Por compacidad se tiene que existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{C}$ tal que,

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

Pero entonces,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$$

Es decir, existe una subcolección donde la intersección finita es vacía, siendo contradicción. Por lo que,

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \neq \emptyset$$

Probemos la otra dirección. Sea $\{A_\alpha\}$ cubrimiento abierto de X, de forma que,

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha} A_\alpha$$

Luego $\{A_\alpha^C\}$ es... ■

Observación 2.. Sea $\mathcal{O}$ una colección de conjuntos y sea $\mathcal{C} = \{A^C : A \in \mathcal{O}\}$, entonces,

- La colección de $\mathcal{O}$ son abiertos si y sólo si $\mathcal{C}$ son cerrados.
- $\mathcal{O}$ es un cubrimiento de X si y sólo si,

$$\bigcap_{B \in \mathcal{C}} B = \emptyset$$

- Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{O}$ son tales que $A_1 \cup \ldots A_n = X$ si y sólo si $C_i = X \setminus A_i$, se tiene que $C_1 \cap \cdots \cap C_n = \emptyset$.

Teorema 2.. *Sean X, Y son compactos, entonces $X \times Y$ es compacto.*

Lema 2.. *X es compacto si y sólo si cualquier cubrimiento abierto con elementos de una base, tiene cubrimiento finito.*

Teorema 2.. *Sea $\mathcal{D}$ sub-base de X. Entonces X es compacto si y sólo si cualquier cubrimiento con elementos de la sub-base, tiene subcubrimiento finito.*

Teorema 2.. *Sean $\{X_\alpha\}$ espacios topológicos. El topología producto es compacto si y sólo si X_α son compactos.*

2.4. Axioma de Numerabilidad

Definición 2.12. *Diremos que X que primero numerable si todo punto tiene una base numerable.*

Nota 2.. Sea $x \in X$, este tiene una base numerable si existe $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ vecindades de x tal que si U es una vecindad de x, entonces existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_i \subseteq U$.

Ejemplo 2.. Sea X espacio métrico. Entonces es primero numerable, en efecto, para $x \in X$ podemos tomar los abiertos $U_i = B(x, 1/i)$.

Definición 2.13. *Diremos que X es segundo numerable si existe una base numerable.*

Observación 2.. Si X es segundo numerable, entonces es primero numerable. Sea X segundo numerable con base numerable $\{V_i\}$, sea $x \in X$, podemos considerar la colección numerable $\{V_i^x\}$ donde V_i^x son elementos de la base que son vecindades de x, claramente si U es una vecindad de x, entonces U es de la siguiente forma,

$$U = \bigcup_{\alpha} V_{i,\alpha}$$

Luego existe un i tal que $V_{i,\alpha}^x \subseteq U$, es decir, X es primero numerable.

Ejemplo 2.. Sea X no numerable con la topología cofinita, entonces no es primero numerable. **terminar**

Ejemplo 2.. Sea X no numerable con la topología discreta, entonces es primero numerable pero no segundo numerable. Es claro que no puede ser segundo numerable, ya que por construcción, la única base de X es $\mathcal{P}(X)$ que es no numerable. (¿y qué pasa con se primero numerable.)

Ejemplo 2.. $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable. Basta tomar la base $\{B(x, r) : x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\}$.

Definición 2.14. *Decimos que una sucesión de puntos $\{x_n\}$ en X converge a $x_\infty \in X$ si para toda vecindad U de x_∞, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in U$.*

Lema 2.. *Sea X espacio topológico primero numerable. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de A que converge a x.*

Dem. Sea $x \in X$ un punto cualquiera, como X es primero numerable entonces existe una base numerable $\{U_i\}$ de x.

Afirmación. *Si $\{U_i\}$ es base numerable de x, entonces la colección $\{V_i\}$ dado por $V_i := U_1 \cap \cdots \cap U_i$ es también una base numerable de x.*

Dem. (Afirmación) Sea $\{U_i\}$ base numerable de x, entonces $V_i = U_1 \cap \ldots U_i$ es una vecindad de x, si U es otra vecindad de x, entonces existe un i tal que $U_i \subseteq U$, y si $V_i \subseteq U_i$, entonces $V_i \subseteq U$, por lo que $\{V_i\}$ es base numerable de x. ■

Por tanto podemos asumir que $\{U_i\}$ es una base numerable de x decreciente ($U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$). Sea $x \in \overline{A}$, entonces se tiene que $U_i \cap A \neq \emptyset$, definimos la sucesión $\{x_n\} \subseteq A$ tal que $x_n \in U_n$, entonces si U es una vecindad de x, se tiene que $U_N \subseteq U$ para algún N, y esto implica que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$, es decir, x_n converge a x.

Probemos la otra dirección. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en A tal que x_n converge a x. Sea U vecindad de x, entonces existe un N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$, luego $U \cap A \neq \emptyset$, por lo que $x \in \overline{A}$. ■

Observación 2.. De la afirmación anterior, podemos imponer que una base numerable de un punto $x \in X$ es decreciente.

Lema 2.. *Sea X primero numerable. Sea $f : X \to Y$. Entonces f es continua en x si y sólo si para todo $\{x_n\}$ que converge a x, se tiene que $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$.*

Dem. Sea $f : X \to Y$ continua en x, sea $\{x_n\}$ sucesión en X que converge a x y sea U vecindad de $f(x)$, entonces $f^{-1}(U)$ es vecindad de x (f continua), entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(U)$ para todo $n \geq N$, y entonces $f(x_n) \in U$ para todo $n \geq N$, por tanto $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

Supongamos que f no es continua en x, por lo que existe una vecindad W de $f(x)$ tal que para toda vecindad U de x se tiene que $f(U) \not\subseteq W$. Sea $\{U_i\}$ base numerable decreciente de x, entonces $f(U_i) \not\subseteq W$ para todo i. Definimos la sucesión $x_n \in U_n$, luego es claro que x_n converge a x y por hipótesis se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x)$, pero entonces al tomar la vecincad W de $f(x)$, se tiene que tiene infinitos $f(x_n)$...**terminar**

Lema 2.. *Sea X un espacio topológico y Y un subespacio topológico ($Y \subseteq$). Si X es primero numerable, entonces Y también es primero numerable. Análogamente si X es segundo numerable.*

Dem. Sea $y \in Y$, existe una base numerable $\{U_i\}$ sobre X, sea la colección $\{U_i \cap Y\}$, entonces este es una base numerable de Y sobre Y, y en efecto, si V es vecindad de y sobre Y, entonces $V = A \cap Y$ con A abierto en X, luego $U_i \subseteq A$ para algún i, de aquí se tiene que $V_i \subseteq U_i \cap Y \subseteq V$. Siendo Y primero numerable.

Para el caso segundo numerable, basta ver que si $\mathcal{B}$ es una base numerable de X, entonces,

$$\mathcal{B}^* := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base numerable de Y. ■

Definición 2.15. *Sea X espacio topológico. Decimos que X es separable si hay un conjunto denso numerable.*

Ejemplo 2.. $\mathbb{R}$ es separable, ya que $\mathbb{Q}$ es denso y numerable. Análogamente $\mathbb{R}^n$ es separable, ya que $\mathbb{Q}^n$ es denso y numerable.

Proposición 2.. *Sea X un espacio topológico segundo numerable, entonces X es separable*

Dem. Consideremos $\{U_i\}$ base numerable de X, luego definimos,

$$U := \bigcup_i U_i$$

luego vemos que U es numerable y denso. La numerabilidad es clara y la densidad se observa que para cada $x \in X$ podemos tomar un U_i vecindad de x_i, luego $x_i \in \overline{U_i} \subseteq \overline{U}$, entonces $X = \overline{U}$, viendo que X es separable. ■

Observación 2.. Con el resultado anterior es claro que $\mathbb{R}^n$ es separable, ya que son segundo numerables.

Proposición 2.. *Sea (X, d) espacio métrico. Entonces X es segundo numerable si y sólo si X es separable.*

Dem. Sabemos que si es segundo numerable, entonces es separable.

Supongamos que X es separable. Entonces existe un conjunto E numerable y denso, digamos que,

$$E = \{x_1, x_2, \dots\}$$

A cada elemento de E podemos definir una bola, sea el conjunto,

$$\mathcal{B} := \{B(x_n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

Entonces $\mathcal{B}$ es base de X, y en efecto, sea U un abierto de X, entonces todo elemento u de U está en $\overline{E}$, por lo que si V_u es vecindad de u se tiene que $V_u \cap E \neq \emptyset$, por lo que existe una bola $B(x_{n,u}, 1/n)$ que contiene a u, luego,

$$U = \bigcup_{u \in U} B(x_{n,u}, 1/n)$$

Por tanto X es segundo numerable. ■

Ejemplo 2.. Sea X no numerable dotada de la topología del cofinito, entonces no es primero numerable. ¿?

Ejemplo 2.. Consideremos el espacio topológico $\mathbb{R}^2$, consideremosla relación que toma al eje x y lo manda a un punto z_0, es decir, dotada del mapa cociente,

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^2 &\to X \\ \text{eje}\, x &\mapsto [\text{eje}\, x] = z_0 \end{aligned}$$

Entonces X no es primero numerable. **fatla parte**

Definición 2.16. (Lindelof) *Sea X espacio topológico. Decimos que es Lindelof si todo cubrimiento abierto de X tiene subcubrimiento abierto numerable.*

Observación 2.. No confundir ser compacto con ser Lindelof, el primero es sobre cubrimientos finitos, y el otro son numerables.

Lema 2.. *Sea X espacio topológico. Si es segundo numerable, entonces es Lindeloff.*

Dem. Sea $\{U_n\}$ una base numerable de X, sea $\{A_\alpha\}$ cubrimiento abierto. Dado $n \in \mathbb{N}$ escogemos $\alpha(n)$ tal que $U_n \subseteq A_{\alpha(n)}$ de ser posible, si esto se puede hacer para todo $n \in \mathbb{N}$ estamos listo. Si esto no pasa para algún n, tenemos que $\alpha(n)$ no está definido, para esto podemos considerar la siguiente descomposición:

$$\mathbb{N} = N_G \cup N_U$$

donde $n \in N_G$ si existe $\alpha(n)$ tal que $U_n \subseteq A_{\alpha(n)}$, y $n \in N_U$ si no hay tal $\alpha(n)$.

Afirmación. *$\{A_{\alpha(n)}\}_{n\in N_G}$ es un cubrimiento numerable de X.*

Dem. (Afirmación) Supongamos que $x \notin \bigcup_{n\in N_G} A_{\alpha(n)}$(disjunto), existe un α tal que $x \in A_\alpha$, entonces existe n tal que $x \in U_n \subseteq A_\alpha$, entonces α es bueno y lo podemos tomar como $\alpha(n)$ tal que $x \in U_n \subseteq A_{\alpha(n)}$. ■ **Revisar**

> **Definición 2.17.** *Sea X espacio topológico. Decimos que X es secuencialmente compacto si toda sucesión tiene una subsucesión convegente.*

Teorema 2.. *Sea X espacio topológico segundo numerable, entonces X es compacto si y sólo si X es secuencialmente compacto.*

Observacación 2.. Notar que en $\mathbb{R}^n$ esto se cumple ya que $\mathbb{R}^n$ es un espacio topológico segundo numerable al ser espacio métrico.

Dem. Supongamos que X es compacto. Sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión.

Afirmación. Existe un x_∞ tal que cualquier vecindad de x_∞ tiene infinitos x_n.

