FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2500

EDO

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.1. Motivación

Las ecuaciones diferenciales empiezan a ser un estudio fundamental en paralelo con el cálculo. Una utilidad es en la física, pensemos en un campo de fuerza.

Insertar figura.

Sea $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función que depende de la variable t tiempo. A esta función le diremos vector posición de una particula en función del tiempo, por lo que $\vec{x} = \vec{x}(t)$, supongamos que es dos veces diferenciable (es continua y diferenciable en cada coordenada), entonces se genera

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}} &= \frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v}(t), \quad \text{velocidad}\\
\ddot{\vec{x}} &= \frac{d^2}{dt^2}\vec{x} = \vec{a}(t), \quad \text{aceleración}
\end{aligned}$$

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo de fuerza que experimenta la particula. Se cumple que

$$m \cdot \ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$$

Ahora, por coordenadas, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= \frac{F_1(x)}{m}\\
\ddot{x}_2 &= \frac{F_2(x)}{m}\\
\ddot{x}_3 &= \frac{F_3(x)}{m}
\end{aligned}$$

Un sistema con derivadas. En particular, este sistema es de segundo orden, (la variable con mayor orden de derivada es el orden del sistema), este sistema se puede escribir como de primer orden usando variabes. Sea $v = \dot{x}$, luego obtenemos

$$\begin{aligned}
v &= \dot{x}\\
\dot{v} &= \frac{F(x)}{m}
\end{aligned}$$

Formando un sistema de 6 ecuaciones.

Veamos un ejemplo, sea la fuerza de gravedad de un objeto en la tierra

$$F = mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Entonces como vimos

$$\ddot{x} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Luego integrado dos veces, determinamos la posición de x por:

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t - \frac{gt^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde $x_0, \dot{x}_0$ son la posición inicial y la velocidad inicial. Se observa que x depende de estos.

De forma natural uno puede pensar que todo se soluciona mediante integrar y derivad de forma conveniente, y el problema que en general no es así. En el caso anterior funciona ya que estamos trabajando con la fuerza dependiendo de x. Veamos un ejemplo que no es tan evidente. Sea la fuerza gravitacional

$$F(x) = -\gamma m M \frac{x}{|x|^3}$$

donde $\gamma, M > 0$. Por la segunda ley de Newton tenemos que

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{\gamma m M x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{\gamma m M x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \\ m\ddot{x}_3 &= -\frac{\gamma m M x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Aquí no hay solucion evidente de que puede ser x. Es más, es incluso poco claro si existe una solución.

1.2. Definición y Clasificación

Definiremos un edo y estudiaremos las clasificaciones, ya que resolver un edo es dificil por lo que es siempre recomendable estudiar caracteristicas de una clasificación.

Notación. Usaremos las siguientes notaciones.

- Denotaremos los conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^m, V \subseteq \mathbb{R}^n$ como conjuntos abiertos bajo la métrica usual.
- Denotamos el conjuntos de funciones k veces derivable, donde cada derivada es continua por $C^k(U,V)$ con $k \in \mathbb{N}_0$, y $C(U,V) = C^0(U,V)$. Si $V = \mathbb{R}$, entonces

$$C^k(U, \mathbb{R}) = C^k(U)$$

- Denotamos el conjunto de funciones suaves (infinitamente diferenciable), dada por

$$C^\infty(U,V) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U,V)$$

Definición 1.1. (EDO) *Una ecuación diferencial ordinaria es una función relación de la forma:*

$$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = 0$$

La función desconocidad x es talque $x \in C^k(J), J \subseteq \mathbb{R}$, y sus derivadas son

$$x^{(j)}(t) = \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

para $i \in \mathbb{N}_0$. Donde $F \in C(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^{k+2}$. A la variable t le decimos independientes, y a x le decimos variables dependientes. El mayor grado de las derivadas que aparecen en F se le llama orden del edo. Una solución del sistema edo, es una función $\phi \in C^k(I)$ donde $I \subseteq J$, talque

$$F(t, \phi(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) = 0$$

para todo $t \in I$. Si existe tal función, entonces $(t, \phi(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) \in U$ para todo $t \in I$.

Es complicado poder resolver estos sistemas, por lo que asumiremos que en la función se puede despejar la derivada de mayor orden, de forma que

$$x^{(k)} = f(t, x, \dots, x^{(k-1)})$$

Para alguna función f. (Esto se puede hacer localmente cerca de $(t, y) \in U$ si $\frac{\partial}{\partial x(t)} F(t, y) \neq 0$, luego se aplica el teorema de la función implicita).

Definición 1.2. (Clasificación) *Supongamos que tenemos un edo $F(t, x, \dots, x^{(k)}) = 0$, donde*

$$x^{(k)} = f(t, x, \dots, x^{(k-1)})$$

Entonces

(a) Si en el lado derecho no depende de t, decimos que el sistema es autonoma.

(b) Si f es función lineal en x y sus derivadas $x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)}$ también, entonces

$$x^{(k)} = f(t, x, \dots, x^{(k-1)}) = g(t) + \sum_{i=0}^{k-1} x_i(t) x^{(i)}$$

Y decimos que el sistema es lineal no homogéneo Si $g(t) \neq 0$. Si $g(t) = 0$, decimos que es lineal homogéneo.

Cuando hablamos de $x(t)$ siempre pensaremos en t como el tiempo, y aunque no se explicite la letra t, siempre debemos considerar el tiempo como en donde se mueve la variable desconocida.

En la práctica resolver eso es difícil al tener un orden mayor a 1, pero lo más impresionante, es que podemos reducir el orden a tan solo 1, y esto para todo sistema edo. Tomemos un edo de orden k, este sistema es equivalente a un sistema de k edo's de orden 1. Sea

$$y := (x, x^{(1)}, \dots, x^{(k-1)})$$

Donde $y_1 = x, y_2 = x^{(1)}, \dots, y_k = x^{(k-1)}$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ &\vdots \\ \dot{y}_k &= f(t, x, \dots, x^{(k-1)}) = f(t, y) \end{aligned}$$

Generando una sistemas de edo's con k ecuaciones y de orden 1. Podemos hacer que el lado derecho sea independiente tomando el siguiente cambio, $z = (t, y)$, de forma que obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 1 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_k &= z_{k+1} \\ \dot{z}_{k+1} &= f(z) \end{aligned}$$

Obteniendo un sistema que no depende de z y que son en total $k + 1$ ecuaciones, también de orden 1. Esto implica que de un sistema de orden k podemos generar ecuaciones de orden k y además que sea autonoma.

Ejemplo 1.1. Sea el sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x^2 + \dot{x}y + xy \\ \dot{y} &= \dot{x}^2 + y + 1 \end{aligned}$$

Este sistema es de orden 2. Pasemos a orden 1. Si

$$f(t, x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}y + xy$$

Tomando $(y_1, y_2) = (x, \dot{x})$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x} \\ \dot{y}_2 &= f(t, y) = y_1^2 + \dot{y}_1 y + y_1 y \end{aligned}$$

Un sistema de dos ecuaciones de primer orden.

Ejemplo 1.2. Sea el edo $\ddot{x} = t^2 - t\dot{x} + x$, claramente de orden 2 linea no homogénea por definición. Tomando $v = \dot{x}$, obtenemos el sistema

$$\dot{v} = t^2 - tv + x$$

Sistema de primer orden.

Conclusión. Por lo tanto, todo edo de orden k, puede ser transformado en uno de orden 1, por lo que nuestro estudio será las distintas ecuaciones edo de primer orden, donde a cada una determinaremos una solución.

1.3. La ecuación Autónoma de primer orden

Vamos a estudiar una ecuación con un valor inicial fijo. Este valor inicial determina el comportamiento de la función. En forma general nos interesa estudiar $(t_0, x(t_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ para estudiar el comportamiento de la función a encontrar. Por lo que estudiamos el problema del valor inicial (PVI).

Sea la ecuación autónoma con PVI

$$(\star) \begin{cases} \dot{x} = f(x), & f \in C(\mathbb{R}) \\ x(t_0) = x_0, & t_0, x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con valores iniciales $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

Notemos que el sistema es invariante a las translaciones en t, es decir, si $\phi(t)$ es solución del sistema, entonces también lo son $\overline{\phi}(t) = \phi(t + t_0)$. Y en efecto, si ϕ es solución, entonces $\overline{\phi}$ es diferenciable donde

$$\dot{\overline{\phi}}(t) = \dot{\phi}(t + t_0) = f(\phi(t + t_0)) = f(\overline{\phi}(t))$$

Por lo tanto podemos partir en donde sea, todo en virtud de que es autónoma. Por convenio tomaremos $t_0 = 0$, obteniendo el sistema

$$(\star) \begin{cases} \dot{x} = f(x), & f \in C(\mathbb{R}) \\ x(0) = x_0, & t_0, x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ahora, x_0 tiene dos casos posibles sobre f. Que $f(x_0) \neq 0$ o que $f(x_0) = 0$.

- **Caso donde x_0 no es raíz de f.** Supongamos que x_0 es talque $f(x_0) > 0$, si $f \in C(\mathbb{R})$, entonces en una vecindad de x_0 con un t pequeño (cerca de 0), vemos que $x(t)$ se acerca a x_0, y entonces $\dot{x}(t) = f(x(t)) > 0$, (x es creciente para t cerca de 0) en una vecindad de x_0. Por lo que si

  $$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

  Entonces

  $$\frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} = 1$$

  Aplicando la integral definida de 0 a t con t suficientemente pequeño, vemos que

  $$\int_0^t \frac{\dot{x}(s)}{f(x(s))} ds = t$$

  Sea $y := x(s)$, luego $dy = \dot{x}(s)ds$, por lo que aplicando cambio de variable obtenemos que

  $$F(x) := \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = t$$

Derivando con respecto a x, vemos que

$$F'(x) = \frac{1}{f(x)} > 0$$

dado que $f(x) > 0$ en una vecindad de 0 y luego en una vecindad de x_0. Y por lo tanto F es creciente cerca de x_0, por lo tanto, F es localmente biyectiva y tiene una inversa, de aquí se tiene que

$$F^{-1}(t) = \varphi(t)$$

para t cerca de 0.

Luego construimos una función F de clase C^1 definido cerca de x_0, si $F'(x_0) \neq 0$ (por construcción) hay una única inversa que resulve el PVI donde φ es de clase $C^1(I)$ con I una vecindad pequeña de 0.

En forma general, sea (x_1, x_2) el intervalo máximal donde $f(x) > 0$ y $x_0 \in (x_1, x_2)$, aquí tenemos que x es creciente y que existe un intervalo máximal (t_1, t_2) donde $0 \in (t_1, t_2)$ talque $x \in (x_1, x_2)$. Aquí podemos generar la función

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)} = t$$

con $x \in (x_1, x_2)$ (notemos que $1/f(x)$ es R-integrable ya que es continua no nulo en (x_1, x_2)). Si $F' = 1/f(x) > 0$ entonces

$$F : (x_1, x_2) \to Im(F)$$

es biyectiva con inversa creciente única ($F'(x_0) \neq 0$). Podemos ver que cuando $x \to x_2^-$, entonces $F(x) \to t_2^-$, y que cuando $x \to x_1^+$. entonces $F(x) \to t_1^+$, todo en virtud de que F es creciente.

Figura

Definimos

$$T_+ := \lim_{x \to x_2^-} F(x) > 0$$
$$T_- := \lim_{x \to x_1^+} F(x) < 0$$

Notemos que está bien definidos, ya que cuando x se acerca por la izquierda de x_2, obtenemos un área positiva, mientras que si x se acerca por la derecha a x_1, la integral se invierte y tenemos que

$$\lim_{x \to x_1^+} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} = - \lim_{x \to x_1^+} \int_{x(t)}^{x_0} \frac{dy}{f(y)} < 0$$

Ahora, por la caracterización de F tenemos que

$$F(x(t)) = t$$

Por lo tanto, los valores de t está entre (T_-, T_+), y por el teorema de la inversa, nos da una única solución ϕ donde

$$x = \phi(t) = F^{-1}(t) \in C^1(T_-, T_+)$$

Donde se cumple

$$\lim_{t\to T_+^-} \phi(t) = x_2 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to T_-^+} \phi(t) = x_1$$

Logrando que al extender (x_1, x_2) donde f es positivo (y en el caso de que se de, nulo en x_1, x_2), también extendemos el dominio solución. Dependiendo de como se comporte T_+, T_-.

Este argumento se puede replicar en el caso de que $f(x_0) < 0$, definimos una vecindad, luego extendemos y en virtud de las funciones continuas, se define una solución única.

Observación 1.1. Notemos que de distintas regiones de f donde se hace negativo y positivo, podemos deducir una solución única. Todo dependiendo de donde se considere $x_0 \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $\phi(t)$ está bien definido para todo $t \geq 0$, entonces necesariamente $T_+ = \infty$, y esto ocurre si y sólo

$$T_+ = \lim_{x\to x_2-} F(x) = \infty$$

Es decir,

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{dy}{f(y)}$$

Diverge. Y esto ocurre si y sólo si $1/f(y)$ no es integrable cerca de x_2. Lo mismo se dice si $\phi(t)$ está bien definido para todo $t < 0$, se tiene que $1/f(y)$ no está definido cerca de x_1.

Supongamos que $T_+ < \infty$, en tal caso ocurre dos cosas, que bien $x_2 = \infty$ o que $x_2 < \infty$.

- x_2 **infinito. Figura** Esto significa que cuando $t \to T_+$, el valor x converge hacía el ínfito, como muestra la figura, y no pasa más allá de T_+. En tal caso decimos que la solución explota en tiempo finito (Ya que en tiempo T_+, x explota).
- x_2 **finito. Figura** Aquí ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to T_+^-} \dot{\phi}(t) &= \lim_{t\to T_+^-} f(\varphi(t)) \\ &= f\left(\lim_{t\to T_+^-} \phi(t)\right) \\ &= f(x_2) = 0\end{aligned}$$

Es decir, ϕ es vuelve constante cuando $t \to T_+^-$ y como $\phi(t) \to x_2$ cuando $t \to T_+^-$, entonces podemos extender $\varphi(t) = x_2$ para todo $t \geq T_+$.

Nota 1.1. La extensión no es necesariamente única.

Figura

Ejemplo 1.3. Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

Podemos ver que es autonoma, al no depender de t, y que $x_0 > 0$, de forma que $x > 0$. Entonces con el método anterior podemos encontrar una vecindad, definir una primitiva, extenderla y definir una solución. Notemos que $(x_1, x_2) = (0, \infty)$ es donde $f > 0$, y luego

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y} = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Entonces

$$\phi(t) = x_0 e^t \in C^1(T_-, T_+)$$

donde $T_\pm = \pm\infty$.

Si $x_0 < 0$ tenemos que el intervalo maximal de f es $(-\infty, 0)$ luego

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y} = \log\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Donde

$$T_- = -\infty, \quad T_+ = \infty$$

Luego la solución es la misma, la única difernecia es el recorrido.

Si $x_0 = 0$ ocurre algo especial, pero lo veremos más adelante, en este caso una solución (no necesariamente única) es $x(t) = 0$ definido en todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4. Sea el sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

Determinemos una solución, notemos que $(0, \infty)$ es el maximal ya que en 0 $f(x) = 0$, por lo que no puede pasar de más allá. Entonces

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$$

Observamos que $T_- = -\infty, T_+ = 1/x_0$, por lo tanto

$$\phi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \in C^1(-\infty, 1/x_0)$$

Notemos que

Figura. Es decir, ϕ explota en un tiempo finito. También notemos que la solución no puede ser extendidad para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo que la solución es única.

- **Caso x_0 es raíz de f.** Consideremos el siguiente sistema

$$(\star) \begin{cases} \dot{x} = f(x), \;\; f \in C(\mathbb{R}) \\ x(0) = x_0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$$

Si $f(x_0) = 0$, entonces $\phi(t) = x_0$ es una solución, ya que $\dot{\phi} = 0 = f(\phi)$ y $\phi(0) = x_0$. ¿Esta es la única solución? Si tenemos

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} \right| < \infty$$

entonces tenemos otra solución

$$\varphi(t) = F^{-1}(t), \;\; F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}$$

con $\varphi(0) = x_0$ que es diferente $\phi(t)$.

Ejemplo 1.5. Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

Para $x_0 > 0$ fijo, el PVI tiene solución única, notemos que $(0, \infty)$ es el intervalo máxima que contiene a x_0, luego

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} &= \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{2y^{1/2}} \\ &= y^{1/2}\Big|_{x_0}^{x} \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \end{aligned}$$

Si $x \to \infty$, entonces $T_+ = \infty$ y si $x \to 0$ entonces $T_- = -\sqrt{x_0}$. Luego

$$\begin{aligned} \varphi :&(-\sqrt{x_0}, \infty) \to (0, \infty) \\ \varphi(t) &= (t + \sqrt{x_0})^2 \end{aligned}$$

Si $x_0 < 0$ también podemos formula otra solución.

Figura

Por lo que podemos extender la solución de varías forma.

Ejemplo 1.6. Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Notemos que si $x > 0$

$$\int_0^x \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^x \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{y}\bigg|_\varepsilon^x = \sqrt{x}$$

Por otro lado, si $x < 0$ se obtiene que

$$\int_0^x \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} = -\sqrt{-x}$$

Por lo tanto, está bien definido alrededor de su raíz y tiene solución, en particular

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\phi(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ -t^2, & t < 0 \end{cases}$$

Pero $\phi(0)$ no está definido, tomando $\phi(0) = 0$ tenemos que $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ que satisface a la ecuación. Por lo tanto, existen al menos dos soluciones cuando $x_0 = 0$.

Conclusión. En una ecuación autónoma

(a) La solución de un edo, no está definido para todo tiempo t (aún cuando el lado derecho es una función agradable).

(b) El problema del valor inicial puede tener más de una solución local.

(c) La solución PVI puede tener solución única localmente, pero no globlamente.

1.4. Ecuaciones Separables

Son ecuaciones de la forma

$$(\star) \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) = g(t)h(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Claramente $\dot{x}$ depende de t. Para resolver este problema debemos usar un argumento similar a las autónomas. Tomando $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo talque $h(x_0) > 0$, podemos trabajar en una vecindad de x_0 (pedimos que h se continua), donde h no se anula, luego

$$\frac{\dot{x}}{h(x)} = g(t)$$

De aquí depende de como se comportar $g(t)$, de forma conveniente tenemos que g es continua y luego integrable, luego podemos aplicar el proceso anterior.

Otra cosa a tener en cuenta, es que t_0 si puede afecta en la solución, por lo que se trabaja en los datos iniciales (t_0, x_0).

1.5. Ecuaciones Lineales de Primer grado

Son sistemas de la forma

$$(\star) \begin{cases} \dot{x} = p(t)x + g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Donde $p, q \in C(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$. Hay dos casos a tener en cuenta, cuando es homogéneo la ecuación $(g(t) = 0)$ y cuando no lo es $(g(t) \neq 0)$.

- **Caso homogéneo.** Supongamos que $g(t) = 0$, entonces el sistema es lineal homogénea. En tal caso definimos la función propagador

  $$\mathcal{P}_p(t, s) := \exp\left(\int_s^t p(u)du\right)$$

  (Bien definida al ser p continua en I). Esta función tiene dos propiedades interesantes para todo p continuo,

  (a) $\mathcal{P}_p(t, s) \cdot \mathcal{P}_p(s, v) = \mathcal{P}_p(t, v)$

  (b) $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{P}_p(t, s)) = \mathcal{P}_p(t, s)p(t)$

  La primera propiedad es evidente, ya que

  $$\begin{aligned} \mathcal{P}_p(t, s) \cdot \mathcal{P}_p(s, v) &= \exp\left(\int_s^t p(u)du\right) \cdot \exp\left(\int_v^s p(u)du\right) \\ &= \exp\left(\int_v^t p(u)du\right) \\ &= \mathcal{P}_p(t, v) \end{aligned}$$

  Para la segunda es aplicar propiedades de derivada, por lo que

  $$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}_p}{\partial t}(t, s) &= \frac{\partial}{\partial t} \exp\left(\int_s^t p(u)du\right) \\ &= p(t)\mathcal{P}_p(t, s) \end{aligned}$$

Ahora, gracias al propagador podemos resolver la ecuación lineal con datos iniciales (t_0, x_0),

$$\dot{x} = p(t)x \Longleftrightarrow \frac{\dot{x}}{\mathcal{P}_p(t,t_0)} = \frac{p(t)x}{\mathcal{P}_p(t,t_0)}$$

como $\mathcal{P}(t,t_0) \neq 0$ para cualquier $t, t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\dot{x}\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right) = p(t)x\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right)$$

y entonces

$$\frac{d}{dt}\left(x\exp\left(\int_{t_0}^t p(u)du\right)\right) = \dot{x}\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right) - p(t)x\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right) = 0$$

Por lo tanto $\frac{x}{\mathcal{P}_p(t,t_0)}$ es una constante, tomando $t = t_0$ se obversa que es de valor x_0. Por lo tanto

$$\phi(t) = x(t) = \mathcal{P}_p(t,t_0)x_0$$

Es la solución a la ecuación.

- **Caso no homogéneo.** En este caso también usaremos el propagador, pero de otra forma.

$$\dot{x}\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right) = p(t)x\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right) + g(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right)$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(x\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right)\right) &= \dot{x}\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right) - xp(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right)\\ &= g(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)du\right)\end{aligned}$$

Integrando de t_0 a t, obtenemos que

$$\frac{x}{\mathcal{P}_p(t,t_0)} - \frac{x}{\mathcal{P}_p(t_0,t_0)} = \int_{t_0}^t \frac{q(s)ds}{\mathcal{P}_p(s,t_0)}$$

Despejando obtenemos la solución

$$\phi(t) = x(t) = \mathcal{P}_p(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{P}_p(t,s)q(s)ds$$

1.6. Ecuación homogénea

Son ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si definimos $y = \frac{x}{t}$, $(t \neq 0)$ y derivamos, obtenemos

$$\dot{y} = \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{1}{t}(f(y) - y)$$

Es decir, obtenemos una ecuación separable.

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{f(y)-y}{t} \\ y(t_0) = \frac{x_0}{t_0} \end{cases}$$

Algo que debemos tener en cuenta, es que la solución x es a lo más definible en $(0, \infty)$ o en $(-\infty, 0)$, ya que como hay $\frac{1}{t}$, necesariamente t no puede ser 0. Luego el conjunto solución no puede contener a 0.

1.7. Ecuación Bernoulli

Son sistemas de las forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x + g(t)x^n, \ n \in \mathbb{R}, n \neq 0, 1 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Definimos $y = x^{1-n}$, entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (1-n)x^{-n}\dot{x} = (1-n)(f(t)x^{1-n} + g(t)) \\ &= (1-n)f(t)y + (1-n)g(t) \\ &= (1-n)(f(t)y + g(t)) \end{aligned}$$

Obteniendo una ecuación lineal.

Nota 1.2. Hay que tener cuidado donde estamos tomando n. Si $n = 2$ entonces $y = x^{-1}$ y funciona solo para $x > 0$ o para $x < 0$. Si $n = 1/3$, entonces $y = x^{2/3}$, y entonces funciona solo para $x > 0$ o $x < 0$.

1.8. Ecuación de Racatti

Son de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x + g(t)x^2 + h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Si $h(t) = 0$ obtenemos Bernoulli con $n = 2$. Podemos resolver el edo si sabe,os una solución particular $x_p(t)$. Sea el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{1}{x - x_p(t)}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= -\frac{1}{(x-x_p)^2}(\dot{x} - \dot{x}_p) \\
&= -y^2(f(t)x + g(t)x^2 - f(t)x_p - g(t)x_p^2) \\
&= -y^2(f(t)(x - x_p) + g(t)(x^2 - x_p^2)) \\
&= -f(t)x - g(t)(1 + 2x_p y) \\
&= -y(f(t) + 2x_p g(t)) - g(t)
\end{aligned}$$

Siendo lineal.

2. Análisis cualitativo de edo's de primer orden

Sea una ecuación cualquiera

$$\dot{x} = f(t, x)$$

con $f \in C(U)$ con $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto. Sea $\phi(t)$ una solución de la ecuación con gráfico $\Gamma = \{(t, \phi(t))\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Podemos ver que

Figura.

La curva Γ se le conoce como curva de solución, donde la pendiente (t, x) es igual a $f(t, x)$. Supongamos que no sabemos como es la curva, pero conocemos algunas pendientes

Figura.

A estas pendientes se les conoce como campo de pendientes. Queremos poder estimar una solución usando estas pendientes.

Definición 2.1. (Curva integral) *Una curva γ en $\mathbb{R}^2$ parametrizada, se llama curva integral para el campo pendiente si en todo de sus puntos, sus pendendientes coinciden con el valor dado por el campo en los puntos.*

Entonces, las curvas que del edo son las curvas integrables del campo de pendiente dado por $f(t, x)$.

En vez de estudiar pendiente por pendiente, podemos pensar en una sola pendiente, o donde $\dot{x} = f(t, x) = m$.

Definición 2.2. (Isoclina) *El conjunto de puntos (t, x) donde el valor de la pendiente $f(t, x) = m$, se le llama isoclina de pendiente m (la m-isoclina)*

Notemos que estamos pensandod de forma independiente a $\dot{x}$, ya que solo estamos pidiendo que $f(t, x)$ tome un valor constante para generar pendientes, la utilidad es que estas curvas entrega información a la curva solución.

Ejemplo 2.1. Sea $\dot{x} = x^2 - t^2$. Entonces el conjunto m-isoclina son el conjunto

$$\{(t, x) : x^2 - t^2 = m\}$$

Tomando $m = 0, 1, -1$ podemos ver que

Figura.

Hagamos un pequeño estudio sobre las isoclinas, sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \quad f \in C(\mathbb{R}^2) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Vamos asumir que:

i) El sistema tiene solución única definida localmente, esto con el afán de evitar que la curva pase por el mismo punto.

ii) (Afirmación) Si una solución no está definida para todo t, entonces la función explota en tiempo finito.

Digamos que $f(t,x) = x^2 - t^2$. Tenemos las siguientes cosas que estudiar; reducción, ver las zonas y ver que pasa en cada zona.

(a) **Reducción.** Notemos que este sistema es simétrico de una forma, es decir, si $\phi(t)$ es solución, entonces también lo es

$$\overline{\phi}(t) := -\phi(-t)$$

y en efecto, notemos que

$$\dot{\overline{\phi}}(t) = \dot{\phi}(-t) = \phi^2(-t) - t^2 = \overline{\phi}(t) - t^2$$

Esto implica que basta estudiar en una sola sección. Digamos que $t_0 \geq 0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) **Secciones/Zonas.** Si graficamos, el 0-isoclino, vemos que

Figura.

Generando tres secciones, podemos ver que $\dot{x} > 0$ en la sección (I),(III), y $\dot{x} < 0$ en la sección (II).

Observación 2.1. En general nos interesa la 0-isoclina ya que esta nos dice cuando $\dot{x}$ es positiva, pero también podemos deducir otras cosas para otras isoclinas, por ejemplo, si consideramos $x^2 - t^2 = 1$, entonces hay tres zonas, donde supera a 1, otra donde es menor a 1.

Veamos que ocurre si una solución empieza en cada zona/sección.

- **Empieza en (III).** Si una solución empieza en la sección (III), podemos ver que al tener derivada positiva, este crece de forma estricta, y en algún punto pasa a la sección (II).
- **Empieza en (II).** Si la solución parte en la zona (II), son soluciones que decrecen, podemos pensar que no explota ya que en algún punto debiese pasar a la sección (III), y luego debería pasar a (II) nuevamente, pero lo más correcto es que no pasa de $x = -t$, ya que sino, en algún la solución toma derivada 0, y eso no puede pasar, por lo que siempre está arriba de $x = -t$ más adelante explicaremos a detalle. En particular, las soluciones están definidas para todas $t \geq t_0$.
- **Empieza en (I).** Las soluciones que comienzan en $(t_0, x_0) \in$(I), puede pasar dos cosas, que crece pero en un punto pasa a la sección (II), para nuevamente pasar a (I), o bien crece y no pasar a (II).

Ahora veremos la importancia de los $x = t, x = -t$ que hay con la solución de la edo.

Definición 2.3. (Supersolución y subsolución) *Sea $x_+ : [t_0, T) \to \mathbb{R}$ una función C^1, decimos que es una supersolución para $\dot{x} = f(t,x)$ si*

$$\dot{x}_+(t) > f(t, x_+(t))$$

para todo $t \in [t_0, T)$. Análogamente, la función $x_- : [t_0, T) \to \mathbb{R}$ que es C^1, decimos que es subsolución de $\dot{x} = f(t, x)$ si

$$\dot{x}_-(t) < f(t, x_-(t))$$

para todo $t \in [t_0, T)$.

Nota 2.1. El valor T depende de que sistema se está trabajando.

Supongamos que $x_+(t), x_-(t)$ son supersolución y subsolucione respectívamente de $\dot{x} = f(t, x)$, definida en $(t_0, T]$, digamos que $x(t)$ es una solución del sistema $\dot{x} = f(t, x)$ $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ definida en $(t_0, T]$ y que

$$x_-(t_0) \leq x_0 \leq x_+(t_0)$$

Entonces ocurre lo siguiente

Figuta

En forma de resultado.

Lema 2.1. *Sea $x_+(t), x_-(t)$ una supersolución y subsolución respectívamente de la ecuación $\dot{x} = f(t, x)$ definida en $[t_0, T)$. Entonces para cualquier solución de la ecuación definida en $[t_0, T)$ se tiene que si*

$$x_-(t_0) \leq x(t_0) \leq x_+(t_0)$$

Entonces

$$x_-(t) < x(t) < x_+(t)$$

para todo $t \in (t_0, T))$

Dem. (Idea) Supongamos que en algún punto $t_1 \in (t_0, T)$ se tiene que $x(t_1) = x_+(t_1)$, entonces

$$\dot{x}_+(t_1) > f(t, x_+(t_1)) = f(t, x(t_1)) = \dot{x}(t_1)$$

Es decir, el crecimiento de x_+ en t_1 es mayor que el crecimiento de x. Pero si x, x_+ se tocan en un punto, entonces necesariamente el crecimiento de x_+ es menor o igual al de x en t_1, siendo imposible. Siendo una contradicción, luego tal t_1 no existe. De forma similar se argumenta con x_-. Por lo tanto

$$x_-(t) < x(t) < x_+(t)$$

para todo $t \in [t_0, T)$. ■

Demostración completa page 24.

Figura.

Cuando pensamos en el pasado, $t \leq t_0$ ocurre algo distino pero similar. Si $x_- x_+$ son subsolución y super solución, digamos en $(T, t_0]$, si

$$x_+(t_0) \leq x(t_0) \leq x_-(t_0)$$

Entonces

$$x_+(t) < x(t) < x_-(t)$$

para todo $t \in (T, t_0]$.

(c) ¿Qué pasa exactamente con las curvas que empiezan en (II)? Volviendo a $\dot{x} = x^2 - t^2$ tenemos que de $t_0 = 0$, $x = -t$ es subsolución, en efecto,

$$-1 < f(t, -t) = t^2 - t^2 = 0$$

Para todo $t \in [0, \infty)$.

Figuta.

Podemos ver que en $m = -2$ podemos definir la función $y(t) := -\sqrt{t^2 - 2}$.

Afirmación. *$y(t) = -\sqrt{t^2 - 2}$ es supersolución a partir de un t_0.*

Dem. (Afirmación) Tenemos que en forma general.

$$\frac{-2t}{2\sqrt{t^2 - 2}} > f(t, y(t)) = t^2 - 2 - t^2 = -2$$

Claramente esto no está definido para $t \leq \sqrt{2}$, por lo que si tomamos $t_0 \geq 2$ es claro que se cumple. Por lo que si consideramo el intervalo $[2, \infty)$, tenemos que e supersolución. ■

Es decir, toda curva integrado que entra a R (la región dada por $t \geq t_0$ y por la región dada entre $y(t), x = -t$), nunca sale de ahí. Afirmamos que toda curva integral que empieza de (II) eventualmente entra a R. Puede pasar dos cosas, una que entre directamente y la otra es que pase $\overline{R}$ y luego como $\dot{x} < -2$, entonces x decrece más rápido que $x = -t$ ($\dot{x} = 1$), por lo que termina llegando a la región R. Por lo que

$$-t < x(t) < y(t)$$

para todo t suficientemente grande.

(d) ¿Qué pasa con las soluciones que empiezan en (I)?

Tomando nuevamente la 2-isoclina y considerando $x > 0$, tenemos

Figura.

Definimos $z(t) := \sqrt{t^2 + 2}$, vemos que $z(t)$ es subsolución por definición, mientras que $x = t$ es una supersolución también por definición. Sea $T > 0$ un punto positivo en la recta t. Tomemos la recta vertical $x = T$, podemos ver que la recta intersecta a $z(t)$ y $x = t$, digamos en $b_T(T), a_T(T)$ respectívamente, donde $b_T(T) > a_T(T)$, ahora como

$z(t), x = t$ son subsolución y supersolución, entonces pensando en pasado tenemos que existe un $a_T(0), b_T(0)$ en la recta vertical $x = 0$. Aquí se genera las soluciones $a_T(t), b_T(t)$ determinada por T, definidas en $t \in [0, T]$. Se cumple

$$a_T(t) < b_T(t)$$

para $t \in [0, T]$, ya que si $a_T(0) = b_T(0)$, por la ecuación deben tener el mismo crecimiento, siendo iguales, cosa que no puede pasar ya que $a_T(T) \neq b_T(T)$, y luego el crecimiento de $b(t)$ es mucho mayor que el de $a(t)$. Por lo que las soluciones nunca se tocan. Esto nos servirá para dar el comportamiento de una solución. Con esto podemos concluir que cuando tomamos T más lejos, entonces $a_T(t)$ crece y $b_T(t)$ decrece. Entonces existen los límites

$$a_\infty = \lim_{T\to\infty} a_T(0) \text{ y } b_\infty = \lim_{T\to\infty} b_T(0)$$

Dado que $a_T(t)$ es creciente y acotada superiormente, y $b_T(t)$ es decreciente y acotada inferiormente. Si una curva es solución y comienza en $(t, x) = (0, x_0)$, con $x_0 < a_\infty$, esta curva entra en la región II. De la misma forma, si una solución empieza en $(t, x) = (0, x_0)$ con $x_0 > b_\infty$, entonces la curva cruza la 2-isoclina. Ya que las soluciones están ordenadas, por lo que necesesariamente no supera a otras (si $x(t)$ empieza en $(0, x_0)$ con $x_0 < a_\infty$, entonces $x(T) \leq a(T)$ y si $a(T)$ toca la recta $x = T$, entonces $x(T)$ debiese estar pasando la región). Y las soluciones con datos iniciales $(t_0, x_0) = (0, x_0)$ con $x_0 \in [a_\infty, b_\infty]$ existen para todo $t \geq 0$. En efecto, tal solución satisface que

$$x_1(t; T) < x(t) < x_2(t; T)$$

para todo $t \in [0, T]$. Demostremos que $a_\infty = b_\infty$, es decir, que existe una única solución que satisface nuestras condiciones. Supongamos que no son iguales, por lo que existen dos soluciones, digamos que $\xi_1(t)$ es solución con datos iniciales $(0, a_\infty)$ y $\xi_2(t)$ solución con datos iniciales $(0, b_\infty)$, claramente está definidas para todo $t \geq 0$ donde

$$\xi_1(t) < \xi_2(t)$$

Ambas soluciones viven en la región acotada por $x = t$ y $x = z(t)$ para $t \geq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) - \xi_2(t) &= \int_0^t \left(\dot{\xi}_1(s) - \dot{\xi}_2(s)\right) ds + \xi_2(0) - \xi_1(0) \\
&= \int_0^t (\xi_2^2(s) - \xi_1^2(s)) ds + b_\infty - a_\infty
\end{aligned}$$

donde $b_\infty - a_\infty > 0$. Esto significa que $\xi_2 - \xi_1 > b_\infty - a_\infty$ para todo $t > 0$. Pero esto es imposible ya que

$$(\xi_2 - \xi_1)(t) < z(t) - t \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por tanto, $a_\infty = b_\infty$.

Figura.

(e) ¿Qué pasa con las soluciones que empiezan en (t_0, x_0), que están arriba de la 2-isoclina? Recordemos que $z(t)$ (la representante de la 2-isoclina parte positiva) es subsolución, por lo que al empezar arriba de esta, nunca baja y además, toda solución tiene derivada mayor o igual a 2, es decir $\dot{x} \geq 2$. Sea $y(t) := x_0 + 2(t - t_0)$, si $x(t) \geq y(t)$.

Afirmación. *toda solución arriba de $z(t)$ explota en tiempo finito.*

Dem. (Afirmación) Sea $\varepsilon > 0$, de forma que

$$x(t) \geq x_0 + 2(t - t_0) > \frac{t}{\sqrt{1-\varepsilon}}$$

para $t \geq t_0$, podemos ver que

$$x\sqrt{1-\varepsilon} > t$$

Luego

$$\dot{x} = x^2 - t^2 > x^2 - x^2(1-\varepsilon) = \varepsilon x^2$$

Esto implica x es supersolución de la ecuación

$$\dot{y} = \varepsilon y^2$$

Si resolvemos obtenemos que la solución está dada por:

$$\begin{aligned} y &: \left(-\infty, \frac{1}{\varepsilon y_0}\right) \to (0, \infty) \\ y(t) &= \frac{y_0}{1 - \varepsilon y_0 t} \end{aligned}$$

La solución explota en tiempo finito, esto implica que su crecimiento es tan grande como queramos, y como

$$\dot{x}(t) > \dot{y}(t)$$

Entonces el crecimiento de x es muy grande, o mejor dicho, cuando $t \to \frac{1}{\varepsilon y_0}$, x explota en tiempo finito. ■

2.1. Análisis Cualitativo de Ecuaciones Autonomas de Primer Orden

Sea el sistema

$$(\star) \begin{cases} \dot{x} = f(x), \ \ f \in C(\mathbb{R}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Diremos x que la variable de fase/estado. Asumiremos que $f(x)$ es talque el sistema tiene única solución para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

- $x_0 = x^\star$ **cero de** f**.** Aquí tenemos la solución trivial

$$x(t) \equiv x_0 = x^\star$$

En tal caso decimos que $x^\star$ es un punto fijo para la ecuación

Figura.

