FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2854

Análisis Funcional

Autor:
Sebastián Lepe V.

30 de junio de 2025

Índice

Introducción

1. Preliminares

Trabajaremos con nociones principales de métrica y espacio topológico. Por lo que tenemos que definir los espacios métricos y topológicos con sus respectivas propiedades.

Definición: *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$). Una norma en V es una función,*

$$\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$$

que satisface las siguientes propiedades:

(i) $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

(ii) Para todo $x \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) se satisface que,

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$

(iii) Para todo $x, y \in V$ se satisface que,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Si $\|\cdot\|$ es una norma en V, entonces decimos que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado o bien, e.v.m.

Definición: *Sea X un conjunto no vacío. Sea $d : X \to X \to [0, \infty)$ una función sobre X que satisface las siguientes propiedades:*

(i) $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$ *para todo* $x, y \in X$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$.

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para todo* $x, y, z \in X$.

Si tal d existe, decimos que es una métrica y al par (X, d) le llamamos espacio métrico o e.m.

Proposición: *Sea $(V, \|\cdot\|)$ es un e.v.m. Entonces $d_{\|\cdot\|}(x, y) := \|x - y\|$ es una métrica sobre V.*

Demostración: Debemos probar los tres axiomas de métrica.

(i) Notemos que,

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

(ii) Claramente $d_{\|\cdot\|}(x, y) = d_{\|\cdot\|}(y, x)$.

(iii) Sean $x, y, z \in V$. Notemos que,

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(x, y) &= \|x - y\| = \|x - z + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| = d_{\|\cdot\|}(x, z) + d_{\|\cdot\|} d(z, y) \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_{\|\cdot\|}$ es una métrica. ■

1.1. Topología

Definición: *Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una topología sobre X si satisface que,*

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Si $U_\gamma \in \tau$ *donde* $\gamma \in \Gamma$ *con* Γ *arbitrario, entonces,*

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \in \tau$$

(iii) Si $U_i \in \tau$ *donde* $i = 1, \cdots, n$, *entonces,*

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$$

En tal caso decimos que (X, τ) es un espacio topológico.

Nota: A los subconjunto de X que son elementos de la topología τ, los llamamos abiertos de la topología a τ.

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{R}$. Entonces las siguientes colecciones son topologías sobre $\mathbb{R}$:

(i) $\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (topología trivial).

(ii) $\tau_2 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(iii) $\tau_3 = \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n) : a_n \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}, b_n \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\right\}$.

Definición: *Sea (X, τ) es espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Definimos la topología τ restringida a Y por:*

$$\tau\big|_Y := \{U \cap Y : U \in \tau\}$$

Afirmación: $(Y, \tau\big|_Y)$ *es espacio topológico.*

Demostración: Por comodidad digamos que $\nu = \tau\big|_Y$. Debemos demostrar los tres axiomas de espacio topológico.

(i) Claramente $\emptyset, Y \in \nu$.

(ii) Sea $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ colección arbitraria de abiertos en ν. Luego para todo $\gamma \in \Gamma$ se cumple que,

$$U_\gamma = V_\gamma \cap Y$$

donde $V_\gamma \in \tau$. De esta forma,

$$\begin{aligned}\bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma &= \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(V_\gamma \cap Y)\\ &= \underbrace{\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma\right)}_{\in\tau} \cap Y\end{aligned}$$

Por tanto la unión de los U_γ es un abierto en ν.

(iii) Haciendo de forma análoga al punto anterior, se concluye que la intersección finita de abiertos de ν, es un abierto de ν.

Por tanto ν es topología sobre Y. ■

Definición: *Sea (X, τ) espacio topológico. Decimos que un conjunto N es una vecindad de $x \in X$ en τ si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $U \subseteq N$, es decir,*

$$x \in U \subseteq N$$

Observación: Diremos que N es vecindad abierta de $x \in X$ si $N \in \tau$.

Definición: *Sea (X, τ) espacio topológico. Decimos que $F \subseteq X$ es conjunto cerrado, si su complemento $X \setminus F$ es un abierto.*

Proposición: *Sea (X, τ) es un espacio topológico. Entonces se cumple,*

(i) $\emptyset, X$ son cerrados.

(ii) Sea $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de cerrados con Γ arbitrario. Entonces,

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma$$

es cerrado.

(iii) Sean $F_1, \cdots, F_n$ cerrados, entonces,

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

es cerrado.

Demostración:

(i) Por definición sabemos que $\emptyset$ y X son abiertos, entonces $X \setminus \emptyset = X$ y $X \setminus X = \emptyset$ son cerrados por definición de cerrado.

(ii) Sea $\{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de cerrados con Γ arbitrario. Consideremos la familia de abiertos $\{U_\gamma := X \setminus F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, entonces,

$$\begin{aligned} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \ \text{ es abierto} \Leftrightarrow & \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \right)^c \ \text{ es cerrado} \\ \Leftrightarrow & \bigcap_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma \quad \text{ es cerrado} \end{aligned}$$

(iii) De forma análoga al punto anterior se puede concluir que la unión finita de cerrados es un cerrado.

Demostrando la proposición. ■

Definición: *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Sea* $A \subseteq X$*, definimos la clausura de* A *como el conjunto cerrado más pequeño que contiene a* A *y lo denotamos por* $\overline{A}$ *o* $cl(A)$*.*

Afirmación: *La clausura de* A *está bien definida.*

Demostración: Definimos,

$$M := \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ F \supseteq A}} F$$

Entonces M es cerrado al ser intersección arbitraria de cerrado y además es el cerrado más pequeño que contiene a A puesto que si N es cerrado y contiene a A, entonces,

$$A \subseteq M \subseteq N$$

De esta forma la clausura de A existe para todo subconjunto de X y por tanto,

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ F \supseteq A}} F$$

■

Otra forma de definir la clausura de A es de la siguiente forma:

Proposición: *Sea* (X, τ) *espacio topológico y sea* $A \subseteq X$*. Entonces,*

$$\overline{A} = \{x \in X : \textit{toda vecindad de } x \textit{ intersecta a } A\}$$

Demostración: Sea $M := \{x \in X : \text{toda vecindad de } x \text{ intersecta a } A\}$. Vamos a demostrar por doble inclusión. Sea $x \in \overline{A}$, entonces para todo F que contiene a A y es cerrado, se tiene que $x \in F$. Sea V vecindad de x, luego existe U abierto tal que,

$$x \in U \subseteq V$$

Supongamos que $A \cap V = \emptyset$, entonces $A \cap U = \emptyset$ y entonces,

$$A \subseteq U^c$$

donde U^c es cerrado que contiene a A, es decir, $x \in U^c$, sin embargo tenemos que $x \in U$, siendo esto una contradicción, por lo tanto $A \cap V \neq \emptyset$ para toda vecindad de x, por lo que $x \in M$.