Dem. (Afirmación) Supongamos que todo x_∞ existe un vecindad de esta tal que tiene finitos x_n. Digamos que U_{x_∞} es tal vecindad, entonces se cumple que,

$$X \subseteq \bigcup_{x_\infty \in X} U_{x_\infty}$$

Entonces X al ser compacto se tiene que,

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_{i,\infty}}$$

Si X tiene infinitos x_n, pero por la inclusión anterior se tiene que X tiene finitos x_n, siendo contradicción. ■

Afirmación. *Existe subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a x_∞.*

Dem. (Afirmación) Si X es segundo numerable, existe una base ordenada de x_∞ $\{U_n\}$ tal que $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ escogemos $\alpha(n)$ tal que $x_{\alpha(n)} \in U_n$ y además pediremos que $\alpha(1) < \alpha(2) < \dots$. Entonces $\{x_{\alpha(i)}\}_i$ es una subsucesión que converge a x_∞. Por tanto X es secuencialmente compacto.

Supongamos ahora que X es secuencialmente compacto. Como X es segundo numerable, este es Lindeloff, sea $\{A_n\}$ un cubrimiento abierto numerable de X.

Afirmación. *Si $\{A_n\}$ no tiene subcubrimiento abierto finit, entonces exsite una subcesión sin subsucesión convergente.*

Dem. (Afirmación) Sea $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Observamos que si $z \in X$, entonces existe N tal que $z \in A_N$ por construcción,

$$x_n \notin A_N$$

si $n > N$. Entonces z no es punto límite de la sucesión. Probando el resultado. ■

Proposición 2.. *Sea X espacio métrico, entonces X es seprable si y sólo si X es segundo numerable si y sólo si es Lindeloff.*

Dem...

Proposición 2.. *Sea (X, d) espacio métrico compacto, entonces es segundo numerable.*

Teorema. (Metrización de Urysohn) *Sea X espacio topológico. Si X es segundo numerable y regular, entonces X es metrizable, es decir, existe una métrica d, de forma que (X, d) induce la topología a X.*

Teorema 2.. *Sea X espacio topológico. Si X es segundo numerable y regular, entonces X es normal.*

Dem. Sean A, B conjuntos cerrados disjuntos. Para $x \in A$ existen U_x, U_B^x vecindades de x y de B respectivamente tales que $U_x \cap u_B^x = \emptyset$. **terminar**

Observación 2.. Hay que tener cuidado, que X sea normal, no signifique que X sea metrizable. Ya que X puede ser regular pero no necesariamente sea segundo numerable.

Lema 2.. *Sea X espacio topológico segundo numerable y normal. Entonces existe una colección numerable de funciones continuas $\{f_n : X \to [0,1]\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $a \in X$ y para toda vecindad U de a, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(a) > 0$ y $f_n(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus U$*

falta algo

Dem. Sea $\{B_n\}$ base numerable de X. Consideremos el par $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $\overline{B_n} \subseteq B_m$. Sea G la colección de estos pares. Por el teorema de Urysohn existe una función continua $f_{(n,m)}$ tal que,

$$f_{(n,m)}\big|_{\overline{B_n}} = 1$$
$$f_{(n,m)}\big|_{X\setminus B_n} = 0$$

Afirmación. *La colección numerable $\{f_{(n,m)}\}_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ satisface el enunciado.*

Dem. (Afirmación) Sea $a \in X$ y sea U vecindad de a, entonces existe B_m tal que $a \in B_m \subseteq U$. Entonces como X es regular, existe V tal que $a \in V \subseteq \overline{V} \subseteq B_m$, entonces existe B_n tal que $a \in B_n \subseteq \overline{B_n} \subseteq V \subseteq B_m$, obteniendo,

$$a \in \overline{B_n} \subseteq B_m \subseteq U$$

De aquí usamos la función $f_{(n,m)}$ y se cumple lo pedido. ■

Dem. (Teorema de Metrización de Urysohn) Por hacer

Observación 2.. Si X es métrico, entonces se cumple **Falta**

afiramción. *Si X es espacio métrico compacto, entonces X se puede incrustar en $[0,1]^{\mathbb{N}}$:=cubo de Hilbert.*

Definición 2.18. *Sean $U_1, \ldots, U_n$ un cubrimiento abierto finito de X. Sea $\phi_1, \ldots, \phi_n : X \to [0,1]$ funciones continuas. Decimos que $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ es una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i=1}^n$ si se cumple:*

i) Si,

$$\textit{supp}(\phi) := \overline{\{\phi_i^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \subseteq U_i$$

Entonces $\phi_i\big|_{U_i} \equiv 0$.

ii) Se cumple que,

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$$

para todo $x \in X$.

Teorema 2.. *Sea X espacio topológico, si X es normal y $\{U_i\}_{i=1}^n$ es un cubrimiento abierto finito, entonces existe una partición de unidad subordinada a $\{U_i\}_{i=1}^n$.*

Lema 2.. *Dado un cubrimiento abierto finito $\{U_i\}_{i=1}^n$, podemos construir otro cubrimineto abierto finito $\{V_i\}_{i=1}^n$ tal que $\overline{V}_i \subset U_i$.*

Idea. Terminar.

Definición 2.19. *Sea X espacio topológico. Diremos que es una variedad topológica de dimensión n si X es Hausdorff, es segundo numerable y es localmente euclidiano (es decir, para todo $x \in X$, existe una vecindad U de x que es homeomorfo a $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$)*

El concepto de variedad es un concepto compleja, en poca palabras una variedad topológica es algo que los puntos se comportan bien, que tenga una base numerable y que localmente tenga un comportamiento geométrico conocido, en este caso que sea localmente euclidiano.

Teorema 2.. *Si X es una variedad topológica compacta, entonces X se puede incrustar en $\mathbb{R}^N$ con $N > 0$, es decir, existe una función $f : X \to \mathbb{R}^N$ continua inyectiva tal que $f : X \to f(X)$ es homeomorfismo.*

Observación 2.. Si X se puede incrustar en $\mathbb{R}^N$, entonces X es subespacio de $\mathbb{R}^N$ para algún N.

Propocisión. (Teorema de Whitney) *Si X es una variedad suave y compacta de dimensión n, entonces se puede incrustar en $\mathbb{R}^{2n+1}$*

¿Que es suave?

Definición 2.20. *Sea X espacio topológico. Sea $\{U_\alpha\}_\alpha$ un cubrimiento abierto de X. Decimos que $\{U_\alpha\}$ es localmente finito si para todo $x \in X$, existe una vecindad U de x que intersecta finitos elementos del cubrimiento.*

Lema 2.. *Sea X espacio topológico noraml y sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto localemnte finito, entonces existe un cubrimineto abierto localmente finito $\{V_\alpha\}$ tal que $\overline{V}_{\alpha \subset U_\alpha}$.*

Definición 2.. *Sea X espacio topológico. Diremos que es paracompacto si es Hausdorff y todo cubrimiento abieto tiene un refinamiento localmente finito, es decir, si $\{U_\alpha\}$ es cubrimiento, entonces existe un cubrimiento $\{V_\beta\}$ tal que, para todo β existe un α tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$ y $\{V_\beta\}$ es localmente finito.*

Teorema 2.. *Sea X espacio topológico. Entonces X es paracompacto si y sólo si todo cubrimiento abierto tiene una partición de la unidad subordinado al cubrimineto.*

Definición 2.19. *Sea X espacio topológico. Diremos que es paracompacto, si Hausdorff y todo cubrimineto abierto tiene un refinamineto localmente finito (es decir, existe $\{V_\beta\}_\beta$ cubrimiento tal que para todo β existe un α tal que $V_\beta \subseteq U_\alpha$ y $\{V_\beta\}_\beta$ es localmente finito).*

Definición 2.. *Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento abierto y sea $\{\phi_\alpha\}$ una colección de funciones continuas $\phi_i : X \to [0,1]$, decimos que es una partición de la unida subordinada a $\{U_\alpha\}$ si:*

i) $supp(\phi_\alpha) \subset U_\alpha$.
ii) $\{supp\phi_\alpha)\}$ es un cubrimiento localmente finito.
iii) Para todo x se tiene que,

$$\sum_\alpha \phi_\alpha(x) = 1$$

Dem flata demostraciones graciela

Proposición 2.. *Sea X espacio topológico. Si es paracompacto, entonces es normal.*

Ejemplo 2.. $\mathbb{R}$ con dos origenes (no es hausforff).

Ejemplo 2.. El conjunto....

Ejemplo 2.. $\omega_\wedge$ es el menor conjunto bien ordenado no numerable

Definición 2.. *Sea M un espacio topológico. Diremos que es una variedad topológica de dimensión n si es Hausdofrr, es segundo numerable y es localmente eucliciando de dimensión n.*

Ejemplo 2..

...

Definición 2.. *Si X es un conjunto totalmente ordenado, entonces podemos definir la topología del orden en X, donde la base es,*

$$\mathcal{B} = \{a < x < b\}$$

$a, b \in X$.

Definición 2.. *Sean X, Y conjuntos ordenados, entonces $X \times Y$ es ordenado con el orden lixográfico, dado por: $(a, b)(a', b')$ si y sólo si $a < a'$ o $b < b'$ y $a = a'$*

Ejemplo..

Proposición 2.. *Si M es variedad, entonces es paracompacto.*

Lema 2.. *Sea M variedad topológica, entonces existe una colección de compactos $\{K_n\}$ tal que,*

- *$K_i \subset K_{i+1}^o$ para todo i.*
- *$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = M$.*

Dem.. Graci

Definición 2.. *Sean M, N variedades topológicas. Sean las incrustraciones,*

$$i_M : B(0, 1) \hookrightarrow M$$
$$i_N : B(0, 1) \hookrightarrow N$$

Definimos la suma conexa como:

$$M\#N = M \setminus i_M(0) \cup N \setminus i_N(0) / \sim$$

donde identificamos $i_M(tn)$ con $i_N((1 - t)n$ donde $n \in \mathbb{S}^{n-1}$ y $t \in (0, 1)$

3. Homotopia y Grupo Fundamenta

Definición 2.. *Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Decimos que f y g son homotópicas si existe una función continua $F : X \times [0,1] \to Y$ tal que,*

$$F(x,0) = f(x)$$
$$F(x,1) = g(x)$$

Observación 2.. Si f, g son homotopías, entonces podemos definir una función de "transición" determinada por $t \in [0,1]$, esta función la podemos tomar como $f_t(x) := F(x,t)$ que es continua.

Definición 2.. *Sea X espacio topológico. Fijamos $x, y \in X$. Definimos,*

$$C_{x,y} := \{\gamma : [0,1] \to X \text{ continua} : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

Como el conjunto de los caminos entre los puntos x, y. Además, decimos que $\gamma_0, \gamma_1 \in C_{x,y}$ son homotópicos, si existe una función continua $F : [0,1]_s \times [0,1]_t \to X$ tal que,

$$F(s,0) = \gamma_0(s)$$
$$F(s,1) = \gamma_1(s)$$
$$F(0,t) = x$$
$$F(1,t) = y$$

Ejemplo 2.. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, las curvas... **Figura** (29/05)

Ejemplo 2.. En $\mathbb{R}^2$, las curvas... **Figura** (29/05)

Ejemplo 2.. En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

figura (29/05)

Las curvas γ_0, γ_1 no son homotópicas.

Podemos clasificar las curvas homotópicas, mediante una relación sencilla.

Definición 2.. *Sea X espacio topológico. Definimos la relación $\sim$ sobre $C_{x,y}$ como las curvas que son homotópicas, es decir, si $\gamma, \rho \in C_{x,y}$, entonces $\gamma \sim \rho$ si y sólo si γ, ρ son homotópicas. Definimos el cuociente por,*

$$C^*_{x,y} := C_{x,y} / \sim$$

Observación 2.. La relación $\sim$ es de equivalencia, ya que es simétrica, transitiva y reflexiva. Por lo que $C^*_{x,y}$ está bien definido.

Ahora vamos a construir el grupo fundamental, para ello necesitamo una operación.