- x_0 **no es cero de** f**.** Supongamos que $f(x_0) > 0$. Sea (x_-, x_+) el intervalo maximal que contiene a x_0 donde $f > 0$. Sabemos que la solución va estar definida en (T_-, T_+) con

$$\lim_{t\to T_-} x(t) = x_- \quad \text{y} \quad \lim_{t\to T_+} x(t) = x_+$$

Figura.

Clasificación de los puntos fijos. Si ocurre que

Figuta

En este caso decimos que $x^\star$ es Sumidero/Estable.

Figura

En este caso $x^\star$ se dice Fuente/Inestable.

Figura.

Y en este caso, $x^\star$ se le dice semiestable.

Ejemplo 1.8. (Modelos de crecimiento)

- **Crecimiento exponencial.** Sea $\dot{x} = x(t)$ la población de una especie dada por

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = ax$$

Aquí tenemos claramente que hay una exponencial como solución.

- **Ecuación logística.** Está dada por

$$\frac{\dot{x}}{x} = a\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

donde x es el comportamiento de la población, a es la tasa de crecimiento y K la capacidad de carga. Es decir, a determina que tanto crece y cuando $x(t) = K$ en algún momento t, entonces el crecimiento se vuelve constante y si $x > K$, entonces decrece x hasta un punto de equilibrio.

Ejemplo 1.9. Sea x una población que se modela por la ecuación logística con $a = k = 1$. Es decir

$$\dot{x} = x(1 - x) - r$$

Podemos graficar $\dot{x}$ en función de x, digamos que r es talque genera una parábola con dos soluciones, como se aprecía en la figura

Figura.

Esta parabola cambia su forma cuando cambia el valor de r. Sea r_c el r que hace que la parábola que toque en un punto al eje x. Entonces obtenemos lo siguientes retratos de fase

Figura y añadir algo más

Ahora, consideremos todos los retratos de fases, generando una gráfica de x/r, como se aprecía en la figura

Figura.

Esto se le conoce como diagrama de bifurcaciones y entenderemos una bifurcación como un cambio (diamático) en la estructura del retracto de fase cuando varía un parámetro. El parámetro r es el parámetro de la bifurcación.

En en ejemplo 1.9 la bifurcación es cuando $r = 1/4$. Este valor crítico se le llama valor bifurcacón. Notemos que si estudiamos el intervalo de los puntos fijos que sería

$$\{(x, r) : f(r, x) = 0$$

donde $f(r, x) = \dot{x}$. Se genera una parábola, y en efecto

$$\{(x, r) : f(r, x) = 0\} = \{(x, r) : r = x(1 - x)\}$$

Luego **Figura.**

Ahora, vamos a darle sentido a las flechas, antes las hemos expuesto de una forma para referirnos a la estabilidad de un punto fijo, ahora podremos saber donde apunta una flecha. Notemos que la región arriba de la parábola, $x(1-x)-r$ toma un valor negativo, en tal caso, para un retrato de fase que pasa por esa región le pondremos una flecha hacía la izquierda, y dentro de la parábola $x(1 - x) - r$ toma un valor positivo y tal caso, el retrato que pase por ahí se le pone una flecha hacía la derecha. De forma que

Figuta.

Por lo tanto, para $r < 1/4$, se tiene que $x_1(r), x_2(r)$ son dos puntos fijos donde $x_1(r)$ es inestable y $x_2(r)$ es estable, como se puede ver en la figura anterior.

Tipos de Bifurcaciones Comunes.

(a) **Bifurcación Silla-Nodo.** Tienen característica dos puntos fijos que aparecen/desaparencen cuando varía el parámetro, usualmente con estabilidad opuesta. Un ejemplo es $\dot{x} = x(1 - x) - r$. Veamos un prototípico.

Ejemplo 1.10. (Prototípico) Sea $\dot{x} = r - x^2$, este genera el conjunto $\{(x, r) : x^2 = r\}$, una parábola **Figurta.**

Podemos que cumple las característica de silla-nodo. En este caso el valor de bifurcación es $r = 0$, y cuando $r > 0$ entonces se generan los puntos fijos

$$x_1(r) = -\sqrt{r} \quad x_2(r) = \sqrt{r}$$

Si dentro (arriba) de la parábola toma valor positivo $x^2 - r$ y abajo valor negativo, se puede concluir que $x_1(r)$ es inestable y $x_2(r)$ es estable. Si $r < 0$ entonces no hay punto fijo.

(b) **Bifurcación Pitchtock/Tridente.**

Ejemplo 1.11. (Prototípico) Sea $\dot{x} = rx - x^3 = f(x, r)$. Entonces

$$\{(r, x) : f(x, r) = 0\} = \{(r, x) : rx = x^3\}$$

Se obtiene

Figuta

Podemos ver que si $r = 0$, pasamos de un punto fijo a tres puntos fijos. Si $r < 0$, $x = 0$ es el único punto fijo, además es estable. Y si $r > 0$ hay tres puntos fijos, dados por $x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{r}, x_3 = \sqrt{r}$, donde x_1 es inestable y x_2, x_3 son estables.

(c) **Bifurcación Transcrítica.**

Ejemplo 1.12. (Prototípico) Sea $\dot{x} = rx - x^2 = x(r - x)$, luego **Figura.**

Podemos ver que siempre hay dos puntos fijos con $r = 0$ el valor de bifurcación. Cuando $r > 0$ se tiene **Figutra.**

Donde r es estable y 0 inestable. En cambio, cuando $r < 0$ **Figura.** Donde r es inestable y 0 estable.

Una característica de la bifurcación transcrítica, es que tiene 2 ramos de puntos fijos que se intersectan y intercambian su estabilidad.

3. Existencia y Unicidad del PVI

Sea la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde $f : U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con U un conjunto abierto y $f \in C(U)$. Decimos que el PVI es bien puesto si:

i) PVI tiene una única solución para cualquier dato inicial $(t_0, x_0) \in U$ localmente en torno a t_0.

ii) La soluciones varían de manera continua de los datos iniciales.

Teorema de Picar-Lindeiüf. *Supongamos que $f(t,x)$ es continua en el cilindro*

$$R := \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq T, |x - x_0| \leq \delta\} \subseteq U$$

para algunos $\delta, T > 0$ y que además, f es Lipschitz en el argumento x, es decir

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|$$

para todo $x, y \in R$, para algún $L > 0$. Entonces, para algún T_0 que depende de δ, T, L y de $M := \max\limits_R |f(t,x)|$ talque el PVI tiene única solución dada por:

$$x(\cdot) : [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \to \mathbb{R}$$

y $x \in C^1([t_0 - T_0, t_0 + T_0], \mathbb{R}^n)$. Además, sobre este intervalo la solución se queda en $\overline{B}_\delta(x_0)$ (bola abierta de centro x_0 y radio δ.)

Observación 3.1. Cuando decimos que f es Lipschitz, la cota depende de t, es decir,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L(t)|x - y|$$

donde $L(t)$ es una función postiva, pero en la mayoria de los cálculos podemos usar el abuso de notación $L(t) = L$ como si fuera constante.

Ejemplo 3.1. Sea

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Como sabemos este PVI tiene almenos dos soluciones, si $f(t,x) = \sqrt{|x|}$ que es claramente continua en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (o bien en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) entonces si f fuera Lipschitz en el segundo argumento sería única la solución, pero es imposible, luego puede ser Lipschitz sobre x y, en efecto, notemos que,

$$\frac{|\sqrt{|x|} - 0|}{|x - 0|} \xrightarrow{|x| \to 0} \infty$$

Definición 3.2. *Sea $f \in C(U)$, decimos que es localmente Lipschitz en x y uniformemente en t si para todo $(t_0, x_0) \in U$ existe un $L, \delta, T > 0$ talque f satisface la hipótesis del teorema de PL en R.*

En una figura tendriamos **Figura.**

Dem. Vamos a reformular el PVI como un problema de punto fijo para luego aplicar el punto fijo de Banach.

Afirmación. *La solución $x \in C^1([t_0 - T_0, t_0 + T_0], \mathbb{R}^n)$ resuelve el PVI si y sólo resuelve*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

para todo $t \in [t_0 - T_0, t_0 + T_o]$.

Dem. (Afirmacion) Digamos que $I := [t_0 - T_0, t_0 + T_0]$, luego si $x \in C^1(I)$ resulve el PVI, entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

con $t \in I$. Luego

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)ds \\ &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

Ahora probemos queel $x(t)$ con $t \in I$ resuleve

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

entonces es solución del PVI. Definimos el operador

$$K_x(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Donde x es una función continua en $C(J)$. Queremos probar que la única opción viable es que

$$K_x(t) = x(t)$$

y esto es claramente un problema de punto fijo.

Para usar el teorema de Banach queremos un conjunto cerrado

$$C \subseteq C([t_0 - T, t_0 + T])$$

con $t_0 \leq T$, donde

i) $K(C) \subseteq C$.

ii) K sea una contracción.

Digamos que

$$C := \{x \in C([t_0 - T_0, t_0 + T_0], \mathbb{R}^n) : \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

Notemos que $C \neq \emptyset$ ya que podemos tomar $x(t) = x_0$ y es cerrado ya que estamos considerando la relación $\leq$. Para que se cumpla *i)* queremos que para todo $y \in C$, se tenga que $K_y \in C$. Entonces con respecto a x_0 para todo $y \in C$, se tiene

$$\begin{aligned}|K_y(t) - x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s))|ds \\ &\leq |t - t_0| \max_{s \in [t_0, t]} |f(s, y(s))|\end{aligned}$$

Si

$$\max_{s \in [t_0, t]} |f(s, y(s))| \leq M$$

entonces

$$|K_y(t) - x_0| \leq T_0 \cdot M$$

donde $|t - t_0| \leq T_0$. Podemos tomar T_0 suficientemente pequeño de forma que

$$|K_y(t) - x_0| \leq \delta$$

Es decir, $K_y \in C$ para todo $y \in C$. Probemos el punto ii). Queremos que K sea lipschitz con una constante $0 < L < 1$. Sean $x, y \in C$ cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}|K_x(t) - K_y(t)| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds\right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds \\ &\leq L|x(s) - y(s)||t - t_0| \\ &\leq L\|x - y\|||t_0 - t| \\ &\leq LT_0\|x - y\|\end{aligned}$$

Tomando $LT_0 \leq \frac{1}{2}$, obtenemos que

$$\|K_x - K_y\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|$$

Ahora tomando

$$T_0 := \text{mín}\left\{T, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{2L}\right\}$$

se tiene que K es una contracción de C a si mismo, luego por el teorema de Banach existe un único punto fijo en C. ■

Observación 3.1. Podemos producir una solución, si $x^{(0)}(t) = x_0, x^{(k+1)(t)=kx^{(k)}}(t)$, luego

$$\|x^{(k)} - x(t)\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

K tiene un único punto fijo en C.

Nota 3.1. Si $|\tau - t_0| \leq \frac{T_0}{2}, |\xi - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$, podemos hacer el argumento de punto fijo y producir una solución $y(t)$ del PVI con datos iniciales (τ, ξ) que existe en $\left[\tau - \frac{T_0}{2}, \tau + \frac{T_0}{2}\right]$ y el cual se queda en la bola cerrada $\overline{B_\delta(x_0)}$.

Definición 3.3. *Sea el PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Definimos la función de flujo por,

$$\varphi(t, t_0, x_0) := x(t)$$

donde $x(t)$ es la solución del PVI con datos iniciales (t_0, x_0).

Por la nota anterior, vemos que φ está bien definido,

$$\varphi : I \times I \times B_{\delta/2}(x_0) \to \mathbb{R}^n$$

donde $I = \left[t_0 - \frac{T_0}{2}, t_0 + \frac{T_0}{2}\right]$. Es más, el PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

el $x(t)$ varía continuamente en x_0 si y sólo si $\varphi(t, t_0, x_0)$ es continua en x_0.

Teorema 3.1. (Desigualdad de Grönwall) *Supongamos que $u(t) : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ es continua. Si se satisface la desigualdad satisface la desigualdad,*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} (a(s)u(s) + b(s))ds$$

en $t \in [t_0, T]$, con $C \in \mathbb{R}$, con a, b continua donde $a \geq 0$. Entonces,

$$u(t) \leq C\mathcal{P}_a(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{P}_a(t, s)b(s)ds$$

Dem. Supongamos que $v(t)$ es la solución del PVI

$$\begin{cases} \dot{v} = a(t)v + b(t) \\ (t_0, C) \end{cases}$$

Luego por el teorema fundamental del cálculo tenemos que,

$$v(t) = C + \int_{t_0}^{t} (a(s)v(s) + b(s))ds$$

Como tenemos una ecuación lineal, la solución está dada por,

$$v(t) = \mathcal{P}_a(t, t_0)C + \int_{t_0}^{t} \mathcal{P}_a(t, s)b(s)ds$$

Vamos a probar que si $u(t)$ satisface la hipótesis del teorema entonces $u(t) \leq v(t)$ que nos sirve para concluir el resultado. Sea $w(t) := u(t) - v(t)$, probemos que $w(t) \leq 0$ para todo $t \in [t_0, T]$, notemos que,

$$w(t) = u(t) - v(t) \leq \int_{t_0}^{t} (a(s)(u(s) - v(s))ds = \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds$$

Para ello estudiareos la derivada de $\int a(s)wsds \cdot \mathcal{P}_a^{-1}(t, t_0)$, luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds\mathcal{P}_a^{-1}(t, t_0)\right) &= a(t)w(t)\mathcal{P}_a^{-1}(t, t_0) - a(t)\int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds\mathcal{P}_a^{-1}(t, t_0) \\ &= \underbrace{a(t)\mathcal{P}_a^{-1}(t, t_0)}_{\geq 0}\underbrace{\left(w(t) - \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds\right)}_{\leq 0} \end{aligned}$$

Es decir, la derivada de lo de adentro es el producto de algo no positivo con algo no negativo, luego es no positivo, es decir, para todo $t \in [t_0, T]$ la función,

$$p(t) := \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds\mathcal{P}_a^{-1}(t, t_0)$$

es decreciente, por lo tanto,

$$\int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds\mathcal{P}_a^{-1}(t, t_0) \leq \int_{t_0}^{t_0} a(s)w(s)ds\mathcal{P}_a^{-1}(t_0, t_0) = 0$$

Si $\mathcal{P}_a^{-1}(t, t_0) \geq 0$, entonces,

$$w(t) \leq \int_{t_0}^{t} a(s)w(s)ds \leq 0$$

para todo $t \in [t_0, T]$. Por lo tanto,

$$u(t) \leq \mathcal{P}_a(t, t_0)C \leq \int_{t_0}^{t} \mathcal{P}_a(t, s)b(s)ds$$

■

Corolario 3.1. *Con respecto a la hipótesis del teorema de Grönwall. Tomando $a(s) = a \geq 0$ constante y $b(s) = b$, entonces $\mathcal{P}_a(t, s) = e^{a(t-s)}$ y entonces,*

$$\begin{aligned} u(t) &\leq Ce^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)}bds \\ &= Ce^{a(t-t_0)} + \frac{b}{a}(e^{a(t-t_0)} - 1) \end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0, T]$

Dem. Si tenemos que,

$$u(t) \leq \int_{t_0}^{t} (au(s) + b)ds$$

entonces por Grönwall vemos que,

$$\begin{aligned} u((t) &\leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} ads\right) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{s}^{t} adl\right) bds \\ &= Ce^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)}b \\ &= Ce^{a(t-t_0)} + \frac{b}{a}(e^{a(t-t_0)} - 1) \end{aligned}$$

■

3.1. Dependencia de la Solución de los Datos Iniciales

Sea la ecuación,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & f \in C(U) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto. Supongamos que f es localmente Lipschtiz en x y uniformemente en t (es decir, cumpla la hipótesis de PL). De forma que para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe un cilindro $R \subseteq U$, donde,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

para todo $x, y \in R$ para algún $L > 0$. Por el teorema de PL existe una única solución $x(t)$ definida en $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] =: J$ donde T_0 depende de L y de $M := \max_R |f|$.

$$\{(t, x) : t \in J\} \subseteq R$$

Supongamos que tuvieramos una familia que satisface estas condiciones, es decir, $f = f_\lambda, \lambda \in \Lambda_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ y f_λ satisface las cotas uniformemente en λ, entonces cada PVI_λ tendrá una solución única en el mismo intervalo J. Podemos definir la función de flujo de la familia de funciones f_λ por,

$$\varphi(t, s, \xi, \lambda) := x_\lambda(t)$$

del PVI_λ con datos iniciales $x_\lambda(s) = \xi$.

Teorema 3.2. *Supongamos que $f, g \in C(U, \mathbb{R}^n)$ que f satisface la cota Lipschitz en R entorno de (t_0, x_0). Si $x(t)$ e $y(t)$ son soluciones de los PVI,*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y} = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

supongamos que los gráficos de x e y quedan en R, sea

$$M := \max_{(t,x)\in R} |f(t,x) - g(t,x)|$$

entonces,

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}(e^{L|t+t_0|} - 1)$$

para todo $t \in J = \{t \in \mathbb{R} : (t, x(t)) \in R\}$.

Observación 3.2. La desigualdad depende del cilindro R, ya que podemos considerar otro cilindro R' entorno a (t_0', x_0'), luego se generan otros valores M, L y se obtiene otra desigualdad. Esto significa que la desigualdad es de forma local.

Corolario 3.2. *Sea $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ de forma que satisface la cota de Lipschtiz en un cilindro R entorno de (t_0, x_0), sea x solución del PVI $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ y y solución del PVI $\dot{y} = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, entonces,*

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|}$$

para todo $t \in J$. Usando la función de flujo se obtiene,

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, y_0)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|}$$

donde $\varphi(t, s, \xi)$ es Lipschitz continua en ξ.

Dem. Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que para $t \in J$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$$
$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

Luego,

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds$$

Si $t \in J$, entonces $(s, x(s)), (s, y(s)) \in R$ donde s está moviendose entre t_0, t, luego satisface la cota L de Lipschtiz y, entonces por Grönwall se concluye que,

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L|t-t_0|}$$

■

Corolario 3.3. *Sean $f = f_{\lambda_1}(t, x), g = f_{\lambda_2}(t, x)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_o$. Si $f(t, x, \lambda) \in C(U \times \lambda_o)$, entonces la solución $x(t)$ varía continuamente en λ. Es más $\varphi(t, t_0, \xi, \lambda)$ es continua en (ξ, λ)*

Dem. Esto es más un juego de reemplazos, si $f(t, x, \lambda)$ es continua, entonces $x(t) =$

Dem. (Teorema 3.2.) Notemos que M está bien definido ya que R es un conjunto acotado y cerrado, luego $f - g$ alcanza máximo sobre R. Sean $x(t), y(t)$ soluciones de sus respectívos PVI, entonces

$$x(t) - y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^{t} g(s, y(s)) ds$$

Luego

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - g(s, y(s))| ds \\ &\leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| + |f(s, y(s)) - g(s, y(s))| ds \\ &\leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^{t} (L|x(s) - y(s)| + M) ds \end{aligned}$$

Definimos $u(t) := |x(t) - y(t)|$ podemos usar Grönwall, entonces

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| e^{L(t-t_0)} + \frac{M}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1)$$

■

En resumen, si $f = f(t, x, \lambda) \in C(U \times \Lambda_0)$ y es localemnte lipschitz en x uniformemente en t. Entonces $\varphi(t, s, \xi, \lambda)$ es continua en (ξ, λ) lipschitz en ξ. De hecho, φ es continua en (t, s, ξ, λ) en conjunto.

Supongamos que $f = f(t, x, \lambda) \in C^k(U \times \Lambda_0)$ para $k \geq 1$. Sabemos que el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

se puede pasar a un nuevo sistema, digamos que,

$$u = \begin{pmatrix} t \\ x \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Luego generamos el nuevo sistema,

$$\begin{cases} \dot{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,x,\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{f}(u) \\ u(t_0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ \lambda \end{pmatrix} \end{cases}$$

donde $\overline{f} \in C^k$ si y sólo si $f \in C^k$. Por lo que para resolver la ecuación original, suficiente estudiar la dependencia de los datos iniciales para problemas con ecuaciones autónomas.

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u), \;\; f \in C^k(U),\, U \subseteq \mathbb{R}^n \\ u(0) = x, \;\; x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Consideremos el siguiente PVI,

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = x, \;\; x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Definimos $\varphi(t,x) := u(t)$ definida en $(t,x) \in I \times B$ y $\varphi \in C(I \times B)$ Lipschitz en x. Luego se cumep,

$$\dot{\varphi} = f(\varphi) \in C^0(I \times B) \;\; (\star)$$

Derivando parcialmente $(\star)$ en x_i, se tiene que,

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}\Big(\dot{\varphi}(t,x)\Big) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(t,x)\frac{\partial f}{\partial t}(\varphi(t,x)) + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(t,x)\frac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(t,x)) \\ &= \underbrace{f_u(\varphi(t,x))}_{\text{Jacobiano de } f} \cdot \partial_{x_i}\varphi \end{aligned}$$

Suponiendo que φ es a lo menos C^2, entonces podemos cambiar los índices y obtener,

$$\partial_t(\partial_{x_i}\varphi) = \partial_{x_i}(\partial_t \varphi) = f_u(\varphi)\partial_{x_i}\varphi$$

Sea $y := \partial_x \varphi(t,x)$, de esta forma obtenemos la ecuación,

$$\dot{y} = f_u(\varphi(t,x))y$$

digamos que,

$$A(t,x) := f_u(\varphi(t,x))$$

Y además,

$$\begin{aligned} y(0) &= \partial_x \varphi(0,x) \\ &= \partial_x(x) \\ &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se genera y se satisface el siguiente PVI,

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t,x)y \\ y(0) = \mathbb{I} \end{cases}$$

Que es una ecuación lineal donde $(t,x) \in I \times B$. A esta ecuación le llamamos **ecuación variacional** asociado a $\dot{u} = f(u)$.

Lema 3.1. *Sea el PVI,*

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = x \end{cases}$$

Con $f \in C^1$ donde $(t,x) \in I \times B$, entonces $\varphi(t,x)$ es C^1 en (t,x), $\dot{\varphi} = \partial_t \varphi \in C^1$ en (t,x) y $\partial_x \varphi$ soluciona la EV,

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t,x)y \\ y(0) = \mathbb{I} \end{cases}$$

donde $A(t,x) = f_u(\varphi(t,x))$.

Dem. Consideremos dos observaciones.

- **Observación 1.** $A(t,x)$ es continuo en (t,x) por definicion y $A(t,x)y$ es localmente Lip. en y, y en efecto,

$$\begin{aligned} |A(t,x)y_1 - A(t,x)y_2| &\leq \max_{(t,x)\in I\times B} \|A(t,x)\| |y_1 - y_2| \\ &\leq L|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

  Es decir, $A(t,x)y$ es continuo en todo su dominio definido y además es Lipschitz en el argumento y, entonces por el teorema PL las soluciones de EV existen en $I_0 \subseteq I$ y son única para todo $x \in B$. Además $\varphi(t,x)$ es continua en (t,x).

- **Observación 2.** Si demostramos que $\varphi(t,x)$ es diferenciable en x con derivada $\partial_x \varphi(t,x) = \varphi(t_0,x)$, estamos listo.

  Si esto último se cumple, entonces $\partial_x \varphi \in C^0$ en (t,x), con,

$$\partial_t \varphi = f(\varphi(t,x))$$

  es C^0 en (t,x). Si $y \in C^1$ en (t,x) entonces $\dot{\varphi} = f(y)$ será C^1 en (t,x).

Terminar...

Teorema 3.3. *Suponga que $f \in C^k$, entonces alrededor de (t_0, u_0) en U existe un $R = I \times B$ talque $\varphi(t,x)$ es $C^k(R)$. Además, $\dot{\varphi}$ es C^k y $D_K\partial$ resuelve la ecuación variacional correspondiente, obtenido por,*

$$\partial_t(D_k\partial) = D_k\partial_t\varphi = D_k[f(\varphi(t,x))]$$

Dem. Vamos a aplicar indución sobre k. Si $k=1$ tenemos el lema anterior.

Queremos demostra que φ es diferenciable en x y $\partial_x\varphi(t,x) = \varphi(t,x)$. Sin pérdida de generalidad, $x = 0$,

Figura.

Entonces,

$$\partial_x\varphi(t,0) = \varphi(t,0) \Longleftrightarrow \varphi(t,x) - \varphi(t,0) = \varphi(t,0)xO(|x|)$$

donde $\frac{O(|x|)}{|x|} \xrightarrow{|x|\to 0} 0$. Sea

$$\theta(t,x) := \frac{1}{|x|}[\varphi(t,x) - \varphi(t,0) - \varphi(...)]$$

Terminar...

3.2. Intervalo Máximo de Existencia de Soluciones del PVI

Sea el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x), & f \in C \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Cuando f es localmente Lip. en x (uniformemente en t), el PVI tiene una solución única definida en un pequeño intervalo $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ por el teorema de PL. Queremos saber y poder determinar el intervalo máximal donde está definida esta solución. Consideremos la siguiente hipótesis,

(H): Soluciones del PVI existen localmente en un tiempo y son únicas.

Teeorema 3.4. *Sea un PVI*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

que cumple (H). Entonces existe un intervalo máximal $I := I(t_0,x_0) = (T_-(t_0,x_0), T_+(t_0,x_0))$ con solución,

$$\overline{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$$

el cual es única.

Definición 3.2. *A la solución $\overline{\varphi}$ le llamamos solución maximal del PVI.*

Dem. Sea

$$\mathcal{S} := \{\varphi : I_\varphi \to \mathbb{R}^n \text{ todas las soluciones del PVI}\} \neq \emptyset$$

Definimos el conjunto,

$$I := \bigcup_{\varphi \in J} I_\varphi$$

Afirmación. *I es un intervalo.*

Dem. (Afirmación) Sabemos que $t_0 \in I_\varphi$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}$, si $t_1 > t_0$, con $t_1 \in I_\varphi$ para algún $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces $[t_0, t_1) \subseteq I_\varphi$, si $t_1 < t_0$ es análogo, por lo tanto I contiene todo los intervalos abiertos que contiene a t_0, luego I es un intervalo. ■

Ahora definimos,

$$\overline{\varphi}(t) := \varphi(t)$$

si $t \in I_\varphi$. Veamos que la extensión está bien definido, sea $t \in I_{\varphi_1}, t \in I_{\varphi_2}$ veamos que,

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

si $t_0 \in I_\varphi$ para todo φ, entonces necesariamente sin pérdida de generalidad se tiene que,

$$[t_0, t] \subseteq I_{\varphi_1}, I_{\varphi_2}$$

Sabemos que $[t_0, t] \subseteq I_{\varphi_1}, I_{\varphi_2}$. Sea

$$J := \{s \in [t_0, t] : \varphi_1(s) = \varphi_2(s)\}$$

Sabemos que $J \neq 0$ ya que $t_0 \in J$, como tenemos una igualdad dentro de J se tiene que es cerrado, (formalmente es la preimagen de $\{0\}$ de la función $\varphi_1 - \varphi_2$ que es continua y como $\{0\}$ es cerrado, J es cerrado). Además. J es relativamente abierto por la unicidad local por lo tanto $J = [t_0, t]$ (no puede ser vacío).

Por lo tanto $\overline{\varphi}$ está bien definida. ■

Por lo tanto, en un PVI con soluciones únicas localmente, existe un intervalo máximal $I = (T_-(t_0, x_0), T_+(t_0, x_0))$ donde hay una única solución definida en I.

Lema 3.2. *Sea $\varphi(t)$ una solución del PVI definida en (t_-, t_+). Entonces, la solución tiene una extensión $(t_-, t_+ + \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$ si y sólo si, existe una sucesión $t_m \uparrow t_+$ talque*

$$\lim_{m \to \infty} \varphi(t_m) = y \in U$$

Dem. Supongamos que $\varphi(t)$ es solución del PVI con extensión φ' definida en $(t_-, t_+ + \varepsilon)$, si t_+ está definido en la extensión, entonces existe una sucesión $t_m \uparrow t_+$ con $t_m \in (t_-, t_+)$ talque,

$$y = \lim_{m\to\infty} \varphi'(t_m) = \lim_{m\to\infty} \varphi(t_m)$$

Probemos ahora si existe una sucesión $t_m \uparrow t_+$ talque,

$$\lim_{m\to\infty} \varphi(t_m) = y$$

entonces existe una extensión de φ en $(t_-, t_+ + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. Sabemos que $\varphi \in C(t_-, t_+)$. Encontrar un $\varphi^\star$ que resuelve el PVI donde $\varphi^\star(t_+) = y$.

Figura.

Supongamos que el límite,

$$\lim_{t\uparrow t_+} \varphi(t) = y$$

no existe, entonces existe una oscilación cuando $t \uparrow t_+$

Figura.

Sea la sucesión real $\{t_m\}$ como se aprecia en la figura, como oscila $\varphi(t)$ entonces podemos considerar una bola de radio δ suficientemente pequeño de dentro y, de forma que en la figura tenemos,

Figura.

Esto significa que existe una sucesión $\bar{t}_m \uparrow t_+$ talque,

$$|\varphi(\bar{t}_m) - y| \geq \delta$$

Afirmación. *Existe otra sucesión $\tau_m \geq t_m$ talque $(t, \varphi(t))$ con $t \in [t_m, \tau_m]$ se queda en,*

$$S := [t_+ - \delta, t_+] \times \overline{B}_\delta(y)$$

con $|\varphi(\tau_m) - y| = \delta$.

Luego se tiene que,

$$\begin{aligned}
|\varphi(\tau_m) - y| &\leq |\varphi(\tau_m) - \varphi(t_m)| + |\varphi(t_m) - y| \\
&= \left| \int_{t_0}^{\tau_m} f(s, x(s))ds - \int_{t_0}^{t_m} f(s, x(s)) \right| + |\varphi(t_m) - y| \\
&\leq \int_{t_m}^{\tau_m} f(s, x(s))ds + |\varphi(t_m) - y| \\
&\leq \max_S |f|(\tau_m - t_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Es decir, $\delta = 0$, siendo una contradicción. Por lo tanto necesariamente existe el límite,

$$\lim_{t \uparrow t_+} \varphi(t) = y$$

y luego se puede expandir a $\varphi^\star$ definida en $(t_-, t_+ + \varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$. ■

¿Cuándo se puede extender una solución? Si φ es una solución del PVI necesitamos una sucesión $t_m \uparrow t_+$ talque $\varphi(t_m)$ converga. Supongamos que existe $C \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto talque $[t_-, t_+] \times C \subseteq U$ y talque $\varphi(t_m) \in C$ con $t_m \uparrow t_+$ una sucesión cualquiera, como C es compacto existe una subsucesión convergen $\varphi(t_{m_k})$, donde $t_{m_k} \uparrow t_+$, luego por el lema anterior φ se extiende más alla de t_+.

Corolario 3.4. *Si existe tal $C \subseteq \mathbb{R}^n$ para cualquir $t_+ > t_0$, entonces la solución existe para todo $t \geq t_0$.*

Dem. Si para todo $t_+ > t_0$ existe tal C compacto, entonces como vimos, se puede extender mas allá de t_+, luego la solución existe para todo $t \geq t_0$. ■

Corolario 3.5. *Sea $I_{(t_0,x_0)} = (T_-(t_0, x_0), T_+(t_0, x_0))$ el intervalo máximo de existencia de la solución del PVI. Si $T_+ < \infty$, entonces la solución $\varphi(t)$ eventualmente sale de cualquier $C \subseteq \mathbb{R}^n$ talque, $[t_0, T_+] \times C \subseteq U$. En particular, si $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces, $|x(t)| \to \infty$ cuando $t \uparrow T_+$.*

Es decir, si el intervalo maximal tiene cota T_+ finito, entonces la solución explota en tiempo finito. (Siempre y cuando $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$)

Teorema 3.5. *Suponga que $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, f es continua y para todo $T > 0$, existen valores $M(T), L(T) \geq 0$ talque,*

$$|f(t, x)| \leq M(T) + L(T)|x|$$

para todo $(t, x) \in [-T, T] \times \mathbb{R}^n$. Entonces la solución del PVI existe para todo tiempo.

Dem. Sea x solución del PVI luego existe un intervalo maximal $I = (T_-, T_+)$, supongamos que $T_+ < \infty$ y sea $T > |T_+|$, entonces para todo $(t, x) \in [-T, T]$ se tiene que,

$$|f(t, x)| \leq M(T) + L(T)|x|$$

Entonces se cumple que para todo $t \in I$,

$$|x()t| \leq |x_0| + \int_{t_0}^{t} (M(T) + L(T)|x(s)|)ds$$

Luego por Grönwall se tiene que,

$$|x(t)| \leq |x_0|e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)$$

para todo $t \in I$. Notemos que la solución no explota cuando $t \uparrow T_+$ ya que,

$$|x_0|e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)$$

no explota. Por lo tanto la solución existe para todo $t \geq t_0$

Corolario 3.6. *Las soluciones de una ecuación lineal $\dot{x} = f(t)x + g(x)$ donde $p(t), g(t)$ son continuas en $t \in \mathbb{R}$, tiene soluciones es globales.*

Dem. Sea el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t)x + g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Notemos que,

$$|f(t,x)| \leq |f(t)|x + |g(t)|$$

con f continua. Sea $T > 0$ si $t \in [-T, T]$ entonces se tiene que,

$$|f(t,x)| \leq |f(t)||x| + |g(t)| \leq F|x| + G$$

con $F, G \geq 0$. Luego por el teorema 3.5, la soluciones del PVI están definido en todo $\mathbb{R}$. ■

3.3. Teorema de Peano

Teorema de Peano. *Suponga que $f \in C(U), U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y que $R = [t_0, t_0 + T] \times \overline{B}_\delta(x_0) \subseteq U$, entonces, existe una solución del PVI para $t \in [t_0, t_0 + T_0]$ que permanece en $\overline{B}_\delta(x_0), T_0 = \min\{T, \delta/M\}$, donde $M = \max_R |f|$. (Es análogo cuando $t < t_0$).*

Observación 3.3. Notar que el teorema de Peano es distinto al teorema de PL ya que este último habla de unicidad dentro de un cilindro R donde f es Lipschitz, mientras que el teorema de Peano habla de existencia y que pide solamente que $[t_0, t_0 + T] \times \overline{B}_\delta(x_0) \subseteq U$, de aquí existe una solución $x(t)$ definida en $[t_0, t_0 + T_0]$ donde, $T_0 = \min\{T, \delta/M\}$.

Método de Euler. Figura

Continuar

Para probar el teorema de Peano necesitamos el teorema de Arzela-Ascoli **Teorema 3.6. (Arzela-Ascoli)** *Sea $\{x_n(t)\}n$ una familia de funciones continuas $C(I, \mathbb{R}^n)$ con I compacto. Las cuales son,*

(a) Acotada, $\|x_m(t)\| \leq M_0$ en $C(I)$.

(b) Equicontinua, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, talque para toda función de la familia, $|x_m(s) - y_m(s)| < \delta$ para todo $|s - t| \leq \delta$.

Entonces existe una sucesión $x_{m_j}(t)$ y $\overline{x} \in C(I, \mathbb{R}^n)$ talque,

$$\|\overline{x}(t) - x_{m_j}(t)\| \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dem...

4. Ecuaciones Lineales de Primer Orden con x Sistemas

Vamos a estudiar ecuaciones lineales asociado a matrices. Sea la ecuación lineal $\dot{x}(t) = A(t)x + B(t)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $A(t)$ es una matriz $n \times n$ con coeficientes continuas en $t \in I$ y continua sobre I. Si $B(t)$ es nula, el sistema es homogéneo, si no, es no homogéneo.

Sea (t_0, x_0) datos iniciales con $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, por el teorema de P.L el problema de valor inicial tiene única solución para todo datos inicial. Además, esta solución está definida para todo $t \in I$ y que no explota en tiempo finito. (Esto ocurre ya que $f(t,x)$ es continua en $I \times \mathbb{R}^n$, además es Lipschitz, de ahi que tiene solución única).

Observación 4.1. Sea

$$J := \{\text{todas las soluciones de la EDO sobre } I\}$$

Entonces,

$$J = \{\text{soluciones de PVI con } x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n\}$$

Si tenemos una solución de la EDO, entonces es claro que tiene un dato inicial (t_0, x_0). Por otro lado, si tenemos solución del PVI con datos iniciales $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, entonces existe solución única sobre I, de forma que los conjuntos son iguales.

Supongamos que la EDO es homogénea, sean $x_1(t), x_2(t)$ soluciones que resuelven la EDO sobre I, entonces,

$$x'(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

también la resuelve la EDO para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Es decir, J es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial. ¿Existe un conjunto finito de J que genere a sí mismo? La respuesta es sí, sea $x(t)$ una solución arbitraria, sea $t_0 \in I$ talque $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, si $\{v_k\}_{k=1}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces,

$$x_0 = \sum_{i=1}^n c_iv_i$$

Si a cada v_i genera soluciones $x_1, x_2, \ldots, x_n \in J$, entonces ocurre que,

$$\overline{x}(t) := \sum_{i=1}^n c_ix_i(t) \in J$$

donde $\overline{x}(t_0) = x_0$. Por por la unicidad de P.L, se tiene que,

$$\overline{x}(t) = x(t)$$

para todo $t \in I$.