Supongamos ahora que $x \in M$. Sea F cerrado que contiene a A. Si $x \notin F$ entonces se tiene que,

$$x \in F^c \subseteq A^c$$

Es decir, F^c es una vecindad abierta de x tal que $F^c \cap A = \emptyset$ siendo contradicción ya que por definición toda vecindad de x debe intersectarse de forma no vacía con A, por lo tanto $x \in F$ para todo F cerrado que contiene a A, es decir, $x \in \overline{A}$.

Finalmente concluimos que $\overline{A} = M$. ■

Definición: *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea $A \subseteq X$, definimos el interior de A como el conjunto abierto más grande contenido en A y lo denotamos por A° o $int(A)$.*

Afirmación: *El interior de A está bien definida.*

Demostración: Definimos,

$$M := \bigcup_{\substack{V \text{ abierto} \\ V \subseteq A}} V$$

Entonces M es abierto al ser unión arbitraria de abiertos y además es el más grande contenido en A puesto que si N es abierto contenido en A, entonces,

$$N \subseteq M \subseteq A$$

Por lo tanto existe el interior de A para todo subconjunto de X, y por tanto,

$$A^{\circ} = \bigcup_{\substack{V \text{ abierto} \\ V \subseteq A}} V$$

■

Ejemplo: Si $A \subseteq X$ y $B = X \setminus A$, entonces $A^{\circ} = X \setminus \overline{B}$. Para ver esto notemos que $X \setminus \overline{B}$ es abierto y si consideramos abierto $U \subseteq A$, entonces,

$$B = X \setminus A \subseteq X \setminus U$$

Luego aplicando la clausura de B se obtiene que,

$$\overline{B} \subseteq X \setminus U \Leftrightarrow U \subseteq X \setminus \overline{B}$$

Es decir, $X \setminus \overline{B}$ es el mayor abierto contenido en A **faltar ver que está incluido en** A

1.2. Bases

Definición: *Sea (X, τ) un espacio topológico. Sea β una colección de subconjuntos de X. Decimos que β es una base de τ si se satsiface que,*

(i) $\beta \subseteq \tau$,

(ii) Todo elemento de τ es unión arbitraria de elementos de β.

Ejemplo: Sea $(\mathbb{R}, \tau_3)$ donde τ_3 es la topología definida en el ejemplo anterior. Consideremos,

$$\beta := \{(a, b) : a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$$

Entonces β es una base de τ.

Proposición: *Sea X no vacío. Sea β una familia de subconjuntos de X, entonces, β es una base de una topología de X si y sólo si,* *(i)* $\bigcup_{V\in\beta} V = X$ *y* $\emptyset \in \beta$.

(ii) Para todo $V_1, V_2 \in \beta$ *existe una familia* $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subseteq \beta$ *tal que,*

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$$

Demostración: Supongamos que τ es una topología de X con base β. Entonces es evidente que,

$$\bigcup_{V\in\beta} V = X \quad \text{y} \quad \emptyset \in \beta$$

Y si tenemos $V_1, V_2 \in \beta$, entonces $V_1, V_2 \in \tau$ por definición y luego $V_1 \cap V_2 \in \tau$. Luego por definición de base de β se tiene que existe una colección $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subseteq \beta$ tal que,

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$$

Ahora demostremos la otra dirección. Definimos la colección,

$$\tau := \{V : V \text{ es unión arbitraria de elementos de } \beta\}$$

donde β satisfacde (i) y (ii). Si probamos que τ es una topología, entonces β es una base. Demostremos los tres axiomas de topología:

(i) Claramente $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Sea $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ colección arbitraria de elementos de τ. Luego,

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma \in \tau$$

al ser unión de uniones de elementos de β, es decir, es unión de elementos de β.

(iii) Sean $V_1, V_2 \in \tau$. Entonces,

$$V_1 = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma, \;\; V_2 = \bigcup_{\omega\in\Omega} U_\omega$$

donde U_γ, U_ω son elementos de β. Luego,

$$V_1 \cap V_2 = \bigcup_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ \omega\in\Omega}} (U_\gamma \cap U_\omega)$$

Notemos que la intersección de dos elemento de β es la unión arbitraria de elementos de β por hipótesis, por lo tanto $V_1 \cap V_2$ es unión de elementos de β, es decir, $V_1 \cap V_2 \in \tau$.

Finalmente por recurrencia se tiene que al tomar $V_1, \cdots, V_n \in \tau$, se cumple que,

$$\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \tau$$

Por lo tanto τ es una topología sobre X y β es base de τ. Demostrando la proposición. ■

Definición (raro, revisar): *Sea (X,τ) espacio topológico. Decimos que $\nu \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base de vecindades de un punto $x_0 \in X$ de τ si para toda vecindad N de x en (X,τ) existe $V \in \nu$ tal que $V \subseteq N$.*

Definición: *Sean $(X,\tau),(Y,\sigma)$ espacios topológicos. Definimos la topología producto como la topología con base,*

$$\mathcal{M} = \{U \times V : U \in \tau, V \in \sigma\}$$

Afirmación: $\mathcal{M}$ *es una base bien definida.*

Demostración: Demostremos usando la proposición anterior.

(i) Notemos que $\emptyset \in \mathcal{M}$ y que,

$$\bigcup_{U\times V \in \mathcal{M}} U \times V = X \times Y$$

dado que τ y σ son topologías.