Definición 2.. *Consideremos los conjuntos $C_{x,y}, C_{y,z}, C_{x,z}$, entonces definimos la operación $*$ de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} C_{x,y} \times C_{y,z} &\to C_{x,z} \\ (f,g) &\mapsto f * g(t) := \begin{cases} f(2t) & t \in [0,1/2] \\ g(2t-1) & t \in [1/2,1] \end{cases} \end{aligned}$$

Proposición 2.. *La curva $f * g$ es una función continua.*

Proposición 2.. *La operación $*$ induce una función en el cuociente. Es decir,*

$$\begin{aligned} C_{x,y} \times C_{y,z} &\to C_{x,z} \\ ([f],[g]) &\mapsto [f * g] \end{aligned}$$

es decir, si $f_1 \sim f_2$ en $C_{x,y}$ y $g_1 \sim g_2$ en $C_{y,z}$, entonces $f_1 * g_1 \sim f_2 * g_2$ para cualquier f_1, f_2, g_1, g_2.

Dem (29/05)

Afirmación. *Sean $f \in C_{x,y}, g \in C_{y,z}, h \in C_{z,w}$, entonces se cumple lo siguiente:*

$$[f * (g * h)] = [(f * g) * h]$$

Observación 2.. Esto significa que tenemos la propiedad asociatividad, ya que podemos tomar la función de la propisición 2.. $\Delta([f],[g]) := [f * g]$, entonces,

$$\begin{aligned} \Delta([f], \Delta([g],[h])) &= \Delta([f],[g * h]) = [f * (g * h)] \\ &= [(f * g) * h] = \Delta([f * g],[h]) = \Delta(\Delta([f],[g]),[h]) \end{aligned}$$

Dem. Si estudiamos $(f * g) * h, f * (g * h)$ puede pasar que sean distintos por un tema de que los tiempos son distintos, en particular,

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t), & t \in [0,1/4] \\ g(4t-1), & t \in [1/4,1/2] \\ h(2t-1), & t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Por otro lado,

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in [0,1/2] \\ g(4t-2), & t \in [1/2,3/4] \\ h(4t-3), & t \in [3/4,1] \end{cases}$$

Por lo que son distinto, pero podemos ver que solo es un tema de reescalar los tiempos, por lo que podemos encontrar una homotopía, es decir,

$$[f * (g * h)] = [(f * g) * h]$$

Como queriamos probar. ■

Definición 2.. *Sea X un espacio topológico. Sea $x_0 \in X$. Definimos el grupo fundamental de X en x_0 como el conjunto:*

$$\pi_1(X, x_0) := C^*_{x_0,x_0}$$

Proposición 2.. *Sea X espacio topológico, entonces para $x_0 \in X$ fijo, $\pi(X, x_0)$ es un grupo con la operación $*$.*

Dem. Debemos probar que está bien definido, es asociativa, tiene neutro e inversa.

- **Bien definida y Asociativa.** Hemos probado que la operación está bien definida y también la asociatividad.
- **Neutro.** Definimos el camino neutro x_0 por $e_{x_0} : [0,1] \to X$ dado por $e_{x_0}(t) = x_o$, claramente $e_{x_0} \in C_{x_0,x_0}$, podemos ver...

  $$f * e_{x_0} \sim f$$

  Es decir, $[f * e_{x_0}] = [f]$, análogamente $[e_{x_0} * f] = [f]$, por tanto $[e_{x_0}]$ es nuetro en $C^*_{x_0,x_0}$. **Falta cuadernor 29/05**
- **Inverso.** Sea $f \in C_{x_0,x_0}$, definimos el camino continuo $\overline{f}(t) := f(1-t)$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces $[\overline{f}]$ es la inversa de f, y en efecto, ...

Por tanto $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo. ■

Observación 2..

Por tanto el grupo fundamental está bien definido. Estudiemos algunos ejemplos de grupo fundamental.

Ejemplo 2.. Sea $\mathbb{R}^n$ espacio topológico, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\}$. Para probar esto, debemos probar que una curva cerrada continua que parte en x_0 y termina en x_0, es homotópica a un punto. De forma geométrica tiene sentido, pero debemos probarlo. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ curva continua tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, es decir, $\gamma \in C_{x_0,x_0}$. Sea la homotopía,

$$\begin{aligned} F : [0,1]_s \times [0,1]_t &\to \mathbb{R}^n \\ F(s,t) :&= (1-t)\gamma(s) + tx_0 \end{aligned}$$

Podemos ver que satisface todas las condiciones, entonces $\gamma \sim e_{x_0}$ y por tanto $[\gamma] = [e_{x_0}]$. Probando que $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = \{e_{x_0}\}$ (pensando en e_{x_0} como una clase de equivalencia).

Observación 2.. Sea X espacio topológico tal que $\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0} = 1\}$, entonces toda curva cerrada es homotópico a la curva cerrada constante.

Observación 2.. Si K es convexo en $\mathbb{R}^n$, entonces $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ con $x_0 \in K$, esto tiene sentido geométricamente, pero para verificarlo para una curva $\gamma \in C_{x_0,x_0}$ se toma la homotopía $F(s,t) = (1-t)\gamma(s) + tx_0$.

Ejemplo 2.. En $\mathbb{R}^n$, se tiene que $B(0,1)$ es un conjunto convexo, entonces $\pi_1(B(0,1),x_0) = \{e_{x_0}\}$.

Lema 2.. *Si X es conexo por caminos, entonces el grupo fundamental no depende del punto base, es decir, para todo $x_0, x_1 \in X$ se cumple que $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$.*

Dem. Sean $x_0, x_1 \in X$, como X es conexo por caminos, existe una curva continua $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$, notemos que $\alpha \in C_{x_0,x_1}$. Consideremos el mapa,

$$\begin{aligned} f_\alpha : \pi_1(X,x_0) &\to \pi_1(X,x_1) \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha * \gamma * \overline{\alpha}] \end{aligned}$$

Podemos ver que f_α está bien definida y es un isomorfismo.

- **Bien definida.** Notemos que si $\gamma \sim \gamma'$ en C_{x_0,x_o}, entonces $\alpha * \gamma * \overline{\alpha} \sim \alpha * \gamma' * \overline{\alpha}$. Entonces las clases son iguales.
- **Isomorfismo.** Notemos que,

  $$f_\alpha([\gamma] * [\gamma']) =$$

  Terminar 31/05

■

Proposición 2.. *Sean X, Y espacios topológicos. Sea $f : X \to Y$ una función. Sean $x_0 \in X, y_0 \in Y$ tal que $y_0 = f(x_0)$, entonces existe un morfismo entre $\pi_1(X,x_0), \pi_1(Y,y_0)$.*

Dem. Definimos la función,

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X,x_0) &\to \pi_1(Y,y_0) \\ f_*([\gamma]) &= [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

Debemos probar que f_* está bien definido y que es un morfismo.

- **Bien definido.** Debemos probar que si $\gamma, \gamma' \in \pi_1(X,x_0)$, entonces $f \circ \gamma \sim f \circ \gamma'$ ... Luego f_* está bien definida.
- **Morfismo.** Sean $\gamma, \gamma' \in \pi_1(X,x_0)$, entonces,

  $$f_*([\gamma * \gamma']) = [f \circ (\gamma * \gamma')] = [(f \circ \gamma) * (f \circ \gamma')] = f_*(\gamma) * f_*(\gamma')$$

  Siendo morfismo.

■

Nota 2.. Desde ahora cuando trabajamos con funciones $f : X \to Y$ y los grupos fundamentales $\pi_1(X,x_0), \pi_1(Y,y_0)$, usaremos el morfismo f_* definido en la demostración.

Proposición 2.. *Sean X, Y, Z espacios topológicos. Sean $x_0 \in X, y_0 \in Y, z_0 \in Z$ tales que $z_0 = g(y_0), y_0 = f(x_0)$, sean los mapas,*

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X,x_0) &\to \pi_1(Y,y_0) \\ g_* : \pi_1(Y,y_0) &\to \pi_1(Z,z_0) \end{aligned}$$

Entonces se cumple que:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

Dem. Sea $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces,

$$(g \circ f)_*([\gamma]) = [g \circ f \circ \gamma]$$

Y,

$$(g_* \circ f*)([\gamma]) = g_*([f \circ \gamma]) = [g \circ f \circ \gamma]$$

Por tanto,

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

■

Corolario 2.. *Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo. Entonces el mapa $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo de grupo.*

Dem. Ya sabemos que f_* es un morfismo. Notemos que $f^{-1} : Y \to X$ es una función que induce un morfismo $f_*^{-1} : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ya que $x_0 = f^{-1}(y_0)$, luego afirmamos que f_*^{-1} es la inversa de f_*, ya que,

$$(f_* \circ f_*^{-1}) = (f \circ f^{-1})_* = id_*$$

Análogamente para $(f_*^{-1} \circ f_*)$. ■

Nota 2.. Vamos a trabajar (hasta que se diga lo contrario) que todo espacio topológico X es localmente conexo por camino y conexo por caminos.

Recordatorio. Un espacio topológico X es localmente conexo si para todo $x \in X$ y para toda vecindad U de x, existe una vecindad V de x conexo por caminos tal que $V \subseteq U$.

Definición 2.. *Sean X, Y espacios topológicos. Consideremos el mapa $\rho : Y \to X$, decimos que es un recubrimiento si se cumple las siguientes condiciones:*

i) ρ es continuo y sobreyectivo.

ii) Para todo $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que,

$$\rho^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$$

(unión disjunta), donde,

$$\rho^{-1}\big|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$$

es homeomorfismo.

Ejemplo 2..

- Sea $\rho : Y \to X$ un homeomorfismo, entonces es una mapa recubrimiento. Claramente es continuo y sobreyectivo. Sea U vecindad de un punto $x \in X$, notemos que $\rho^{-1}(U)$ es abierto en X, luego se union arbitraria de abiertos, y $\rho^{-1}\big|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo al ser restricción de un homeomorfismo.
- Sea $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\rho(t) = e^{2\pi it}$, entonces ρ es un recubrimiento. Claramente es continuo (la preimagen de abierto es un abierto) y es sobreyectivo. Se puede ver que para $U \subseteq \mathbb{S}^1$ vecindad, $\rho^{-1}(U)$ es unión de abiertos V_α disjuntos. Y $\rho^{-1}\big|_{V_\alpha}$ es un homeomorfismo.
- Sea $\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dado por $\rho(z) = z^2$, entonces ρ es recubrimiento (argumento similar al ejemplo anterior).
- Sea $\rho_1 : Y_1 \to X_1, \rho_2 : Y_2 \to X_2$ recubrimientos, sea la función:

$$\begin{aligned} \rho_1 \times \rho_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2 \\ (\rho_1 \times \rho_2)(y_1, y_2) := (\rho_1(y_1), \rho_2(y_2)) \end{aligned}$$

  Esta función es un recubrimiento. Si $\mathcal{R} = U_1 \times U_2$ una vecindad de x, entonces existen $V_{\alpha,1}, V_{\alpha,2}$ tal que,

$$\begin{aligned} \rho_1^{-1}(U_1) &= \bigcup_\alpha V_{\alpha,1} \\ \rho_2^{-1}(U_2) &= \bigcup_\alpha V_{\alpha,2} \end{aligned}$$

  Luego,

$$(\rho_1 \times \rho_2)^{-1}(U_1 \times U_2) = \bigcup_\alpha (V_{\alpha,1} \times V_{\alpha,2})$$

  Y la restricción en $V_{\alpha,1} \times V_{\alpha,2}$ es un homeomorfismo.

