FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2515

Análisis Real

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. Espacios Métricos

1.1. Un pequeño repaso

Las sucesiones será lo que más tocaremos en todo los apuntes, tanto de formar directa como indirecta. Por lo cual, conviene entregar un breve repaso de las sucesiones. Un sucesión es una función que toma a cada natural y lo asocia a un real.

$$\begin{aligned} x_n : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

En general denotamos a la sucesión por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 1.1. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ representa los números

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Otro concepto importante, es el límite de una sucesión. Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, se define el límite de una sucesión como la distancia de un x_n con respecto a L, siempre menor a $\varepsilon > 0$ dado, a partir de algún $n \geq N$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tales

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Ejemplo 1.2. Podemos probar que

$$\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, sabiendo que los naturales son un conjunto no acotado superiormente, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

Luego para tood $n \geq N$ se tiene que

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Probando el límite. ■

La parte fundamental del límite es la diferencia $|x_n - L|$ siendo en realidad una distancia, esto podemos extrapolarlo pudiendo definir otros límites. Pero centrémosno en la distancia, que es nuestro punto de partida en espacios métricos.

Ejemplo 1.3. En $\mathbb{R}^2$ podemos definir la distancia euclidiana que es practicamente aplicar pitágoras, si $x, y \in \mathbb{R}^2$, donde $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ entonces

$$d_1(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

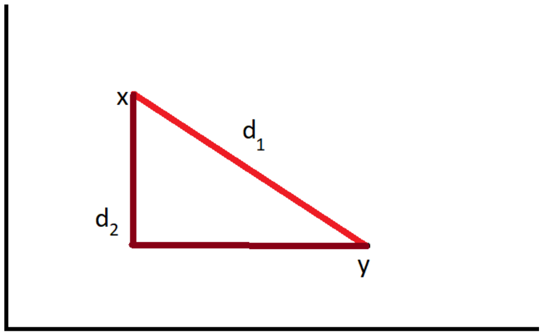


Figura 1: Distancias d_1, d_2

Esta es la distancia "natural". Pero además podemos definir otra distancia

en la figura se puede apreciar una distancia d_1, que es la euclidiana, y otra que representa los catetos, esta es una distancia pensada en la coordenadas y se define por

$$d_2(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Esta distancia se conoce como distancia taxi, ya que un taxi no viaja de forma recta, sino que va en esquina a esquina. Y así existe una gran variedad de distancias. Podemos definir una distancia más compleja que más adelante estudiaremos la cual se define en $\mathbb{R}^2$ por

$$d_\infty(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

De estas tres distancia que hemos presentado, se pueden extraer tres propiedades fundamentales:

1. La distancia de un punto con respecto al mismo punto, es nula, si es la distancia de un punto, con otro punto distinto, entonces es no nula.
2. También existe una simetría, podemos tomar la distancia de x e y y tendrá la misma distancia que de y y x.
3. Y al igual que un triangulo, si tenemos x, y puntos dados, al considerar un punto z, este forma un triangulo y claramente la distancia de x, y es menor a la suma de las distancia de x, z y z, y.

1.2. Definición

Definición 1.1. *Sea X un conjunto no vácio. Sea*

$$\begin{aligned} d : X \times X &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

una función. Si d satisface:

1. *$d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, y si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$*

2. ***(Simetría)*** $d(x, y) = d(y, x)$

3. ***(Desigualdad triangular)*** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

para todo $x, y, z \in X$, entonces decimos que d es una métrica o distancia. Y al par (X, d) donde d es la distancia asociada a X, le llamamos espacio métrico.

Nota 1.1. Si decimos que X es una espacio métrico sin dar una función, por convenio se asume que exista tal función distancia.

Observación 1.1. La definición de espacio métrico no especifica si X es un conjunto de números reales, esto siginifica que podemos tomar cualquier conjunto X, puede ser de animales, calles, nombres, etc.

Ejemplo 1.4. En $\mathbb{R}^n$ podemos encontrar las distancias antes mencionadas.

$$d_1(x, y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

$$d_2(x, y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Probemos que d_1, d_2 son funciones métricas en $\mathbb{R}^n$. Para d_1

1. Si $x = y$ entonces $x_k - y_k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$, luego

$$d_1(x, x) = \sqrt{0} = 0$$

Si $x \neq y$, entonces existe un $i = 1, \ldots, n$ talque $x_k \neq y_k$, luego

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \geq |x_i - y_i| > 0$$

2. En virtud de que $\mathbb{R}$ es un cuerpo conmutativo, podemos deducir que $d_1(x, y) = d_1(y, x)$.

3. Recordemos Cauchy-Schawrz, que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|x \cdot y| \leq ||x||||y||$$

donde $\cdot$ es el producto punto y $d_1(x, 0) := ||x - 0||$. De aquí podemos concluir que $||x + y|| \leq ||x|| + | + ||y||$ y en efecto:

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= ||x||^2 + 2x \cdot y + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

Luego al quitar el cuadrado se llega al resultado. Ahora para concluir la tercera propiedad basta ver que

$$\begin{aligned} d_1(x, y) = ||x - y|| &= ||(x - z) + (z - y)|| \\ &\leq ||x - z|| + ||y - z|| = d_1(x, z) + d_1(z, y) \end{aligned}$$

para cualquier $z \in \mathbb{R}^n$.

Por tanto d_1 es una métrica. Con respecto a d_2 es facil concluir las dos primeras propiedades de métrica, por lo que solo probaremos la tercera. Sea $z \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{n}(|x_k - z_k| + |y_k - z_k|) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k - z_k| = d_2(x,z) + d_2(z,y) \end{aligned}$$

Probando que d_2 es una métrica.

Ejemplo 1.5. En $C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua } \}$ existe la métrica

$$d(f,g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

donde $f, g \in C[0,1]$. Probemos que efectívamente es una métrica.

1. Si $f = g$ entonces $f(x) - g(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, luego

   $$d(f,g) = \sup\{0\} = 0$$

   Si $f \neq g$, entonces para algún $x \in [0,1]$, se tiene que $|f(x) - g(x)| > 0$, luego el supremo necesariamente es mayor a 0, es decir $d(f,g) > 0$.

2. Por conmutatividad de funciones se concluye que $d(f,g) = d(g,f)$.

3. Por desigualdad triangular tenemos que para todo $h \in C[0,1]$ se tiene que

   $$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

   Para todo $x \in [0,1]$.

   $$|f(x) - g(x)| - |f(x) - h(x)| \leq |h(x) - g(x)| \leq \sup |h(x) - g(x)|$$

   Luego moviendo nuevamente las distancias llegamos a que

   $$|f(x) - g(x)| - \sup |h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| \leq \sup |f(x) - h(x)|$$

   finalmente concluimos que

   $$|f(x) - g(x)| \leq \sup |h(x) - g(x)| + \sup |f(x) - h(x)|$$

   Es decir, $|f(x) - g(x)|$ está acotado superiormente por la suma de dos supremos, por tanto, por la caracterización de supremos, llegamos al resultado pedido

   $$\begin{aligned} d(f,g) &= \sup |f(x) - g(x)| \\ &\leq \sup |h(x) - g(x)| + \sup |f(x) - h(x)| \\ &= d(f,h) + d(h,g) \end{aligned}$$

Probando que d es una métrica y $(C[0,1], d)$ es un espacio métrico. ■

Ejemplo 1.6. Sea $X \neq \emptyset$ cualquier conjunto, y sea la métrica

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Verifiquemos que d es una métrica.

1. Es trivial ver que si $x = y$ la función se anula y si $x \neq y$, entonces $d(x,y) > 0$
2. Claramente se cumple la simetría por definición.
3. Si $x = y$ entonces para cualquier $z \in X$ ocurre lo siguiente

$$d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y)$$

ya que $x = y = z$ o $z \neq x$ y, tendriamos $0 \leq 2$. Si por otro lado, $x \neq y$ entonces para todo $z \in X$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

ya que si z es igual a x o y, su distancia valdrá 0, pero necesariamente la otra distancia valdrá 1, llegando así la desigualdad triangular.

Probandp así que d es una métrica.

Observación 1.2. Hemos probado que todo conjunto no vacío, se le puede asociar una métrica.

Nota 1.2. La métrica del ejemplo se le conoce como distancia discreta.

Ejemplo 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $Y \subseteq X$ un conjunto no vacío. Entoncdes $(Y, d|_{Y\times Y})$ es un espacio métrico. Y en efecto, las tres propiedades de métrica se heredan de X. Notar que d se restringe en $Y \times Y$ porque solo tomamos puntos de Y, y el considerar el dominio general, agrega imagenes que posiblemente no se pueden obtener Y.

Nota 1.3. Si tenemmos (X, d) un espacio métrico con $Y \subseteq X$ no vacío, cuando hablamos de (Y, d) por convenio se asume que d está restringido en $Y \times Y$.

Ejemplo 1.8. En $C[0,1]$ existe la métrica

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

Probemos que d es en efecto, una métrica en $C[0,1]$.

1. Si $f = g$ entonces

$$d(f,g) = \int_0^1 0 dt = 0$$

Si $f \neq g$ entonces existe un punto donde x_0 talque $f(x_0) \neq g(x_0)$, dado que f, g son continuas, existe un $\delta > 0$ talque para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq [0, 1]$ se tiene que $f(x) - g(x) \neq 0$. Por tanto

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt = \underbrace{\int_0^{x_0-\delta} |f(t) - g(t)|dt}_{\geq 0} +$$

$$\underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(t) - g(t)|dt}_{> 0} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{1} |f(t) - g(t)|dt}_{\geq 0} > 0$$

2. Por conmutatividad de funciones se cumple está condición.
3. Sea $h(x) \in C[0, 1]$, entonces por desigualdad triangular en $\mathbb{R}$ se cumple que

$$|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

para todo x. Dado que la integral preserva el orden se tiene que

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$$

Probando así que d es una métrica.

1.3. Bolas, Puntos Límites, Abiertos y Cerrados

1.3.1. Bolas Abiertas, Cerradas y Esferas

Definición 1.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos por bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ por:*

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Definición 1.3. *Sea (X, d) una espacio métrico. Definimos por bola cerrada de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ por:*

$$B[x, r] := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

Definición 1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos una esfera de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ por:*

$$S(x, r) := \{y \in X : d(x, y) = r\}$$

Observación 1.3. Si intersectamos las bolas y esferas, ocurre lo siguiente:

$$B(x, r) \cap B[x, r] = B(x, r)$$
$$B(x, r) \cap S(x, r) = \emptyset$$
$$B[x, r] \cap S(x, r) = S(x, r)$$

Una recomendación para los conceptos de bolas y esfera, es pensarlo en forma tridimensional en $\mathbb{R}^3$, claramente una bola abierta es tomar una bola y quitarle la superficie, una bola cerrada es solo una bola y la esfera es tomar la bola y quitarle todo el contenido de adentro.

Ejemplo 1.9. En $\mathbb{R}$, sea la métrica $d(x,y) := |x-y|$, Luego la bola abierta, cerrada y esfera, se determina por:

$$\begin{aligned} B(x,r) &= \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r\} = (x-r, x+r) \\ B[x,r] &= \{y \in \mathbb{R} : |x-y| \leq r\} = [x-r, x+r] \\ S(x,r) &= \{y \in \mathbb{R} : |x-y| = r\} = \{-r, r\} \end{aligned}$$

En $\mathbb{R}^2$ con la métrica $d(x,y) := ||x-y|| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, se observa que la bola abierta es

$$B(x,r) = \{y \in X : (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 < r^2\}$$

que por geometría sabemos que es una circulo de centro (x_1, x_2) y radio r sin considerar el borde. Luego una bola cerrada sería incluir el borde y la esfera sería considerar la circuferencia (círculo es distinto a ser una circuferencia)

En $\mathbb{R}^3$ se construye una bola sin tomar el borde que la rodea. La bola cerra sería con el borde y la esfera sería quitar el contenido a la bola cerrada.

1.3.2. Punto Límite, Abiertos y Cerrados

Defininción 1.5. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $E \subseteq X$ un conjunto no vacío. Entonces*

1. *Un punto de acumulación o punto límite $p \in X$ de E, si toda bola abierta de centro p contiene un $q \in E$ distinto de p.*
2. *p es un punto aislado de E, si no es punto límite de E.*
3. *E es cerrado si todo punto límite de E pertenece a E.*
4. *p es un punto interior si existe un $r > 0$ talque $B(p,r) \subseteq E$*
5. *E es abierto si todo punto de E son puntos interiores*
6. *E es acotado si existe un $q \in E$ talque*

$$\sup_{p \in E} d(p,q) < \infty$$

7. *Se define $E^C := X - E$*
8. *E es denso en X si todo $x \in X$ son puntos límites de E o puntos de E.*

Interpretemos cada punto de la definición.

1. Si $p \in X$ es punto límite de E, entonces para todo $r > 0$ la bola $B(p, r)$ tiene un punto de E que no es p, es decir

$$B(p, r) \cap E \setminus \{p\} \neq \emptyset$$

Siendo esto la definición equivalente y la que usaremos regularmente.

2. Si p es punto aislado de E, entonces existe un $r > 0$ talque

$$B(p, r) \cap E \setminus \{p\} = \emptyset$$

Puede pasar $p \in E$ sea punto aislado de E, para ello basta pensar en $\mathbb{R}$ y $E = (a, b) \cup \{c\}$ donde $b < c$. Y c es punto aislado. Esto significa que si $p \in E$, no necesariamente es punto límite.

3. E es cerrado si y sólo si para todo $p \in X$ punto límite de E, se tiene que E. (Notar la similitud con sucesiones)

4. p es interior si podemos meter una bola de forma entera al conjunto E.

5. E es abierto si y sólo si para todo $p \in E$, existe un $r_p > 0$ talque

$$B(p, r_p) \subseteq E$$

6. En el fondo podemos tomar cualquier $q \in E$ y siempre la distancia sobre otro punto $p \in E$, será finito. Entonces, E es no acotado si existe un punto $q \in E$ talque el supremo de $\{d(p, q) : p \in E\}$ es no finito.

7. Esto nos dice que X se toma como el conjunto universal, por lo que todo complemento es subconjunto de X.

8. En el fondo decimos que E al unirlo con sus puntos límites, se genera todo el conjunto X. Un ejemplo básico es que los racionales son denso sobre $\mathbb{R}$, esto nos dice que $\mathbb{R}$ o es racional o es punto límite, es decir, si $p \in \mathbb{R}$ es punto límite de $\mathbb{Q}$, entonces para todo $r > 0$ se tiene que

$$B(p, r) \cap \mathbb{Q} \setminus \{p\} \neq \emptyset \Leftrightarrow (p - r, r + p) \cap \mathbb{Q} \setminus \{p\} \neq \emptyset$$

es decir, en todo intervalo (a, b) donde $a < b$, existe un racional r talque $a < r < b$.

Teorema 1.1. *Toda bola abierta es un conjunto abierto.*

Dem. Sea (X, d) un espacio métrico, consideremos la bola abierta $B(x, r)$ con $x \in X$ y $r > 0$. Sea $y \in B(x, r)$, para este elemento consideraremos $r_y := r - d(x, y) > 0$, claramentre biej definido ya que $d(x, y) < r$, luego podemos ver que

$$B(y, r_y) \subseteq B(x, r)$$

Y en efecto, sea $z \in B(y, r_y)$, entonces

$$d(z, y) < r_y = r - d(x, y)$$

Luego

$$\begin{aligned} d(z,x) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &< r \end{aligned}$$

Por tanto $z \in B(x,r)$. Por tanto $B(x,r)$ es abierto. ■

Teorema 1.2. *Si p es un punto límite de E, entonces toda bola abierta de centro p, contiene infinitos puntos de E.*

Dem. Vamos a probar por contradicción, supongamos que existe una bola $B(p,r)$ $(r > 0)$ talque contiene finitos puntos de E, esto significa que

$$(B(p,r) \cap E)\backslash\{p\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

(por convenio quitamos p de la intersección). Sea

$$I := \min_{i=1,\dots,n} d(p,p_i) > 0$$

Cosa que existe en virtud de que son finitos los p_i, ahora si consideramos la bola $B(p,I)$ ocurre que

$$(B(p,I) \cap E)\backslash\{p\} = \emptyset$$

Es decir, existe un $I > 0$ talque $B(p,I) \setminus \{p\}$ no contiene ningún elemento de E, por tanto p no puede ser punto límite, siendo una contradicción. Probando el teorema. ■

Nota 1.4. Para ver que $(B(p,I) \cap E)\backslash\{p\}$ es vacío, basta suponer que no es vacío, luego existe un $q \in B(p,I)$ y en E, luego $d(q,p) < I$, pero esto significa que $q = p_i$ para algún $i = 1, \dots, n$ y por tanto, I no es el mínimo, llegando a una contradicción.

Corolario 1.1. *Sea $E \subseteq X$ un subconjunto no vacío de un espacio muestral. Si E es un conjunto finito, entonces no tiene punto límite.*

Dem. Supongamos que E tiene un punto límite p, por lo que para todo $r > 0$, la intersección

$$(B(p,r) \cap E)\backslash\{p\}$$

es no vacío. Luego por el teorema 1.2 tenemos que el conjunto anterior es infintio, pero esto implica que E es infinito, siendo una clara contradicción. Probando el corolario. ■

Ejemplo 1.10. Sea

$$E := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$$

sobre la métrica usual podemos ver que 0 es un punto límite, ya que toda bola de centro 0 contiene un elemento de E. Para ver esto tomemos un $r > 0$ y construimos la bola

$$B(0,r) = (-r,r)$$

Por la propiedad Arquimediana existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$0 < \frac{1}{N} < r$$

Luego $\frac{1}{N} \in B(0,r)$ y $\frac{1}{N} \in E$, y esto es para todo $r > 0$ viendo que 0 es efectívamente un punto límite de E.

Ejemplo 1.11. Sea $(\mathbb{R}, d)$ un espacio métrico, con métrica usual, considere la siguiente tabla:

	Cerrado	Abierto	Acotado
$B(0,1)$	F	V	V
$B[0,1]$	V	F	V
$\mathbb{N}$	V	F	F

Cuadro 1: Tabla comparativa

Podemos ver que es cerrado, abierto y acotado. La bola $B(0,1)$ no es cerrado ya que tiene un punto límite 1 que no está en la bola, es abierto ya que toda abierta es abierta y es acotada ya que el supremo de las distancias $d(q,p)$ con $q \in B(0,1)$ fijo, sobre $p \in B(0,1)$, es siempre finito. La bola cerrada $B[0,1]$ es cerrada ya que todo punto límite está en el, no es abierta, ya que 1 no es un punto interno y es acotada por la misma razón que $B(0,1)$. Y por último, los naturales son cerrados ya que $\mathbb{R}$ no tiene puntos límites sobre $\mathbb{N}$, por lo que paradojicamente, $\mathbb{N}$ tiene todos los puntos límite, luego es cerrado, no es abierto ya que la bola es un conjunto infinito no numebrable, imposible estár dentro de $\mathbb{N}$ y no es acotado, ya que no es acotado por ninguna distancia y por tanto, no existe el supremo.

Teorema 1.3. *Sea (X,d) un espacio métrico, sea $E \subseteq X$. Entonces E es abierto si y solo si E^C es cerrado.*

Dem. Sea E^C cerrado, y sea $x \in E$. Podemos ver x no es un punto límite de E^C ya que si lo fuera, entonces $x \in E^C$, siendo imposible, luego existe un $r > 0$ talque

$$B(x,r) \cap E^C = \emptyset$$

Luego por dicotomía de complemento, se tiene que $B(x,r) \subseteq E$, probando así que E es abierto.

Supongamos ahora que E es abierto. Sea x un punto límite de E^C, es decir, para todo $r > 0$ se tiene que

$$(B(x,r) \cap E^C) \backslash \{x\} \neq \emptyset$$

Si $x \in E$, entonces existe un $r > 0$ talque $B(x,r) \subseteq E$, pero entonces

$$B(x,r) \cap E^C = \emptyset$$

siendo una contradicción. Por tanto $x \in E^C$. Probando así el teorema. ■

Corolario 1.2. *Sea (X,d) una espacio métrico y sea $E \subseteq X$, entonces E es cerrado si y sólo si E^C es abierto.*

Dem. Basta redefinir los conjuntos. Sea $D := E^C$, luego E es cerrado si y sólo si E^C, equivale decir que D es abierto si y sólo si D^C es cerrado. Como este último es cierto, entonces el enunciado es verdadero. ■

Algo importante de conjuntos, es que podemos contruir otros conjuntos en base a unión e intersección, por lo que nos interesa si al aplicar una unión o una intersección de conjuntos abiertos o cerrados, este preserva el ser abierto o el ser cerrado. Antes de entregar un resultado, recordemos que dada una colección finita o infinita de conjuntos $\{E_\alpha\}$, se tiene que

$$\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)^C = \bigcap_\alpha E_\alpha^C$$

Teorema 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico.*

1. *Sea $\{G_\alpha\}$ una colección infinita de subconjuntos de abiertos de X, entonces*

$$\bigcup_\alpha G_\alpha$$

   Es abierto.

2. *Sea $\{F_\alpha\}$ una colección infinita de subconjuntos de cerrados de X, entonces*

$$\bigcap_\alpha F_\alpha$$

   Es cerrado.

3. *Sea $\{G_1, \ldots, G_n\}$ una colección finita de subconjuntos de abiertos de X, entonces*

$$\bigcap_{i=1,\ldots,n} G_i$$

   Es abierto

4. *Sea $\{F_1, \ldots, F_n\}$ una colección finita de subconjuntos de cerrados de X, entonces*

$$\bigcup_{i=1,\ldots,n} F_i$$

   Es cerrado

Dem. Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Sea $\{G_\alpha\}$ una colección de abiertos. Sea $x \in \bigcup G_\alpha$, entonces para algún α se tiene que $x \in G_\alpha$, como G_α es abierto, se tiene que exsite un $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq G_\alpha$, luego

$$B(x, r) \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha$$

   es decir, es un conjunto abierto.

2. Sea $\{F_\alpha\}$ una colección infinita de cerrados, existe una colección de conjuntos abiertos $\{F_\alpha^C\}$ en virtud del teorema 1.3, si unimos los complementos obtenemos que el conjunto

$$\bigcup_\alpha F_\alpha^C$$

es abierto. Aplicando nuevamente el teorema 1.3 concluimos que

$$\left(\bigcup_\alpha F_\alpha^C\right)^C = \bigcap_\alpha F_\alpha$$

es un conjunto cerrado.

3. Sea $\{G_1, \ldots, G_n\}$ una colección finita de abiertos. Entonces si $x \in \bigcap A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $x \in A_i$, y como este es abierto, se tiene que existe un $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$$

siendo un conjunto abierto.

4. Sea $\{F_1, \ldots, F_n\}$ una colección finita de cerrados. Consideremos $\{F_1^C, \ldots, F_n^C\}$ una colección de abierto, entonces por el punto anterior, se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n F_\alpha^C$$

es abierto. Por tanto, el complemento

$$\left(\bigcap_{i=1}^n F_\alpha^C\right)^C = \bigcup_{i=1}^n F_\alpha$$

es un conjunto cerrado.

Probando el teorema. ■

Podemos afirmar que la intersección infinita de conjuntos abiertos, es no necesariamente abierto, lo mismo se concluye con la unión infinita de cerrados.

Ejemplo 1.12. Sea $(\mathbb{R}, d)$ un espacio métrico, con métrica usual. Sea

$$G_n := \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$$

Una sucesión de conjuntos abiertos. Podemos ver que

$$\bigcap_{n\geq 1} G_n = \{x\}$$

y el conjunto $\{x\}$ es no abierto.

Ejemplo 1.13. Sea (X, d) un espació métrico discreto. Entonces $\{x\}$ es un conjunto cerrado y abierto. Para esto probemos que $\{x\}$ es abierto y que su complemento, también lo es. Debemos ver que existe un $r > 0$ talque

$$B(x, r) \subseteq \{x\}$$

y es bastante sencillo determinafrlo, si $r = 1$ entonces todo para todo $y \in B(x, 1)$ tiene que $d(x, y) < 1$, luego el único candidato es $x = y$, siendo abierto.

Por otro lado, para ver que $X\backslash\{x\}$ es abierto, basta ver que

$$X\backslash\{x\} = \bigcup_{y \neq x} \{y\}$$

Teniendo una únión infinita de conjuntos abiertos, luego $\{x\}$ es cerrado y abierto.

Proposición 1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $E \subseteq$. Un punto $p \in E$ es interior si y sólo si exsite un conjunto $A \subseteq E$ abierto, talque $p \in A$.*

Dem. Sea $p \in E$ un punto interior, entonces existe un $r > 0$ talque $B(p, r) \subseteq E$, tomando $A := B(p, r)$ encontramos nuestro conjunto abierto.

Por otro lado si $A \subseteq E$ es abierto, entonces dado $p \in A$ existe un $r > 0$ talque $B(p, r) \subseteq A \subseteq E$, luego p es un punto interior. ■

1.3.3. Clausura, Interior y Frontera

Definición 1.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $E \subseteq X$.*

1. *Sea E' el conjunto de todos los puntos límites de E, definimos la clausura de E por:*

$$\overline{E} = E \cup E'$$

2. *Se define el interior de E por:*

$$E^o := \{x \in E : x \textit{ es punto interior de } E\}$$

3. *Se define la frontera de E por:*

$$\partial E := \overline{E} \setminus E^o$$

Ejemplo 1.14. Sea $X := \mathbb{R}$ bajo la métrica usual y sea el subconjunto $E := [0, 1)$, estudiemos la clausura, interior y frontera de E. Notemos que $(0, 1)$ está contenido en E^o al ser puntos interiores, por lo que $(0, 1) \subseteq E^o$. Sea $p \in E^o$, entonces existe $r := \text{mín}\{p, 1 - p\} > 0$ talque $B(p, r) = (p - r, p + r) \subseteq E^o$, notemos que $p \in (0, 1)$ ya que siempre existe tal r y que $p \notin \mathbb{R} \setminus (0, 1)$. Por tanto

$$E^o = (0, 1)$$

Para clausura notemos que todo E es punto límite de E, si $x = 1$ entonces también es punto límite, si tomamos $p \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, este nunca será punto límite. Por tanto

$$\overline{E} = [0,1) \cup [0,1] = [0,1]$$

Finalmente la frontera de E es $\partial E = [0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\}$.

Determinar la clausura o el interior de un conjunto E puede resultar tedioso, pero con los siguientes resultados veremos que la clausura y el interior se puede caracterizar de una forma bastante útil.

Proposición 1.2. *Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $E \subseteq X$, entonces el conjunto E' de los puntos límite de E, es cerrado.*

Dem. Sea p punto límite de E', sea $r > 0$, entonces existe un $q \in X$ talque

$$q \in B\left(p, \frac{r}{2}\right) \cap E' \setminus \{p\}$$

Notemos que $q \in E'$, es decir, q es punto límite de E, luego existe un $\overline{q} \in X$ talque

$$\overline{q} \in B\left(q, \frac{r}{2}\right) \cap E \setminus \{q, p\}$$

Dado que q es un punto límite de E, entonces toda bola de q tiene infinitos puntos de E, por tanto podemos tomar $\overline{q}$ distinto ded q y de p. Luego

$$d(p, \overline{q}) \leq d(p,q) + d(q, \overline{q}) < r$$

Es decir

$$\overline{q} \in B(p,r) \cap E \setminus \{p\}$$

Por tanto p es un punto límite de E y por tanto $p \in E'$. Como queriamos probar. ■

Lema 1.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $E \subseteq X$. Entonces*

1. *$\overline{E}$ es cerrado*
2. *$E = \overline{E}$ si y sólo si E es cerrado*
3. *Si para todo $F \subseteq X$ cerrado talque $E \subseteq F$, entonces $\overline{E} \subseteq F$. ($\overline{E}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a E)*

Dem.

1. Sea $p \in X \setminus \overline{E}$, entonces p no es punto límite de E y $p \notin E$, luego existe un $r > 0$ talque

   $$B(p,r) \cap \overline{E} \setminus \{p\} = \emptyset$$

   Continuar...

2. Sea E cerrado, entonces todo punto límite de E está en E, es decir $E' \subseteq E$, luego $\overline{E} = E$. Por otro lado, si $E = \overline{E}$, entonces por el primer punto, E es cerrado.

3. Sea F un conjunto cerrado talque $E \subseteq F$. Sea $p \in \overline{E}$, si p está en E entonces $p \in F$, si p es un punto límite de E, entonces para todo $r > 0$ se tiene que

$$\emptyset \neq (B(p,r) \cap E) \setminus \{p\} \subseteq (B(p,r) \cap F) \setminus \{p\}$$

es decir, p es punto límite de F y luego $p \in F$. Por tanto $\overline{E} \subseteq F$.

Probando el lema. ■

Lema 1.2. *Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $E \subseteq X$. Entonces*

1. *E^o es abierto.*
2. *$E = E^o$ si y sólo si E es abierto*
3. *Si para todo F es abierto es talque $F \subseteq E$, entonces $F \subseteq E^o$. (E^o es el mayor conjunto abierto que está contenido en E)*

Dem.

1. Sea $p \in E^o$, entonces p es punto interior de E, entonces existe $r > 0$ talque

$$B(x,r) \subseteq E$$

Si $B(x,r)$ es abierto, entonces todo punto de $B(x,r)$ es interior de E, luego $B(x,r) \subseteq E^o$, de forma que E^o es abierto.

2. Si E es abierto, entonces todo punto de E es interior, luego $E \subseteq E^o$, y si $p \in E^o$, entonces exite un $r > 0$ talque $B(p,r) \subseteq E$, luego $p \in E$ y $E = E^o$
3. Sea F un conjunto abierto talque $F \subseteq E$, sea $p \in F$, luego existe un $r > 0$ talque $B(p,r) \subseteq F \subseteq E$, es decir, p es un punto interior de E, luego $F \subseteq E^o$.

Probando el lema. ■

Lema 1.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $E \subseteq X$. Entonces la frontera ∂E es cerrado.*

Dem. Por definición de frontera, tenemos que $\partial E = \overline{E} \cap (E^o)^C$, es decir, una intersección de conjuntos cerrados. Siendo este, cerrado. ■

Ejemplo 1.15. Sea $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ un espacio métrico, bajo métrica usual. Sea $E = [0,1) \times \{0\}$, encontremos el interior, la clausura y la frontera de E.

- **Interior.** Sea $p \in E^0$, entonces existe un $r < 0$ talque

$$B(p,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(p_1 - y_1)^2 + (y_2)^2} < r\} \subseteq [0,1) \times \{0\}$$

Pero si tomamos $y = (p_1, r - \delta)$ con δ suficientemente pequeño, tendremos que

$$y \in B(p,r)$$

pero $y \notin [0,1) \times \{0\}$, y esto es para todo p interior. Por tanto

$$E^o = \emptyset$$

- **Clausura.** Notemos que $[0,1]\times\{0\}$ es un conjunto cerrado que contiene a E, por tanto

$$\overline{E}\subseteq[0,1]\times\{0\}$$

Para probar la igualdad se debe probar que $(1,0)\in\overline{E}$, y esto es evidente, entonces

$$[0,1]\times\{0\}=\overline{E}$$

- **Frontera.** Por definición

$$\partial E=\overline{E}\setminus\emptyset=\overline{E}$$

Ejemeplo 1.16. Sea $X:=\mathbb{R}$ un espacio métrico bajo la métrica usual. Sea $E:=\mathbb{Q}$. Encontremos el interior, la clausura y la frontera.

- **Interior.** Sea $p\in\mathbb{Q}^o$, entonces existe un $r>0$ talque

$$B(p,r)=(p-r,p+r)\subseteq\mathbb{Q}$$

Pero sabemos que la bola contiene infinitos valores reales (p es punto límite de $\mathbb{R}$), entonces existe un $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ talque $x\in B(p,r)$. Por tanto

$$\mathbb{Q}^o=\emptyset$$

- **Clausura.** Por definición, sabemos que $\mathbb{R}$ es cerrado y $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$, entonces

$$\overline{\mathbb{Q}}\subseteq\mathbb{R}$$

Pero $\mathbb{Q}$ es denso sobre $\mathbb{R}$, es decir, todo elemento de $\mathbb{R}$ es punto límite de $\mathbb{Q}$ o es racional, luego

$$\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$$

- **Frontera.** Por definición

$$\partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}$$

Definición 1.7. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que $E\subseteq X$ es denso si*

$$\overline{E}=X$$

Observación 1.4. La definición de denso es equivalente a la presentada anteriormente, ya que E es denso si $x\in X$ es punto de E o punto límite de E, o mejor dicho $\overline{E}=E\cup E'=X$.

Definición 1.8. *Sea (x,d) un espacio métrico. Consideremos $E\subseteq Y\subseteq X$. Decimos que E relativamente abierto en Y (o sobre Y) si para todo $p\in E$, existe un $r>0$ talque*

$$\{y\in Y: d(p,y)<r\}\subseteq E$$

Observación 1.5. Que un conjunto E sea relativamente abierto sobre Y, equivale decir que para todo $p \in E$ existe un $r > 0$ talque

$$B(p,r) \cap Y \subseteq E$$

Ejemplo 1.17. Ser abierto es disinto a ser relativamente abierto, ya que si $X := \mathbb{R}^2$ y $E := (0,1) \times \{0\}$ bajo la métrica usual, entonces para $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$ se tiene que E es relativamente abierto en Y pero no en X.

Teorema 1.4. *Sea (X,d) un espacio métrico y sean $E \subseteq Y \subseteq X$. Entonces E es relativamente abierto sobre Y si y sólo si $E = Y \cap G$ para algún $G \subseteq X$ abierto.*

Dem. Supongamos que $E = Y \cap G$ para G abierto. Debemos probar que E es relativamente abierto, sea $p \in E$, entonces $p \in G$, por lo que existe un $r > 0$ talque

$$B(p,r) \subseteq G$$

intersectanto con Y, obtenemos que

$$B(p,r) \cap Y \subseteq G \cap Y = E$$

por tanto E es relativamente abierto en Y.