Proposición 4.1. *El conjunto de soluciones J de una Edo lineal homogénea de primer orden, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con dimensión finita. Si además $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$ genera J, entonces,*

$$\{x_k(t_0)\}_{k=1}^n$$

es una base de $\mathbb{R}^n$*.*

Dem. Sea $\{v_k\}_{k=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$. Luego existen soluciones $x_k \in J$ tales que,

$$x_k(t_0) = v_k$$

De aquí tenemos la colección $\gamma = \{x_k(t)\}_{k=1}^n \subseteq J$, probemos que γ es una base de J. Sea $\overline{x}(t) \in J$ solución, luego $\overline{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$, luego existen $c_k \in \mathbb{R}$ talque,

$$\overline{x}(t_0) = \sum_{k=1}^n c_k v_k$$

Luego por unicidad de las soluciones se tiene que,

$$\overline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k(t)$$

Luego γ genera J, veamos que son L.I, sean $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que,

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) = 0$$

para todo $t \in I$. Luego tomando t_0 obtenemos la base $\{v_k\}_{k=1}^n$, y por tanto, $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Probando que,

$$Gen_{\mathbb{R}}\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\} = J$$

Luego J es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita.

Sea $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$ una colección que genera J. Luego $\{x_k(t_0)\}_{k=1}^n$ es L.I, (más adelante lo probaremos), veamos que genera $\mathbb{R}^n$. Sea $v \in \mathbb{R}^n$, entonces, existe $x_v(t) \in J$ talque, $x_v(t_0) = v$, luego existen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ talque,

$$x_v(t) = \sum_{k=1}^n c_k x_k(t)$$

Tomando $t = t_0$ se llega a que,

$$v = \sum_{k=1}^n c_k x_k(t_0)$$

Por tanto, $\{x_k(t_0)\}_{k=1}^n$ es base de $\mathbb{R}^n$. $\blacksquare$

En particular, las soluciones de J necesariamente es de dimensión n, dado que depende de la dimensión de $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.1. (Independencia Lineal de Funciones) *Las funciones,*

$$\{y_k(t) : t \in I\}_{k=1}^l$$

son linealmente independientes si,

$$\sum_{k=1}^{l} c_k y_k(t) = 0$$

para todo $t \in I$, entonces $c_1 = c_2 = \cdots = c_l = 0$.

Nota 4.1. Ser linealmente independiente sobre funciones es distinto a serlo con elementos, ya que por ejemplo, si,

$$y_1(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}, \;\; y_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

son L.I en $I = (-\pi, \pi)$, aunque en $t = 0$,

$$y_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que no es L.I en $\mathbb{R}^2$. Veamos que son L.I como funciones, si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son tales que,

$$c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t) = 0$$

para todo $t \in I$. Entonces tomando $t = 0$, $c_1 = 0$ y tomando $t = \frac{\pi}{2}$, $c_2 = c_1 = 0$.

Proposición 4.2. *la familia $\{x_k(t)\}_{k=1}^{l}$ son soluciones de la EDO que son L.I sobre I si y sólo si $\{x_k(t_0)\}_{k=1}^{l}$ son L.I como $\mathbb{R}$.*

Dem. Si $\{x_k(t_0)\}_{k=1}^{l}$ es L.I sobre $\mathbb{R}^n$, entonces a cada elemento de este existe la sucesión $\{x_k(t)\}_{k=1}^{l}$ que son soluciones del Edo, sean $c_1, \ldots, c_l \in \mathbb{R}$ talque,

$$\sum_{k=1}^{l} c_i x_k(t) = 0$$

Tomanto $t = t_0$ se llega a que $c_1 = \cdots = c_l = 0$. Luego son L.I.

Supongamos ahora que $\{x_k(t)\}_{k=1}^{l}$ es L.I como soluciones de la Edo, sean $c_1 \ldots, c_l$ no todos nulos talque,

$$\sum_{k=1}^{l} c_i x_k(t_0) = 0$$

Sea $\overline{x}(t) = \sum c_i x_k(t) \in J$ talque $\overline{x}(t_0) = 0$, entonces por construcción, la única solución de los datos iniciales $(t_0, 0)$ es la nula, por tanto, $\overline{x}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Luego $c_1 = \cdots = c_l = 0$ siendo imposible. Luego $\{x_k(t_0)\}_{k=1}^{l}$ es L.I sobre $\mathbb{R}^n$. ■

Esto nos sirve para determinar soluciones de la EDO si se conocen n soluciones que al tomar $t = t_0$ son L.I

Sea la ecuación lineal homogénea,

$$\dot{x} = A(t)x \ \ (\star)$$

Veamos como resolver la ecuación usando soluciones L.I. Supongamos que $x_1(t), \dots, x_n(t) \in J$ son soluciones que son L.I sobre I, que generan a J, entonces toda solución de $(\star)$, es de la forma,

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) \\ &= \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= X(t)C \end{aligned}$$

Es decir, si $x(t)$ es solución, entonces existe una matriz $X(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ $n \times n$ talque,

$$x(t) = X(t)C$$

Definición 4.2. (Matriz Fundamental) *Una matriz $X(t)$ cuyas columnas son n soluciones L.I de $(\star)$ se llama una matriz fundamental.*

Sea un PVI con datos iniciales $x(t_0) = x_0$ con $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, por lo anterior existe una matriz fundamental $X(t)$ talque,

$$x(t) = X(t)C$$

Luego $X(t_0)C = x_0$ si y sólo si $C = X(t_0)^{-1}x_0$, puesto que X al tener soluciones L.I, este es invertible, por lo tanto, la solución del PVI es,

$$x(t) = X(t)X(t_0)^{-1}x_0$$

Esto significa que para resolver $(\star)$ necesitamos encontrar una matriz fundamental $X(t)$.

Observación 4.1. Podemos pensar la matriz fundamental $X(t)$ como una solución matricial de la EDO,

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \dot{x}_1(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ A(t)x_1 & \dots & A(t)x_n \\ | & & | \end{pmatrix} = A(t)X(t)$$

En general, cada matriz $Y(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $Y(t) = A(t)X(t)$ que satisface $(\star)$ la llamamos matriz solución.

Sea el PVI,

$$\begin{cases} \dot{X} = A(t)X \\ X(t_0) = \mathbb{I}_n \end{cases}$$

Sabemos que tiene solución única, definida sobre todo $t \in I$, la solución a este PVI es,

$$X(t) = \Pi(t, t_0)X_0 = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$$

a la matriz de la derecha le llamamos solución principal o propagador. Este soluciona el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Es decir,

$$x(t) = \Pi(t, t_0)x_0$$

Claramente se cumple los datos iniciales ya que,

$$x(t_0) = \underbrace{\Pi(t_0, t_0)}_{=\mathbb{I}} x_0 = x_0$$

También satisface la ecuación diferencial,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt}\left(\Pi(t, t_0)x_0\right) \\ &= \dot{\Pi}(t, t_0)x_0 \\ &= (A(t)\Pi(t, t_0))x_0 \\ &= A(t)(\Pi(t, t_0)x_0) \\ &= A(t)x(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x(t) = \Pi(t, t_0)x_0$ y si X es la matriz fundamental de $x(t)$, entonces,

$$\Pi(t, t_0) = X(t)X(t_0)^{-1}$$

Proposición 4.1.

(a) $\dot{\Pi}(t, t_0) = A(t)\Pi(t, t_0)$.

(b) $\Pi(t_0, t_0) = Id_n$ *para todo* $t_0 \in I$.

(c) Si $r, s, t \in I$, *entonces,*

$$\Pi(r, s) = \Pi(r, t)\Pi(t, s)$$

en particular,

$$(\Pi(t, s))^{-1} = \Pi(s, t)$$

Definición 4.3. (Wronskiano) *Sea $X(t)$ la matriz fundamental de la ecuación $\dot{x} = A(t)x$. Se define el Wronskiano por,*

$$W(t) := \det(X(t))$$

Otra forma de ver el Wronskiano es por la definición de la matriz fundamental, si $x_1, \dots, x_n$ son soluciones L.I de la ecuación, entonces,

$$W(t) := \det(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Teorema 4.1. (Fórmula de Abel-Liouville) *Sea la ecuación $\dot{x} = A(t)x$ con datos iniciales (t_0, x_0). Entonces se satisface el PVI*

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = Tr(A(t))W \\ W(t_0) = W_0 \end{cases}$$

Es decir,

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))ds\right)$$

Dem. Sean $x_1, \dots, x_n$ soluciones L.I de la ecuación, entonces,

$$W(t) = \det(X(t)) = \det \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t) &= \det \begin{pmatrix} | & & | \\ \dot{x}_1(t) & \dots & x_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1(t) & \dots & \dot{x}_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} | & & | \\ A(t)x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1(t) & \dots & A(t)x_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} \\ &=: F_A(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Afirmación/Lema. *$F_A(x_1, \dots, x_n)$ donde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, es una forma multilineal y es alternante.*

Por tanto, se tiene que,

$$F_A(\vec{x}) = C_A \det(\vec{x})$$

donde $C_A = Tr(A)$. O en otras palabras,

$$\dot{W} = Tr(A(t))W$$

Dem. (Afirmación.) Tomemos,

$$x_1 = e_1,\ x_2 = e_2,\ \ldots,\ x_n = e_n$$

luego,

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, Ae_1 = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{pmatrix}$$

y así,

$$\det \begin{pmatrix} | & & | \\ A(t)x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ | & & | \end{pmatrix} = A_{11}$$

Y así de forma recursiva. ■

Proposición 4.. (Criterio) *Sea la ecuación $\dot{x} = A(t)x$ con $A(t)$ continua en I, si,*

$$W(t) = \det(y_1, \ldots, y_n)$$

Entonces las soluciones $y_1, \ldots, y_n$ son L.I si y sólo si $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Dem. Supongamos que los $y_1, \ldots, y_n$ son L.I, si para $t = t_1$ se tiene que $W(t) = 0$, entonces,

$$\det(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)) = 0$$

Dicho de otra forma, la matriz,

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ y_1 & \ldots & y_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

no es L.I, luego los $y_1, \ldots, y_n$ no son L.I siendo contradicción.

SUpongamos que $W(t) \neq 0$ para todo t, sean $c_1, \ldots, c_n$ tales que,

$$c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t) = 0$$

para todo $t \in I$, luego,

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ y_1 & \ldots & y_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $W(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces tenemos matrices invertibles, es decir, necesariamente $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Por lo que $y_1, \ldots, y_n$ son L.I. ■

Ya sabemos como resolver una ecuación lineal homogénea, basta determinar la matriz fundamental $X(t)$ y luego estudiar,

$$X(t)X^{-1}(t_0) = \Pi(t, t_0)$$

Luego la solución es,

$$x(t) = \Pi(t, t_0)x_0$$

Y para determinar $X((t)$ hay que encontrar n soluciones particular L.I, luego determinar $X^{-1}(t_0)$, otra forma sería determinar C el que acompaña a la matriz fundamental usando los datos iniciales.

Ahora veamos como encontrar la solución de la lineal no homogénea, sea la ecuación,

$$\dot{x}(t) = A(t)x + b(t)$$

Para una solución $x(t)$, se tiene la descomposición,

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

donde x_p es una solución particular y x_h es la solución de la ecuación homogénea $\dot{x} = A(t)x$. Veamos porque esto es así, sean x_1, x_2 soluciones de la ecuación no homogénea, luego se cumple,

$$(x_1 - x_2)' = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = A(t)(x_1 - x_2)$$

Digamos que $x_h = x_1 - x_2$ solución de la homogénea, si conocemos $x_p = x_2$ tenemos una solución particular y $x = x_1$ es la solución a determinar, luego,

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

Si x_h es solución de la ecuación homogénea, entonces existe una matriz fundamental $X(t)$ y una matriz de coeficientes $C \in \mathbb{R}^n$ talque,

$$x_h(t) = X(t)C$$

Reemplazando en la solución $x(t)$ vemos que,

$$x(t) = x_p(t) + X(t)C$$

¿Cómo encontrar una solución x_p? Para ello buscaremos $x_p(t) = X(t)C(t)$ para una función $C(t) : I \to \mathbb{R}^n$ (**variación de constate**), como x_p es solución de nuestra EDO, se tiene que,

$$\dot{x}_p = A(t)x_p + b(t)$$

Luego por la regla de la suma de las derivadas se tiene que,

$$\begin{aligned}\dot{X}(t)C(t) + X(t)\dot{C}(t) &= A(t)(X(t)C(t)) + b(t)\\ &= \dot{X}(t)C(t) + b(t)\end{aligned}$$

Luego,

$$X(t)\dot{C}(t) = b(t) \Longleftrightarrow \dot{C}(t) = X^{-1}(t)b(t)$$

Integrnado se obtiene que,

$$C(t) = \int X^{-1}(t)b(t)dt$$

Por lo tanto, la solución particular es,

$$\begin{aligned}x_p(t) &= X(t)C(t)\\ &= X(t)\int X^{-1}(t)b(t)dt\end{aligned}$$

Obteniendo una fórmula, llamada **fórmula de variación constante.** Notemos que no importa mucho el comportamiento $C(t)$ ya que siempre tendra una forma conveniente aunque en algunos casos es mejor determinar de forma directa $C(t)$ usando el método de la reducción de orden.

En general, Sea

$$x(t) = X(t)C(t)$$

donde $x_0 = X(t_0)C(t_0)$ y donde se satisface el PVI,

$$\begin{cases}\dot{C} = X^{-1}(t)b(t)\\ C(t_0) = X^{-1}(t_0)x_0\end{cases}$$

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que,

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \dot{C}(s)ds$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}x(t) &= X(t)C(t)\\ &= X(t)C(t_0) + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)b(s)ds\\ &= X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X(t)X^{-1}(s)b(s)ds\\ &= \Pi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Pi(t,s)b(s)ds\end{aligned}$$

Obteniendo una fórmula llamada **Fórmula de Duhamd** encontrando una fórmula directa para determinar la solución.

En conclusión, para determinar una solución a la ecuación lineal no homogénea tenemos dos caminos, determinar una solución particular y resolver la homogénea o bien, usar la fórmula de Duhamnd.

4.1. Ecuaciones Lineales Homogénea Autónoma

Recordemos que una ecuación autónoma es donde no depende de t, es decir, queremos estudiar ecuaciones de la forma $\dot{x} = Ax$. Si $A(t) = A$ es constante, entonces,

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} A ds\right) x_0 \\ &= e^{A(t-t_0)} \end{aligned}$$

Es decir, e^{At} es la matriz fundamental de x, donde,

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

Primero que nada, ¿De dónde sale e^{tA}? Si tenemos el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Luego, un operado K talque,

$$Kx(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds$$

Entonces la solución está dada por,

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} K^n(x_0)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_0^t A x_0 ds = x_0 + tAx_0 \\ x_2(t) &= x_0 + \int_0^t A x_1(s) ds = x_0 + tAx_0 + A^2 x_0 \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Por tanto,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

Veamos que x está bien definida, pero antes necesitamos algunos preliminares. Sea A una matriz $n \times n$ real, la norma de A se define por,

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,j} A_{i,j}^2} \quad \textbf{(Norma Frobenius)}$$

La norma de un operador se define por,

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} \quad \textbf{(Norma Operador)}$$

Estas normas son equivalentes, en particular se cumple,

$$\|A\| \leq |A| \leq \sqrt{n}\|A\|$$

Si A, B son matrices reales, entonces se cumple,

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Luego para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple,

$$\|A^k\| \leq (\|A\|)^k$$

con el convenio de que, $A^0 = I$.

Proposición 4.2. *Si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ converge absolutamente en $D_k = D(0, R)$, entonces,*

$$f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

está bien definida y converge absolutamente para matrices A talque $\|A\| < R$.

Dem. Si $r = \|A\| < R$, entonces,

$$\sum_{k=0}^{N} \|a_k A^k\| \leq \sum_{k=0}^{N} |a_k| \|A\|^k < \infty$$

Es decir, la sumas parciales son absolutamente converge. En particular, $\left\{\sum_{k=0}^{N}\right\}_N$ son Cauchy. Luego converge a un límite $f(A)$. ■

Proposición 4.3. *Si las series de potencias,*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$
$$g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

converge absolutamente en D_k. Y $\|A\| < R$, se cumple, *(a)* $(af+bg)(A) = af(A) + bg(A)$. *Para todo* $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) $(f \cdot g)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$.

(c) Si f *mapea* D_R *en el dominio de convergencia de* g,

$$g(f(A)) = (g \circ f)(A)$$

Corolario 4.1. e^A *está bien definido para toda matriz compleja* A.

Dem. Por definición,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Sabemos la convergencia de la serie, e^z son en todos reales, si $\|A\| \in \mathbb{R}$, entonces e^A converge y está bien definido. $\blacksquare$.

Proposición 4.4.

(a) Si $M(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}, t \in I$, *con entradas funciones diferenciables en* $t \in I$. *Entonces,* $e^{M(t)}$ *es diferenciable con derivada,*

$$\frac{d}{dt} e^{M(t)} = e^{M(t)} \dot{M}(t) \overset{\star}{=} \dot{M} e^{M(t)}$$

Donde $\star$ *se cumple si y sólo si* $M, \dot{M}$ *conmutan. En particular,*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = e^{At} A = A e^{At}$$

(b) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. *Luego,*

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

si y sólo si A, B *conmutan.*

Dem.

(a) Si,

$$e^{M(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(M(t))^k}{k!}$$

Si es una serie de potencia entonces es diferenciable al ser composición de diferenciables, en particular, la derivada es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{M(t)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(M(t))^{k-1} \dot{M}(t)}{(k-1)!} \\ &= \dot{M}(t) \sum_{k=1}^{\infty} e^{M(t)} \end{aligned}$$

dado que $M, \dot{M}$ conmutan. Si $M(t) = At$ constante entonces es claro que A conmuta con At, luego,

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

(b) **Por demostrar**

■

Proposición 4.5. *Sea el problema $\dot{x} = A(t)x$. Luego una matriz fundamental es,*

$$X(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$$

Entonces,

$$\dot{X} = A(t)\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right)$$

en el caso de que $A(t)$ conmuta con, $\int_{t_0}^{t} A(s)ds$.

Ya sabemos como resolver una lineal, el problema es determinar e^{At} ya que es una serie infinita. Para ello usaremos matrices de Jordan. Es más, llegaremos a que,

$$e^{A} = Ve^{A_J}V^{-1}$$

con A_J matriz 'simple' y V una matriz invertible. Sabemos que toda matriz real tiene una matriz de Jordan en forma canónica, digamos que es A_J, entonces, si $A = VA_JV^{-1}$, entonces,

$$A^k = VA_J^kV^{-1}$$

Y luego,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \\ &= V\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA_J)^k}{k!}\right)V^{-1} \\ &= Ve^{A_j}V^{-1} \end{aligned}$$

Tenemos que la forma canónica de Jordan es de la forma,

$$A_J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix}$$

donde J_k es un bloque de Jordan, donde,

$$J_k = \alpha I_l + N_l = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

(matriz de $l \times l$). Y V la matriz de los vectores propios generaliados L.I que son n, donde cada bloque J_k de Jordan, contribuye con l vectores propios generalizados $\{v_1, \ldots, v_l\}$ L.I. Ahora para el conjunto de vectores generalizados $\{v_1, \ldots, v_k\}$ dado por J_k, tenemos que,

$$\begin{aligned} Av_1 &= \alpha v_1 \\ Av_2 &= v_1 + \alpha v_2 \\ &\vdots \\ Av_l &= v_{l-1} + \alpha v_l \end{aligned}$$

Luego v_1 es el vector propio de α y $(A - \alpha I)v_k = v_{k-1}$ para todo $k = 2, \ldots l$.

Ejemplo 4.1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinemos e^{At}. Si,

$$p_A(z) = \det(A - zI) = z^2$$

Entonces 0 es el único valor propio con multiplicidad algebraica 2. Entonces la matriz de Jordan es,

$$A_J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinemos los vectores propios generalizados, sabemos que son dos, queremos v_1 talque,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar $v_1 = (1, -2)$ siendo el vector propio generalizado. Ahora para v_2 basta estudiar,

$$(A - 0 \cdot I)v_2 = v_1 \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Tomadno $v_2 = (1, -1)$ vemos que v_1, v_2 son L.I y finalmente,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Si $A_J^n = 0$ para todo $n \geq 2$, entonces,

$$e^{A_J t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_J t)^k}{k!} = I + A_J t$$

Por lo que se puede obtener e^{At} de una forma conveniente.

Volviendo al problema original. Ya sabemos que A puede ser expresado como el producto de matrices invertibles y de una matriz de Jordan. En el exponente sería,

$$e^{tA} = V e^{A_J t} V^{-1} = V \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_m} \end{pmatrix} V^{-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} e^{tJ_k} &= e^{t(\alpha I_l + N_l)} \\ &= e^{\alpha e^{tN_l}} \\ &= e^{\alpha t} e^{tN_l} \end{aligned}$$

($\alpha + I, tN$ conmutan). Notemos que N es nilpotente, en particular, $N^n = 0$ para todo $n \geq l$. Luego,

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(tN)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{l-1}/(l-1)! \\ & 1 & t & \dots & t^{l-2}/(l-2)! \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto se puede determinar la solución $x(t)$.

Aún cuando A es real, los valores propios pueden ser complejos, en este caso tambien se trabaja con la fórmula canónica. Si $\alpha = a + ib$ con $b \neq 0$, entonces los asociamos con J, si $\alpha = a - ib$ con $b \neq 0$, lo asociamos a $J^\star := \overline{\alpha} I_l + N_l$.

Terminar

4.2. La Dinámica Asintótica del Sitema Lineal Autónomo de Primer Orden

Sea el problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Sabemos que la solución está dada por,

$$x(t) = \Pi(t,0) = e^{tA}x_0$$

y que podemos descomponer A de la forma,

$$A = VA_JV^{-1}$$

donde A_J es la forma canónica de Jordan, si,

$$V = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

la matriz de los vectores generalizados de A. Reemplazando en la ecuación y tomando $y = V^{-1}x$ obtenemos,

$$\dot{y} = A_Jy$$

En efecto, ya que,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{(V^{-1}x)} \\ &= V^{-1}\dot{x} \\ &= V^{-1}Ax \\ &= A_Jy \end{aligned}$$

Por lo que $x(t)$ resuelve la ecuación si y sólo si $y(t)$ resuelve la ecuación,

$$\begin{cases} \dot{y} = A_Jy \\ y(0) = c \end{cases} \qquad (*)$$

donde,

$$x_0 = Vc = V\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$$

Los c_j son los coeficientes de la representación de x_0 en la base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

La solución de $(*)$ es,

$$y(t) = e^{A_Jt}c$$

que ya sabemos como se comporta luego, la solución de la ecuación original es,

$$x(t) = Vy(t) = v_1y_1(t) + \cdots + v_ny_n(t), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Con esto estudiado haremos un estudio del comportamiento de la solución de un PVI.

Caso A **de** 2×2**.** Veamos cuando A es una matriz de 2×2. El polinomio característico es,

$$\chi_A(z) = \det(zI - A) = z^2 - Tr(A)z + \det(A)$$

Valores Propios Reales.

Supongamos que los valores propios de A son distintos $\alpha_1 < \alpha_2$. Entonces por cosntrucción,

$$A_J = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$e^{A_J t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix}$$

Luego la solución de $\dot{y} = A_J y$ es,

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha_1 t} \\ c_2 e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} v_1 + c_2 e^{\alpha_2 t} v_2$$

donde v_i son los vectores propios de α_i.

- $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$**.** Ocurre que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para toda solución de esta forma. Notemos que el termino dominante es $c_2 e^{\alpha_2 t} v_2$ ya que el otro va hacía 0 más rápido y el término $c_1 e^{\alpha_1 t} v_1$ domina cuando $t \to -\infty$, por lo que tiene la forma de,

  Figura

  Al origen le decimos sumidero estable.

- $0 < \alpha_1 < \alpha_2$**.** Tenemos que $x(t) \to \infty$ (se aleja del origen) cuando $t \to \infty$, vemos que el término $c_2 e^{\alpha t} v_2$ domina cuando $t \to \infty$ al crecer más rápido y $c_1 e^{\alpha_1 t} v_1$ domina cuando $t \to -\infty$. Luego tenemos,

  Figura

  Ademá $x(t)$ no toca al origen. Aquí decimos el origen es una fuente.

- $\alpha_1 < 0 < \alpha_2$**.** Tenemos que en la recta $\langle v_1 \rangle$, $x(t) \to 0$, y en $\langle v_2 \rangle$ $x(t) \to \infty$, entonces en un punto distintos de estas rectas, la solución crece hacía la recta $\langle v_2 \rangle$ a la vez que se acerca al origen en sentido $\langle v_1 \rangle$, por lo que el comportamiento de $x(t)$ luce de la siguiente forma,

  Figuta

Valores Propios Complejos

Digamos que, $\alpha_1 = \alpha = \lambda + iw$, este valor propio está asociado a v y, $\alpha_2 = \overline{\alpha} = \lambda - iw$ está asociado a $\overline{v}$. Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces,

$$x_0 = c_1 v + c_2 \overline{v} = \overline{c}_1 \overline{v} + \overline{c}_2 v$$

Entonces, $c_1 = \overline{c}_2$ y entonces, $x_0 = c_1 v + \overline{c}_1 \overline{v} = 2Re(c_1 v)$. Luego,

$$e^{A_J t} = \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\overline{\alpha} t} \end{pmatrix}$$

Multiplicando por $c = (c_1, c_2)^T$ se llega a que,

$$e^{A_j t} c = \begin{pmatrix} c_1 e^{\alpha t} \\ c_2 e^{\overline{\alpha} t} \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{\alpha t} v + c_2 e^{\overline{\alpha} t} \overline{v} \\ &= c_1 e^{\alpha t} v + \overline{c_1 e^{\alpha t} v} \\ &= 2Re(c_1 e^{\alpha t} v) \\ &= 2e^{\lambda t} Re(c_1 v(\cos(wt) + i \operatorname{sen}(wt))) \\ &= e^{\lambda t}(2Re(c_1 v)\cos(wt) - 2Im(c_1 v)\operatorname{sen}(wt)) \\ &= e^{\lambda t}(x_0 \cos(wt) - 2Im(c_1 v)\operatorname{sen}(wt)) \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, entonces $x(t) = x_0 \cos(wt) - 2Im(c_1 v)\operatorname{sen}(wt)$ es acotado para todo $t \in \mathbb{R}$ y periódica $T = \frac{2\pi}{w}$. Obtenemos el siguiente comportamiento,

Figura.

Luego el origen es un centro.

Si $\lambda < 0$ **Continuar**

Figura.

Y por último si $\lambda > 0$ se obtiene,

Figuta

El origen es una fuente espiral.

Valores Propios Reales Iguales. Si el espacio propio es de dimensión 2 obtenemos dos casos triviales, cuando $\alpha < 0$ es un punto estrella estable,

Figura

Si $\alpha > 0$ decisom que es un punto estrella inestable,

Figura.

Si la multiplicidad geométrica de $\alpha = 1$ se tiene que $y(t) = e^{A_J t}c$, luego,

$$A_J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$e^{A_J t} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$y(t) = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución de la ecuación original es de la forma,

$$x(t) = v_1 e^{\alpha}(c_1 + c_2 t) + v_2 e^{\alpha t} c_2$$

- $\alpha < 0$. Obtenemos algo de la siguiente forma,

  Figura.
- $\alpha > 0$. Obtenemos algo de la forma, **Figura.**
- $\alpha = 0$. En este caso tenemos que,

  $$x(t) = v_1(c_1 + c_2 t) + v_2 c_2$$

  algo con un comportamineto lineal, notemos que es acotado si y sólo si $c_2 = 0$, es decir,

  $$x(t) = v_1 c_1$$

  Por lo que x es acotado si y sólo si x permanece en $\langle v_1 \rangle$.

¿Cómo es el caso general? Tenemos que,

$$x_0 = \sum_J x_0^J$$

donde x_0^J pertenece al espacio generalizado asociado al bloque J. Luego,

$$e^{At}x_0 = \sum_J e^{At}x_0^J$$

con,

$$x_0^J = c_1 v_1 + \cdots + c_l v_l$$

donde $\{v_1, \ldots, v_l\}$ es una base asociado an bloque de Jordan, y entonces,

$$e^{At}x_0^J = v_1 y_1(t) + \cdots + v_l y_l(t)$$

...

4.3. Estabilidad de Sistemas Lineales Homogéneos de Primer Orden

Sea la ecuación $\dot{x} = A(t)x$ con $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ $(\star)$. Si $x = 0$ es claramente solución que es acotada, queremos controlar todas las soluciones.

Definición 4.4. (Estable y Asintóticamente Estable)

- *Decimos que la ecuación* $(\star)$ *es estable si toda solución es acotada para todo* $t \geq 0$.
- *Decimos que* $(\star)$ *es asintóticamente estable si toda solución converge a* 0 *cuando* $t \to \infty$.

Notemos que si una ecuación es asintóticamente estable, entonces es estable ya que si toda solución converge a 0 cuando $t \to \infty$, entonces existe un $C > 0$ talque $|x(t)| \leq C$ para todo $t \geq 0$.

Sea $\Pi(t, 0)$ el propagador cuando $t_0 = 0$, entonces,

$$x(t) = \Pi(t, 0)x_0$$

Notemos que si $x(t)$ es acotado para $t \geq 0$, entonces,

$$\|\Pi(t, 0)\| \leq C$$

para todo $t \geq 0$. Es más, $(\star)$ es estable si y sólo si $\|\Pi(t, 0)\| \leq C$ para todo $t \geq 0$ y, $(\star)$ es asintóticamente estable si y sólo si $\|\Pi(t, 0)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Proposición 4.6. *Sea* $\dot{x} = Ax$ *una ecuación autónoma lineal homogénea. La ecuación es estable si y sólo si los valores propios* α *de* A *tienen* $Re(\alpha) < 0$ *o si* $Re(\alpha) = 0$. *En otras palabras, la multiplicidad algebraica de* α *es igual a la geométrica.*

Proposición 4.7. *Sea* $\dot{x} = Ax$ *una ecuación autónoma lineal homogénea. Es asintóticamente estable si* $Re(\alpha) < 0$ *para todos* α *valor propio de* A.

Proposición 4.8. *Sea* $\dot{x} = Ax$ *una ecuación autónoma lineal homogénea asintóticamene estable. Entonces si,*

$$\mu := \max_{\alpha \ Vp \ de \ A}(Re(\alpha)) < 0$$

Entonces para todo $\lambda \in (0, -\mu)$ *existe una constante* $C \in \mathbb{R}$ *talque,*

$$\|\Pi(t, 0) = e^{tA}\| \leq Ce^{-\lambda t}$$

para todo $t \geq 0$.

Dem. Si $A = VA_JV^{-1}$ con A_J la forma canónica de Jordan de A, luego, $e^{At} = Ve^{A_Jt}V^{-1}$, entonces,

$$\begin{aligned}\|e^{At}\| &\leq \|V\|\|e^{A_jt}\|\|V^{-1}\| \\ &= c\|e^{A_Jt}\|\end{aligned}$$

Si $e^{A_J t} = e^{t(A_J+\lambda)}e^{-t\lambda}$, entonces,

$$\|e^{A_J t}\| = e^{-\lambda t}\|e^{t(A_J+\lambda I)}\|$$

como $\lambda \in (0, -\mu)$ entonces la matriz $A_J + \lambda I$ tienen entradas negativas, luego por la proposición 4.6 se tiene que,

$$\|e^{(A_J+\lambda I)t}\| \leq C$$

Por tanto,

$$\|e^{At}\| \leq C' e^{-\lambda t}$$

■

4.4. Ecuaciones Lineales Autónomos de Orden Mayor

Sea la ecuación,

$$x^{(n)} + c_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + c_1\dot{x} + c_0 x = g(t) \quad (E)$$

Sabemos que es equivalente a un sistema (S),

$$\dot{y} = Ay + \overline{g}(t) \quad (S)$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \overline{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Estuidiaremos dos casos, el homogéneo y el no homogéneo.

- **Caso Homogéneo.** Si $g(t) = 0$, entonces se tiene la ecuación (S) de la forma,

$$\dot{y} = Ay$$

El polinomio característico de A es,

$$\chi_A(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

Donde la multiplicidad de cada vector propio es 1.

Teorema 4.2. *Sea*

$$\chi_A(z) = \prod_{j=1}^{k}(z - \alpha_j)^{m_j}$$

la factorización del polinomio característica sobre $\mathbb{C}$. Entonces el espacio solución de (E) es generado por,

$$x_{j,l}(t) = t^l e^{\alpha_j t}$$

con $0 \leq l \leq m_j - 1$ para $j = 1, \ldots, k$.

Ejemplo 4.2. Sea la ecuación,

$$\ddot{x} + w^2 x = 0$$

con $w > 0$. El polinomio característico es,

$$\chi(z) = z^2 + w^2 = (z - iw)(z + iw)$$

Luego los valores propios son $\pm iw$, por tanto, los vectores del espacio solución son $x_{1,0}, x_{2,0}$ como $m_1 = m_2 = 1$, luego la única opción de l es $l = 0$, y entonces el espacio solución es,

$$\begin{aligned} Gen\{t^0 e^{iwt}, t^0 e^{-wit}\} &= Gen\{\cos(wt) + i\,\mathrm{sen}(wt), \cos(wt) - i\,\mathrm{sen}(wt)\} \\ &= Gen\{\cos(wt), i\,\mathrm{sen}(wt)\} \end{aligned}$$

Si $w = 0$ etonces,

$$\chi(z) = z^2$$

Y luego $m_1 = 2$ y entonces los vectores son $x_{1,0} = t^0 e^{0t}, x_{1,1} = t^1 e^{0t}$, es decir,

$$x(t) \in Gen\{1, t\}$$

Dem. ...

- **Caso No Homogéneo.** Sabemos la solución de la no homogénea es,

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

donde x_h es solución de la homogénea. Si $y_0 = y(0)$ entonces otra forma es por la fórmula de Duhmal,

$$y(t) = \underbrace{\Pi(t,0)y_0}_{y_h} + \underbrace{\int_0^t \Pi(t,s)\overline{g}(s)ds}_{y_p(t)}$$

donde $\Pi(t) = \Pi(t,0) = e^{At}$. Con respecto a la solución particular se cumple,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_0^t \Pi(t,s)\overline{g}(s)ds \\ &= \int_0^t \Pi(t-s,0)\overline{g}(s)ds \\ &= \int_0^t g(s)\Pi_n(t-s,0)ds \end{aligned}$$

donde $\Pi_n(t-s,0)$ es la ultima columna de $\Pi(t-s,0)$. Luego $y=\Pi_n(t)$ resuele la ecuación homogénea $\dot{y}=Ay$ con datos iniciales,

$$y(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Luego,

$$y=\begin{pmatrix}u\\\dot{u}\\\vdots\\u^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

donde u resuelve (E_H) con datos iniciales $u(0)=\dot{u}(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0, u^{(n-1)}(0)=1$, y así,

$$x_p=y_{p,1}(t)=\int_0^t g(s)u(t-s)ds$$

Muy frecuentemente queremos resolver una ecuación no homogénea con $g(t)=p(t)e^{\beta t}$ con $\beta\in\mathbb{C}$. En esta situación es más eficiente adivinar soluciones particualres, se considera el Ansartz $x_p=q(t)e^{\beta t}$ con q polinomio.

Proposición 4.9. *Sea la ecuación (E) no homogénea con $g(t)=p(t)e^{\beta t}$ con $p(t)$ polinomio, entonces existe una solución de la forma $q(t)e^{\beta t}$ donde,*

- $\deg(g)=\deg(p)$ *si β no es valor propio de A .*
- $\deg(q)=\deg(p)+a$ *donde a es la multiplicidad algebraica del valor propio β de A*

Ejemplo 4.3. Sea la ecuación $\ddot{x}-x=te^t$, se tiene que,

$$\chi(z)=z^2-1$$

Luego $\beta=1$ es un valor propio, si $p(t)=t$ entonces existe un polinomio q de grado $\deg(p)+1=2$, es decir,

$$x_p(t)=e^t(at^2+bt+c)$$

de forma conveniente podemos tomar $c=0$.

Veamos algunos ejemplos de que podemos deducir a partir de lo anterior.

Ejemplo 4.4. (El oscilador armónico con amortigüador) Consideremos el siguiente sistema,

Figura

Donde m es la masa del objeto, k es la constante y $b > 0$ es la constane del amortigüador. Sea $x(t)$ el desplazamiento desde el estado de equilibrio, tenemos la ecuación de segundo orden,

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

como la masa no es nula podemos quitarlo de la segunda derivada de x, obteniendo la ecuación.

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Digamos que $\frac{b}{m} = 2\beta$, $\frac{k}{m} = w_0^2$, obteniendo,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = 0$$

Estudiemos esta ecuación, tenemos que el polinomio característico asociado a la matriz de la ecuación equivalente es,

$$\chi(z) = z^2 + 2\beta z + w_0^2$$

Aquí se distinguen distintos casos en base al discriminante $D = \beta^2 - w_0^2$.

- **Caso 1.** Supongamos que $D > 0$ ($\beta > w_0$), en tal caso decimos sobreamortigüador y se tiene que,

  $$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

  donde,

  $$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$$

  vemos que los valores propios son negativos luego $x(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, luego en un gráfico de x sobre t tenemos,

  Figuta.

  Caso 2. Supongamos que $D = 0$, se tieen que $\lambda = -\beta$, es decir, tenemos un valor propio con multiplicidad algebraica 2 y luego,

  $$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 + tc_2) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  En este caso tenemos amortigüamiento crítico, y el gráfico sería,

  Figura.

  Que decrece más rápido.

- **Caso 3.** Supongamos que $D < 0$, en este caso se dice amortigüamiento débil, aquí tenemos que,

  $$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{w_0^2 - \beta^2}$$

Luego,

$$x(t) = c_1 e^{(-\beta + i\sqrt{w_0^2 - \beta^2})t} + c_2 e^{(-\beta - i\sqrt{w_0^2 - \beta^2})t}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Como hemos visto anteriormente, tenemos que,

$$x(t) = \overline{c}_1 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{w_0^2 - \beta^2 t}) + \overline{c}_2 e^{-\beta t} \operatorname{sen}(\sqrt{w_0^2 - \beta^2 t}) \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

con $\overline{c}_1, \overline{c}_2 \in \mathbb{R}$. Gráficamente tendriamos,

Figura

Es decir, la solución va 0 de forma oscilada.