Lema 2.. *Si $\rho : Y \to X$ es un mapa recubrimiento, entonces ρ es homeomorfismo localmente (y es abierto).*

> **Definición 2..** *Sea $f : Z \to W$, decimos que es homeomorfismo localmente si para todo $z_0 \in Z$ existe una vecindad de z_0 tal que $f\big|_U : U \to f(U)$ es homeomorfismo.*

Dem. (lema 2..) Sea $y_0 \in Y$, sea $x_0 = \rho(y_0)$, entonces existe una vecindad U de x tal que,

$$\rho^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$$

Vemos que V_α es una vecindad de x_0, luego se tiene que $\rho^{-1}\big|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ es homeomorfismo. Entonces $\rho : U \to V_\alpha$ es homeomofismo. Probando que ρ es homeomorfismo localmente. ■

Teorema 2.. *Sea el espacio topológico $\mathbb{S}^1$. Entonces para todo $x \in \mathbb{S}^1$ se cumple:*

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, x) = \mathbb{Z}$$

Dem. Consideremos el siguiente mapeo,

$$\rho : [0,1] \to \mathbb{S}^1$$
$$\rho(0) = \rho(1) = 1$$
$$\rho(t) = xe^{2\pi i t}$$

Afirmación. *La clase* $[\rho]$ *genera* $\pi_1(\mathbb{S}^1, x)$.

Lema 2.. *Sea* $\rho : Y \to X$ *un cubrimiento y* $p : I \to X$ *cubrimiento donde* $p(0) = x_0$. *Sea* $y_0 \in Y$ *tal que* $\rho(y_0) = x_0$, *entonces existe un único mapa* $p^* : I \to Y$ *tal que* $p^*(0) = y_0$ *y* $\rho \circ p^* = p$.

Dem (05/06 graci)

Lema 2.. *Sea* $\rho : Y \to X$ *un cubrimiento, sea* $F : [0,1]_s \times [0,1]_t \to X$ *tal que* $F(0,0) = x_0$ *y sea* $y_0 \in Y$ *tal que* $\rho(y_0) = x_0$, *entonces existe un único mapa* $F^* : [0,1]_s \times [0,1]_t \to Y$ *tal que* $F^*(0,0) = y_0$ *y* $\rho \circ F^* = F$. *(Además, si* F *es homotopía, entonces* F^* *también lo es).*

Dem... (0—)

Dem. (Teorema) Sea $p : I \to \mathbb{S}^1$ tal que $p(0) = p(1) = x_0$, entonces podemos levantar a $p^* : I \to \mathbb{R}$ tal que $p^*(0) = y_0$ y $\rho \circ p^* = p$. Notemos que $p^*(1) = y_0 + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ (porque $\rho(p^*(1)) = p(1) = x_0$), entonces $p^*(1) \in \rho^{-1}(x_0) = y_0 + \mathbb{Z}$. Esto define el mapa:

$$\Phi : \left\{ {p: I \to \mathbb{S}^1 \atop p(0)=p(1)=x_0} \right\} \to \mathbb{Z}$$

Observación Si $p_1 \sim p_2$ (curvas en $\mathbb{S}^1$), entonces $p_1^* \sim p_2^*$, en particular, $p_1^*(1) = p_2^*(1) = y_0 + algo$ (terminan en el mismo punto), por tanto,

$$\Phi : \pi_1(\mathbb{S}1, x_0) \to \mathbb{Z}$$

Afirmación. *El mapa* $\Phi : \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \to \mathbb{Z}$ *es un isomorfismo.*

Probar

Observación 2.. Φ no depende de y_0 **termina**

Afirmación. $p_1^*(1) = y_0 + k, p_2^*(1) = y_0 + n + k$ $(k = \Phi[\rho])$.

terminar....

Teorema 2.. *Sean* X, Y *espacios topológigos, sean* $x_0 \in X, y_0 \in Y$, *entonces se cumple que,*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

3.1. Aplicaciones

Se tiene

Teorema 2.. *Sea* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ *un polinomio complejo, entonces existe un* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $p(z) = 0$.

Teorema 2.. *Consideremos el espacio topológico* $\mathbb{S}^n$, *sea* $x_0 \in \mathbb{S}^n$, *entonces para todo* $n \geq 2$ *se tiene que* $\pi_1(\mathbb{S}^n, x_0) = 0$.

Lema 2.. *Si* Y *es un espacio tal que* $\pi_1(Y) = 0$, *entonces todo* $\gamma_1, \gamma_b \in C_{a,b}$ *cumple que* $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Definición 2.. *Decimos que* X *es localmente compacto si para todo* $x \in X$ *tiene una vecindad con clausura compacta, es decir, existe una vecindad* U *tal que* $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq X$ *donde* $\overline{U}$ *es compacto.*

Julio 12 Ejemplo 2..

- $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto para $x \in \mathbb{R}^n$, basta considerar $B(X, r) = U$.
- $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ es localmente compacta.
- $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto (métrica euclidiana) es localmente abierto, ya que para cada $x \in U$ consideramos $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$. Tomamos $0 < r_1 < r$ y consideramos $V = B(x, r_1)$ luego,

  $$\overline{V} = \overline{B(x, r_1)} \subseteq B(x, r) \subseteq U$$

  donde $\overline{V}$ es compacto.

Propocisión 2.. *Si* M *es una variedad topologíca, entonces* M *es localmente compacto.*

Ejemplo 2.. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ no es localmente compacto. Por construcción para $x \in \mathbb{Q}$ y $r > 0$ se cumple que $B(x, r) \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Afirmación. $B(x, r)$ *no tiene clausura compacta.*

Esto ocurre debido a que al intentar agregar la clausura $\mathbb{Q}$, al no ser completo se añaden necesariamente irracionales.

Dem. En $B(x, r)$ existen sucesiones que no convergen en $\mathbb{Q}$ (en $\overline{B(x, r)}$).

Ejemplo 2.. El conjunto:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots}_{\text{númerables}}$$

no es localmente compacto. Para ello basta considerar que los conjuntos de la forma:

$$U = \prod_{i \in J} (a_i, b_i) \times \prod_{i \notin J} \mathbb{R}$$

donde J es un conjunto finito de índices. Luego,

$$U = \mathbb{R} \times \cdots \times (a_i, b_i) \times \dots$$

Ocurre que U tiene una sucesión divergente.

Proposición 2.. *Sean X, y espacios topológicos. Si X, Y son localmente compactos, entonces $X \times Y$ son localmente compactos.*

Teorema 2.. *Sea X localmente compacto, Hausdorff, pero no compacto si y sólo si existe un Y tal que:*

i) Es compacto Hausdorff.

ii) $X \subseteq Y$ subespacio denso.

iii) $|Y \setminus X| = 1$ ($X^c =$ un punto).

Observación 2.. Si Y' es otro conjunto que cumpla las condiciones i), ii), iii), entonces $Y \sim Y'$ homeomorfismos (es decir, Y es único salvo homeomorfismo). También observamos que el teorema dice que si X es Hausdorff y localmente compacto pero no compacto, para que sea compacto basta agregar un punto.

Ejemplo 2.. $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto y Hausdorff pero no compacto. Para arreglar esto tomamos $S^n =: Y$ el cual es compacto Hausdorff y $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ ($\{\infty\}$ se interpreta como polo norte). Si $\phi = S^n \setminus \{\infty\} \to \mathbb{R}^n$ proyección esterográfica, entonces $S^n = U \cup \{\infty\}$ con $U \sim\sim \mathbb{R}^n$ homeomorfsimo.

Dem Vicente. 12 junio

Afirmación. *Los abiertos que definimos sobre Y definen una topología.*

Dem Vicente 12 junio

falta detalles

Definición 2.. *Sea X un espacio topoloógico. Decimos que es σ-compacto si existe $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de compactos tales que,*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

(unión disjunta)

Proposición 2.. *Dada una colección de compactos como antes, existe otra colección $\{K_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ ordenados de la siguiente forma:*

$$K^*1 \subset K_2^* \subset \dots$$

Es más,

$$K_n^* = \bigcup_{m\leq n} K_m$$

Propocisión 2.. *Una variedad M es σ-compacto.*

Propocisión 2.. *Sea X un espacio topológico. Si X es separable, localmente compacto y es métrico, entonces X es σ-compacto.*

Recordatorio. Un espacio métrico es separable si y sólo si es segundo numerable. Por tanto en la demostración de la proposición 2.. basta probar que una variedad metrizable.

Proposición 2.. *Si X es localmente compacto y es Hausdorff, entonces X es regular.*

Afirmación. *Si M es una variedad topologíca, entonces es regular.*

Dem. Se considera Y la compactificación por un punto de X, como Y es compacto Hausdorff, se tiene que X es normal y por tanto Y es regular, finalmnete subespacio de regular es regular, concluyendo que M es regular. ■

Teorema 2.. *Si X es localmente compacto y Hausdorff (no compacto). Entonces $Y = X \cup \{\infty\}$ con una topología es compacto, Hausdorff y la función $i : X \hookrightarrow Y$ incrustación por un punto (Y es la compactifiación).*

Proposición 2.. *Si M es una variedad topológica, entonces M es espacio métrico. (Análogamente, si es segundo numerable y regular, este es metrizable).*

Propocisión 2.. *Si X es localmente compacto, entonces es regular y Hausdorff.*

Definición 2.. *Decimos que X es completamente regular si para todo $x \in X$ y A cerrado que no contiene a x, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 1, f\big|_A = 0$.*

Definición 2.. *Si X es completamente regular y es Hausdorff, decimos que X es Tychonov.*

Observación 2.. Se cumple la siguiente cadena:

$$\text{Normal} \subseteq \text{Tychonov} \subseteq \text{Regular}$$

La primera inclusión es el teorema de extensión de Urysohn. **La otra inclusión hay que usa mano, 14/06 mi cuaderno**

Observación 2.. Un subespacio de X Tychonov, es Tychonov. En particular, si $Y \subseteq X$ entonces Y es completamente regular **terminar... 14/06**

Lema 2.. *Si X es localmente compactoy y Hausdorff, entonces X es Tychonov.*

Dem...

3.2. Compactificación de Stone-Coch

Definición 2.. *Sea X espacio topológico. Decimos que Y es una compactificación de X si es compacto y existe una incrustación $i : X \hookrightarrow Y$ tal que $i(X)$ es es densa en Y.*

Ejemplo 2.. Si X es compacto y Hausdorff, entonces $i : X \to X^* =$ compactificacinde un punto.

Ejemplo 2.. $\mathbb{R}^n - - > i : \mathbb{R}^n \to \rho^n$.

Nota 2.. Supondremos que X es Tychonov. **terminar**

Propiedad universal: Para todo $f : X \to K$ continua con K compacta Hausdorff, existe $F : \beta X \to K$ continua y que extiende a f.

Para construir βX consideramos el mapa:

$$e : X \to \prod_{f \in C_b(X)} [\text{ínf } f, \sup f]$$
$$x \mapsto (e(x))_f = f(x)$$

$(e(x)_f$ es la coordenada $f)$, donde $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R}$ continuas y acotada$\}$. Definimos $\beta X = \overline{e(X)}$ compacto, además, es inyectivo y e es abierto donde X a $e(X)$ es homeomorfismo.

Nota 2.. $\mathbb{N} - > p(a, b) = |1/a - 1/b| - >$ diam$\mathbb{N}$=1.