Supongamos que E es relativamente abierto en Y. Sea $p \in E$, entonces existe un $r_p > 0$ (r asociado a p) talque

$$B(p,r_p) \cap Y \subseteq E$$

Notemos que

$$E = \left(\bigcup_{p \in E} B(p,r_p) \right) \cap Y = \bigcup_{p \in E} (B(p,r_p) \cap Y)$$

La inclusión $\supseteq$ es clara por como definimos las bolas y si $p \in E$, entonces $p \in B(p,r_p) \cap Y$ como $E \subseteq Y$. Además

$$G := \bigcup_{p \in E} B(p,r_p)$$

es una unión infinita de conjuntos abierto, luego es un conjunto abierto. ■

1.4. Conjuntos Compactos

Definición 1.9. *Sea (X,d) un espacio métrico. Se define la cubierta abierta de E por una colección $\{G_\alpha\}$ de abiertos de X, tales que*

$$E \subseteq \bigcup_{\alpha} G_\alpha$$

En otras palabras, una colección de abiertos es cubierta si al unirlos cubre todo E. ' **Definición 1.10.** *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $K \subseteq X$ es compacto si toda cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita.*

Dicho de otra forma, si $\{G_\alpha\}$ es una cubierta de K, entonces existe la colección $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^n \subseteq \{G_\alpha\}$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$$

Teorema 1.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $K \subseteq X$, entonces*

1. *Si K es compacto, entonces es cerrado*
2. *Si K es compacto y $F \subseteq K$ cerrado, entonces F es compacto.*

Dem.

1. Sea K compacto. Probemos que K^C es abierto, sea $p \in K^C$, definimos $r_q < \frac{1}{2}d(p, q)$. Sea la cubierta

$$K \subseteq \bigcup_{q \in K} B(q, r_q)$$

cosa que existe ya que $k \in K$, luego $k \in B(k, r_k)$, luego $k \in \bigcup B(q, r_q)$. En virtud de que K es compacto, existen $q_1, \ldots, q_n$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(q_i, r_{q_i}) =: B$$

Sea

$$A := \bigcap_{i=1}^n B(p, r_{q_i})$$

Siendo A abierto, notemos que

$$A \cap B = \emptyset$$

Y para comprobarlo, sea $x \in A \cap B$, entonces

$$\begin{aligned} d(x, p) &< r_{q_i}, \ \text{ para todo } i = 1, \ldots, n \\ d(x, q_j) &< r_{q_j}, \ \text{ para algún } j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2r_{q_j} < d(p, q_j) &\leq d(p, x) + d(x, q_j) \\ &< r_{q_i} + r_{q_j} \end{aligned}$$

tomando $i = j$ llegamos a que $r_{q_j} < r_{q_j}$. Por tanto tal x no puede existir. Entonces $A \subseteq K^C$ ya que si $a \in A$ entonces $a \in K \subseteq B$ o $a \in K^C$, y la primera opción es imposible, por lo que $a \in K^C$ y por tanto existe un conjunto abierto A donde $p \in A$. Es decir K^C es abierto y por tanto K es cerrado.

2. Sean $F \subseteq K \subseteq X$, donde K es compacto y F es cerrado. Luego dada una cubierta $\{G_\alpha\}$ talque

$$F \subseteq \bigcup_{\alpha} G_\alpha$$

Si unimos F^C nos queda que

$$K \subseteq \left(\bigcup_{\alpha} G_\alpha\right) \cup F^C = X$$

Viendo que $\{G_\alpha \cup F^C\}$ es una cubierta de K y dado que K es compacto, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cup F^C$$

Luego

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \cup F^C$$

Pero como $F \not\subseteq F^C$ entonces

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

Por tanto F es compacto.

Probando el teorema. ■

Corolaio 1.2. *Sea (X, d) un espacio muestral. Si F es cerrado y K es compacto, entocnes $F \cap K$ es compacto.*

Dem. Notemos que $F \cap K$ es cerrado y que es subconjunto de K. Por tanto $F \cap K$ es compacto. ■

Teorema 1.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea E un conjunto infinito y $E \subseteq K$ donde $K \subseteq X$ es compacto. Entonces K tiene un punto límite de E.*

Dem. Supongamos que K no tiene ningún punto límite de E, es decir, todo $q \in K$, existe un $r_q > 0$ talque

$$B(q, r_q) \cap E \setminus \{q\} = \emptyset$$

es decir, $B(q, r_q)$ contiene a lo más, el elemento q en caso de que $q \in E$. Notemos que

$$K \subseteq \bigcup_{q \in K} B(q, r_q)$$

es una cubierta que subre a K. Sea $\{q_1, \ldots, q_n\}$ una colección finita cualquiera de elementos de K, entonces

$$\bigcup_{i=1} nB(q_i, r_{q_i})$$

No cubre a E ya que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B(q_i, r_{q_i}) \cap E \setminus \{q_1, \ldots, q_n\} = \emptyset$$

y E al ser infinito, es claro que no se cubre. Por tanto no existe una subcubierta para $\bigcup B(q, r_q)$. Pero es imposible ya que K es compacto. Por tanto K tiene un punto límite de E. ■

1.4.1. Conjuntos Compacto en $\mathbb{R}^n$

En esta pequeña sección se trabajara con $X = \mathbb{R}^n$ bajo la métrica euclidiana.

Teorema 1.7. *Sea $\{I_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una colección de intervalos cerrados $I_n = [a_n, b_n]$ y monótona $I_n \supseteq I_{n+1}$, entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

Dem. Sea $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, notemos que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_1$, es decir, E es un conjunto real acotado, por tanto existe el supremo

$$S := \sup E$$

si $a_i \leq b_n$ para todo i fijo y n, entonces todo b_n es una cota superior de E, por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_n \leq S \leq b_n \Leftrightarrow S \in [a_n, b_n] = I_n$$

Por tanto

$$S \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

■

El concepto de celdas se puede extender a $\mathbb{R}^k$ y también existe un teorema análogo en k dimensiones.

Teorema 1.8. *Sea $I_n := [a_{n,1}, b_{n,1}] \times \cdots \times [a_{n,k}, b_{n,k}] \subseteq \mathbb{R}^k$ una celda donde $I_n \supseteq I_{n+1}$. Entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

Dem. Entendamos que significa que $I_{n+1} \subseteq I_n$, si $(c_1, \ldots, c_k) \in I_{n+1}$ entonces $a_{n+1,i} \leq c_i \leq b_{n+1,i}$, por la monotonía se tiene que $a_{n,i} \leq c_i \leq b_{n,i}$, luego para todo $i = 1, \ldots, k$ se tiene que

$$a_{1,i} \leq a_{2,i} \leq \cdots \leq a_{n,i} \leq \cdots \leq b_{1,i}$$

Sea

$$E_i := \{a_{n,i} : n \in \mathbb{N}\}$$

entonces cada E_i está acotado por $b_{1,i}$, por lo que tiene supremo. Sea

$$S_i := E_i$$

De igual forma que el teorema anterior, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$S_i \in [a_{n,i}, b_{n,i}]$$

Luego el elemento $S := (S_1, \ldots, S_k) \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir

$$S \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$$

Probando el teorema. ■

Teorema 1.9. *Cada celda de $\mathbb{R}^k$ es compacto.*

Dem. Vamos a probar por contradicción, es decir, dado una celda con una cubierta cualquiera, ocurre que no existe una cubierta finita, llegando a una contradicción.

Sea $I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ una celda. Consideremos

$$\delta := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (a_i - b_i)^2}$$

una diagonal, (le llamamos diagonal ya que se parece mucho a una diagonal de un cuadrado, solo en k dimensiones). Podemos ver que si $x, y \in I$ entonces

$$||x - y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2} \leq \delta$$

Sea $\{G_\alpha\}$ una cubierta abierta de I, es decir

$$I \subseteq \bigcup_{\alpha} G_\alpha$$

Supongamos que I no tiene una cubierta finita para $\{G_\alpha\}$. Sea

$$c_i := \frac{a_i + b_i}{2}$$

el promedio de los intervalos. Luego $[a_,c_i], [c_ib_i]$ es una subdivisión de $[a_i, b_i]$, es decir, si las unimos se forma $[a_i, b_i]$. Haciendo esto para todo $i = 1, \dots, k$ y aplicando producto cartesiano entre todas las formas posibles, obtenemos 2^k subdivisiones. Digamosles Q_i, donde

$$I = \bigcup_{i=1,\dots,2^k} Q_i$$

Dado que I no tiene una cubierta finita, exite una subdivisión Q_j que no tiene una cubierta finita para algún $j = 1, \dots, 2^k$. Digamos que $I_1 := Q_j$, volvemos aplicar este proceso para I_1, dado que I_1 no tiene una cubierta finita, existe una subdivisón $Q(I_1)_j$ (asociado a $_I1$), luego tomamos $I_2 := Q(I_1)_j$ y así sucesivamente, obteniendo una sucesión $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ talque:

- $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$
- I_n no tiene una cubierta finita
- Si $x, y \in I_n$ entonces $||x - y|| \leq 2^{-n}\delta$

donde la última propiedad se cumple aplicando inducción. Notemos que hemos construir una sucesión decreciente de celdad cerradas, entonces por el teorema 1.8 tenemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

es no vacío. Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ y existe un α donde $x \in G_\alpha$ (dado que $\bigcap I_n \subseteq I$), como este es abierto, existe un $r > 0$ talque

$$||x - y|| < r$$

para algún $y \in G_\alpha$ distinto de x. Sea n suficientemente grande talque

$$2^{-n}\delta < r$$

luego para $y \in I_n$ se tiene que

$$||x - y|| \leq 2^{-n}\delta < r$$

es decir $I_n \subseteq B(x, r) \subseteq G_\alpha$. Es decir, I_n tiene una cubierta finita. Siendo una contradicción. Por tanto I es compacto. ■

Teorema 1.10. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *E es cerrado y acotado*
2. *E es compacto*
3. *Todo subconjunto infinito de E. E tiene punto límite de ese subconjunto.*

Dem. 1. $\to$ 2. Si E es acotado, entces existe una celdad I talque $E \subseteq I$, si I es compacto y E es cerrado, entonces E es compacto.

2. $\to$ 3. Sea $S \subseteq E$, dado que E es compacto, se tiene que E contiene un punto límite de E. (Teorema ya visto)

3. $\to$ 1. Supongamos que E es no acotado, esto se puede entender que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in E$ talque $||x_n|| > n$. Sea $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$. E tiene un punto límite de S, es decir, existe una subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ talque $x_{n_k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in E$, pero sabemos que x_n no converge. Siendo una contradicción, luego E es acotado. (Para encontrar esta subsucesión, digamos que $x \in E$ es punto límite de S, luego para todo $r > 0$ se tiene que $B(x,r) \cap S \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Tomando $r = 1/k$ se define x_{n_k} talque $x_{n_k} \in B(x, 1/k)$ y $x_{n_k} \in S$. En particular x_{n_k} converge a x).

Supongamos que E es no cerrado, entonces existe un $p \in \mathbb{R}^k$ talque es un punto límite de E, pero $p \notin E$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in E$ talque

$$||p - x_n|| < \frac{1}{n}$$

(para ello se ve que $B(p,r) \cap E$ es no vacío, luego tomando $r = 1/n$ se define $x_n \in B(p,r) \cap E \setminus \{p\}$, construyendo la sucesión).

Sea $S := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$. Entonces E tiene un punto límite de S que no es p (si p fuera el punto límite de S, entonces $p \in E$). Sea $y \in \mathbb{R}^k \setminus \{p\}$, luego

$$\begin{aligned} ||x_n - y|| &\geq ||p - y|| - ||x_n - p|| \\ &\geq ||p - y|| - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}||p - y|| > 0 \end{aligned}$$

para n suficienmente grande. Pero esto implica que $y \in \mathbb{R}^k$ no puede ser punto límite de S, es decir, E no tiene ningún punto límite de S. Llegando a una contradicción.

Probando así que E es acotado y cerrado.■

Corolario 1.3. (Weierstrass) *Todo conjuntos infinito y acotado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, tiene punto límite en $\mathbb{R}^n$*

Dem. Si E es acotado, existe una celda I compacto talque $E \subseteq I$, como E es subconjunto de un compacto, se tiene que $I \subseteq \mathbb{R}^n$ contiene un punto límite de E, luego, es decir existe un $p \in \mathbb{R}^n$ talque es punto límite de E. ■

Este teorema parece bastante evidente ya que consideramos $\mathbb{R}^n$ como universo, pero existen conjuntos que no necesariamente tiene el punto límite de un subconjunto, por eso la importancia de especificar que estamos en $\mathbb{R}^n$.

2. Sucesiones y Límite de Funciones

2.1. Sucesiones

Toca el turno de hablar de las sucesiones sobre espacios métricos, límite de funciones de espacios métricos y sucesiones formados por funciones.

Definición 2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\{x_n\}_n \subseteq X$ una sucesión. Decimos que x_n converge si existe un $x \in X$ talque para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque:*

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

Ejemplo 2.1. Sea $X := \mathbb{R}$ y $x_n := \frac{1}{n}$ con métrica usual. Podemos ver que

$$\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $X = [0, 1)$ se mantiene la convergencia, pero si $X = (0, 1)$ ya no, debido a que $0 \notin X$.

Definición 2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $\{x_n\} \subseteq X$ es una sucesión, decimos que es de Cauchy si y sólo si para todo ε existe un $N \in \mathbb{N}$ talque para todo $n, m \geq N$ se tiene que:*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Ejemplo 2.2. Si $X := \mathbb{Q}$ con métrica usual, podemos ver que

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e \notin \mathbb{Q}$$

Pero si es de Cauchy. Más adelante veremos porque al ser 'convergente', implicar ser Cauchy.

Teorema 2.1. *Sea (x, d) un espacio métrico. Y sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión convergente, entonces*

1. *$\{x_n\}$ es de cauchy.*
2. *Si $\{x_n\}$ es de Cauchy, entonces es acotado.*

Dem. Sea x el punto de convergencia de $\{x_n\}$, luego dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ talque si $n, m \geq N$, entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x)$$

tomando N suficientemente grande, talque

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se tiene que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$. De forma que $\{x_n\}$ es de Cauchy.

Probemos que $\{x_n\}$ es acotado dado que es Cauchy. En virtud de que es Cauchy, tenemos que para $L > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque para todo $n, m \geq N$ se tiene que:

$$d(x_n, x_m) < L$$

si fijamos m, tendremos que para todo $n \geq N$ existe el supremo de los $d(x_n, x_m)$ y además que es finito ya que L es cota superior. Por otro lado, si $n < N$ basta considerar el conjunto $\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ y tomar

$$S := \sup_{i,j=1,\ldots,N-1} d(x_i, x_j)$$

Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ se toma

$$\text{máx}\left\{S, \sup_{n\geq N} d(x_n, x_m)\right\}$$

De forma que la sucesión $\{x_n\}$ es acotado. ■ **(Revisar)**

Volviendo al ejemplo 2,2, si extendemos de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$, claramente x_n converge, luego es de Cauchy y acotado, esto implica que en $\mathbb{Q}$, x_n es Cauchy y también acotado.

Teorema 2.2. *Sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión convergente. Entonces*

1. *El límite es único*
2. *Si $E \subseteq X$ y p es punto límite de E, entonces existe una sucesión $\{p_n\} \subseteq E$ con límite*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p$$

Dem.

1. Sean $p, p' \in X$ tales que $\lim x_n = p$ y $\lim x_n = p'$, luego

$$d(p, p') \leq d(x_n, p) + d(x_n, p') < \varepsilon$$

con $\varepsilon > 0$, tomando un N suficienmente grande y $n \geq N$. Luego para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$d(p, p') < \varepsilon$$

esto es necesariamente que $p = p'$.

2. Sea p un punto límite de E, entoncers para todo $r > 0$ se tiene que

$$(B(p, r) \cap E) \setminus \{p\} \neq \emptyset$$

sea $r = \frac{1}{n}$, luego para cada n se define x_n, es decir,

$$x_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap E \setminus \{p\}$$

Generando una sucesión $\{x_n\}$, probemos que $x_n \to p$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un N talque

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

luego para todo $n \geq N$ se tiene que

$$d(x_n, p) \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Probando que x_n converge a $p \in X$.

Probando el teorema. ■

Observación 2.1. El teorema anterior caracteriza los puntos límites, si (X, d) es un espacio métrico y $E \subseteq X$, dado $\{x_n\} \subseteq E$ ($x_n \neq x$ para todo n) que converge a $x \in X$, entonces x es un punto límite de E. Para ello sea $r > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d(x_n, x) < r$$

para todo $n \geq N$. Luego

$$x_n \in B(x, r) \cap E \setminus \{x\}$$

Por tanto x es punto límite de E. En forma formal:

$p \in X$ es punto límite de E si y sólo si existe una sucesión $\{p_n\} \subseteq E \setminus \{p\}$ que converge a $p \in X$

Observación 2.2. Además en virtud del teorema 2.2, podemos redefinir el teorema que caracteriza los compactos. Recordemos que:

Si $K \subseteq X$ es compacto, y si $E \subseteq K$ es un subconjunto infito, entonces K tiene un punto límite de E.

Es decir

Si $K \subseteq X$ es compacto, y $E \subseteq K$, entonces existe una sucesión $\{p_n\} \subseteq E$ que converge a $p \in K$.

Ahora con el teorema 1.10, podemos generar el siguiente resultado:

Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces K es compacto si y sólo si toda sucesión en K, tiene una subsucesión que converge en K

Probemos esta equivalencia. Si K es compacto, entonces sea $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ un conjunto de elementos de uan sucesión cualquier $\{x_n\} \subseteq K$, luego E es infinito y K tiene un punto límite p de E, es decir, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subseteq E$ talque

$$x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} p \in K$$

Por otro lado. Sea $E \subseteq K$, sea $p \in X$ un punto límite de E, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq E$ que converge a $p \in X$, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a $q \in K$, pero si x_n converge a p, entonces $p = q \in K$. Por tanto hay un punto límite de E que está en K, es decir, K es compacto.

Definición 2.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $E \subseteq X$ un subconjunto. Definimos el diametro de E por:*

$$diam E := \sup\{d(p, q) : p, q \in E\}$$

Dicho de otra forma, el diametro de un conjunto E es la distancia más larga. En una circuferencia habitual, el diametro es el segmento más largo que toca la circuferencia, en un cuadrado habitual, es la diagonal.

Lema 2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico y $E \subseteq X$, entonces $diam E = diam \overline{E}$.*

Dem. Si $E \subseteq \overline{E}$, entonces

$$\{d(x, y) : x, y \in E\} \subseteq \{d(x, y) : x, y \in \overline{E}\}$$

Por tanto $diam \overline{E}$, es cota superior de las distancia en E, luego

$$diam E \leq diam \overline{E}$$

Probemos la igualdad. Sea $\varepsilon > 0$ y sean $p, q \in \overline{E}$, digamos que p, q son punto límite de E, luego existe $p', q' \in E$ tales que

$$d(p, p') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } d(q, q') < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d(p, q') + d(q, q') \\ &\leq d(p, p') + d(q, q') + d(p', q') \\ &< \varepsilon + diam E \end{aligned}$$

Y esto es para todo $\varepsilon > 0$, luego

$$d(p, q) \leq diam E$$

para todo $p, q \in \overline{E}$. Por tanto $diam E$ es cota superior de las distancia de $\overline{E}$. Por tanto

$$diam E = diam \overline{E}$$

Probando el lema. ■

Definición 2.4. *Decimos que un espacio métrico (X, d) es compacto, si X es compacto.*

Ejemplo 2.3. El conjunto $\mathbb{R}^k$ no es compacto, ya que debe ser acotado y cerrado, y claramente es no acotado.

Ejemplo 2.4. Si (X, d) es un espacio métrico y $K \subseteq X$ es un subconjunto compacto, entonces el espacio métrico

$$(K, d|_K)$$

es un espacio métrico compacto. Este pequeño resultado nos dice que podemos generar espacios compactos. Por ejemplo, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ no es un espacio compacto al ser $\mathbb{R}$ no acotado, pero si $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, entonces podemos aplciar todas las propiedades de compacto al espacio compacto $([0, 1], |\cdot|)$.

Teorema 2.3. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces toda sucesión de Cauchy en X, converge en X.*

Dem. La demostración requiere demostrar varios resultados previos, por lo que iremos paso por paso. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy.

- **Paso 1.** Sea $E_N := \{x_n : n \geq N\} \subseteq X$. Notemos que

$$diamE_N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ya que en virtud de que $\{x_n\}$ es de Cauchy, se tiene que dado $\varepsilon > 0$, existe un $N' \in \mathbb{N}$ talque

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N'$. Esto implica que $\varepsilon > 0$ es una cota superior de E_N, luego

$$diamE_N \leq \varepsilon$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$diamE_n \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Por tanto $diamE_N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$, además, por el lema anterior concluimos que:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{E}_n = 0$$

Y además, por definición se puede observar que $\overline{E}_{n+1} \subseteq \overline{E}_n$. Ya que si $E_{n+1} \subseteq E_n \subseteq \overline{E}_n$, y dado que $\overline{E}_n$ es cerrado, entonces por la caracterización de la clausura, $\overline{E}_{n+1} \subseteq \overline{E}_n$

- **Paso 2.** Probemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n \neq \emptyset$$

Para ello probaremos por contradicción. Supongamos que es vacío, entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\overline{E}_n\right)^C = X$$

Dado que X es compacto, existe una subcubierta abierta finita (como todos los complementos de $\overline{E}$ son abiertos), entonces

$$\bigcup_{i=1}^{m}(\overline{E}_{n_i})^C = X \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{m}\overline{E}_{n_i} = \emptyset$$

Por el principio del buen orden, existe un $N := \text{máx}\{n_1, \ldots, n_m\}$. Luego por la monotonía de E_n, se tiene que

$$\overline{E}_N \subseteq \overline{E}_{n_i}, \text{ para todo } i = 1, \ldots, m$$

Luego $\overline{E}_N = \emptyset$. Siendo una clara contradicción, ya que por construcción E_N no puede ser vacío. Por tanto:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{E}_n \neq \emptyset$$

Paso 3. Este paso es corto pero necesario. Probemos que existe un único

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{E}_n$$

Sean $x, x' \in \bigcap \overline{E}_n$. Si $diam\overline{E}_N \to 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d(x, x') \leq diam\overline{E}_n < \varepsilon, \text{ para todo } n \geq N$$

(como $x, x' \in \overline{E}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) Luego

$$d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$$

- **Paso 4.** Probemos que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Sea $\varepsilon > 0$, por el paso 1 existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$diam\overline{E}_n < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$, y por el paso 2, $x \in \overline{E}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$d(x, x_n) \leq diam\overline{E}_n < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Por tanto $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Probando que toda sucesión de Cauchy en un espacio compacto, converge. ■

Observación 2.3. Con el teorema anterior, hemos caracterizado las sucesiones de Cauchy. Es más, si (X, d) es un espacio métrico no compacto y $K \subseteq X$ es compacto, entonces toda sucesión $\{x_n\} \subseteq K$ de Cacuhy, converge a $x \in K$.

Nota 2.1. Notemos que los $\mathbb{R}^n$ no son compactos, pero de cálculo 3 sabemos que toda sucesión de Cauchy converge. La razón es por la observación 2.3, ya que podemos tomar una celda compacta y ver que converge. El siguiente corolario enuncia y demuesta esta afirmación.

Corolario 2.1. *Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es convergente (bajo la métrica usual).*

Dem. Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión de Cauchy, entonces es acotada, es decir, existe una celda compacta $I \subseteq \mathbb{R}^n$, talque $\{x_n\} \subseteq I$. Luego (I, d) forma un espacio compacto y $\{x_n\}$ converge a $x \in I \subseteq \mathbb{R}^n$. Probando el corolario. ■

Defínción 2.5. *Decimos que un espacio métrico es completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Observación 2.4. Es evidente que todo espacio compacto es un espacio completo. Y por el corolario 2.1, podemos concluir que $\mathbb{R}^n$ es un espacio completo. Esto implica que la condición ser completo, es más general que se compacto.

Ejemplo 2.5. Si $X = \mathbb{Q}$, podemos ver que

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \notin \mathbb{Q}$$

luego x_n es una sucesión que no converge en $\mathbb{Q}$ y por tanto $\mathbb{Q}$ no es completo.

Ejemplo 2.6. Sea (X, d) el espacio métrico discreto. Es decir:

$$d(p, q) := \begin{cases} 1, & p \neq q \\ 0, & p = q \end{cases}$$

Podemos ver que (X, d) es completo. Sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy. Entonces dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon < 1$$

para todo $n, m \geq N$. Esto implica estabilización y que $x_n = x_m$ tomando un $m \geq N$ fijo y $n \geq N$. Luego para todo $\varepsilon > 0$, existe un N suficientemente grande, talque

$$d(x, x_n) = 0 < \varepsilon$$

donde $x = x_N = x_{N+1} = \ldots$. Por tanto (X, d) es completo.

2.2. Subsucesiones

Las subsucesiones son importante ya que permiten estudiar de otro ángulo las sucesiones. Además que entrega importante caracterizaciones, como por ejemplo, el ser compacto, que un conjunto $K \subseteq X$ si compacto, entonces toda sucesión $\{x_n\} \subseteq X$, tiene una subsucesión convergente. También caracteriza la convergencia de una sucesión con la convergencia de las subsucesiones. También daremos algunos detalles de sucesiones en $\mathbb{R}$ con métrica usual para asociarlos a las métricas en general.

Definición 2.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión, consideremos la sucesión natural $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ talque $n_k < n_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión*

$$\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$$

le llamamos subsucesión de $\{x_n\}$.

Lema 2.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $\{x_n\}$ una sucesión, entonces converge a $x \in X$ si y sólo si toda subsucesión converge a x.*

Dem. Si toda subsucesión converge a x, entonces la sucesión converge a x, ya que $\{x_n\}$ es su propia subsucesión.

Por otro lado, sea $\{x_n\}$ es una sucesión que converge x, consideremos $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión cualquiera. Sea $\varepsilon > 0$, dado que x_n converge, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Sean $k, K \in \mathbb{N}$ tales que $n_k \geq N$ para todo $k \geq K$ (Por inducción se puede probar que $n_k \geq K$, luego tomando $k \geq K \geq N$ se llega a la desigualdad). Entonces

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$$

para todo $k \geq K$. Probando así que $x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. ■

Lema 2.4. *Sea (X,d) un espacio métrico. Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Si existe un $x \in X$ talque toda subsucesión tiene al menos una subsucesión que converge a x, entonces $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.*

Dem. Supongamos que x_n no converge a x, entonces existe un $\varepsilon > 0$ talque

$$d(x, x_n) \geq \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (definición de no convergencia). Sea $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión, si n_k es suficientemente grande, se tiene que

$$d(x_{n_k}, x) \geq \varepsilon$$

Es decir, $\{x_{n_k}\}$ no puede tener una subsucesión que converge a x. Siendo una contradicción. Por tanto $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. ■

Teorema 2.4.*Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión. Entonces existe una subsucesión convergente.*

Dem. Sea $E := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no vacío. Destacamos dos casos

- **E finito.** Se puede elegir $x_{n_1} = \cdots = x$.
- **E infinito** Notemos que $E \subseteq X$, donde X es compacto, entonces existe un punto límite p de E en X. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ talque $d(x_{n_1}, x) < 1$, $n_1 < n_2 \in \mathbb{N}$ talque $d(x_{n_2}, x) < \frac{1}{2}$ y así recursivamente, definiendo una subsucesión $\{x_{n_k}\} \subseteq E$ talque

  $$d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$$

  Luego esta sucesión converge a x. ■

observación 2.5. EL teorema 2.4 es importante ya que entrega una dirección que nos interesa, y es que un conjunto compacto, nos dice que toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Teorema 2.5. (Bolzano-Weierstrass) *Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^k$ tiene una subsucesión convergente.*

Dem. Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada, notemos que existe una celdad I talque

$$\{x_n\} \subseteq I$$

y dado que I es compacto, se tiene que existe una subsucesión convergente. ■

Definición 2.7. *Una sucesión real $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, se dice monótona si*

1. *Es creciente, es decir, $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Es decreciente, es decir, $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Teorema 2.4. *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión mónotona. Entonces es convergente si y sólo si es acotada.*

Dem. Sea $\{x_n\}$ una sucesión creciente (decreciente se demuestra de forma análoga). Si la sucesión es convergente, entonces claramente es acotada.

Supongamos que es acotada. Sea

$$x := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Por definición de supremo, dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$x - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$

Luego $|x - x_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Por tanto $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. ■

Teorema 2.4. *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$ una sucesión. Consideremos la métrica euclidiana, y sea $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, entonces $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ si y sólo si $x_{n,i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.*

Dem. Supongamos que

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_{n,i} - x_i)^2} < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Luego para todo $i = 1, \dots, k$ y para todo $n \geq N$, se tiene que

$$|x_{n,i} - x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_{n,i} - x_i)^2} < \varepsilon$$

Es decir

$$x_{n,i} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_i$$

Por otro lado, si todas las sucesiones coordenadas convergen, entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $i = 1, \ldots, k$ se tiene que

$$|x_{n,i} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$$

para todo $n \geq N$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n \geq N$, entonces

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_{n,i} - x_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon$$

Por tanto

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x = (x_1, \ldots, x_k)$$

Probando el teorema. ■

2.3. Límites y Continuidad de funciones

2.3.1. Definición y Propiedades

Recordemos el límite de una función real. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función bien definida, y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces decimos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si

$$0 < |x - x_0| < \delta, \ \ x \in A$$

entonces

$$|f(x) - y| < \varepsilon$$

Lo importante es que estamos aplicando la distancia euclidiana para determinar límite. Y como estamos estudiando métricas, claramente podemos extender esta definición a espacios métricos.

Defínción 2.8. *Sean $(X, d_x), (Y, d_y)$ espacios métricos y sea $E \subseteq X$ un conjunto no vacío. Se define la función de espacios métricos por:*

$$f : E \to Y$$

Si $p \in X$ es un punto límite de E. Definimos el límite de f cuando x tiende p por

$$\lim_{x\to p} f(x) = q \in Y$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si

$$0 < \underset{x \in E}{d_x(x,p)} < \delta$$

entonces

$$d_y(f(x), q) < \varepsilon$$

Nota 2.2. Para el límite, no necesariamente p debe estar definido en la función, solo nos interesa estudiar la vencidad de p y como $x \in E$ se comportar cerca de ella. Por ello tomamos p un punto límite de E.

Observación 2.6. Podemos interpreta el límite de una función con bolas. Es decir, $f(x) \overset{x \to p}{\longrightarrow} q$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ talque si

$$x \in B_x(p, \delta) \cap E \setminus \{p\}$$

entonces

$$f(x) \in B_y(q, \varepsilon)$$

Teorema 2.5. *Sea $f : E \to Y$ una función sobre espacios métricos. Entonces*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$$

para toda sucesión $\{p_n\} \subseteq E \setminus \{p\}$ que converge a $p \in X$.

Dem. Supongamos que $\lim_{x \to p} f(x) = q$ y sea $\{p_n\} \subseteq E \setminus \{p\}$ talque $p_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} p$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque

$$d_y(f(x), q) < \varepsilon$$

para todo $0 < d_x(x,p) < \delta$ con $x \in E$. Como p_n converge a $p \in X$, entonces para $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ talque

$$0 < d_x(p_n, p) < \delta$$

(como p_n no puede ser p) para todo $n \geq N$. Luego

$$d_y(f(p_n), q) < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Es decir

$$f(p_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} q$$

Por otro lado, supongamos que toda sucesión$\{p_n\}$ en $E \setminus \{p\}$ que converge a p es talque $\{f(p_n)\}$ converge a q. Supongamos además que $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq q$, luego existe un $\varepsilon > 0$ talque para todo $\delta > 0$ existe un $x \in E$ y $0 < d_x(x,p) < \delta$ talque

$$d_y(f(x), q) \geq \varepsilon$$

Construyamos una sucesión. Sea $\delta_n := \frac{1}{n}$, y sea p_n talque $p_n \in E \setminus \{p\}$ y $d_x(p_n, p) < \frac{1}{n}$, podemos ver que

$$p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$$

Pero entonces tenemos una sucesión $f(p_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} q$, donde

$$d_y(f(p_n), q) \geq \varepsilon$$

para δ_n. siendo una clara contradicción. Por tanto

$$f(x) \overset{x\to p}{\longrightarrow} q$$

Probando el teorema. ■

De esta forma podemos probar de manera más sencilla cuando una función no converge a un punto $q \in Y$ cuando $x \to p$.

Definición 2.9. *Sea $E \subseteq X$ y sea $p \in E$. Entonces la función $f : E \to Y$ de espacios métricos, es continua en p si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si*

$$\underset{x\in E}{d_x(x, p)} < \delta$$

entonces

$$d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon$$

Si f es continua en todo $p \in E$, entonces decimos que f es continua sobre E.

Notemos que para que f sea continua, necesariamente p debe estar definido en f.

Ejemplo 2.7. Sea $p \in E$ un punto aislado y sea $f : E \to Y$ una función de espacios métricos. Entonces f es continua en p, y en efecto, si p es punto aislado de E, significa que existe un $r > 0$ talque

$$B(p, r) \cap E \setminus \{p\} = \emptyset$$

Sea $\varepsilon > 0$, notemos que $B(p, r) \cap E = \{p\}$, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeño, si

$$d_x(x, p) < \delta \leq r$$

donde $x \in E$ entonces $x = p$, luego $d_y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon$. Por tanto f es continua en p.

Corolario 2.2. *Sea $p \in E$ un punto límite de E y sea $f : E \to Y$ una función de espacios métricos. Entonces f es continua en p si y sólo si*

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$

Dem. Es solo aplicar definición de límites. ■

Ejemplo 2.7.

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función real dada por

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

es continua en 0, en efecto, sea $\varepsilon>0$, luego si $\delta:=\varepsilon>0$, vemos que

$$d_y(f(x),f(0))=\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|\leq |x-0|=d_x(x,0)<\delta=\varepsilon$$

Luego es continua en 0.