(ii) Sean $W_1, W_2 \in \mathcal{M}$. Se tiene que,

$$\begin{aligned} W_1 &= U_1 \times V_1 \\ W_2 &= U_2 \times V_2 \end{aligned}$$

Luego,

$$W_1 \cap W_2 = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{\in \tau} \times \underbrace{(V_1 \cap V_2)}_{\in \sigma}$$

Luego $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{M}$.

Demostrando que $\mathcal{M}$ está bien definida. ■

1.3. Topología sobre espacios métricos y Funciones

Sea (X,d) un espacio métrico. Definimos la bola de centro x y radio r en X por:

$$B(x,r) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

con $x \in X$ y $r \geq 0$. Entonces,

$$\mathcal{B} := \{B(x,r) : x \in X, r \geq 0\}$$

Es una base. Para ver esto notemos que,

$$B(x,0) = \emptyset \quad \text{y} \quad \bigcup_{x \in X} B(x,r) = X$$

Y que dada dos bolas $B(x_1, r_1), B(x_2, r_2)$, entonces $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ es un abierto de forma métrica en X, entonces se tiene que la intersección es unión arbitraria de bolas de X. Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base de alguna topología de X.

En particular,

$$\tau = \{\text{abiertos de } X \text{ en el sentido métrico } \}$$

Es la topología de X que tiene base $\mathcal{B}$.

Definición: *Sea (X, d) espacio métrico. Se define la topología inducida por d por la topología de base $\mathcal{B}$, el cual es el conjunto de todos los abiertos en el sentido métrico de X.*

Definición: *Sean $(X, \tau), (Y, \sigma)$ espacios topológicos. Consideremos la función $f : X \to Y$. Diremos que f es continua si y sólo si para todo $V \in \sigma$ se tiene que $f^{-1}(V) \in \tau$.*

Nota: A veces escribiremos $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ para representar una función entre dos espacios topológicos.

Proposición: *Sean $(X, d_x), (Y, d_y)$ espacios métricos. Consideremos la función $f : X \to Y$. Entonces f es continua en X en el sentido métrico por definición ε-δ si y sólo si f es continua en X en el sentido topológico sobre las topologías inducidas de X e Y.*

Demostración: Supongamos que $f : X \to Y$ es continuo en el sentido métrico, es decir, para todo $x_0 \in X$ se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si para todo $x \in X$ se tiene que $d_X(x, x_0) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Esto es equivalente a decir que, para todo $x_0 \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$x \in B_X(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon)$$

Sin pérdida de generalidad consideremos la bola $B_Y(y_0, \varepsilon)$ con $y_0 = f(x_0) \in f(X)$ y $\varepsilon > 0$ (elemento de la base topológica de Y inducida por d_Y). Probemos que $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ es abierto topológico en X. Si $x \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$, entonces $f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon)$, luego existe $\delta > 0$ tal que si,

$$x \in B_X(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon) \Rightarrow x \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$$

Es decir,

$$x \in B_X(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$$

Por lo tanto $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ es abierto en el sentido métrico y por tanto lo es en el sentido topológico. Esto implica que la preimagen de todo abierto topológico en X, es un abierto topológico en Y, por lo que f es continua en el sentido topológico.

Supongamos ahora que f es continua en el sentido topológico. Sea $x_0 \in X$, sea $\varepsilon > 0$, si $B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ es abierto en Y, entonces $f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ es abierto en X, luego para $x_0 \in f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$x_0 \in B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))$$

terminar luego f es continua en el sentido métrico.

Proposición: *Sean $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ y $g : (Y, \sigma) \to (Z, \nu)$ dos funciones continuas topológicamente. Entonces la función,*

$$g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \nu)$$

es continua topológicamente.

Demostración: Sea $U \in \nu$, luego $g^{-1}(U) \in \sigma$ y entonces $(f^{-1} \circ g^{-1})(U) \in \tau$. Lo que implica que $g \circ f$ es continua. ■

Definición: *Sea $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ una función entre espacios topológicos. Diremos que es un homeomorfismo si f es biyectiva y que f sea bicontinua (f, f^{-1} son continuas).*

Definición: *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico (X, τ). Decimos que x_n converge a $x_0 \in X$ cuando $n \to \infty$ si y sólo si para toda vecindad N de x_0, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in N$ para todo $n \geq n_0$.*

Observación: Sea (X, d) espacio métrico y consideremos la topología inducida por d. Entonces que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ converga a $x_0 \in X$ es equivalente a decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_0) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. (**demostrar**)

Proposición: *Sea (X, d) un espacio métrico, sea $F \subseteq X$, entonces es cerrado en X con respecto a la topología inducida por d si y sólo si F contiene todos los puntos límites de sucesiones en F.*

Demostración: Supongamos que F contiene todos los puntos límites de F. Supongamos que F no es cerrado, que es equivalente a que $X \setminus F$ no sea abierto, es decir, existe $x_0 \in X \setminus F$ tal que para todo $r > 0$ se tiene que,

$$B(x_0, r) \not\subseteq X \setminus F$$

Sea $1 > r_1 > 0$, luego existe $x_1 \in B(x_0, r_1)$ y $x_1 \in F$, ahora tomamos $1/2 > r_2 > 0$, y luego existe $x_2 \in B(x_0, r_2)$ y $x_2 \in F$. De forma recursiva obtenemos $1/n > r_n$ y $x_n \in B(x_0, r_n)$ tal que $x_n \in F$, obteniendo las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ y $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ donde,

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$$
$$r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Lo importante es que x_n converge a x_0 porque para $\varepsilon > 0$ podemos escoger n_0 tal que $1/n_0 < \varepsilon$ y entonces para todo $n \geq n_0$ se tiene que,

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

O bien,

$$x_n \in B(x_0, \varepsilon)$$

para todo $n \geq n_0$. Por hipótesis, x_0 es un punto límite de F, por lo tanto $x_0 \in F$, sin embargo esto es una contradicción, por lo tanto, necesariamente F es cerrado.