Afiramción. *p es totalemnte acotado, entonces $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Nota 2.. Si X es compacto Hausdorff, entonces $\beta X = X$. Ya que podemos tomar $K = X$.

fatla algo

Afirmación. *βX es la compactifización más grande.*

Falta

Proposición 2.. *βX no es metrizable, ni es primero numeralbe (X no compacto).*

Definición 2.. *Una curva de Jordan en $\mathbb{R}^2$ es la imagen de una incustración de S^1 bajo una función continua.*

Conjetura: *En toda curva de Jordan hay un cuadrado.*

Falta

Teorema 2.. *En toda curva C^∞, hay un rectángulo de la forma que uno quiera.*

Teorema 2.. *En toda curva de Jordan hay un rectángulo.*

...

clase 23 junio

Teorema *Si $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^n$ son abiertos homeomorfos, entonces $n = m$.*

Teorema. *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva, entonces f es un mapa abierto.*

Dem,.. vicente

Teorema. *Sea $f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ continua, entonces existe un $x_0 \in \overline{B^n}$ tal que $f(x_0) = x_0$. $\overline{B^n}$ es la bola cerrada de dimensió n.*

Propocisión 2.. *Sea $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva. Entonces $f(0)$ está en el interior de$f(\overline{B^n})$.*

Lema 2.. *Sea $f : \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ tal que $|h(x) - x| \leq 1$ para todo $\overline{B^n}$. Entonces existe $x_0 \in \overline{B^n}$ tal que $h(f(x_0)) = 0$.*

Terminar...

4. Ayudantías

4.1. Ayudantía 1.

P1 Sea X un conjunto infinito.

(a) Demuestre que,

$$\tau_1 = \{U \subseteq X : U = \emptyset \text{ o } X \setminus U \text{ es finito}\}$$

es una topología en X. Esta se llama **topología del complemento finito.**

(b) Demuestre que,

$$\tau_2 = \{U \subseteq X : U = \emptyset \text{ o } X \setminus U \text{ es a lo más numerable}\}$$

es una topología en X. Esta se llama **topología del complemento numerable.**

(c) Sea $p \in X$ un punto arbitrario en X. Demuestre que,

$$\tau_3 = \{U \subseteq X : U = \emptyset \text{ o } p \in U\}$$

es una topología en X. Esta se llama **topología del punto particular.**

(d) Sea $p \in X$ un punto arbitrario en X. Demuestre que,

$$\tau_4 = \{U \subseteq X : U = X \text{ o } p \notin U\}$$

es una topología en X. Esta se llama **topología del punto excluido.**

(e) Determine cuando,

$$\tau_5 := \{U \subseteq X : U = X \text{ o } X \setminus U \text{ es infinito}\}$$

es una topología en X.

Sol.

(a) Probemos los axiomas de topología.

i) Notemos que $X \setminus X = \emptyset$, luego $\emptyset, X \in \tau_1$.

ii) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha \subseteq \tau_1$, notemos que,

$$X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq X \setminus A_\alpha$$

Si $X \setminus A_\alpha$ es finito, entonces $X \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$ también y por tanto $\bigcup_\alpha A_\alpha$ elemento de τ_2.

iii) Sean $A_1, A_2 \in \tau_1$, luego,

$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = X \cap (A_1^c \cup A_2^c) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$

Es decir, $X \setminus (A_1 \cap A_2)$ es la unión de dos conjuntos finitos, por lo que pertenece a τ_1. De forma recursiva se concluye que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau_1$.

(b) La demostración es análoga al punto (a).

(c) Probemos los axiomas de topología.

  i) Claramente $\emptyset, X \in \tau_3$.

  ii) Sea $\{A_\alpha\}_\alpha \subseteq \tau_3$. Notemos que si $A_\alpha = \emptyset$ para todo α, entonces la unión está en τ_3. Si para algún α se tiene que $p \in A_\alpha$, entonces $p \in \bigcup_\alpha A_\alpha$, por lo que este es elemento de τ_3.

  iii) Sean $A_1, A_2 \in \tau_3$, si uno es vacío entonces $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \tau_3$. Si ninguno es vacío, entonces $p \in A_1 \cap A_2$, luego $A_1 \cap A_2 \in \tau_3$. De forma recursiva se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau_3$.

(d) La demostración es análoga al punto (c).

(e) Estudiemos este conjunto. Sea $q \in X$, luego $X \setminus \{q\}$ es infinito por lo que $\{q\} \in \tau_5$. Consideremos el conjunto,

$$A := \bigcup_{\substack{p \in X \\ p \neq q}} \{p\}$$

Notemos que $A = X \setminus \{q\}$, si $\{q\}$ es elemento de τ_5 entonces es abierto, luego A es abierto al ser unión de abiertos. Pero por otro lado $X \setminus \{q\}$ es un conjunto cerrado, por tanto A es abierto y cerrado a la vez, siendo imposibe al no ser ni X ni $\emptyset$. Por tanto τ_5 no puede ser topología.

P2. En un espacio topológico (X, τ) decimos que $G \subseteq X$ es un G_δ si es intersección numerable de abiertos, es decir, existen $\{O_i\}_i \subseteq \tau$ tales que,

$$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$$

(a) Demuestre que los G_δ son base de una topología. Esta la llamaremos τ_δ.

(b) Demuestre que si $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ son espacios topológicos, entonces,

$$(\tau_X \times \tau_Y)_\delta = \tau_{X,\delta} \times \tau_{Y,\delta}$$

Sol.

(a) Para demostrar que $G_\delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base de una topología, debemos probar dos cosas,

  i) $\bigcup_{B \in G_\delta} B = X$.

  ii) Dados $B_1, B_2 \in G_\delta$, si para $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in G_\delta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

  La primera condición nos dice que construye a X y la segunda nos dice que es topología que con la primera, implica que es una topología de X. Probemos cada punto.

i) Claramente se cumple la inclusión $\subseteq$. Sea $O_i = X$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces,

$$X = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} O_i$$

y como $O_i \in \tau$, se tiene que X es elemento de G_δ, es decir, $X \subseteq \bigcup_{B\in G_\delta} B$.

ii) Supongamos que,

$$B_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n^{(1)}, \quad B_2 = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} O_m^{(2)}$$

Sea $x \in B_1 \cap B_2$, entonces,

$$x \in \bigcap_{n,m\in\mathbb{N}} (O_n^{(1)} \cap O_m^{(2)})$$

Tenemos que $O_n^{(1)} \cap O_m^{(2)} \in \tau$, y por lo tanto $B_1 \cap B_2 \in G_\delta$. Para concluir el resultado basta con tomar $B_3 := B_1 \cap B_2 \in G_\delta$.

Probando que G_δ es base de τ_δ.

(b) Debemos definir el espacio topológico del producto. Sea,

$$\mathcal{B} := \{U \times V : U \times \tau_X, V \in \tau_Y\}$$

Definimos la topología producto por la topología con base $\mathcal{B}$. Para probar que $(\tau_X \times \tau_Y)_\delta = \tau_{X,\delta} \times \tau_{Y,\delta}$ debemos probar que la base de uno está en el otro. Sea G_δ la base de $(\tau_X \times \tau_Y)_\delta$, sea $G \in G_\delta$, entonces,

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

donde $O_n \in \tau_X \times \tau_Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como $\mathcal{B}$ es base de la topología producto, se tiene que $O_n = \bigcup_\alpha B_\alpha^{(n)}$ con $B_\alpha^{(n)} = U_\alpha^{(n)} \times V_\alpha^{(n)}$ donde $U_\alpha^{(n)} \in \tau_X, V_\alpha^{(n)} \in \tau_Y$. Sea $x \in G$, luego existen $U_\alpha^{(n)} \in \tau_X, V_\alpha^{(n)} \in \tau_Y$ tales que,

$$x \in U_\alpha^{(n)} \times V_\alpha^{(n)}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para algún α. Definimos,

$$U_\alpha^{(x)} : = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_\alpha^{(i)} \in \tau_{X,\delta}$$

$$V_\alpha^{(x)} : = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_\alpha^{(i)} \in \tau_{Y,\delta}$$

Entonces $x \in U_\alpha^{(x)} \times V_\alpha^{(x)}$, afirmamos que,

$$G = \bigcup_{x\in G} (U_\alpha^{(x)} \times V_\alpha^{(x)})$$

La inclusión $\subseteq$ es clara, para la otra inclusión basta ver que si $x \in U_\alpha^{(y)} \times V_\alpha^{(y)}$ para algún y, luego $x \in B_\alpha^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces $x \in G$. Por tanto, G es unión de elementos rectángulos en $\tau_{X,\delta} \times \tau_{Y,\delta}$. Probando que,

$$(\tau_X \times \tau_Y)_\delta \subseteq \tau_{X,\delta} \times \tau_{Y,\delta}$$

Sea $\mathcal{C} := \{U \times V : U \in \tau_{X,\delta}, V \in \tau_{Y,\delta}\}$ la base de $\tau_{X,\delta} \times \tau Y, \delta$. Vamos a estudiar el caso particular $U \times V$. Notemos que $U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V)$, estudiemos solamente $(U \times Y)$ ya que el otro es análogo. Si $U \in \tau_{X,\delta}$, entonces,

$$U = \bigcup_\alpha \underbrace{U_\alpha}_{\in G_{X,\delta}}$$

donde $U_\alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ donde $O_n \in \tau_X$. Luego se tiene que,

$$\begin{aligned} U \times Y &= \left(\bigcup_\alpha U_\alpha \right) \times Y \\ &= \bigcup_\alpha (U_\alpha \times Y) \\ &= \bigcup_\alpha \left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \right) \times Y \right) \\ &= \bigcup_\alpha \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (O_n \times Y) \right) \end{aligned}$$

Si $O_n \times Y$ es un conjunto abierto de $\tau_X \times \tau_Y$, luego,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (O_n \times Y) \in G_{X \times Y, \delta} \subseteq (\tau_X \times \tau_Y)_\delta$$

Y como $(\tau_X \times \tau_Y)_\delta$ es topología, se tiene que $U \times Y \in (\tau_X \times \tau_Y)_\delta$. Y como $(U \times Y) \cap (X \times V)$ es intersección finita, se tiene que $U \times V \in (\tau_X \times \tau_Y)_\delta$. Probando así que,

$$(\tau_X \times \tau_Y)_\delta = \tau_{X,\delta} \times \tau_{Y,\delta}$$

P3. Definimos la topología de Zariski en $\mathbb{R}^n$ como la topología cuyos conjuntos cerrados son los conjuntos de la forma,

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0 \, \forall f \in S\}$$

donde S es algún conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ en n variables.

(a) Muestre la topología Zariski en $\mathbb{R}^n$ es distinta a la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

(b) Muestre que el conjunto de completementos de hipersuperficies,

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\}$$

forman una base para la topología Zariski.

(c) Considere ahora $\mathbb{R}^n$ con la topología $\mathcal{T}$ definida por la sub-base dada por los conjuntos $\mathbb{R}^n \setminus C_f$ donde $C_f := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ con $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ de grado 1 ¿Cómo se compara $\mathcal{T}$ con la topología de Zariski?

Sol.

(a) Sean $f, g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces $V^c(f) \cap V^c(g) = V^c(fg) \neq \emptyset$, ya que si f, g tienen un valor que los anula, está calro que se anula en fg. Por tanto, cualquier intersección de los abiertos de Zariski, se tiene que no se anulan, cosa opuesta en la topología usual en $\mathbb{R}^n$, puede pasar que su intersección sea vacío. Es decir, son topologías opuestas.

(b) Sea $C(f) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\}$. Sea $U = V(S)^c = \{f(x) \neq 0$ para algún $f \in S\}$ un abierto de la topología de Zariski. Afirmamos que,

$$U = \bigcup_{f \in S} C(f)$$

Ya que si $x \in U$ entonces $f(x) \neq 0$ para algún $f \in S$, por lo que $x \in \bigcup_{f \in S} C(f)$. Y si consideramos $x \in \bigcup_{f \in S} C(f)$, entonces $f(x) \neq 0$ para algún $f \in S$ y luego $x \in U$.