Ejemplo 4.5. (Oscilador armónico forzado)

Figura

De forma análoga al ejemplo anterior obtenemos una ecuación diferencial, solo que en este caso no es homogénea, en particular la ecuación es,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(wt)$$

Tomando β, w_0 de forma similar y tomando $A_0 = \frac{F_0}{m}$ obtenemos la ecuación,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = A_0 \cos(wt)$$

Como es una ecuación no homogénea, la solución puede ser expresada como,

$$x = x_h + x_p$$

donde x_h es la solución de la homogénea y x_p la particular. Para ello usaremos el truco un truc. Sabemos que $e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)$ entonces,

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + w_0^2 y = A_0 e^{iwt}$$

donde $y \in \mathbb{C}$. Notemos que si y_p es solución particular de la ecuación diferencial compleja, entonces $x_p = Re(y_p)$ es solución de la ecuación original ya que,

$$Re(\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + w_0^2 y) = Re(A_0 e^{iwt}) \iff \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = A_0 \cos(wt)$$

Por la proposición 4.9 la solución es de la forma $q(t)e^{iwt}$, si iw no es raíz del polinomio característico, se tiene que, $\deg(g) = \deg(p) = 0$, entonces la solución particular es de la forma Be^{iwt} para algún $B \in \mathbb{C}$. Encontremos tal B, como es solución, entonces,

$$Bi^2 w^2 + B2\beta iw + w_0^2 B = A_0$$

Entonces,

$$B = \frac{A_0}{-w^2 + 2\beta iw + w_0^2} \in \mathbb{C}$$

Por tanto, la solución general es,

$$\begin{aligned} x &= x_p + x_h \\ &= Re(y_p) + x_h \\ &= Re\left(\frac{A_0 e^{iwt}}{w_0^2 - w^2 + 2i\beta w}\right) + x_h \end{aligned}$$

La solución particular se le conoce como parte oscilatoria con la frecuencia w de la fuerza externa x_h es la parte transitoria que además $x_h \to 0$ cuando $t \to \infty$

Figura.

Si w es valor propio/raíz el procedimiento es análogo.

Ejercicio.

1. ¿Para qué w la amplitud de la parte oscilatoria es mayor?
2. ¿Para qué w la velocidad máxida de oscilación es mayor?

Falta algo

4.5. La Teoría General de las Ecuaciones Lineales de Orden Mayor

Sea la ecuación lineal homogénea,

$$x^{(n)} + q_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + q_1(t)\dot{x} + q_0(t)x = 0 \quad (H)$$

con datos iniciales $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$, con $t \in I$. Sabemos que el sistema (H) es equivalente al siguiente sistema lineal homogéno,

$$\dot{y} = A(t)y \quad (E)$$

donde,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -q_0(t) & -q_1(t) & -q_2(t) & \ldots & -q_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Con solución,

$$y(t) = \Pi(t, t_0)y(t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) y_0$$

Notemos también que $\{x_k(t)\}_{k=1}^n$ es una base de la solución (H) si y sólo si,

$$\left\{ y_k(t) = \begin{pmatrix} x_k(t) \\ \dot{x}_k(t) \\ \vdots \\ x_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \right\}_{k=0}^{n}$$

es base de la solución de la ecuación (E).

Sabemos que si tenemos n funciones que resuelven (H) y son L.I sobre $t \in I$, estas generan el espacio de soluciones de (H) por propiedades de espacios. Además, existe una sola ecuación del tipo,

$$x^{(n)} + q_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + q_0(t)x = 0$$

La cual tiene estas funciones como soluciones. ¿Por qué? Sea n funciones L.I sobre $t \in I$ que genera la ecuación, supongamos que hay otra ecuación EDO,

$$x^{(n)} + \overline{q}_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + \overline{q}_0(t)x = 0$$

Que tiene las mismas n soluciones. Sea m el menor índice talque el coeficiente $q_m(t) \neq \overline{q}_m(t)$, restando las dos ecuaciones anteriores se obtiene,

$$(q_m(t) - \overline{q}_m(t))x^{(m)}(t) + \cdots + (q_0(t) - \overline{q}_0(t))x(t) = 0$$

Otra ecuación lineal homogénea. Si $q_m \neq \overline{q}_m$ entonces son distintos en un intervalo $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) =: J \subseteq I$, luego,

$$x^{(m)} + \frac{q_{m-1} + \overline{q}_{m-1}}{q_m - \overline{q}_m} x^{(m-1)}(t) + \cdots = 0$$

Obteniendo otra ecuación lineal homogénea sobre J con m soluciones L.I, pero de antes sabemos que tiene n por lo que la dimensiones del mismo espacios son distintas, siendo contradicción. Por lo tanto la ecuación generada es la misma.

Consideremos el Wronskiano del sistema (H) que se define por,

$$W(x_1, \ldots, x_n) := \det \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \dot{x}_1 & \ldots & \dot{x}_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Por el teorema de Abel-Lioville tenemos que,

$$\dot{W} = Tr(A)W = -q_{n-1}(t)W$$

Entonces o bien $W \neq 0$ para todo $t \in I$ o bien $W \equiv 0$.

Proposición 4.10 *Si $x_1, \ldots, x_n$ son soluciones L.I de (H), entonces la ecuación homogénea está precisamente determinada por,*

$$\frac{W(x_1, \ldots, x_n, x)}{W(x_1, \ldots, x_n)} = 0$$

Dem. Si $W = W(x_1, \ldots, x_n)$ entonces notemos que,

$$\frac{1}{W}\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} & x^{(n)} \end{pmatrix} = x^{(n)} \underbrace{\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{=W} \frac{1}{W}$$
$$+ \overline{q}_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + \overline{q}_0(t)x$$

Obteniendo la ecuación lineal de orden n. Además, $x_1, \ldots, x_n$ son soluciones de esta ecuación y por la unicidad de coeficientes tenemos $\overline{q}_{n-1} = q_{n-1}, \ldots, \overline{q}_0 = q_0$. Probando la proposición. ∎

4.6. Sistemas Lineales Periódicos

Ejemplo 4.6. Consideremos el siguiente PVI,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \text{sen}(t) & 1 \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix} x, \quad x(0) = x_0$$

Notemos que despues de $t = 2\pi$, la matriz vuelve a tener los mismo valores, es decir, la matriz es periódica con periodo $T = 2\pi$. Con respecto a al solución, no necesariamente es periodica, pero solo vamos a estudiar la desviación de la matriz.

Sea la ecuación $\dot{x} = A(t)x$ $(\star)$ con $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ periódica con periodo T, es decir, $A(t + T) = A(t)$, si $x(t)$ es solución de la ecuación con datos iniciales $x(t_0) = x_0$. Consideremos $\overline{x}(t) = x(t + T)$, esta función no necesariamente es la misma solución pero si es solución de la ecuación $(\star)$ con datos iniciales $\overline{x}(t_0 - T) = x(t_0)$. Notemos que el propagador cumple,

$$\Pi(t + T, t_0 + T) = \Pi(t, t_0)$$

Y en efecto, por definición,

$$\begin{aligned} \Pi(t + T, t_0 + T) &= \exp\left(\int_{t_0+T}^{t+T} A(s)ds\right) \\ &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s + T)ds\right) \\ &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right) \\ &= \Pi(t, t_0) \end{aligned}$$

Ahora, si $x(t) = \Pi(t, t_0)x_0$ es la solución de la ecuación $(\star)$ entonces,

$$x(t + T) = \Pi(t + T, t_0)x_0$$

Comparemos $x(t_0) = x_0$ con $x(t_0 + T) = \Pi(t_0 + T, t_0)x_0$, si definemos la matriz de monodromía por,

$$M(t_0) := \Pi(t_0 + T, t_0)$$

Luego vemos que $x(t_0+T) = M(t_0)x_0$, veamos que pasamos si tenemos lT con $l \in \mathbb{Z}$, vemos que,

$$\begin{aligned} x(t_0+lT) &= \Pi(t_0+lT, t_0)x_0 \\ &= \Pi(t_0+lT, t_0+(l-1)T)\dots\Pi(t_0+T, t_0)x_0 \end{aligned}$$

Y si $\Pi(t_0+kT, t_0+(k-1)T) = \Pi(t_0+T, t_0)$ usando un argumento recursivo, se tiene finalmente que,

$$x(t_0+lT) = M(t_0)^l x_0$$

Teorema 4.3. (De Floquet) *El propagador de un sistema lineal homogéneo con periodo T (y coeficientes continuas) se puede expresar como,*

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0)\exp((t-t_0)Q(t_0))$$

donde P es periódico con periodo T entero y $Q(t_0)$ es alguna matriz compleja.

Nota 4.2. La matriz $P(t, t_0)$ no es singular (no valor propio 0) y tiene inversa $P^{-1}(t, t_0)$ el cual también es periódica. En particular,

$$\begin{aligned} \|P(t, t_0)\| &\leq C \\ \|P^{-1}(t, t_0)\| &\leq C \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Nota 4.3. Con respecto a la matriz P se tiene que $P(t_0, t_0)$ y en efecto,

$$\mathbb{I} = \Pi(t_0, t_0) = P(t_0, t_0)\exp(0) = P(t_0, t_0)$$

Dem. Veremos que,

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \Pi(t_0+T, t_0) \\ &= P(t_0+T, t_0)\exp(TQ(t_0)) \\ &= P(t_0, t_0)\exp(TQ(t_0)) \\ &= \exp(TQ(t_0)) \end{aligned}$$

Asumiendo que exista tal Q talque $\exp(TQ(t_0)) = M(t_0)$. Definimos

$$P(t, t_0) := \Pi(t, t_0)\exp(-Q(t_0)(t-t_0))$$

Probemos que es periódica de periodo T. Entonces,

$$\begin{aligned} P(t+T, t_0) &= \Pi(t+T, t_0)\exp(-Q(t_0)(t+T)-t_0) \\ &= \Pi(t+T, t_0)\exp(-Q(t_0)(t-t_0))\exp(-Q(t_0)T) \\ &= \Pi(t+T, t_0)\exp(-Q(t_0)(t-t_0))M^{-1}(t_0) \\ &= \Pi(t+T, t_0+T)\underbrace{M(t_0+T, t_0)}_{M(t_0)}M^{-1}(t_0)\exp(-Q(t_0)(t-t_0)) \\ &= \Pi(t+T, t_0+T)\exp(-Q(t_0)(t-t_0)) \\ &= \Pi(t, t_0)\exp(-Q(t_0)(t-t_0)) \\ &= P(t, t_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto P es periódica. ■

La demostración anterior fue tomando que existe tal Q, probemos ahora que existe.

Definición 4.5. (Logaritmo) *La matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es un logaritmo de la matriz $A \in \mathbb{C}$ si,*

$$e^B = A$$

Nota 4.4. Si B es un logaritmo de A entonces $B + 2\pi i\mathbb{I}$ también es un logaritmo de A ya que $B, 2\pi i\mathbb{I}$ conmutan y también se cumple que,

$$e^{2\pi i\mathbb{I}} = e^{2\pi i}\mathbb{I} = \mathbb{I}$$

Por lo que,

$$e^{B+2\pi i\mathbb{I}} = e^B = A$$

Nota 4.5. Para que la matriz A tenga un logaritmo, basta que A sea invertible.

Lema 4.1. *Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es invertible, entonces A tiene un logaritmo.*

Dem. Vamos a usar a simplificar el problema a problemas más sencillos.

- **Paso 1.) Primera Reducción.** Es suficiente probar que la forma canónica de Jordan no singular tienen logaritmo. Si se cumple esto entonces,

  $$A = VA_JV^{-1}$$

  Si A_J tiene logaritmo, entonces existe B_J talque $e^{B_J} = A_J$ y luego,

  $$e^{VB_JV^{-1}} = Ve^{B_J}V^{-1} = A$$

  Siendo VB_JBV^{-1} el logaritmo de A.

- **Paso 2.) Segunda Reducción.** Para probar que la forma canónica de Jordan tiene logaritmo basta probar que el bloque de Jordan,

  $$J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \neq 0$$

  tiene logaritmo. Y en efecto, ya que si A_J está conformado por los bloques $J_1, \dots, J_n$ con logaritmos $B_{J_1}, \dots, B_{J_n}$, entonces,

  $$B_J = \begin{pmatrix} B_{J_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_{J_n} \end{pmatrix}$$

  Es talque $e^{B_J} = A_J$.

- **Paso 3.) Encontrar el Logaritmo.** Si $J = \alpha\mathbb{I} + N = \alpha(\mathbb{I} + \overline{N})$ con N una matriz nilpotente y donde $\overline{N} = \frac{N}{\alpha}$ (Recordemos que la matriz es no singular, luego $\alpha \neq 0$). Es suficiente probar que $\mathbb{I} + \overline{N}$ tiene logaritmo, ya que entonces,

$$e^{B+\log(\alpha\mathbb{I})} = e^B e^{\log(\alpha\mathbb{I})} = e^B \alpha = J$$

donde B es el logaritmo de $\mathbb{I} + \overline{N}$. Notemos que $\log(\alpha\mathbb{I})$ está bien definido ya que po la serie tenemos que,

$$\log(\mathbb{I}) = 0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Luego $e^{\log(\mathbb{I})} = \mathbb{I}$.

- **Paso 4.) Definir bien el logaritmo.** Se tiene que,

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}$$

para $|z| < 1$. Pero si $\overline{N}$ es nilpotente, se tiene que la serie converge y luego,

$$\begin{aligned}\log(\mathbb{I} + \overline{N}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\overline{N})^k}{k} \\ &= \overline{N} - \frac{\overline{N}^2}{2} + \cdots \pm \frac{\overline{N}^l}{l}\end{aligned}$$

es una suma finita y por tanto,

$$e^{\log(\mathbb{I}+\overline{N})} = \mathbb{I} + \overline{N}$$

Para concluir el resultado recordemos que una matriz es invertible si y sólo si no tiene valor propio A. Por tanto se puede aplicar los pasos y concluir que A tiene un logaritmo. ■

Nota 4.5. Por la demostración anterior observamos que el logaritmo depende de los valores propios. Es más, una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene logaritmo real solamente cuando los valores propios de A son reales y positivos.

Ejemplo 4.7. Supongamos que A tiene solo valor propios $\alpha = -1$, entonce si está definido en $\mathbb{C} \setminus A$ que contiene a 1 y no al 0, entonces,

$$\log(\alpha) = \log(e^{\pi i}) = \log(1) + \pi i = \pi i$$

Luego la matriz es compleja.

Ahora si $\Pi(t, t_0)$ es periódico entonces,

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0) \exp((t - t_0) Q(t_0))$$

por el teorema de Floquet, para determinar $Q(t_0)$ basta ver si $M(t_0) = \exp(TQ(t_0))$ que es invertible, entonces,

$$Q(t_0) = \frac{1}{T}\log(M(t_0))$$

Que se puede calcular debido a que $M(t_0) = \Pi(t_0 + T, t_0)$.

Nota 4.6. Puede pasar que,

$$\underbrace{\Pi(t,t_0)}_{\text{Real}} = \underbrace{P(t,t_0)}_{\text{Complejo}} \cdot \underbrace{\exp(Q(t_0)(t-t_0))}_{\text{Complejo}}$$

Donde $Q(t_0) = \frac{1}{T}\log(M(t_0))$.

Si vemos el sistema periódico $\overline{T} = 2T$, entonces,

$$\overline{M}(t_0) = \Pi(t_0 + 2T, t_0) = M(t_0)^2$$

Es decir, valores propios positivos. Entonces,

$$\Pi(t,t_0) = \overline{P}(t,t_0)\exp(\overline{Q}(t_0)(t-t_0))$$

donde $\overline{Q}(t_0) = \frac{1}{2T}\log(M(t_0)^2)$ y $\overline{P}(t,t_0)$ es periódico con periódo $2T$.

Teorema 4.4. *El sistema periódico* $(\star)$ *es,*

i) asintóticamente estable si y sólo si $Q(t_0)$ tiene valores propios γ con parte real negativa. ($Re(\gamma) < 0$).

ii) Es estable si y sólo si $Q(t_0)$ tiene valores propios γ no positivos ($Re(\gamma) \leq 0$) y si tiene parte real nulo entonces tienen multiplicidad algebraica igual a la geométrica.

Observación 4.5. Notemos que,

$$e^{TQ(t_0)} = M(t_0) \approx e^{TQ(t_1)} = M(t_1)$$

para otro valor t_1 cualquiera. Y esto ocurre ya que,

$$\begin{aligned}
M(t_1) &= \Pi(t_1 + T, t_1)\\
&= \Pi(t_1 + T, t_0 + T)\Pi(t_0 + T, t_0)\Pi(t_0, t_1)\\
&= \Pi(t_1, t_0)M(t_0)\Pi(t_0, t_1)\\
&= \Pi(t_1, t_0)M(t_0)M(t, t_0)^{-1}
\end{aligned}$$

Definición 4.6. *Los valores propios φ_j de $M(t_0)$ se llaman multiplicadores de Floquet. Los valores propios γ_j de $Q(t_0)$ se llaman exponentes de Floquet y además se cumple,*

$$\varphi_j = \exp(\gamma_j T)$$

Esto último es cierto ya que $M(t_0) = \exp(TQ(t_0))$ con T el periodo de la ecuación. A partir de aquí podemos extender el teorema 4.4. La ecuación $(\star)$ es

i) Asintóticament estable si y sólo si $Re(\gamma_j) < 0$ si y sólo si $|\varphi_j| < 1$.

1. Estable si y sólo si $Re(\gamma_j) < 0$ y i $Re(\gamma_j) = 0$ entonces m.a=m.g si y sólo si $|\varphi| \leq 1$ y si $|\varphi| = 1$ entonces m.a=m.g

Ejemplo 4.8. El sistema ($\star$) tiene solución no trivial periódica con T si $M(t_0)$ tiene un valor propio φ_j igual a 1, esto significa que $M(t_0)x_0 = x_0$.

Ejemplo 4.9. Consideremos la ecuación,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) & 1 \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix} x$$

Si la ecuación es periódica de periodo $T = 2\pi$, entonces podemos aplicar el teorema de Floquet, en particular,

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0) \exp(Q(t_0)(t - t_0))$$

para algún P con periodo T y con $Q(t_0) = \frac{\log(M(t_0))}{2\pi}$. Por definición,

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \Pi(t_0 + 2\pi, t_0) \\ &= \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+2\pi} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) & 1 \\ 0 & \cos(t) \end{pmatrix} ds\right) \\ &= \exp\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$Q(t_0) = \frac{1}{2\pi} 2\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que los valores propios de $Q(t_0)$ es 0 con multiplicidad algebraica 2. Pero la multiplicidad geométrica es 1. Luego no es ni estable ni asintóticamente estable.

4.7. Sistemas Lineales Perturbados

Sea la ecuación $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ donde $\|B(t)\| \ll \|A(t)\|$, esta ecuación lo trataremos como una perturbación de la ecuación $\dot{x} = A(t)x$.

Ejemplo 4.10. Sea el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = (-a + b(t))x, & (t, x) \in \mathbb{R}^{1+1} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde la ecuación diferencial es pertubación de $\dot{x} = -ax$. La solución como sabemos es,

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{P}(t, 0)x_0 \\ &= \exp\left(\int_0^t (-a + b(s)ds)\right) x_0 \\ &= \exp\left(-at + \int_0^t b(s)ds\right) x_0 \end{aligned}$$

Si tomamos $b(t) \equiv 0$ entonces tenemos la ecuación no pertubada con solución $x(t) = x_0 e^{-at}$ que además,

$$x(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Siempre y cuando $a > 0$. Supongamos ahora que $|b(t)| \leq b_0$, entonces,

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp((b_0 - a)t)$$

Si $b_0 > a$ no obtenemos mucha información, si $b_0 = a$ entonces $x(t)$ es acotado y si $b_0 < a$ entonces,

$$|x(t)| \leq |x_0| e^{(b_0-a)t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

En particular, esto se cumple solamente cuando $|b(t)| \leq b_0 < a$ para todo $t \geq t_0$ para t_0 suficientemente grande. Por lo que no necesariamente debe estar acotado en todo $t \in \mathbb{R}$.

Terminar

Sin embargo, si,

$$\int_0^\infty |b(s)| ds < \infty$$

Entonces la solución va a ser acotada para todo $t \geq 0$ ya que entonces $|b(t)| < a$ para todo $t \geq t_0$ con t_0 suficientemente grande, y el sistema pertubado sigue siendo estable.

Vamos a dar resultados para saber cuando un sistema perturbado es estable o asintoticamente estable. Consideremos la ecuación,

$$\dot{x} = (A(t) + B(t))x \quad (\star)$$

Notación.

- $\Pi_A(t,s)$ es el propagador del sistema no perturbado $\dot{x} = A(t)x$.
- $\Pi_{A+B}(t,s)$ es el propagador del sistema perturbado $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$.

I Estabilidad asintótica.

Teorema 4.5. (Estabilidad Asintótica I) *Consideremos la ecuación $(\star)$. Sea $\alpha > 0$, si,*

$$\|\Pi_A(t,s)\| \leq Ce^{-\alpha(t-s)}$$

para todo $t \geq s \geq 0$ y que,

$$\|B(t)\| \leq b_0$$

para todo $t \geq t_0$ para algún t_0, entonces si $b_0 C < \alpha$ se tiene que,

$$\|\Pi_{A+B}(t,s)\| \leq De^{-(\alpha-b_0C)(t-s)}$$

para todo $t \geq s \geq 0$ para algún D.

Dem. Notemos que es suficiente con demostrar la cota para $t \geq s \geq t_0$, y notemos que,

$$\|\Pi_{A+B}(t,s)\| \leq \overline{C}t_0$$

para todo $t, s \in [0, t_0]$. Sea la ecuación $\dot{x} = A(t)x + \underbrace{B(t)x}_{=:y(t)}$, popr Durhame se tiene que,

$$x(t) = \Pi_A(t,s)x(s) + \int_s^t \Pi_A(t,r)B(r)x(r)dr$$

y entonces,

$$|x(t)| \leq \|\Pi_A(t,s)\| \cdot |x(s)| + \int_s^t \|\Pi_A(t,r)\| \cdot \|B(r)\| \cdot |x(r)|dr$$

tomando $t \geq s \geq t_0$ se tiene que,

$$|x(t)| \leq Ce^{\alpha(t-s)}|x(s)| + \int_s^t Ce^{-\alpha(t-r)}b_0|x(r)|dr$$

Multiplicando por $e^{\alpha(t-s)}$ se tiene que,

$$e^{\alpha(t-s)}|x(t)| \leq C|x(s)| + C\int_s^t e^{\alpha(r-s)}|x(r)|b_0dr$$

Por Grönwal se obtiene que,

$$|x(t)| \leq C|x(s)|e^{(b_0C-\alpha)(t-s)}$$

para todo $t \geq s \geq t_0$. ■

Ejemplo 4.10. Sea la ecuación pertubada,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\alpha & \cos(t) \\ \operatorname{sen}(t) & -\alpha \end{pmatrix} x = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}}_{=:A(t)} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cos(t) \\ \operatorname{sen}(t) & 0 \end{pmatrix}}_{=:B(t)} x$$

En particular, es periódica con periodo $T = 2\pi$, notemos que,

$$\Pi_A(t,s) = e^{-\alpha(t-s)}\mathbb{I}$$

entonces,

$$\|\Pi_A(t,s)\| \leq e^{-\alpha(t-s)}$$

para todo $t \geq s \geq 0$, además,

$$\|B(t)\| \leq 1$$

Entonces si $1 \cdot 1 < \alpha$, entonces el sistema es asintónticamente estable y además,

$$\|\Pi_{A+B}(t,s)\| \leq De^{-(\alpha-1)(t-s)}$$

Corolario 4.1. *Sea* $\dot{x} = Ax + B(t)x$ *con* A *constante una paerturbación de* $\dot{x} = Ax$*. Sea* α_j *los valores propios de* A*. Supongamos que* $\alpha_0 = \max\{Re(\alpha_j)\} < 0$ *y que,*

$$\|B(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Entonces el sistema pertubado es asintóticamente estable y para todo $\alpha < |\alpha_0|$*, existe* t_0 *y existe una constante* D *talque,*

$$\|\Pi_{A+B}(t,s)\| \leq De^{-\alpha(t-s)}$$

para todo $t \geq s \geq t_0$*.*

Dem. Terminar

Teorema 4.6. (Estabilidad Asintótica II) *Suponga que* $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ *es una pertubación del sistema periódico* $\dot{x} = A(t)x$ *con periódo* T*. Sean* $\{\gamma_k\}$ *los exponenetes de Floquet para el sistema periódico. Y suponga que* $\gamma_0 := \max\{Re(\gamma_k)\} < 0$*. Asumamos que,*

$$\|B(t)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Entonces la ecuación es asintóticamente estable y para todo $0 < \gamma < |\gamma_0|$ *existe un* t_0 *talque,*

$$\|\Pi_{A+B}(t,s)\| \leq Ce^{-\gamma(t-s)}$$

para todo $t \geq s \geq t_0$*, para algún* $C > 0$*.*

Dem Terminar.

II Estabilidad.

Teorema 4.7. (Estabilidad I) *Asumiendo que* $\|\Pi_A(t,s)\| \leq C$ *para todo* $t \geq s \geq 0$ *y que,*

$$\int_0^\infty \|B(s)\|ds < \infty$$

entonces,

$$\|\Pi_{A+B}(t,s)\| \leq D$$

para todo $t \geq s \geq 0$

Dem...

Teorema 4.8. (Caso sistema no pertubado es periódico) *Sea la ecuación pertubada,*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)x$$

donde $A(t)$ es periódico. Si,

$$\int_0^\infty \|B(t)\| < \infty$$

Como $A(t)$ es periódico se puede descomponer en,

$$\Pi_A(t,s) = P(t,s)\exp(Q(s)(t-s))$$

Si,

$$\|\exp(Q(s)(t-s))\| \leq C$$

para todo $t \geq s \geq 0$, entonces, el sistema pertubado es estable.

Nota 4.6. Notemos que en un sistema perturbado con sistema no perturbado periódico, basta que la parte no periódica sea acotada.

4.8. Perturbación No Lineal

Una perturbación no lineal es una ecuación de la forma,

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$$

Digamos que $|f(t,x)| \leq b_0(x)$ para todo $x \in B_\delta(0)$ y $\Pi_A(t,s) \leq Ce^{-\alpha(t-s)}$ para todo $t \geq s \geq 0$. Luego podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 4.9. *La solución $x(t)$ con datos iniciales $(0, x_0)$ donde $|x_0| < \frac{\delta}{C}$ satisfacen,*

$$|x(t)| \leq C|x_0|e^{-(\alpha - b_0C)t}$$

para todo $t \geq 0$ cuando $a > b_0C$.

5. Problemas de Valor Frontera

Vamos a estudiar otros tipos de problemas.

Motivación. Los problemas de valor frontera surgen de forma natural en modelos de fenómenos físicos.

Ejemplo 5.1. (Vibraciones de cuerda) Consideremos la siguiente figura,

Figura.

Podemos ver que $x \in [0,1]$ es donde se posiciona el objeto y t es el tiempo que determinar donde está el objeto en el eje vertical. De forma más formal, sea $u(t,x)$ el desplazamiento del punto sobre x en el momento t. Se genera un sistema con una ecuación diferencial, con condiciones iniciales y una condición de frontera,

$$\begin{array}{rl} \text{Ecuación de onda:} & \\ \text{Condiciones Iniciales:} & \\ \text{Condición de Frontera:} & \end{array} \begin{cases} \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), & t > 0,\ x \in [0,1] \\ u(0,x) = u(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v(x), & x \in [0,1] \\ u(t,0) = 0 = u(t,1), & t > 0 \end{cases}$$

Dond $C \neq 0, u(x), v(x)$ funciones continuas en $[0,1]$. Esto se le llama **Problema de Valor Inicial-Frontera** (PVIF).

Observación 5.1. Notemos que no estamos trabajando con $u(t)$ con t el tiempo, sino que estamos trabajando con $u(t,x)$ donde t es el tiempo y x.

¿Cómo resolvemos este tipos de problemas de VI/VF? Vamos a separar variables, es decir, queremos soluciones de la forma $u(t,x) = w(t)y(x)$, este métododo se le conoce como **Serapa-ración de variables**. Entonces, si $u(t,x) = w(t)y(x)$ se tiene que,

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u \iff \frac{1}{C^2}\ddot{w}(t)y(x) = w(t)\frac{d^2}{dx^2}y$$

Supongamos que,

$$\frac{1}{C^2}\frac{\ddot{w}}{w(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = -\lambda \in \mathbb{C},\ \text{Constante}$$

Notación. Vamos a denotar la derivada sobre t como siempre lo hemos hecho, con un punto encima de la función, y cuando la derivada es sobre otra variable usaremos $'$.

A partir de la constante $-\lambda$ obtenemos dos ecuaciones. Una asociada a $w(t)$,

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + \lambda C^2 w(t) = 0 \end{cases}$$

y la otra asociada a $y(x)$ que es un problema de valor de frontera (PVF),

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, \;\; x \in [0,1] \\ y(0) = 0 = y(1) \end{cases}$$

Veremos que la ecuación se satisface para $y \neq 0$ para la sucesión de constantes $\{\lambda_n : \lambda_n = n^2\pi^2\}_{n\in\mathbb{N}}$. Determinemos la soluciones del PVF, notemos que el polinomio característico asociado es,

$$\chi(z) = z^2 + \lambda$$

Consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$, resolveremos el PVF el cual depende de si λ es positivo, neutro o negativo.

- **Caso $\lambda = 0$.** Se tiene PVF,

$$\begin{cases} -y'' = 0 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

  Luego la solución general es $y(x) = ax + b$, luego satisface la CF si y sólo si $a = b = 0$. Por lo que hay sola una solución trivial.

- **Caso $\lambda < 0$.** Se tiene quen $\chi(z) = z^2 - \sqrt{|\lambda|} = (z - \sqrt{|\lambda|})(z + \sqrt{|\lambda|})$, es decir, la matriz asociada a la ecuación tiene dos valores propios distintos, luego la solución general es,

$$y(x) = ae^{\sqrt{|\lambda|}x} + be^{-\sqrt{|\lambda|}x}$$

  Si $y(0) = 0$ entonces $b = -a$ y si $y(1) = 0$ entonces $ae^{\sqrt{|\lambda|}} - ae^{-\sqrt{|\lambda|}} = 0$, por lo que $a = b = 0$. Por lo tanto obtenemos nuevamente que la única solución es la trivial.

- **Caso $\lambda > 0$.** Se tiene que $\chi(z) = z^2+\lambda = (z-i\sqrt{\lambda})(z+i\sqrt{\lambda})$, es decir, la matriz asociada a la ecuación tiene dos valores propios distintos complejos simples, luego la solución general está dada por,

$$\begin{aligned} y(x) &= ae^{i\sqrt{\lambda}x} + be^{-i\sqrt{\lambda}x} \\ &= A\cos(\sqrt{\lambda}x)x + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) \end{aligned}$$

  con $A, B \in \mathbb{C}$. Si $y(0) = 0$ entonces $a = 0$ y si $y(1) = 0$ entonces $b\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}) = 0$. Por lo tanto o bien $b = 0$ e $y(x)$ es la solución trivial o bien $b \neq 0$ y entonces $\lambda = n^2\pi^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, la ecuación tiene solución trivial si $\lambda \neq n^2\pi^2$. Consideremos $\lambda = n^2\pi^2$ con $n \in \mathbb{N}$, luego podemos reemplazar en la primera ecuación obteniendo,

$$-\frac{1}{C^2}\ddot{w} = \lambda w = n^2\pi^2 w$$

con $n \geq 1$, con polinomio característico,

$$\overline{\chi}(z) = z^2 + C^2 n^2 \pi^2$$

Por tanto, los valores propios son,

$$z = \pm i C n \pi$$

Luego la solución general de $w(t)$ es,

$$w(t) = c_1 \cos(Cn\pi t) + c_2 \operatorname{sen}(Cn\pi t)$$

Y por tanto, la solución correspondiente de la ecuación de ondas asociada a $n \in \mathbb{N}$ es,

$$u_n(t,x) = (c_1 \cos(Cn\pi t) + c_2 \operatorname{sen}(Cn\pi t)) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

esta solución es el nodo de vibración con frecuencia $\omega_n = Cn\pi$.

Hasta ahora hemos podido encontrar una solución que satisface las condiciones de frontera, pero nos falta las condiciones iniciales. Es decir, queremos $u(t,x)$ talque,

$$u(0,x) = u(x),\ \partial_t u(0,x) = v(x)$$

Por el **Principio de Superposición**, a partir de una ecuacion lineal podemos construir la siguiente solución,

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1n} \cos(Cn\pi t) + c_{2n} \operatorname{sen}(Cn\pi t)) \operatorname{sen}(n\pi x) \quad (\star)$$

Veamos si está bien definido, es decir, queremos ver que converge la serie y si converge ver que converge a una función $u(t,x)$ solución del PVIF.

Lema 5.1. *Si tenemos*

$$\sum_n n^2 |c_{1n}| < \infty, \quad \sum_n n^2 |c_{2n}| < \infty$$

Entonces $(\star)$ *define una función* $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ *el cual satisface la ecuación de ondas.*

Dem. Definimos,

$$u_N(t,x) = \sum_{n=1}^{N} (c_{1n} \cos(Cn\pi t) + c_{2n} \operatorname{sen}(Cn\pi t)) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Luego,

$$|u_N(t,x)| \leq \sum_{n=1}^{N} |c_{1n}| + |c_{2n}|$$

Derivando u_N sobre x obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial x}u_N(t,x) = \sum_{n=1}^{N}(c_{1n}\cos(Cn\pi t) + c_{2n}\operatorname{sen}(Cn\pi t))n\pi\cos(n\pi x)$$

Luego,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}u_N(t,x)\right| \leq \sum_{k=1}^{N}\pi n(|c_{1n}| + |c_{2n}|)$$

De forma análoga derivamos por segunda vez y llegamos a que,

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_N\right| \leq \sum_{k=1}^{N}(n\pi)^2(|c_{1n}| + |c_{2n}|) < \infty$$

Por hipótesis, u_N converge a una función u, $\partial_x u_N$ converge a una función $\partial_x u$ y $\partial^2 u_N$ converge a la función $\partial_x^2 u$. ■

Por tanto $u(t,x)$ es solución de la ecuación de onda y bjo las condiciones del lema tenemos,

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n}\operatorname{sen}(n\pi x) = u(x)$$
$$\partial_t u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}(Cn\pi)\operatorname{sen}(n\pi x) =: v(x)$$

Estas series son de Fourier. De esta forma encontramos una solución ala ecuación de onda que es de la forma,

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(c_{1n}\cos(Cn\pi t) + c_{2n}\operatorname{sen}(Cn\pi t))\operatorname{sen}(n\pi x)$$

Consideremos condiciones muy débiles, funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tales que $f(0) = f(1) = 0$ y que puede expresar en series,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(n\pi x) \quad (\star)$$

Además, $\{\operatorname{sen}(n\pi x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal respecto al producto interno,

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

donde f, g son funciones escalares. Veamos que en efecto es ortogonal, notemos que,

$$\langle \operatorname{sen}(n\pi x), \operatorname{sen}(m\pi x)\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1/2, & m = n \end{cases}$$

Siendo ortogonales. Ahora, si $(\star)$ converge uniformemente, entonces,

$$\begin{aligned}\langle f, \operatorname{sen}(m\pi x)\rangle &= \int \left(\sum f_n \operatorname{sen}(n\pi x)\right) \operatorname{sen} m\pi x \\ &= \sum f_n \int \operatorname{sen}(n\pi x)\operatorname{sen}(m\pi x) \\ &= \sum f_n \langle \operatorname{sen}(n\pi x), \operatorname{sen}(m\pi x)\rangle \\ &= f_m \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Siempre y cuando $\sum f_n \operatorname{sen}(n\pi x)$ converge uniformemente a f integrable.

Volvamos con u, v como definimos antes, notemos que,

$$\begin{aligned}u(0,x) = u(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{1n} \operatorname{sen}(n\pi x) \\ v(0,x) = v(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} C n\pi \operatorname{sen}(n\pi x)\end{aligned}$$

Veamos como obtenemos c_{1n} y c_{2n}. Por lo anterior se tiene que,

$$\begin{aligned}u_m :&= \int u(x)\operatorname{sen}(m\pi x)dx = \frac{1}{2}c_{1m} \\ v_m :&= \int v(x)\operatorname{sen}(m\pi x)dx = \frac{1}{2}c_{1m}C_{2m}Cm\pi\end{aligned}$$

Luego, $c_{1m} = 2u_m, c_{2m} = \frac{2}{C\pi}\frac{1}{m}v_m$. Según el lema, para que $(\star)$ sea una solución, es suficiente que,

$$\begin{aligned}\sum n^2|c_{1n}|, \sum n^2|c_{2n}| < \infty &\iff \sum n^2|2u_n|, \sum n^2\left|\frac{2}{C\pi}\frac{1}{n}v_n\right| < \infty \\ &\iff \sum n^2|u_n|, \sum n^2|v_n| < \infty \ \ (+)\end{aligned}$$

Ejemplo 5.2. $(+)$ se cumple si $u \in C^3([0,1])$ con $u(0) = u(1) = 0, u''(0) = u''(1) = 0$ y $v \in C^2([0,1])$ con $v(0) = v(1) = 0$.