Supongamos ahora que F es cerrado. Sea x punto límite de F, es decir, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ tal que x_n converge a x. Supongamos que $x \notin F$, luego $x \in X \setminus F$ y si F es cerrado, entonces $X \setminus F$ es abierto, por lo que existe $r > 0$ tal que,

$$x \in B(x, r) \subseteq X \setminus F$$

Ahora, para tal $r > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$x_n \in B(x, r) \subseteq X \setminus F$$

para todo $n \geq n_0$, pero esto es imposible puesto que por definición $x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, necesariamente $x \in F$, de forma que F contiene todo los puntos límites de F.

Hemos demostrado la proposición. ■

Definición: *Sea X un conjunto y sean τ, σ topologías de X. Si $\sigma \subseteq \tau$, entonces diremos que σ es más grueso que τ o τ es más fino que σ, siendo este último, un refinamiento.*

Proposición: *Sea X un conjunto con dos topologías σ, τ. Entonces, τ es un refinamiento de σ si y sólo si la función identidad,*

$$id : (X, \tau) \to (X, \sigma)$$

es continua.

Demostrar: Notemos que si $U \subseteq X$, entonces $\mathrm{id}^{-1}(U) = U \subseteq X$. Luego si τ es refinamiento de σ, se tendría que para U abierto en σ, se tiene,

$$\mathrm{id}^{-1}(U) = U \in \sigma \subseteq \tau$$

Luego id es continua, y por otro lado, si id es continua, se tiene que para todo $U \in \sigma$, se cumple que,

$$U = \mathrm{id}^{-1}(U) \in \tau$$

Es decir, $\sigma \subseteq \tau$. ■

Ejemplo: Sean $(X, \tau), (Y, \nu)$ y sea $\sigma \subseteq \tau$ refinamiento espacios topológicos. Demostremos o determinemos un contraejemplo de:

i) Si $f : (X, \tau) \to (Y, \nu)$ es continua, entonces $f : (X, \sigma) \to (Y, \nu)$ es continua.

ii) Si $g : (Y, \nu) \to (X, \tau)$ es continua, entonces $g : (Y, \nu) \to (X, \sigma)$ es continua.

Solución:

i) **Contraejemplo:** Consideremos $X = Y = \mathbb{R}$, $\tau = \nu = \mathcal{P}$ $\sigma = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ y $f = \mathrm{id}$. Entonces $f : (\mathbb{R}, \mathcal{P}) \to (\mathbb{R}; \mathcal{P})$ es continua pero $f : (\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{P})$ no lo es, puesto que dado $U \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ distinto de $\mathbb{R}$ y de vacío, se tiene que $U = \mathrm{id}^{-1}(U) \notin \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

ii) **Demostración:** Sea $U \in \sigma$, entonces $U \in \tau$, entonces $g^{-1}(U) \in \nu$, por lo tanto $g : (Y, \nu) \to (X, \sigma)$ es continua. ■

Definición: *Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es Hausdorff si para todo $x, y \in X$ existen U_x, U_y abiertos disjuntos tales que,*

$$x \in U_x, \quad y \in U_y$$

Ejemplo: Sea $X = [0, \infty)$ y consideremos la topología $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{[0, a) : a > 0\}$. Este espacio no puede ser Hausdorff. Para ver esto basta notar que la intersección de dos abiertos es vacío si y sólo si uno de los dos es el elemento vacío.

Definición: *Sea (X, τ) espacio topológico. Diremos que X es compacto si para todo subcubrimiento abierto de X, admite un subcubrimiento finito de X abiertos. Y dado $K \subseteq X$, diremos que es compacto sobre X si $(K, \tau\big|_K)$ es compacto.*

Proposición: *Sea (X, d) espacio métrico. Entonces $K \subseteq X$ es compacto sobre la topología inducida si y sólo si toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente en K.*

Demostrar es dificil...

Proposición *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $K \subseteq X$ compacto. Si $F \subseteq X$ es cerrado y $F \subseteq K$, entonces F es compacto.*

Demostrar: Sea $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ cubrimiento abierto de $\tau\big|_F$ de F, es decir,

$$F \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \subseteq F \, ; \quad U_\gamma = V_\gamma \cap F$$

con $V_\gamma \in \tau$. Ahora consideremos la colección $\{\widetilde{U}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, donde,

$$\begin{aligned} \widetilde{U}_\gamma &:= (U_\gamma \cup F^c) \cap K \\ &= \underbrace{(V_\gamma \cup F^c)}_{\in \tau} \cap K \in \tau\big|_K \end{aligned}$$

Notemos que $\{V_\gamma \cup F^c\}_\gamma$ es un cubrimiento abierto de X, luego dado $k \in K$ se tiene que $k \in X$ y entonces $x \in V_\gamma \cup F^c$ para algún $\gamma \in \Gamma$, por lo que se concluye que,

$$K \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \widetilde{U}_\gamma$$

Como K es compacto, entonces existe un subcubrimiento finito tal que,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_{\gamma_i}$$

Ahora demostremos que $\{U_{\gamma_i}\}_{i=1}^n \subseteq \tau\big|_F$ es subcubrimiento abierto de F. Sea $f \in F \subseteq K$, entonces existe γ_i tal que,

$$f \in \widetilde{U}_{\gamma_i} = (V_\gamma \cup F^c) \cap K$$

Aquí se concluye que $f \in V_{\gamma_i}$, por tanto $f \in U_\gamma$. Finalmente,

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}$$

Es decir. F es compacto. ■

Proposición: *Sea (X, τ) espacio topológico Hausdorff. Sea $K \subseteq X$, si K es compacto, entonces es cerrado.*

Demostración: Demostremos que $K^c = X \setminus K$ es abierto. Sean $y \in K^c$ $x \in K$, dado que X es Hausdorff exsiten U_x, V_x abiertos tales que $y \in U_x, x \in V_x$ y que $U_x \cap V_x = \emptyset$. Tomemos y fijos, luego consideremos la colección de abiertos $\{V_x\}_{x \in K}$ consecuencia de aplicar Hausdorff a cada $x \in K$. Observemos que,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} V_x$$

Si K es compacto, entonces existe una colección finita $\{1, \cdots, n\}$ tal que,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$$

Notemos que los $\{x_1, \cdots, x_n\}$ inducen una colección finita $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$ de abiertos. Definimos,

$$U_y := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

Luego U_y es abierto que contiene a y. Se cumple que,

$$U_y \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \right) = \emptyset$$