(c) Sea $X \in \mathcal{T}$, entonces por definición,

$$X = \bigcup_{\alpha} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^c_{f,\alpha} \right) \subseteq \bigcup_{\alpha} C^c_{f,\alpha} \in \text{topología de Zariski}$$

Luego $\mathcal{T}$ es más gruesa que la topología de Zariski. Probemos que la inclusión es estricta. Sea $D := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1 \neq 0\}$ un abierto en la topología de Zariski, si D está en $\mathcal{T}$, entonces,

$$D = \bigcup_{\text{arbi}} \bigcap_{\text{fin}} \mathbb{R}^n \setminus C_f$$

Tomando el complemento, tenemos que,

$$D^c = \bigcap_{\text{arbi}} \bigcup_{\text{fin}} C_f \subseteq C_f$$

Lo importante, es que $e_1, \ldots, e_n \in D^c$, entonces $e_1, \ldots, e_n \in C_f$ en cada C_f, luego si $f = a_n x_n + \cdots + a_1 x_1 + a_0$, se tiene que $f(e_i) = a_i = 0$, luego $f = 0$ para todo C_f, es decir, $0 \in C_f$ en cada uno y está en la interseicción de la unión finita, pero entonces $0 = 1$ por la igualdad, siendo contradicción. Por tanto, la inclusión es estricta.

4.2. Ayudantía 2

P1. Sean W, X, Y, Z espacios topológicos y $f : W \to Y$ y $g : X \to Z$ funciones. Definimos la función topológica por,

$$f \times g : W \times X \to Y \times Z$$

de modo que,

$$(f \times g)(w, x) = (f(w), g(x))$$

(a) Demuestre que f, g son continua si y sólo si $f \times g$ es continua.

(b) Demuestre que si f, g son funciones abiertas, entonces $f \times g$ también es abierto.

(c) ¿Es cierto si f, g son cerradas, entonces $f \times g$ lo es?

Sol.

(a) Supongamos que f, g son funciones continuas. Debemos probar que todo abierto de $Y \times Z$, tiene preimagen abierto. Recordemos que la topología de $Y \times Z$ está dada por uniones de elementos de la forma $U \times V$ donde $U \subseteq Y, V \subseteq Z$ son abierto , vamos a probar en particular el abierto $U \times V$ tiene preimagen abierto. Afirmamos que,

$$(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$$

Si $(w, x) \in (f \times g)^{-1}(U \times V)$, entonces $(f \times g)(w, x) \in U \times V$, y como $(f \times g)(w, x) = (f(w), g(x))$ se tiene que $(f(w), g(x)) \in f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$.

Para la otra dirección es análogo. Por tanto tenemos que la preimagen de $U \times V$ es producto de dos conjuntos abierto, luego la preimagen es abierto. Por tanto $f \times g$ es continua.

Supongamos ahora que $f \times g$ es continua. Vamos a definir la proyección de la primera coordenada por,

$$\begin{aligned} \pi_X : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

Esta función es abierta y continua.

- **Continua.** Sea $U \subseteq X$ abierto, luego, $\pi_X^{-1}(U) = \{(x, y) \in (X, Y) : x \in U\} = U \times Y$, y $U \times Y$ es abierto en la topología producto. Siendo la proyección continua.
- **Abierto.** Un conjunto es abierto si la imagen de un abierto es abierto. Sea $U \times V \subseteq X \times V$ abierto, entonces $\pi_X(U \times V) = U \subseteq X$ abierto, entonces la imagen es abierto, es decir, la proyección es abierto.

Probemos que f es continua, para ello debemos probar que todo abierto de Y tiene preimagen abierto. Sea $V \subseteq Y$ abierto, luego $f^{-1}(V) \subseteq W$ es la preimagen. Notemos que,

$$(f \times g)^{-1}(V \cap Z) = f^{-1}(V) \times g^{-1}(Z) = f^{-1}(V) \cap X$$

Si $V \cap Z$ es abierto, entonces $f^{-1}(V) \cap X$ es abierto. Ahora con respecto a la proyección $\pi_W : W \times X$, tenemos que,

$$f^{-1}(V) = \pi_W(f^{-1}(V) \cap X)$$

Como $f^{-1}(V) \cap X$ es abierto y la proyección es abierto, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto. Por lo tanto f es continua. (Con g se prueba de forma similar).

(b) Sean f, g abiertos. Queremos probar que todo abierto de $W \times X$ tiene imagen abierto. Vemos que los abiertos de $W \times X$ son uniones de conjuntos de productos abiertos de subconjuntos de W y de X, por lo que vamos a probar el caso de un rectángulo, luego de forma general. Sea $U \times V \subseteq W \times X$ abierto, entonces,

$$(f \times g)(U \times V) = \{(y, z) \in Y \times Z : \exists(x, y), (f(w), g(x)) = (y, z)\} = f(U) \times g(V)$$

Como f, g son abiertos, entonces $f(U) \times g(V)$ son abiertos. Ahora para el caso general, notemos que para $A_1, A_2 \subseteq W \times X$ se tiene que,

$$(f \times g)(A_1 \cup A_2) = (f \times g)(A_1) \cup (f \times g)(A_2)$$

Esto se puede generalizar sobre una colección arbitraria, por tanto, todo abierto de $W \times X$ tiene imagen abierto, y por tanto $f \times g$ es abierto.

(c) Consideremos las funciones $f = id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g = 0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sea,

$$C := \left\{ \left(\frac{1}{n}, n \right) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

el conjunto de los pares ordenados. Notemos que C es discreto, luego es cerrado. Pero,

$$(f \times g)(C) = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

No es conjunto cerrado ya que $(0, 0) \in \overline{(f \times g)(C)}$, pero $(0, 0) \notin (f \times g)(C)$.

P2. Sean $W \subset Y \subset X$ tres conjuntos, τ una topología en X y τ' la topología inducida por τ por Y. Demuestre que las topologías inducidas por τ y τ' en W son iguales.

Sol. Una topología de Y inducida por X está dada por la base de $\mathcal{B} = \{U \subseteq X : \exists V \in \tau_X, U = V \cap Y\}$. A partir de esto probaremos lo que se nos pide. Para probar que dos topologías son iguales, baste probar que un abierto de una topología está contenido en el otro. Sean τ_W, τ'_W las topologías inducidas. Sea U abierto de τ_W, entonces existe $V \subseteq X$ tal que $U = A \cap W$, Si $W \subseteq Y$, entonces,

$$U = A \cap W = A \cap Y \cap W = (\underbrace{A \cap Y}_{\in \tau'}) \cap W$$

Luego $U \in \tau'_W$. Por otro lado, si U es abierto de la topología τ'_W, entonces existe V' abierto de τ_Y tal que $U = V' \cap W$, y si V' es tpología de τ_Y, entonces existe V abierto de τ_X tal que $V' = V \cap Y$, entonces,

$$U = V' \cap W = V \cap Y \cap W = V \cap W$$

Por tanto $U \in \tau_W$. Por lo que $\tau_W = \tau'_W$.

P3. Decimos que $A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$.

(a) Demuestre que si todo subconjunto no vacío de X es denso, entonces los únicos abiertos son X y $\emptyset$.

(b) Sea W un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$. Demuestre que $\mathbb{R} \setminus W$ es denso.

Sol.

(a) Supongamos que $U \subseteq X$ es un abierto tal que $U \neq X$ y $U \neq X$. Si U es abierto, entonces $U^c \subseteq X$ es cerrado, y al ser un subconjunto de X se tiene que es denso, es decir, $\overline{U^c} = X$, pero entonces $U^c = \overline{U^c} = X$, por tanto U^c es abierto y luego U es cerrado y los únicos que cumplen está propiedad son $\emptyset, X$, siendo contradicción. Luego los únicos abiertos son $\emptyset, X$.

(b) Debemos probar que $\overline{\mathbb{R} \setminus W} = \mathbb{R}$. Sabemos que $\overline{\mathbb{R} \setminus W} \subseteq \mathbb{R}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $U \subseteq \mathbb{R}$ vecindad de x, sin pérdida de generalidad podemos decir que $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Ahora, si W es numerable, entonces W^c es no numerable, por lo tanto $U \cap (\mathbb{R} \setminus W) = U \cap W^c \neq \emptyset$. Por tanto $x \in \overline{\mathbb{R} \setminus W}$. Probando que $\mathbb{R} \setminus W$ es denso.

P4. Sea T_f la topología cofinita de T_u la topología usual, ambas en .

(a) Determine las funciones continuas $g : (\mathbb{R}, T_f) \to (\mathbb{R}, T_u)$.

(b) Determine las funciones continuas $g : (\mathbb{R}, T_f) \to (\mathbb{R}, T_f)$.

Propuesto. Antes de enunciar el problema, necesitamos una definición.

Definición. *Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que es localmente finita si cada punto de X tiene una vecindad que intersecta a lo más una cantidad finita de conjuntos de $\mathcal{A}$.*

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos abiertos de X.

(a) La colección $\mathcal{A}$ es localmente finita si y sólo si $\overline{\mathcal{A}}$ es localmente finita.

(b) Si A es localmente finito, entonces,

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$$

Sol.

(a) Definimos $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{A} : A \in \mathcal{A}\}$. Supongamos que $\mathcal{A}$ es localmente infinita, sea $x \in X$, entonces existe una vecindad V tal que interectan a lo más una cantidad finita de conjuntos de $\mathcal{A}$. Notemos que si V está intersectado con $A_1, \ldots, A_m$, entonces V está intersectado con $\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_m$

Terminar.

4.3. Ayudantía 3

P1. Sea X el producto Cartesiano de infitas copas numerables de $\mathbb{R}$ con, con la topología caja. Definamos el mapeo $f : \mathbb{R} \to X$ por $f(x) = (x, x, \dots)$ para todo $x \in X$. Demustre que f no es continuo.

Sol. La topología caja está dada por la base,

$$\mathcal{B}^* := \left\{ \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha : U_\alpha \text{ abierto en } X_\alpha \right\}$$

Recordemos que una función es continua, si toda preimagen de abierto, es abierto. Consideremos el elemento de la base $\mathcal{B}^*$,

$$U := \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$$

Que es un abierto en X. Luego por definición,

$$f^{-1}(U) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right), \forall n \geq 1 \right\}$$

Entonces se tiene que,

$$x \in \bigcap_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$$

La inclusión $\supseteq$ es evidente, para la otra basta ver que si $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ para todo $n \geq 1$ y si existe $y \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ no nulo, entonces $-1/n < y \leq 1/n$, y por construcción de los reales, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/(N+1) \leq |y| \leq 1/N$, por lo que $y \notin \left(-\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+1}\right)$, por lo que $y = 0$. Pero entonces es tiene que,

$$f^{-1}(U) = \{0\}$$

que es cerrado puesto que $\{0\}^c = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (uniones de abiertos). Por lo tanto f no es continuo.

P2. Sea A un conjunto, sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de espacios y $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de funciones $f_\alpha : A \to X_\alpha$.

(a) Para cada $\beta \in J$, definamos,

$$\mathcal{S}_\beta := \{ f_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta \}$$

Sea $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$. Pruebe que $\mathcal{S}$ es una subase para la topología más gruesa al que todas las f_α son continuas.

(b) Sea $\mathcal{T}$ la topología generada por $\mathcal{S}$. Demuestre que $g : Y \to A$ es continua relativamente a $\mathcal{T}$ si y sólo si $f_\alpha \circ g : Y \to X_\alpha$ es continua para todo f_α.

(c) Use la parte anterior para demostrar que $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ dotado con la topología producto, es la topología más gruesa tal que todas las proyecciones $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\beta$ son continuas.

Sol.

(a) Debemos probar que la topología generada por $\mathcal{S}$ como subbase, es la más gruesa. Sea τ una topología de A tal que f_α es continua para todo α. Notemos que si tomamos un abierto $U_\alpha \subseteq X_\alpha$, entonces $f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}$ por definición, es decir, f_α es continua. Ahora si f_α es continua en la topología τ, entonces para $U \subseteq X_\alpha$ abierto, se tiene que $f_\alpha^{-1}(U) \in \tau$, pero por definición $f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}$ y por tanto $\mathcal{S} \subset \tau$. Probando que es la más gruesa.