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función real dada por:

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Esta función no tiene límite en $x_0=0$. Para ver esto usaremos el teorema 2.5. Sea $p_n:=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ una sucesión real que converge a 0, luego la sucesión

$$f(p_n)=\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

diverge. Por tanto f no puede ser continua en 0.

3. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y):=\begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Esta función es continua en 0. Hay varias formar de ver esto pero solo acotaremos, notemos que

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leq\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow d_y(f(x,y),0)\leq\frac{d_x((x,y),0)}{2}$$

Sea $\varepsilon>0$, entonces tomando $\delta:=2\varepsilon>0$, entonces

$$d_y(f(x,y),0)\leq\frac{d_x((x,y),0)}{2}<\varepsilon$$

para todo $d_x((x,y),0)<\delta$. Por tanto es continua en 0.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(x,y):=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Está función no es continua en $(0,0)$, ya que si tomamos la sucesión

$$p_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

donde $p_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (0,0)$, luego

$$f(p_n) = \frac{1}{2}$$

y claramente $f(p_n)$ no converge a 0. Siendo no continua en $(0,0)$.

5. Sea $X := \mathbb{R}$ y sea la función

$$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Podemos ver que $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ es discontinua en todo $\mathbb{R}$.

Sea $x_0 \in \mathbb{Q}$, si $\varepsilon = 1$ y sea cualquier $\delta > 0$, luego existe un $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ talque

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

y entonces

$$|\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x_0)| = 1 \geq \varepsilon$$

De formar que $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ es discontinua en todo racional.

Para probar que lo es en todo $\mathbb{R}$ basta tomar x_0 irracional y escoge nuevamente $\varepsilon = 1$, luego como $\mathbb{Q}$ es denso sobre $\mathbb{R}$, se tiene que para todo $\delta > 0$ existe un racional donde $0 < |x - x_0| < \delta$, talque

$$|\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) - \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x_0)| = 1$$

De forma que $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ es discontinua en todo $\mathbb{R}$.

Teorema 2.6. *Sean X, Y, Z espacios métricos con métrica d_x, d_y, d_z respectívamente. Sean*

$$f : X \to Y, \ \ g : im(f) \to Z$$

funciones entre espacios métricos. Se define la composición $h := g \circ f$. Si f es continua en $p \in X$ y g es continua en $f(p) \in im(f)$, entonces h es continua en $x \in X$.

Dem. Notemos que la composición h está bien definida. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por la continuidad de g, existe un $\delta > 0$ talque

$$d_z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon$$

para todo $d_y(y, f(p)) < \delta$. Luego en virtud de la continuidad de f, existe un $\kappa > 0$ talque

$$d_y(y, f(p)) < \delta$$

para todo $d_x(x, p) < \kappa$. Como $y \in im(f)$, podemos tomar $f(x) = y$, luego para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\kappa > 0$ talque

$$d_z(h(x), h(p)) < \varepsilon$$

para todo $d_x(x, p) < \kappa$. Por tanto h es continua en p ∎

2.3.2. Conjuntos Abiertos y Cerrados, funciones Lipschitzianas y Uniformidad Continua.

Definición 2.10. *Sea $f : X \to Y$ una función de espacios métricos. Se define la preimagen de f sobre $V \subseteq Y$ por:*

$$f^{-1}(V) := \{x \in X : f(x) \in V\}$$

Teorema 2.7. *Sea $f : X \to Y$ una función de espacios métricos. Entonces, f es continua si y sólo si $f^{-1}(V)$ es abierto para todo $V \subseteq Y$ abierto.*

Dem. Supongamos que f es continua en todo X. Sea V abierto, sea $p \in f^{-1}(V)$, entonces $f(p) \in V$, luego existe un $\varepsilon > 0$ talque

$$B(f(p), \varepsilon) \subseteq V$$

En virtud de la continuidad de f, existe un $\delta > 0$ talque

$$d_y(f(p), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $d_x(x, p) < \delta$ con $x \in X$. Pero esto implica que existe una bola

$$B(p, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$$

Para ver esto basta ver que si $x \in B(p, \delta)$, entonces $f(x) \in B(f(p), \varepsilon) \subseteq V$, luego $x \in f^{-1}(V)$. Por tanto $f^{-1}(V)$ es abierto.

Probemos la otra dirección. Debemos probar que f es continua en todo X. Sea $p \in X$, por definición de f, p está bien definido en f, ahora sea $\varepsilon > 0$, consideremos la bola

$$B(f(p), \varepsilon) =: V$$

que claramente es abierto, entonces $f^{-1}(V)$ es abierto, es decir, si $p \in f^{-1}(V)$, entonces existe un $\delta > 0$ talque

$$B(p, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$$

Luego si $d_x(x, p) < \delta$ con $x \in X$, entonces $d_y(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Es decir, f es continua en X.

Probando el teorema. ■

Corolario 2.3. *Sea $f : X \to Y$ una función de espacio métricos. Entonces f es continua si y sólo si $f^{-1}(C)$ es cerrado para todo C cerrado.*

Dem. Antes de probar el teorema, probemos que

$$f^{-1}\left(C^C\right) = \left(f^{-1}(C)\right)^C$$

Notemos que

$$x \in f^{-1}\left(C^C\right) \Leftrightarrow f(x) \in C^C \Leftrightarrow f(x) \notin C \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(C) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(C))^C$$

Probando la igualdad. Ahora notemos que

$$\begin{aligned} f \text{ es continuo en } X &\Leftrightarrow f^{-1}(C) \text{ es cerrado para todo } C \subseteq Y \text{ cerrado} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}\left(C^C\right) \text{ es abierto para todo } C^C \text{ abierto} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(V) \text{ es abierto para todo } B := C^C \subseteq Y \text{ abierto} \end{aligned}$$

Luego por el teorema 2.7 se cumple la equivalencia. ■

Definición 2.11. *Sea $f : X \to Y$ una función de espacios métricos. Decimos que es lipschitziana si existe un $C > 0$ talque*

$$d_y(f(x), f(y)) \leq C d_x(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

Corolario 2.4. *Sea $f : X \to Y$ una función de espacios métricos. Si f es lipschitziana, entocnes f es continua en todo X.*

Dem. Sea $p \in X$, sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta := \frac{\varepsilon}{C} > 0$, luego si

$$d_x(x, p) < \delta$$

entonces

$$d_y(f(x), f(p)) \leq C d_x(x, p) < \varepsilon$$

Por tanto f es continua en X. ■

Ejemplo 2.8. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable con derivada acotada y no nula, entonces la función f es lipschitz. En efecto, sean $x, y \in [a, b]$, sin pérdida de generalidad supongamos que $x < y$, luego existe un $\xi \in [x, y]$ talque

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|$$

(Teorema del Valor Medio).

Sea $C := \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$, que claramente es mayor a 0 ya que f' es no nula, existe un $x_0 \in [a, b]$ talque $|f'(x_0)| > 0$. Luego

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \Leftrightarrow d_y(f(x), f(y)) \leq C d_x(x, y)$$

Si la derivada de f es nula, entonces f es constante, luego es claro que es de lipschitz.

Definición 2.12. *Sea $\alpha > 0$, y sea $f : X \to Y$ una función de espacios métricos. Se dice que α-hölder continua, si existe $C > 0$ talque*

$$d_y(f(x), f(y)) \leq C d_x(x, y)^\alpha$$

para todo $x, y \in X$.

Observación 2.7. Si $\alpha = 1$ entonces f es de lipschitz.

Defínción 2.13. *Sea $f : X \to Y$ una función de espacios métricos. Decimos que f es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque para todo $x, y \in X$, si*

$$d_x(x, y) < \delta$$

entonces

$$d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

La uniformidad continua, es más fuerte que se continua. Aquí podemos ver que $\delta > 0$ depende exclusivamente de ε y no de los $x, y \in X$. También es importante notar que queremos que todos los $x, y \in X$ tales que su distancia es menor a δ, entonces la distancia de sus imagenes es menor a ε.

Ejemplo 2.8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, esta función es uniformemente continua bajo la métrica usual. Sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta := \varepsilon > 0$, luego, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$|x - y| < \delta$$

Entonces

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon$$

Ejemplo 2.9. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, podemos probar que f es uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$, si

$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| < 2|x - y|$$

Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, entonces para todo $x, y \in (0, 1)$ tales que

$$|x - y| < \delta$$

entonces

$$|x^2 - y^2| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto f es uniformemente continua.

Nota 2.2. En general si f es lipschitziana, entonces es α-Hölder, a su vez, si f es lipschitziana, entonces es uniformemente continua y a su vez implica que es continua.

Nota 2.3. Probemos que ser lipschitiziana, implica uniformidad continua. Sea $f : X \to Y$, una función de espacios métricos. Sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0$, entonces para todo $x, y \in X$ tales que

$$d_x(x, y) < \delta$$

se tiene que

$$d_y(f(x), f(y)) \leq C d_x(x, y) < \varepsilon$$

Por tanto f es uniformemente continua. Para probar que la uniformidad continua implica continuidad, basta fijar un punto.

Nota 2.4.

- Se puede probar que la suma de funciones uniformemente continuas, es una función uniformemente continua.
- Pero no necesariamente el producto de funciones uniformemente continuas es una función uniformemente continua
- Y la composición de funciones uniformemente continuas, es una función uniformemente continua.

Probemos el primer y tercer punto.

- Sean $f, g : X \to Y$ uniformemente continuas, sea $\varepsilon > 0$....

Nota 2.5. Si tenemos $f : X \to \mathbb{R}$ una función real, donde X es acotado y cerrado, entonces

Ser diferenciable continuo $\to$ Ser Lipschitz $\to$ ser $\alpha-$Hölder $\to$ Uniformemente contiua $\leftrightarrow$ continuo

para todo $\alpha \in (0, 1]$

2.3.3. Funciones sobre Compactos

Teorema 2.8. *Sea $f : X \to Y$ una función sobre espacios métricos continua. Supongamos que X es compacto, entonces $f(X)$ es compacto.*

Dem. Dado que f es continua, entonces

$$f^{-1}(V)$$

es abierto para todo $V \subseteq Y$ abierto. Sea $\{V_\alpha\}$ una cubierta abierta talque

$$f(X) \subseteq \bigcup_\alpha V_\alpha$$

entonces

$$X \subseteq \bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$$

(para ver esto tomemos $x \in X$, entonces $f(x) \in X \subseteq \bigcup V_\alpha$, luego $f(x) \in V_\alpha$, luego $x \in f^{-1}(V_\alpha)$). Luego como X es compacto, existe una subcubierta finita talque

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$$

Luego

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$$

(para ver esto tomamos $f(x) \in f(X)$, luego $x \in f^{-1}(V_\alpha)$ y así $f(x) \in V_\alpha$) Es decir, $f(X)$ es compacto. ■

Corolario 2.5. *Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ una función de espacios métricos, continua y X es compacto. Entonces $f(X)$ es compacto.*

Dem. Basta aplicar el teorema anterior. Es más, podemos concluir que $f(X)$ es acotado y cerrado. ■

Lema 2.5. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto, entonces*

$$\begin{aligned} \sup E &\in E \\ \inf E &\in E \end{aligned}$$

Dicho de otrar forma, E alcanza su supremo e ínfimo.

Dem. Dado que E es compacto en $\mathbb{R}$, entonces es cerrado y acotado, luego existe el supremo e ínfimo. Probemos con respecto al supremo.

Sea $s := \sup E$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x \in E$ talque

$$s - \varepsilon < x \leq s$$

Sea $\{x_n\} \subseteq E$ una sucesión talque

$$s - \frac{1}{n} < x_n \leq s$$

En particular $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$. Luego s es un punto límite de E y dado que es cerrado, se tiene que $s \in E$. Probando el lema. ■

Teorema 2.9. *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua, supongamos que X es compacto y sean*

$$\begin{aligned} M &:= \sup_{x\in X} f(x) \\ m &:= \inf_{x\in X} f(x) \end{aligned}$$

Entonces existen $p, q \in X$ tales que

$$\begin{aligned} f(p) &= M \\ f(q) &= m \end{aligned}$$

Dem. Si f es continua y X es compacto, entonces $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, por tanto el supremo e ínfimo están bien definidos, y por el lema 2.5 se tiene que $M, m \in f(X)$. Como queriamos probar. ■

Teorema 2.10. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Sea X compacto, entonces la inversa dada por:*

$$f^{-1} : Y \to X$$

es continua.

Dem. Antes de demostrar el teorema notemos que para todo $E \subseteq X$, se tiene que

$$f(E^C)^C = f(E)$$

Y esto es en virtud de que f es biyectiva, tenemos que

$$y \in f(E^C)^C \Leftrightarrow y \notin f(E^C) \Leftrightarrow y \in f(E)$$

(si $y \notin f(E^C)$, entonces no existe $x \in E^C$ talque $f(x) = y$ y por sobreyectividad existe un $x \in X$, luego $x \in E$ talque $f(x) = y$ y así $y \in f(E)$)

Sea $V \subseteq$ abierto, luego $V^C \subseteq X$ es cerrado y como X es compacto, V^C es compacto, luego $f(V^C)$ es compacto, y por tanto cerrado, luego

$$(f(V^C))^C = f(V) \subseteq Y$$

es abieto. Por tanto f^{-1} es continua. $\blacksquare$.

Teorema 2.11. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y sea X compacto. Entonces f es uniformemente continua.*

Dem.

Sea $\varepsilon > 0$, dado que f es continua, para todo $p \in X$ existe un $\delta_p > 0$ talque si

$$d_x(q, p) < \delta_p$$

entonces

$$d_y(f(q), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si

$$X \subseteq \bigcup_{p \in X} B_x\left(p, \frac{\delta_p}{2}\right)$$

entonces existe una subcubierta finita talque

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_x\left(p_i, \frac{\delta_{p_i}}{2}\right)$$

(En particular, es una igualdad)

Sea $\delta := \frac{1}{2} \min\limits_{1 \leq i \leq n} \delta_{p_i} > 0$.

Sean $p, q \in X$ tales que

$$d_x(p, q) < \delta$$

con respecto a p, existe un $i = \{1, \ldots, n\}$ talque

$$p \in B_x\left(p_i, \frac{\delta_{p_i}}{2}\right)$$

Luego

$$\begin{aligned} d_x(q, p_i) &\leq d_x(p, q) + d_x(p, p_i) \\ &\leq \delta + \frac{\delta_{p_i}}{2} \\ &\leq \frac{\delta_{p_i}}{2} + \frac{\delta_{p_i}}{2} = \delta_{p_i} \end{aligned}$$

Entonces

$$q \in B_x(p_i, \delta_{p_i})$$

Luego

$$\begin{aligned} d_y(f((p), f(q))) &\leq d_y(f(p), f(p_i)) + d_y(f(p_i), f(q)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto f es uniformemente continua. ■

Ejemplo 2.10. Sea $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ una función dada por $t \mapsto (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, f es claramente biyectivo pero f^{-1} no es continua, en particular, no es continua en $f(0) = (0, 0)$. Si el dominio de f incluyea a 2π, entonces sería compacto y luego la inversa sería continua.

Ejemplo 2.11. Sea

$$\begin{aligned} f : (0, 1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Esta función no alcanza ni su máximo ni su mínimo.

2.4. Completación de Espacios Métricos

Lema 2.6. *Sea $f : X \to Y$ una función uniformemente continua y sea $\{x_n\}_n \subseteq X$ una sucesión de Cauchy. Entonces la sucesión $\{f(x_n)\}_n \subseteq Y$ es de Cauchy.*

Dem.

Sea $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ talque para todo $x, y \in X$ si

$$d_x(x, y) < \delta$$

entonces

$$d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Para este $\delta > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n, m \geq N$, entonces

$$d_x(x_n, x_m) < \delta$$

Reemplazando $x = x_n, y = x_m$ tenemos que para todo $n, m \geq N$ se tiene que

$$d_y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$$

Es decir, $\{f(x_n)\}_n \subseteq Y$ es una sucesión de Cauchy. ■

Teorema 2.12. (Extensión de funciones uniformemente continuas) *Sea $E \subseteq X$ un conjunto no vacío. Sea $f : E \to Y$ una función uniformemente continua y sea Y completo. Entonces existe una única extensión:*

$$\widetilde{f} : \overline{E} \to Y$$

donde $\widetilde{f}|_E = f$, talque es uniformemente continua.

Dem. La demsotración lo haremos de la siguiente forma, probaremos que existe una función bien definida, extensión de f, uniformemente continua y que es única.

- **Existencia.** Sea $x \in \overline{E}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq E$ talque $x_n \to x$, como converge en $\overline{E}$ la sucesión es de Cauchy en $\overline{E}$, entonces por la uniformidad continua de f, $\{f(x_n)\}_n$ es una sucesión de Cauchy, y como Y es completo, se tiene que converge. Luego definimos la función

$$\widetilde{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

  donde x_n es una sucesión que converge a x. Probando que existe tal función.

- **Independencia.** Probemos que podemos tomar cualquier sucesión que converge a x. Sea $\{z_n\} \subseteq E$ una sucesión que converge a x, luego

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, x) + d(x, z_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Luego, dado que f es uniformemente continua se tiene que

$$d(f(x_n), f(z_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  Es decir

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

- **Extensión.** Probemos ahora que $\widetilde{f}$ restringido en E es f. Sea $x \in E$, consideremos $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces es claro que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y luego

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$$

- **Uniformemente continua.** Sea $\varepsilon > 0$, luego existe un $\delta > 0$ talque si $x, y \in E$ de forma que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Sean $x, y \in \overline{E}$ de forma que
$$d(x, y) < \frac{\delta}{3}$$
Sean $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq E$ sucesiones que convergen a x, y respectívamente, entonces para tal $\delta > 0$ existe un $N \in N$ talque
$$d(x_n, x) < \frac{\delta}{3}, d(y_n, y) < \frac{\delta}{3}$$
para todo $n \geq N$. Entonces
$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(x_n, y) < \delta$$
Entonces
$$d(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$$
para todo $n \geq N$. Y
$$d(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(y)) \leq d(\widetilde{f}(x), f(x_n)) + d(f(x_n), f(y_n)) + d(\widetilde{f}(y), f(y_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varepsilon$$
Por tanto hemos probado que $\widetilde{f}$ es uniformemente continua. (notemos que para determinado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_1 = \delta/3 > 0$.)
- **Unicidad.** Probemos que la extensión es única. Sea $g : \overline{E} \to Y$ una extensión de f. Sea $x \in \overline{E}$ y sea $\{x_n\} \subseteq E$ una sucesión que converge a x, entonces
$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$$
Podemos decir que ambos límites son lo mismo ya que $g|_E = f$, luego al tomar valores de $x_n \in E$ se tiene que $f(x_n) = g(x_n)$, y se concluye que $g(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ por la continuidad de g. Siendo la extensión única.

Probando el teorema. ■

A parte de probar la extensión de una función uniformemente continua con conjunto de llegada completo, hemos caracterizado esta extensión, en particular, si $\overline{f}$ es la extensión de f, entonces
$$\overline{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$
con $\{x_n\} \subseteq E$ talque $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in \overline{E}$.

Defínción 2.14. *Sea $f : X \to Y$ una función de espacios métricos. Diremos que f es una isometría si*
$$d_x(x, y) = d_y(f(x), f(y))$$
para todo $x, y \in X$.

Nota 2.4. Que f es simetría, implica que es uniformemente continua y inyectiva.

- **Uniformidad Continua.** Sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta := \varepsilon > 0$, entonces si $x, y \in X$ tales que

$$d_x(x, y) < \delta$$

entonces

$$d_y(f(x), f(y)) = d_x(x, y) < \varepsilon$$

- **Inyectividad.** Sean $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$, entonces

$$0 = d_y(f(x), f(y)) = d_x(x, y)$$

Entonces $x = y$.

Defінción 2.15. (Completación de un Espacio Métrico) *Sea (X, d_x) un espacio métrico. Se dice que (Y, d_y) es la complementación de X si Y es completo y existe una isometría*

$$f : X \to Y$$

donde $im(f)$ es denso en Y.

Recordemos que E es denso en X si $\overline{E} = X$.

Lema 2.6. *Sean Y, Z complementaciones de X. Entonces existe una biyección isométrica*

$$h : Y \to Z$$

Dem. Dado que Y y Z son complementaciones de X, existen isometrías

$$f_1 : X \to Y$$
$$f_2 : X \to Z$$

tales que Y, Z son completos y con imagenes densas. Por convenio a f_1, restringiremos su conjunto de llegada $im(f_1)$, luego tenemos que

$$f_1' : X \to im(f_1) \subseteq Y$$

en particular f_1' es isometría y biyectiva (es inyectiva por la isometría y sobreyectiva por definición), sea

$$g := f_2 \circ f_1'^{-1} : im(f_1) \to Z$$

claramente bien definida, veamos si es isometría, sean $x, y \in im(f_1)$, entonces

$$d(g(x), g(y)) = d(f_2(f_1'^{-1}(x)), f_2(f_1'^{-1}(y))) = d(f_1'^{-1}(x), f_1'^{-1}(y)) = d(x, y)$$

como f_1' es isometría, entonces su inversa también. Por lo tanto, g es uniformemente continua , con Z completo, entonces podemos extender g a una función

$$h : \overline{im(f_1)} = Y \to Z$$

que es uniformemente continua y $h|_{im(f_1)} = g$. Probemos que es isometría y biyectiva, sean $x, y \in Y$, luego existen sucesiones x_n, y_n que convergen a x e y respectívamente, luego

$$d(g(x), g(y)) = \lim_{n\to\infty} d(h(x_n), h(y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

Por lo que g es isometría y luego inyectiva. Falta probar que es sobreyectiva.

Sea $z \in Z$, como $\overline{im(f_2)} = Z$, entonces existe una sucesión $\{f_2(x_n)\} \subseteq im(f_2)$ talque

$$f_2(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$$

De aquí tenemos que $\{f_2(x_n)\}$ es Cauchy y luego por la isometría de f_2, se tiene que $\{x_n\} \subseteq X$ es Cauchy, aplicando f_1', que es isometría y luego uniformemente continua, se tiene que $\{f_1'(x_n)\} \subseteq im(f_1) \subseteq Y$ es Cauchy y luego converge en Y completo. Digamos que

$$f_1'(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y \in Y$$

Afirmación.

$$h(y) = z$$

Dem. (Afirmación) Usaremos la caracterización de la extensión de g. Entonces

$$h(y) = \lim_{n\to\infty} g(f_1'(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f_2(x_n) = z$$

(debido a que $g = f_2 \circ f_1'^{-1}$). ■

Por lo tanto h es isometría biyectiva. y probando así el lema. ■

Lema 2.7. *Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones de Cauchy. Sea*

$$\{d(x_n, y_n)\}_n \subseteq \mathbb{R}$$

una sucesión real (Cauchy bajo la métrica usual). Entonces la sucesión $\{d(x_n, y_n)\}$ es de Cauchy.

Dem. Notemos que

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m) \\ &\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n) - d(x_m, y_m) \\ &= d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \end{aligned}$$

Luego si

$$d(x_n, x_m), d(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n, m \geq N$ para algún N, entonces

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$. Es decir $\{d(x_n, y_n)\}$ es una sucesión de Cauchy (luego converge) ■

Defınción 2.16. (Pseudo métrica) *Sea X un conjunto no vacío, sea la función*

$$\sigma : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Decimos que σ es una pseudo métrica si

1. *Si $x = y$ entonces $\sigma(x, y) = 0$.*
2. *$\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ para todo $x, y \in X$.*
3. *$\sigma(x, y) \leq \sigma(x, z) + \sigma(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.*

La definición de pseudo métrica es similar a la de métrica, la única diferencia es que si $\sigma(x, y) = 0$, no necesariamente $x = y$.

Lema 2.8. *Sea (X, d) un espacio métrico. Sea*

$$C := \{\textit{Sucesiones de } X \textit{ que son Cauchy}\}$$

Sea $\sigma : C \times C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función definida por

$$\sigma(x, y) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

Entonces σ es una pseudo métrica.

Dem. Probemos que σ está bien definifo como función. Si $\{x_n\}, \{y_n\}$ son sucesiones de Cauchy, entonces $\{d(x_n, y_n)\}$ también es una sucesión de Cauchy real por el lema 2.7. Luego si $\mathbb{R}$ es completo, se tiene que converge. Por tanto

$$\sigma(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) < \infty$$

y está en $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Probemos los axiomas de pseudo métrica.

1. Si $x = y$ entonces $x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $d(x_n, y_n) = 0$ y entonces

$$\sigma(x, y) = 0$$

2. La simetría se hereda dado que d es simétrica.
3. Notemos que

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$$

para todo n y para toda sucesión $z = \{z_n\}$, si $n \to \infty$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} d(z_n, y_n) \Leftrightarrow \sigma(x, y) \leq \sigma(x, z) + \sigma(z, y)$$

Por tanto σ es una pseudo métrica. ■

Por convenio, siempre que hablemos de C como el conjunto de las sucesiones de Cauchy, siempre tomaremos σ como pseudo métrica.

Lema 2.9. *Sea $i : X \to C$ una proyección canónica sobre espacios métricos, dada por $x \mapsto \{x\} = (x, \dots)$. Entonces i es una isometría, es decir:*

$$d(x, y) = \sigma(i(x), i(y))$$

para todo $x, y \in X$.

Dem. Notemos que i está bien definido ya que $\{x\}_n$ es una sucesión de Cauchy. Sean $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma(i(x), i(y)) &= \lim_{n\to\infty} d([i(x)]_n, [i(y)]_n), \;\; ([i(x)]_n \text{ es el elemento } n \text{ de la sucesión } \{x\})\\ &= \lim_{n\to\infty} d(x, y)\\ &= d(x, y)\end{aligned}$$

Luego i es una isometria. ■

Lema 2.10. *Sea $i : X \to C$ la proyección canónica y sea $x = \{x_n\}_n \in C$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(i(x_n), x) = 0$$

Dem. Notemos que $\sigma(i(x_n), x)$ está bien definido, ya que $i(x_n) = (x_n, x_n, \dots) \in C$ y $x \in C$ por definición, entonces por el lema 2.7, está bien definido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$, dado que $x = \{x_n\}$ es de cauchy, existe un $n \in \mathbb{N}$ talque

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$. Entonces

$$d([i(x_n)]_m, x_m) = d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Tomando $m \to \infty$ se tiene que

$$\sigma(i(x_n), x) \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(i(x_n), x) = 0$$

■

Definición 2.17. *Sea $\sim$ una relación dado por:*

$$x \sim y \Leftrightarrow \sigma(x, y) = 0$$

para todo $x, y \in C$. Sea

$$[x] := \{y \in C : \sigma(x, y) = 0\}$$

la clase de equivalencia de x.

Defινción 2.18. *Sea $Y = \{[x] : x \in C\}$ el conjunto de las clases de equivalencia de $x \in C$. Sea la métrica dada por*

$$d([x], [y]) := \sigma(x, y)$$

Lema 2.10. *El espacio (Y, d) es un espacio métrico.*

Dem. Probemos que la métrica está bien definida, notemos que por definición d cae en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, sea $\widetilde{x} \in [x]$, entonces

$$d([x],[y]) = \sigma(x,y) \leq \sigma(\widetilde{x},y) + \sigma(x,\widetilde{x}) = \sigma(\widetilde{x},y) \leq \sigma(\widetilde{x},x) + \sigma(y,x) = \sigma(x,y)$$

Luego

$$\sigma(\widetilde{x},y) = \sigma(x,y)$$

lo mismo se puede probar con y. De esta forma podemos tomar cualquier elemento de la clase de equivalencia. Probemos ahora que d es una métrica.

1. Si $[x] = [y]$, entonces $x \in [y]$, luego $d([x],[y]) = 0$. Si $d([x],[y]) = 0$, entonces $\sigma(x,y) = 0$ y esto es si y sólo si $x \in [y]$, luego $[x] = [y]$.
2. La simetría se hereda de σ al ser pseudo métrica.
3. La desigualdad triangular de hereda de σ pseudo métrica.

Probando así que (Y, d) es un espacio métrico. ■

Teorema 2.13 (Complementación) *Todo espacio métrico tiene una completación.*

Dem. Sea

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto [i(x)] \end{aligned}$$

una función de espacios métricos. Probemos que f es isometría, $f(X)$ es denso en Y, e Y es completo.

- **f isometría.** Sean $x, y \in X$, por definición que

  $$\begin{aligned} d_y(f(x), f(y)) &= d_y([i(x)],[i(y)]) \\ &= \sigma(i[x], i[y]) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

  Luego f es isometría.

- **$f(X)$ denso en Y.** Sea $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C$, entonces

  $$d_y(f(x_n),[x]) = \sigma(i(x_n),[x]) = 0$$

  Es decir, $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} [x]$. Sea $A \in Y$ y $x \in A$, dado $x = \{x_n\}$. Sea

  $$A_n := f(x_n) \in f(X)$$

  Entonces

  $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = [x] = A$$

  Por lo tanto $\overline{f(X)} = Y$.

- Y **Completo.** Sea $\{A_n\} \subseteq Y$ una sucesión de Cauchy, para cada A_n, existe $f(x_n)$ talque

$$d_y(f(x_n), A_n) < \frac{1}{n}$$

(por denisad de $f(X)$). Sea $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque $d_y(A_n, A_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$. Luego por isometría

$$\begin{aligned} d_x(x_n, x_m) &= d_y(f(x_n), f(x_m)) \\ &\leq d(f(x_n), A_n) + d(f(x_m), A_n) \\ &\leq \underbrace{d(f(x_n), A_n)}_{\frac{1}{n}} + \underbrace{d(f(x_m), A_m)}_{\frac{1}{n}} + \underbrace{d(A_n, A_m)}_{\varepsilon} \end{aligned}$$

Luego, como $\{x_n\} \in C$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = [x]$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, talque $k > \frac{2}{\varepsilon}$ y $d_y(f(x_n), [x]) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geq k$. Entonces

$$d_y(A_n, [x]) \leq d_y(A_n, f(x_n)) + d_y(f(x_n), [x]) < \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} A_n = [x] \in Y$$

es decir, Y es completo. ■

3. Sucesiones de Funciones

3.1. Introducción y Definción

Con anterioridad estudiamos las sucesiones $\{x_n\} \subseteq X$ y sucesiones bajo una función $f : X \to Y$, que es otra sucesión $\{f(x_n)\} \subseteq Y$. En esta sección trabajaremos con otro tipo de sucesión, en particular, se define

$$Y^X := \{f : X \to Y : f \text{ función}\}$$

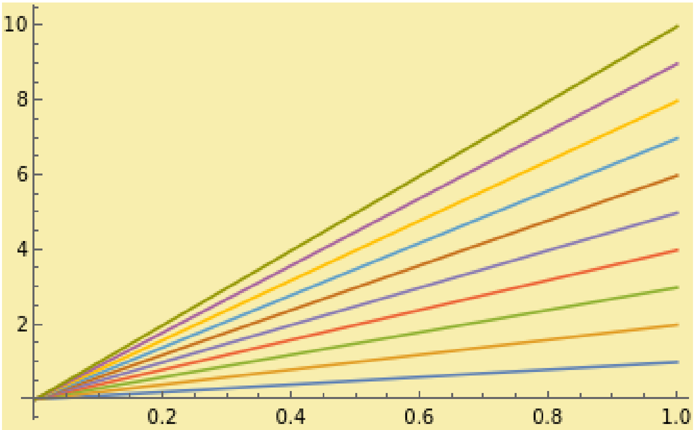
como las funciones de X a Y. Se define una sucesión de funciones como una sucesión del conjunto Y^X, y se denota por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y^X$. Un ejemplo sencillo es toma funciones de $[0, 1] \to \mathbb{R}$ donde

$$f_n(x) := nx$$

donde

$$\{f_n\} = \{x, 2x, 3x, \dots\}$$

y de forma gráfica se puede ver



Es evidente que una sucesión de funciones no es lo mismo que una sucesión de elementos, por lo que tiene distintas propiedades.

Definición 3.1. (Convergencia Puntual y Uniforme) *Sea A un conjunto no vacío y sea X un espacio métrico. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión se funciones dados por:*

$$f_n : A \to X$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Decimos que f_n converge puntualmente a una función f para alguna función $f : A \to X$. Si para todo $p \in A$ se tiene que

$$f_n(p) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$$

Y lo denotamos por

$$f_n \overset{P}{\to} f$$

Por otro lado, decimos que f_n converge uniformemente a f, si para todo todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, talque si $n \geq N$, entonces

$$d_y(f_n(p), f(p)) < \varepsilon$$

para todo $p \in A$. Y lo denotamos por

$$f_n \overset{U}{\to} f$$

Observación 3.1. Si f_n converge uniformemente a una función f, entonces converge puntualmente a f. Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que existe un $N \in \mathbb{N}$, talque si $n \geq N$, entonces

$$d_y(f_n(p), f(p))$$

para todo $p \in A$. Sea $p \in A$ fijo, entonces es claro que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p)$$

Por tanto $f_n \xrightarrow{P} f$. Esto es importante ya que si f_n no converge puntualmente a ninguna función, entonces no puede ser uniforme, y si converge puntualmente, y si f converge uniformemente, entonces deben converger a la misma función ya que si

$$f_n \xrightarrow{P} f$$
$$f_n \xrightarrow{U} f_1$$

entonces $f_n \xrightarrow{P} f_1$, luego $f_1 = f$.

Ejemplo 3.1. Sea una sucesión de funciones definidas por

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - n|x|, & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque $x > \frac{1}{N}$, entonces si $n \geq N$ se tiene que

$$f_n(x) \to 0$$

Ya que dado cualquier $\varepsilon > 0$ para $x \neq 0$ fijo, si $n \geq N$, entonces

$$d(f_n(x), 0) = d(0, 0) = 0 < \varepsilon$$

Si $x = 0$, entonces $f_n(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$f_n \xrightarrow{P} f := \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

En particular f_n no converge uniformemente a f, ya que para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, si $N \in \mathbb{N}$, podemos escoger $2n \geq N$ y $x \in \mathbb{R}$ talque $\frac{1}{2n} \geq |x| > 0$, luego $f_{2n}(x) \geq \frac{1}{2}$, luego como $x \neq 0$, entonces $f(x) = 0$ y luego

$$d(f_{2n}(x), 0) = |f_{2n}(x)| \geq \frac{1}{2}$$

Podemos ver que f_n es continua y que converger puntualmente, no basta para que f se continua.