Aqui podemos concluir que,

$$U_y \cap K = \emptyset$$

Ahora vamos a tomar $y \in K^c$ arbitrario, de forma que,

$$\bigcup_{y \in K^c} U_y \cap K = \emptyset$$

Esto implica que,

$$\bigcup_{y \in K^c} U_y \subseteq K^c$$

Y si,

$$K^c \subseteq \bigcup_{y \in K^c} U_y$$

Se obtiene que,

$$K^c = \bigcup_{y \in K^c} U_y$$

Es decir, K^c es unión arbitraria de abierto de τ. Por lo tanto K^c es abierto y finalmente K es cerrado. ■

Teorema: *Sea $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ una función topológica continua ($\mathbb{R}$ se considera las bolas abiertas). Sea $K \subseteq X$ compacto, entonces $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ es acotado y alcanza sus máximos en K.*

Demostración: Definimos,

$$A_n := \{x \in X : f(x) < n\}$$

En particular, $A_n \subseteq A_{n+1}$. Observemos que,

$$A_n = f^{-1}(-\infty, n)$$

Si $(-\infty, n)$ es abierto en $\mathbb{R}$, entonces por continuidad se tiene que A_n es abierto en τ. Por otro lado,

$$K \subseteq X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Luego $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de K. Dado que K es compacto, existe una colección finita $\{n_1, \cdots, n_s\}$ tal que $\{A_{n_i}\}_{i=1}^{s}$ cubren a K. Por tanto,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} A_i \subseteq A_s$$

Es decir, $f(K) \subseteq (-\infty, s)$. Esto implica que es acotado superiormente.

Demostremos que $f(K)$ alcanza al máximo. Dado que $f(K)$ es acotado superiormente, entonces existe el supremo, sea $S := \sup f(K)$. Definimos,

$$B_n := \{x \in X : f(x) < s - 1/n\}$$

En particular $B_n \supseteq B_{n+1}$. Luego $B_n = f^{-1}(-\infty, s - 1/n)$, de forma que B_n es abierto en τ. Además, se cumple que,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{x \in X : f(x) < s\}$$

Aqui tenemos dos posibles casos:

(1) Existe un $\overline{x} \in K$ tal que $f(\overline{x}) = S$. En este caso estamos listo.

(2) No existe tal $\overline{x}$.

Supongamos que ocurre (2), entonces $f(x) < S$ para todo $x \in K$, esto implica que,

$$K \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

Luego como K es compacto se tiene que existen $\{n_1, \cdots, n_l\}$ tal que $\{B_{n_i}\}_{i=1}^{l}$ es un cubrimiento abierto de K. Entonces,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} B_{n_i} \subseteq B_{n_1}$$

es decir, $f(x) < S - 1/n_1$ para todo $x \in K$. Pero esto implica que $S - 1/n_1$ es una cota superior menor al supremo S, siendo contradicción. Por lo tanto el caso (2) es imposible que suceda y por lo tanto, existe $\overline{x} \in K$ tal que $f(\overline{x}) = S$. ■

2. Espacios de Operadores Lineales Acotados

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Sabemos que induce una métrida $d_{\|\cdot\|}$, pero el inverso no es tan simple.

Afirmación: *Sea (X, d) un espacio métrico con X vectorial, este está definido por una norma si y sólo si,*

i) $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ *para todo* $x, y, z \in X$

ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ *para todo*$x, y \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ó $\mathbb{C}$)*

Demostrar: Supongamos que se cumplen i) y ii). Definimos la función $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ dada por,

$$\|x\| := d(x, x)$$

Probemos que es una norma.

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow d(x, x) = 0$

terminar....

Veamos que pasa con los espacios topológicos.

Definición: *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que es un espacio vectorial topológico si las funciones,*

$$\begin{aligned} \phi : X \times X &\to x \\ \phi(x, y) &= x + y \\ \psi : \mathbb{R} \times X &\to X \\ \psi(\lambda x) &= \lambda x \end{aligned}$$

Son continuas ($X \times X$ y $\mathbb{R} \times X$ considerando la topología producto).

Nota:

- En un espacio vectorial, un subespacio se refiere a un subespacio lineal y en un espacio vectorial normado, un subespacio hereda la norma.
- Un subespacio cerrado de un espacio vectorial normado es un subespacio cerrado de acuerdo a la topología inducida por la norma.
- Sea X espacio vectorial, dado $Z \subseteq X$, definimos,

$$\operatorname{span}(Z) := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda z_k : n \in \mathbb{N}, \lambda_k \in \mathbb{R}, z_k \in Z \right\}$$

Definición: *Decimos que un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy convergente.*

Proposición: *Un subespacio métrico de un espacio métrico completo es completo si y sólo si cerrado.*

Demostración: Sea X espacio métrico completo y sea $K \subseteq X$. Si K es completo, sea k punto límite de K, entonces existe sucesesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ el cual es Cauchy, como K es completo, entonces necesariamente $k \in K$. Luego todo punto límite de K está en K, es decir, K es cerrado.

Supongamos ahora que K es cerrado. Sea $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una sucesión de Cauchy sobre K, esto implica que sea sucesión sobre X y como X es completo, se tiene que la sucesión converge en $k \in X$. Dado que k es punto límite, se tiene que necesariamente $k \in K$. Luego K es completo. ■

Definición: *Decimos que un espacio vectorial normado es Banach si es completo.*

Proposición: *Un subespacio vectorial normado es Banach si y sólo si es cerrado.*

Demostración: La demostración proviene de la proposición anterior. ■

Definición: *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que $Z \subseteq X$ es denso si y sólo si $\overline{Z} = X$.*

Definición: *Decimos que un espacio métrico (X, d) es separable si existe subconjunto denso y numerable.*

Ejemplo: $\mathbb{R}$ es un espacio métrico separable, dado que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Proposición: *Sea (X, d) espacio métrico separable. Si $Y \subseteq X$, entonces $(Y, d\big|_Y)$ es separable.*

Ejemplo: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es separable (pero no de forma evidente) **Demostrar**

Nota: En un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ definimos,

- $B(x, r) := \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ (bola abierta).
- $\overline{B(x, r)} := \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$ (bola cerrada).
- $S(x, r) := \{y \in X : \|x - y\| = r\}$ (borde de la bola).
- Dados $A, B \subseteq X$, se tiene,

$$A + \lambda B = \{a + \lambda b : a \in A, b \in B\}$$

Observación: Se satisface que $B(x, r) = \{x\} + rB(0, 1)$, y entonces podemos concluir que las bolas centradas en x_0 forman una base de vecindades de x_0.