(b) Si $g : Y \to A$ es continua y si f_α es continua en $\mathcal{T}$, entonces por composición de funciones se tiene que $f_\alpha \circ g$ es continua.

Probemos la otra dirección. Supongamos que $f_\alpha \circ g : Y \to X_\alpha$ es continua para todo f_α. Sea $U \subseteq A$ abierto, entonces se tiene que,

$$U = \bigcup_{\text{arbitrario}} \bigcap_{\text{finito}} f_\beta^{-1}(U_\beta)$$

donde $U_\beta \subseteq X_\beta$ abierto. Luego,

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{\text{arbitrario}} \bigcap_{\text{finito}} g^{-1} \circ f_\beta^{-1}(U_\beta) = \bigcup_{\text{arbitrario}} \bigcap_{\text{finito}} (f_\beta \circ g)^{-1}(U_\beta)$$

Es decir, $g^{-1}(U)$ es unión de intersección de finitos de conjuntos abierto, por lo que $g^{-1}(U)$ es abierto y por tanto g es continua.

(c) La base de la topología producto es,

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha : U_\alpha \text{ abierto en } X_\alpha, U_\alpha = X_\alpha \text{ excepto en infinito índices} \right\}$$

Supongamos que la topología producto es denotada por $\mathcal{L}$, sea la función,

$$f : \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha, \mathcal{L}\right) \to \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha, \mathcal{T}\right)$$
$$x \mapsto x$$

Tenemos que f es continua puesto que $\pi_\beta \circ f$ es continua. Podemos definir la inversa por,

$$g : \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha, \mathcal{T}\right) \to \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha, \mathcal{L}\right)$$
$$x \mapsto x$$

Que es continua dado por la misma razón de (b). Por tanto f es un homeomorfismo y por lo tanto el comportamiento de que $\mathcal{T}$ es la más gruesa, dada por las proyecciones se traslada a $\mathcal{L}$, por lo que es la topología más gruesa con funciones proyecciones continuas.

P3. Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, con X espacio topológico. Decimos que x_n **converge** a x, para algún $x \in X$, si para toda vecindad de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Demuestre que $(x_1, x_2, \dots,)$ es una sucesión del espacio producto converge x si y sólo si la sucesión $(\pi_\alpha(x_1), \pi_\alpha(x_2), \dots)$ converge a $\pi_\alpha(x)$ para cada α. ¿Es cierto este hecho si se usa la topología caja en lugar de la producto?

Sol. Notar que la noción de convergencia en topología, no implica que el límite sea único, por lo que no podemos trabajar con algunas propiedades importantes de límites.

Supongamos que x_n converge a x. Sea α fijo. Notemos que $\pi_\alpha \in X_\alpha$, entones $\{\pi_\alpha(x_n)\}$ es sucesión de X_α. Sea $V \subseteq X_\alpha$ vecindad tal que $\pi_\alpha(x) \in X_\alpha$, entonces por continuidad se tiene que $\pi_\alpha^{-1}(V)$ es abierto en la topología producto que contiene a x, luego como x_n converge a x, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \pi_\alpha^{-1}(V)$ para todo $n \geq N$, entonces $\pi_\alpha(x_n) \in V$ para todo $n \geq N$, es decir, $\pi_\alpha(x_n)$ converge a $\pi_\alpha(x)$.

Supongamos ahora que $\pi_\alpha(x_n)$ converge a $\pi_\alpha(x)$ para todo α. Sea U vecindad de x, luego existe $V \subset U$ con $x \in V$ tal que,

$$V = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha$$

tal que $V_\alpha \neq X_\alpha$ para finitos α y V_α abiertos en X_α. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. **terminar.**

P4. Dadas las sucesiones $(a_1, a_2, \dots)$ y $(b_1, b_2, \dots)$ de números reales con $a_i > 0$ para todo $i \geq 1$, definamos $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ mediante la ecuación,

$$h((x_1, x_2, \dots)) = (a_1x_1 + b_1, a_2x_2 + b_2, \dots)$$

(a) Pruebe que si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología producto, h es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^\omega$ consigo mismo.

(b) ¿Qué ocurre si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología por cajas?

Sol.

(a) Podemos pensar en h como una función de sucesiones, entonces h, entonces es continua si y sólo si sus proyecciones son continuas, (las coordenadas), es decir, si $(\pi_n \circ h)(x_1, x_2, \dots) = a_nx_n + b_n$ es continua, y en efecto lo es, sea $U = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ abierto de la base de la topología usal $\mathbb{R}$, luego si $V := \left(\frac{a-b_n}{a_n}, \frac{b-b_n}{a_n}\right)$ es abierto en $\mathbb{R}$, y entonces,

$$(\pi_n \circ h)^{-1}(U) = \mathbb{R} \times \cdots \times V \times \dots$$

Es decir, $(\pi_n \circ h)^{-1}$ es el producto de infinitos $\mathbb{R}$ y finitos distitnos a $\mathbb{R}$, es decir, es elemento de la topología producto y por tanto $\pi_n \circ h$ es continua para todo $n \geq 1$ y luego h es continua.

Podemos definit la función $g(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1-b_1}{a_1}, \frac{x_2-b_2}{a_2}, \dots\right)$ que es claramente la inversa bien definida, y al ser similar a h se tiene que también es continua y por tanto h es homeomorfismo.

(b) Supongamos que $\mathbb{R}^\omega$ está dotado de la topología por cajas. No necesariamente es continua.

P5. Sea X nuevamente el producto Cartesiano de infinitas copias numerables de $\mathbb{R}$, con la topología caja. Sea $X^* \subset X$ el subconjunto de las sucesiones de reales positivos, y sea $\mathbf{0} \in X$ la sucesión constante 0. Demuestre que $\mathbf{0}$ está en la clausura de X^+, pero no existe ninguna sucesión delementos de X^+ que converge a $\mathbf{0}$.

Por hacer

4.4. Ayudantía Extra.

P1. Sean A, B subconjuntos de un espacio topológico X tal que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$ para $a \in A$ y $f(b) = 1$ para $b \in B$. Asumir topología usual en $\mathbb{R}$.

1. ¿Puede existir tal f continua si $X = [0, 1]$?
2. ¿Qué pasa si $X = \mathbb{N}$ y con $X = \{-1\} \cup (0, 1]$?
3. ¿De qué depende esta pregunta?

Sol. Sean A, B no vacíos, sino f sería constante.

Supongamos que existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua, entonces se tiene que $f^{-1}\{0\} = A, f^{-1}\{1\} = B$, y como $\{0\}, \{1\}$ son cerrados, se tiene que A, B son cerrados, entonces $X = [0, 1]$ es disconexo, siendo imposible, ya que $[0, 1]$ es un intervalo y luego es conexo.

Supongamos que $X = \mathbb{N}$, entonces X es disconexo ya que es la unión de cerrados. Por lo que no hay problema con que exista una función continua.

Si $X = \{-1\} \cup (0, 1]$, tenemos que X es disconexo ya que $(0, 1]$ es cerrado ya que,

$$(0, 1] = \bigcap_{\varepsilon > 0} [-\varepsilon, 1]$$

4.5. Interrogación I

P1. Sea τ_l la topología del límite inferior en $\mathbb{R}$, es decir, la generada por todos los intervalos de la forma $[a, b]$.

(a) Demuestre que la colección de intervalos de la forma $[a, b)$ es una base de τ_l, y que esta es más fina que la topología usual en $\mathbb{R}$.

(b) Demuestre que $(\mathbb{R}, \tau_l)$ es disconexo.

Sol....

P2. Sea X un espacio topológico. Decimos que $A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$.

(a) Pruebe que A es denso si y sólo si $A \cap U \neq \emptyset$ para todo abierto $U \neq \emptyset$.

(b) Suponga que A_1 y A_2 son abiertos densos. Demuestre que $A_1 \cap A_2$ es denso.

Sol.

(a) Supongamos que A es denso. Supongamos que existe un abierto U no vacío tal que $A \cap U = \emptyset$. Si A es denso, entonces $\overline{A} = X$, por lo que podemos considerar $x \in U$, (pensando en el mismo U de antes), luego se tiene que $U \cap A = \emptyset$, es decir, $x \notin \overline{A}$, siendo imposible por densidad. Entonces todo abierto U no vacío, cumple que $A \cap U \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que para todo U abierto no vacío se tiene que $A \cap U \neq \emptyset$. Entonces para $x \in X$, podemos considerar U vecindad de x, entonces $A \cap U \neq \emptyset$ por hipótesis, pero esto es equivalente a decir que $x \in \overline{A}$. Por tanto A es denso.

(b) Sea U un abierto no vacío. Entonces se tiene que $A_1 \cap U, A_2 \cap U$ son no vacíos, entonces $A_1 \cap A_2 \cap U \neq \emptyset$, y esto se puede hacer para todo U abierto no vacío. Por tanto $A_1 \cap A_2$ es denso.

P3. Sea Y espacio topológico y $X = Y^{\mathbb{N}}$ el producto de numerables copias de Y con la topología producto. Demuestre que X es homeomorfismo $X^{\mathbb{N}}$.

Sol. Vamos a usar un truco. Consideremos la siguiente tabla, A partir de la tabla vamos a

$\mathbb{N}$	1	2	3	$\ldots$
1	11	12	13	$\ldots$
2	21	22	23	$\ldots$
3	31	32	33	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

construir nuestra función homeomorfa. Sea,

$$f : X^{\mathbb{N}} \to X$$
$$((x_{11}, x_{12}, \ldots), (x_{21}, x_{22}, \ldots,), \ldots) \mapsto (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, \ldots)$$

La secuencia que sigue f es partir en 11, luego ir a 12, ir a 21, luego a $13, 22, 31, 14, 23, 32, 41, \ldots$. Afiramos que f es homeomorfismo.

- **Biyectiva.** Notemos que es inyectiva, ya que $f(x)$ con $x \in X^{\mathbb{N}}$ tiene única representación. Y es sobreyectiva ya que podemos tomar $x \in X^{\mathbb{N}}$ de forma conveniente.
- **Continua.** La función es continua ya que cada coordenada es continua...

Por tanto f es homeomorfismo.

P4. Sea $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ y consideremos

$$\varphi : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$$

dada por $\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$. Demuestre que,

(a) φ es un homeomorfismo.

(b) S^2 es conexo.

(c) S^2 no es homeomorfo a $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Sol.

4.6. Ayudantía 4

P1. Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ subespacios topológicos conexos tales que $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Mostrar que $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ es conexo.

Sol. Sea

$$\mathcal{X} := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$$

Sea la función continua,

$$f : \mathcal{X} \to \{0, 1\}$$

P2. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que A es conexo si y sólo si es conexo por caminos.

Sol. Si A es conexo por camino, entonces es claramente conexo. Supongamos que A es conexo,

P3. Sea X un espacio topológico localmente conexo y compacto.

(a) Demuestre que X tienen un número finito de componenetes conexas.

(b) ¿Qué pasaría si X no fuera localmente conexo?

P4. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una función continua e inyectiva. Demuestre que f es homeomorfismo.

P5. Sea $X = \{(x, qx) : q \in \mathbb{Q} \text{ y } x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

1. ¿Es $X \cup \{(1, \sqrt{3})\}$ conexo?
2. ¿Es conexo por caminos?

4.7. Ayudantía 5

P1. Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Supongamos que Y es Hausdorff, demuestre que,

$$\mathcal{F} := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

es cerrado en X.