Ejemplo 3.2. Sea $f_n(x) := \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$ que es diferenciable para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos ver que

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq 0$$

Luego

$$f_n \xrightarrow{P} 0$$

Es más, f_n converge puntualmente a 0, sea $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ talque

$$\frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$$

entonces si $n \geq N$ se tiene que

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$$

Luego $f_n \xrightarrow{U} 0$. Si derivamos f_n obtenemos

$$f_n'(x) = \frac{cos(nx)}{\sqrt{n}} n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Meintras que la derivada de 0 es claramente 0 que es distinto de ∞. Esto implica que convergen uniformemente y ser derivable, no implica que la convergencia sea derivable.

Ejemplo 3.3. Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto n^2x(1-x^2)^n$. Podemos ver que

$$f_n \xrightarrow{P} 0$$

Y que f_n es R-integrable para todo $n \in \mathbb{N}$, donde

$$\begin{aligned} \int_0^1 n^2x(1-x^2)^n dx &= n^2 \int_0^1 x(1-x^2)^n \\ &= -\frac{n^2(1-x^2)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{n^2}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \end{aligned}$$

Mientras que

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0 = 0$$

Es decir, ser integrable y converger puntualmente no implica que la función convergente sea integrable o que converge a la misma integral.

Teorema 3.2. *Sean $f_n : A \to X$ con X un espacio métrico completo. Entonces*

$$f_n \xrightarrow{U} f$$

si y sólo si $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n, m \geq N$, entonces

$$d(f_n(p), f_m(p)) < \varepsilon$$

para todo $p \in A$

Dem.

Si $f_n \xrightarrow{U} f$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d(f_n(p), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geq N$ y para todo $p \in A$.

Luego por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} d(f_n(p), f_m(p)) &\leq d(f_n(p), f(p)) + d(f_m(p), f(p)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n, m \geq N$ y para todo $p \in A$.

Supongamos que es f_n es Cauchy. Sea $p \in A$, sabemos que $\{f_n(p)\} \subseteq X$ es Cauchy, luego como X es completo se tiene que converge. Definamos $f : A \to X$ por

$$f(p) := \lim_{n\to\infty} f_n(p)$$

Probemos que $f_n \xrightarrow{U} f$. Sea $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d(f_n(p), f_m(p)) < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$ y para todo $p \in A$. Si tomamos n fijo y $m \to \infty$, entonces tenemos que

$$d(f_n(p), f(p)) \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq N$ y para todo $p \in A$. Pero esto es la definición de convergencia uniforme, por tanto

$$f_n \xrightarrow{U} f$$

■

Este teorema caracteriza la convergencia uniforme. Entonces $\{f_n\}$ con conjunto de llegada completo, converge uniformemente si y sólo si es Cauchy.

Observación 3.2 Podemos considerar un resultado más débil, si $f_n : A \to X$ con A, X espacios métricos. Entonces, si $f_n \xrightarrow{U} f$ entonces es Cauchy.

Nota 3.1. Podemos definir la convergencia uniforme usando una versión alternativa, si tenemos la métrica

$$d_\infty(f, g) := \sup_{p\in A} d(f(p), g(p))$$

entonces $f_n \xrightarrow{U} f$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n \geq N$, entonces

$$d_\infty(f_n(p), f(p)) \leq \varepsilon$$

Para ver esto basta notar que $\varepsilon > 0$ es cota superior de

$$d(f_n(p), f(p))$$

luego es mayor o igual que el supremo.

3.2. Continuidad, Diferenciablidad e Integribildiad

Teorema 3.2.(Cambio de índice) *Sean X, Y espacios métricos. Sea $E \subseteq X$ no vacío, sea $x \in E$ un punto límite de E, si se definen las funciones como $f_n : E \to Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $f_n \overset{U}{\to} f$. Supongamos que Y es completo y que*

$$\lim_{t \to x} f_n(t)$$

existe para todo n. Entonces

$$\lim_{t \to x} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{t \to x} f_n(x) \right)$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, si $f_n \overset{U}{\to} f$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d(f_m(t), f_n(t)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n, m \geq N$ y para todo $t \in E$, en virtud de que Y es completo. Sea

$$A_n := \lim_{t \to x} f_n(t)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Probemos que $\{A_n\} \subseteq Y$ es Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $\delta > 0$ talque si $0 < d(t, x) < \delta$, entonces

$$d(f_n(x), A_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Luego si consideramos $n, m \geq N$ con N como al inicio de la demostración, de forma que si $0 < d(t, x) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} d(A_n, A_m) &\leq d(A_n, f_n(t)) + d(f_n(t), f_m(t)) + d(A_m, f_m(t)) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d(A_n, A_m) < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$, es decir, $\{A_n\} \subseteq Y$ es una sucesión de Cauchy y por tanto converge, digamos que

$$A := \lim_{n \to \infty} A_n$$

Notemos que

$$d(f(t), A) \leq d(f(t), f_n(t)) + d(f_n(t), A_n) + d(A_n, A)$$

Sea n suficientemente grande talque

$$\begin{aligned} d(f(t), f_n(t)) \leq d_\infty(f, f_n) &< \frac{\varepsilon}{3} \\ d(A_n, A) &< \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Si $f_n(t) \overset{t\to x}{\longrightarrow} A_n$, entonces existe un $\delta > 0$ talque

$$d(f_n(t), A_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $0 < d(t, x) < \delta$. Por tanto, tomando n suficientemente grande y t suficientemente cerca de x, tenemos que

$$d(f(t), A) < \varepsilon$$

para todo $0 < d(t, x) < \delta$. Por tanto

$$\lim_{t\to x} f(t) = A$$

En consecuencia

$$\lim_{t\to x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to x} f_n(t)\right)$$

■

Corolario 3.1. *Sea $f_n : E \to Y$ donde Y es completo. Si $f_n \overset{U}{\to} f$ y f_n es continua para todo n, entonces f es continua.*

Dem. Sea $x_0 \in E$, notemos que el límite $f_n(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ existe, y $A_n = f_n(x_0)$ donde x_0 es punto límite o punto aislado de E. Luego por el teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) \\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \\ &= \lim_{x\to x_0} f(x) \end{aligned}$$

Luego f es continua en todo E. ■

Ejemplo 3.4. Sea $X := \mathbb{R}$ bajo la métrica euclidiana, y

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \subseteq \mathbb{Q} \\ 0 \end{cases}$$

donde $\{q_1, \dots, q_n\}$ es un conjunto finito de racionales distintos entre si. Claramente f tiene discontinuidades finitas por lo que es R-integrable, pero si $n \to \infty$, entonces

$$f_n \xrightarrow{P} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

que es una función no R-integrable ya que la integral inferior nunca es igual a la integral superior, de hecho, dado una partición $\mathcal{P} = \{a = t_0, \dots, t_n = b\}$, entonces

$$S(\mathcal{P}, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}) = 1, \;\; s(\mathcal{P}, \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}) = 0$$

Luego

$$\overline{\int_a^b} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(t)dt = 1 \neq 0 = \underline{\int_a^b} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(t)dt$$

Extendiendo al infinito, es claro que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(t)dt$$

diverge.

Teorema 3.3. *Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones R-integrables y $f_n \xrightarrow{U} f$. Entonces f es R-integrable y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)d(x)$$

Dem. Sea $\varepsilon_n := d_\infty(f_n, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Notemos que

$$f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n + \varepsilon_n$$

para todo $x \in [a,b]$, luego vamos aplicar la monotonía de la integral inferior y superior, de forma que

$$\int_a^b (f_n(x) - \varepsilon_n)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^b (f_n(x) + \varepsilon_n)dx$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\int_a^b f_n(x)dx - \varepsilon_n(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^b f_n(x)dx + \varepsilon_n(b-a)$$

Si $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Por tanto

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

y además

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

■

Teorema 3.4. *Sean $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables. Si existe un $x_0 \in [a,b]$ talque $\{f_n(x_0)\} \subseteq \mathbb{R}$ converge, supongamos que $\{f_n'\}$ converge uniformemente. Entonces f_n converge uniformemente a una función f y*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ya que $\{f_n(x_0)\}$ converge y luego es Cauchy. Por otro lado, si $f_n' \xrightarrow{U} g$ y $\mathbb{R}$ es completo, entonces es Cauchy, es decir

$$d_\infty(f_n', f_m') = \sup_{t\in[a,b]} |f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

para todo $n, m \geq N$. Por el teorema del valor medio podemos tomar cualquier $x < t \in [a,b]$ tales que existe un $\xi \in (x,t)$ de forma que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t))| &= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)||x-t| \\ &\leq |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)||b-a| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

si xconsideramos $n, m \geq N$. Finalmente

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n, m \geq N$ y para todo $x \in [a,b]$. Por tanto $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por tanto converge uniformemente para alguna función f.

Sea $x \in [a.b]$ fijo, definimos

$$\begin{aligned} g_n(t) &:= \frac{f_n(x) - f_n(t)}{x-t} \\ g(t) &:= \frac{f(x) - f(t)}{x-t} \end{aligned}$$

Donde $g_n, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ están bien definidas. Si f_n es derivable, entonces

$$f_n'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t} = \lim_{t \to x} g_n(t)$$

Además

$$\begin{aligned} |g_n(t) - g_m(t)| &= \left| \frac{f_n(x) - f_n(x) - (f_n(t) - f_m(t))}{x - t} \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b - a)} \end{aligned}$$

para todo $n, m \geq N$. Por tanto g_n es Cauchy en $\mathbb{R}$ y luego converge uniformemente. En particular, si

$$\lim_{n \to \infty} g_n(t) = \frac{\lim_{n \to \infty} f_n(x) - \lim_{n \to \infty} f_n(t)}{x - t} = \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = g(t)$$

entonces

$$g_n \xrightarrow{U} g$$

Además si f_n es continua para todo $[a, b]$ con $\mathbb{R}$ completo, se tiene que f es continua y luego por cambio de índice se puede ver que $f'(t)$ está bien definido ya que f_n'... **Continuar.**

Ahora, si $\lim_{t \to x} g_n(t)$ está bien definido para todo n y g_n converge uniformemente con $\mathbb{R}$ completo, entonces podemos aplicar cambio de índice, de formar que

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{t \to x} g_n(t) \right) = \lim_{t \to x} g(t) = f'(x)$$

Ejemplo 3.5. (Teorema) Existe una función real continua en $\mathbb{R}$ que no es diferenciable en ningún punto.

Dem. Consideremos

$$\varphi(x) = |x|$$

definido en $-1 \leq x \leq 1$. Podemos generalizar a todo $\mathbb{R}$ de forma periodica y

$$\varphi(x + 2) = \varphi(x)$$

Luego para todo $s, t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s - t|$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n \varphi(4^n x)$$

Notemos que si $f_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ y si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

converge, entonces f converge uniformemente. Además, f es la suma de funciones continua, por lo que es continua. Si fihamos un número real x y un entermo m, se puede considerar

$$\delta_m := \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$$

donde el signo se elige de tal forma que no esté ningún entero entre $4^m x$ y $4^m(x + \delta_m)$. Esto se peude hacer, debido a que $4^m|\delta_m| = \frac{1}{2}$. Se define

$$\gamma_n := \frac{\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}$$

cuando $n > m$, entonces $4^n \delta_m$ es un entero par, así que $\gamma_n = 0$ por la periocidad de φ. Cuando $0 \leq n \leq m$, implica que $|\gamma_n| \leq 4^n$, debido a que $|\gamma_m| \leq 4^m$. Se concluye entocnes que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta} \right| &= \left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right| \\
&\geq 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \\
&= \frac{1}{2}(3^m + 1)
\end{aligned}$$

Podemos ver tiende infinito cuando $m \to \infty$, mientras $\delta_m \to 0$. Es decir, f es continua no diferenciable en todo $\mathbb{R}$. ■

Ejemplo 3.6. (Función de Weierstass) El ejemplo anterior es una construcción de esta función continua no diferenciable, pero no fue la primera. La primera documentada, es la función de Weierstass, definida por

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

donde $0 < a < 1$ y b es un entero impar positivo tales que

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

Podemos considerar un nuevo tipo de sucesión de funciones. Sea suma parcial de los n primeros sumandos, de la sucesión $\{f_n\}$, donde $f_n : X \to Y$ por

$$S_n := f_1 + f_2 + \cdots + f_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(x) : X \to Y$$

Construyendo una sucesión de funciones. Por lo que podemos aplicar los conceptos de sucesiones de funciones.

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge o converge puntualmente si para todo $x \in X$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$$

claramente se puede asociar a una función f, donde $S_n \xrightarrow{P} f$.

Por otro lado, decimos que converge uniformemente a f si

$$S_n \xrightarrow{U} f$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$d_\infty(S_n, f) < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$.

Ejemplo 3.7. Se puede probar que la función de Weierstass es continua, ya que $a^n \cos(b^n \pi x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, y como estamos en funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $\mathbb{R}$ es completo, entonces al converge uniformemenete las sumas parciales, es claro que $f(x)$ es continua.

4. Espacios de Funciones

4.1. Definiciones y Propiedades

Definición 4.1. (Norma) *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Definimos la norma como una función*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$.

Recordemos que un X es $\mathbb{K}$ espacio vectorial si

$$(X, +)$$

es un grupo abeliano y si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $a(bx) = (ab)x$ para todo $a, b \in \mathbb{K}, x \in X$.
2. existe un $e \in \mathbb{K}$ talque $ex = x$ para todo $x \in X$.
3. $a(x + y) = ax + ay$ para todo $a \in \mathbb{K}, x, y \in X$.
4. $(a + b)x = ax + bx$ para todo $a, b \in \mathbb{K}, x \in X$.

Ejemplo 4.1. En $\mathbb{K}^n$ tenemos las siguientes normas

- **Norma Euclidiana.**

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

- **Norma p.**

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

- **Norma infinita.**

$$\|x\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Existe otra norma infinita con respecto a las funciones, más adelante la definiremos.

Definición 4.2. *El par $(X, \|\cdot\|)$ se le llama espacio normado.*

Convenio. Siempre y cuando trabajemos en un espacio normado, X se toma como un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, con norma $\|\cdot\|$.

Lema 4.1. *Todo espacio normado es un espacio métrico.*

Dem. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, sea

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

una función bien definida. Probemos que d es métrica.

- **Bien definida.** Notemos que para todo $x, y \in X$, se tiene que

$$\|x - y\| \geq 0$$

  luego $d(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- Si $x = y$ entonces

$$d(x, y) = \|x - x\| = \|0\| = 0$$

  Si $d(x, y) = 0$, entonces

$$\|x - y\| = 0$$

  Luego por axioma de norma $x = y$.

- **Simetría.** Por el segundo axioma de norma

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$$

- **Desigualdad triangular.** Sean $x, y, z \in X$, entonces

$$\|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

  Luego $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Por tanto (X, d) es un espacio métrico. ■

Observación 4.1. Con esta caracterización de la métrica podemos trabajar con límite, en particular, si X es un espacio normado y $\{x_n\} \subseteq X$ es una sucesión, entonces

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, talque si $n \geq N$, entonces

$$d(x_n, x) < \varepsilon \Leftrightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Además podemos mover todas las definiciones y propiedades de espacio métrico a espacio normado.

Definición 4.3. *Un espacio normado completo se le llama espacio de Banach.*

Defininción 4.4. *Sea ω un conjunto no vacío, sea Y un espacio de Banach. Definimos el conjunto de las funciones acotadas por:*

$$e^{\infty}(\omega, Y) := \left\{ x : \omega \to Y : \sup_{t\in\omega} \|x(t)\| < \infty \right\}$$

En general tomaremos Y como $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ como $\mathbb{K}$ espacios vectoriales.

Notación. al igual que d_∞, definimos para una función $x \in e^{\infty}(\omega, Y)$ la norma

$$\|x\|_\infty := \sup_{t\in\omega} \|x(t)\|$$

Proposición 4.1. *El par $(e^{\infty}(\omega, Y), \|\cdot\|_\infty)$ forma un espacio de Banach.*

Dem. Debemos probar que $e^{\infty}(\omega, Y)$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectoria, que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma y que es completo.

- **Espacio vectoria.** Debemos probar que $(e^{\infty}(\omega, Y), +)$ es un grupo abeliano y los 4 axiomas de producto. En particular, si Y es un $\mathbb{K}$-e.v, entonces podemos probar que $e^{\infty}(\omega, Y)$ es un $\mathbb{K}$-e.v.

  Probemos que el par es grupo abeliano. Sean $f, g \in e^{\infty}(\omega, Y)$, como $(Y, +)$ es grupo abeliano, entonces $(f + g)(t) \in Y$ con $t \in \omega$ está bien definido para la suma. Además si para t fijo se tiene que

  $$\|f(t) + g(t)\| \leq \|f(t)\| + \|g(t)\|$$

  dado que $\|\cdot\|$ es la norma de Y. Luego se puede concluir por la caracterización del supremo, que

  $$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$$

  Luego $f + g \in e^{\infty}(\omega, Y)$.

  La asociatividad y la conmutatividad, se heredan de que Y asocia y conmuta sus elementos (si $t \in \omega$, entonces $f(t)$ es un elemento de Y, luego se prueba para todo t.)

  El neutro es $0 : \omega \to Y$, claramente bien definido.

  Falta el inverso, si $f \in e^{\infty}(\omega, Y)$, para todo $t \in \omega$ se tiene que $f(t)_= f_t \in Y$, luego tiene una inversa $-f_t$ para todo $t \in \omega$, basta definir $-f(t) := -f_t$ de forma que $-f \in \omega \to Y$, y claramente es acotado, ya que

  $$\| - f\| = \|f\|$$

  Luego $-f \in e^{\infty}(\omega, Y)$.

  Por lo tanto $e^{\infty}(\omega, Y)$ es un grupo abeliano bajo la suma.

El resto de propiedades de heredan ya que para $t \in \omega$ fijo, se tiene que $f(t)$ se satisface para los 4 axiomas bajo el producto con $\mathbb{K}$, por lo tanto $f \in e^{\infty}(\omega, Y)$ satisface los 4 axiomas, también bajo $\mathbb{K}$.

Probando de este modo, que $e^{\infty}(\omega, Y)$ es un $\mathbb{K}$-e.v.

- **Norma.** Sean $x, y, z \in e^{\infty}(\omega, Y)$, entonces
  - Si $x = 0$, entonces
  $$\|0\|_{\infty} = \sup_{t\in\omega}\|0\| = 0$$
  Si $x : \omega \to Y$ es talque
  $$\|x\|_{\infty} = 0$$
  entonces $\|x(t)\| = 0$ para todo $t \in \omega$, luego por el primer axiomar de normar $x(t) = 0$ para todo $t \in \omega$, es decir, $x = 0$.
  - Si $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces
  $$\|\lambda x\|_{\infty} = \sup_{t\in\omega}\|\lambda x\| = \sup_{t\in\omega}|\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda| \cdot \sup_{t\in\omega}\|x\| = |\lambda| \cdot \|x\|_{\infty}$$
  donde $x \in e^{\infty}(\omega, Y)$.
  - Notemos que
  $$\|x(t) + y(t)\| \leq \|x(t)\| + \|y(t)\|$$
  dado que Y es un espacio de Banach, luego podemos ver que
  $$\sup_{t\in\omega}\|x + y\| \leq \sup_{t\in\omega}\|x\| + \sup_{t\in\omega}\|y\|$$

  Por tanto $\|\cdot\|_{\infty}$ es una norma.
- **Completo.** Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq e^{\infty}(\omega, Y)$ una sucesión de funciones Cauchy, donde $x_n : \omega \to Y$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n, m \geq N$, entonces
  $$d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_{\infty} < \varepsilon$$
  Si Y es completo dado que es Banach, tenemos que existe una función $x : \omega \to Y$ talque
  $$x_n \overset{U}{\to} x$$
  Es decir, x_n converge, falta ver que x es acotado.

  Sea $M_n := \|x_n\|_{\infty}$, (existe ya que $x_n \in e^{\infty}(\omega, Y)$), sea $\varepsilon > 0$, consideremos la siguiente desigualdad
  $$\|x_n\|_{\infty} \leq \|x_n - x_m\|_{\infty} + \|x_m\|_{\infty}$$

si $n, m \geq N$ con N suficientemente grande, se tiene que

$$\|x_n\|_\infty \leq \varepsilon + \|x_m\|_\infty$$

Es decir

$$M_n < \varepsilon + M_m$$

También se puede concluir que $M_m < \varepsilon + M_n$, de forma que

$$|M_n - M_m| < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$. Y esto se puede hacer para todo $\varepsilon > 0$. Es decir, la sucesión $\{M_n\} \subseteq \mathbb{R}$ es Cauchy, y como $\mathbb{R}$ es completo, entonces $M_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M \in \mathbb{R}$ (en particular $M \geq 0$ ya que todos los $M_n \geq 0$)

Usando la misma desigualdad de lso x_n, x_m podemos concluir con x, x_n, es decir

$$\|x\|_\infty \leq \|x_n - x\|_\infty + \|x_n\|_\infty$$

tomando n suficientmente grande para $\varepsilon > 0$ dado, se llega a que

$$\|x\|_\infty < \varepsilon + M_n$$

tomando $n \to \infty$, entonces

$$\|x\|_\infty \leq \varepsilon + M$$

Y esto para todo $\varepsilon > 0$. Entonces se concluye que

$$\|x\|_\infty \leq M$$

Es decir, x es acotado y por lo tanto $\{x_n\}$ converge en $e^\infty(\omega, Y)$. Probando que las funciones acotadas, forman un espacio completo.

Probando así que $e^\infty(\omega, Y)$ es un espacio Banach. ■

Con esto podemos extender los espacios de Banach, si tenemos $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio Banach, podemos extender a funciones, de forma que $e^\infty(\omega, Y)$ es Banach bajo al norma infinita asociada a la norma de Y. Por lo que ahora podemos sumar, restar, multiplica por constantes, hacer que sucesiones de funciones convergan, entre otros.

Lema 4.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio Banach y $U \subseteq X$ un subespacio. Si U es cerrado entonces $(U, \|\cdot\|)$ es Banach.*

Dem. Debemos probar que U es un $\mathbb{K}$-e.v, con norma bien definida y completo.

- **Espacio Vectorial.** Por hipótesis U es un subespacio de X, por lo que es cerrado bajo la suma vectorial y el producto con constantes, además que satisface el resto de propiedades. Luego U es un $\mathbb{K}$-e.v.

- **Norma.** Con respecto la norma, basta tomar $\|\cdot\|||_K$, que claramente es norma.
- **Completo.** Sea $\{x_n\} \subseteq U$ una sucesión de Cauchy, como $U \subseteq X$, entonces $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$ como X es completo. Luego como U es cerrado, necesariamente $x \in U$. Es decir U es completo.

Probando el lema. ■

Ejemplo 4.2. Sea el conjunto $C^b(\omega, Y) := \{x \in e^\infty(\omega, Y) : x\text{continua}\}$. En particular, $C^b(\omega, Y)$ es un espacio de Banach. Para ello notemos que

$$C^b(\omega, Y) \subseteq e^\infty(\omega, Y)$$

Y que es un subespacio de este mismo. Nos falta ver que es cerrado. Sea $\{x_n\} \subseteq C^b(\omega, Y)$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a $x \in e^\infty(\omega, Y)$. Debemos probar que es continua. Notemos que $x_n : \omega \to Y$ con Y un espacio completo y continua, entonces x es una función continua y por lo tanto

$$x \in C^b(\omega, Y)$$

Es decir, $C^b(\omega, Y)$ es una espacio de Banach.

Notación. Si $Y = \mathbb{R}$ o $Y = \mathbb{C}$, entonces denotamos las funciones continua acotadas por $C^b(\omega)$, si además ω es un espacio métrico compacto, denotamos $C(\omega, Y)$. un claro ejemplo sería $C[a, b]$.

4.2. Compacidad en Espacios de Funciones

4.2.1. Idea y Definiciones

La compacidad de un espacio de funciones, nos otorga subsucesiones de funciones que convergen uniformemente. Por lo que queremos un resultado donde F, el espacio de funciones, sea compacto.

Recordemos algunas cosas, en $\mathbb{R}^n$, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión convergente. En $C[a, b]$ ¿existirá una subsucesión de funciones uniformemente continua?

Ejemplo 4.3. Sea

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2} \end{aligned}$$

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|f_n(x)| \leq \frac{x^2 + (1 - nx)^2}{x^2 + (1 - nx)^2} = 1$$

De forma que $\{f_n\}$es una sucesión acotada, además es continua. Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$$

por tanto $f_n \xrightarrow{P} 0$. Y

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

Luego

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1$$

Por tanto no existe una subsucesión uniformemente convergente.

Ejemplo 4.4. Sea $C[0,1]$, tenemos que

$$B[0,1] := \{f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

Es un conjunto cerrado y acotado, pero no es compacto.

Nota 4.1. Si X es un espacio normado, entonces

$$dimX < \infty \Leftrightarrow B[0,1] \text{ es compacto}$$

4.2.2. Equicontinuidad

Definición 4.5. (Equicontinuidad) *Sean X e Y espacios métricos, sea $E \subseteq X$ y sea F un conjunto de funciones dadas por $f : E \to Y$. F se le llama equicontinuo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque para todo $f \in F$ si $x, y \in E$ tales que*

$$d_x(x, y) < \delta$$

Entonces

$$d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Corolario 4.1. *Si F es equicontinua, entonces f es uniformemente continua para todo $f \in F$.*

Dem. Es solo aplicar defindión. Sea $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ talque para todo $f \in F$ se tiene que si $x, y \in E$ son tales que $d_x(x, y) < \delta$, entocnes $d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$, si se toma f fijo se llega a que f es uniformemente continua. ∎

La equicontinuidad es mucho más fuerte que la uniformidad continua, ya que la el δ de la equicontinuidad, se asocia a todas las funciones, mientras que el δ de la uniformidad continua, se asocia a la función que se está trabajando.

Ejemplo 4.5. Sea $L > 0$, sea

$$A := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ es Lipschitz continua con constante } L\}$$

Es decir, funciones f de la forma $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in [a, b]$. Podemos ver que A es equicontinuo ya que para todo $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$, de forma que para todo $f \in A$ se tiene que si $x, y \in [a, b]$ tales que $|x - y| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| < \varepsilon$$

En particular f es independiente del δ.

Teorema 4.1. *Si K es un espacio métrico compacto y $f_n \in C(K, Y)$ donde Y es un espacio de Banach, si f_n converge uniformemente, entonces*

$$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es equicontinua.

Dem. Notemos algunas cosas, f_n es continua con K compacto, por lo que es uniformemente continua, si $f_n \overset{U}{\to} f$ con Y un espacio normado completo, entonces f es continua, y además está definido en K compacto, por lo que es uniformemente continua. Sean $x, y \in K$, entonces tenemos la siguiente deisgualdad

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f_n(y)\| &\leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| + \|f(y) - f_n(y)\| \\ &\leq 2\|f_n - f\|_\infty + \|f(x) - f(y)\|\end{aligned}$$

(usando la norma de Y.) Sea $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \geq N$, y existe $\delta > 0$ talque si $d(x, y) < \delta$, entonces

$$\|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces para $n \geq N$ y tal $\delta > 0$, se tiene que

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$$

El problema que $\delta > 0$ solo sirve para los $n \geq N$, si $1 \leq n < N$, entonces podemos tomar δ_i con $i = 1, \ldots, N - 1$ talque si $d(x, y) < \delta_i$, entonces

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon$$

por la uniformidad continua. Luego se escoge $\overline{\delta} := \text{mín}\{\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{N-1}\}$, por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, si $d(x, y) < \overline{\delta}$, entonces

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| < \varepsilon$$

Es decir, $\{f_n :\in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo. ■

4.2.3. Separabilidad

Definición 4.6. *Un espacio mértrico se llama separable si existe un $S \subseteq X$ numerable y denso en X.*

Ejemplo 4.6. Notemos que $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto numerable al ser el producto cartesiano de numerables. Si $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbb{R}^n$ es separable.

Lema 4.3. *Si X es un espacio normado, entonces X es separable si y sólo si existe un $A \subseteq X$ numerable con $\overline{gen\ A} = X$.*

El generador A se define por

$$gen\ A := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i : a_i \in \mathbb{K}, v_i \in A \right\}$$

Dem. Supongamos que X es separable, entonces existe un $S \subseteq X$ numerable talque $\overline{S} = X$, en particular

$$S \subseteq gen\ S \subseteq X$$

entonces

$$\overline{gen\ S} = X$$

Para el otro lado debemos probar para $\mathbb{K} = \mathbb{R}; \mathbb{C}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces existe un $A \subseteq X$ numerable talque $\overline{gen\ A} = X$, sea

$$B := \left\{ \sum_{i=1}^{n} b_i v_i : b_i \in \mathbb{Q}, v_i \in A \right\}$$

las combinaciones lineales de los vectores A sobre los coeficiente $\mathbb{Q}$. En particular B es numerable ya que estamos tomando $\mathbb{Q}$ numerable con A numerable. Probemos que B es denso en X.

En general, D es denso en X si para todo $x \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $d \in D$ talque

$$\|x - y\| < \varepsilon$$

Usaremos esto para probar la densidad de B en X. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x \neq 0 \in X$, sabemos que $gen\ A$ es denso en X, luego existe un $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in gen\ A$ donde $v_i \neq 0$ para todo i (si algún $v_i = 0$ basta reacomodar la combinación lineal), talque

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego sea $y = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ talque $|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2n\|v_i\|}$ (podemos tomar estos $b_i \in \mathbb{Q}$ ya que los racionales son denso en $\mathbb{R}$.) Luego

$$\begin{aligned} \|x-y\| &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n b_i v_i - \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto B es denso X y por tanto X es separable. ■

Nota 4.2. Sea $A \subseteq X$, donde A es denso, entonces dado $x \in X$, es punto límite de A, es decir, existe un $\{x_n\} \subseteq A$ talque $x_n \to x$. Luego para todo $\varepsilon > 0$, existe un $x_N \in A$ talque

$$d(x, x_N) < \varepsilon$$

claramente en nuestro contexto tomamos la norma el estar en X un $\mathbb{K}$-e.v.

Observación 4.2. Para probar que con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ consideremos

$$B := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i v_i : a_i \in \mathbb{Q}(i), v_i \in A \right\}$$

Sabemos que $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, claramente numerable, por tanto B es numerable. Ahora hay que probar que B es denso. Sabemos que $gen\, A$ es denso en X, por tanto para $x \in X$ y para $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal de los A talque

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n a_i v_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

donde $a_i \in \mathbb{C}, v_i \in A$. En virtud de la densidad de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$, podemos definir la siguiente combinación linea

$$B \ni y := \sum_{i=1}^n b_i v_i$$

donde $\|a_i - b_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2n\|v_i\|}$, para ello basta considera $a_i = r_i + r_i' i, b_i = p_i + p_i' i$ tales que

$$|r_i - p_i|, |r_i' - p_i'| \leq \frac{\varepsilon}{4n\|v_i\|}$$

($\|i\| = 1$). Luego

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon$$

Luego B es denso en X.

Ejemplo 4.7. Sea $C([a,b],\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continua de $[a,b]$ a $\mathbb{R}$. En particular es separable. Para ello debemos encontrar un $A \subseteq C([a,b],\mathbb{R})$ numerable con generador denso. Recordemos que $x^j : [a,b] \to \mathbb{R}$ es un monomío, luego

$$A := \{x^j : j \in \mathbb{N}_0\}$$

es numerable al ser indexada por los naturales con el 0. Además

$$gen\ A = P([a,b])$$

Más adelante estudiaremos un resultado de Weierstrass que nos dice que

$$\overline{gen\ A} = C([a,b])$$

es decir, las funciones continua de $[a,b]$ a $\mathbb{R}$ es separable.

Ejemplo 4.5. El conjunto $l^p := \{\{x_n\} \subseteq \mathbb{R} : \|x_n\|_p < \infty\}$ es separable para todo p no infinito. Antes de probarlo, notemos que l^p es un espacio normado. para probar la separabilidad, debemos considerar las sucesiones canónicas

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= (1,0,0,\dots) \\ e^{(2)} &= (0,1,0,\dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Luego, sea $A := \{e^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$. Si $x = (t_1, t_2, \dots) \in l^p$, ahora denotemos $x^{(n)} := \sum_{i=1}^{n} t_i$, luego

$$x - x^{(n)} = (0, \dots, t_{n+1}, \dots)$$

Luego

$$(\|x - x^{(n)}\|_p)^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |t_i|^p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Entonces tenemos un conjunto $A \subseteq l^p$ numerable y además, para cualquier $x \in l^p$, y para un $\varepsilon > 0$, podemos tomar $x^{(n)}$ con n suficientemente grande, talque

$$\|x - x^{(n)}\| < \varepsilon$$

Donde $x^{(n)} \in gen\ A$, al ser una combinación lineal, luego

$$\overline{gen\ A} = l^p$$

Probando que l^p es separable.

Ejemplo 4.6. Probemos que l^∞ es no separable. Recordemos que

$$\|t_n\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|t_n|\}$$

Sea $M \subseteq \mathbb{N}$ y sea

$$\mathcal{X}_M^{(m)} := \begin{cases} 1, & m \in M \\ 0, & m \notin M \end{cases}$$

En particular $\mathcal{X}_M \in l^\infty$ por que la norma infinita existe. El conjunto $\{\mathcal{X}_M : M \subseteq \mathbb{N}\}$ no es numerable, ya que estamos considerando las potencias de $\mathbb{N}$. Si $M, M' \subseteq \mathbb{N}$ con $M \neq M'$, entonces

$$\|\mathcal{X}_M - \mathcal{X}_{M'}\|_\infty = 1$$

por las coordenadas. Sea $A \subseteq l^\infty$ numerable y para cada $x \in A$ consideramos

$$B(x, 1/2) = \{y \in A : \|x - y\|_\infty < 1/2\}$$

podemos ver que existe a lo más una sucesión $\mathcal{X}_M \in B(x, 1/2)$, si hubiera otro, la distancia sería mayor a $1/2$. Como A es numerable, existe al menos $N \subseteq \mathbb{N}$ talque

$$\|\mathcal{X}_N - x\|_\infty \geq \frac{1}{2}$$

para todo $x \in X$. Probando que no es separable. ■

Lema 4.4. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces X es separable.*

Dem. Sea $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar la cubierta abierta

$$X \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x, 1/n)$$

Dado que X es compacto, existe $m_n \in \mathbb{N}$ talque

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_n} B(x_i^{(n)}, 1/n)$$

donde $x_i^{(n)}$ depende del natural n. Sea

$$S_n := \{x_1^{(n)}, \ldots, x_{m_n}^{(n)}\}$$

Luego, sea

$$S := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

Notemos que S es numerable el estar indexada por los naturales y S_n son conjuntos finitos. Probemos que es denso en X.