2.1. Ejemplos de Espacios Banach

Ejemplo: $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial normado Banach con norma $|\cdot|$ (valor absoluto).

Afirmación: $\mathbb{C}$ *es un espacio Banach con respecto a la norma* $|\cdot|$.

Demostración: Sea $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$ sucesión de Cauchy. Entonces se tiene que,

$$|x_n - x_m|^2 \leq |x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2 = |z_n - z_m|^2$$
$$|y_n - y_m|^2 \leq |x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2 = |z_n - z_m|^2$$

Entonces es directo que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones Cauchy en $\mathbb{R}$ y por tanto son convergentes. Entonces, si $x_n \to x$ e $y_n \to y$, entonces $z_n \to z$. Por lo que $\mathbb{C}$ es completo. ■

Ejemplo: El espacio vectorial normado $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ donde si $p \in [1, \infty)$, se define la norma p por,

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Y si $p = \infty$, definimos,

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\cdots,n} |x_i|$$

Afirmación: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ *es Banach para todo* $p \in [1, \infty]$.

Demostración: No demostraremos que $\|\cdot\|_p$ es norma para todo $p \in [1, \infty]$, solo demostraremos que es Banach.

- **Caso $1 \leq p < \infty$:** Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy donde $x_k = (x_k^1, x_k^2, \cdots, x_k^n)$. De forma que obtenemos las sucesiones $\{x_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ para todo $i = 1, \cdots .n$. Notemos que,

  $$|x_k^i - x_s^i| \leq \|x_k - x_s\|_p \,; \quad \text{para todo } i = 1, \cdots, n.$$

  Entonces si la sucesión de los x_k es Cauchy, entonces las sucesiones de la forma x_k^i con $i = 1, \cdots, n$ son Cauchy en $\mathbb{R}$ y por tanto convergen, digamos que x_k^i converge a x_0^i. Entonces se tiene que x_k converge a $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n)$. Luego $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ es Banach para todo $p \in [1, \infty)$.

- **Caso $p = \infty$:** Es análogo al anterior, en particular,

  $$|x_k^i - x_s^i| \leq \|x_k - x_s\|_\infty$$

  Luego podemos definir x_0 igual que antes y verificar que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ es Banach.

Afirmación: *Si* $0 < p < 1$, *entonces* $\|\cdot\|_p$ *no es norma.*

Demostración: Sea $p \in (0, 1)$. Podemos definir,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Si tomamos $x = (1, 0, \cdots, 0)$ e $y = (0, 1, \cdots, 0)$, entonces,

$$\|x + y\|_p = 2^{1/p} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$$

Por lo que no se cumple la desigualdad triangular. ■

Ejemplo: El espacio vectorial normado $(L^p, \|\cdot\|_p)$ se define sobre el conjunto,

$$L^p := \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}$$

Con norma definida,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

donde $p \in [1, \infty)$. Y el espacio vectorial normado $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ se define sobre el conjunto,

$$l_\infty := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \text{existe } M > 0 \text{ tal que } |x_n| \leq M \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

Con norma definida,

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

Afirmación: $(L^p, \|\cdot\|_p)$ *es Banach para todo* $p \in [1, \infty]$.

Demostración: Sea $\{x_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en L^p. Notemos que se cumple que,

$$|x_k^i - x_s^i| \leq \|x_k - x_s\|_p$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $p \in [1, \infty]$. Luego cada componente es Cauchy y luego converge a un valor x_0^i. Finalmente definimos $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \cdots)$ tal que $x_0 \in L^p$ y que x_k converge a x_0. ■
terminar... algun dia

Ejemplo: El espacio vectorial normado $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ se define sobre el conjunto,

$$C_0 := \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

Con norma $\|\cdot\|_\infty$ sobre sucesiones.

Afirmación: $(C_0, \|\cdot\|_\infty)$ *es Banach.*

Demostración: Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy, entonces,

$$|x_k^i - x_s^i| \leq \|x_k - x_s\|_\infty$$

Luego aquí podemos definir un punto límite $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \cdots)$ donde $x_0 \in C_0$ y que x_k converge a x_0.

Ejemplo: Sea S un conjunto cualquiera y sea,

$$\mathcal{F}_b(S) := \{f : S \to \mathbb{R} : f \text{ acotada}\}$$

Y definimos,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in S} |f(x)|$$

Afirmación: $(\mathcal{F}_b(S), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio vectorial normado Banach.*

Demostración: Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{F}_b(S)$. Sea $x \in S$, entonces definimos la sucesión real $x_n := f_n(x) \in \mathbb{R}$ tal que,

$$|x_n - x_m| = |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

Esto implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por tanto, converge a x_0. Definimos la función,

$$\begin{aligned} f_0 : S &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_0(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

Además f_0 es acotado puesto que,

$$|f_0(x)| = |f_0(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y)| \leq |f_0(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$

terminar

Ejemplo: Sea (X, τ) espacio topológico y sea $C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada y continua}\}$. Consideremos,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$$

Afirmación: $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ *es un espacio vectorial normado Banach.*

Ejemplo: Sea (K, σ) espacio topológico compacto y Hausdorff. Sea $C(K) := \{f : K \to R : f \text{ continua}\}$. Consideremos,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|$$

Afirmación: $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ *es espacio vectorial normado Banach.*

Ejemplo: Sea $X = C[0,1]$ (funciones continuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$). Consideremos,

$$\|f\| := \int_0^1 |f(x)| dx$$

Afirmación: $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio vectorial normado pero no es Banach.*

Demostración: Ver que es e.v.n.