Sol. Probemos que el conjunto $\mathcal{F}^c$ es abierto. Sea $x \in \mathcal{F}^c$, entonces $f(x) \neq g(x)$. Si $f(x), g(x) \in Y$, entonces existen vecindades U_f, U_g de $f(x), g(x)$ tales que $U_f \cap U_g = \emptyset$. Notemos que,

$$f^{-1}(U_f) \cap g^{-1}(U_g) =: M$$

es un conjunto abierto dado que f, g son continuas. Afirmamos que M contiene al punto x y que $M \subseteq \mathcal{F}^c$. Claramente $x \in M$ por definición, sea $y \in M$, entonces $f(y) \in U_f$ y $g(y) \in U_g$, si $f(y) = g(y)$, entonces $U_f \cap U_g \neq \emptyset$, siendo imposible, por lo que $f(y) \neq g(y)$ y por tanto, $M \subseteq \mathcal{F}^c$. Probando así que $\mathcal{F}$ es un conjunto cerrado.

P2. Todo espacio metrizable es normal.

Sol. Sea X un espacio metrizable con métrica d. Sean A, B cerrados disjuntos. Para cada $a \in A$ existe $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a, \varepsilon_a) \cap B = \emptyset$. De forma análoga podeos hacer para todo $b \in B$ obteniendo $B(b, \varepsilon_b) \cap A = \emptyset$ para todo $b \in B$. Definimos,

$$U := \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a/2), \quad V := \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon_b/2)$$

Que son vecindades de A y B respectívamente. Sea $x \in U \cap V$, existen a, b tal que,

$$d(x, a) < \frac{\varepsilon_a}{2}, \quad d(x, b) < \frac{\varepsilon_b}{2}$$

Pero entonces,

$$d(a, b) < \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{2} \leq \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$$

Pero entonces, $B(a, \varepsilon_a) \cap B = \emptyset$ o bien $B(b, \varepsilon_b) \cap A = \emptyset$, siendo una contradicción. Por tanto $U \cap V = \emptyset$. Probando que X es normal.

P3. Todo espacio compacto y Hausdorff es normal.

4.8. Ayudantía 6

P1. Sea $X = [0,1] \times \{0,1\} \supset \mathbb{R}^2$ con la topología de subespacio y $\sim$ la relación de equivalencia en X definida por $(x,0) \sim (x,1)$ para $x > 0$ y $(x,x) \sim (x,x)$ para todo $x \in \{0,1\}$. Demuestre que $X/\sim$ con la topología cociente, no es Hausdorff.

Sol. Notemos que las clases de equivalencias, son de la forma, $\{(x,0),(x,1)\}$ para todo $x \in (0,1)$, $\{(0,0)\}$,$\{(1,1)\}$ y $\{(x,y)\}$ para el resto de casos. Sea $\pi : X \to X/\sim$ la proyección cociente. Demostremos que $\pi(0,0), \pi(0,1)$ no se pueden separar. Sean U_1, U_2 vecindades de $\pi(0,0), \pi(0,1)$. Luego existen intervalos I_1, I_2, J_1, J_2 tales que,

$$
\begin{aligned}
I_1 \times \{0\} \cup I_2 \times \{1\} &\supset \pi^{-1}(U_1)\\
J_1 \times \{0\} \cup J - 2 \times \{1\} &\supset \pi^{-1}(U_2)
\end{aligned}
$$

Digamos que $I_1 = [0,b)$ y $J = [0,d)$ y sin pérdida de generalidad $b \leq d$. Tomando $x \in (0,m)$, donde m es el mínimo de los supremos de I_1 y J_2, tendremos $\pi(x,0) \in U_1$ y $\pi(x,1) \in U_2$. Como $\pi(x,0) = \pi(x,1)$, entonces $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Por ende $X/\sim$ no es Hausdorff.

P2. Sea X el espacio cociente obtenido de $\mathbb{R}$ (topología usual), identificando todos los números $Y = \mathbb{Q}$ a un punto. ¿Es X Hausdorff? ¿Es X compacto?

Sol. Sea $\pi : \mathbb{R} \to X$ el mapa cociente, sea $q \in \mathbb{Q}$ un punto fijo, entonces el mapa tiene el siguiente comportamiento,

$$
\begin{aligned}
\pi : \mathbb{R} &\to X\\
p \in \mathbb{Q} &\mapsto [p]_\sim\\
r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} &\setminus [r]_\sim
\end{aligned}
$$

donde $p \in \mathbb{Q}$ se manda a un punto q, mientras que $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se manda a si mismo, es decir, $[r]_\sim = \{r\}$. Podemos ver que el espacio no es Hausdorff, dado que todo abierto no vacío U de X, se tiene que $[\mathbb{Q}]_\sim \in U$, así no pueden haber abiertos disjuntos no vacíos. Por lo que no es Hausdorff.

Para probar que no es compacto sea,

$$U := \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2} + n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

y $U_k := \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2} + n\}_{n \geq k}$. Luego,

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$$

y esto no admite subcubrimiento finito.

P3....

P4. Considere X, Y espacios topológicos. Supongamos que Y es compacto. Demuestre que $\pi : X \times Y \to X$ es cerrado.

Sol. sea $Z \supseteq X \times Y$ cerrado. Entonces, queremos probar que $\pi(Z)$ es cerrado y para ello probaremos que $X \setminus \pi(Z)$ es abierto. Sea $x_0 \in X \setminus \pi(Z)$, luego para todo $y \in Y$ se tiene que

$(x_0, y) \notin Z$. Como Z es cerrado, existen abiertos $U_y \supseteq X, V_y \supseteq Y$ tales que $U_y \times V_y \supseteq X \times Y \setminus Z$. Luego,

$$Y = \bigcup_{y \in Y} V_y$$

Por la compacidad de Y, existen $y_1, \ldots, y_n$ tales que,

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

Coniserando $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$, tenemos $x_0 \in U$ y $U \cap \pi(Z) = \emptyset$. Así $X \setminus \pi(Z)$ es un conjunto abierto, como querimos probar, por lo que $\pi(Z)$ es cerrado.

P5. Sea $f : X \to Y$ una función e Y un espacio compacto y Hausdorff. Entonces f es continua si y sólo si el **grafo** de f,

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

es cerrado en $X \times Y$.

Sol. Supongamos que f es continua. Demostraremos que $X \times Y \setminus G_f$ es abierto. Sea $(u, v) \in X \times Y \setminus G_f$. Como Y es Hausdorff, tenemos que existen U, V abiertos de Y tales que $f(u) \in U$ y $v \in V$, con $U \cap V \neq \emptyset$. Luego, como f es continua $f^{-1}(U)$ es abierto en X y así $f^{-1}(U) \times V$ es abierto en $X \times Y$ y cumple con,

$$(u, v) \in f^{-1}(U) \cap V \supset X \times Y \setminus G_f$$

Siendo G_f cerrado.

Supongamos ahora que G_f es cerrado. Sea $x_0 \in X$ y tomemos V vecinda de $f(x_0)$. Luego,

$$G_f \cap (X \times Y \setminus V)$$

es un conjunto cerrado, y si tomamos π la proyección, tenemos,

$$\pi(G_f \cap (X \times Y \setminus V)) = f^{-1}(Y \setminus V)$$

lo que es cerrado por el problema anterior. Como x_0 es arbitrario, tenemos que preimagen de conjunto cerrado es cerrado, y así f es continua.

4.9. Ayudantía 7

P1. Sol.

P4. Sea X espacio topológico segundo numerable y sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimineto abierto de X. Demuestre que existe subcubrimiento numerable de X.

Sol. Sea $\{B_n\}$ base numerable de X. Para cada n definimos $\mathcal{A}_n := \{\alpha : B_n \subseteq U_\alpha\}$. Entonces $\{U_{\alpha_n}\}$ es un subcubrimiento numerable de X. Probemos esto, sea $x \in X$, entonces existe un n tal que $x \in B_n$, luego

P5. Sea X el espacio topológico cociente dado por identificar el eje x con un punto. Determine si es primero numerable.

Sol. Demostraremos que no es primero numerable. Es más, demostraremos que $[0,0]$ no admite base numerable. Supongamos que si, por lo que existe una base numerable $\{B_n\}$, si $\mathbb{R}^2$ es segundo numerable, entonces podemos considerar la base numerables de elementos $B(x,q), x \in \mathbb{Q}^2, q \in \mathbb{Q}$.

Por tanto, podemos pensar en B_n como unión de bolas, es decir, podemos escoger $\varepsilon_i^{(n)}$ de tal forma que,

$$\pi^{-1}(B_n) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B((q_i,0),\varepsilon_i^{(n)})$$

donde $\mathbb{Q} = \{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que no adminete ningpun subcubrimiento.

Consideremos el conjunto,

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B$$

4.10. Ayudantia 9

P1. De ejemplos de un espacio que cumpla una de las siguientes condiciones según correspondan:

(a) Segundo numerable, pero no es Hausdorff ni localmente euclidiano.

(b) Localmente euclidiano, pero no Hausdorff ni segundo numerable.

Sol. Sea $\mathbb{N}$ con la topología trivial ($\{0, \mathbb{N}\}$). Notemos que es segundo numerable, pero no es Hausdorff, ya que todo punto p, q distintos, tiene como unica vecindad $\mathbb{N}$ y tampoco es localmente euclidiano, ya que $\mathbb{N}$ no es homeomorfo a una bola $B^n(0, 1)$.

Para el segundo ejemplo consideremos $L = (\omega_1 \times [0, 1)) \times \{1, 2\})/\sim$. Donde la relación está dada por $(x, 1) \sim (x, 2)$ para todo $x \neq (0, 0)$.

P2. Sea M una variedad topológica y $B \subset M$ cualquier subconjunto cerrado. Demuestre que existe una función continua $f : M \to [0, \infty)$ cuyos conjuntos de ceros es exactamente B.

Sol. Sea M una n-variedad y sea B cerrado de M. Sea $\{U_\alpha\}$ cubrimiento abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ y sea $\{\psi_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento abierto. Sea φ_α el homeomorfismo que toma U_α y lo manda a $\mathbb{R}^n$ y sea la función,

$$\begin{aligned} u_\alpha : U_\alpha &\to [0, \infty) \\ x &\mapsto \inf\{|\varphi_\alpha(x) - y| : y \in B\} \end{aligned}$$

Tee...

P5. Sea B el disco cerrado de radio 1 en $\mathbb{R}^n$ y x, y dos puntos del interior de B. Demuestre que existe un homeomofismo $f : B \to B$ tal que $f(x) = y, f(z) = z$ para todo $z \in \partial B$.

Dem. Queremos probar que existe un homeomrofismo que manda del interior al interior y el exterior al exteiror. Sea la función,

$$\begin{aligned} h : \text{int}(B) &\to \mathbb{R}^n \\ z &\mapsto \frac{z}{1 - \|z\|} \end{aligned}$$

Es fácil ver que es invertible con inversa $h^{-1}(z) = \frac{z}{1+\|z\|}$. Sea $c = h(y) - h(x)$. Y sea la función $f : \text{int}(B) \to \text{int}(B)$ dada por,

$$f(z) = h^{-1}(h(z) + c)$$

Vemos que f es homeomorfismo por composición, además, $f(x) = y$. Podemos extender f a su borde. Para $\|z\| < 1$ se tiene que,

$$f(z) = \frac{z + (1 - \|z\|)c}{1 - \|z\| + \|z + (1 - \|z\|)c}$$

Tomando $\|w\| = 1$ obtenemos,

$$f(w) = w$$

Luego esta extensión es claramente continua, como $\mathbb{R}^n$ es hausdorff se tiene que B cerrado es compacto y Hausdorff, y si f es biyección continua, se tiene que es homeomorfismo.

P6. Sea M una variedad topológica conexa. Si $x, y \in M$, entonces existe un homeomorfismo $g : M \to M$ tal que $g(x) = y$.