Como principal enfoque, vamos a estudiar los problemas de Sturm-Liouville que al estudiar PVIF se generan estos problemas. Consideremos el operador lineal Sturm-Liouville,

$$(Ly)(x) : \frac{1}{r(x)}\left(-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right)y(x)$$

donde $r(x), p(x) > 0$ en $x \in [a,b]$. Vamos a estudiar problemas de la forma,

$$Ly = \lambda y$$

con λ alguna constante y sujeta a la condiciones de frontera,

$$\cos(\alpha)y(a) - \operatorname{sen}(\alpha)p(a)y'(a) = 0$$
$$\cos(\beta)y(b) - \operatorname{sen}(\beta)p(b)y'(b) = 0$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dicho de otra forma nos interesa el estudio de valores propios y de funciones propias.

Observación 5.2. Tomando $p(x) = r(x) = 1, q(x) = 0$ llegamos al problema,

$$Ly = \lambda y \iff y'' + \lambda y = 0$$

Que es el problema que estudiamos anteriormente.

Con respecto a este problema de valores propios, queremos soluciones no triviales y veremos que,

i) El problema tiene una cantidad contable/numerable de valores propios λ con funciones propias u_n para el espacio de funciones que cumple las CF

ii) Las funciones propias $\{u_n\}$ forman una base ortogonal.

5.1. Espacios de Hilbert y Operadores Lineales

Definición 5.1. (Producto Interno) *Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto interno es un 2-forma,*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$$

el cual satisface,

i) ***Linealidad en la primera entrada.*** *Para $f_1, f_2, g \in H$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ se tiene,*

$$\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \alpha_1 \langle f, g \rangle + \alpha_2 \langle f_2, g \rangle$$

ii) ***Simetría con la conjugada.*** *Para $f, g \in H$ se tiene,*

$$\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

iii) ***Positividad.*** *Para $f \in H$ se tiene que,*

$$\langle f, f \rangle \geq 0$$

Y,

$$\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$$

Observación 5.3. De la linealidad de la primera entrada se deduce una pseudo-lineliadad en la segunda, ya que,

$$\begin{aligned}\langle f, \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2\rangle &= \overline{\langle \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, f\rangle} \\ &= \overline{\alpha_1}\langle f, g_1\rangle + \overline{\alpha_2}\langle f, g_2\rangle\end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Si $H = \mathbb{C}^n$, sea la 2-forma,

$$\langle f, g\rangle := \sum_{k=1}^{n} f_k \overline{g}_k$$

donde,

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Veamos que es producto interno de H.

i) Sean $f_1, f_2, g \in H$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, luego,

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g\rangle &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 f_{1k} + \alpha_2 f_{2k})\overline{g}_k \\ &= \alpha_1 \sum_{k=1}^{n} f_{1k}\overline{g}_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^{n} f_{2k}\overline{g}_k \\ &= \alpha_1\langle f_1, g\rangle + \alpha_2\langle f_2, g\rangle\end{aligned}$$

ii) Sean $f, g \in H$, entonces,

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \sum_{k=1}^{n} f_k\overline{g}_k \\ &= \overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{f}_k g_k} \\ &= \overline{\langle f, g\rangle}\end{aligned}$$

iii) Sea $f \in H$ entonces,

$$\begin{aligned}\langle f, f\rangle &= \sum_{k=1}^{n} f_k\overline{f}_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

Y si $\langle f, f\rangle = 0$ si y sólo si $f = 0$.

Luego $\langle f, g\rangle$ es producto interno.

Teormea 5.1. *Sea H un espacio vectorial con producto interno $\langle f, g\rangle$ con $f, g \in H$. Entonces la función,*

$$\begin{aligned}\|f\| :&H \to \mathbb{R}\\ \|f\| :&= \langle f, f\rangle^{1/2}\end{aligned}$$

es una norma en H.

Nota 5.1. Una norma es una función,

$$\|\cdot\| : H \to \mathbb{K}$$

talque,

i) **No negativa.** Para todo $f \in H$ se tiene que,

$$\|f\| \geq 0$$

Y $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$.

ii) Para todo $c \in \mathbb{K}$ y $f \in H$ se tiene que,

$$\|cf\| = |c|\|f\|$$

iii) **Desigualdad Triangular.** Para todo $f, g \in H$ se tiene que,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Dem. Debemos probar los tres axiomas de norma.

i) **No negativa.** Sea $f \in H$ entonces por definición es no negativa y,

$$\|f\| = 0 \Longleftrightarrow \langle f, f\rangle = 0 \Longleftrightarrow f = 0$$

ii) Sea $c \in \mathbb{C}$ y $f \in H$, luego,

$$\begin{aligned}\|cf\| &= \langle cf, cf\rangle^{1/2}\\ &= \sqrt{c}\langle f, cf\rangle^{1/2}\\ &= \sqrt{c}\left(\overline{\langle cf, f\rangle}\right)^{1/2}\\ &= \sqrt{c}\left(\overline{\sqrt{c}}\right)\langle f, f\rangle^{1/2}\\ &= |c|\|f\|\end{aligned}$$

Para probar la desigualdad triangular debemos probar otro resultado.

Lema 5.2. (Cauchy-Schwarz) *Para $f, g \in H$ se cumple que,*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$$

Dem. Si $g = 0$ estamos listo. Supongamos que $g \neq 0$, podemos asumir que $\|g\| = \perp$, podemos escribir,

$$f = \langle f, g\rangle g + f^{\perp}$$

Si $\langle f^{\perp}, g\rangle$ entonces,

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \|\langle f, g\rangle g\|^2 + \|f^{\perp}\|^2 \\ &= |\langle f, g\rangle|^2 + \|f^{\perp}\|^2 \geq |\langle f, g\rangle|^2\end{aligned}$$

Luego,

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\|$$

Para concluir el resultado general basta ver que si $\|g\| = C > 0$ entonces se cumple,

$$\frac{1}{|C|}|\langle f, g\rangle| = |\langle f, g/C\rangle| \leq \|f\|\|g/C\| = \|f\|\|g\|\frac{1}{|C|}$$

Probando el lema ■

Para concluir el teorema basta notar que,

$$\begin{aligned}\|f + g\|^2 &= \|f\|^2 + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \|g\|^2 \\ &\leq (\|f\| + \|g\|)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Probando que es norma $\|\cdot\|$ es una norma. ■

Definición 5.2. *Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno y norma $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$. Decimos que H es un espacio de Hilbert si es completo con respecto la norma.*

Nota 5.2. Recordemos que un espacio es completo cuando todas las sucesiones de Cauchy convergen en el espacio.

Ejemplo 5.3. Si tomamos $H = \mathbb{C}^n$ con el producto interno estándar, entonces tenemos un espacio de Hilbert. Esto se debe a que $\mathbb{C}$ es completo y luego esto induce completitud a H.

Ejemplo 5.4. Sea

$$H = L^2([a, b], \mathbb{C}) := \left\{f : [a, b] \to \mathbb{C} \text{ (Lebesgue medibles)} : \int_{[a,b]} |f|^2 dx < \infty\right\}$$

es un espacio de Hilbert bajo el producto interno,

$$\langle f, g \rangle :) \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

Ejmplo 5.5. Sea

$$H = l^2(\mathbb{C}) := \left\{ f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : f_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 < \infty \right\}$$

es un espacio de Hilbert bajo la norma,

$$\langle f, g \rangle = \sum_n f_n \overline{g}_n$$

5.2. Ortogonalidad

Definición 5.2. *Sea H un espacio de producto interno (por ejemplo, un espacio de Hilbert), decimos que, $f, g \in H$ son ortogonales si y solo si $\langle f, g \rangle = 0$, en tal caso denotaremos $f \perp g$. Y diremos que un conjunto contable $\{u_k\}_k$ es ortonormal si,*

$$\langle u_k, u_j \rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

Lema 5.2. *Sea $\{u_k\}_{k=1}^n$ un conjunto ortonormal. entonces todo elemento $f \in H$ se puede expresar como,*

$$f = f_{\parallel} + f_{\perp}$$

donde $f_{\parallel} := \sum_{k=1}^n \langle f, u_k \rangle u_k$ y $f_{\perp} \perp u_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$, (luego $f_{\parallel} \perp f_{\perp}$). En particular,

$$\|f\|^2 = \|f_{\parallel}\|^2 + \|f_{\perp}\|^2$$

Además, para todo $f' \in Gen(\{u_k\})$ se tiene que,

$$\|f_{\perp}\| \leq \|f - f'\|$$

donde la igualdad se da si y sólo si $f = f_{\parallel}$

Dem. Si $f' = \sum \alpha_k' u_k$, entonces,

$$f - \overline{f} = f_{\perp} + \sum (\langle f, u_k \rangle - \overline{\alpha}_k) u_k$$

Luego,

$$\|f - \overline{f}\|^2 = \|f_{\perp}\|^2 + \sum |\langle f, u_k \rangle - \overline{\alpha}_k|^2 + \|f_{\perp}\|^2$$

con igualdad si y sólo si $\langle f, u_k\rangle = \overline{\alpha}_k$ **terminar.**

Observación 5.4. A partir del lema anterior, obtenemos la **Desigualdad de Bessel**, el cual dice que,

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle f, u_k\rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

con igualdad si y sólo si $f \in Gen(\{u_k\}_{k=0}^{n})$.

Definición 5.3. *Sea el conjunto ortonormal* $\{u_k\}_{k=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *es una base ortonormal para* H *si,*

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle f, u_k\rangle|^2$$

para todo $f \in H$.

Notemos que si $\{u_k\}_{k=1}^{N}$ es base ortonormal entonces la sucesión,

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} \langle f, u_k\rangle u_k$$

Converge a f cuando $n \to N$. Esto es simplemente por construcción. Si $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ con $n \geq N$ es ortonomal, entonces para cada $n \geq N$ f se puede separar de la siguiente forma,

$$f = f_n + f_n^{\perp}$$

donde $\langle f_n, f_n^{\perp}\rangle = 0$. Entonces,

$$\|f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f_n^{\perp}\|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|^2$$

Es decir, $\|f_n^{\perp}\|^2 \to 0$ cuando $n \to N$ que es equivalente decir, $\|f - f_n\| \to 0$. Por lo que todo f es el límite (asociado a la norma $\|\cdot\|$) de las sumas parciales,

$$\sum_{k=1}^{n} \langle f, u_k\rangle u_k$$

5.3. Operadores Lineales

Sea H un espacio de producto interno sobre $\mathbb{C}$. Se define un operador lineal por una función,

$$A : \mathcal{D}(A) \leq H \to H$$

donde $\mathcal{D}(A)$ es el dominio y es un subespacio de H. Para todo $f, g \in \mathcal{D}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene que,

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha(Af) + \beta(Ag)$$

Definición 5.4. (Valor Propio, Vector Propio y Espacio Propio) *Sea $z \in \mathbb{C}$. Decimos que es un valor propio del operador A si existe un $u \neq 0$ en $\mathcal{D}(A)$ talque $Au = zu$ y a u le decimos vector propio de z. Definimos el espacio propio por,*

$$\ker(A - z) = \{u \in \mathcal{D}(A) : (A - z)u = 0\}$$

Definición 5.5. (Simetría) *Un operador A es simétrico si $\mathcal{D}(A) \leq H$ es denso en H y,*

$$\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$$

Observación 5.5. En algunso casos solo nos interesará la propiedad de poder mover el operador en operadores simétricos.

Teorema 5.2. *Sea $A : \mathcal{D}(A) \to H$ un operador simétrico. Entonces todos los valores propios son reales y los vectores propios asociado a los distintos valores propios son ortogonales.*

Dem. Sea A un operador simétrico. Si $Au = \lambda u$ con $u \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned}\lambda\|u\|^2 &= \langle \lambda u, u\rangle \\ &= \langle Au, u\rangle \\ \langle u, Au\rangle & \\ &= \overline{\langle \lambda u, u\rangle} \\ &= \overline{\lambda}\langle u, u\rangle\|u\|^2\end{aligned}$$

Como $u \neq 0$ se tiene que $\|u\|^2 \neq 0$, por lo tanto, $\lambda = \overline{\lambda}$ y entonces λ es real. Sean u_1, u_2 vectores propios asociados a valores propios distitnos, entonces $Au_1 = \lambda_1 u_1, Au_2 = \lambda_2 u_2$ y,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2\rangle = \langle Au_1, u_2\rangle - \langle u_1, Au_2\rangle = 0$$

Luego si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces u_1, u_2 son ortogonales. ■

Definición 5.6. (Acotado) *Sea $A : \mathcal{D}(A) = H \to H$ un operador. Decimos que es acotado si $\|Af\| \leq C\|f\|$ para todo $f \in \mathcal{D}(A)$ para algún $C \geq 0$.*

Recordemos que la norma de un operador se define por,

$$\|A\| := \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in \mathcal{D}(A)}} \|Af\|$$

Observación 5.6. Un operador es acotada si y sólo si es continuo. Y en efecto, si $A : \mathcal{D}(A) = H \to H$ es un operador acotado es claro que es continuo. Probemos que si es continuo entonces es acotado. **Terminar**

Definición 5.7. (Compacto) *Sea $A : \mathcal{D}(A) = H \to H$ un operador. Decimos que es compacto si para toda sucesión acotada $\|f_n\| \leq C$, se tiene que la sucesión $\{Af_n\}_n$ tiene una subsucesión convergente*

Ejemplo 5.3.

- Si A es compacto entonces A es acotado.
- Si A es compacto y B es acotado entonces BA es compacto. Recordemos que BA es la composición, sea $\{f_n\} \subseteq \mathcal{D}(A)$ una sucesión acotada, claramente la sucesión $\{Af_n\} \subseteq \mathcal{D}(B) = H$ tiene una subseción convergente, digamos que,

$$Af_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} Af$$

Si B es acotada entonces es continua, luego,

$$BAf_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} BAf$$

es decir, $\{BAf_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Por tanto BA es compacto.

Teorema 5.3. *Un operador simétrico compacto A tiene un valor propio α_0 donde $|\alpha_0| = \|A\|$*

Dem. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\|A\| > 0$.

- **Paso 1.** Notemos que,

$$\begin{aligned}\|A\|^2 &= \sup_{\|f\|=1} \|Af\|^2 \\ &= \sup_{\|f\|=1} \langle Af, Af\rangle \\ &= \sup_{\|f\|=1} \langle A^2 f, f\rangle\end{aligned}$$

Sea la sucesión $f_n \in H$ donde $\|f_n\| = 1$ talque,

$$\langle A^2 f_n, f_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|A\|^2$$

Si A es compacto, entonces A^2 es compacto y entonces existe una subsucesión talque,

$$A^2 f_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|A^2\| f =: w$$

tomando f_k una reindixión de la subsucesión.

- **Paso 2.** Afirmamos que $A^2 f = \|A\|^2 f$. Para ello es suficiente probar que,

$$\|A^2 f_k - \|A\|^2 f_k\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ya que luego $\|f\| = 1$. Notemos que,

$$\begin{aligned}\|A^2 f_k - \|A\|^2 f_k\|^2 &= \|A^2 f_k\|^2 - \langle A^2 f_k, \|A\|^2 f_k\rangle - \langle \|A\|^2 f_k, A^2 f_k\rangle + \|A\|^4 \|f_k\|^2 \\ &= \|A^2 f_k\|^2 - \|A\|^2 \langle A^2 f_k, f_k\rangle - \|A\|^2 \langle f_k, A^2 f_k\rangle + \|A\|^4 \\ &\leq 2\|A\|^2 (\|A\|^2 - \langle A^2 f_k, f_k\rangle) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Como queriamos probar.

- **Paso 3.** Si $A^2 f = \|A\|^2 f$ entonces,

$$(A - \mathbb{I}\|A\|)(A + \mathbb{I}\|A\|)f = 0$$

Si $v = (A + \mathbb{I}\|A\|)f$ entonces o bien $v = 0$ y luego $Af = -\|A\|f$ o bien $v \neq 0$ y luego,

$$(A - \mathbb{I}\|A\|)v = 0$$

Llegando a que $Av = \|A\|v$.

Probando que A tiene un valor propio talque $|\alpha_0| = \|A\|$. ■

5.4. Teorema Espectral para Operadores Compactos Simétricos

Teorema 5.4. *Sea H un espacio de producto interno de dimensión infinita, y sea $A : H \to H$ un operador compacto simétrica. Entonces existe una sucesión de valores propios reales $\alpha_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y vectores propios normalizados $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq H$ talque, para todo $f \in Im(A)$ se puede escribir como,*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, u_k \rangle u_k$$

Si $Im(A)$ es denso entonces $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para H.

Dem. Definimos $H_1 := H$ y $A_1 = A$, luego por el lema anterior A_1 tiene un valor propio $\alpha_1 = \pm\|A_1\|_{H_1}$ con vector propio u_1. Definimos,

$$\begin{aligned} H_2 = u_1^{\perp} &:= \{f \in H_1 : \langle f, u_1 \rangle = 0\} \\ A_2 &:= A_1|_{H_2} \end{aligned}$$

Como A_2 es la restricción de A_1 se tiene que es simétrico y compacto en H_2, entonces existe un valor propio $\alpha_2 = \pm\|A_2\|_{H_2}$ con vector propio u_2 y así de forma reiterativa.

- **Paso 1.** Afirmamos que $\alpha_k \to 0$. Supongamos qu $|\alpha_k| \geq C$, definimos la sucesión $v_k := \frac{u_k}{\alpha_k}$, luego,

$$\|v_k\| = \frac{\|u_k\|}{|\alpha_k|} = \frac{1}{|\alpha_k|} \leq \frac{1}{C}$$

Entonces la sucesión,

$$\{Av_k = \frac{Au_k}{\alpha_k} = u_k\}$$

tiene una subsucesión que converge, lo cual es imposible ya que $\|u_k - u_l\|^2 = 2$ y luego ninguna subsucesión puede converger.

- **Paso 2.** Afirmamos que $f = Ag$ con $g \in H$, entonces,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, u_k \rangle u_k$$

Sean,

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \langle f, u_k \rangle u_k, \quad g_n = \sum_{k=1}^{n} \langle g, u_k \rangle u_k$$

Luego,

$$\begin{aligned} Ag_n &= \sum_{k=1}^{n} \langle g, u_k \rangle Au_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle g, u_k \rangle \alpha_k u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle g, \alpha_k u_k \rangle u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle g, Au_k \rangle u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle Ag, u_k \rangle u_k \\ &= f_n \end{aligned}$$

Y también se tiene,

$$\begin{aligned} \|f - f_n\| &= \|Ag - Ag_n\| \\ &= \|A \underbrace{(g - g_n)}_{\in H_{n+1}} \| \\ &\leq \|A_{n+1}\|_{H_{n+1}} \|g - g_n\| \\ &\leq |\alpha_{n+1}| \|g\| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

- **Paso 3.** Supongamos que $Im(A)$ es denso en H. Queremos demostra que,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, u_k \rangle|^2 \iff \|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, u_k \rangle u_k\|^2 \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ fijo, eligimos $\overline{f} \in Im(A)$ talque,

$$\|f - \overline{f}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Luego,

$$f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, u_k \rangle u_k = f - \overline{f} + \overline{f} - \sum_{k=1}^{n} \langle f, u_k \rangle u_k + \sum_{k=1}^{n} (\langle \overline{f}, u_k \rangle - \langle f, u_k \rangle) u_k$$

Entonces,

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, u_k \rangle u_k\| \leq \|f - \overline{f}\| + \|\overline{f} - \sum_{k=1}^{n} \langle \overline{f}, u_k \rangle u_k\| + \|\sum_{k=1}^{n} \langle \overline{f} - f, u_k \rangle u_k\| \leq \varepsilon$$

(Esto último es por Bessel.) ■

5.5. Problemas de Sturm-Liouville Regulares

Volvamos a Sturm-Liouville. Consideremos el siguiente operador,

$$(Ly)(x) = \frac{1}{r(x)} \left(-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \right) y(x)$$

donde d/dx está asociada a $y(x)$. Consideremos las siguientes hipótesis,

- $r(x), q(x) \in C([a, b], \mathbb{R})$, $r(x), q(x) > 0$ en $[a, b]$.
- $p(x) \in C^1([a.b], \mathbb{R})$

Vamos a estudiar el problema de valor propio (PVP) bajo condiciones de borde,

$$\begin{cases} Ly(x) = \lambda y(x) \\ B_a(y) := \cos(\alpha) y(a) - \operatorname{sen}(\alpha) p(a) y'(a) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \\ B_b(y) := \cos(\beta) y(b) - \operatorname{sen}(\beta) p(b) y'(b) = 0, \quad \alpha, \beta \in [0, \pi]. \end{cases} \qquad (\star)$$

Vamos a trabajar sobre un espacio de producto interno.

$$L : \mathcal{D}(L) \leq H \to H$$

Por lo que vamos a establecer el dominio, el espacio, el producto interno entre otros.

(a) **Espacio Vectorial.** Consideremos $H = C([a, b], \mathbb{C})$ que es un espacio de producto interno. Vamos a considerar el dominio de tal forma que se satisfaga las condiciones de frontera, es decir, tomaremos,

$$\mathcal{D}(L) = \{f \in H : B_a(f) = 0 = B_b(f)\}$$

Si $\alpha = 0$ entonces,

$$B_a(y) = y(a) = 0$$

Obteniendo la **Condición de Dirichlet homogénea en** $x = a$.

Si $\alpha = \pi/2$ entonces,

$$B_a(y) = -p(a) y'(a) = 0$$

Obteniendo la **Condición de Neumann homogénea en** $x = a$.

(b) **Producto Interno.** Se define el producto interno por,

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}r(x)dx$$

con $r(x) > 0$ en $[a, b]$ asociado al operador L. Vemos que el producto interno está bien definido dado que es lineal en el primer argumento, se cumple la simetría conjugada dado que $\overline{r(x)} = r(x)$ y $\langle f, f\rangle \geq 0$ con igualdad si y sólo si $f = 0$. De aquí se define la norma $\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}$.

¿Es $\mathcal{D}(L)$ denso en H? No de forma directa es denso.

Lema 5.3. *El conjunto $C_c^2((a, b))$ (funciones con soporte compacto, supp$f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ si es cerrado y acotado) es denso con respecto a la norma uniformente (norma infinito) en $C([a.b])$.*

Nota 5.3. Se puede definir el producto interno sin importar donde se conjuga, es decir, se puede considerar el producto interno,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)r(x)dx$$

Dado por el segundo axioma de producto interno.

(c) **Simetria.** Con respecto al producto interno defino el operador $L : \mathcal{D}(L) \to H$ es un operador simétrico. Es decir,

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle$$

para todo $f, g \in \mathcal{D}(L)$. Y en efecto,

$$\begin{aligned}
\langle Lf, g\rangle &= \int_a^b \frac{1}{r(x)}\left(-\frac{d}{dx}(p(x)f'(x)) + q(x)f(x)\right)\overline{g(x)}r(x)dx \\
&= \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}(p(x)f'(x)) + q(x)f(x)\right)\overline{g(x)}dx \\
&= -p(x)f'(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b + \int_a^b p(x)f'(x)\overline{g(x)}'dx + \int_a^b q(x)f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= -p(x)f'(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b + p(x)f(x)\overline{g(x)}'\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\frac{d}{dx}(p(x)\overline{g(x)}')dx + \int_a^b q(x)f(x)\overline{g(xdx)} \\
&= -p(x)f'(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b + p(x)f(x)\overline{g(x)}'\Big|_a^b + \int_a^b r(x)f(x)\overline{Lg}dx \\
&= -p(x)f'(x)\overline{g(x)}\Big|_a^b + p(x)f(x)\overline{g(x)}'\Big|_a^b + \langle f, Lg\rangle \\
&= \det\begin{pmatrix} f(x) & \overline{g(x)} \\ p(x)f'(x) & p(x)\overline{g(x)}' \end{pmatrix}\Bigg|_a^b + \langle f, Lg\rangle
\end{aligned}$$

Obtenemos que $\langle Lf, g\rangle$ es igual al determinante a una matriz más $\langle f, Lg\rangle$.

Definición 5.8. (Wronskiano Modificado) *Bajo a un operador L de Sturm-Liouville definimos el Wronskiano modificado de las funciones $f, g \in H$ por,*

$$\begin{aligned} W_x(f,g) :&= \det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ p(x)f'(x) & p(x)g'(x)\end{pmatrix} \\ &= p(x)(f(x)g'(x) - f'(x)g(x)) \\ &= p(x)\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donde p es la función asociada al operador L.

Afirmación. *Se tiene que,*

$$W_x(f,\overline{g})\Big|_a^b = 0$$

Dem.

Sabemos que,

$$B_a(f) = \cos(\alpha)f(a) - \operatorname{sen}(\alpha)p(a)f'(a) = 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}\cos(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha)\end{pmatrix} &\perp \begin{pmatrix} f(a) \\ p(a)f'(a)\end{pmatrix} = W_1 \in \mathbb{C}^2 \\ &\perp \begin{pmatrix} \overline{g(a)} \\ p(a)\overline{g(a)}'\end{pmatrix} = W_2 \in \mathbb{C}^2\end{aligned}$$

Por tanto W_1 es paralelo a W_2 o dicho de otra forma,

$$W_x(f,\overline{g})\Big|_{x=a} = \det(W_1, W_2) = 0$$

Con $x = b$ es análogo. ■.

Por lo tanto, L es simétrico bajo el producto interno definido.

(d) **Teorema Espectral.** Ahora queremos usar el teorema espectral. Recordemos el teorema.

Teorema Resumido. *Si $A : H \to H$ es simétrico compacto, entonces existe $\{\alpha_k\}_k$ una sucesión de valores propios talque $\alpha_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Y la sucesión de vectores propios normales $\{u_k\}_k$ que son ortonormal que generan $Im(A)$. Además, si $Im(A)$ es denso en H entonces $\{u_k\}_k$ es base ortonormal para H.*

Ejemplo 5.5. Sea el operador de Sturm-Liouville,

$$L := -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(L) = \{f \in C^2[0,\pi], f(0) = 0 = f(\pi)\}$$

Determinemos los valores propios. Tenemos que $r(x) = p(x) = 1, q(x) = 0$, entonces el producto interno definido es,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}dx$$

Sea λ valor propio del operador asociado a la función propia y, luego tenemos que $Ly = \lambda y$. Si L es simétrico, entonces,

$$\langle Ly, y\rangle = \lambda \|y\|^2$$

Y por otro lado,

$$\begin{aligned}
\langle -y'', y\rangle &= -\int_0^\pi y''\overline{y} \\
&= -\left(y'(x)\overline{y}(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi y'\overline{y}'\right) \\
&= \int_0^\pi y'\overline{y}' \\
&= \langle y', y'\rangle \\
&= \|y'\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda\|y\|^2 = \|y'\|^2$ y esto implica que $\lambda \geq 0$. Encontremos los valores propios, sabemos que,

$$-y'' = \lambda y \Longleftrightarrow y'' + \lambda y = 0$$

Con polinomio característico asociado $\chi(z) = z^2 + \lambda$. Si $\lambda = 0$ entonces los valores propios de la matriz asociada es $z = 0$ de multiplicidad algebraica y, esto implica que,

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

Con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Evaluando en las condiciones de borde llegamos a que $y = 0$, siendo imposible ya que pedimos función/vector propio no nulo. Si $\lambda > 0$ tenemos dos valores propios de la matriz asociada distintas y luego,

$$y(x) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Si $x = 0$ entonces,

$$y(0) = c_1 = 0$$

Y si $x = \pi$ entonces,

$$y(\pi) = c_2\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

Si $c_2 = 0$ llegamos a $y = 0$ siendo imposible, por lo que,

$$\sqrt{\lambda}\pi = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

Por tanto, los valores propios del operador son $\lambda = k^2$ con $k \in \mathbb{N}$. Con función propia,

$$y_k := \operatorname{sen}(kx), \ \ k \in \mathbb{N}$$

Veamos si podemos aplicar el teorema espectral. Si

$$Ly_k = k^2 y_k$$

Entonces,

$$\frac{\|Ly_k\|}{\|y_k\|} = k^2 \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

Es decir, no existe una sucesión de valores propios tales que $\alpha_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ y esto ocurre ya que L no es acotado y por tanto, no puede ser compacto.

Ya hemos definido el operador de Sturm-Liouville bajo un espacio de producto interno. Probaremos que para $\lambda \in \mathbb{R}$ genéricos, el operador $L - \lambda : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \to H$ es invertible con inversa,

$$R_\lambda : H \to \mathcal{D}(L)$$

Donde $D(\mathcal{L})$ es denso en H y R_λ será un operador compacto y simétrico. Es decir, existen valores propios $\alpha_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ y vectores propios u_k de R_λ tales que,

$$R_\lambda u_k = \alpha_k u_k$$

Consideremos $\{u_k\}$ el conjunto de los vectores propios de R_λ, este forma un conjunto ortonormal que genera $Im(R_\lambda) = \mathcal{D}(L)$, y como este es denso en $H = C([a,b],\mathbb{C})$, se tiene que $\{u_k\}$ es base ortonormal para H. Además,

$$\begin{aligned}(L-\lambda)^{-1}(u_k) = R_\lambda u_k &\iff (L-\lambda)(\alpha_k u_k) = u_k \\ &\iff \alpha_k L u_k = u_k + \lambda \alpha_k u_k \\ &\iff Lu_k = \left(\lambda + \frac{1}{\alpha_k}\right) u_k\end{aligned}$$

Es decir, si tal inversa de $L-\lambda$ existe, entonces $\lambda + \frac{1}{\alpha_k}$ es valor propio de L con α_k valor propio de L.

Para ver cómo y cuando $L - \lambda$ es invertible, debemo estudiar,

$$(L-\lambda)y = f, \quad (\star)$$

donde $y \in \mathcal{D}(L)$ y $f \in H$ y ver si $(\star)$ tiene única solución $y \in \mathcal{D}(L)$ para todo $f \in H$. Sean $p(x), r(x), q(x)$ las funciones que conforman al operador L, luego se tiene que,

$$-p'(x)y' - p(x)y'' + (q(x) - \lambda r(x))y = r(x)f(x)$$

Una ecuación no homogénea. Estudiemos la homogénea, es decir, la ecuación de la forma,

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' - \frac{q(x) - \lambda r(x)}{p(x)}y = 0$$

Sea $c := p(x)y'$, luego se cumple,

$$\begin{pmatrix} y \\ p(x)y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} c/p(x) \\ (q(x) - \lambda r(x))y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p(x)} \\ q(x) - zr(x) & 0 \end{pmatrix}}_{=:M_\lambda(x)} \begin{pmatrix} y \\ p(x)y' \end{pmatrix} \quad (H)$$

Sean y_1, y_2 soluciones de la ecuacion (H), entonces el Wronskiano modificado es,

$$W_x(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ p(x)y_1' & p(x)y_2' \end{pmatrix}$$

Por el teorema de Abel-Liouville se satisface,

$$\frac{d}{dx}W_x - tr(M_\lambda(x))W_x = 0$$

Donde la traza de M_λ es claramente nulo, por tanto $W_x(y_1, y_2)$ es constante.

Veamos la solución usando el propagador. Sea $\Pi_\lambda(x, x_0)$ el propagador de (H), entonces se cumple que,

$$\Pi_\lambda(x, x_0) = \begin{pmatrix} c_\lambda(x, x_0) & s_\lambda(x, x_0) \\ p(x)c_\lambda'(x, x_0) & p(x)s_\lambda'(x, x_0) \end{pmatrix}$$

donde,

$$\begin{pmatrix} c_\lambda \\ p(x)c_\lambda' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_\lambda \\ p(x)s_\lambda' \end{pmatrix}$$

son soluciones de (H) don datos iniciales,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por Duhamul, la solución del PVI para (H) con datos iniciales $y(x_0) = y_0, p(x_0)y'(x_0) = y_0'$, es

$$y(x) = y_0 c_\lambda(x, x_0) + y_0' s_\lambda(x, x_0) + \int_{x_0}^{x} r(t)f(t)s_\lambda(x, t)dt$$

estas soluciones funcionan con datos iniciales $(1, 0)^T, (0, 1)^T$. Si u, v son dos soluciones de (H), entonces podemos determinar c_λ, s_λ de la siguiente forma,

$$c_\lambda(x, x_0) = \frac{p(x_0)(u(x)v'(x_0) - u'(x_0)v(x)}{W_x(u, v)}$$
$$s_\lambda(x, x_0) = \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x)}{W_x(u, v)}$$

Teorema 5.5. *Las entradas de $\Pi_\lambda(x, x_0)$ para x, x_0 fijos en $I = [a, b]$ son funciones analíticas en $z \in \mathbb{C}$.*

Dem. Terminar

Nota 5.4. En particular, cualquier solución $u_\lambda(x)$ con datos iniciales $x = x_0$ constantes, será analítica en z.

Volvamos a considerar la ecuación $(\star)$, si esta tiene única solución entonces $\ker(L - \lambda) = \{0\}$. Pero ¿cuándo $\ker(L - \lambda) \neq 0$? Para estudiar esto debemos realizar un estudio. Conideremos los problema de frontera separados,

$$(p_a) \begin{cases} (L - \lambda)u = 0 \\ B_a(u) = 0 \end{cases}, \quad (p_b) \begin{cases} (L - \lambda)u = 0 \\ B_b(u) = 0 \end{cases}$$

donde $B_a(u_a) = \cos(\alpha)u(a) - \operatorname{sen}(\alpha)p(a)u'(a) = 0$. Con respecto p_a diremos a u_a la solución talque,

$$\begin{aligned} u_a(a) &= \operatorname{sen}(\alpha) \\ p(a)u_a'(a) &= \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Mientras que a la solución u_b es la solución de p_b talque,

$$\begin{aligned} u_b(b) &= \operatorname{sen}(\beta) \\ p(b)u_b'(b) &= \cos(\beta) \end{aligned}$$

Luego E_a (el espacio de soluciones de p_a) tiene dimensión 1 y $E_a = \langle u_a \rangle$, lo mismo con E_b. Entonces se tiene que $\ker(L - \lambda) \neq \{0\}$ si y sólo si $E_a = E_b$.

Nota 5.5. Se cumple $E_a = E_b$ si y sólo si u_a, u_b son linealmente dependiente si y sólo si $W(u_a, u_b) = 0$ (Wronskiano).

Por lo tanto, si queremos probar que $\ker(L - \lambda) \neq \{0\}$ basta encontrar u_a, u_b y estudiar el Wronskiano.

Notación. Se definen las soluciones u_λ^a, u_λ^b de p_a, p_b asociados al operador $L - \lambda$.

Teorema 5.6. *El complejo λ es valor propio de $L : \mathcal{D}(L) \to H$ si y sólo si $W(z) := W(u_z^a, u_z^b)$ se anula cuando $z = \lambda$. Además el conjunto $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ valor propio de } L\}$ (**Espectro de** L) es subconjunto discreto de $\mathbb{R}$ que no tiene punto de acumulación finito.*

Teorema 5.7. *Si $\lambda \notin \sigma(L)$ entonces $L - \lambda : \mathcal{D}(L) \to H$ tiene inversa.*

Dem...

Definición 5.9. (Función de Green) *Se define la función de Green para el operador $L : \mathcal{D}(L) \to H$ asociado a $\lambda \in \mathcal{D}(L)$ por,*

$$G_\lambda(x, t) := -\frac{1}{W_\lambda} \begin{cases} u_\lambda^b(x)u_\lambda^a(t), & t \leq x \\ u_\lambda^a(x)u_\lambda^b(t), & t \geq x \end{cases}$$

para todo $(t, x) \in [a, b]^2$.

Definición 5.10. (Operador Resolvente) *Se define el operador reseolvente* $R_L(z)$ *asociado al operador* L *y* $z \in \mathcal{D}(L)$ *por el operador que satisface,*

$$R_L(z)f(x) = \int_a^b G_z(x,t)f(t)r(t)dt$$

■

Ejemplo 5.6. Sea el operador $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ con dominio,

$$\mathcal{D}(L) = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$$

Que son las condiciones de Dirichlet. Veamos que pasa con $z = 0$, en este caso tenemos que,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 0\right) u = 0$$

Luego la solución está dado por, $u = ax + b$, por tanto,

$$\ker(L - 0) = \{0\}$$

Por lo tanto podemos buscar u^0, u^1 tales que,

$$u^0(0) = 0$$
$$u^1(1) = 0$$

Una posibilidad son tomar $u^0(x) = x, u^1(x) = 1 - x$ y en efecto, resulven los p_0, p_1 respectívamente, luego,

$$W_0(u^0, u^1) = \det \begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -x - (1-x) = -1$$

Esto implica que 0 no es valor propio de L y que tiene inversa. Además la función de Green es,

$$G_0(x,t) = \frac{1}{-1} \begin{cases} (1-x)t, & t \le x \\ x(1-t), & t \ge x \end{cases}$$

Proposición 5.1. *Consideremos el operador* L *de Sturm-Liouville. Sea la función de Green* $G_z(x,t)$ *y sea* $z \notin \sigma(L)$*, entonces,*

i) $G_z(x,t) = G_z(t,x)$.

ii) $G_{\overline{z}}(x,t) = \overline{G_z(x,t)}$. *En particular, si* $z \in \sigma(L)^c \cap \mathbb{R}$ *entonces* $G_z(x,t)$ *es real.*

iii) La función $G_z : [a,b]^2 \to \mathbb{C}$ *es continua, y por tanto es uniformemente continua.*

Lema 5.4. *Si $z \notin \sigma(L)$ entonces el operador resolvente $R_L(z)$ es compacto. Si $z \in \mathbb{R}$ entonces $R_L(z)$ es simétrico.*

Dem. Terminar

Teorema 5.8. *El problema regular de Sturm-Liouville tiene una cantindad numerable/contable de valores propios reales y espacios simples E_k los cuales se acumulan solo al ∞. Y tiene funciones propiras correspondientes $\{u_k\}$ reales y forman una base ortonormal para H. Ocurre que,*

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \langle f, u_k \rangle u_k$$

converge en norma l^1 Si $f \in \mathcal{D}(L)$, entonces la convergencia es uniforme.