Demostremos que no es Banach. Consideremos la sucesión de funciones continuas,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\| &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx \\ &= \int_{1/2}^1\end{aligned}$$

terminar. Por lo que es Cauchy en X. Esta función converge a,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Que no es continua y por tanto X no es Banach. ■

Observación: Para que $(C[0,1], \|\cdot\|)$ sea Banach debemos completar con elementos. Al hacer esto obtenemos la completación que es $L^1[0,1]$.

Ejemplo: Sea $X = C[0,1]$ y sea,

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^1 |f(x)^2|dx\right)^{1/2}$$

Afirmación: $(X, \|\cdot\|_2)$ *es un espacio vectorial normado no Banach.*

Demostración: Probar que es norma

Para ver que no es Banach, basta usar la misma función del ejemplo anterior, es decir, tomar,

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Que converge a una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ no continua. Por lo que X no puede ser Banach. ■

Observación: Si completamos $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ obtenemos L^2 y en general, si consideramos $C[0,1]$ y tomamos la norma,

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)^2|dx\right)^{1/2}$$

con $p \in [1, \infty)$. Entonces no es Banach con completación Banach L^p.

Ejemplo: Sea $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$ un espacio de medida. Se define,

$$L^p([0,1]) := \left\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ medible tal que } \int_0^1 |f(x)|^p dx\right\} \Big/ \sim$$

Donde $f \sim g$ si y sólo si $f = g$ en casi todas partes. Se define la norma,

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/2}$$

para $1 \leq p < \infty$. Y para $p = \infty$ se define la norma,

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Afirmación: $(L^p([0,1]), \|f\|_p)$ *es un espacio vectorial normado Banach para todo* $p \in [1, \infty]$.

Demostrar...

Nota: El espacio vectorial normado $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ también es Banach para todo $p \in [1, \infty]$.

Ejemplo: Sea $X = C[-1,1] \cap \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} : f$ continua y $f'(0)$ existe$\}$. Consideremos,

$$\|f\|_* := \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| + |f'(0)|$$

Afirmación: $(X, \|\cdot\|_*)$ *es un espacio vectorial normado no Banach.*

Demostrar que es e.v.n y que es no es Banach.

Ejemplo: Consideremos el siguiente conjunto,

$$X = \left\{ f(t) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikt} : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{C} \right\}$$

Y consideremos la función,

$$\|f\| = \left(\sum_{k=-n}^{n} |C_k|^2 \right)^{1/2}$$

Afirmación: $(X, \|f\|)$ *es un espacio vectorial normado no Banach.*

Demostrar que es e.v.n y que no es Banach.

2.2. Criterio de Completitud, Completación y Espacio Cociente

Hemos vistos varios ejemplos de espacios Banach y otros que no lo son. Podemos ver que determinar cuando un espacio es Banach no es tan fácil y que en algunos casos podemos completar el conjunto para que sea Banach.

Teorema: *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio vectorial normado. Entonces* X *es Banach si y sólo si para toda sucesión* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ *se satisface,*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} x_n \text{ existe en } X$$

Demostración: Supongamos que X es Banach. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$$

Sea $S_n := x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in X$, y consideremos $n \geq m$, entonces,

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} x_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|x_i\|$$

Si la serie de los $\|x_n\|$ converge, entonces la suma que parte de $m+1$ a n de los $\|x_k\|$ está controlado, entonces se tiene que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en X, luego como X es Banach, S_n converge a un punto límite $S_0 \in X$, es decir,

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n = S_0 \in X$$

De forma que existe el límite en X.

Probemos la otra dirección. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy. Podemos definir la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que,

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$$

Luego definimos $y_1 := x_{n_1}$ y $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$ con $k \geq 2$. Entonces se cumple que,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} \|y_k\| &= \|x_{n_1}\| + \sum_{k\in\geq 2} \|y_k\| \\ &\leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k\geq 2} 2^{-(k-1)} < \infty\end{aligned}$$

Luego por hipótesis se tiene que,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} y_k = \lim_{N\to\infty} x_N$$

existe en X y por lo tanto X es Banach. ■

Definición: *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ es una completación de X si satisface las siguientes propiedades,*

1) *$(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ es completo.*
2) *$\widetilde{d}\big|_X = d$.*
3) *$X \subseteq \widetilde{X}$ es denso en $\widetilde{X}$.*

Ejemplo: La completación de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ es $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ puesto que es completo, tomamos el valor absoluto como métrica y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ejemplo: El espacio métrico $(C[0,1], \|\cdot\|_p)$ tiene por completación $(L^p[0,1], \|\cdot\|_p)$

Teorema: *Para todo espacio métrico, existe una única completación salvo isometría.*

Teorema: *Para todo espacio vectorial normado X existe un Banach $\widetilde{X}$ tal que $X \subseteq \widetilde{X}$ es denso en $\widetilde{X}$, y es único (salvo isometría.)*

Definición: *Sea X un espacio vectorial. Sea $Z \subseteq X$, definimos la relación de equivalencia módulo Z por,*

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Z$$

para todo $x, y \in X$

Afirmación: $\sim$ *es, enfecto, una relación de equivalencia.*

Demostración: Basta con demostrar que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexiva:** Si Z es subespacio, entonces contiene a 0. Luego $x \sim x$ puesto que $x - x = 0 \in Z$.
- **Simétrica:** Si $x \sim y$, entonces $x - y \in Z$. Como Z es subespacio, entonces,

  $$y - x = 0 - (x - y) \in Z$$

  De forma que $y \sim x$.
- **Transitiva:** Supongamos que $x \sim y$ e $y \sim z$, luego,

  $$x - z = (x - y) + (y - z) \in Z$$

  De forma que $x \sim z$.

Luego $\sim$ es una relación de equivalencia. ■

Definición: *Sea X espacio vectorial y sea $Z \subseteq X$. Definimos el espacio cociente sobre Z por,*

$$X/Z = X/\sim := \{[x] : x \in X\}$$

Donde $[x] = \{y \in X : x \sim y\} = \{y \in X : x - y \in Z\} = x + Z$.