Sea $x \in X$, sea $\varepsilon > 0$, sea $n \in \mathbb{N}$ talque $1/n \leq \varepsilon$. Sabemos que para tal n existe un una cubierta finita que cubre a X y que para algún $j \in \{1, \ldots, m_n\}$ se tiene que

$$x \in B(x_j^{(n)}, 1/n)$$

Luego

$$d(x, x_j^{(n)}) < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

donde $x_j^{(n)} \in S_n \subseteq S$. Por tanto por definición, S es denso en X. Por lo tanto X es separable. ■

4.3. Teorema de Arzela - Ascoli

Teorema 4.2. (Teorema de Arzela-Ascoli) *Sea X un espacio métrico compacto y consideramos $F \subseteq C(X, \mathbb{K}^k)$. Entonces F es compacto si y sólo si*

1. *F es acotado. (¿? uniformemente acotado)*
2. *F es cerrado.*
3. *F es equicontinua.*

Dem. F es cerrado al ser compacto.

Si $f \in F$, entonces f está definido en X compacto y al ser continua, se tiene que $f(X) \subseteq \mathbb{K}^k$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces f alcanza su máximo y su mínimo, por lo que es acotada, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces f es acotado si y sólo si $\|f\|$ es acotado, con la norma en los complejos, notemos que se genera una función $\|f\| : X \to \mathbb{R}^k_{\geq 0}$, luego es continua, de forma que también alcanza su máximo y su mínimo, por lo tanto, es acotado. De esta forma F es acotado

Probemos la equicontinuidad. Supongamos que F no es equicontinua, entonces existe un $\varepsilon > 0$ talque para todo $\delta > 0$ existe un $f \in F$ y existen $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$ de forma que

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$$

Sea $\delta_n := \frac{1}{n}$, entonces existen $x_n, y_n \in X, f_n \in F$ tales que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ y que

$$|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$$

Hemos construido una sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq F$. Ahora, dado que F es compacto, entonces la sucesión $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente, es decir, el conjunto

$$\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$$

es equicontinua. Pero tomando $\varepsilon > 0$ para todo f_n vemos que existen $x_n, y_n \in X$ tales que $d(x_n, y_n) < \delta$ y $|f_n(x) - f_n(y)| \geq \varepsilon$. Llegando a una contradicción. Por tanto F debe ser equicontinua.

Probemos la otra dirección, supognamos que $F \subseteq C(X, \mathbb{K}^k)$. Notemos que si X es un espacio métrico compacto, entonces X es separable, es decir, existe un conjunto numerable

$$S = \{s_1, s_2, \dots\} \subseteq X$$

talque es denso en X. (Lema 4.4.) Demostraremos que dada una sucesión de funciones $\{f_n\}_n \subseteq F$, tiene una subsucesión convergente. Tomemos $s_1 \in S$ y generemos la sucesión

$$\{f_n(s_1)\}_n \subseteq \mathbb{K}^k$$

es decir, es una sucesión acotada en un cuerpo real o complejo, como F es acotado, se tiene que por weierstrass, existe una subsucesión

$$\{f_{n_1}(s_1), f_{n_2}(s_1), \dots\}$$

que converge. Tomemos la sucesión $\{f_{n_i}\} \subseteq F$ que está acotada, de igual forma podemos considerar la sucesión

$$\{f_{n_i}(s_2)\} \subseteq \mathbb{K}^k$$

luego tiene una sucesión

$$\{f_{m_1}(s_2), \dots\}$$

que converge. Este proceso podemos realizarlo de forma recursiva. Para ordenarlo todo usaremos la siguiente notación

$$\begin{gathered} f_{1,1};\, f_{1,2};\ f_{1,3}; \dots \\ f_{2,1};\, f_{2,2};\ f_{2,3}; \dots \\ f_{3,1};\, f_{3,2};\ f_{3,3}; \dots \\ \vdots \end{gathered}$$

donde la cadena de forma $f_{1,i}$ es la primera sucesión $\{f_{n_i}(s_1)\}$, la segunda cadena es la subsucesión de la primera cadena de la forma $\{f_{m_i}(s_2)\}$ y así con el resto. Cada cadena converge, ahora tomemos la diagonal de estas cadena, formando la sucesión

$$\{f_{n,n}\} \subseteq \mathbb{K}^k$$

donde $f_{n,n}$ es tomar la subsucesión n y considerar el elemento n donde se evalua s_n. Por construcción podemos ver que

$$\{f_{n,n}(s_k)\}_n$$

converge para todo $k \in \mathbb{N}$. Para ver esto, notemos que en la segunda cadena al evaluar por s_1, $f_{2,n}(s_1)$, se convierte en una subsucesión de $\{f_{1,n}(s_1)\}$ por definición, entonces necesariamente debe converge, si tomamos la tercera linea, y evaluamos en s_1, ocurre lo mismo, si se toma s_2, también. Entonces, en general $f_{i,n}$ converge para todo $s_1, \dots, s_i$, cuando $n \to \infty$. Entonces para $s_k \in S$ fijo, basta considerar $N \geq k$, de forma que

$$f_{N,N}(s_k)$$

converge, luego $\{f_{n,n}(s_k)\}$ converge para todo $s_k \in S$.

Sea $g_n := f_{n,n}$, probemos que converge uniformemente. Sea $\varepsilon > 0$, por la equicontinuidad de F, existe un $\delta > 0$ talque si

$$d(x, y) < \delta$$

entonces

$$\|g_n(x) - g_n(y)\| < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $M \in \mathbb{N}$ talque $S_M \subseteq S$ es un subconjunto construido de forma conveniente, es decir, para todo $x \in X$ existe un $s \in S_M$ talque

$$d(x,s) < \frac{1}{M} < \delta$$

todo en virtud de que S es denso en X. Luego $\{g_n\}$ converge uniformemente sobre S_M y por eso existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$|g_n(s) - g_m(s)| < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$ y $s \in S_M$. Sea $x \in X$, existe $s \in S_M$ talque $d(s,x) < \delta$ leugo

$$\begin{aligned} \|g_n(x) - g_m(x)\| &\leq \|g_n(x) - g_n(s)\| + \|g_n(s) - g_m(s)\| + \|g_m(x) - g_m(s)\| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

En virtud de que g_n es Cauchy. Por tanto $g_n : X \to \mathbb{K}^k$ es Cauchy en un cuerpo completo, por tanto converge uniformente. Por tanto F es compacto. ■

Ejemplo 4.8. (Teorema de Peano) Sea $f : [0,1] \times [-a,a] \to \mathbb{R}$ continua. ¿Existe un $\mu : [0,\varepsilon] \to \mathbb{R}$ talque $\mu'(x) = f(x, \mu(x))$, donde $\mu(0) = 0$?

Dem. Sean $M := \sup\limits_{(x,v)} f(x,v)$, $\varepsilon := \frac{a}{M}$ (asuminedo que $\varepsilon \leq 1$). Sea $x_0, \dots, x_n$ partición uniforme de $[0,\varepsilon]$ donde $\mu_n(0) = 0$, sean

$$\begin{aligned} v_n\Big|_{[x_{i-1},x_i]} &= u_n(x_{i-1}) \\ \mu_n\Big|_{[x_{i-1},x_i]}(x) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(s, v_n(s))ds + \mu_n(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Entonces

$$|\mu_n(x) - \mu_n(x_{i-1})| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$$

Y

$$|\mu_n(x) - v_n(x)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M}$$

Sean $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$|\mu_i(x) - \mu_i(y)| \leq M|x - y|$$

Es decir, es continua por intervalos. Es más, sean $x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\begin{aligned} |\mu_n(x) - \mu_n(y)| &\leq |\mu_n(x) - \mu_n(x_i)| + |\mu_n(x_i) - \mu_n(y| \\ &< M|x - x_i| + M|x_i - y|X \\ &= M|x - y| \end{aligned}$$

Notemos que M es independiente de n, luego el conjunto

$$F := \{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es equicontinua, además por definición F es acotada ya que $F \subseteq C([0,\varepsilon],\mathbb{R})$, luego por weierstrass, existe una subsucesión $\{\mu_{n_k}\}_k$ talque

$$\mu_{n_k} \xrightarrow{U} \mu \text{ y } v_n \xrightarrow{U} \mu$$

Luego al intergrar, podemos cambiar los índices, y entonces

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^x f(s, v_{n_k}(s))ds = \int_0^x f(s,\mu(s))ds$$

Entonces

$$\mu(x) = \int_0^x f(s,\mu(s))ds$$

Y por tanto

$$\mu'(x) = f(x,\mu(x))$$

Ejemplo 4.9. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea

$$A(x(t)) := \int_0^1 k(s,t)x(s)ds$$

donde $A : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ es una función que genera otra función en base a la función $x(t)$.

Consideremos la bola

$$B(0,1) = \{g : \mathcal{C}([0,1]) : \|g\|_\infty < 1\}$$

Queremos probar que

$$\overline{A(B(0,1))}$$

es compacto. Sea $K := A(B(0,1))$, sea $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ talque

$$|k(q,s) - k(q',s')| < \varepsilon$$

si $d((q,s),(q',s')) < \delta$, dado que k es continua sobre un compacto, luego es uniformemente continua. Sea $x \in B(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
|A_x(s) - A_x(t)| &= \left|\int_0^1 k(q,s)x(q)dq - \int_0^1 k(q,t)x(q)dq\right| \\
&= \left|\int_0^1 (k(q,s) - k(q,t)x(q))dq\right| \\
&\leq \int_0^1 |k(q,s) - k(q,t)|\|x\|_\infty dq \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Entonces $A(B(0,1))$ es equicontinua. Por lo tanto $\overline{A(B(0,1))}$ es compacto.

Definición 4.7. *Sea F un conjunto de funciones equicontinua de funciones $f : X \to Y$, donde X, Y son espacios métricos. Decimos que F es puntualmente compacto si*

$$\{f(x)\}_{f\in F}$$

es compacto para todo $x \in X$.

Lema 4.5. *Si $E \subseteq X$ es contable y $f_n : E \to Y$ (con X, Y espacios métricos) donde $\{f_n : n \in\}$ es puntualmente comacpto. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_k$ talque*

$$\{f_{n_k}(x)\}$$

converge para todo $x \in E$.

Dem. Tenemos $E = \{x_1, \dots\}$ contable. Tomemos $\{f_n(x_1)\}$ compacto al ser puntualmente compacto. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_l}(x_1)\}$ convergente, podemos crear la misma cadena que se uso en la demostración del teorema de Ascoli, luego existe una subsucesión que converge para todo $x \in E$. ■

Teorema 4.3. (Teorema de Arzela-Ascoli general) *Sea X un espacio métrico compacto, Y un espacio métrico y $F \subseteq C(X, Y)$, entonces F es compacto si y sólo si F es puntualmente compacto y equicontinua.*

Dem. Por hacer.

4.4. Stone-Weierstrass

Definición 4.8. *Sea $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{K})$, decimos que es un subálgebra si*

$$\begin{aligned} \lambda f + \mu g &\in \mathcal{A} \\ f \cdot g &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, f, g \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 4.10. Los polinomios de $C([a, b].\mathbb{R})$ conforman un subálgebra, ya que todo multiplo de un polinomio, es un polinomio, y la suma y producto de polinomios, son polinomios.

Definición 4.9. *Se dice que $\mathcal{A}$ separa punto de X si para todo $x, y \in X$, si $x \neq y$, entonces existe una función $f \in \mathcal{A}$ talque $f(x) \neq f(y)$.*

Ejemplo 4.11. Los polinomios separa los puntos de X, ya que si $x \neq y$, basta tomar el polinomio $f(x) = x$, luego $f(x) = x \neq y = f(y)$.

Recordatorio. $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si para todo $a \in A$, existe un conjunto abierto $U \subseteq A$ talque $a \in U$.

Lema 4.6.(Arreglar) *Sea K un espacio métrico compacto. Sea $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ un subálgebra con $1 \in \mathcal{A}$ (polinomio constante 1) y $\mathcal{A}$ separa puntos de X. Sea $x_0 \in K$ y U una vecindad de x_0, entonces existe una vecindad V de x_0 taque $V \subseteq U$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $f \in \mathcal{A}$ con*

1. $0 \leq f \leq 1$
2. $f(x) < \varepsilon$ *para todo* $x \in V$
3. $f(x) > 1 - \varepsilon$ *para todo* $x \in K \setminus U$

Dem. La demostración es por construcción. Si $\mathcal{A}$ separa a X, entonces existe un $g_x \in \mathcal{A}$ talque $g_x(x) \neq g_x(x_0)$. Sea

$$h_x := g_x - g_x(x_0) \cdot 1 \in \mathcal{A}$$

Notemos que $h_x(x) \neq h_x(x_0) = 0$ por definición de h_x. Normalizemos h_x, sea

$$p_x := \frac{h_x^2}{\|h_x^2\|_\infty}$$

sabemos que está bien definida ya que el supremo de h_x es mayor a 0, (notemos que $h_x(x) \neq 0$) luego por construcción

$$\begin{aligned} p_x(x) &> 0, \text{ para todo } x \neq x_0 \\ p_x(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$0 \leq h_x^2 \leq \|h_x^2\|_\infty \Leftrightarrow 0 \leq p_x \leq 1$$

Sea $A_x := p_x^{-1}(0, \infty)$ un conjunto abierto, dado que p es continua y $(0, \infty)$ es abierto. Esto implica que A_x es una vecindad de x, consideremos el conjuto $K \setminus U$ que es cerrado al ser complemento de un abierto, luego es compacto, consideremos una cubierta abierta talque

$$K \setminus U \subseteq \bigcup_{x \in K \setminus U} A_x$$

(notemos que está bien definido la cubierta, ya que tomamos x que no anulan a p_x.) entonces existen $x_1, \ldots, x_m \in K \setminus U$ tales que

$$K \setminus U \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_x$$

Sea

$$p := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} p_{x_j} \in \mathcal{A}$$

por construcción $0 \leq p \leq 1$, $p(x_0) = 0$ y $p > 0$ sobre $K \setminus U$, como es la suma de continuas, se tiene que p es continua y tiene $K \setminus U$ compacto, por lo tanto alcanza su mínimo, en particular, existe un $\delta > 0$ talque $0 < \delta < 1$ con $p \geq \delta$ sobre $K \setminus U$ (restringiendo p a $K \setminus U$). Sea

$$V := p^{-1}(-\infty, \delta/2)$$

una vecindad de x_0 (es abierto y contiene a x_0), además $V \subseteq U$ (**Falta ver esto**)

Eligimos $k \in \mathbb{N}$ talque $k-1 \leq \frac{1}{\delta} \leq k$ y tomamos $g_n(x) := (1-p^n(x))^{k^n} \in \mathcal{A}$, luego $0 \leq g_n \leq 1$ y $g_n(x_0) = 1$. Sea $x \in V$, entonces $p(x) < \frac{\delta}{2}$, entonces $kp(x) \leq k\frac{\delta}{2} < 1$ (es solo jugar con las desigualdades.), entonces

$$\begin{aligned} g_n(x) = (1-p^n(x))^{k^n} &\geq 1 - k^n p^n(x) \\ &\geq 1 - \left(\frac{k\delta}{2}\right)^n \end{aligned}$$

por desigualdad de Bernoulli.

Por otro lado si $x \in K \setminus U$, entonces $kp(x) \geq k\delta - 1$ (**revisar**), luego

$$\begin{aligned} q_n(x) = (1-p^n(x))^{k^n} &= \frac{1}{(kp(x))^n}(1-p^n(x))^{k^n}(kp(x))^n \\ &\leq \frac{1}{(k^n p(x))^n}(1-p^n(x))^{k^n}(1+k^n p^n(x)) \\ &\leq \frac{1}{(kp(x))^n}(1-p^n(x))^{k^n}(1+p^n(x))^{k^n} \\ &= \frac{1}{(kp(x))^n}(1-p^{2n}(x))^{k^n} \\ &\leq \frac{1}{(kp(x))^n} \leq \frac{1}{(k\delta)^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Entonces existe un N suficientemente grande talque

$$\begin{aligned} q_N(x) &< \varepsilon, \text{ si } x \in K \setminus V \\ q_N(x) &> 1-\varepsilon, \text{ si } x \in V \end{aligned}$$

Tomando $f = 1 - q_N$. Encontrando la función. ■

Lema 4.7. *Sea $\mathcal{A} \subseteq C(K,\mathbb{R})$, con K un espacio métrico compacto, $1 \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ separa punto de X. Si A, B son conjuntos cerrados y disjuntos, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $f \in \mathcal{A}$ con*

1. $0 \leq f \leq 1$.
2. $f(x) < \varepsilon$ *si* $x \in A$.
3. $f(x) > 1 - \varepsilon$ *si* $x \in B$.

Dem. Sea $V = K \setminus B$ un conjunto abierto (al ser complemento de un cerrado), sea $x \in A$ y eligimos A_x igual que la demostración anterior, podemos ver que existen $x_1, \ldots, x_m \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_{x_i}$$

por construcción cada j, existe un $f_j \in A$ (por el lema anterior) talque

$$\begin{aligned} 0 \leq & f_j \leq 1 \\ f_i(x) & < \frac{\varepsilon}{m}, \ \ x \in A_{x_i} \\ f_i(x) & > 1 - \frac{\varepsilon}{m}, \ \ x \in K \setminus V = B \end{aligned}$$

Sea $f = f_1 f_2 \dots f_m$, claramente

$$f(x) < \frac{\varepsilon}{m} < \varepsilon$$

si $x \in \bigcup_{i=1}^m A_{x_i} \supseteq A$, luego por si $x \in B$, por Bernoulli

$$f(x) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^m \geq 1 - \varepsilon$$

Encontrando la función. ■

Teorema 4.4. (Stone-Weierstrass) *Sea K un espacio métrico compacto, $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ un subálgebra con $1 \in \mathcal{A}$ que además separa puntos, entonces*

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K, \mathbb{R})$$

Corolario 4.2. *El conjunto*

$$P([a, b]) \subseteq C([a, b], \mathbb{R})$$

de los polinomios, es denso en $C([a, b), \mathbb{R})$.

Dem. Recordemos que $[a, b]$ es un espacio métrico compacto, P es un subálgebra que incluye al polinomio 1, además separa punto, por tanto

$$\overline{P([a, b])} = C([a, b], \mathbb{R})$$

Ejemplo 4.12. Los polinomios trigonométricos de la forma

$$\begin{aligned} & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & f(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \end{aligned}$$

Corolario 4.3. *El conjunto de los polinomios trigonométricos, es denso en*

$$C_{per}([0, 2\pi]) := \{g \in C[0, 2\pi] : g(0) = g(2\pi)\}$$

Dem. (Stone - Weierstass) Sea $f \in C(K, \mathbb{R})$, debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $g \in \mathcal{A}$ talque

$$\|f - g\|_\infty < 2\varepsilon$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $f \geq 0$ y que $\varepsilon < \frac{1}{3}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ talque $(n-1)\varepsilon > \|f\|_\infty$. Sean

$$\begin{aligned} A_j &:= f^{-1}([0,(j-1/3)\varepsilon]) \\ B_j &:= f^{-1}([(j+1/3)\varepsilon, \|f\|_\infty]) \end{aligned}$$

donde ambas son A_j, B_j cerradas, dado que f es continua. Notemos que A_j, B_j son disjuntos para todo j, ya que si no, entonces dado $x \in A_j \cap B_j$, se tiene que $f(x)$ está en conjuntos disjuntos, es decir, x tiene dos imagenes, luego es disjunto. Además

$$\begin{aligned} A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n = K \\ B_0 \supseteq B_1 \supseteq \cdots \supseteq B_n = \emptyset \end{aligned}$$

Según el lema anterior existe un $f_j \in \mathcal{A}$ talque $0 \leq f_j \leq 1$ y

$$\begin{aligned} f_j < \varepsilon,\ \ x \in A_j \\ f_j > 1-\varepsilon\ \ x \in B_j \end{aligned}$$

Sea $g := \varepsilon \sum_{i=0}^{n} f_j \in \mathcal{A}$ (en virtud de subálgebra). Si $x \in K$, existe un $j > 1$ talque $x \in A_j \backslash A_{j-1}$, entonces

$$\left(j - \frac{4}{3}\right)\varepsilon < f(x)\textbf{Terminar}$$

■

Teorema 4.5. (Stone - Weierstrass, caso complejo) *Sea K un espacio métrico completo. Si $\mathcal{A} \subseteq C(K,\mathbb{C})$ es un subálgebra, $1 \in \mathcal{A}$, que separa puntos y que es autoadjunto (si $f \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{f} \in \mathcal{A}$). Entonces*

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K,\mathbb{C})$$

Dem. Si $\mathcal{A}$ es autoadjunto, entonces podemos ver que

$$Re(f) = \frac{f+\overline{f}}{2} \in \mathcal{A}$$

Consideremos las funciones reales de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A}_\mathbb{R} := \{f \in \mathcal{A} : f \text{ es real}\}$, notemos que $\mathcal{A}_\mathbb{R} \subseteq C(K,\mathbb{R})$, contiene al 1 y que es subálgebra sobre $\mathbb{R}$. Veamos que separa punto en K. Sean $x, y \in K$, sabemos que $\mathcal{A}$ separa puntos, luego existe una función f talque $f(x) \neq f(y)$, además existe un $c \in \mathbb{C}$ constante, talque

$$|f(x)+c| \neq |f(y)+c|$$

luego

$$|f(x)+c|^2 \neq |f(y)+c|^2$$

Recordemos que

$$|f(x)+c|^2 = (f(x)+c)\overline{(f(x)+c)} \in \mathcal{A}$$

ya que $f(x)+c \in \mathcal{A}$ y por al ser autoadjunto, el conjugado está en $\mathcal{A}$ con el producto. Consideremos el mapeo $x \mapsto (f(x)+c)\overline{(f(x)+c)} \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ por definición, luego encontramos una función talque $g(x) \neq g(y)$, es decir, $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ separa punto de K. Por tanto, por el teorema de Stone-Weiestrass sobre los reales

$$\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} = C(K, \mathbb{R})$$

Ahora probemos la densidad de $\mathcal{A}$ sobre $C(K, \mathbb{C})$. Sea $f \in C(K, \mathbb{C})$, de forma que $f = Re(f) + iIm(f)$, como $Re(f), Im(f)$ son funciones reales, se tiene que existen $g_r, g_i \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ tales que

$$\|g_r - Re(f)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|g_i - Im(f)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \|g - f\|_\infty &\leq \|g_r - Re(f)\|_\infty + |i|\|g_i - Im(f)\|_\infty \\ &= \|g_r - Re(f)\|_\infty + \|g_i - Im(f)\|_\infty < \varepsilon \end{aligned}$$

$(g = g_r + ig_i \in \mathcal{A})$. Por lo tanto

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K, \mathbb{C})$$

Probando el teorema. ■

Teorema 4.6. *Sea X un espacio métrico separable. Entonces existe una colección $\mathcal{G}$ numerable de conjuntos abiertos, talque para cada $A \subseteq X$ abierto, es una unión de elementos de $\mathcal{G}$.*

Dem. Sea $\mathcal{G} := \{B(s_j, q_k) : s_j \in S, q_k \in \mathbb{Q}\}$ una colección de conjuntos abiertos, donde $S := \{s_1, s_2, \dots\}$ es el conjunto numerable denso en X, en virtud de que X es separable y pensemos en $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ en una enumeración de los racionales.

Sea $A \subseteq X$ abierto, entonces por definición, para todo $x \in A$ existe $\varepsilon_x > 0$ talque

$$B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$$

Si S es denso en X, con respecto a x, existe un $s_{j_x} \in S$ y existe un $q_{k_x} \in \mathbb{Q}$ (racionales denso en $\mathbb{R}$)

$$d(x, s_{j_x}) < q_{k_x} \leq \frac{\varepsilon_x}{4}$$

Si $y \in B(s_{j_x}, q_{k_x})$, entonces

$$\begin{aligned} d(y, x) &\leq d(y, s_{j_x}) + d(s_{j_x}, x) \\ &< q_{k_x} + q_{k_x} < \varepsilon_x \end{aligned}$$

luego

$$B(s_{j_x}, q_{k_x}) \subseteq B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$$

Afirmación.

$$A = \bigcup_{x \in A} B(s_{j_x}, q_{k_x})$$

Dem. La inclusión $\supseteq$ es evidente por lo que acabamos de probar.

La inclusión $\subseteq$ se ve debido a que por construcción escogemos $q_{k_x} \in \mathbb{Q}$ talque $q_{k_x} \leq \varepsilon_x/4$, y entonces $x \in B(s_{j_x}, q_{k_x})$.

De forma A es la unión de elementos de $\mathcal{G}$. Probando el teorema. ■

Un claro ejemplo son los reales, que recordemos es separable ya que el conjunto racional $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ es numerable y denso. Entonces todo conjunto abierto de $\mathbb{R}$ es una unión numerable de conjuntos de una colección $\mathcal{G}$ que sabemos que existe.

Lema 4.8. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $E \subseteq X$, entonces la función dada por*

$$f(x) := \inf_{y \in E} d(x, y)$$

es uniformemente continua.

Dem. Por comodidad de denota $\inf_{y \in E} d(x, y) = d(x, E)$, además notemos que $f : X \to \mathbb{R}$. Sean $x, y \in X$, entonces para todo $e \in E$ se tiene que

$$d(x, e) \leq d(x, y) + d(y, e)$$

Luego por propiedades de ínfimo, concluimos que

$$d(x, E) \leq d(x, y) + d(y, E)$$

Por otro lado

$$d(y, e) \leq d(x, y) + d(x, e)$$

y entonces

$$d(y, E) \leq d(x, y) + d(x, E)$$

Entonces

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y)$$

Es decir, la función es lipschtiz, si tomamos $\varepsilon > 0$, basta considerar $\delta > 0$ y $x, y \in X$ tales que $d(x, y) < \delta$, luego

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y) < \varepsilon$$

Por lo tanto, f es uniformemente continua. ■

Teorema 4.7. *Si K es un espacio métrico compacto, entonces $C(K,\mathbb{R})$ es separable.*

Dem. El teorema es similar a la demostración del teorema anterior, solo que con algunas variaciones. Sea $\mathcal{G} := \{B(s_j, q_k) : s_j \in S, q_k \in \mathbb{Q}\}$, donde $S = \{s_1, \dots\}$ es numebrable talque es denso en X (compacto implica separabilidad). Sea $\{B_n : \in \mathbb{N}\}$ una enumeración de las bolas de $\mathcal{G}$, sea $f_n(x) = d(x, K \setminus B_n)$, sabemos que es continua (acotada). Sea

$$F := \{f_1^{\alpha_1} \dots f_n^{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0\}$$

Sea $\mathcal{A} = genF$, entonces es un subálgebra con $1 \in \mathcal{A}$, que separa puntos, verifiquemos estos resultado.

1. $\mathcal{A}$ es un espacio vectorial, por lo que podemos sumar multiplos y seguir estando en $\mathcal{A}$.
2. Si $f, g \in \mathcal{A}$, en virtud del generador $fg \in \mathcal{A}$
3. Si escogemos $n = 1$, entonces $a_1 =$ y luego $f_1^0 = 1$.
4. Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) > 0$. Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño, talque

$$B(x, \delta) \cap B(y, \delta) = \emptyset$$

entonces existe un $s_{j_x} \in S, q_{k_x} \in \mathbb{Q}, q_{k_x} \leq \delta/4$ y $d(s_{j_x}, x) < q_{k_x}$, entonces $x \in B(s_{j_x}, q_{k_x}) \subseteq B(x, \delta/4)$. Entonces existe un n talque $x \in B_n = B(s_{j_x}, q_{k_x}) \subseteq B(x, \delta/4))$. Y entonces $f_n(x) \neq 0$, mientras que $f_n(y) = 0$. De forma que se separan los puntos.

Por tanto, por Stone-Weierstass

$$\overline{\mathcal{A}} = C(K, \mathbb{R})$$

es decir, $C(K,\mathbb{R})$ es separable. ■

Teorema 4.8. (Teorema de Dini) *Sea K un espacio métrico compacto, sea $\{f_n\} \subseteq C(K,\mathbb{R})$. Si $f_n \to f \in C(K,\mathbb{R})$ puntualmente y $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in K, n \in \mathbb{N}$. Entonces f_n converge uniformemente a f.*

Dem. Sea $g_n := f_n - f$ donde claramente $g_n \geq 0$ ya que para todo $x \in K$ $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \dots \geq f$, y que además

$$g_n - g_{n+1} = f_n - f_{n+1} \geq 0$$

Es decir, g_n es decreciente sobre $n \in \mathbb{N}$. Sea ε >0, consideremos

$$K_n := g_n^{-1}([\varepsilon, \|g_n\|_\infty]) \subseteq K$$

como g_n es continua y $[\varepsilon, \|g_n\|_\infty]$ es un invertalo cerrado para todo n, se tiene que K_n es cerrado. Luego K_n es compacto, además

$$K_n \supseteq K_{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ya que para $x \in K_{n+1}$ se tiene

$$\varepsilon \leq g_{n+1}(x) \leq \|g_{n+1}\|_\infty$$

Como g_n es decreciente, se tiene que

$$\varepsilon \leq g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \leq \|g_n\|_\infty$$

Es decir, $x \in K_n$. Sea $x \in K$, si $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, entonces

$$g_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si tomamos $\varepsilon > 0$ como al inicio, veremos que existe un n talque

$$|g_n(x)| < \varepsilon$$

es decir $x \notin K_n$, luego

$$x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

esto se puede hacer para todo $x \in K$, de forma que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n^c = K$$

donde K_n^c es el complemento de K_n y por lo tanto, es abierto. Luego tenemos una cubierta abierta que cubre a K, entonces por compacticidad de K, existen $i_1, \dots, i_m$ talque

$$K = \bigcup_{k=1}^{m} K_{i_k}^c$$

Si $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$, entonces

$$K_{i_1} \supseteq \cdots \supseteq K_{i_m}$$

Luego

$$\emptyset = \bigcap_{k=1}^{m} K_{i_k} = K_{i_m}$$

Esto significa que

$$0 \leq g_n(x) < \varepsilon$$

para todo $n \geq i_m$ y para todo $x \in K$. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ talque para todo $n \geq N$ y para todo $x \in K$ se tiene que

$$|g_n(x)| < \varepsilon$$

es decir $\|g_n\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y por lo tanto, f_n converge uniformemente a f. ■

Nota 4.3. La compacidad de K es importante, ya que si consideramos

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \overset{P}{\to} f(x) = 0$$

para todo $x \in (0,1)$, es claro que converge, pero no es uniforme.

Lema 4.9. *Sea X un espacio métrico y $E \subseteq X$, entonces $d(x,E) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{E}$.*

Dem. Recordemos que se define

$$d(x,E) = \inf_{y\in E} d(x,y)$$

Supongamos que $d(x,E) = 0$, entonces

$$\inf_{y\in E} d(x,y) \geq 0$$

Sea $\{x_n\} \subseteq E$ una sucesión talque

$$d(x,x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(esto se puede hacer en virtud del ínfimo), luego claramente $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, luego $x \in \overline{E}$.

Supongamos que $x \in \overline{E}$, entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq E$ talque $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, si $\varepsilon > 0$ es talque $d(x,x_n) < \varepsilon$, entonces para n suficientemente grande,

$$0 \leq d(x,E) = \inf_{y\in E} d(x,y) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} d(x,y) < \varepsilon$$

luego $d(x,E) = 0$. ■

Lema 4.10. (Lema de Urysohn) *Sea X un espacio métrico, $A, B \subseteq X$ cerrados, disjuntos. Entonces existe $f \in C^b(X,\mathbb{R})$ con:*

(a) $0 < f < 1$ *sobre* $X \setminus (A \cup B)$.

(b) $f|_A = 1$.

(c) $f|_B = 0$

Dem. Sea

$$f(x) := \frac{d(x,B)}{d(x,A)+d(x,B)}$$

una función de X a $\mathbb{R}$ acotada, y continua dado que $d(x,A), d(x,B)$ son funciones continuas, de forma que $d(x,A)+d(x,B) \neq 0$ para todo $x \in X$.

- Si $x \in A$, entonces $d(x,A)$ y luego $f = 1$, ya que A cerrado y entonces $d(x,A) = 0$.

- Si $x \in B$, entonces $d(x,B) = 0$ y luego $f(x) = 0$. Ya que B es cerrado y entonces $d(x,B) = 0$.
- Si $x \in X \setminus (A \cup B)$, entones $d(x,A) + d(x,B) > d(x,B) > 0$, luego

$$0 < f < 1$$

Probando el lema de Urysohn. ■

Lo interesante del lema de Urysohn, es que podemos controrlar los valores donde ser quiere acotar, por ejemplo, para $k > 0$ podemos encontrar una función talque

$$-\frac{1}{k} < f < \frac{1}{k}$$

para $X \in X \setminus (A \cup B)$ y $f|_A = \frac{1}{k}, f|_B = -\frac{1}{k}$. Para ello basta tomar la función $f \in C^b(X, \mathbb{R})$, luego la función

$$\widetilde{f} = \frac{2}{k} f - \frac{1}{k}$$

Entonces

(a) Si $x \in A$, entonces

$$\widetilde{f}(x) = \frac{2}{k} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

(b) Si $x \in B$, entonces

$$\widetilde{f}(x) = 0 - \frac{1}{k} = -\frac{1}{k}$$

(c) Si $x \in X(A \cup B)$, entonces

$$-\frac{1}{k} < \widetilde{f}(x) < \frac{1}{k}$$

Teorema 4.9. (Extensión de Tietze) *Sea X espacio métrico, $E \subseteq X$ cerrado y $f : E \to [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ continua. Entonces existe una extensión continua:*

$$g : X \to [a,b]$$

talque $g|_E = f$ continua.