Dem. Terminar

5.6. Forma Cuadratica asociada al Operador L de SL

La forma cuadrática asociada a un operador L de Sturm-Liouville está dada por,

$$Q(f, g) = \int p(x) f'(x) \overline{g(x)}' + g(x) f(x) \overline{g(x)} dx + B_a(f, g) - B_b(f, g)$$

Y es igual a $\langle Lf, g \rangle$ cuando $f \in \mathcal{D}(L), g \in C^1[a, b]$. Donde,

$$B_a(f, g) = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \\ \cot(\alpha) f(a) \overline{g(a)}, & \alpha \neq 0 \end{cases}$$
$$B_b(f, g) = \begin{cases} 0, & \beta = 0 \\ \cot(\beta) f(b), & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Teorema 5.9. *Los valores propios α_k del operador L de Sturm-Liouville son acotados por abajo, es decir, se pueden ordenar,*

$$-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \infty$$

Además,

$$\alpha_1 = \inf_{\substack{f \in \mathcal{D}(L) \\ f \neq 0}} \frac{Q(f, f)}{\|f\|^2}$$

Se cumple solamente cuando $f = a u_1$.

Definición 5.11. *A la expresión,*

$$\frac{Q(f, f)}{\|f\|^2}$$

Le llamamos coeficiente de Rayleigh.

6. Sistemas Dinámicos

6.1. Flujo de una ecuación autónoma

Sea la ecuación,

$$(\star) \quad \dot{x} = f(x), \quad f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$$

donde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Si $x(t)$ es una solución de $(\star)$ está tiene una curva de solución

Figura

De como se comporta $x(t)$ a travez del tiempo. Notemos que la derivada de x en cualquier punto satisface el campo vectorial de f, es más, si una función $x(t)$ satisface el campo de f entonces es solución de la ecuación. Por lo que $x(t)$ es solución de $(\star)$ si y sólo si $x(t)$ es curva integral del campo vectorial de f.

Observación 6.1. La función $x(t+T)$ también es solución de $(\star)$ cuyo trazo coincide con el de $x(t)$.

Por la observación anterior para estudiar la ecuación basta con estudiar el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Si $f \in C^k(M)$ con $k \geq 1$, entonces la solución del PVI es única definida en un intervalo máximo $I_{x_0} := (T_-(x_0), T_+(x_0))$.

Sea $\varphi_x(t)$ la solución máximal del PVI con datos iniciales $\varphi_x(0) = x$. Definimos la función de flujo,

$$\phi : W \to M$$

donde $\phi(t,x) = \varphi_x(t)$. El dominio de la función de flujo es,

$$W := \bigcup_{x \in M} (I_x \times \{x\})$$

Veamos algunas propiedades de flujo. Si $\phi_t(x) := \phi(t,x)$, entonces se cumple,

1) $\phi_0(x) = x$ para todo $x \in M$.
2) Veamos la siguiente figura,

   Figura.

   Podemos ver que $\phi_t(x) \in M$ y que $\phi_t(x)$ es un elemento de la traza de $\varphi_x(t)$, es decir $\varphi_s(\varphi_t(x))$ es tomar el punto $\varphi_t(x)$ y avanza al tiempo s, es decir,

   $$\varphi_{s+t}(x) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x)$$

   para tpdp $x \in M$, y para todo $t, s+t \in I_x$.

Estas dos propiedades de flujo construyen un sistema dinámico continuo.

Teorema 6.1. *Con respecto a la función flujo. Se tiene que* $W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *es abierto y* $\phi \in C^k(W, \mathbb{R}^n)$.

Tetrmianr.

Observación 6.2.

- ϕ_t es un difeomorfismo local de clase C^k.

  FIgura.

  Y en efecto, si lo anterior se cumple entonces $\phi_t \circ \phi_{-t} = id$.
- Si $t \mapsto -t$ entonces $\phi_t \mapsto \phi_{-t}$.

Ejemplo 6.1.

Sea el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Si $x_0 = 0$ tenemos $x \equiv 0$. Si $x_0 \neq 0$ entonces,

$$\begin{aligned} F(x(t)) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y^2} = t \iff & -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t \\ & = x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \end{aligned}$$

donde $t \in (-\infty, 1/x_0)$. Luego la función de flujo es de la forma,

$$\phi_t(x) = \frac{x}{1 - tx}$$

definida en $W = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : tx < 1\}$.

Figura.

Definicion 6.1. (Órbita) *La órbita se define por* $\gamma(x) := \phi(I_x, x)$ *donde* x *es el punto inicial.*

Es decir, la órbita es la traza que genera $x(t)$. Notemos que si $\gamma(x) \cap \gamma(y) \neq \emptyset$ entonces $\gamma(x) = \gamma(y)$, luego M se puede particionar en órbitas.

Definición 6.2. (Semiórbita) *Se definen las semiórbita por,*

$$\begin{aligned} \gamma_+(x) :&= \phi((0, T_+(x)), x) \\ \gamma_-(x) :&= \phi((T_-(x), 0), x) \end{aligned}$$

Es decir, son la traza de x *en el futuro y en el pasado respectívamente.*

Notemos que,

$$\gamma(x) = \gamma_+(x) \cup \{x\} \cup \gamma_+(x)$$

En particular, si x es un punto fijo si y sólo si $\gamma(x) = \{x\}$ si y sólo si $\gamma_+(x) = \gamma_-(x) = \{x\}$. La órbita de x se llama periódico si existe un $T > 0$ talque $\phi_T(x) = x = \phi_0(x)$. $\gamma(x)$ se llama periódica/cerrada. Se define $T_{\text{mín}}(x) := \inf\{T > 0 : \phi_T(x) = x\}$. Es más, el ínfimo se alcanza $T_n \downarrow T_{\text{mín}}$ y,

$$x = \phi_{T_m}(x) \to \phi_{T_{\text{mín}}}(x)$$

Nota 6.1. x es periódico si y sólo si $\gamma_+(x) \cap \gamma_-(x) \neq \emptyset$.

6.2. Estudio y Clasificación de Órbitas

Tenemos tres tipos de órbitas.

- Puntos Fijos.
- Periodicas/Cerradas.
- No cerradas

Ya sabemos como se comporta cada una. Veamos el comportamiento que puede tener las órbitas. Vamos a considerar la siguiente notación $\sigma = +, -$ dependiendo del contexto.

Definición 6.3. *x se llama σ-completa si $T_\sigma(x) = \sigma\infty$ y x es completo si $(T_-(x), T_+(x)) = \mathbb{R}$.*

Definición 6.4. *Si para tod $x \in M$ es completo, el campo vectorial se llama completo. Luego $W = \mathbb{R} \times M$.*

Proposición 6.1. *Si $\gamma_\sigma(x) \subseteq C \subseteq M$ con C compacto, entonces x es σ-completo.*

Definición 6.5. *Sea $U \subseteq M$. Se dice σ-invariante si,*

$$\gamma_\sigma(x) \subseteq U$$

para todo $x \in U$. Decimos que U es invariante si es $+$ y $-$ invariante.

Corolario 6.1. *Si $C \subseteq M$ compacto y es σ-invarianete, entonces para todo $x \in C$ es σ-completo.*

Lema 6.1. *Sena $U, V \subseteq M$, entonces,*

- *si U, V son σ-invarianetes, entonces $U \cup V, U \cap V$ son σ-invariante.*
- *Si U, V son invariantes, entonces $U \setminus V$ y $V \setminus U$ son invariantes.*
- *Si U es σ-invarianete, entonces $\overline{U}$ es σ-invariante.*

Dem. Terminar

Definición 6.6. *Definimos el conjunto ω_σ-límites de x por,*

$$\omega_\sigma(x) := \{y \in M : \phi_{t_k}(x) \to y, \textit{para algúna sucesión}\, t_k \to \sigma\infty\}$$

Ejemplo 6.2. Sea la ecuación $\dot{x} = -x$. Si $x = 0$ tenemos un punto fijo entonces,

$$\omega_+(\{0\}) = \omega_-(\{0\}) = \{0\}$$

Si $x \neq 0$ entonces $\phi_t(x) = e^{-t}x$, luego,

$$\begin{aligned} \omega_+(x) &= \{0\} \\ \omega_-(x) &= \emptyset \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3. Sea la ecuación,

$$\dot{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a trabajar con la ecuación,

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0$$

Si

$$f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y si $f(x) \perp x$, entonces el campo vectorial de f está dado por,

Figura.

Esto genera las soluciones de x_1. Entonces $\omega_\sigma = \gamma(x)$.

Observación 6.3. El conjunto $\omega_\sigma(x)$ depende sólamente de la órbita de x. Si $y \in \gamma(x)$, entonces $\omega_\sigma(y) = \omega_\sigma(x)$.

Proposición 6.2. $\omega_\sigma(x)$ *es cerrado e invariante.*

Dem.

Proposición 6.3. *Si* $\gamma_\sigma(x) \subseteq C$ *compacto. Entonces* $\omega_\sigma(x)$ *es compacto no vacío y conexo.*

Dem...

6.3. Estabilidad de Puntos fijos

Consideremos el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$. Sea x_* un punto fijo del sistema, es decir, $f(x_*) = 0$.

Definición 6.7. *Decimos que* x_* *es estable si para cada vecindario* $U(x_*)$ *existe un vecindario* $V(x_*) \subseteq U(x_*)$ *talque, para todo* $x \in V(x_*)$ *se tiene que* $\phi_t(x) \in U(x_*)$ *para todo* $t \geq 0$.

Figura.

Definición 6.8. *Decimos que* x_* *es asintóticamente estable si,* *i) Es estable.*

ii) para todo $x \in V(x_*)$ se tiene,

$$\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = x_*$$

Notemos que ii) no implica i).

Definición 6.9. *El punto x_* es exponencialmente estable si existe $\delta > 0, \alpha > 0, C > 0$ talque si $|x - x_*| < \delta$, entonces,*

$$|\phi_t(x) - x_*| \leq Ce^{-\alpha t}|x - x_0|$$

para todo $t \geq 0$.

Ejemplo 6.4. Sea $\dot{x} = f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si $f(0) = 0$ entonces 0 es punto fijo, entonces,

$$\frac{f(x)}{x} \leq 0$$

para $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. Si $f(x) \leq 0$ en $0 < x \leq de$, entonces x decrece. Si $f(x) \geq 0$ entonces x crece.

Figura.

En este caso 0 es estable.

Terminar.

Ejemplo 6.4. Sea $\dot{x} = Ax = f(x)$. Sabemos que $x_* = 0$ es punto fijo. x_* es asintóticamente estable o exponencialmente estable si $Re(\lambda(A)) < 0$ (valores propios) y es estable si $Re(\lambda(A)) \leq 0$ y cuando es nulo enotnces la multiplicidad algebraica es igual a la geométrica.

Teorema 6.2. (Exponencialmente Estable vía linealización) *Sea $f \in C^1$, y sea x_* un punto fijo. Definimos $A := Df(x_*)$ (Jacobiano de f evaluado en el punto fijo). Supongamos que los valores propios de A tienen parte real no negativo. Entonces x_* es exponencialmente estable.*

Continuar.

6.4. Funciones de Liapunov

7. Ayudantías

7.1. Ayudantía 1

P1. *Resuelva el problema*

$$\begin{cases} t\dot{y} + 2y = 4t^2 \\ y(1) = a \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Encontrar el intervalo maximal de definición de la solución.

Sol.

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} t\dot{y} + 2y = 4t^2 \\ y(1) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tenemos un sistema donde a $\dot{y}$ se le está multiplicando por t, por lo que lo quitaremos, tenemos que

$$\dot{y} = 4t - \frac{2y}{t}$$

Consideremos

$$u' = \frac{2}{t}u$$

Una ecuación separable, luego

$$\frac{u'}{u} = \frac{2}{t}$$

Integrando de forma arbitraria se tiene que

$$\log(u) = 2\log(t) + C$$

Digamos que $C = 0$, luego $u = e^{2\log(t)} = t^2$, entonces

$$\begin{aligned} (y' + \frac{2}{t} = 4t)u &\iff y'u + \frac{2}{t}yu = 4tu \\ &\iff y'u + yu' = 4tu \\ &\iff (yu)' = 4tu \end{aligned}$$

Integrando

$$yu = \int 4suds \implies t^2y = t^4 + C$$

Luego $y = t^2 + \frac{C}{t^2}$. Evaluando en $t = 1$ tenemos que $C = a - 1$. Determinemos el intervalo maximal. Si $y(t) = t^2 + \frac{a-1}{t^2}$, si $a = 1$, entonces $IM = \mathbb{R}$. Si $a \neq 1$, entonces $IM = (0, \infty)$. (Como $1 \in IM$)

Observación. Si $y(0) = b$, no tiene solución si $b \neq 0$. Y en efecto, si $(0, b)$ es el dato inicial, entonces despejamos $\dot{y}$, siempre con cuidado, luego la solución está dada por

$$y(t) = \mathcal{P}_f(t, 0)b + \int_0^t \mathcal{P}_f(t, s)g(s)ds$$

El problema es que

$$\exp\left(-2\int_0^t \frac{ds}{s}\right) = \infty$$

Algo que no converge, por lo tanto, si $b \neq 0$, no hay solución, también se puede pensar que cuando $t = 0$, entonces

$$y = 0$$

es la única solución de la ecuación, y si $b \neq 0$, entonces

$$y(0) = \neq b$$

Ahora si $b = 0$, si tendriamos una solución.

P2. *Sea*

$$f(y) := \begin{cases} y^3 \operatorname{sen}(y^{-1}), & y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Para $y_0 \in \mathbb{R}$, se considere el problema

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Si $|y_0| \geq 1/\pi$, encuentre el intervalo maximal de definición de la solución de este problema.

(b) Si $|y_0| \leq 1/\Pi$ demuestre que el intervalo maximal de definición de la solución de este problema ees todo $\mathbb{R}$, y es acotada y monótona en $\mathbb{R}$. Encontrar los límites

$$\lim_{t \to \pm\infty} y(t, t_0)$$

Sol.

(a) Si $y_0 > 1/\pi$, sea

$$F(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{s^3 \operatorname{sen}(s^{-1})}$$

entonces $F'(y) = \frac{1}{y^3 \operatorname{sen}(s^{-1})} > 0$ en $\left(\frac{1}{\pi}, \infty\right)$. Por lo que F es creciente, determinemos el recorrido de F, por lo que

$$\lim_{y \to \frac{1}{\pi}} F(y) = -\infty$$

Ya que cuando $\operatorname{sen}(s^{-1}) \to 0$ cuando $y \to 1/\pi$, y si $1/s^3$ es integrable, entonces toma un valor fijo. Y por otro lado

$$\lim_{y \to \infty} F(y) = a > 0$$

Entonces el intervalo máximal es $(-\infty, a)$. Cuando $y_0 < -\frac{1}{\pi}$, el proceso es análogo. El intervalo máximal donde $f(y)$ se hace negativo es en $(-\infty, -1/\pi)$ que contiene a y_0. Luego

$$F(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{dx}{x^3 \operatorname{sen}(x^{-1})}$$

Si $y \to -\infty$, ocurre que el valor converge a un valor negatvio. Digamos que

$$\lim_{y \to -\infty} F(y) =: b < 0$$

Y si $y \to -\frac{1}{\pi}$, entonces

$$\lim_{y \to -\frac{1}{\pi}} F(y) = \infty$$

Luego el intervalo máximal es (b, ∞).

(b) $|y_0| \leq \frac{1}{\pi}$, entonces el intervalo maximal es IM$= \mathbb{R}$ e y es acotada y monótona. Encontremos los límites, existe un $k \in \mathbb{N}$ talque

$$y_0 \in \left(\frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi}\right)$$

Supongamos que k es par, luego veremos el caso impar. Entonces tenemos que

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{s^3 \operatorname{sen}(s^{-1})}$$

está definido en $y \in \left(\frac{1}{(k+1)\pi}, \frac{1}{k\pi}\right)$. Podemos notar que F es creciente, entonces y es creciente y

$$\lim_{y \to \frac{1}{(k+1)\pi}} F(y) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{y \to \frac{1}{k\pi}} F(y) = \infty$$

Por lo tanto IM$= R$. E y es acotada y monótona. Además

$$\lim_{t - \infty} y(t) = \frac{1}{(k+1)\pi} \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{1}{k\pi}$$

Veamos el caso k es similar.

Observación. Notemos que el comportamiento de f depende fuertemente de los datos iniciales (t_0, y_0). Y para poder desarrollar el problema hay que ir tomando con cuidado los conjuntos donde $f(y)$ se hace positivo o negativo.

P3. *Considere el problema*

$$\begin{cases} \dot{y} = 3t^2|y|^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Construya una familia infinita de soluciones.

Sol. Notemos que $y = 0$ es una solución trivial definida en todo $t \in \mathbb{R}$. Como podemos derivar por partes, lo que haremos es encontrar una solución no trivial y unirmal con la solución $y = 0$. Supongamos que $y > 0$, luego tenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = 3t^2y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Una ecuación separable, tenemos

$$\frac{\dot{y}}{y^{2/3}} = 3t^2$$

Integrando en general tenemos que

$$\int \frac{\dot{y}}{y^{2/3}} ds = \int 3s^2 ds \iff 3y^{1/3} = t^3 + C$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante. Con respecto al lado derecho está bien como primitiva, ya que derivando sobre t se tiene

$$\frac{d}{dt}(3y^{1/3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} y^{1/3-1} y' = \frac{\dot{y}}{y^{2/3}}$$

Volviendo a resolver el sistema, si elevamos por 3 tenemos que

$$y = \frac{(t^3 + C)^3}{27}$$

Encontrando una posible solución. Si $t = 0$, entonces $y(0) = 0 = C$. Podemos ver que

$$y = \frac{t^9}{27}$$

debiese ser solución al sistema. Y en efecto es solución. Esta solución está bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Con esto generemos una familia infinitas de soluciones. Definimos

$$y_n(t) := \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, n) \\ \frac{1}{27}(t^3 - n^3)^3, & t \in [n, \infty) \end{cases}$$

Veamos si es solución. Podemos observar que y es continua en todo $\mathbb{R}$ y que cuando $t \to n$ la parte de abajo es igual a la de arriba. Y que es derivable, con derivada

$$y_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, n) \\ \frac{t^2(t^3-n^3)^2}{3}, & t \in [n, \infty) \end{cases}$$

P4. *Haga un análisis cualitativo de la ecuación*

$$\dot{x} = x^2 - \frac{t^2}{1+t^2}$$

(a) Demuestre que existe un única solución que se aproxima asintóticamente a la recta $x = 1$.

(b) Demuestre que todas las soluciones bajo esta solución se aproximan asintóticamente a la recta $x = -1$.

(c) Demuestre que todas las soluciones sobre esta solución tienden a $+\infty$ en tiempo finito.

Sol.

(a) Tomemos la 0-isoclina, entonces tendriamos **Figura.** Notemos que la región R se tiene $\dot{x} > 0$, por lo que la solución que parte dentro de esa región, es creciente. Sea $z(t) := \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ con $t \in [0, \infty)$, entonces es supersolución, y en efecto

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} > 0 = f(t, z(t))$$

Y $y(t) = 1$ es subsolución ya que

$$\dot{y}(t) = 0 < 1 - \frac{t^2}{1+t^2}$$

Luego pensando en pasado si $x(0) \in [0, 1]$, entonces

$$z(t) < x(t) < y(t)$$

para tood $t \in (0, \infty)$ (se puede argumenta usando $T > 0$ y generando rectas, luego soluciones que no se tocan). Podemos ir definiendo las soluciones $a_T(t) < b_T(t)$, la cosa es que el límite de esto existen y son iguales. Por lo que hay una solución única que se aproxima a $x = 1$.

(b)

7.2. Ayudantía 2

P1.

(a) Sea $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de equilibrio de la ecuación $\dot{x} = f(x)$. Demuestre que si $f'(a) < 0$, entonces a es estable.

(b) Bajo las mismas condiciones del problema anterior, demuestre que existen constantes positivas α, δ, C tales que si $|y_0 - a| < \delta$, entonces $|y(t; y_0) - a| \leq Ce^{-\alpha t}|y_0 - a|$

Sol.

(a) Como a es un punto de equilibrio, se tiene que $f(a) = 0$. Sea $\delta > 0$ talque si $|y - a| < \delta$, entonces

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = \frac{f(y)}{y - a} < 0$$

Si $y > a$, entonces

$$f(y) < 0$$

y si $y < a$, entonces

$$f(y) > 0$$

Si hacemos el gráfico, tenemos que f decrece en una vecindad de a, y esto signifca que el punto a es estable.

Observación. Aquí tenemos otra forma de pensar en puntos estables/inestable. Si en el plano $x/f(x)$, f decrece en una vecindad de un punto a donde $f(a) = 0$, entonces es estable, si crece en una vecindad de un punto b donde $f(b) = 0$, entonces es inestable. Y si pasa una combinación de estos, es semiestable.

(b) Existe un $\delta > 0$ talque $f'(s) < 0$ para todo $|s - a| < \delta$. Ahora como f' es continua por hipótesis, y $[a - \delta, a + \delta] =: I$ es compacto, entonces f' alcanza su máximo, digamos que

$$-\alpha := \max_{s \in I} |f'(s)|$$

Si

$$\frac{\dot{y}}{f(y)} = 1$$

Entonces

$$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{f(u)} = t - t_0$$

Veamos por casos cuando $y_0 \in [a - \delta, a + \delta]$.

- Si $y-a>0$. Por el teorema del valor medio existe un $u \in [a-\delta, a+\delta]$ talque

$$f'(u) = \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq -\alpha$$

Entonces

$$f(y) \leq -\frac{1}{(y-a)} < 0$$

Y entonces

$$\frac{1}{-\alpha(y-a)} < \frac{1}{f(y)} < 0$$

Integrando de y_0 a y con $y < y_0$ obtenemos

$$t - t_0 \leq \frac{1}{-\alpha}\left(\log\left|\frac{y-a}{y_0-a}\right|\right) \Longleftrightarrow |y-a| \leq |y-a|e^{-\alpha(t-t_0)}$$

- Si $y-a<0$ es similar el argumento.

Propuesto 1. Sea $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ punto de equilibrio de la ecuación $\dot{x} = f(x)$. Demuestre que si $f'(a) > 0$, entonces a es inestable.

Sol. Si a es punto de equilibrio, entonces $f(a) = 0$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que si $|y-a| < \delta$ entonces

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} > 0$$

Si $y-a>0$ entonces

$$f(y) > 0$$

y si $y-a<0$, entonces

$$f(y) < 0$$

Luego la función va creciendo en una vecindad de a, por lo que a es un punto inestable.

P2. *Sea*

$$g(y) := \begin{cases} (y^2-1)^2 y^3 \operatorname{sen}(y^{-1}), & y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Encuentre los puntos de equilibrio de la ecuación $\dot{y} = g(y)$. Clasifíquelos.

Sol. Encontremos los puntos de equilibrio y clasifiquémoslo. Tenemos que

$$g(y) = 0$$

solamente cuando $y = 0, y = 1, y = -1, y = \frac{1}{k\pi}$ con $k \neq 0$ entero. Ahora usaremos el problema 1 para determinar si es un punto estable o no. Tenemos que

$$g'(y) = \begin{cases} (y^2-1)y(4\operatorname{sen}(y^{-1}) + 3(y^2-1)\operatorname{sen}(y^{-1}) - (y^2-1)\cos(y^{-1})), & y \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Podemos ver que

$$g'(0) = g'(1) = g'(-1) = 0$$

Esto significa que son puntos semiestables. Sea k par, supongamos que $y = +\frac{1}{k\pi}$, entonces

$$g'(y) = \left(\frac{1}{k^2\pi^2} - 1\right)\frac{1}{k\pi}\left(-\frac{1}{k^2\pi^2} + 1\right) = -\left(\frac{1}{k^2\pi^2} - 1\right)^2 \frac{1}{k\pi} < 0$$

Es decir $g'(y)$ es estable. Ahora si k es impar, tenemos

$$g'(y) = \left(\frac{1}{k^2\pi^2} - 1\right)\frac{1}{k\pi}\left(\frac{1}{k^2\pi^2} - 1\right) > 0$$

Por lo que $g'(y)$ es inestable.

P3. *Describa cómo cambia el retrato de gase correspondiente a la eucación dada cuando varía el parámetro $r \in \mathbb{R}$, es decir, dibuje el diagrama de bifurcaciones. Clasifique las bifurcaciones que ocurren y calcule el (los) valor(es) de bifurcación de r:*

(a) $\dot{x} = r - 3x^2$.

(b) $\dot{x} = 5 - re^{-x^2}$.

(c) $\dot{x} = x - rx(1-x)$.

(d) $\dot{x} = rx - 4x^3$.

P4. *La velocidad $v(t)$ en una caída libre se puede modelar por:*

$$m\dot{v} = mg - kv2$$

donde m es la masa del objeto. g es la aceleración de gravedad y $k > 0$ es una constante relacionada con la resistencia del aire.

(a) Encuentre los puntos de equilibrio y clasifíquelos.

(b) Calcular $\lim_{t\to\infty} v(t)$ *(conocida como velocidad terminal).*

Sol.

7.3. Ayudantía 3

P1. *Sea $t \in [a,b], p(t)$ una matriz $n \times n$ con entradas continuas, y $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua. Demuestre que la siguiente EDO tiene única solución para toda condición inicial $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$*

$$y'(t) + p(t)y = q(t)$$

Sol. Sean y, z dos soluciones de la edo. Entonces

$$\begin{aligned} y'(t) + p(t)y &= q(t) \\ z'(t) + p(t)z &= q(t) \end{aligned}$$

Restando obteenmos

$$y'(t) - z'(t) + p(t)(y - z) = 0$$

Definimos $x := y - z$ de clase $C^1(I)$, luego

$$\begin{cases} x'(t) = -p(t)x \\ x(t_0) = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$ se cumple probemos que x es única. Tenemos que

$$x(t) = -\int_{t_0}^{t} p(s)x(s)ds$$

Luego

$$|x(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |p(s)x(s)|$$

Si $p : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces p tiene un máximo y lo alcanza, digamos que $C := \max_{t\in[a,b]} |p(t)|$, luego

$$|x(t)| \leq \int_{t_0}^{t} C|x(s)|ds$$

Por el teorema de Grönwall se tiene que

$$|x(t)| \leq 0$$

Por lo tanto, $x(t) = 0$ es la única opción, por lo tanto, la ecuación tiene solución única.

P2. *Suponga que $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ satisface*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L(t)|x - y|$$

Muestre que la solución $\phi(t,x_0)$ *del problema*

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

Satisface

$$|\phi(t,x_0) - \phi(t,y_0)| \leq |x_0 - y_0| e^{\left|\int_{t_0}^t L(s)ds\right|}$$

Sol. Tenemos $\phi(t,x_0)$ con datos iniciales $x(t_0) = x_0$. Entonces

$$\begin{aligned}|\phi(t,x_0) - \phi(t,y_0)| &\leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t |f(t,x) - f(t,y)| \\ &= |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t L(s)|\phi(t,x_0) - \phi(t,y_0)|\end{aligned}$$

Aplicando Grönwall obtenemos

$$|\phi(t,x_0) - \phi(t,y_0)| \leq |x_0 - y_0| \exp\left(\int_{t_0}^t L(s)ds\right) \leq |x_0 - y_0| \exp\left(\left|\int_{t_0}^t L(s)ds\right|\right)$$

P3. *Sea* $f \in C(U,\mathbb{R})$, *donde* U *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$. *Sea* $(t_0,x_0) \in U$, *y* $T,\delta > 0$ *talque* $[t_0,t_0+T] \times \overline{B_\delta(x_0)} \subset U$. *Definimos*

$$L(t) := \sup_{\substack{x,y \in B_\delta(x_0) \\ x \neq y}} \left|\frac{f(t,x) - f(t,y)}{x - y}\right|$$

Muestre que si $L(t)$ *es localmente absolutamente integrable en* t *(es decir,* $\int_I |L(t)|dt < \infty$ *para todo intervalo compacto* I*) entonces existe una única solución local* $\overline{x}(t) \in C(I)$ *del problema de Cauchy*

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

donde I *es algún intervalo alrededor de* t_0.

P4. *Sea*

$$f(y) := \begin{cases} 4(y-1)^{3/4}, & y \geq 1 \\ 0, & y < 1 \end{cases}$$

(a) Demuestre que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

tiene única solución local y encuentre el intervalo máximal de su definición. ¿Es la solución maximal única?

(b) *Para cada $\varepsilon > 0$ fijo, construya una familia infinita de soluciones del problema*

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

definidas en todo $\mathbb{R}$ y distintas en el intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$. ¿Por qué este resultado no contradice el teorema de Picard-Lindelöf?

Sol. Si $f(y) = 0$ entonces $y' = 0$, luego y es constante. Supongamos que $f(y) \neq 0$, ent0nces

$$\frac{\dot{y}}{f(y)} = 1 \Longrightarrow \int_2^{y(t)} \frac{du}{f(u)} = t + C$$

Como pedimos que $f(y) \neq 0$, entonces $y \geq 1$ y luego podemos resolver la integral y despejar y, obteniendo la solución única

$$y(t) = (t+1)^4 + 1$$

en una vecindad (localmente). Para que todo funcione pediremos que t es talque $y \geq 1$. Si $t \to -1$ obtenemos 1, luego podemos extender la función de la siguiente manera

$$y(t) = \begin{cases} (t+1)^4 + 1, & t \geq -1 \\ 1. & t \leq -1 \end{cases}$$

Con intervalo máximal $\mathbb{R}$.

Probemos que es única en términos máximales. Sea $z(t)$ otra solución maxmal, entonces por PL para $t \geq 1$ se tiene que

$$z(t) = y(t)$$

7.4. I1

P1. *Considere el problema de valor inicial,*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 - t, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x(t_0) = 0, & t_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Identifique y dibuje las isoclinas correspondes a las pendiente $m = 0, m = 1, m = -1$.

(b) Demuestre que para $t_0 \geq 0$ la solución del PVI está definida para todos $t \geq t_0$ (se puede asumir que existe y es única sin justificación). Conjeture y pruebe su comportamiento asintótico cuando $t \to \infty$.

Sol.

(a

P2. *Determine la solución del siguiente problema de valor inicial y su intervalo máximo de definición,*

$$\dot{x} = -\frac{2tx}{3} + e^{t^2} x^4$$

con $x(0) = -1$.

P3. *Describa cómo cambia el retrato de fase correspondiente a la ecuación,*

$$\dot{x} = (x^2 - x)(r - e^{-x})$$

cuando varía el parámetro $r \in (0, \infty)$, es decir, dibuje el diagrama de bifurcaciones. Clasifique las bifurcaciones que ocurren y calcule el (los) valor(es) de bifuración de r.

P4. *Sea*

$$g(x) := \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & |x| < 1 \\ x^2 - 1, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

y considere el problema del valor inicial (PVI),

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) := e^{t^2} g(x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$, existen tiempos finitos

(a) Demuestre que para todo $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$, existen tiempos finitos $T_\pm = T_\pm(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$, tales que el problema tiene una única solución $x \in C^1((T_- T_+))$, cual es creciente y satisface,

$$\lim_{t \uparrow T_+} x(t) = 1 \quad y \quad \lim_{t \downarrow T_-} x(t) = -1$$

(Sugerencia: Es útil establacer que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo, $t \to h(t; t_0) := \int_{t_0}^{t} e^{s^2} ds$ es C^1 y define una biyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$).

(b) *Sea* $x_0 = -1$ *y* $t_0 = 0$. *Construya dos soluciones del PVI, definidas sobre* $\mathbb{R}$, *que son distintas en todo intervalo* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *para todo* $\varepsilon > 0$. *¿Por qué esto no contradice el teorema de Picard-Lindelöf?*

(c) *Pruebe que la solución del PVI con* $t_0 =$ *y* $x_0 = 2$ *explota en tiempo finito:*

$$\lim_{t \uparrow T} x(t) = +\infty$$

para algún $0 < T < \infty$.

7.5. Ayudantía 4

P1. *Sea la Edo,*

$$\begin{cases} \dot{y} = ty^2 \\ y(0) = x \end{cases}$$

donde su solución es $\phi(t,x) = y(t)$. Encuentre las ecuaciones variacionales para $\partial_x \phi(t,x), \partial_x^2 \phi(t,x)$ y una expresión para $\partial_x^2 \phi(t,x)$.

Sol. Sea $\phi(t,x) = y(t)$ solución. La derivada parcial $\partial x \phi_x(t,x)$, es que tano varía el x (la solución). Notemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} t\phi(t,x)^2 \\ &= t\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x)^2 \\ &= t2\phi(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x) \end{aligned}$$

Sea $z := \frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x)$, entonces,

$$\dot{z} = 2t\phi(t,x)z$$

Otra ecuación, que es separable. (Notemos que z no puede ser 0 sino la ecuación principal no funciona.) Luego,

$$\frac{\dot{z}}{z} = 2t\phi$$

Integrando,

$$\log|z| = \int_0^t 2s\phi ds + C$$

Luego,

$$\begin{aligned} |z| &= \exp\left(\int_0^t \frac{2s\phi^2}{\phi} ds\right) e^C \\ &= \exp\left(\int_0^t \frac{2\dot{\phi}}{\phi} ds\right) e^C \\ &= \exp(2\log|\phi||_0^t) e^C \\ &= \left|\frac{\phi(t,x)^2}{x^2}\right| e^C \end{aligned}$$

Podemos ignorar el valor absoluto por la constante, entonces si $z(0) = 1$, claramente,

$$z(t) = \frac{\phi^2(t,x)}{x^2}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(t,x) = \frac{\phi^2(t,x)}{x^2}$$

Obtenemos otra ecuación a resolver. En particular, una solución es,

$$\phi(t,x) = \frac{2x}{2-t^2x}$$

Ya que,

$$\begin{aligned}\partial_x\phi(t,x) &= \frac{2(2-t^2x) - 2x(-t^2)}{(2-t^2x)^2} \\ &= \frac{4}{(2-t^2x)^2}\end{aligned}$$

Encontrando lo que queriamos.

Determinemos $\partial_x^2\phi(t,x)$, usando el mismo truco anterior tenemos que,

$$\begin{aligned}\partial_t(\partial_x^2\phi(t,x)) &= \partial_x^2(\partial_t\phi(t,x)) \\ &= \partial_x^2(t\phi^2(t,x)) \\ &= t\partial_x(2\phi(t,x)\partial_x\phi(t,x)) \\ &= 2t((\partial_x\phi(t,x))^2 + \phi(t,x)\partial_x^2\phi(t,x))\end{aligned}$$

Tomando $z(t) := \partial_x^2\phi(t,x)$ se tiene la ecuación lineal no homogénea,

$$\dot{z} = 2t(\partial_x\phi(t,x))^2 + \phi(t,x)z$$

luego obtenemos,

$$\begin{cases}\dot{z} = 2t(\partial_x\phi(t,x))^2 + \phi(t,x)z \\ z(0) = 1\end{cases}$$

La solución está dada por,

$$z(t) = \mathcal{P}_\phi(t,0) + \int_0^t \mathcal{P}_\phi(t,s)2s(\partial_x\phi(s,x))^2 ds$$

Notemos que el propagador es,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\phi(t,0) &= \exp\left(\int_0^t 2s\phi(s,x)ds\right) \\ &= \frac{\phi^2(t,x)}{x^2}\end{aligned}$$

De forma general, $\mathcal{P}_\phi(t,s) = \frac{\phi^2(t,x)}{\phi^2(s,x)}$ y si,

$$\partial_x \phi(t,x) = \frac{\phi^2(t,x)}{x^2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{\phi^2(t,x)}{x^2} + \int_0^t \frac{\phi^2(t,x)}{x^4} 2s\phi^2(s,x)ds \\ &= \frac{\phi^2(t,x)}{x^2} + 2\frac{\phi^2(t,x)}{x^4}(\phi(t,x) - x) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\partial_x^2 \phi(t,x) = \frac{\phi^2(t,x)}{x^2} + 2\frac{\phi^2(t,x)}{x^4}(\phi(t,x) - x)$$

P2. *Muestre que en una dimensión, y si $f \in C^1$, se tiene,*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(t,x) = \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,\phi(s,x))ds\right)$$

Sol. Sea el problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = x \end{cases}$$

Vamos a usar el truco que realizamos en P1, por lo que tenemos,

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_x \phi(t,x)) &= \partial_x(\partial_t \phi(t,x)) \\ &= \partial_x(f(\phi(t,x))) \\ &= \partial_x f(\phi(t,x))\partial_x \phi(t,x) \end{aligned}$$

Tomando $z(t) := \partial_x \phi(t,x)$ obtenemos PVI sobre una ecuación variacional,

$$\begin{cases} \dot{z} = \partial_x f(\phi(t,x))z \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Que es una ecuación lineal homogénea, luego la solución es,

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathcal{P}_{\partial_x f(\phi)}(t,0)z(0) \\ &= \exp\left(\int_0^t \partial_x f(\phi(s,x))ds\right) \end{aligned}$$

De forma general podemos tomar los datos iniciales $u(t_0) = x$ y al aplicar el mismo procedimiento se llega a que,

$$\partial_x \phi(t,x) = \exp\left(\int_{t_0}^t \partial_x f(\phi(s,x))ds\right)$$

P3. *Considere una ecuación de primer orden en* $\mathbb{R}^1$*, con* $f(t,x):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continua. Suponga que,* $xf(t,x)<0$ *para* $|x|>R$*. Muestre que todas las soluciones existen para todo* $t>0$*.*

Sol. Por contradicción. Sea $\phi(t,x_0)$ solución no definida para todo $t>0$, sea

$$a := \sup\{t>0 : \phi(t,x_0) \text{ existe}\}$$

(es decir, a es el supremo del intervalo maximal de definición de $\phi(t,x_0)$).