Dem. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $[a,b] = [-1,1]$, sean

$$A_1 := f^{-1}\left(\left[-1, \frac{1}{3}\right]\right), \quad B_1 := f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right)$$

Notemos que A_1, B_1 son conjuntos cerrados y disjuntos dado que f es continua. Por lo que por Uryson, existe una función continua $f_1 : X \to \mathbb{R}$ talque

$$\begin{aligned} f_1|_A &= -\frac{1}{3} \\ f_1|_B &= \frac{1}{3} \\ |f_1(x)| &\leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

para todo $x, \in X$. Para ello basta tomar

$$f_1(x) := \frac{2}{3} \cdot \frac{d(x, B_1)}{d(x, A_1) + d(x, B_1)}$$

Luego si $x \in E$, entonces

$$|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$$

Notemos que $f - f_1$ es continua, luego podemos definir A_2, B_2 cerrados disjuntos de la siguiente forma

$$A_2 := (f - f_1)^{-1}\left(\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right]\right), \quad B_2 := f^{-1}\left(\left[\frac{2}{9}, \frac{2}{3}\right]\right)$$

Luego por Urysohn, existe $f_2 : X \to \mathbb{R}$ es continua, talque

$$\begin{aligned} f_2|_A &= -\frac{2}{9} \\ f_2|_B &= \frac{2}{9} \\ |f_2(x)| &\leq \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Si $x \in E$, entonces $|f - f_1 - f_2| \leq \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$. Haciendo esto de forma recursiva, llegaremos a que $f_n : X \to \mathbb{R}$ es una función continua talque

$$|f_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$$

para todo $x \in X$. Y para todo $x \in E$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

para todo $x \in E$. Notemos que f_n está acotada para todo n y la serie acotada converge, luego la sere $\sum f_n(x)$ converge uniformemente. Digamos que

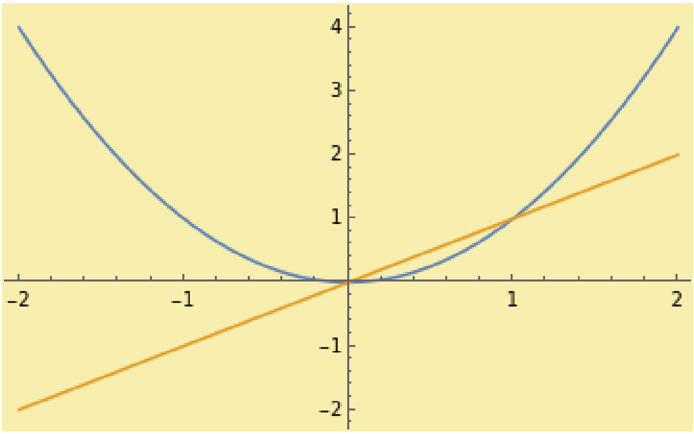
$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

y $g(x) = f(x)$ si $x \in E$. Probemos que g es una función continua. Como $\sum_{i=1}^{n} f_i$ es continua, entonces g es continua. Además $\|g\|_\infty \leq 1$. ■

4.5. Teorema de Puntos Fijos

4.5.1. Motivación, Definición y Teoremas

Motivación. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua, queremos valores $p \in [0,1]$ tales que $f(p) = p$.



Es decir, un valor que coincida con la recta $x = y$.

Definición 4.10. *Sea $f : X \to Y$ una función de espacios métricos. Decimos que $p \in X$ es punto fijo si $f(p) = p$.*

Teorema 4.10. *Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función continua. Entonces existe al menos un fijo.*

Dem. Supongamos sin pérdida de generalidad que $0 < a < b$, supongamos además que a, b no anulan a f. Sea $g : [a,b] \to [a,b]$ una función continua dada por $g(x) := f(x) - x$, notemos que $g(a) = f(a) - a \in (0, b-a]$ y que $g(b) = f(b) - b \in [a-b, 0)$, luego por el teorema del valor intermedio, existe un x_0 talque

$$g(x_0) = 0$$

es decir, x_0 es un punto fijo de f ya que $f(x_0) = x_0$. ■

4.5.2. Iteración de Picard

Sea $f : X \to Y$ una función continua. Definiremos sucesiones con un valor inicial x_0 y $x_n := f(x_{n-1})$ con $n \geq 1$. Si $\{x_n\} \subseteq X$ es una sucesión que converge a $x \in X$, entonces

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = f(x)$$

Esto nos permite estimar puntos fijos, ya que tomamos una sucesión que converge, y su valor se irá moldeando al ir aplicando f a cada elemento de la sucesión, y en consecuencia, $f(x_n)$ se acercará a x.

Ejemplo 4.13. Sea la ecuación $x^2 - 3x - 1 = 0$, queremos aplicar un x que satisface a la ecuación o mejor dicho, probar que existe tal x. Notemos que

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{3} = x$$

tomando $g(x) := \frac{x^2-1}{3}$, si $x \in [-1, 1]$, entonces $g(x) \in [-1, 1]$ y como es continua, por el teorema 4.10 existe un punto fijo $\overline{x}$, de forma

$$\frac{\overline{x}^2 - 1}{3} = \overline{x}$$

Luego

$$\overline{x}^2 - 3\overline{x} - 1 = 0$$

viendo que existe una solución en $[-1, 1]$. Estimemos la solución mediante la iteración de Picard. Sea $x_0 = 0$ nuestro valor inicial, entonces

$$g(x_0) = -\frac{1}{3} =: x_1$$

volvamos a evaluar en g, luego

$$g(x_1) = -0{,}2963 \cdots =: x_2$$

y así sucesivamente. Si x_n converge a x, está claro que

$$g(x) = x$$

y esta sería la solución exacta a la ecuación. Probemos que efectívamente x_n converge. Sabemos que $g(\overline{x}) = \overline{x}$ siendo $\overline{x}$ el punto fijo que encontramos anteriormente, y que g es diferenciable con derivada $g'(x) = \frac{2x}{3}$, esto implica que para $\overline{x}, x_{n+1} \in [-1, 1]$ se tiene que

$$\|g'\|_\infty \leq \frac{2}{3}$$

Entonces por el teorema del valor medio se tiene

$$\begin{aligned}
|\overline{x} - x_{n+1}| &= |g(\overline{x}) - g(x_n)| \\
&= |g'(\xi)||\overline{x} - x_n| \\
&\leq \frac{2}{3}|\overline{x} - x_n| \\
&= \frac{2}{3}|g(\overline{x}) - g(x_{n-1})| \\
&\vdots \\
&\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} |\overline{x} - x_1|
\end{aligned}$$

donde $|\overline{x} - x_1|$ es un valor fijo. Y entonces

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{x}$$

Es decir, la sucesión que definimos converge a $\overline{x}$, es más, es único el punto, ya que si $\overline{x}' \in [-1, 1]$ también fuera punto fijo, entonces

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{x}'$$

y como es único $\overline{x}' = \overline{x}$. Por lo tanto, podemos estimar el valor de x con aproximaciones.

Definición 4.11. *Sea $f : X \to X$ una función de espacios métricos. Decimos que es una contracción si f es Lipschitz constante menor a 1. Es decir, existe un $L < 1$ talque*

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

para todo $x, y \in X$.

Teorema 4.11. (Punto fijo de Bannach) *Si X es un espacio métrico completo, y $f : X \to X$ es una contracción, entonces existe un único punto fijo.*

Dem. Debemos probar que existe tal punto fijo y luego que es único.

- **Existencia.** Sea $x_0 \in X$ un punto cualquiera, se define la sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ por

  $$x_n := f(x_{n-1})$$

  para todo $n \geq 1$. Notemos que

  $$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\ &\leq L \cdot d(x_n, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq L^n \cdot d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

  Donde $d(x_1, x_0)$ es un valor real fijo. Sean $m \geq n$ naturales, entonces

  $$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d_(x_{n+1}, x_n) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} L^i d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) L^n \sum_{i=0}^{m-n-1} L^i \\ &= d(x_1, x_0) L^n \frac{L^{m-n} - 1}{L - 1} \\ &= d(x_1, x_0) \frac{L^m - L^n}{L - 1} \overset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y dado que X es completo, x_n converge a $x \in X$, en particular

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

Dado que f es continua al ser Lipchitz. Encontrado un punto fijo.

- **Unicidad.** Sean $x, y \in X$ tales que

$$f(x) = x, f(y) = y$$

entonces

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) = Ld(f(x), f(y))$$

Luego

$$(L - 1)d(f(x), f(y)) \geq 0$$

Entonces $L \geq 1$, como la distancia es siempre no negativa, pero esto es imposible dado que $L < 1$, por lo tanto $f(x) = f(y)$.

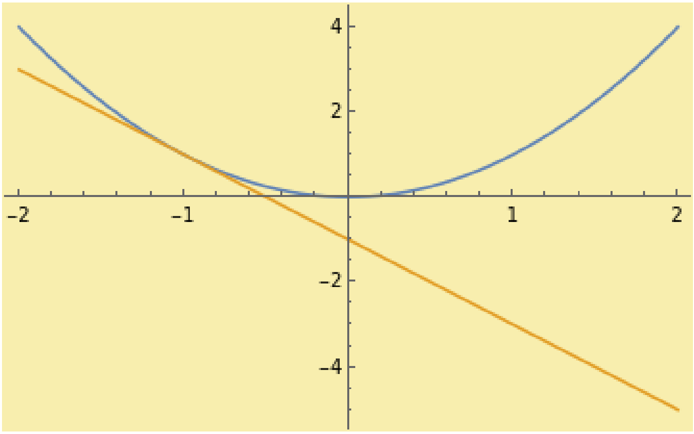
Probando el teorema. ■

Notemos que en el teorema de punto fijo Banach usamos la iteración de Picard para probar que la sucesión es punto fijo.

4.5.3. Aplicaciones

Método de Newton

Newton desarrolló un método en que consiste en determinar raices de una función. Digamos que la función de linea azul, tiene forma como la figura de abajo.



El método consiste tomar tangentes de la función azul y ver donde toca en el eje x, luego evaluar en f y así sucesivamente. Veremos que se genera una sucesión que converge a la raíz de f.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ diferenciable, sea $x_0 \in X$ cualquiera, si f es diferenciable, se puede generar una recta tangente que pasa por $f(x_0)$, sea x_1 la raíz de la tangente de $f(x_0)$, si la recta tangente de $f(x_0)$ está dado por

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y}$$

Entonces, se tiene

$$f'(x_0)(x_0 - x_1) - f(x_0) = 0$$

De aquí se despeja x_1 y luego

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$$

De forma análoga se genera x_2 como la raiz de la tangente de $f(x_1)$, de forma que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Recursivamente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Siempre y cuando $f'(x_n) \neq 0$. Podemos ir observando x_n va tendiendo a una raiz de $f(x)$. Definimos $g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ y formamos la sucesión $x_{n+1} = g(x_n)$.

Teorema 4.12. (Picard - Lindelof) *Sea*

$$R := \{(t, x) : |t - t_0| \leq a \ \ y \ \ |x - x_0| \leq b\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Sea $f : R \to \mathbb{R}^n$ una función continua sobre R, Lipschitz sobre el segundo argumento, es decir

$$|f(t,y) - f(t,x)| \leq L|x-y|$$

para todo $(t,x),(t,y) \in R$. Entonces el sistema de ecuación:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t,x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

tiene solución única en $x \in \mathcal{C}^1([t_0-\alpha, t_0+\alpha])$ con $\alpha < \text{mín}\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{L}\right\}$ donde $c = \|f\|_\infty$.

Dem.

Notemos que se satisface la ecuación si y sólo si

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds$$

Sea $J := [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, para $y \in C(J)$, sea

$$g(y)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds$$

Sea $X = \{y \in C(J) : y(t_0) = x_0 \text{ y } \|x_0 - y\|_\infty \leq \alpha \cdot c\} \subseteq C(J)$. Notemos que X es un espacio métrico completo, donde $g : X \to X$, sea $y \in X$, entonces

$$g(y)(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s,y(s))ds = x_0$$

Luego

$$\begin{aligned} (x_0 - g(y))(t) &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds\right| \\ &\leq |t-t_0| \cdot \|f\|_\infty \leq \alpha \cdot c \end{aligned}$$

Es decir, g es Lipschitz con constante menor a 1. Esto significa que si $x, y \in X$, entonces

$$\begin{aligned} |g(x)(t) - g(y)(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,y(s))ds)\right| \\ &\leq |t-t_0|L\|x-y\|_\infty \\ &\leq \alpha L \cdot \|x-y\|_\infty \end{aligned}$$

si $\alpha \cdot L =: K < 1$, entonces

$$\|g(x) - g(y)\|_\infty \leq K \cdot \|x-y\|_\infty$$

Por el punto fijo de Banach, exite un único $x \in X$ con $g(x) = x$ y esto es equivalente a decir que el sistema tiene una única solución. Probando el teorema. ■

Teorema 4.13. (Punto fijo de Brovwer) *Sea $\overline{B}$ la bola cerrada unitaria en $\mathbb{R}^n$ bajo la métrica usual. Sea $f : \overline{B} \to \overline{B}$ una función continua, entonces existe al menos un punto fijo.*

Notemos que el teorema de Brovwer es la generalización del teorema 4.10, si $n = 1$ entonces

$$\overline{B} = \overline{\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}} = [0, 1]$$

de forma que $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tiene al menos un punto fijo.

Lema 4.11. *No existe una función $f \in C^1(\overline{B}, S)$ talque $f(x) = x$ para todo $x \in S := \delta\overline{B}$.*

Dem. Supongamos que existe $f : \overline{B} \to S$ talque $f(x) = x$ para todo $x \in S$. Para $t \in [0, 1]$, consideramos $f_t(x) := (1-t)x + tf(x) = x + tg(x)$, donde $g(x) = f(x) - x$, entonces

$$f_t(x) = x$$

para todo $x \in S$ y $f_t \in C^1(\overline{B})$, y

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$$

donde $C > 0$ es una constante.

Sean $x_1, x_2 \in \overline{B}$ con $x_1 \neq x_2$ y $f_t(x_1) = f_t(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |t(g(x_1) - g(x_2))| \\ &= t|g(x_1) - g(x_2)| \\ &\leq C \cdot t|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

donde $Ct < 1$ si t es suficientemente pequeño.

Si $t < C^{-1}$, entonces $f_t : \overline{B} \to \overline{B}$ es inyectiva. Consideremos ahora

$$\begin{gathered} Df_t(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ Df_t(x) = I + tDg(x) \end{gathered}$$

donde I es la mátriz identidad, entonces

$$\det(Df_t(x)) > 0$$

si t es suficientemente pequeño, entonces $G_t = f_t(B)$ con el teorema de la función invera, G_t es abierto, demostremos que $G_t = B$, si no fuera verdadero, entonces $\partial G_t \cap B = \emptyset$, sea $y_0 \in \partial G_t \cap B$, entonces existe $\{x_l\}_l \subseteq B$ una sucesión talque

$$y_0 = \lim_{l \to \infty} f_t(x_l)$$

Por la compacidad existe una subsucesión $\{x_{l_k}\}$ talque $x_{l_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \in B$, entonces

$$f_t(x_0) = y_0 \notin G_t$$

Luego $x_0 \in \overline{B} \setminus B$, de forma que $f_t(x_0) = x_0$, y entonces $y_0 = x_0 \in S$, llegando a una contradicción, ya que $y \in \partial G_t \cap B$.

Hemos probado que $f_t : \overline{B} \to \overline{B}$ es biyección para t suficientemente pequeño, sea

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}$$

definida por:

$$\begin{aligned} F(t) &:= \int_{\overline{B}} \det(Df_t(x))dx \\ &= \int_{\overline{B}} \det(I + tg(x))dx \\ &= \text{Volumen}|\overline{B}|, \quad \text{para } t \text{ suficientemente pequeño.} \end{aligned}$$

Por lo que $F(t)$ es polinomio en t y $F|_{[0,t_0]}$ es constante y $F(1) =$Volumen$(\overline{B})$, entonces $f_1(x) = x$ para $x \in X$, entonces $|f_1(x)| = 1$. Para $v \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$2\langle Df_1(x)v, f_1(x)\rangle = \frac{d}{ds}1\bigg|_{s=0} 0$$

Entonces $im(Df_1(x)) \in f(x)^{\perp}$ (complemento ortogonal), entonces

$$\dim(im(Df_1(x))) \leq n - 1$$

esto significa que $Df_1(x)$ es no invertible, por lo que el determinante es 0, concluyendo que

$$F(1) = \int_{\overline{B}} \det Df_1(x)dx = 0$$

siendo una contradicción ya que $F(t)$ es el volumen de $\overline{B}$ para todo $t \in [0,1]$. De forma que no existe tal función continua. ■

Dem. (Teorema de Brovwer) Sea $f : \overline{B} \to \overline{B}$ una función continua. Por Weierstrass existe una función $p_l : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$ talque

$$\|f - p_l\|_\infty < \frac{1}{l}$$

con $p_l \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$, notemos que

$$\|p_l\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|p_l - f\| \leq 1 + \frac{1}{l}$$

Sea

$$h_l := \left(1 + \frac{1}{l}\right)^{-1} p_l$$

entonces

$$\|f - h_l\|_\infty = \left\| f - \left(1 + \frac{1}{l}\right) - 1p_l \right\|_\infty \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir

$$h_l \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} f$$

y entonces $h_l \in C^{-1}(\overline{B}, \overline{B})$. Supongamos que h_l no tiene puntos fijos, (no se como definir f_l), entonces se tiene una función $f_l : \overline{B} \to S$ donde $f_l \in C^1(\overline{B}, S)$, donde $f_l(x) = x$ con S el borde de $\overline{B}$, pero por el lema 4.11 es imposible, siendo una contradicción. Luego h_l tiene un punto fijo para todo l. Sea la sucesión $\{x_l\} \subseteq \overline{B}$, como $\overline{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado, entonces es compacto, por lo que existe una subsucesión convergente, sea $\{x_{l_k}\}$, donde

$$x_{l_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x \in \overline{B}$$

Luego por iteración de Picard

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} h_{l_k}(x_{l_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{l_k} = x$$

■

Corolario 4.4. *No existe una función $f \in C(\overline{B}, S)$ con $f(x) = x$ para todo $x \in S$.*

Dem. Supongamos que $f : \overline{B} \to S$ es una función continua talque $f(x) = x$ para todo $x \in S$. Sea $g(x) := -f(x)$ claramente $g \in C(\overline{B}, S)$. Si x es punto fijo de g entonces

$$x = g(x) = -f(x) = -x$$

siendo imposible. Luego g no puede tener punto fijo, siendo otra contradicción ya que por el punto fijo de Brovwer, g debe tener un punto fijo, por lo tanto tal función no existe. ■

5. Conjuntos Conexos, Arco-conexos, Convexos

5.1. Conjuntos Conexos

Definición 5.1. *Sea X un espacio métrico, sean $A, B \subseteq X$ subconjuntos. A, B se llaman separados si*

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \text{ y } A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Definicion 5.2. *Sea $E \subseteq X$, decimos que E es conexo si no es la unión de dos conjuntos no vacíos separados.*

Notemos que estudiar es más facil probar la no conexidad que la conexidad de un conjunto, ya que para probar no conexidad basta encontrar dos conjuntos que al unirlo sea el mismo y que sean separados.

Ejemplo 5.1. Sean A, B conjuntos cerrados, $A = \overline{A}, B = \overline{B}$, si $A \cap B = \emptyset$, entonces son conjuntos separados.

Ejemplo 5.2. Sea $A = (-1, 0), B = [0, 1)$ subconjuntos de $\mathbb{R}$, entonces

$$A \cap B = \emptyset$$

pero

$$\overline{A} \cap B = \{0\} =\neq \emptyset$$

por lo que A y B no son separados.

Teorema 5.1. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si dados $x, y \in E$, $z \in \mathbb{R}$ tales que $x < z < y$, entonces $z \in E$.*

Dem. Supongamos que E es conexo, digamos que existen $x, y \in E, z \in \mathbb{R}$ tales que $x < z < y <$ con $z \notin E$, sean los conjuntos

$$A := (-\infty, z) \cap E, \quad B := (z, \infty) \cap E$$

notemos que A, B son separados tales que $A \cup B = E$, es decir, E es la unión de dos conjuntos separados, de forma que es no conexo, siendo una contradicción. Luego todo $x, y \in E, z \in \mathbb{R}$ tales que $x < z < y$, entonces $z \in E$.

Supongamos que E es no conexo , entonces existen $A, B \neq \emptyset$ separados, es decir

$$\overline{A} \cap B = \emptyset, \;\; A \cap \overline{B} = \emptyset, \;\; E = A \cup B$$

Sin pérdida de generalidad, sean $x \in A, y \in B$ tales que $x < y$, sea z definida como el supremo de $A \cap [x, y]$

$$z := \sup(A \cap [x, y])$$

Entonces existe una sucesión $\{x_n\} \subseteq A \cap [x, y]$ talque $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, es decir, z es punto límite de A y luego

$$z \in \overline{A}$$

Entonces $z \notin B$, entonces $x \leq z < y$.

- Si $z \notin A$ se concluye que $x < z < y$ donde $z \notin E$
- Si $z \in A$, como $A \cap \overline{B} = \emptyset$ se tiene $z \notin B$, existe $\overline{z}$ con $z < \overline{z} < y$ talque $\overline{z} \notin B$ y entonces $\overline{z} \notin E$

■

Teorema 5.2. *Sean X, Y espacios métricos, $f : X \to Y$ una función continua. Si E es conexo, entonces $f(E)$ es conexo.*

Dem. Supongamos lo contrario, $f(E) = A \cup B$ con A, B no vacíos y separados, sea

$$G := E \cap f^{-1}(A), \;\; H := E \cap f^{-1}(B)$$

De forma que G, H son no vacíos y $E = G \cup H$, como f es continua, entonces $f^{-1}(\overline{A})$ es cerrado, luego

$$G \subseteq f^{-1}(A) \cap E \subseteq f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$$

Por la caracterización de la clausura, se tiene $\overline{G} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$, entonces

$$f(\overline{G}) \subseteq \overline{A}$$

Por otro lado $f(H) = B$, luego necesariament $\overline{G} \cap H = \emptyset$ si no se llega a una contradicción. Con el mismo argumento se concluye $G \cap \overline{H} = \emptyset$, de forma que G y H son separados y por lo tanto $E = G \cup H$ no es conexo. Llegando a una contradicción y por lo tanto $f(E)$ es conexo. ■

Corolario 5.1. *Teorema del Valor Intermedio (Cálculo I) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, es continua, entonces*

$$f([a, b]) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right]$$

Dem. Notemos que el conjunto $[a, b]$ es conexo, ya que para $x, y \in [a, b], z \in \mathbb{R}$ tales que $x < z < y$ se tiene que $z \in (x, y) \subseteq [x, y]$, luego $z \in [a, b]$. Por lo que por el teorema 5.2 $f([a, b])$ es conexo como f es continua, notar además que $[a, b]$ es compato y por lo tanto f alcanza su máximo y mínimo, por lo que

$$f([a, b]) \subseteq \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right]$$

Si $f([a, b]) = G$ conexo, entonces podemos tomar

$$\gamma = \min_{x\in[a,b]} f(x), \quad \tau = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

con $\gamma, \tau \in G$. Luego G al ser conexo, se tiene que para todo $y \in (\gamma, \tau)$ entonces $y \in G$, es decir, existe un $x \in [a, b]$ (que no mapea al máximo ni al mínimo) talque $f(x) = y$ y por lo tanto

$$f([a, b]) = \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)\right]$$

Probando el teorema del valor intermedio. ■

Definición 5.3. (Arco) *Sea $E \subseteq X$ con X un espacio métrico. Se define un arco por una función*

$$\gamma : [0, 1] \to E \subseteq X$$

continua.

Definición 5.4. *Sea $E \subseteq X$ con X un espacio métrico. Se dice que E es arco-centro si para todo $x, y \in E$ existe un arco γ talque $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.*

Ejemplo 5.3. Sea $E := \mathbb{Q}$, sean los conjuntos

$$\begin{aligned} A :&= \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \\ B :&= \{y \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Notemos que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ y $\mathbb{Q} = A \cup B$, por lo tanto $\mathbb{Q}$ separado y luego no es conexo en $X = \mathbb{Q}$.

Teorema 5.3. *Sea $E \subseteq X$, donde X es un espacio métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalente:*

(a) E no es conexo

(b) Existen $A, B \neq \emptyset$ relativamente abiertos en E, talque $A \cap B = \emptyset$ y $E = A \cup B$.

(c) Existen $A, B \neq \emptyset$ relativamente cerrados en E talque $A \cap B = \emptyset$ y $E = A \cup B$

Recordemos que en un espacio métrico X, un conjunto A es relativamente abierto en $Y \subseteq X$, si para todo $a \in A$ existe un $r > 0$ talque

$$B(a, r) \cap Y \subseteq A$$

Ahora, B es relativamente cerrado sobre $Y \subseteq X$ si $Y \setminus B$ es relativamente abierto. O que existe un conjunto abierto $G \subseteq X$ talque $A = Y \cap G$

Dem. Sea $E \subseteq X$ un conjunto no vacío. Entonces

- (a) $\to$ (b). Si E es no conexo, existen A, B no vacíos separados tales que

  $$A \cup B = E$$

  Si $A \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces $A = E \setminus \overline{B}$, ya que

  $$a \in A \Leftrightarrow a \in E \text{ y } a \notin \overline{B} \Leftrightarrow a \in E \setminus \overline{B}$$

Por lo que A es la intersección de E con un conjunto abieto $\overline{B}^c$ (al ser complento), es decir, A es relatívamente abierto sobre E, ahora, la condición $\overline{A} \cap B$ implica que $B = E \setminus \overline{A}$, concluyendo lo mismo con respecto a B. Veamos que A, B son disjuntos, pero es por redefinción de A, B, es decir

$$A \cap B = E \cap \overline{A}^c \cap E\overline{B}^c = E \cap (A \cup B)^c = E \cap E^c = \emptyset$$

- (b) $\to$ (c). Si $E = A \cup B$ donde A, B son relatívamente abiertos sobre E y disjuntos, podemos decir que $A = E \setminus B = E \cap B^c$, si B es relativamente abierto, entonces $A = E \setminus B$ es relativamente cerrado, lo mismo se concluye con B. Encontrado dos conjuntos relativamente cerrados que satisface $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = E$.
- (c) $\to$ (a). Si A, B son relatívamente cerrados sobre E tales que $A \cap B = \emptyset, A \cup B = E$, entonces

$$A \cap B = \emptyset$$
$$A \cup B = E$$

Luego se concluye que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, de forma que E es no conexo.

Probando el teorema. ■

Teorema 5.4. *Sea $E \subseteq X$ conexo. Si $E \subseteq F \subseteq \overline{E}$, entonces F es conexo.*

Dem. Supongamos que F es no conexo, entonces existen $A, B \neq \emptyset$ tales que $A \cap B = \emptyset$ y A, B relativamente abiertos en F con $F = A \cup B$. Notemos que F es denso en E, entonces $E \cap A, E \cap B \neq \emptyset$ y

$$(E \cap A) \cap (E \cap B) = E \cap \emptyset = \emptyset$$
$$(E \cap A) \cup (E \cap B) = E \cup (A \cap B) = E$$

Falta probar que $E \cap A, E \cap B$ son relatívamente abiertos en E, pero esto es solo aplicar la inclusión $E \subseteq F$, ya que para $x \in E \cap A \subseteq A$, existe un $r > 0$ talque

$$B(x, r) \cap F \subseteq A$$

luego

$$B(x, r) \cap E \subseteq B(x, r) \cap F \subseteq A$$

Probando así que E es no conexo, siendo una contradicción y por tanto F si es conexo. ■

Teorema 5.5. *Sea $\{E_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de conjuntos conexos tales que*

$$\bigcap_{\alpha \in J} E_\alpha \neq \emptyset$$

Entonces el conjunto

$$E := \bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha$$

es conexo.

Dem. Supongamos que E no es conexo, entonces existen $A, B \neq \emptyset$ relativamente abiertos en E tales que $A \cap B = \emptyset$ y que $E = A \cup B$. Notemos que A, B tiene elementos que están solamente en A o solamente en B, esto implica que para algún $\alpha \in J$ se tiene

$$E_\alpha \cap A, E_\alpha \cap B \neq \emptyset$$

Ahora, veamos que son relatívamente abiertos sobre E_α, sea $x \in E_\alpha \cap A \subseteq A$, entonces existe un $r > 0$ talque

$$B(x, r) \cap E \subseteq A$$

Luego

$$B(x, r) \cap E_\alpha \subseteq E_\alpha \cap A$$

de forma que es relatívamente abierto. Lo mismo con el otro conjunto, además

$$E_\alpha = (E_\alpha \cap A) \cup (E_\alpha \cap B)$$

y

$$\emptyset = (E_\alpha \cap A) \cap (E_\alpha \cap B)$$

Por lo tanto E_α no es conexo, siendo una clara contradicción. Por tanto E es conexo. ■

Corolario 5.2. *Sea $\{E_j : j = 1, \ldots, n\}$ una familia de conjuntos conexos tales que $E_j \cap E_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j = 1, \ldots, n-1$. Entonces*

$$E := \bigcup_{j=1}^{n} E_j$$

es conexo.

Esto no se cumple para el caso infinito.

Ejemplo 5.4. Sean $E_1 = (-1, 0], E_2 = [0, 1], E_3 = (-1/2, 2)$ veamos si son conexos. Notemos que para todo $x, y \in E_1$ si tomamos $z \in \mathbb{R}$ talque $x < z < y$ entonces $z \in (x, y) \subseteq E_1$ de forma que E_1 es conexo, lo mismo para el resto, además

$$E_1 \cap E_2 = \{0\}, \quad E_2 \cap E_3 = [0, 1], \quad E_1 \cap E_3 = (-1/2, 0]$$

Luego

$$E = (-1, 0] \cup [0, 1] \cup (1/2, 2) = (-1, 2)$$

es conexo. Notemos además que puede pasar que la condición $E_j \cap E_{j+1} = \emptyset$ y la unión seguir siendo conexa, como en el ejemplor anterior basta tomar $E_3 = (1/2, 2)$ en vez de $(-1/2, 2)$ y la unión es un conjunto conexo. Aun así no es una condición suficiente.

5.2. Conjuntos Arco-Conexos

Definición 5.5. *Sea $E \subseteq X$ con X un espacio métrico. Se dice que E es arco-conexo si para todo $x, y \in E$ existe un arco $\gamma : [0,1] \to E$ talque $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.*

Ejemplo 5.5. Todos los intervalos de $\mathbb{R}$ son arco-conexos. Si $X \subseteq \mathbb{R}$, entonces sin pérdida de generalidad, se puede considerar el intervalo (a, b), luego se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\to (a,b) \\ t &\mapsto (1-t)x + ty \end{aligned}$$

con $x < y$, que es claramente continua y que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, veamos si está bien definida, notemos que

$$\gamma(t) = x + t(y - x)$$

donde $y - x > 0$, entonces para $t \in [0,1]$ fijo se tiene que

$$t(y-x) \in [0, y-x] \Leftrightarrow \gamma(t) \in [x, y] \subseteq (a, b)$$

Siendo bien definida. Notar que da lo mismo si $x < y$ o $y < x$, lo único que importa es que alcanze estos puntos y que el arco esté bien definido.

Ejemplo 5.6. Toda bola de centro 0 de un espacio normado es arco-conexo. Sea X un espacio normado, luego la bola de centro cero y radio r, se define por:

$$B(0, r) := \{x \in X : \|x\| < r\}$$

Sean $x, y \in B(0, r)$, y consideremos la función $\gamma(t) := (1-t)x + ty$ donde $t \in [0,1]$. Claramente γ es continua y $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, nos falta ver si $\gamma([0,1]) \subseteq B(0, r)$. Sea $t \in [0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\| &= \|(1-t)x + ty\| \\ &\leq |1-t|\|x\| + |t|\|y\| = (1-t)\|x\| + t\|y\| \\ &< (1-t)r + tr = r \end{aligned}$$

Luego la bola $B(0, r)$ es arco-conexo.

Ejemplo 5.7. En espacios métricos, las bolas no necesariamente son arco-conexas. En $\mathbb{R}^2$ si se toma $E = \partial[0,1]^2 \setminus \{0, 0\}$ (La frontera de un cuadrado) entonces

$$(E, d|_{E \times E})$$

es espacio métrico. Luego la bola

$$B((0, \delta), \varepsilon) = \{x \in E : |x - (0, \delta)| < \varepsilon\}$$

para ε suficientemente pequeño ocurre lo siguiente **Insertar figura**

Se aprecia que existen dos puntos en la bola que no se le puede asociar a un arco continuo. Luego no es arco-conexo.

Ejemplo 5.8. Sea $A := \{(x, y) : y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto $\overline{A}$ es conexo pero no arco-conexo. Notemos que

$$A = f((0, 1])$$

con f continua y $(0, 1]$ conexo, entonces A es conexo y luego $\overline{A}$ es conexo. Podemos ver que además

$$\overline{A} = A \cup B$$

donde $B = \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$, el problema es que no existe ningún arco de A a B o viceversa. Por lo que no es arco-conexo.

Teorema 5.6. *Sea $E \subseteq X$ con X un espacio métrico. Si E es arco-conexo, entonces E es conexo.*

Dem. Sea $x \in E$ fijo, para todo $y \in E$ podemos considerar el arco $\gamma_y : [0, 1] \to E$ talque $\gamma_y(0) = x, \gamma(1) = y$. Sean los conjuntos

$$E_y := \gamma_y([0, 1])$$

que es conexa ya que $[0, 1]$ lo es y γ_y es continua. Además

$$\bigcap_{y \in E} E_y \supseteq \{x\} \neq \emptyset$$

Luego por el teorema 5.5, el conjunto

$$E = \bigcup_{y \in E} E_y$$

es conexo. ■

Este teorema es muy útil. ya que tenemos otra forma de probar conexidad, solo hay que probar que es arco-conexo, por ejemplo, sea $(a, b) \in \mathbb{R}$, sabemos que es conexo por la caracterización de conexidad. Pero vimos que es arco-conexo, basta pensar en

$$\gamma_{x,y}(t) = (1 - t)x + ty$$

de forma que es conexa.

Teorema 5.7. *Sean X, Y espacios métricos. Si $E \subseteq X$ es arco-conexo y $f : E \to Y$ una función continua. Entonces $f(E)$ es arco-conexo.*

Dem. Sean $y_1, y_2 \in f(E)$, existen $x_1, x_2 \in E$ con $f(x_1) = y_j$, como E es arco-conexo, se tiene que existe un arco γ talque $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Definimos

$$g := f \circ \gamma$$

de forma que $g : [0, 1] \to f(E)$ es una función continua, donde $g(0) = y_1, g(1) = y_2$. Encontrando el arco. Probando el teorema. ■

Este teorema entrega otra forma de determinar cosas arco-conexas, si queremos ver que G es arco-conexo, debemos encontrar una función continua $f : E \to G$ donde E es arco-conexo.

Teorema 5.8. *Sea $\{E_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de arco-conexos. Donde*

$$\bigcap_{\alpha \in J} E_\alpha \neq \emptyset$$

Entonces $E = \bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha$ es arco-conexo.

Dem. Sean $x, y \in E$, sea $z \in \bigcap_{\alpha \in J} E_\alpha$, existen α_x, α_y talque $x \in E_{\alpha_x}, y \in E_{\alpha_y}$ y existen γ_x, γ_y que conectan x con z y y con z. Digamos que $\gamma_x(0) = x_1, \gamma_x(1) = z, \gamma_y(0) = z, \gamma_y(1) = y$, y consideremos

$$f(t) := \begin{cases} \gamma_x(2t), & t \in [0, 1/2] \\ \gamma_y(2t-1), & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Claramente f es una función continua ya que lo es en parte y lo es en $t = 1/2$. Donde $f(0) = x, f(1) = y$, y por lo tanto $f([0,1]) \subseteq E$ siendo un arco. Probando que E es arco-conexo. ■

Notemos la analogía de teoremas de conexidad con arco-conexo.

Teorema 5.9. *Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo, entonces E es arco-conexo.*

Dem. Notemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio normado con norma/métrica

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Sea $z \in E$ fijo, consideremos

$$F = \{y \in E : \text{existe arco entre } y \text{ y } z\}$$

Probaremos que $F = E$. Sea $G := E \setminus F$, entonces $E = G \cup F$.

- **F es relatívamente abierto sobre E.** Sea $x \in F$, existe $\varepsilon > 0$ talque $B(x, \varepsilon) \subseteq E$, como es una bola en un espacio normado es arco-conexo, entonces para cada $y \in B(x, \varepsilon)$ existe un arco que conecta y con x, entonces existe un arco que conecta y con z. Por lo que la bola $B(x, \varepsilon) \subseteq F$, por lo tanto F es abierto y relativamente abierto a E.
- **G es relatívamente abierto sobre E.** Sea $x \in G$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ talque $B(x, \varepsilon) \subseteq E$. Sea $y \in B(x, \varepsilon)$, si $y \notin G$, entonces $y \in F$, luego existe un arco que conecta x con z, y luego $x \in F$, siendo una contradicción. Por lo tanto $y \in G$ y entonces $B(x, \varepsilon) \subseteq G$, probando que G es abierto y por tanto, relatívamente abierto en E
- **$F \neq \emptyset$.** Notemos que F no es vacío ya que existe el arco constante continuo $\gamma(t) = z$. Luego $z \in F$.

Hemos probado que $E = G \cup F$, con G, F relatívamente abiertos sobre E, además de que $G \cap F = \emptyset$. Por tanto o E no es conexo o F, G uno de ellos es vacío. Si E es conexo y F es no vacío, la única opción es que $G = \emptyset$, por lo tanto

$$E = F$$

Probando que E es arco-conexo, ya que si todo elemento se conecta con z, entonces se conecta con cualqueira. ■

De esta forma caracterizamos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ bajo la norma/métrica usual. Es decir

Un conjunto abierto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es arco-conexo si y sólo es conexo

5.3. Conjuntos Convexos

Definición 5.6. *Sea X un espacio métrico, sea $E \subseteq X$, decimos que es convexo si para todo $x, y \in X$ tenemos que*

$$(1-t)x + ty \in E$$

para todo $t \in (0,1)$.

Dicho de otra forma, un conjunto es convexo si una recta cabe dentro del conjunto. Además es importante considerar que X está bien definido bajo la suma y el producto para comprobar esto.

Ejemplo 5.9. Como conjunto convexo están $\mathbb{R}^2$ un poligono donde todos sus ángulos internos son menor a 180, y el conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Un caso que no sería convexo es **Insertar figura**

Proposición 5.1 *Si X es espacio métrico y E es convexo, entonces E es arco-conexo.*

Dem. Si X está bien definido bajo la suma y el producto, entonces para $x, y \in E$ se considerar el arco

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\to E \\ t &\mapsto (1-t)x + ty \end{aligned}$$

que sabemos que está bien definido, dado que E es convexo, es continua y que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Por lo tanto E es arco-conexo. ■

Ejemplo 5.10. Todo los espacios vectoriales son convexos. En efecto, si $x, y \in E$ y X es una $\mathbb{K}$-e.v, entonces

$$(1-t)x + y \in E$$

para todo $t \in [0,1]$.

Definición 5.7. *Una función*

$$\gamma : [0,1] \to E$$

continua talque $\gamma(0) = \gamma(1)$ *se le llama lazo.*

Dicho de otra forma, un lazo es un arco " cerrado "que termina por donde partió.

Definición 5.8. (Simplemento-Conexo) *Sea* $E \subseteq X$ *con* X *espacio métrico. Decimos que* E *es simplemente conexo si es arco-conexo y para cada lazo existe una función*

$$H : [0,1]^2 \to E$$

continua talque

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma(t) \\ H(t,1) &= \gamma(1) \end{aligned}$$

Una forma más intuitiva de simplemente conexo, es que dado un lazo, podemos acercarlo a un punto sin que este se rompa. Por lo que si tenemos una circuferencia con un hueco, no es simplemente conexo.

Teorema 5.10. *Todo conjunto convexo* E *en* $\mathbb{R}^n$*, es simplemente conexo.*

Dem. Sea γ un lazo cualquiera, si E es convexo, entonces es arco-conexo. Para γ sea la función

$$H : [0,1]^2 \to E$$

talque $H(t,s) := (1-s)\gamma(t) + s\gamma(1)$ que está bien definida ya que para todo t $\gamma(t) \in E$ y por convexidad de E

$$(1-s)\gamma\gamma(t) + s\gamma(1) \in E$$

para todo $s \in [0,1]$. Notemos que H es continua al ser producto y suma de funciones continuas. Por lo tanto E es simplemente-conexo.

Ejemplo 5.11. Si $r_1 < r_2$, si se considera $E = B(o, r_2) \setminus B(0, r_1)$, se puede ver que en $\mathbb{R}^2$ no es simplemente convexo **Agregar ejemplos.**

5.4. Teorema de Categorías de Baire

Teorema 5.11. *Sea* X *un espacio métrico completo, y sea* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de conjuntos abiertos y densos en* X*. Entonces*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

es denso.

Dem. Sea $E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, debemos probar que para todo $x_0 \in X$, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $x \in E$ talque

$$d(x, x_0) < \varepsilon$$

o dicho de otra forma

$$B(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$$

Sea $x_0 \in X$ y sea $\varepsilon > 0$, como E_1 es denso, se tiene que

$$E_1 \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$$

Si $E_1, B(x_0, \varepsilon)$ son conjuntos abiertos, entonces la intersección es abierto. Por lo que podemos tomar $x_1 \in E_1$ y $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, de forma que

$$\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subseteq E_1 \cap B(x_0, \varepsilon)$$

Ahora como E_2 es denso, se tiene que

$$E_2 \cap B(x_1, \varepsilon_1) \neq \emptyset$$

que también es abierto, luego existe $x_2 \in E_2$ con $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$ talque

$$\overline{B(x_2, \varepsilon_2)} \subseteq E_2 \cap B(x_1, \varepsilon) \subseteq E_1 \cap E_2 \cap B(x_0, \varepsilon)$$

De forma que se generan dos sucesiones.

- $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ donde

$$\varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} < 2^{-n}\varepsilon$$

- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, talque

$$\overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subseteq E_n \cap B(x_{n-1}, \varepsilon) \subseteq \cdots \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} E_i \cap B(x_0, \varepsilon)$$

Si $x_n \in \overline{B(x_n, \varepsilon_n)} \subseteq B(x_N, \varepsilon_N) \subseteq B(x_N, 2^{-n}\varepsilon)$ para todo $n \geq N$. Probemos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Sea $\delta > 0$ y sea N suficientemente grande, talque

$$2^{-N}\varepsilon < \frac{\delta}{2}$$

Para $n, m \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) \\ &< 2^{-N}\varepsilon + 2^{-N}\varepsilon < \delta \end{aligned}$$

Luego es Cauchy en X completo, de forma que

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$$

Es más, $x \in \overline{B(x_n, \varepsilon_n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por construcción

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \cap B(x_0, \varepsilon)$$

Por lo tanto $E \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$, probado así que E es denso en X. ■

Definición 5.8. *Sea X un espacio métrico, un subconjunto $E \subseteq X$ se dice denso en ninguna parte si*

$$(\overline{E})^o = \emptyset$$

Definición 5.9. *Sea X un espacio métrico. Un subconjunto $E \subseteq X$ se llama magro si existe $\{E_n\}$ una familia de conjuntos denso en ninguna parte talque*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

En este caso decimos que es un conjunto de primera categoría.

Si $E \subseteq X$ es denso en ninguna parte, entonces es magro/primera categoría por definición.

Definición 5.10. *Si E no es margo, se llama conjunto de segunda categoría.*

Es decir, si no es la unión de de conjuntos densos en ninguna parte, es de segunda categoría.

Ejemplo 5.11. La completitud es importante, si $X = \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. Sea $E_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$, que es un conjunto abierto y denso, pero

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_n = \emptyset$$

Y todo porque $\mathbb{Q}$ no es completo.

Ejemplo 5.12. (Conjunto de Cantor) Consideremos la siguiente iteración

$$[0,1] \longrightarrow \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Sea $I_1 := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, de aquí podemos definir la familia $\{I_n\}$ y generar el conjunto de Canto, dado por:

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

Donde C es cerrado al ser complemento de algo abierto. Y además $C^o = \emptyset$. Es decir, es denso en ninguna parte ya que

$$\emptyset = (C)^o = (\overline{C})^o$$

por lo que también es magro.

Corolario 5.2. *Si $X \neq \emptyset$ es un espacio métrico completo, entonces X no es magro.*

Dem. Supongamos que X es magro, por lo que existe una colección de densos en ninguna parte, diagmos que $\{E_n\}$, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Si $(\overline{E_n})^o = \emptyset$, entonces $((\overline{E_n})^o)^c = X$, luego

$$X = X \setminus (\overline{E_n})^o \supseteq X \setminus \overline{E_n}$$

Notemos que $X \setminus \overline{E_n}$ es denso y abierto, luego por el teorema de Baire

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X \setminus \overline{E_n}$$

es denso en X, tomando el complemento

$$\emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{E_n})^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = X$$

Es decir $X = \emptyset$, siendo una contradicción. Por lo tanto X no puede ser magro. ■

Por lo tanto, todo espacio métrico completo es de segunda categoría.

Corolario 5.3. *Si X es espacio métrico completo y $\{E_n\}$ es una familia de cerrados que cubren a X, es decir*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ talque $E_N^o \neq \emptyset$

Dem.

Teorema 5.12. *El conjunto de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ que no son diferenciables en ningún punto, es denso en $C[0,1]$.*

Dem. Terminar

5.5. Otras Consecuencias de Baire

Proposición 5.2. *Sea P el espacio de polinomios. No existe una norma talque $(P, \|\cdot\|)$ sea un espacio Bannach.*

Dem. Notemos que

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$$

donde P_n son los polinomios de grado n. Supongamos que $(P, \|\cdot\|)$ es un espacio de Bannach, es decir, es completo y luego es de segunda categória. Notemos que P_n es cerrado por ser de dimensión finita, estudiemos P_n^o. Supongamos que $P_n^o \neq \emptyset$, sea $p \in P_n^o$, luego

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

Sea $\varepsilon > 0$, consideremos

$$q(z) := p(z) + \frac{\varepsilon}{2} C z^{n+1}$$

con $C = \frac{1}{\|z \to z^{n+1}\|}$ ($\to$ función anónima),entonces

$$\|p - q\| = \|\frac{\varepsilon}{2} C(z \to z^{n+1})\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Luego

$$q \in B(p, \varepsilon)$$

y si $q \notin P_n$, entonces $B(p, \varepsilon) \not\subseteq P_n$, y eso implica que $P_n^o = \emptyset$. Por lo tanto P es la unión de una colección de conjuntos densos en ninguna parte. Es decir, P es magro, siendo imposible. Por lo tanto, el espacio $(P, \|\cdot\|)$ no puede ser Bannach. ■

Proposición 5.3. *Toda base de un espacio de Bannach de dimensión infinita, no es numerable.*

Dem. Supongamos que $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base numerable, sea $E_n := gen\{l_1, \dots, l_n\}$, notemos que E_n es cerrado al ser de dimensión finita, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

entonces existe un N talque $E_n^0 \neq \emptyset$, llegando una contradicción, X no es magro. ■

6. Espacios Normados.

Recordemos la definición de una norma. Sea X espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Se define al función norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, talque se satisface

1. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in X$.

Definición 6.1. *Sean $(X, N), (X, N')$ espacios normados. Decimos que N, N' son normas equivalentes si existen $k, k' > 0$ tales que*

$$kN(x) \leq N'(x) \leq k'N(x)$$

para todo $x \in X$.

Teorema 6.1. *Sea X un espacio normado. Decimos que las normas N, N' son equivalentes si y sólo si una sucesión $\{x_n\} \subseteq X$ converge con respecto a N si y sólo si converge con respecto a N'.*

Dem. Supongamos que N, N' son normas equivalentes, sean k, k' tales que

$$kN(x) \leq N'(x) \leq k'N(x)$$

si $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$ con respecto a N, entonces

$$kN(x - x_n) \leq N'(x - x_n) \leq k'N(x - x_n)$$

si $n \to \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} N'(x - x_n) = 0$$

luego x_n converge a x con respecto a N'. Para probar de N' a N, se sigue la misma idea.

Supongamos que $\{x_n\} \subseteq X$ converge a $x \in X$ con respecto a N si y sólo si converge con respecto N'. Supongamos que N, N' no son equivalente, entonces para todo n, entonces existe $x_n \in X$ talque

$$N'(x_n) > nN(x_n)$$

Al no ser equivalente. Consideremos la sucesión $y_n := \frac{x_n}{N'(x_n)} \in X$, entonces $N'(y_n) = 1$ y

$$N(y_n) = \frac{N(x_n)}{N'(x_n)} < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

entonces $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ con repsecto a N, pero $y_n \not\to 0$ con respecto a N', siendo una contradicción. Por lo tanto N, N son normas equivalentes. ■

Observación 6.1. La convergencia es a un mismo límite.

Observación 6.2. En el espacio de dimensión finita, todas las normas son equivalentes.

6.1. Espacios l^p

Recordemos que el espacio l^p se define por:

$$l^p := \left\{ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p < \infty \right\}$$

bajo la norma

$$\|\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \right)^{1/p}$$

También recordemos el espacio infinito por:

$$l^\infty := \left\{ \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n| < \infty \right\}$$

con norma

$$\|\{t_n\}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n|$$

que es un espacio Bannach. En nuestro caso los definimos sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Donde ambos son completos.

Teorema 6.2. (Desigualdad de Hölder) *Sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1/p + 1/q = 1$, si $x \in l^p, y \in l^q$, entonces*

$$x \star y \in l^1$$

Y

$$\|x \star y\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

donde $\star$ es la multiplicación por componentes.

Dem. Sean $x = \{t_n\}_n, y = \{s_n\}_n$, entonces

$$x \star y = \{t_n s_n\}_n$$

y

$$\|x \star y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n s_n|$$

Caso $p = \infty, q = 1$. Aquí se toma $1/p = 0$. Entonces

$$\|x \star y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n s_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |s_n| \right) \cdot \|x\|_\infty = \|y\|_1 \cdot \|x\|_\infty$$

Caso $1 < p < \infty$**.** Supongamos que $x \neq 0, y \neq 0$. Sean $A = \|x\|_p^p, B = \|y\|_q^q$, y $r := 1/p, 1-r = 1/q$, $\alpha := \frac{|t_n|^p}{A}, \beta := \frac{|s_n|^s}{B}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n s_n|}{A^{1/p}B^{1/q}} \leq \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n|^p}{A} + \frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n|^q}{B} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Por lo tanto

$$\|x \star y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n s_n| \leq A^{1/p}B^{1/q} = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

Probando el teorema. ■

Nota 6.1. De $\alpha, \beta \geq 0$ de la demostración, y $0 < r < 1$, se tiene que

$$\log(\alpha^r \beta^{1-r}) = r\log(\alpha) + (1-r)\log(\beta) \leq \log(r\alpha + (1-r)\beta)$$

Por lo que

$$\alpha^r \beta^{1-r} \leq r\alpha + (1-r)\beta$$

Teorema 6.3. *El conjunto* $(l^p, \|\cdot\|_p)$ *es espacio Bannach. Con* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Dem. Ya hemos probar que el conjunto l^∞ es Bannach. Sea p no infito, debemos probar que l^p es un espacio vectoria, con $\|\cdot\|_p$ norma y completo.

- **Espacio vectorial.** Es grupo bajo la suma y cumple los axiomas de espacio vectorial.
- $\|\cdot\|_p$ **norma.** Probemos los 3 axiomas de norma

  1. Si $x = 0$, entonces $\|x\|_p = 0$. Si $\|x\|_p = 0$ con $x = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces

  $$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p = 0$$

  Luego $|t_n| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $x = (t_1, t_2, \dots) = 0$.

  2. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

  $$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|\right)^{1/p} = |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty}\right) = |\alpha| \cdot \|x\|_p$$

  3. Debemos probar que si $x = \{t_n\}, y = \{s_n\}$, entonces

  $$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

  Sea

  $$z := \left\{|t_n + s_n|^{p-1}\right\}_n \in l^p$$

Sea q talque

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Entonces $q(p-1) = p$, y

$$\begin{aligned}
\|z\|_q^q &= \sum_{n=1}^{\infty} |t_n + s_n|^{(p-1)q} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |t_n + s_n|^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^p \max\{|t_n|^p, |s_n|^p\} \\
&\leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty} (|t_n|^p + |s_n|^p) \\
&= 2^p (\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |t_n + s_n| \cdot |t_n + s_n|^{p-1} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n||t_n + s_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |s_n||t_n + s_n|^{p-1} \\
&= \|x \star y\|_1 + \|y \star z\|_1 \leq \|x\|_p \cdot \|z\|_q + \|y\|_p \cdot \|z\|_q \\
&= \|x\|_p \|x+y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \cdot \|x+y\|_p^{p-1} \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

Si $x + y \neq 0$, entonces se concluye que

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Por lo tanto $\|\cdot\|_p$ es una norma.

- **Completo.** Sea $\{x_n\} \subseteq l^p$ una sucesión de Cauchy. Para cada n, sea

$$x_n = \{t_k^{(n)}\}_k$$

Sea k fijo, entonces

$$|t_k^{(n)} - t_k^{(m)}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |t_k^{(n)} - t_k^{(m)}| \right)^{1/p} = \|x_n - x_m\|_p$$

Entonces la sucesión $\{t_k^{(n)}\}_n \subseteq \mathbb{K}$ es Cauchy (real y complejo son completos), es Cauchy y luego converge. Sea

$$t_k^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t_k$$

Sea $x = \{t_k\}_k$, probemos que

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in l^p$$

Sea $\varepsilon > 0$, sea N talque

$$\left(\sum_{k=1}^{K} |t_k^{(n)} - t_k^{(m)}|^p\right)^{1/p} \leq \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$$

para $n, m \geq N$. Si $m \to \infty$, entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{K} |t_k^{(n)} - t_k|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Si se toma $K \to \infty$, entonces

$$\|x_n - x\|_p \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Probando que x_n converge a x. Para concluir notemos que

$$\|x\|_p \leq \|x_n - x\|_p + \|x_n\|$$

Entonces

$$\|x\|_p < \infty$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ es Cauchy en l^p.

Probando el teorema. ■

Ejemplo 6.1. Sean los conjuntos

$$c := \left\{\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} t_n < \infty\right\}$$
$$c_0 := \left\{\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} t_n = 0\right\}$$

Se puede probar que $(c, \|\cdot\|_\infty), (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios Bannach. Para ello solo debemos probar que c, c_0 son cerrados.

- c **cerrado.** Sea $\{x_n\} \subseteq c$ una sucesión que converge a $t \in l^p$, entonces hay que probar que $t = (t_1, t_2, \dots)$ converge cuando $n \to \infty$. Para ello probaremos que la sucesión $\{t_k\}_k \subseteq \mathbb{K}$ es Cauchy. Notemos que

$$|t_k - t_s| \leq |t_k - t_k^{(n)}| + |t_k^{(n)} - t_k^{(m)}| + |t_k^{(m)} - t_s^{(m)}| + |t_s^{(m)} - t_s|$$

Notemos que para n, m suficientemente grande, $|t_k - t_k^{(n)}| \leq \|x_n - t\|_\infty < \varepsilon/4$, lo mismo con $|t_s^{(m)} - t_s|$, y $|t_k^{(n)} - t_k^{(m)}| < \varepsilon/4$ como $\{x_n\}$ es Cauchy y para k, s suficientemente grande, $|t_k^{(m)} - t_s^{(m)}| < \varepsilon/4$ ya que $t_k^{(m)}$ converge por definición y luego es Cauchy. Por lo tanto

$$|t_k - t_s| < \varepsilon$$

para todo k, s suficientemente grande. Esto prueba que $\{t_k\}$ es Cauchy y por tanto $t \in c$. De forma que $(c, \|\cdot\|_\infty)$ es espacio Bannach.

- c_0 **cerrado.** Sea $\{x_n\} \subseteq c_0$ una sucesión que converge a $t = \{t_k\}_k$. Probemos que t tiene límite nulo cuando $k \to \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, sean N, K suficientemente grande tales que

$$|t_K^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|x_N - t\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |t_k - t_k^{(N)}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego para $k \geq K$

$$\begin{aligned} |t_k| &\leq |t_k - t_k^{(N)}| + |t_k^{(N)}| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{k\to\infty} t_k = 0$$

y luego $t \in c_0$. Siendo $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ espacio Bannach.

Ejemplo 6.2. Sea el espacio $(d, \|\cdot\|_\infty)$ donde

$$d := \{\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^p : \exists K \in \mathbb{N}, \forall n \geq K, t_n \geq 0\}$$

Este espacio no es Bannach, ya que d no es cerrado, sea

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right), \quad x = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Entonces

$$\|x_n - x\|_\infty = \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pero $x \notin d$.

Recordatorio. l^p es separable si $1 \leq p < \infty$ y l^∞ no es separable. También que $d(x, U) = \inf_{y\in U} \|x - y\|$ si y sólo si $x \in \overline{U}$.

Lema 6.1. (Lema de Riesz) *Sea X un espacio normado, sea $U \subseteq X$ un espacio cerrado. Para todo $0 < \alpha < 1$ existe $x_\alpha \in X$ con $\|x_\alpha\| = 1$ y $d(x_\alpha, U) \geq \alpha$.*

Dem. Sea $x \in X \setminus U$, y $d := d(x, U) > 0$, ya que $x \notin \overline{U} = U$. Entonces existe un $u_\alpha \in U$ con

$$d \leq \|x - u_\alpha\| \leq \frac{d}{\alpha}$$

Definimos $x_\alpha = \frac{x-\mu_\alpha}{\|x-u_\alpha\|}$, entonces por construcción $\|x_\alpha\| = 1$. Sea $u \in U$, entonces

$$\|x_\alpha - u\| = \left\| \frac{x - u_\alpha}{\|x - u_\alpha\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x - u_\alpha\|} \|x - u_\alpha - u\|x - u_\alpha\|\|$$

Notemos que $u_\alpha + u\|x - u_\alpha\| \in U$, por lo que

$$\|x_\alpha - u\| \geq \frac{d}{\|x - u_\alpha\|} \geq \alpha$$

Entonces

$$d(x_\alpha, U) \geq \alpha$$

■

Teorema 6.4. *Sea X un espacio normado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\dim X < \infty$

(b) $B[0, 1]$ *es un conjunto compacto.*

(c) Cada sucesión acotada, tiene una subsucesión convergente.

Dem. Probar acaso a¡-¿b, a-¿c.

Supongamos que toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. Supongamos que $\dim X = \infty$. Sea $x_1 \in X$ no nulo, y sea

$$U_1 := gen\ \{x_1\}$$

Notemos que $\dim U_1 < \infty$, por lo que $U_1 \neq X$, por el lema de Riesz, con $\alpha = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in X \setminus U_1$ donde

$$\|x_2\| = 1, \quad d(x_2, U_1) \geq \frac{1}{2}$$

En particular $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Sea

$$U_2 = gen\ \{x_1, x_2\}$$

donde U_2 es cerrado, si $\dim U_2 < \infty$, entonces $U_2 \neq X$, luego por el lema de Riesz existe un $x_3 \in X \setminus U_2$ talque

$$\|x_3\| = 1, \quad \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \quad \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$$

Asi de forma recursiamente se genera la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotado, por construcción

$$\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$$

para $n \neq m$, por lo tanto $\{x_n\}$ no es Cauchy y luego ninguna subsucesión converge, siendo una contradicción. ■

Este teorema caracteriza la dimensión de un espacio normado. Si la bola $B[0,1]$ es compato, entonces es finita y los más útil, toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente. Un ejemplo claro son los reales, que es un espacio normado de dimension 1, por lo que la bola $B[0,1] = [0,1]$ es un conjunto compacto.

6.2. Teoría de Operadores y Funcionales

6.2.1. Operadores

Definición 6.2. *Sean X, Y espacios normados. Sea una aplicación $A : X \to Y$, decimos que es operador (lineal) si A es lineal.*

Recordatorio. Decimos que una función es lineal si para todo $v, w \in X, k \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$A(x + ky) = A(x) + kA(y) \in Y$$

Teorema 6.5. *Sea $A : X \to Y$ un operador. Entonces la siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A es uniformemente continua en X.

(b) A es continua en X.

(c) A es continua en 0.

(d) Existe un $C \geq 0$ talque

$$\|Ax\| \leq C\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Dem. Las implicancias (a) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (c) son claras. Probemos que (c) $\Rightarrow$ (d) y que (d) $\Rightarrow$ (a).

Supongamos que A es continua en 0, supongamos que no exisite C talque $\|Ax\| \leq C\|x\|$, es decir, para todo $C \geq 0$ se tiene que $\|Ax\| > C\|x\|$, sea $n \in \mathbb{N}$, existe un $x_n \in X$ talque

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\|$$

Sea $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, entonces $\|y_n\| = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por la continuidad de A en 0, se tiene que

$$\|Ay_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pero

$$\|Ay_n\| = \frac{\|Ax_n\|}{n\|x_n\|} > 1$$

Siendo una contradicción, por lo tanto (c) $\Rightarrow$ (d).

Supongamos que existe un $C \geq 0$ talque

$$\|Ax\| \leq C\|x\|$$

Sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta := \frac{\varepsilon}{C} > 0$, entonces si $\|x - x_0\| < \delta$ se tiene que

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leq C\|x - x_o\| < \varepsilon$$

Como δ independiente de x, x_0, se tiene que A es uniformemente continua. ∎

En general, denotaremos el conjunto de operadores lineales por;

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{A : X \to Y \text{ lineal} : A \text{ continua}\}$$

Si $X = Y$, entonces denotaremos $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{L}(X)$. Por el teorema 6.5 podemos definir una norma, en particular, se define la norma sobre $\mathcal{L}(X,Y)$ por

$$\|A\| = \text{ínf}\{c \geq 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \ \forall x \in X\}$$

Aunque no siempre es útil usar la definición. Por lo que probaremos el siguiente resultado.

Lema 6.1. *Sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces*

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X: \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in X: \\ \|x\| = 1}} \|Ax\|$$

Dem. Probaremos la primera igualdad. Sea

$$C' := \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Esto está bien definido ya que si A es continua, entonces existe un C talque para todo $x \in X \setminus \{0\}$ se tiene que

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq C$$

Con respecto a C' se tiene

$$\|Ax\| \leq C'\|x\|$$

para todo $x \in X$ (si $x = 0$ entonces $Ax = 0$), luego por definición de la norma de A se tiene que $C' > \|A\|$. Para la otra dirección, por definición, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x_\varepsilon \in X \setminus \{0\}$ talque

$$\frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} \geq C'(1-\varepsilon)$$

entonces $\|A\| > C'(1-\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$, luego $\|A\| \geq C'$. Por lo tanto

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

■

Es importante recordad la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el cual dice que

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Teorema 6.6. *Sean X, y espacios normados. Entonces*

$$(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$$

es un espacio normado.

Dem.

- **Espacio Vectorial.**
- **Norma.** Probemos los tres axioma de norma.
  1. Por definición
  $$\begin{aligned} \|A\| = 0 &\Leftrightarrow \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \\ &\Leftrightarrow \|Ax\| = 0, \quad \text{para todo } x \in X \\ &\Leftrightarrow Ax = 0, \qquad \text{para todo } x \in X \\ &\Leftrightarrow A = 0 \end{aligned}$$
  2. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ y $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces
  $$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\alpha Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\alpha| \|Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\| \leq} \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|A\|$$
  3. Sean $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$. Sea $x \in X$, entonces
  $$\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Ay\|$$
  usando la desigualdad triangular sobre la norma Y. Ahora por la caracterización del ínfimo se tiene
  $$\|A+B\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \Leftrightarrow \|A+B\| - \|Ax\| \leq \|Bx\|$$

para todo $x \in X$, nuevamente por la caracterización del ínfimo

$$\|A+B\| - \|Ax\| \leq \|B\|$$

Aplicando de forma análoga a $\|Ax\|$, se concluye

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Probando que es un espacio normado. ■

Teorema 6.7. *Si Y es Bannach, entonces $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ es Bannach.*

Dem. Del teorema 6.6 sabemos que es un espacio normado, nos falta probar que es completo. Sea $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ una sucesiónde Cauchy. Sea $x \in X$, entonces

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)(x)\| \leq \|A_n - A_m\|\|x\|$$

Por lo tanto $\{A_n x\}_n \subseteq Y$ es una sucesión de Cauchy, como Y es completo se tiene existe A talque

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

Es más, $A_n \xrightarrow{U} A$. Probemos que $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, para ello debemos probar que es lineal y continua.

- **Lineal.** Sean $\alpha \in \mathbb{K}, x_1, x_2 \in X$, entonces

$$\begin{aligned} A(\alpha x_1 + x_2) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x_1 + x_2) \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha A_n(x_1) + A_n(x_2) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lim_{n\to\infty} A_n x_2 \\ &= \alpha A x_1 + A x_2 \end{aligned}$$

  Siendo A lineal.

- **Continua.** Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ talque $\|A_n - A_m| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$ por ser sucesión de Cauchy. Para $x \in X$ talque $\|x\| \leq 1$ eligimos $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande talque

$$\|A_M x - A_x\| < \varepsilon$$

  que existe en virtud de que $\{A_M x\}$ es Cauchy., entonces

$$\begin{aligned} \|Ax - A_n x\| &\leq \|Ax - A_M x\| + \|A_M x - A_n x\| \\ &< \varepsilon + \|A_M - A_n\| \\ &< 2\varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq N$. Entonces

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax - A_n x\| \leq 2\varepsilon$$

para todo $n \geq N$, por lo tanto $\|A\| \leq \|A - A_n\| + \|A_n\| < \infty$ para n fijo. De este modo $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

Probando que $\mathbb{L}(X, Y)$ es un espacio de Bannach. ■

Recordemos algunas definiciones importantes de álgebra lineal. Sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, el kernel de A es el conjunto:

$$\ker(A) := \{x \in X : Ax = 0\} \subseteq X$$

que es un subespacio normado. También podemos definir la imagen/rango de A por el conjunto:

$$ran(A) := \{y \in Y : \text{existe } \ x \in X, Ax = y\} \subseteq Y$$

es subespacio normado de Y.