Sin pérdida de generalidad, supongamos que,

$$\lim_{t\to a^-}\phi(t,x_0)=\infty$$

Luego existe un $M>0$ talque $\phi(t,x_0)>R+\varepsilon$ para todo $t\geq M$, esto implica que para todo $t\in[M,a)$,

$$\underbrace{\phi(t,x_0)}_{>0}\cdot f(t,\phi)<0$$

Entonces para todo $M\leq t<a$, $f(t,\phi)<0$, pero entonces para todo $M\leq t<a$, $\dot{\phi}(t)<0$, luego ϕ es decreciente, y finalmente, $\phi(M)\geq\phi(t)$ para todo $M\leq t<a$, siendo contradicción.

P4. *Sea* $f\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ *y,*

$$|f(t,x)|\leq g(|x|)$$

para alguna función continua y positiva $g\in C([0,\infty])$ *que satisface,*

$$\int_0^\infty \frac{dr}{g(r)}=\infty$$

Entonces todas las soluciones del problema de valor inicial,

$$\begin{cases}\dot{x}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

están definidas para todo $t\geq 0$*.*

Sol. Sea $x(t)$ una solución del PVI que no está definido en todo $t\geq 0$, sin pérdida de generalidad supongamos que en $t_0\geq 0$ se tiene que,

$$\lim_{t\to t_0^-}|x(t)|\to\infty$$

Digamos que, $r(t)=|x(t)|$, notemos que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r^2(t)&=2x(t)\cdot\dot{x}(t)\\ &\leq 2|x||f(t,x)|\\ &\leq 2|x|g(|x|)\\ &\leq 2r(t)g(r(t))\end{aligned}$$

Si $r(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, entonces existe un t_1 talque para todo $t \geq t_0$, $r(t) > 0$, sin pérdida de generalidad supongamos que $t_1 = 0$, entonces para tood $t > 0$ se tiene que,

$$2r(t)\dot{r}(t) \leq 2r(t)g(r(t)) \Rightarrow \dot{r}(t) \leq g(r(t)) \Rightarrow \frac{\dot{r}(t)}{g(r(s))} \leq 1$$

Integrando sobre la región t_0, t se tiene que,

$$\int_C^t \frac{\dot{r}(s)}{g(r(s))} = \int_{C_0}^s \frac{ds}{g(s)} \leq t + C$$

Definimos,

$$G(s(t)) := \int_{C_0}^{s(t)} \frac{ds}{g(s)}$$

Si $G(s) \to \infty$ cuando $s \to \infty$ entonces existe un s_1 talque para todo $s \geq s_1$ se tiene que,

$$G(s) > t_0 + C$$

También existe un $t_2 < t_0$ talque para todo $t \in (t_2, t_0)$ se tiene que,

$$r(t) > s_1$$

Por lo tanto para $t \in (t_2, t_0)$ se tiene que,

$$G(r(t)) > G(s_1) > t_0 + C$$

Siendo una clara contradicción. Por lo tanto x está definido para todo $t \geq 0$.

7.6. Ayundatía 5

P1. *Halle la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y$$

Sol. Tenemos una ecuación lineal homogéneo, luego la solución está dada por,

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$$

De forma recursiva tenemos que $A^n = 3^{n-1}A$ con $n \geq 1$, ahora estudiemos e^{At}, por definición tenemos,

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k 3^{k-1} A}{k!} \\ &= I + \frac{A}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3t)^k}{k!} \\ &= I + \frac{A}{3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3t)^k}{k!} - 1 \right) \\ &= I + \frac{A}{3}(e^{3t} - 1) \end{aligned}$$

Esto expresado como matriz sería,

$$e^{At} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{3t}+2 & e^{3t}-1 & e^{3t}-1 \\ e^{3t}-1 & e^{3t}+2 & e^{3t}-1 \\ e^{3t}-1 & e^{3t}-1 & e^{3t}+2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la solución es,

$$y(t) = (I + \frac{A}{3}(e^{3t-3t_0} - 1))y_0$$

P2. *Encuentre explícitamente la solución del sistema,*

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix}$$

Vamos a usar la fórmula de Durhamd, es decir, la solución de la ecuación esta dada por,

$$y(t) = \Pi(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Pi(t, s) \begin{pmatrix} e^{-4s} \\ e^{-4s} \end{pmatrix} ds$$

Notemos que, $\Pi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, determinemos una forma simple del propagador, para ello usaremos la forma canónica de Jordan, el polinomio característico de la matriz es,

$$\det \begin{pmatrix} 3 - z & 1 \\ -1 & 5 - z \end{pmatrix} = z^2 - 8z + 15 + 1 = (z - 4)^2$$

luego el valor propio de $z = 4$, determinemos los vectores propios,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basta tomar $v_1 = (1, 1)^T$, en particular, la multiplicidad geométrica de 4 es 1, por lo que,

$$A_J = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinemos el otro vector, tenemos que,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basta tomar $v_2 = (0, 1)^T$, luego se tiene que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{4t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{4t} \begin{pmatrix} -t & t + 1 \\ -t & t + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obteniendo que,

$$\Pi(t,t_0) = e^{4t-4t_0}\begin{pmatrix} -t+t_0 & t-t_0+1 \\ -t+t_0 & t-t_0+1 \end{pmatrix}$$

Estudiemos la parte con la integral,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \Pi(t,s)\begin{pmatrix} e^{-4s} \\ e^{-4s} \end{pmatrix} ds &= e^{4t}\int_{t_0}^{t} e^{-8s}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ds \\ &= -\frac{e^{-4t}-e^{4t-8t_0}}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente la solución está dada por,

$$y(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} -t+t_0 & t-t_0+1 \\ -t+t_0 & t-t_0+1 \end{pmatrix} y_0 + -\frac{e^{-4t}-e^{4t-8t_0}}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P3. *Considere el sistema,*

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \begin{cases} \frac{6x_1}{t^2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Demuestre que,

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (t^3, 3t^2) \\ f_2(t) &= (|t|^3, 3t2sgn(t)) \end{aligned}$$

son soluciones del sistema. Muestre que $\{f_1, f_2\}$ son linealmente independiente en $\mathbb{R}$, pero $W(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. ¿Por qué esto no contradice el criterio de independencia lineal de las soluciones del sistema?

Sol. Sea $y = (x_1, x_2)^T$, luego se obtiene la ecuación,

$$\dot{y} = A(t)y$$

donde,

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6/t^2 & 0 \end{pmatrix}, & t \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & t = 0 \end{cases}$$

Vemos que, $\dot{f}_1 = (3t^2, 6t)^2$ y $A(t)f_1 = (3t^2, 6t)$, siendo solución. Para la otra solución notemos que,

$$f_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}, & t > 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & t = 0 \\ \begin{pmatrix} -t^3 \\ -3t^2 \end{pmatrix}, & t < 0 \end{cases}$$

Claramente es solución, veamos que son L.I, sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0$$

tomando $t = -1$ se observa que,

$$\begin{pmatrix} -c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $c_1 = c_2$, tomando $t = 1$ también se observa,

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $c_1 = -c_2$, por lo que necesariamente $c_1 = c_2 = 0$, luego f_1, f_2 son L.I como funciones. Determinemos el Wronskiano, como f_1, f_2 son L.I entonces,

$$\begin{aligned} W(t) &= \det(f_1, f_2) \\ &= \det \begin{pmatrix} t^3 & |t|^3 \\ 3t^2 & 3t^2\text{sgn}(t) \end{pmatrix} \\ &= 3t^5\text{sgn}(t) - 3t^2|t^3| \end{aligned}$$

Si $t > 0$ entonces $W(t) = 0$, si $t = 0$ es claro que $W(t) = 0$ y si $t < 0$ entonces $W(t) = -3t^5 + 3t^5 = 0$.

Tenemos que $W(t) = 0$ para todo t pero f_1, f_2 son continuas, pero esto ocurre debido a que la matriz $A(t)$ no es continua en t por lo que no contradice el teorema.

P4. *Sean $A, B \in M_k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$. Demuestre que,*

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ si y sólo si $AB = BA$

Sol. Supongamos que A, B conmutan, sea el PVI,

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+B)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Claramente la solución es,

$$x(t) = e^{t(A+B)}x_0$$

También sabemos que las soluciones de este PVI son únicas por ello probaremos que $e^{tA}e^{tB}x_0$ es también solución de este PVI, sea,

$$y(t) = e^{tA}e^{tB}x_0$$

Derivado observamos que,

$$\begin{aligned}\left(e^{tA}e^{tB}\right)' &= Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}\\ &= (A+B)e^{tA}e^{tB}\end{aligned}$$

como A, B conmuta y sastisface el PVI, luego,

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$$

Lema. *Si* $A = B$ *entonces* $e^{tA}B = Be^{tA}$

Dem. Por definición de la exponencial,

$$\begin{aligned}e^{tA}B &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}B\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^kB}{k!}\\ &= B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\\ &= Be^{tA}\end{aligned}$$

■

Probemos la otra dirección, supoganmos que,

$$e^{t(A+B)} = e^{tAtB}$$

Para ello derivaremos, entonces,

$$\begin{aligned}(A+B)e^{t(A+B)} &= Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}\\ &= Ae^{t(A+B)} + e^{tA}Be^{tB}\end{aligned}$$

Luego, $Be^{t(A+B)} = e^{tA}Be^{tB}$, por hipótesis,

$$Be^{tA}e^{tB} = e^{tA}Be^{tB}$$

Si A es constante, entonces e^{tA} es invertible con inversa e^{-tA} (es más, tiene inversa para todo $A(t)$), luego,

$$Be^{tA} = e^{tA}B$$

Derivando,

$$BAe^{tA} = Ae^{tA}B = ABe^{tA}$$

Por lo tanto, $AB = BA$, es decir, A, B conmutan.

7.7. Ayudantía 6

P1. *Considere el sistema lineal homogéneo* $\dot{x} = Ax$ *donde,*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

grafique el retrato de fase,

(a) Para $a = b = 3, c = 2, d = 5.$

(b) Para $a = 2, b = 1, c = 3, d = -2.$

(c) Para $a = 4, b = 1, c = -1, d = 2.$

(d) Para $a = -1, b = 0, c = 0, d = -1.$

P2. *Sea* A *una matriz de* $n \times n$ *y,* β *una constante. Consideremos la ecuación no homogénea,*

$$\dot{x} = Ax + p(t)e^{\beta t}$$

donde $p(t)$ *es un vector cuyas entradas son polinomios. Definimos el grado de* p *como,*

$$\deg(p(t)) := \max_{1\leq j\leq n} \deg(p_j(t))$$

Muestre que esta ecuación tiene una soluci+on particular de la forma,

$$q(t)e^{\beta t}$$

donde $q(t)$ *es un vector polinomial con* $\deg(q(t)) = \deg(p(t))$ *si* β *no es valor propio de* A, *y* $\deg(q(t)) = \deg(p(t)) + a$ *si* β *es un auto valor propio de* A *con multipliplicidad algebraica* a.

P3. *Resolver el PVI,*

$$\begin{cases} y^{(4)} - y^{(3)} = t + e^t \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) \end{cases}$$

P4. *Consideremos la ecuación diferencial,*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, *y* $a \neq 0$.

(a) Encuentre criterio sobre los coeficientes a, b, c *para que cada solución real* $y(t)$ *de la ecuación satisfaga* $\sup_{t<0}|y(t)| < \infty$.

(b) Encuentre criterio sobre los coeficientes a, b, c *para que cada solución real* $y(t)$ *de la ecuación satisfaga* $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Sol.

(a) Consideremos la ecuación equivalente,

$$\dot{x} = Ax$$

con $x = (y, y')^T$, notemos que los valores propios de A son,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hay dos casos, si los valores propios son distintos reales, entonces,

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$

Y entonces,

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

De aquí podemos estudiar el comportamiento de a, b, c.

Si son iguales reales, entonces,

$$x(t) = v_1 e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) + v_2 e^{\lambda t} c_2$$

Luego,

$$y(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$$

Por último cuando los valores propios son complejos, en este caso se tiene que son conjugados del otro, luego si $\alpha = \lambda + iw$, entonces

$$x(t) = e^{\lambda t}(x_0 \cos(wt) - 2Im(vc)\operatorname{sen}(wt))$$

Luego,

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}(algo)$$

donde ese $algo$ es acotado.

Propuesto 1. *Suponga que todos los valores de propios de A satisfacen $Re(\lambda_i) < 0$. Muestre que todas las soluciones de,*

$$x'(t) = Ax(t) + g(t), \ \ x(0) = x_0$$

satisface,

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

si $\lim_{t \to \infty} |g(t)| = 0$ (hint: Fórmula de Duhamel) ¿Qué pasa si $\lim_{t \to \infty} |g(t)| = g_0$?

Propuesto 2. *Considere la ecuación $\dot{x} = Ax + h(t)$ donde A es una matriz constante que tiene n valores propios distitnos con parte real negativa y, $h(t)$ es continua y acotada sobre $\mathbb{R}$.*

(a) Demuestre que existe una única solución acotada sobre $(-\infty, \infty)$.

(b) Demuestre que si $|h(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces toda solución tiende a 0 cuando $t \to \infty$.

7.8. Ayudantía 7

P1. *Resuelva la ecuación,*

$$\frac{d^2x}{t^2}(t) + w_0^2 x(t) = \cos(wt)$$

donde $w, w_0 > 0$. Analice el comportamiento cuando $t \to \infty$. ¿Qué pasa si $w = w_0$?

Sol. Vamos a estudiar dos casos, cuando $w_0 \neq w$ y cuando $w_0 = w$.

- $w_0 \neq w$**.** Tenemos una ecuación lineal no homogénea, por lo que debemos encontrar la solución de la ecuación homogénea y otra particular. La solución de la ecuación homogénea es $y^2 + w_0^2 = 0$, luego $y^2 = \pm i w_0$, entonces

$$x_h = A\cos(w_0 t) + B\,\mathrm{sen}(wt)$$

para algunos A, B. Encontremos una solución particular, pero antes consideremos el siguiente resultado,

Lema 1. *Sea la ecuación $\dot{x} = Ax + \vec{p}(t)e^{Bt}$, entonces tiene una solución de la forma $x(t) = \vec{q}(t)e^{Bt}$, donde,*

- $\deg(\vec{q}(t)) = \deg(\vec{p}(t))$ *si y sólo si B no es valor propio de A.*
- $\deg(\vec{q}(t)) = \deg(\vec{p}(t)) + a$ *donde a es la multiplicidad algebraica de B si es valor propio.*

Sabemos que,

$$\cos(wt) = \frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}$$

Encontremos la solución particular de la ecuación,

$$\ddot{x} + w_0^2 x = e^{iwt}$$

Pasando a una ecuación linal homogénea de matrices, se tiene que,

$$z = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad \dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=p(t)} e^{iwt}$$

como iw es valor propio de A, entonces por el lema se tiene que,

$$z(t) = \vec{q}(t)e^{iwt}$$

donde $\deg(\vec{q}(t)) = 0$, entonces, mirando la primera coordenada se llega a que,

$$x = ce^{iwt}$$

Como es solución de la ecuación original, podemos determinar la solución, esto mismo se puede hacer con $-iw$ al ser valor propio, determinemos el de cada uno. Si,

$$x_{p,+} = ce^{iwt} \Rightarrow \ddot{x} = -w^2 ce^{iwt}$$

Entonces,

$$c(w_0^2 - w^2) = 1$$

Por lo tanto,

$$y_{p,+} = \frac{e^{iwt}}{w_0^2 - w^0 2}$$

Análogamente podemos hacerlo con $y_{p,-} := ce^{-iwt}$, luego se obtiene que,

$$y_p = \frac{y_{p,+} - y_{p,-}}{2} = \frac{\cos(wt)}{w_0^2 - w^2}$$

siendo la solución particular que queriamos determinar. Finalmente la solución general es,

$$y = A\operatorname{sen}(w_0 t) + B\cos(w_0 t) + \frac{\cos(wt)}{w_0^2 - w^2}$$

- $w_0 = w$. Para este caso usaremos otro lema.

  Lema 2. *Sea $f(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos(\beta t) + R(t)\operatorname{sen}(\beta t))$ con $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y p, q polinomios talque,*

  $$\max(\deg(P), \deg(R)) = m$$

  Entonces,

  $$y_p = t^s e^{\alpha t}(S(t)\cos(\beta t) + T(t)\operatorname{sen}(\beta t))$$

  donde S, T son polinomios de grados menor o igual a m y s es la multiplicidad algebraica de $\alpha + i\beta$ vista como raíz de la ecuación característica.

  Se tiene que, $f(t) = e^{0\cdot t}(1 \cdot \cos(w_0 t)) = \cos(w_0 t)$, si $\alpha + i\beta = iw_0$, buscamos una solución del tipo,

  $$y_p = t(C\cos(w_0 t) + D\operatorname{sen}(w_0 t))$$

  Derivando,

  $$y_p' = (C\cos(w_0 t) + D\operatorname{sen}(w_0 t)) + t(-w_0 C\operatorname{sen}(w_0 t) + w_0 D\cos(w_0 t))$$

Derivando nuevamente,

$$y_p'' = 2(C\cos(w_0t) - D\,\mathrm{sen}(w_0t))w_0 - t(C\cos(w_0t) + D\,\mathrm{sen}(w_0t))w_0^2$$

Terminar...

P2. *Verificar que la ecuación de segundo orden,*

$$\ddot{x} + (1 - t^2)x = 0$$

se puede factorizar como,

$$\left(\frac{d}{dt} - t\right)\left(\frac{d}{dt} + t\right)x = 0$$

Luego encuentre la solución.

Sol. Se define,

$$\left(\frac{d}{dt} \pm t\right)x := \frac{dx(t)}{dt} \pm tx(t)$$

Luego,

$$\left(\frac{d}{dt} - t\right)\left(\frac{d}{dt} + t\right)x = \ddot{x} + (1 - t^2)x$$

Notar que si $y(t)$ es solución de la ecuación,

$$\left(\frac{d}{dt} + t\right)x = 0$$

entonces resuelve la ecuación,

$$\dot{x} + tx = 0$$

Resolviendo obtenemos que,

$$x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Encontremos otra solución usando reducción, por fórmula,

$$x_2(t) = x_1(t)\int x_1^{-2}(t)e^{\int Pdt}dt$$
$$= ...$$

Entonces la segunda solución es,

$$x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\int e^{t^2}dt$$

Y por lo tanto, existen $A, B \in \mathbb{R}$ talque,

$$x(t) = Ax_1 + Bx_2$$

P3.

(a) *Verifique que el poblema,*

$$\begin{cases}(1-2t-2t^2)\ddot{y}+2(t+1)\dot{y}-2y=0\\ y(0)=y'(0)=1\end{cases}$$

tiene como solución un polinomio de grado 1. Encuentre este polinomio.

(b) *Encuentre la solución general de la ecuación diferencial,*

$$(1-2t-t^2)\ddot{y}+2(1+t)\dot{y}-2y=0$$

Sol.

(a) Supongamos que $z(t)=At+B$ es solución, luego,

$$z''(t)=0, z'(t)=A$$

si $z'(0)=z(0)=1$, entonces $A=1, B=1$, por lo que $z(t)=t+1$, veamos que solución,

$$2(t+1)(1)-2(t+1)=0$$

Luego z si es solución.

(b) Consideremos la ecuación,

$$(1-2t-t^2)y''+2(t+1)y'-2y=0$$

Notemos que $(1-2t-t^2)\neq 0$ para todo $t\in\mathbb{R}$, luego,

Sol.

(a) La solución es de la forma,

$$z(t)=A+tB$$

con $A,B\in\mathbb{R}$, luego $z''=0, z'=A=z'(0)=1$, reemplanzando se llega a que,

$$2(1+t)-2At-2tB=0$$

Propuesto 1. *Mostraremos que cualquier ecuación lineal de orden n se puede factorizar en ecuaciones de ordne 1- Sea $\phi_1,\ldots,\phi_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación de orden n $L_n(f)=0$. Sea*

$$L_1(f)=\frac{W(\phi_1,f)}{\phi_1}=f'-\frac{\phi_1'}{\phi_1}f$$

definisamos $\psi_j=L_1(\phi_j)$. Muestre que $\psi_2,\ldots,\psi_n$ son linealmente independientes y,

$$L_n(f)=L_{n-1}(L_1(f)),\ \ L_{n-1}(f)=\frac{W(\psi_2,\ldots,\psi_n,f)}{W(\psi_2,\ldots,\psi_n)}$$

7.9. Ayudantía 8

P1. *Considere,*

$$\dot{x} = a(t)Ax$$

donde $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función periódica con periodo* T *y* A *es una matriz constante de* 2×2. *Calcule los exponenetes de Floquet y encuentre matrice* $\mathcal{P}(t, t_0)$ *y* $Q(t_0)$ *tales que,*

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0)e^{(t-t_0)Q(t_0)}$$

Sol. Sea $B(t) := a(t)A$, notemos que $B(t)$ es periódica con periodo T ya que,

$$B(t + T) = a(t + T)A = a(t)A = B(t)$$

También notemos que,

$$\begin{aligned} B(t)B(s) &= a(t)a(s)A^2 \\ &= a(s)a(t)A^2 \\ &= B(s)B(t) \end{aligned}$$

Luego la solución está dada por,

$$\begin{aligned} \Pi(t, t_0) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)Ads\right) \\ &= \exp\left(A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) \end{aligned}$$

Definimos,

$$C := \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)ds$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} a(s)ds &= C(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{a(s) - C}_{g(s)}\, ds \\ &= C(t - t_0) + G(t) \end{aligned}$$

Notar que,

$$\begin{aligned} G(t + T) - G(t) &= \int_{t}^{t+T} g(s)ds \\ &= \int_{t}^{t+T} a(s) - Cds \\ &= \int_{t}^{t+T} a(s)ds - TC \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} a(s) - TC \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Pi(t,t_0) &= \exp\left(A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)\\ &= \exp(C(t-t_0)A + G(t)A)\\ &= \exp(C(t-t_0)A)\exp(G(t)A)\\ &= \exp(G(t)A)\exp(C(t-t_0)A)\end{aligned}$$

Por lo tanto $Q(t_0) = AC, P(t,t_0) = \exp(G(t)A)$ que es periódica de periodo T. Ahora C es una constante, luego los exponenetes de Floquet son los valores propios de A.

P2. *Analice la ecuación de Hill,*

$$\ddot{x} + q(t)x = 0$$

donde $q(t+T) = q(t)$.

Sol. Notemos que a partir de la ecuación de Hill podemos obtener una ecuación periódica. Y en efecto, vemos que la ecuación matricial equivalente es,

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix} y$$

Que es periódica con peridodo T.

P3. *Considere la ecuación periódica,*

$$\ddot{x} + \dot{x} + (1 + \varepsilon\cos(2t))x = 0$$

(a) Demuestre que para todo $\varepsilon \neq 0$, *los multiplicadores de Floquet* ρ_1, ρ_2 *para el sistema correspondiente satisfacen* $\rho_1\rho_2 = e^{-\pi}$

(b) Demuestre que existe $\varepsilon_0 > 0$ *talque para todo* ε *con* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ *la ecuación es asintóticamente estable.*

Sol.

(a) Sea $\varepsilon \neq 0$. Notemos que la ecuación es equivalente a la ecuación,

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-\varepsilon\cos(2t) & -1 \end{pmatrix} y$$

Que es periódica con periodo $T = \pi$. Entonces por el teorema de Floquet existe la siguientes descomposición,

$$\Pi(t,t_0) = P(t,t_0)\exp(Q(t_0)(t-t_0)$$

con $Q(t_0) = \frac{1}{\pi}\log(M(t_0))$. Por definición,

$$\begin{aligned}M(t_0) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\pi} A(s)ds\right)\\ &= \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & -\pi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego,

$$Q(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si φ_1, φ_2 son los exponenetes de Floquet, entonces $\varphi_1 + \varphi_2 = -1$ y si ρ_1, ρ_2 son los multiplicadores de Floquet, llegamos a que,

$$\rho_1\rho_2 = \exp(\pi(\varphi_1 + \varphi_2)) = e^{-\pi}$$

(b) Notemos que,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \varepsilon\cos(2t) & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon\cos(2t) & 0 \end{pmatrix}$$

A la matriz que no depende de t la diremos $A(t)$ y a la otra le diremos $B(t)$. Luego tenemos un sistema perturbado. Notemos que los valores propios de A son,

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$$

Con parte real negativo. Esto implica que la ecuación,

$$\dot{x} = Ax$$

Es asintóticamente estable. Ahora la norma $B(t)$ satisface lo siguiente,

$$\|B(t)\| \leq |\varepsilon\cos(2t)| < |\varepsilon|$$

Digamos que a partir de $s \geq s_0$ se tiene,

$$\|\Pi_A(t,s)\| \leq Ce^{-\frac{1}{2}(t-s)}$$

Sea $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño talque,

$$\varepsilon_0 C < \frac{1}{2}$$

Luego como $\varepsilon_0 C < \frac{1}{2}$ se tiene que,

$$\|\Pi_{A+B}(t,s)\| \leq De^{-(1/2-\varepsilon_0 C)(t-s)}$$

Para todo $t \geq s > 0$. Es decir, la ecuacion es asintóticamente estable. Tomando $\varepsilon \in \mathbb{R}$ talque $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ se llega a que también es asintóticamente estable.

P4. *Sea $A \in C([0,T], \mathbb{R}^{n\times n})$. Suponga que el sistema,*

$$\dot{x} = A(t)x$$

tiene como única solución periódica de periodo T a la función nula. Demuestre que para toda función $f \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ existe una única solución periodica de periodo T a,

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

7.10. Ayudantía 9

P1. (Ecuación de calor) *Resuleva la ecuación,*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

con condiciones de borde $u(t,0) = u_0, u(t,1) = u_1$ y condición inicial $u(0,x) = u(x)$. ¿Que se puede decir sobre,

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x)$$

?

Sol. Consideremos $v(t,x) := u(t,x) + (u_0 + u_1)x - u_0$. Notemos que v es solución de la ecuación de calor ya que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) &= \frac{\partial}{\partial}u(t,x)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x)\end{aligned}$$

Notemos que $v(t,0) = v(t,1) = 0$ y que $v(0,x) = u(x) - u_0 =: v(x)$.

Supongamos que $v(t,x)$ se puede separar en dos funciones w, y de forma que, $v(t,x) = w(t)y(x)$. Reemplazando en la ecuación obtenemos,

$$\dot{w}(t)y(x) = w(t)y''(x)$$

Si $w, y \neq 0$ tenemos,

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{y''}{y} = -\lambda \in \mathbb{R}$$

De aquí podemos generar dos ecuaciones,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0\\ y(0) = y(1) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{w} + \lambda w = 0\end{cases}$$

- **Caso 1.** Si $\lambda \geq 0$ entonces, $w = c_1 e^{-\lambda t}$ y,

  $$y(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_3\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$$

  Si $y(0) = y(1) = 0$ entonces $c_2 = 0$ y $\lambda = n^2\pi^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

  $$v_n(t,x) = k_n e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen}(n\pi x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí definimos,

$$v(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen}(n\pi x)$$

Notemos que,

$$v(0,x) = v(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Así por Fourier,

$$k_n = 2\int_0^1 v(x)\operatorname{sen}(n\pi x)dx$$

- **Caso 2.** Si $\lambda = 0$ entonces $y = 0$ siendo imposible.
- **Caso 3.** Si $\lambda < 0$ entonces,

  $$y(x) = c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_3 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

  De aquí se concluye que $c_2 = c_3 = 0$, luego $y = 0$. Siendo imposible.
- **Caso 4.** Puede pasar que,

  $$\dot{w}y = wy''$$

  con $y = 0$. En este caso se tiene que $v = 0$ y es solución si y sólo si $v(x) = 0$. Si $w = 0$ entonces $v = 0$ es solución si y sólo si $v(x) = 0$.

Veamos que pasa cuando $t \to \infty$. Vemos que el único caso a estudiar es el primero. Vemos que,

$$v(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen}(n\pi x) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Al haber un e^{-algo}. Luego,

$$u(t,x) = v(t,x) + u_0 - (u_0 - u_1)x \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} u_0 - (u_0 - u_1)x$$

Es decir, la temperatura cambia linealmente respecto a x.

P2. *Demuestre que todo operador lineal compacto es acotado y que el producto de un operador lineal acotado y un operador lineal compacto es compacto.*

Sol.

(a)

(b) Sea A un operador compacto y sea B acotado. Probemos que AB es compacto. Sea $\{f_n\}$ una sucesion acotada, entonces $\{Bf_n\}$ es una sucesión acotada, entonces $\{ABf_n\}$ tiene una subsucesión convergente y por tanto AB es compacto.

P3. *Sean X, Y espacios normados. Sea $\mathcal{L}(X,Y)$ el conjunto de operadores lineales acotados de X a Y.*

(a) Demuestre que si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$

Sol.

(a) Sea A operador acotado con dimensión $Im(A)$ finito. Sea $\{x_n\} \subseteq X$ sucesión acotada, digamos que $\|x_n\| \leq M$, luego se cumple que,

$$\|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\| \leq \|A\|M < \infty$$

Luego $\{Ax_n\} \subseteq Im(A)$ y es acotado. Entonces $\{\|Ax_n\|\} \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión real acotada y luego existe una subsucesión convergente, esto implica que $\{Ax_n\}$ tiene subsucesión convergente y por tanto A es compacto.

(b) Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de X, entonces,

$$Im(A) = \langle Av_1, \ldots, Av_n \rangle$$

que es de dimensión a lo más n. Entonces por la parte (a) se tiene que A es compacto.

P4.

Sol.

8. Tareas

8.1. Primera Tarea

Faltan enunciados

8.2. Segunda Tarea

P1.

(a) Consideremos el PVI,

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Luego la función de flujo del PVI es $\phi(t, x_0) = x(t)$. Tomando $t = 0$ se observa que,

$$\phi(0, x) = \mathbb{I}x = x$$

Luego al estudiar J se observa que,

$$\begin{aligned} J(0, x_0) &= \det\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, x_0)\right) \\ &= \det(\mathbb{I}) = 1 \end{aligned}$$

Entonces existe una vecindad de $(0, x_0)$ donde $\partial_x\phi$ es invertible y luego es un difeomorifismo localmente (diferenciable). Por lo que podemos tomar un cilindro $I \times B \subseteq V$ donde $\partial_x\phi$ es diferenciable, en particular, existe un cilindro $I \times B$ donde J es diferenciable. Ahora usaremos el siguiente resultado,

Corolario de la fórmula de Jacobi *Sea A una matriz $\mathbb{R}^{n\times n}$. Si A es un mapa de $t \in \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^{n\times n}$ diferenciable, entonces,*

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t)) \cdot Tr\left(A(t)^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right)$$

Determinemos la derivada de J respecto a t, por definición se tiene que,

$$\begin{aligned} \dot{J}(t, x_0) &= \det(\partial_x\phi(t, x_0)) \cdot Tr(\partial_x\phi(t, x_0)^{-1}\partial_t\partial_x\phi(t, x_0)) \\ &= J(t, x_0) \cdot Tr(\partial_x\phi(t, x_0)^{-1}\partial_x(f(\phi(t, x_0)))) \\ &= J(t, x_0) \cdot Tr(\partial_x\phi(t, x_0)^{-1}\partial_x f(\phi(t, x_0))\partial_x(t, x_0)) \\ &\overset{(\star)}{=} J(t, x_0) \cdot Tr(\partial_x\phi(t, x_0)^{-1}\partial_x(t, x_0)\partial_x f(\phi(t, x_0))) \\ &= J(t, x_0) \cdot Tr(\partial_x f(\phi(t, x_0))) \\ &= J(t, x_0)\mathrm{div} f(\phi(t, x_0)) \\ &= \mathrm{div} f(\phi(t, x_0))J(t, x_0) \end{aligned}$$

La condición $(\star)$ se cumple ya que la traza no cambia al cambiar de orden las matrices, es decir, si A, B son matrices cualesquieras entonces,

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

Finalmente hemos probado que J resuelve el problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \dot{J} = \mathrm{div} f(\phi(t, x_0))J \\ J(0, x_0) = 1 \end{cases}$$

como queriamos probar.

(b) Sea ϕ la función de flujo de la ecuación. Notemos que,

$$\begin{aligned} \frac{dH(\phi)}{du} &= \partial_x H(\phi)\partial_p H(\phi) + \partial_p H(\phi)(-\partial_x H(\phi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por la regla de la cadena y por hipótesis del enunciado. Por tanto, H es una constante, digamos que,

$$C := H(x, p) = |x|^4 + |p|^4$$

Con esto podemos ver que $\phi(t, x, p)$ es acotada, si $|x|^4, |p|^4 \geq 0$, entonces $|x|^4 \leq C, |p|^2 \leq C$, luego,

$$\begin{aligned} |\phi(t, x, p)| &= \sqrt{|x_0|^2 + |p_0|^2} \\ &\leq \sqrt{2\sqrt{C}} \end{aligned}$$

para todo $(t, x_0, p_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$. Por tanto, por definición de la función de flujo es infinitamente diferenciable y además no explota en tiempo finito, por tanto, está definido en todo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$.

Probemos que el volumen de $\phi(t, B)$ es igual al volumen de B con B una bola abierta. Sea

$$J(t, u_0) := \det(\partial_u \phi(t, u_0))$$

con $u_0 = (x_0, p_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ fijo. Por la parte (a) sabemos que J resuelve el PVI

$$\begin{cases} \dot{J} = \mathrm{div} f(\phi(t, u_0))J \\ J(0, u_0) = 1 \end{cases}$$

donde $f(u) := (\partial_p H(u), -\partial_x H(u))$. Determinemos la Jacobiana de J,

$$J_f = \begin{pmatrix} \partial_x \partial_p H & \partial_p^2 H \\ -\partial_x^2 H & -\partial_x \partial_p H \end{pmatrix}$$

De aquí podemos estudiar la divergerncia de f, por definición tenemos,

$$\begin{aligned} \mathrm{div} f &= \partial_x \partial_p H - \partial_x \partial_p H \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, por lo anterior se tiene la ecuación,

$$\begin{cases} \dot{J} = 0 \\ J(0, u_0) = 1 \end{cases}$$

Concluyendo que $1 = J(t, u_0) = \det(\partial_u \phi(t, u_0))$ para todo $(t, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$. Hemos probado que el determinante de $\partial_u \phi(t, u)$ es invertible (al ser no nulo) para todo t fijo y $u \in \mathbb{R}^{2n}$, por lo que por definición de volumen se tiene que para una bola $B \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(\phi(t, B)) &= \int_{\phi(t,B)} 1 dv \\ &= \int_B \det(\partial_u \phi(t, u)) du \\ &= \int_B 1 du \\ &= \mathrm{Vol}(B) \end{aligned}$$

P2.

(a) Recordemos que, para un vector $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene que,

$$|x|^2 = x^T \cdot x$$

donde $\cdot$ es el producto punto. Sea $X(t) := \Pi(t,0)$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$, luego se tiene que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|Xv|^2 &= \left(\frac{d}{dt}(Xv)^T\right) + (Xv)^T\left(\frac{d}{dt}Xv\right) \\
&= (A(t)X_v)^T Xv - (Xv)^T A(t)Xv \\
&= (Xv)^T(\lambda(t)\mathbb{I} - B(t))Xv + (Xv)^T(\lambda(t)\mathbb{I} + B(t))Xv \\
&= 2\lambda(t)(Xv)^T Xv \\
&= 2\lambda(t)|Xv|^2
\end{aligned}$$

De esta forma hemos construido una EDO, en particular, si definimos $y(t) := |X(t)v|^2$ se tiene que el PVI,

$$\begin{cases} \dot{y} = 2\lambda(t)y \\ y(0) = |v|^2 \end{cases}$$

Que tiene solución,

$$y(t) = \exp\left(\int_0^t 2\lambda(s)ds\right) y_0 = \left(\exp\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)|v|\right)^2$$

Por tanto,

$$|\Pi(t,0)v|^2 = \exp\left(\int_0^t 2\lambda(s)ds\right)|v|^2$$

Para concluir el resultado consideramos $|v| \neq 0$, luego,

$$\frac{|\Pi(t,0)v|^2}{|v|^2} = \exp\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^2 \Longrightarrow \frac{|\Pi(t,0)v|}{|v|} = \exp\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)$$

Por lo tanto,

$$\|\Pi(t,0)\| = \exp\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)$$

Como queriamos probar.

(b) Sea la matriz,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix} = a(t)\mathbb{I} + \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -b(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, $A(t) = a(t)\mathbb{I} + B(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ donde $B(t)$ es antisimétrica. Consideremos el problema del valor inicial,

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x_0$$

- **Primer Caso.** Encontremos condiciones suficientes sobre $a(t), b(t)$ para que $x(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cualquier PVI. Como la ecuación es lineal homogénea la solución está dada por,
$$x(t) = \Pi(t,0)x_0$$
Si $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, entonces,
$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$$
Pero además,
$$|x(t)| = |\Pi(t,0)x_0|$$
En particular,
$$|\Pi(t,0)x_0| \leq \|\Pi(t,0)\| \cdot |x_0|$$
y esto es debido a que para $x_0 \neq 0$ se tiene que,
$$\frac{|\Pi(t,0)x_0|}{|x_0|} \leq \|\Pi(t,0)\|$$
Por lo que tomaremos $\|\Pi(t,0)\| \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por la parte (a) tenemos que,
$$\|\Pi(t,0)\| = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$$
Entonces, el propagador $\Pi(t,0)$ se aceca al origen si y sólo si,
$$\int_0^t a(s)ds \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

- **Segundo Caso.** Encontremos condiciones suficientes para $a(t), b(t)$ talque,
$$|x(t)| = |x_0|$$
para todo $t \geq 0$. Notemos que en la parte (a) hemos concluido que,
$$|\Pi(t,0)v| = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)|v|$$
tomando $v = x_0$ se llega a que,
$$|x(t)| = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)|x_0|$$
Por lo tanto, $|x(t)| = |x_0|$ si y sólo si,
$$\int_0^t a(s)ds = 0$$
para todo $t \geq 0$, y esto es equivalente a que $a(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Encontra una condición suficiente para $a(t)$.

P3.