Lema 6.2. *Sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, A es inyectivo si y sólo si $\ker(A) = \{0\}$.*

Dem. Si A es inyectivo, entonces para $x \in \ker(A)$ se tiene que

$$Ax = 0 = A0$$

entonces $x = 0$, por lo que $\ker(A) = \{0\}$. Si $\ker(A) = \{0\}$, entonces para $x, y \in X$ tales que

$$Ax = Ay$$

por linealidad de A se tiene que $Ax - Ay = A(x - y) = 0$, y enyonces $x = y$. ■

Lema 6.3. *Sean X, Y espacios normados y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces $\ker(A)$ es un conjunto cerrado.*

Dem. Sea $\{x_n\}_n \subseteq \ker(A)$ una sucesión que converge a $x \in X$. Entonces

$$\|Ax\| \leq \|A(x - x_n)\| + \underbrace{\|Ax_n\|}_{=0} = \|A(x - x_n)\|$$

para n suficientemente grande se tiene

$$\|Ax\| < \varepsilon$$

para un $\varepsilon > 0$ fijo, esto se puede hacer para todoε, de forma

$$\|Ax\| = 0$$

y por tanto $x \in \ker(A)$. ■

Lema 6.4. *Sean X, Y, Z espacios normados. Si $A \in \mathcal{L}(X,Y), B \in \mathcal{L}(Y,Z)$, entonces*

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

Dem. Probemos que BA está bien definido, sean $\alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X$, entonces

$$BA(\alpha x + y) = B(A(\alpha x + y)) = B(\alpha Ax + Ay) = \alpha BAx + BAy$$

luego BA es lineal y si B, A con continuas, entonces BA es continua y $BA \in \mathcal{L}(X,Z)$. Sea $x \in X$ talque $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\|BAx\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

Luego $\|B\| \cdot \|A\|$ es cota superior de $\|BAx\|$ para $\|x\| \leq 1$, es decir

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

■

Definición 6.3. *Sean X, Y espacios normados. Sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, decimos que es isomorfismo si es biyectiva y $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$. En tal caso se denota*

$$X \simeq Y$$

Proposición 6.1. *$A \in \mathcal{L}(X,Y)$ es isomorfismo si y sólo si es sobreyectiva y exsiten constantes $c, C > 0$ talque*

$$c\|x\| \leq \|Ax\| \leq C\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Dem. Si A es sobreyectiva y existen constantes $c, C > 0$ entonces debemos probar que es inyectiva con inversa lineal continua. Sean $x, y \in X$ tales que $Ax = Ay$, entonces $A(x-y) = 0$ y por la desigualdad se tiene que

$$c\|x - y\| \leq \|A(x-y)\| = 0$$

entonces $x = y$ y luego A es biyectiva. Sea $A^{-1} : Y \to X$ la inversa, sean $\alpha \in \mathbb{K}, x, y \in Y$ entonces

$$\begin{aligned}
A^{-1}(\alpha x + y) &= A^{-1}(\alpha A(x') + A(y')) \\
&= A^{-1}(A(\alpha x' + y')) \\
&= \alpha x' + y' \\
&= \alpha A^{-1}(x) + A^{-1}(y)
\end{aligned}$$

donde $A(x') = x, A(y) = y$. Luego A^{-1} es lineal, probemos que es continua, notemos que por la biyección de A podemos ver que para todo $x' \in Y$ se tiene que

$$c\|A^{-1}x'\| \leq \|x'\| \leq C\|A^{-1}x'\|$$

Luego A^{-1} es Lipschitz de constante $\frac{1}{c}$, por lo tanto es continua y A es un isomorfismo.

Si A es isomorfismo es claro que es sobreyectiva, ...**Terminar** ■

Definición 6.4. *Decimos que* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *es isometría si*

$$\|Ax\| = \|x\|$$

para todo $x \in X$*.*

Ejemplo 6.2.

- Si A es isometría, entonces $\|A\| = 1$. Ya que

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|x\| = 1$$

- Si A es isometría, entonces $A^{-1} \in \mathcal{L}(Ran(A), X)$
- Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ es isometría y es isomorfo, entonces

$$X \cong Y$$

Ejemplo 6.3. La función idenditdad dada por:

$$\begin{aligned} id : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

es isomorfismo y isometría. Además de que $\|id\| = 1$.

Ejemplo 6.4. Sea $X := \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, sea la función

$$\begin{aligned} A : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(0) \end{aligned}$$

Queremos de alguna forma determinar su norma, pero debemos ver que es lineal y continua.

- **Lineal.** Sean $x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} A(\alpha x + y) &= (\alpha x + y)(0) \\ &= \alpha x(0) + y(0) \\ &= \alpha Ax + Ay \end{aligned}$$

  Siendo lineal

- **Continua.** Notemos que para $x, y \in C[0, 1]$ se tiene que

$$|Ax - Ay| = |x(0) - y(0)| \leq \|x - y\|_\infty$$

  Entonces para $\varepsilon > 0$ dado, sea $\delta := \varepsilon > 0$, entonces, si $\|x - y\|_\infty < \delta$, entonces

$$|Ax - Ay| \leq \varepsilon$$

  Si δ es independiente de x, y entonces se puede ver que es continua.

Por lo tanto $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Ahora podemos determinar la norma de A, notemos que

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|_\infty} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|x(0)|}{\|x\|_\infty} \leq \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 1$$

Ahora sea $y(t) = 1$ con $t \in [0, 1]$. Claramente $y \in C[0, 1]$, entonces

$$1 = \frac{|y(0)|}{\|y\|_\infty} \leq \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|_\infty} = \|A\|$$

Por lo tanto $\|A\| = 1$.

Ejemplo 6.5. Si $\dim X < \infty$ entonces $A : X \to Y$ lineal es continua.

Ejemplo 6.6. So $\dim X < \infty$, entonces

$$X \simeq \mathbb{K}^{\dim X}$$

Ejemplo 6.7. Sea el operador

$$\begin{aligned} A &: l^2 \to l^2 \\ \{t_n\}_n &\mapsto \left\{\frac{1}{n} t_n\right\}_n \end{aligned}$$

Sea $x = \{t_n\} \in l^2$, entonces

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n} t_n\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 \leq \|x\|_2^2$$

Por lo que A es Lipschitz y por tanto continua, de forma que tiene una norma bien definida, en particular

$$\|A\| \leq 1$$

También notemos que para $x \in \ker(A)$ entonces

$$Ax = \{\frac{1}{n} t_n\} = \{0\}$$

De forma que $t_n = 0$ y entonces $\ker(A) = \{0\}$, por lo que A es inyectiva. Sea

$$A^{-1} : Ran(A) \to l^2$$

donde $A^{-1}\{t_n\}_n = \{n t_n\}_n$. Si $x_n = \{t_k^{(n)}\}_k$ donde

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right) \in Ran()A$$

Entonces

$$\|x_n\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty$$

Luego $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_2 < \infty$. Y por tanto

$$\|A^{-1}x_n\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(i\frac{1}{i}\right)^2 = n$$

6.2.2. Funcioanles

Definición 6.5. *Sea X un espacio normado de forma que es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. La función*

$$x' : X \to \mathbb{K}$$

se dice funcional si es lineal y continua.

Ejemplo 6.8.

- La función

$$\begin{aligned} x' : C[0,1] &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto x(0) \end{aligned}$$

  es un funcional un operador continuo.

- La función definida por:

$$\begin{aligned} x' : C[0,1] &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_0^1 x(t)dt \end{aligned}$$

  Veamos si es funcional. Sabemos que $C[0,1]$ es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, falta ver que es lineal y continua.

  - **Lineal.** Sean $\alpha \in \mathbb{K}, x, y \in C[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} x'(\alpha x + y) &= \int_0^1 (\alpha x(t) + y(t))dt \\ &= \alpha \int_0^1 x(t)dt + \int_0^1 y(t)dt \\ &= \alpha x'(x) + x'(y) \end{aligned}$$

    Siendo lineal.

- **Continua.** Sea $\varepsilon > 0$, notemos que para $x, y \in C[0,1]$

$$\begin{aligned}
|x'(x) - x'(y)| &= \left| \int_0^1 x(t)dt - y(t) \right| \\
&\leq \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt \\
&\leq \int_0^1 \|x - y\|_\infty dt \\
&= \|x - y\|_\infty
\end{aligned}$$

  De forma que x' es Lipschitz y por tanto continua.

Siendo efectívamente funcional.

Definición 6.6. *Sea X espacio normado sobre $\mathbb{K}$, se deifne el espacio dual por el conjunto de las funcionales*

$$X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$$

Ejemplo 6.9. Sea $X = \mathbb{R}^n$ con $b_1, \ldots, b_n$ una base, por lo que para todo $x \in X$ exiten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$

Luego la función

$$\begin{aligned}
x_i' : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\
x &= \alpha_i
\end{aligned}$$

Es funcional y es el elemento del espacio dual.

Notemos que del ejemplo anterior, $\dim \mathbb{R}^n = n$, siendo sencillo de estudiar, ¿existirán funcionales no triviales sobre X talque $\dim X = \infty$?

Lema de Zorn. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si cada $B \subseteq A$ totalmente ordenado tiene cota superior, entonces A tiene elemento máximo.*

Ejemplo 6.10. Sea el conjunto $M = \{1, 2, 3\}$, el conjunto potencia de M es

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, M, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

Siendo parcialemnte ordenado bajo la relación $\subseteq$ inclusión, sea el conjunto

$$U = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

es totalmente ordenado.

Definición 6.7. *Una función $\rho : X \to \mathbb{R}$ es sub lineal si*

$$\rho(\alpha x) = \alpha p(x), \qquad \textit{para todo}\, \alpha \geq 0$$
$$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y), \ \ \textit{para todo}\, x, y \in X$$

Teorema 6.8. (Hahn-Banach) *Sea X un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Sea $U \subseteq X$ un subespacio con $l : U \to \mathbb{K}$ lineal. Si existe $\rho : X \to \mathbb{R}$ sublineal talque $Re[l(x)] \leq \rho(x)$ para todo $x \in U$, entonces existe una extensión lineal $L : X \to \mathbb{K}$ talque $L|_U = l$ y $Re[L(x)] \leq \rho(x)$ para todo $x \in X$.*

Dem...

Definición 6.8. *Sea X espacio normado sobre $\mathbb{K}$, sea $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ un espacio dual, definimos la norma funcional por*

$$\|x'\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$$

Observación 6.3. El espacio X' es siempre un espacio Banach.

Teorema 6.9. (H.B-espacio normado) *Sea X espacio normado, $U \subseteq X$ subespacio. Si $u' \in U'$, entonces existe $x' \in X'$ talque $x'|_U = u'$ y $\|x'\| = \|u'\|$.*

Dem...

Corolario 6.1. *Sea X espacio normado, para $x \in X \setminus \{0\}$ existe $x' \in X'$ con $\|x'\| = 1$ y $x'(x) = \|x\|$.*

Dem. Sea $u' = \underbrace{gen\,\{x\}}_{=U} \to \mathbb{K}$, donde $u'(\alpha x) = \alpha \|x\|$, si $u' \in U'$ entonces por H.B existe $x' \in X'$ con $x'(x) = u'(x) = \|x\|$, luego

$$\|u'\| = \sup_{u \in U, \|u\| \leq 1} |u'(u)| = \sup_{\alpha x \in U, \|\alpha x\| \leq 1} |\alpha| \cdot \|x\| = 1$$

Luego por H.B se tiene que $\|x'\| = \|u'\| = 1$. Probando el corolario. ■

Corolario 6.2. *Sea X un espacio normado $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, entonces*

$$\|x\| = \sup_{x' \in X', \|x'\| \leq 1} |x'(x)|$$

para todo $x \in X$.

Dem. Vamos a probar por doble desigualdad. Notemos que

$$\begin{aligned} \sup_{x' \in X', \|x'\| \leq 1} |x'(x)| &\leq \sup_{\|x'\| \leq 1} \|x'\| \cdot \|x\| \\ &\leq \|x\| \end{aligned}$$

Por otro lado, existe $x' \in X'$ talque $\|x'\| \leq 1$ y

$$\|x\| = |x'(x)| \leq \sup_{\|x'\| \leq 1} |x'(x)|$$

Por lo tanto

$$\|x\| = \sup_{\|x'\|\leq 1} |x'(x)|$$

■

Corolario 6.3. *Sea X espacio normado, sea $U \subseteq X$ subespacio cerrado, entonces existe un $x' \in X'$ talque $x'|_U = 0$ con $x' \neq 0$.*

Corolario 6.4. *Sea X espacio normado y $U \subseteq X$ sub espacio, entonces U es denso en X si y sólo si para todo $x' \in X'$ se tiene que si $x'|_U = 0$, entonces $x' = 0$.*

6.2.3. Espacios duales en l^p

Sea p, q tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(si $p = \infty$ se toma $1/\infty = 0, q = 1$). Sea la función

$$A : l^q \to (l^p)'$$

Talque para todo $\{s_n\} \in l^q, \{t_n\}_n \in l^p$ se tiene que

$$(A\{s_n\})(\{t_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$$

Probemos que A es operador lineal, sean $x = \{s_n\}_n \in l^q, y = \{t_n\}_n \in l^p$, entonces

$$(Ax)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$$

entonces

$$\begin{aligned}\|Ax\| = \sup_{y\in l^p, \|y\|_p\leq 1} |(Ax)(y)| &\leq \sup_{\|y\|_p\leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} |s_n t_n| \\ &\underset{\text{Hölder}}{\leq} \sup_{\|y\|_p\leq 1} \|y\|_p \cdot \|x\|_q = \|x\|_q\end{aligned}$$

vemos que tenemos $\|Ax\| \leq \|x\|$, entonces por definición de norma

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_q\leq 1} \|Ax\| \leq 1$$

(probar que es operador lineal)

Teorema 6.10. (Representación de $(l^p)'$) *Si $1 \leq p < \infty$, sea q talque $1/q+1/p = 1$, entonces la función $A : (l^p)' \to l^q$ isomorfismo e isometría. Por lo que*

$$(l^p)' \cong l^q$$

Si $p = \infty$, entonces la función A es isometría pero no isomorfismo, en particular, si consideramos

$$A : l^1 \to (c_0)'$$

es isomorfismo. (Se concluye que $l^1 \subseteq (l^\infty)'$).

Dem. Supongamos que $1 \leq p < \infty$, sea $x := \{s_n\}_n$, debemos probar que A es inyectiva y sobreyectiva.

- **Inyectiva.** Sea $x \in \ker(A)$, entonces

$$Ax = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n = 0, \text{ para todo } \{t_n\} \in l^p$$
$$\Leftrightarrow \{s_n\} = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

  Por tanto $x = 0$ y A es inyectiva.

- **Sobreyectiva.** Sea $y' \in (l^p)'$, sea $s_n :)y'(e^{(n)})$, donde $e^{(n)} = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ donde el 1 está en la posición n. Se escoge $x := \{s_n\}_n$. Demostremos que $x \in l^q, Ax = y'$, sea

$$t_n := \begin{cases} \frac{|s_n|^q}{s_n}, & s_n \neq 0 \\ 0, & s_n = 0 \end{cases}$$

  Luego

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} |t_n|^p &= \sum_{n=1}^{N} |s_n|^{r(q-1)} \\ &= \sum_{n=1}^{N} |s_n|^q \\ &= \sum_{n=1}^{N} s_n t_n = \sum_{n=1}^{N} y'(e^{(n)}) t_n \\ &= y'\left(\sum_{n=1}^{N} t_n e^{(n)}\right) \\ &\leq \|y'\| \left(\sum_{n=1}^{N} |t_n|^p\right)^{1/p} = \|y'\| \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |s_n|^q\right)^{1/p} \end{aligned}$$

  Entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |s_n|^q\right)^{1-1/p=1/q} \leq \|y'\|$$

tomando $N \to \infty$, entonces

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^q\right)^{1/q} \|x\|_q \leq \|y'\|$$

Probando que $x \in l^q$. Falta ver que $Ax = y'$, notemos que

$$(Ax)(e^{(n)}) = s_n = y'(e^{(n)})$$

Sea $U := gen\ \{e^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $Ax|_U = y'|_U$. Si U es denso en l^p, entonces si $(Ax - y')|_U = 0$, por densidad $Ax = y'$. Por lo tanto es sobreyrectivo.

Probando que A es biyectiva, veamos si es isometría. Ya sabemos que

$$\|x\|_q \leq \|y'\| = \|Ax\| \leq \|x\|_q$$

por tanto $\|x\|_q = \|Ax\|$. Probando para p finito.

Si $p = \infty$, demostramos que $A : l^1 \to (l^\infty)'$ no es isomorfismo, $u' : c \to \mathbb{K}$, $u'(x) = \lim_{n\to\infty} t_n$ con $x = \{t_n\} \in c$. Se verifica $u' \in c'$, por H-B existe $x' \in (l^\infty)'$, $x'|_c = u'$ con $\|x'\| = \|u'\| < \infty$.

Supongamos que existe $\{s_n\}$ talque

$$x'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$$

para todo $y = \{t_n\} \in l^\infty$, entonces $s_i = x'(e^{(i)}) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y entonces $x'(y) = 0$ para todo y, esto contradice que $\|x'\| \neq 0$, llegando a una contradicción. ■

6.2.4. Operadores Duales

Definición 6.9. *Sean X, Y espacios normados, sea $A \in \mathbb{L}(X, Y)$, se define*

$$A' : Y' \to X'$$

talque $(A'y')(x) := y'(Ax)$ para todo $x \in X, y' \in Y'$. A esta función se le llama operador dual.

Teorema 6.11. *Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces $A' \in \mathcal{L}(Y', X')$ y $\|A\| = \|A'\|$.*

Dem. Vemos que A es lineal ya que...

Probemos la norma, por definición

$$\begin{aligned}\|A'\| &= \sup_{\|y\|\leq 1} \|A'y'\| \\ &= \sup_{\|y\|\leq 1} \sup_{\|x\|\leq 1} |(A'y')(x)|\end{aligned}$$

vemos que

$$|(A'y')(x)| = y'(Ax) \leq \|y\|\|Ax\| \leq \|y\|\|A\|\|x\|$$

Por lo tanto

$$\|A'\| \leq \sup_{\|y'\|\leq 1}\sup_{\|x\|\leq 1} \|y'\|\|A\|\|x\| = \|A\|$$

Luego $\|A'\| \leq \|A\|$, para la otra dirreción tenemos

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \\
&\overset{\text{H-B}}{=} \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|y'\|\leq 1} |y'(Ax)| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1}\sup_{\|y\|\leq 1} \|A'\|\|y'\|\|x\| \leq \|A'\|
\end{aligned}$$

Entonces $\|A\| \leq \|A'\|$. Probando que $\|A\| = \|A'\|$. ■

Notemos que

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

y

$$X \xleftarrow{A'} Y \xleftarrow{B'}$$

con $(BA)' = A'B'$.

Ejemplo 6.11. La función $T : l^2 \to l^2$ dada por

$$T(s_1, s_2, \dots) = (s_2, s_3, \dots)$$

Determinemos T', sea $x = \{s_n\} \in l^2$, si $(l^2)' \cong l^2$, $y' \cong \{t_n\}_n \in l^2$, entonces

$$\begin{aligned}
(T'y')(x) = y'(Tx) &= \sum_{n=1}^{\infty} t_n s_{n+1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} t_{n-1} s_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{t_n} s_n
\end{aligned}$$

con $\overline{t_n} = (0, t_1, t_2, \dots)$. Podemos identificar $T'y' \in (l^2)'$ con $(0, t_1, t_2, \dots)$. En particular $TT' = id, T'T \neq id$.

6.2.5. Anuladores

Definición 6.10. *Sea $U \subseteq X$, un subespacio de X espacio normado. El anulador de U en X', es el conjunto*

$$U^{\perp} = \{x' \in X' : x'(u) = 0, \text{ para todo } u \in U\}$$

Si $V \subseteq X'$, el anulador de V en X es

$$V_{\perp} = \{x \in X : x'(x) = 0, \text{ para todo } x' \in V\}$$

Ejemplo 6.12. Si $U = \{(0, s_2, \dots) : \{s_n\} \in l^2\} \subseteq l^2$, determinemos $U^{\perp}$, sea $x' \in (l^2)'$, entonces para $x = \{t_n\} \in l^2$ se tiene que

$$\begin{aligned} x'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} t_n s_n = 0, \text{ para todo } (0, s_2, \dots) \in l^2 \\ &\Leftrightarrow \{t_n\} = (\alpha, 0, \dots) \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $U^{\perp} \cong \{(\alpha, 0, \dots) : \alpha \in \mathbb{K}\}$.

Lema 6.5. *Sea X espacio normado, si $U \subseteq X$ es subespacio, entonces el anulador de U en X' es cerrado.*

Dem. Sea $\{x'_n\} \subseteq U^{\perp}$ una sucesión que converge a $x' \in X'$, entonces

$$\begin{aligned} |x'(u)| &\leq |x'_n(u) - x'(u)| + \underbrace{|x'_n(u)|}_{=0} \\ &\leq \|x'_n - x'\|\|u\| \overset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

Entonces $x'(u) = 0$ para todo $u \in U$, por lo tanto $x' \in U^{\perp}$.

Ejemplo 6.13. Sea $\{0\}$ subespacio de un espacio normado X, notemos que

$$\begin{aligned} \{0\}^{\perp} &= \{x' \in X' : x'(0) = 0\} = X' \\ \{0\}_{\perp} &= \{x \in X : 0(x) = 0\} = X \end{aligned}$$

Teorema 6.12. *Si $A \in \mathcal{L}(x, y)$, entonces $\overline{Ran}(A) = \ker(A')_{\perp}$.*

Dem. $\subseteq$) Sea $y = Ax \in Ran(A)$, $y' \in \ker(A')$, luego

$$y'(y) = y'(Ax) = (A'y')(x) = 0(x) = 0$$

Entonces $y \in \ker(A')_{\perp}$, y luego $Ran(A) \subseteq \ker(A')_{\perp}$, como el anuladore es cerrado, se tiene entonces

$$\overline{Ran(A)} \subseteq \ker(A')_{\perp}$$

$\supseteq$) Para la otra inclusión, sea $U := \overline{Ran(A)}$, demostraremos que si $y \notin U$, entonces $y' \notin \ker(A')_\perp$. Sea $y \in Y \setminus U$, por H.B existe $y' \in Y'$ con $y'|_U = 0$ e $y'(y) = 1$. Además

$$(A'y')(x) = y'\underbrace{(Ax)}_{\in U} = 0$$

para todo $x \in X$, entonces $A'y' = 0$ y por tanto $y' \in \ker(A')$, como $y'(y) \neq 0$, entonces $y \notin \ker(A')_\perp$. ■

Ejemplo 6.14. Sea

$$\begin{aligned} A : l^2 &\to l^2 \\ \{t_n\}_n &\mapsto \left\{\frac{1}{n}t_n\right\}_n \end{aligned}$$

Demostremos que $Ran(A) \neq \overline{Ran(A)} = l^2$. Notemos que $A \in \mathcal{L}(l^2)$ donde $\|A\| = 1$ y $\ker(A) = \{0\}$, determinemos

$$A' : (l^2)' \to (l^2)'$$

usando que $(l^2)' \cong l^2$. Sea $x = \{t_n\}_n$, entonces $y' \cong \{s_n\}_n \in l^2$, luego

$$(A'y') \cong \left\{\frac{s_n}{n}\right\}_n$$

Si $\ker(A') = \{0\}$, entonces $(\ker(A'))_\perp = \overline{Ran(A)} = l^2$, sea $y = \left\{\frac{1}{n}\right\}_n \in l^2 = \overline{Ran(A)}$ y sea la sucesión

$$y_n := \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots\right) \in Ran(A)$$

de forma que $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, sea $x_n := (1, \dots, 1, 0, \dots) \in l^2$ talque $Ax_n = y_n$, pero x_n no converge por lo tanto $Ax = y$ con $x = (1, \dots, 1, \dots)$ pero $x \notin l^2$.

Teorema 6.13. *Sea X un espacio normado. Entonces X es Banach si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_n \subseteq X$ con $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^\infty x_n \in X$.*

Dem. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy, sea una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ talque

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_{n+1} - x_{n_k}\| \leq \sum_{n=1}^\infty 2^{-k} < \infty$$

y por tanto, por hipótesis

$$\sum_{n=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \in X$$

existe. Para ver la convergencia

$$\sum_{j=1}^{N}(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) = x_{n_{N+1}} - x_{n_1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

ya que la serie converge al existir. Por tanto

$$x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x + x_{n_1}$$

Hemos probado que toda sucesión Cauchy tiene una subsucesión convergente, por lo tanto, la sucesión converge.

Supngamos que X es Banach, si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, entonces se puede concluir que las sumar parciales son Cauchy, es decir

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|\right\}_n$$

es Cauchy. Entonces para $n \geq m$ se tiene que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_j\right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| < \varepsilon$$

Entonces

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j\right\}$$

es Cauchy en X, dado que X es completo, entonces la serie converge y está en X. ■

6.3. Teorema del Mapeo abierto

Definición 6.11. *Sean X, Y espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ se llama abierto si las imagnes de abiertos, son abiertos.*

Observación 6.. Si $f : X \to Y$ es continua y abierto, entonces f^{-1} es continua.

Lema 6.6. *Sea $A : X \to Y$ lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A es abierto.

(b) Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ talque $B_Y(0, \varepsilon) \subseteq A(B_X(0, \delta))$.

(c) Existe $r > 0$ talque $B_Y(0, r) \subseteq A(B_X(0, r))$.

Dem. Notemos que la equivalencia (b) $\Leftrightarrow$ (c) basta multiplicar por δ o $1/\delta$.

(a) $\Rightarrow$ (b). Notemos que $0 \in A(B_X(0, \delta))$ por A lineal, entonces al ser abierto, existe $\varepsilon > 0$ talque $B_Y(0, \varepsilon) \subseteq A(B_X(0, \delta))$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Debemos probar que si O es abierto, entonces $A(O)$ es abierto. Sea $O \subseteq X$ cualquier abierto, sea $x \in O$, existe $\delta > 0$ con $B_X(x,\delta) \subseteq O$, entonces $A(\underbrace{B_X(x,\delta)}_{=x+B_X(o,\delta)}) \subseteq A(O) = Ax + A(B_X(0,\delta)) \subseteq A(O)$, por hipótesis, existe $\varepsilon > 0$ talque $B_Y(0,\varepsilon) \subseteq A(B_X(0,\delta))$, entonces $Ax + B_Y(0,\varepsilon) \subseteq A(O)$, luego $B_Y(Ax,\varepsilon) \subseteq A(O)$. Por lo tanto $A(O)$ es abierto. ■

Lema 6.7. *Sean X, Y espacios noramdos, si $A : X \to Y$ es lineal y abierto, entonces A es sobreyectiva.*

Dem. Supongamos que A es abierto, entonces existe $\varepsilon > 0$ talque $B_Y(0,\varepsilon) \subseteq A(B_X(0,1))$. Sea $0 \neq y \in Y$, sea $\overline{y} := \frac{\varepsilon}{2\|y\|}y$, entonces

$$\|\overline{y}\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Luego $\overline{y} \in B_Y(0,\varepsilon) \subseteq A(B_X(0,1))$, entonces existe $\overline{x} \in X$ talque $A\overline{x} = \overline{y}$, se define

$$x := \frac{2\|y\|}{\varepsilon} \cdot \overline{x}$$

entonces

$$\begin{aligned} Ax &= A\left(\frac{2\|y\|}{\varepsilon}\overline{x}\right) \\ &= \frac{2\|y\|}{\varepsilon}\overline{y} = y \end{aligned}$$

Probando que A es sobreyrectiba. ■

Teorema 6.14. (Mapeo Abierto) *Sean X, Y espacios Banach, si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ es sobreyectiva, entonces A es abierto.*

Dem. Demostraremos que existe $\varepsilon_0 > 0$ con $B_Y(0,\varepsilon_0) \subseteq A(B_X(0,1))$.

- **Paso 1.** Sabemos que

$$Y = A(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_X(0,n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A(B_X(0,n))}$$

Por Baire existe un $N \in \mathbb{N}$ talque $(\overline{A(B_X(0,N))})^o \neq \emptyset$, entonces existe $y_0 \in A(B_X(0,N))^o$ y existe $\varepsilon > 0$ talque

$$B_Y(y_0,\varepsilon) \subseteq \overline{A(B_X(0,N))}$$

Donde $\overline{A(B_X(0,N))}$ es simétrico y convexo. Sea $y \in B_Y(0,\varepsilon)$, luego

$$\|y_0 + y - y_0\| < \varepsilon$$

Y entonces $y_0 + y \in \overline{A(B_X(0,N))}$. El mismo argumento para probar que $-y_0 + y \in \overline{A(B_X(0,N))}$. Notemos que

$$y = \frac{1}{2}(y_0 + +y) + \frac{1}{2}(-y_0 + y) \in \overline{A(B_X(0,N))}$$

Entonces $B_Y(0,\varepsilon) \subseteq A(B_X(0,N))$, sea $\varepsilon_0 := \frac{\varepsilon}{N}$, luego

$$B_Y(0,\varepsilon) \subseteq \overline{A(B_X(0,1))}$$

- **Paso 2.** Sea $y \in Y$ talque $\|hy\| < \varepsilon_0$, existe $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ talque $\overline{y}_i = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}$, entonces

$$\|\overline{y}\| = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\|y\| < \varepsilon_0$$

Entonces $\overline{y} \in B_Y(0,\varepsilon_0)$. Entonces $\overline{y} \in \overline{A(B_X(0,1))}$ y entonces $y_0 = Ax_0$ donde $\|x_0\| < 1$ y $\|\overline{y} - y\| < \alpha\varepsilon_0$ donde $\alpha \in (0,1)$ con $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{1}{(1-\alpha)} < 1$, entonces $\frac{\overline{y}-y}{\alpha} \in B_Y(0,\varepsilon_0) \subseteq \overline{A(B_X(0,1))}$. De la misma forma, existe $y_1 = Ax_1$ con $\|x_{\|} \leq 1$ talque

$$\left\|\frac{\overline{y} - y_0}{\alpha} - y_1\right\| < \alpha\varepsilon_0$$

O mejro dicho, $\|\overline{y} - (y_0 + y_1)\| < \alpha^2\varepsilon_0$. Y así recursivamente, se tiene que

$$\left\|\overline{y} - \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha^j y : j\right)\right\| \leq \alpha^{n+1}\varepsilon_0$$

con $y_j = Ax_j$. Definimos

$$\overline{x} := \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j x_j$$

Donde

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \|\alpha^j x_j\| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\alpha^j\| \\ &= \frac{1}{1-\alpha} < \infty\end{aligned}$$

Recordemos que X es Banach si y sólo si toda serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X$. Entonces $\overline{x} \in X$. Tomando sumas parciales

$$\overline{x}_n := \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j x_j$$

Entonces $\|\overline{y} - A\overline{x}_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de forma que $\overline{y} = A\overline{x}$. Se escoge $x := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\overline{x}$, entonces

$$Ax = A\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\overline{x}\right) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\overline{y} = y$$

y

$$\|x\| = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\|\overline{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha^j = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{1}{1-\alpha} < 1$$

Entonces

$$y = Ax \in A(B_X(0,1))$$

Probando el teorema. ■

Corolario 6.5. *Sean X, Y espacios Banach, y sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ si A es invertible, entonces $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Corolario 6.6. *Si (X, N) y (X, N') son espacios Banach con N, N' norma. Si existe $c > 0$ talque*

$$N(x) \leq N(x)c$$

para todo $x \in X$. Entonces las normas son equivalentes.

Dem. Consideremos la identidad

$$\begin{aligned} id : (X, N') &\to (X, N) \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Claramente la identidad es continua, entonces $id \in \mathcal{L}((X, N'), (X, N))$, por el corolario 6.5 se tiene que id^{-1} es continua, por lo que existe un c talque

$$N(id(x)) = N(x) \leq cN'(x)$$

Probando el corolario. ■

7. Convergencia Débil

7.1. Definición

Recordemos que $\dim X < \infty$ si y sólo si $B[0,1]$ es compacto si y sólo si toda sucesión acotada tiene subsucesión convergente. Con X espacio normado.

Ejemplo 7.1. En l^p con $l \neq \infty$. Sea $e_n := (0, \ldots, 1, 0 \ldots) \in l^p$, donde el 1 está en la posición n. Claramente $\|e_n\| = 1$, es decir, $\{e_n\}$ es una sucesión acotado. Notemos que para $n \neq m$ se tiene que

$$\|e_n - e_m\|_p = (1^p + 1^p)^{1/p} = 2$$

Por tanto, $\{e_n\}$ no es Cauchy, en particular, ninguna subsucesión es convergente, por lo tanto

$$\dim l^p = \infty$$

Definición 7.1. (Convergencia débil) *Sean $\{x_n\}_n \subseteq X$, $x \in X$, se dice que $\{x_n\}_n$ converge débilmente en x si para todo $x' \in X'$ se tiene que*

$$x'(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x'(x)$$

En tal caso se denota $x_n \rightharpoonup x$.

Ejemplo 7.2. Sea $p \neq 1, \infty$. Podemos probar que $e_n \overset{\rightharpoonup}{\longrightarrow} 0$. Sea $x'n(l^p)' \cong l^q$ con $1/p + 1/q = 1$. Por lo que

$$x'(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_n(k) = t_n$$

Si $\{t_n\} \in l^q$m entonces $x'(e_n) \overset{n\to\infty}{0}$, y eso es para todo x' funcional. Probando que $e_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0$.

Proposición 7.1. *Si X es espacio normado, si $\{x_n\}$ es una sucesión que converge débilmente, entonces el límite débil es único.*

Dem. Supongamos que $x_n \rightharpoonup x, y$ donde $x \neq y$. Por H.B existe $x' \in X'$ talque $x'(x) \neq x'(y)$, luego

$$0 = x'(x_n) - x'(x_n) \to x'(x) - x'(y) \neq 0$$

Siendo contradicción. Por tanto, los límites son iguales. ■

Observación 7.1. Si $\{x_n\}$ converge a x, entonces $\{x_n\}$ converge débilmente a x. En efecto, si $\|x_n - x\| \to 0$, entonces

$$|x'(x) - x'(x_n)| = |x'(x - x_n)|$$

Y entonces $\|x'(0)\| = 0$.

Definición 7.2. *Se define e espacio Bidual por $X'' := (X')'$.*

Sea el mapa canónico

$$\begin{aligned} i_X : X &\to X'' \\ x &\mapsto (i_X(x))(x') := x'(x) \end{aligned}$$

Se puede probar que i_X es isometría. Si i_X es sobreyectivo, entonces X se llama espacio reflexivo.

Ejemplo 7.2. Los l^p son espacios reflexivos si $1 < p < \infty$ y los espacios l^1, l^∞ no son reflexivo.

7.2. Compacticidad Débil

Teorema 7.1. *Si X es espacio reflexivo, entonces cada sucesión acotada tiene subsucesión débildmente convergente.*

Definición 7.3. *Sea $A : X \to Y$ lineal, se llama compacto si $\overline{A(B(0,1))}$ es compacto.*

Teorema 7.2. *Si X, Y son espacios Banach y X es reflexivo y $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces A es compacto si y sólo si cada sucesión $\{x_n\}_n \subseteq X$ que converge débilmente, implica que $\{Ax_n\}_n \subseteq Y$ es convergente en Y.*