(a) Sea la ecuación,

$$\dot{x} = Ax$$

con A constante. Sabemos que la solución está dada por,

$$x(t) = \Pi(t, t_0)x_0$$

donde $x(t_0) = x_0$. Y $\Pi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ es la matriz fundamental. Determinemos una forma simple de la matriz e^{At}. Notemos que el polinomio característico de A es,

$$\begin{aligned}
\chi_A(z) &= \det(zI - A) \\
&= (-1)^3 \det(A - zI) \\
&= -\det \begin{pmatrix} 5-z & 2 & 4 \\ 0 & 1-z & 0 \\ -8 & -1 & -7-z \end{pmatrix} \\
&= -(5-z)(1-z)(-7-z) - 8(-4(1-z)) \\
&= (z-1)^2(z+3)
\end{aligned}$$

Luego los valores propios son $z = 1, -3$ donde z es de multiplicidad 2 y z es de multiplicidad 1. Por lo que,

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego los vectores asociado al valor propio 1 son,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/12 \end{pmatrix}$$

Y el del segundo valor propio es,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Por tanto se tiene que, $A = VA_JV^{-1}$, donde,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 1/12 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1/4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos determinar una forma simple de e^{At},

$$\begin{aligned} e^{tA_J} &= \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^t t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para los datos iniciales $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, la solución está dada por,

$$x(t) = e^{(t-t_0)} \begin{pmatrix} 2 - e^{-4(t-t_0)} & -\frac{1}{4} + 3(t-t_0) + \frac{e^{-4(t-t_0)}}{4} & 1 - e^{-4(t-t_0)} \\ \\ 0 & 1 & 0 \\ \\ -2 + 2e^{-4(t-t_0)} & \frac{1}{2} - 3(t-t_0) - \frac{e^{-4(t-t_0)}}{2} & -1 + 2e^{-4(t-t_0)} \end{pmatrix} x_0$$

(b) Sea la ecuación,

$$\ddot{x} + 4x = 2\,\mathrm{sen}(2t)$$

Vamos a pasarlo a una ecuación lineal no homogéneo. Sea

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

Luego generamos la siguiente ecuación,

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

Luego la solución al PVI,

$$\begin{cases} \dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix} \\ y(t_0) = y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

se determinar como,

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\,\mathrm{sen}(2s) \end{pmatrix} ds$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinemos e^{At}, para ello usaremos un truco sobre las potencias de A. Notemos la siguiente relación,

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ (-4)^2 & 0 \end{pmatrix} \\
A^4 &= \begin{pmatrix} (-4)^2 & 0 \\ 0 & (-4)^2 \end{pmatrix} \\
A^5 &= \begin{pmatrix} 0 & (-4)^2 \\ (-4)^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

De forma inductiva se tiene que,

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} (-4)^n & 0 \\ 0 & (-4)^n \end{pmatrix}, \quad A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-4)^n \\ (-4)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Con lo anterior llegaremos a una forma conveniente de e^{At}, entonces,

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

Veamos por qué se cumple la propiedad $(\star)$, notemos que las series,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

son el coseno y seno hiperbólico respectívamente. Por lo que podemos incluir la matriz y esta converge (resultado visto en clases). Y si,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{At} + e^{-At}}{2} + \frac{e^{At} - e^{-At}}{2} = e^{At}$$

Nos queda determinar cada serie por separado. Vemos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}(-4)^k I}{(2k)!} \\
&= I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2t)^{2k}}{(2k)!} \\
&= I \cos(2t)
\end{aligned}$$

Y la otra serie es,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}(-4)^kA}{(2k+1)!}\\&=\frac{A}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\\&=A\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e^{At}=\begin{pmatrix}\cos(2t) & \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\\ -2\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t)\end{pmatrix}$$

Encontrando una forma simple de e^{At}, veamos el comportamiento de la integral de la solución $y(t)$, tenemos que,

$$\begin{aligned}e^{A(t-s)}\begin{pmatrix}0\\ 2\operatorname{sen}(2s)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}(2s)\operatorname{sen}(2t-2s)\\ 2\operatorname{sen}(2s)\cos(2t-2s)\end{pmatrix}\\&\overset{(\star)_1}{=}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\cos(4s-2t)-\cos(2t))\\ \operatorname{sen}(4s-2t)+\operatorname{sen}(2t)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Se cumple $(\star)_1$ por propiedades de suma y/o resta de coseno y seno. Luego,

$$\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(\cos(4s-2t)-\cos(2t))\\ \operatorname{sen}(4s-2t)+\operatorname{sen}(2t)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}\frac{\operatorname{sen}(2t)-\operatorname{sen}(4t_0-2t)}{8}-\frac{\cos(2t)(t-t_0)}{2}\\ \frac{-\cos(2t)+\cos(4t_0-2t)}{4}+\operatorname{sen}(2t)(t-t_0)\end{pmatrix}$$

Finalmente la solución para los datos iniciales (t_0,y_0) es,

$$y(t)=\begin{pmatrix}\cos(2t-2t_0) & \frac{\operatorname{sen}(2t-2t_0)}{2}\\ -2\operatorname{sen}(2t-2t_0) & \cos(2t-2t_0)\end{pmatrix}y_0+\begin{pmatrix}\frac{\operatorname{sen}(2t)-\operatorname{sen}(4t_0-2t)}{8}-\frac{\cos(2t)(t-t_0)}{2}\\ \frac{-\cos(2t)+\cos(4t_0-2t)}{4}+\operatorname{sen}(2t)(t-t_0)\end{pmatrix}$$

Para concluir la solución de la ecuación original basta despejar $x(t)$, por lo que la solución de $x(t)$ es,

$$x(t)=\cos(2t-2t_0)x_0+\operatorname{sen}(2t-2t_0)\frac{\dot{x}_0}{2}+\frac{1}{8}(\operatorname{sen}(2t)-\operatorname{sen}(4t_0-2t))-\frac{1}{2}\cos(2t)(t-t_0)$$

para todo datos iniciales $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

(c) Sea la ecuación,

$$\ddot{x}-2\dot{x}=-x+t-1+2e^t$$

Pasemos a una ecuación lineal no homogéneo. Sea

$$y=\begin{pmatrix}x\\ \dot{x}\end{pmatrix}$$

Luego obtenemos la ecuación,

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ t-1+2e^t \end{pmatrix}$$

Luego la solución del PVI está dada por,

$$y(t) = \Pi(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \Pi(t,t_0) \begin{pmatrix} 0 \\ t-1+2e^t \end{pmatrix}$$

Sabemos que,

$$\Pi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encontremos una forma simple de e^{At} usando matrices de Jordan. Tenemos que el polinomio característico de A es,

$$\begin{aligned} \chi_A(z) &= \det(zI - A) \\ &= \begin{pmatrix} z & -1 \\ 1 & z-2 \end{pmatrix} \\ &= z^2 - 2z + 1 \\ &= (z-1)^2 \end{aligned}$$

Luego el valor propio de A es $z = 1$ de multiplicidad algebraica 2. Luego la matriz de Jordan de A es,

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinemos los vectores propios, si,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Entonces basta tomar $v_1 = (1,1)^T$, para el segundo vector tenemos que,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego se toma $v_2 = (1,2)^T$. Por lo tanto,

$$A = VA_JV^{-1}$$

donde,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego obtenemos que,

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^t V \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V^{-1} \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & t+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obteniendo la expresión $\Pi(t,t_0)x_0$, encontremos la parte de la integral, tenemos que,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} e^{t-s} \begin{pmatrix} 1-t+s & t-s \\ -t+s & t-s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t-1+2e^t \end{pmatrix} ds \\ &\qquad = \int_{t_0}^{t} e^{t-s} \begin{pmatrix} (t-s)(t-1+2e^t) \\ (t-s+1)(t-1+2e^t) \end{pmatrix} ds \\ &\qquad = e^t(t-1+2e^t) \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^{-s}(t-s) \\ e^{-s}(t-s+1) \end{pmatrix} ds \\ &\qquad = e^t(t-1+2e^t) \begin{pmatrix} e^{-t_0}(t-t_0+1) - e^{-t} \\ e^{-t_0}(t-t_0+1) - e^{-t} + t - t_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente la solución de la ecuación lineal homogénea es,

$$y(t) = e^{t-t_0} \begin{pmatrix} 1-t+t_0 & t-t_0 \\ -t+t_0 & t-t_0+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} + e^t(t-1+2e^t) \begin{pmatrix} e^{-t_0}(t-t_0+1) - e^{-t} \\ e^{-t_0}(t-t_0+1) - e^{-t} + t - t_0 \end{pmatrix}$$

Luego la solución de la ecuación original es,

$$x(t) = e^{t-t_0}((1-t+t_0)x_0 + (t-t_0)\dot{x}_0 + (t-1+2e^t)(t-t_0+1)) - (t-1+2e^t)$$

para todo datos iniciales $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(d) Sea la ecuación,

$$t\ddot{x} - 2(t+1)\dot{x} + (t+2)x = 0$$

Para resolver el PVI usaremos que el conjunto solución de la ecuación es un espacio vectorial de dimensión 2, en otras palabras, determinaremos dos soluciones luego veremos que es L.I y por lo tanto, que generan las soluciones de la ecuación.

Sabemos que una solución es $x_1(t) = e^t$ ya que,

$$te^t - 2(t+1)e^t + (t+1)e^t = 2(t+1)e^t - 2(t+1)e^t = 0$$

Encontremos la otra. Para encontrar la otra solución usaremos el método de reducción de orden. Supongamos que $x(t) = c(t)e^t$ es solución de la ecuación, con $c \in C^1(J)$ con $J \subseteq \mathbb{R}$, luego,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\dot{c} + c)e^t \\ \ddot{x} &= (\ddot{c} + 2\dot{c} + c)e^t\end{aligned}$$

Como es solución al reemplazar en la ecuación original obtenemos otra ecuación,

$$t\ddot{c} - 2\dot{c} = 0$$

Luego $\dot{c} = t^2$, finalmente tomamos,

$$c(t) = \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}$$

Y efectívamente $x_2(t) = \frac{t^3 e^t}{3}$ es solución de la ecuación. Encontremos una forma general para la soluciones de la ecuación, sea $y = (x, \dot{x})^T$, entonces se genera la ecuación lineal homogénea,

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2/t & 2 + 2/2 \end{pmatrix} y \qquad (\star)$$

Claramente son soluciones,

$$y_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} t^3 e^t/3 \\ (t^2 + t^3/3)e^t \end{pmatrix}$$

en virtud del análisis anterior. Sea $t = t_0 \neq 0$ y sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que,

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

To,ando $t = t_0 \neq 0$ se puede observar que,

$$\begin{pmatrix} 3c_1 + c_2 t_0^3 \\ 3c_1 + c_2 t_0^2(3 + t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la matriz se llega a que, $c_1 = c_2 = 0$, es decir, $y_1(t_0), y_2(t_0)$ son L.I y por tanto generan a $\mathbb{R}^2$, por lo tanto, toda solución de la ecuación lineal homogénea $(\star)$ está determinada por y_1, y_2. Sea el PVI,

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

donde,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2/t & 2 + 2/t \end{pmatrix}$$

Luego existen c_1, c_2 tales que,

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y(t)$$

Si $y_0 = (x_0, \dot{x}_0)^T$, entonces,

$$y_0 = c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0)$$

Supongamos que $t_0 \neq 0$, en tal caso se puede determinar c_1, c_2, los cuales son,

$$c_1 = \frac{x_0}{e^{t_0}} - t_0 \frac{\dot{x}_0 - x_0}{3e^{t_0}}, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 - x_0}{t_0^2 e^{t_0}}$$

Por lo tanto,

$$y(t) = \left(\frac{x_0}{e^{t_0}} - t_0 \frac{\dot{x}_0 - x_0}{3e^{t_0}} \right) \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \left(\frac{\dot{x}_0 - x_0}{t_0^2 e^{t_0}} \right) \begin{pmatrix} te^t/3 \\ e^t(t^2 + t^3/3) \end{pmatrix}$$

Ahora recordemos que $y(t) = (x(t), \dot{x}(t))^T$, por lo que despejando $x(t)$ se concluye que,

$$x(t) = \left(\frac{x_0}{e^{t_0}} - t_0 \frac{\dot{x}_0 - x_0}{3e^{t_0}} \right) e^t + \left(\frac{\dot{x}_0 - x_0}{t_0^2 e^{t_0}} \right) te^t/3$$

Y por construcción esta solución está definida en todo $t \in \mathbb{R}$ por lo que no debemos preocuparnos por $t = 0$. Esta es la solución para todo $t_0 \neq 0$ y cualquier $x_0, \dot{x}_0$ datos iniciales.

Veamos que pasa cuando $t_0 = 0$. Supongamos que $x(t)$ es una solución de la ecuación donde $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$, como $x(t)$ es solución, entonces al tomar $t = 0$ llegamos a que,

$$\dot{x}(0) = x(0)$$

Es decir, si $t_0 = 0$ entonces necesariamente $x_0 = \dot{x}_0$. Por lo que cuando $t_0 = 0$ basta tomar la solución,

$$x(t) = x_0 e^t$$

Encontrando solución para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ que condiciona a $x_0, \dot{x}_0$ cuando $t_0 = 0$.

P4.

(a) Sea la ecuación,

$$x^{(n)} + q_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + q_1\dot{x} + q_0 x = 0$$

Vamos a pasarlo a una ecuación lineal homogénea, sea

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Generando la ecuación,

$$\dot{y} = Ay$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_0 & -q_1 & -q_2 & \dots & -q_{n-1} \end{pmatrix}$$

es una matriz de $n \times n$.

Diremos que una matriz X de $k \times k$ es de la forma $(\star)$ si es generado a partir de la ecuación,

$$x^{(k)} + \overline{q}_{k-1}x^{(k-1)} + \cdots + \overline{q}_1\dot{x} + \overline{q}_0 x = 0$$

como lo hicimos antes. Antes de estudiar A veamos que pasa cuando tenemos una matriz 2×2 de la forma $(\star)$, sea la matriz,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q_0 & -q_1 \end{pmatrix}$$

Luego el polinomio característico de esta matriz es,

$$\chi(z) = \det \begin{pmatrix} z & -1 \\ q_0 & q_1 + z \end{pmatrix} = z^2 + zq_1 + q_0$$

Veamos si fuera 3×3,

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \det \begin{pmatrix} z & -1 & 0 \\ 0 & z & -1 \\ q_0 & q_1 & q_2 + z \end{pmatrix} \\ &= z \det \begin{pmatrix} z & -1 \\ q_1 & q_2 + z \end{pmatrix} + q_0 \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ z & -1 \end{pmatrix} \\ &= z^3 + q_2 z^2 + q_1 z + q_0 \end{aligned}$$

Notemos que en la matriz 3×3 de la forma $(\star)$, se tiene que χ es la suma de una matriz de z por una matriz 2×2 de la forma $(\star)$ que ya hemos calculado sumado con q_0 multiplicado por el determinante de una matriz triangular, el cual es el producto de su diagonal. ($\det \triangle = \alpha_1 \dots \alpha_n$ donde $diagonal(\triangle) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$). Por inducción, si el polinomio caracteristico se cumple para una matriz $(n-1) \times (n-1)$ de la forma $(\star)$, entonces,

$$\det(zI - A) = z \det(\overline{A}) + (-1)^{n+1} q_0 \det(A_\triangle)$$

donde $\overline{A}$ es la matriz $(n-1) \times (n-1)$ de la forma $(\star)$, por lo que podemos calcular su determinante y, $A_\triangle$ es la matriz triangular que resulta de eliminar la fila y columna 1 de la matriz $(zI - A)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\chi(z) &= z(z^{n-1} + q_{n-1}z^{n-2} + \dots q_2 z + q_1) + (-1)^{n+1}(c_0)(-1)^{n-1} \\ &= z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \cdots + zq_1 + q_0\end{aligned}$$

Como queriamos probar.

(b) Vamos a estudiar el comportamiento de un vector propio. Sea λ un vector propio, luego el espacio propio de λ es,

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

Sea el sistema,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_0 & -q_1 & -q_2 & \dots & -q_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego podemos notar que,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \lambda \\ x_3 &= x_2 \lambda = x_1 \lambda^2 \\ &\vdots \\ x_n &= x_1 \lambda^{n-1} \end{aligned}$$

Luego si estudiamos la última fila de la matriz $A - \lambda I$ con el vector $(x_1, \dots, x_n)^T$, al reemplazar por lo anterior obtenemos que,

$$-x_1(q_0 + q_1\lambda + \cdots + q_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) = -x_1 \chi(\lambda) = 0$$

Por lo que todo está bien definido. Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1\lambda \\ \vdots \\ x_1\lambda^{n-1} \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

Y con esto conluimos que,

$$\ker(A - \lambda I) = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right\}$$

Es decir, λ tiene multiplicidad 1.

(c) Recordemos el siguiente resultado,

Sea una ecuación $\dot{x} = Ax$, decimso que es estable si y sólo si los valores propios de α de A tiene parte real negativa y si la parte real es nula, entonces el complejo es simple.

Este resultado fue probado en clases. Probando lo que queriamos probar.

P5.

(a) Sea $b = -4$, luego tenemos que solucionar la ecuación lineal homogénea,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} x$$

donde,

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos a usar la matriz de Jordan luego estudiaremos el retrato de fase. Notemos que,

$$\chi_A(z) = \det(zI - A) = -(z+1)^2$$

Luego $z = -1$ es el único valor propio de multiplicidad 2, es decir, la matriz de Jordan es,

$$A_J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si los vectores asociado al valor propio -1 cumplen,

$$\begin{aligned} Av_1 &= -v_1 \\ Av_2 &= v_1 - v_2 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Notemos que $x = y = 1$ es solución del sistema. Luego, $v_1 = (1, 1)$, para v_2 notemos que,

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que $x = y - \frac{1}{3}$, digamos que $x = 1$ y $y = \frac{4}{3}$, de esta forma,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right\}$$

Que son L.I, por lo que,

$$A = V^{-1} A_J V^{-1}$$

donde,

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix} \text{ y } V^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto e^{At} se puede descomponer,

$$\begin{aligned} e^{At} &= Ve^{A_J t}V^{-1} \\ &= e^{-t}V\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}V^{-1} \\ &= e^{-t}\begin{pmatrix} 1-3t & 3t \\ -3t & 1+3t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Resolvamos el PVI. Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Luego la solución está dada por,

$$\begin{aligned} x(t) &= \Pi(t,t_0)x_0 \\ &= e^{A(t-t_0)}x_0 \\ &= e^{-t+t_0}\begin{pmatrix} 1-3t+3t_0 & 3t-3t_0 \\ -3t+3t_0 & 1+3t-3t_0 \end{pmatrix}x_0 \end{aligned}$$

Encontrando una solución general. Ahora determinemos el retrato de fase. Sabemos que,

$$x(t) = e^{-t}V\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}V^{-1}x_0$$

Pero podemos pensar V y en $V^{-1}x_0$ de la siguiente forma,

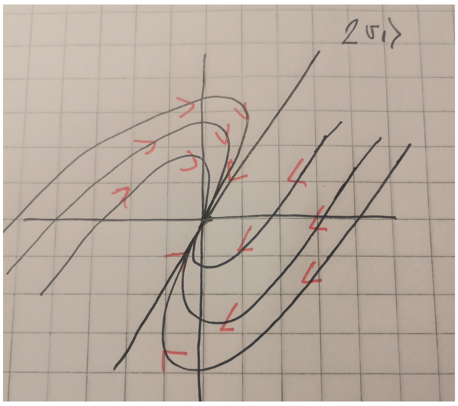
$$V = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}, \quad V^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

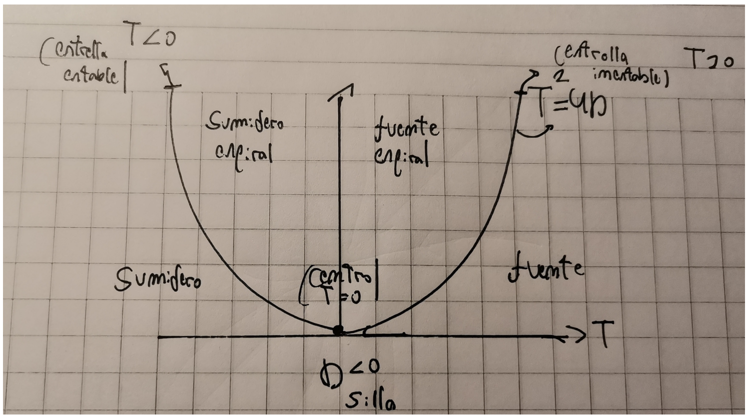
Luego,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}V\begin{pmatrix} c_1 + tc_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-t}((c_1+tc_2)v_1 + c_2v_2) \\ &= v_1e^{-t}(c_1+tc_2) + v_2e^{-t}c_2 \end{aligned}$$

A partir de aquí podemos estudiar el comportamiento $x(t)$ en el plano real. Notemos que en el espacio generado por v_1, si $x(t)$ parte ahí, al tomar el tiempo hacía el infinito entonces va hacía el origen, de forma que $x(t)$ en $\langle v_1 \rangle$ se comporta de forma conveniente, si tomamos otro punto, al tomar $t \to \infty$ este se va al origen de forma no recta, sino algo más curvado. Por lo tanto el retrato de fase sería de la forma,

Por lo que el origen es un punto estrella estable.





(b) Para determinar los valores de b y poder construir un origen fuente, sumidero, entre otros. Usaremos el siguiente resultado: *Sea A matriz 2×2, sea T la traza de la matriz y D el determinante, entonces se cumple la siguiente relación,*

A partir de esto determinaremos los valores de b.

- **Fuente.** Necesitamos que $T > 0, 0 < D < \frac{T^2}{4}$, es decir,

$$b + 2 > 0, \quad 0 < 2b + 9 < \frac{(b+2)^2}{4}$$

Resolviendo la inecuación, obtenemos que,

$$b \in (8, \infty)$$

para que el origen sea fuente.

- **Fuente espiral.** Necesitamos $T > 0, D > \frac{T^2}{4}$, es decir,

$$b + 2 > 0, \quad 2b + 9 > \frac{(b+2)^2}{4}$$

Resolviendo la ineucación, obtenemos que,

$$b \in (-2, 8)$$

para que el origen sea fuente espiral.

- **Sumidero.** Necesitamos que $T < 0, 0 < D < \frac{T^2}{4}$, es decir,

$$b + 2 < 0, \quad 0 < 2b + 9 < \frac{(b+2)^2}{4}$$

Resolviendo la inecuación, obtenemos que,

$$b \in (-9/2, -4)$$

para que el origen sea un sumidero.

- **Sumidero espiral.** Necesitamos que, $T < 0, D > \frac{T^2}{4}$, es decir,

$$b + 2 < 0, \quad 2b + 9 > \frac{(b+2)^2}{4}$$

Resolviendo la inecuación, obtenemos que,

$$b \in (-4, -2)$$

para que el origen sea un sumidero espiral.

- **Silla.** Necesitamos solamente que $D < 0$, es decir,

$$2b + 9 < 0$$

Luego,

$$b \in (-\infty, -9/2)$$

para que el origen sea una silla.

- **Centro.** Necesitamos solamente que $T = 0$, es decir,

$$b + 2 = 0$$

Luego $b = -2$.

P6.

(a) Sea la ecuación,

$$\dot{x} = Ax$$

Luego la solución bajo los datos iniciales (t_0, x_0) está dada por,

$$x(t) = \Pi(t, t_0)x_0$$

Determinemos los valores propios de A, si el polinomio cacracterístico es,

$$\det\begin{pmatrix} 1-z & 1 & 1 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & -1 & 2-z \end{pmatrix} = (1-z)(z)(2-z)$$

Luego los valores propios son $z = 0, 1, 2$. Luego la matriz de Jordan de A es,

$$A_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $e^{tA} = Ve^{A_J}V^{-1}$, donde,

$$V = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Digamos que,

$$V^{-1}x_0 = C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$x(t) = v_1e^{0t}c_1 + v_2e^tc_2 + v_3e^{2t}c_3$$

Notemos que el crecimiento de e^{2t} es mayor al resto, si $c_3 > 0$ entonces cuando $t \to \infty$, se tiene $x(t) \to \infty$ (se aleja del origen), por lo que x no es acotado, si $c_3 < 0$ se llega a lo mismo. Por lo que la única opción es que $c_3 = 0$, luego,

$$x(t) = v_1c_1 + v_2e^tc_2$$

Podemos usar el mismo argumento para c_2, entonces tenemos que,

$$x(t) = v_1c_1$$

para todo $t \geq 0$. Esta solución es claramente acotada. Estudiemos x_0, notemos que si $x(t)$ es acotada, entonces $c_2 = c_3 = 0$ y luego,

$$x_0 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $x(t)$ es acotada si,

$$x_0 = c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

(b) Decimos que la solución crece linealmente si,

$$\frac{|x(t+h) - x(t)|}{h}$$

se comporta de forma constante, luego si $x(t)$ es solución, entonces,

$$\begin{aligned} |x(t+h) - x(t)| &= |c_1 v_1 + c_2 e^{t+h} v_2 + c_2 e^{2t+2h} v_2 - c_1 v_1 - c_1 e^t v_2 - c_3 e^{2t} v_3| \\ &= |c_2(e^{t+h} - e^t) v_2 + c_3(e^{2t+2h} - e^{2t}) v_3| \\ &= e^t(e^h - 1)|c_2 v_2 + c_3 e^t(e^h + 1) v_3| \end{aligned}$$

Si $c_2 \neq 0$ entonces $x(t)$ no crece linealmente por el comportamiento de e^t, lo mismo si $c_3 \neq 0$. Por lo tanto, $c_2 = c_3 = 0$ y luego,

$$\frac{|x(t+h) - x(t)|}{h} = 0$$

siendo un crecimiento lineal.

(c) Si crece más rápidamente que linealmente, entonces,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{|x(t)|}{t} = \infty$$

Luego,

$$\frac{|x(t)|}{t} = \frac{|c_1 v_1 + c_2 e^t v_2 + c_3 e^{2t} v_3|}{t}$$

Si el numerador crece más rápido que el denominador podemos ignorar $c_1 v_1$, por lo que solamente queremos ver que,

$$\frac{|c_2 e^t v_2 + c_3^{2t} v_3|}{t} \xrightarrow{t \to \infty} \infty$$

Si $c_2 = 0$ y $c_3 \neq 0$ entonces,

$$\frac{e^t}{t} |c_2 v_2 + c_3 e^t v_3| = \frac{e^{2t}}{t} |c_3 v_3| \xrightarrow{t \to \infty} \infty$$

Lo mismo se concluye si $c_3 = 0$ y $c_2 \neq 0$. Por lo tanto, $x(t)$ crece más rapidamente si $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$.

P7.

Sea la ecuación,

$$\dot{x} = A(t)x$$

donde,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3/t & -1 \\ 2/t^2 & -1/t \end{pmatrix}$$

(a) Veamos que x_1 es solución para $t > 0$, si la derivada es,

$$\dot{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluando en $A(t)x$ vemos que,

$$\begin{pmatrix} 3/t & -1 \\ 2/t^2 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t - t \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1$$

y luego x_1 resuelve la ecuación.

(b) Sea x_2 solución de la ecuación de forma que, $W(t) = \det(x_1, x_2)$, sabemos que dado un problema de valores iniciales (t_0, x_0) se tiene que,

$$\begin{aligned} W(t) &= W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))ds \right) \\ &= W(t_0) \exp\left(\log\left(\frac{t^2}{t_0^2} \right) \right) \\ &= W(t_0) \frac{t^2}{t_0^2} \end{aligned}$$

Y esto es para todo $t_0 \neq 0$. Si $W(1) = 1$ entonces, $W(t_0) = t_0^2$ luego,

$$W(t) = t^2$$

(c) Determinemos una solución $x_2(t)$, supogamos que,

$$x_2 = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \in C(J, \mathbb{R}^2)$$

para algún $J \subseteq \mathbb{R}$. Notemos que,

$$\det(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} t^2 & a(t) \\ t & b(t) \end{pmatrix} = t^2$$

Por lo que,

$$b(t) = 1 + \frac{a(t)}{t}$$

Pensemos en $b(t)$ como una solución definida $t > 0$ por hipótesis. Luego al ser solución de la ecuación se tiene que,

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 3t & -t^2 \\ 2 & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 1+\frac{a}{t} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} 2ta - t^2 \\ a - t \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\dot{a}(t) = \frac{2a(t)}{t} - 1$$

Tomando $a(t) = t$ se observa que satisface la ecuación. Por tanto,

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}$$

es solución definida para $t > 0$.

(d) Tenemos un sistema lineal no homogéneo, sabemos que tiene soluciones únicas definidas en $I \times \mathbb{R}^2$, si y_1, y_2 son soluciones de la ecuación, entonces,

$$(y_1 - y_2)' = A(t)(y_1 - y_2)$$

Ahora, por las partes anteriores encontramos soluciones x_1, x_2 de la homogénea, si además, $x_1(1), x_2(1)$ son linealmente independientes, entonces si J son las soluciones de la ecuación $\dot{x} = Ax$ se tiene que,

$$J = Gen\{x_1, x_2\}$$

Luego, existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que,

$$(y_1 - y_2)(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ x_1 & x_2 \\ | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Con esto encontraremos la solución al PVI. Digamos que $y := y_1$ es la solución a encontrar y $y_p = y_2$ una solución particular, luego si $y_p(1) = (\overline{x}_1, \overline{x_2})^T$, entonces,

$$y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, debemos encontrar una solución particular, luego determinar $\overline{x}_1, \overline{x}_2$, finalmente encontrar c_1, c_2 y así encontrar la solución $y(t)$. Notemos que,

$$y_p = \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es solución a la ecuación ya que,

$$\begin{pmatrix} 3/t & -1 \\ 2/t^2 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora determinemos la solución $y(t)$. Si $y_p(1) = (1, 0)$, entonces,

$$y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución al PVI es,

$$y(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t^2 + t \\ -t + 2 \end{pmatrix}$$

P8. Notemos que,

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2 = 2x\dot{x} = 2xf(t,x)$$

Si $\dot{x}(t) = f(t,x)$, sea la función $g(s) = f(t,sx)$ con $x \in [0,1]$, esta función es diferenciable, luego usando el teorema fundamental del cálculo se tiene que,

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{ds} g(s) ds$$

Reemplazando por la definición de g, se observa que,

$$f(t,x) - f(t,0) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(t,sx) ds$$

Si $f(t,0) = 0$ y $\frac{d}{ds} f(t,sx) = \partial_x f(t,sx)x$, luego,

$$f(t,x) = \int_0^1 \partial_x f(t,sx) x ds$$

Multiplicando ambos lados $2x$ como producto punto se tiene que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|x(t)|^2 &= \int_0^1 \partial_x f(t,sx)x \cdot x ds \\ &\leq \int_0^1 M(t)|x|^2 ds \\ &\leq |M(t)||x|^2\end{aligned}$$

Intengrando sobre el intervalo $[0,t]$ se concluye que,

$$|x(t)|^2 \leq |x(0)|^2 + \int_0^t |M(s)||x(s)|^2 ds$$

Llegando a una desigualdad conveniente ya que podemos aplicar Grönwall, obteniendo,

$$|x(t)|^2 \leq |x(0)|^2 e^{\int_0^t M(s)ds} =: C(t)$$

Si $C(t)$ no explota en tiempo finito al tener una exponencial, por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, esta solución no explota en tiempo finito, es decir, $x(t)$ está definido globalmente.

9. Problemas/Solución

1.3.

(a) Notemos que tenemos el sistema

$$\dot{y} = -y$$

Que no depende de una variable externa, por lo que es autonoma.

(b) Vemos que t es nuestro tiempo, luego tenemos

$$\ddot{u} = t\,\mathrm{sen}(u)$$

El lado derecho depende de t, de forma que no es autonoma, tampoco es lineal.

(c) Tenemos un sistema de orden 0, debemos despejar el $y(t)$, en particular

$$y^2 + 2y + 1 = 1 \iff (y+1)^2 = 1 \iff |y+1| = 1$$

Se deducen dos formas

$$y = 0, \;\; y = -2$$

Es decir

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \in \mathbb{R} : y + 1 \geq 0 \\ -2, & t \in \mathbb{R} : y + 1 < 0 \end{cases}$$

Claramente no depende de t por lo que es autonoma y es lineal.

(d) Tenemos...

(e) Notemos que si x es diferenciable y $x = \dot{y}$, entonces y debe ser dos veces diferenciable, luego tenemos que

$$\ddot{y} = -y$$

De forma que no depende de t, siendo autonoma, y además es lineal.

P1.4. Recordemos que una ecuación es lineal si es de la forma

$$x^{(k)} = g(t) + \sum_{i=1}^{k-1} x_i(t) x^{(i)}$$

Luego

1. Notemos que no es lineal ya que $\cos(y)$ no está acompañado de una derivada de y y no depende de x.
2. No es lineal, ya que el $\mathrm{sen}(y)$ no depende de la variable x.

3. Si es lineal, tenemos $x_1 := \operatorname{sen}(x), g(x) := \cos(x)$, luego

$$\dot{y} = g(t) + x_1(t)y^{(0)} = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)y$$

P1.5. Sea el sistema

$$y'' + y'y_2(t) + yy_1(t) + g(t) = 0$$

Sea $v = y'$, entonces

$$v' + vy_2(t) + yy_1(t) + g(t) = 0$$

...

P1.6.

1. Sea $y = \dot{x}$, entonces

$$\dot{y} + t\operatorname{sen}(y) = x$$

Siendo un sistema de primer orden y de dos ecuaciones.

2. Notemos que y es al menos cuatro veces diferenciable, entonces

$$y^{(4)} = -y$$

Tomando $z = y^{(3)}$, obtenemos que

$$z' = -y$$

Un sistema de una ecuación....

P1.8. Sea $x^{(k)} = f(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(k-1)})$ un edo autonomo. Sea $\phi(t)$ solución de este edo, entonces $\phi \in C^k(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$. Notemos que

$$x^{(k)}(t - t_0) = f(x(t - t_0), \ldots, x^{(k-1)}(t - t_0))$$

Entonces es claro que $\phi(t - t_0)$ es solución del sistema.

P1.9.

1. Supongamos que $x(0) = x_0$, entonces podemos ver que el conjunto máximal es $(0, \infty)$ luego

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2x_0^2} - \frac{1}{2x^2} = t$$

Si $x \to 0$, $T_- = \infty$ y si $x \to \infty$ se tiene $T_+ = 1/2x_0^2$, por lo que

$$\phi(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}}$$

con $t \in (-\infty, 1/2x_0^2)$. Entonces si ϕ explota en un tiempo finito.

2. Vamos a considerar el conjunto maximal $(0,1)$, donde $x(1-x)>0$, sea $x_0\in(0,1)$ el valor inicial del sistema, entonces

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{y(1-y)}\\&=\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{1-y}+\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{y}\\&=-\log(1-x)+\log(1-x_0)+\log(x)-\log(x_0)\\&=\end{aligned}$$

Si $x\to0^+$, entonces $T_-=-\infty$ y si $x\to1^-$, entonces $T_+=-\infty$

P1.11 Sea el sistema

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)g(t)\\x(t_0)=x_0\end{cases}$$

Supongamos que $f(x_0)\neq0$. Entonces, como f es continua, se tiene que $f(x)\neq0$ para todo $x\in V$, con V vecindad de x_0. Entonces si $f(x)>0$ en V, se tiene que

$$\dot{x}=f(x)g(t)\iff\frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))}=g(t)$$

Sea W donde si $t\in W$, entonces $x(t)\in V$. Luego

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\dot{x}(s)}{f(x(s))}ds=\int_{t_0}^{t}g(s)ds$$

Sea $y=x(t)$, entonces

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dy}{f(y)}=\int_{t_0}^{t}g(s)ds$$

Sea $F(x)=\int_{x_0}^{x}dy/f(y)$, luego F es diferenciable con derivada $F'(y)=1/f(y)>0$, es decir, F es creciente y por lo tanto, es invertible continua y diferenciabe. Digamos que $F:V\to Im(V)$, luego si G es primitiva de g, se tiene que

$$F(x(t))-F(x_0)=G(t)-G(t_0)$$

Luego

$$x(t)=F^{-1}(G(t)-G(t_0)+F(x_0))$$

donde $x:W\to V$. Encontrando una fórmula para la solución. Probemos que hay una solución única localmente. Sea x,y soluciones definida alrededor de t_0. Entonces se tiene que

$$\dot{x}=f(x)g(t),\quad\dot{y}=f(y)g(t)$$

Evaluando en t_0 se tiene que

$$\dot{x}(t_0) = f(x(t_0))g(t_0) = \dot{y}(t_0)$$

O dicho de otra forma

$$(\dot{x} - \dot{y})(t_0) = 0$$

Como x, y son continuas en sus respectívos dominios, se tiene que

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$$

para todo $t \in V$, donde V es vecindad de t_0. Integrando de t_0 a $t \in V$, se obtiene que

$$x(t) = y(t)$$

Es decir, existe una única solución localmente. (Basta redefinir x, y de forma que tenga dominio V.)

P1.23. *Muestre que*

$$\dot{x} = t^{n-1} f\left(\frac{x}{t^n}\right)$$

puede ser resuelto usando el cambio de variable $y = \frac{x}{t^n}$.

Sol. Sea la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = t^{n-1} f\left(\frac{x}{t^n}\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sea $y(t) = \frac{x(t)}{t^n}$, suponiendo que existe una solución $C^1(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces y es diferenciable con derivada

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\dot{x}t^n - nxt^{n-1}}{t^{2n}} \\ &= \frac{t^{2n-1}f(y) - nyt^{2n-1}}{t^{2n}} \\ &= \frac{f(y) - ny}{t} \end{aligned}$$

Es decir, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{f(y)-ny}{t} \\ y(t_0) = \frac{x_0}{t_0^n} \end{cases}$$

Una ecuación separable, luego dado y_0 talque $f(y) - ny \neq 0$ podemos determinar una solución.