Afirmación: *X/Z es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial hederado por X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

Por demostrar

Si consideramos X un espacio vectorial normado y Z subespacio vectorial normado cerrado de X. Entonces en X/Z podemos definir la norma,

$$\begin{aligned} \|[x]\| &:= \inf\{\|y\| : x \sim y\} \\ &= \inf\{\|x + z\| : z \in Z\} \end{aligned}$$

Afirmación: $(X/Z, \|\cdot\|)$ *es un espacio vectorial normado.*

Demostración: Debemos probar los tres axiomas de norma sobre X/Z.

i) Notemos que,

$$\|[0]\| = \text{ínf}\{\|y\| : 0 \sim y\} = \text{ínf}\{\|z\| : z \in Z\} = 0$$

Puesto que Z al ser subespacio, claramente $0 \in Z$. Por otro lado, sea $x \in X$ tal que,

$$\|[x]\| = 0 \Leftrightarrow \text{ínf}\{\|x+z\| : z \in Z\} = 0$$

Luego existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Z$ tal que,

$$\lim_{n\to\infty} \|x + z_n\| = 0$$

Pero esto es equivalente a decir que z_n converge a $-x$ cuando $n \to \infty$ (convergencia en espacios normados), es decir, $-x$ es un punto límite de Z, y si Z se puede pensar como espacio métrico y es cerrado, se tiene que $-x \in Z$ y por tanto $[-x] = [x] = 0$.

ii) Sea λ escalar. Notemos que,

$$\lambda[x] = [\lambda x]$$

Entonces para todo $\lambda \neq 0$ se tiene que,

$$\begin{aligned}\|\lambda[x]\| &= \|[\lambda x] = \text{ínf}\{\|\lambda x + z\| : z \in Z\} \\ &= \text{ínf}\{|\lambda|\|x + z/\lambda\| : z \in Z\} \\ &= |\lambda| \,\text{ínf}\{\|x + z/\lambda\| : z \in Z\} = |\lambda|\|[x]\|\end{aligned}$$

La ultima igualdad se verifica puesto que z/λ se puede pensar como cualquier elemento de $z \in Z$. Si $\lambda = 0$ entonces es directo que,

$$\|0[x]\| = \|[0]\| = 0 = 0\|[x]\|$$

iii) Sea $[w] \in X/Z$, se cumple que,

$$\|[w]\| = \text{ínf}\{\|w+z\| : z \in Z\} \leq \|w + 0\| = \|w\|$$

Por otro lado si $w \sim y$, en particular $w = y + z_1$ con $z_1 \in Z$ fijo, entonces,

$$\|[w]\| = \text{ínf}\{\|w+z\| : z \in Z\} = \text{ínf}\{\|y + z_1 + z\| : z \in Z\} = \|[y]\|$$

Entonces se tiene que,

$$\|[x+y]\| \leq \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \|[x+y]\| - \|x\| \leq \|y\|$$

Luego para todo $w \in X$ tal que $w \sim y$ se tiene que $x + w \sim x + y$ y se cumple,

$$\|[x+y]\| - \|x\| = \|[x+w]\| - \|x\| \leq \|w\|$$

Luego se tiene que,

$$\|[x+y]\| \leq \|x\| + \|[y]\|$$

De forma análoga con x se puede concluir que,

$$\|[x+y]\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$$

Por lo que se cumple la desigualdad triangular.

Demostrando que $\|\cdot\|$ es una norma en X/Z. ■

2.3. Operadores Acotados y Continuos

Definición: *Sean X, Y espacios vectoriales. Un operador de X en Y, es un mapa $T : X \to Y$ que satisface,*

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$ y λ_1, λ_2 escalares. Definimos el espacio de los operadores lineales por,

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y : T \text{ es lineal}\}$$

Con respecto a un operador lineal T, definimos el kernel y el conjunto imagen por,

$$\begin{aligned} \ker T &:= T^{-1}(\{0\}) \\ \mathrm{Im} T &:= T(X) \end{aligned}$$

Afirmación: *Ambos conjuntos son subespacios vectoriales sobre sus respectivos conjuntos.*

Demostración: Solo demostraremos que $\ker T$ es subespacio de X ya que $\mathrm{Im}T$ es análogo. Notemos que $T(0) = 0$, luego $0 \in \ker T$. Sean $x, y \in \ker T$ y λ, μ escalares, entonces,

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) = 0$$

Entonces $\lambda x + \mu y \in \ker T$, de forma que es subespacio de X. ■

Definición: *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Diremos que es un isomorfismo si y sólo si T es inyectiva y sobreyectiva. En tal caso decimos que $X \cong Y$ o que son isomorfos.*

El concepto de isomorfismo, nos dices que tienen una estructura similar salvo los elementos.

Afirmación: *El conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de Y.*

Demostración: Notemos que λT donde $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ con λ, está bien definida puesto que $\lambda T(x) \in Y$ para todo $x \in X$ e Y es un espacio vectorial. Notemos que la suma también está bien definida, puesto que si $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces,

$$(T + S)(x) = T(x) + S(x) \in Y$$

para todo $x \in X$. Luego toda combinación lineal de los elementos de $\mathcal{L}(X, Y)$ está bien definido. Además, 0 **ver que otra cosa falta**

Definición: *Diremos que un operador lineal $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es acotado si existe $C > 0$ tal que,*

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$$

para todo $x \in X$. Además definimos el conjunto de todos los operadores lineales por:

$$B(X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ acotado}\}$$

Nota: En algunos casos escribiremos Tx en vez de $T(x)$ y también en algunos casos no especificaremos el conjunto donde esta definido la norma, escribiendo simplemente $\|\cdot\|$.

Proposición: $B(X,Y)$ *es un espacio vectorial.*

Demostración (revisar): Sean $T, S \in B(X,Y)$ y sean λ, μ escalares, entonces,

$$\begin{aligned}\|(\lambda T + \mu S)(x)\|_Y &= \|\lambda Tx + \mu Sx\|_Y \\ &\leq |\lambda|\|Tx\|_Y + |\mu|\|Sx\|_Y \\ &\leq |\lambda| C_X \|x\|_X + |\mu| C_Y \|x\|_X \\ &= (|\lambda| C_X + |\mu| C_Y)\|x\|_X\end{aligned}$$

Esto se cumple para todo $x \in X$. Por lo tanto $\lambda T + \mu S \in B(X,Y)$.

Notación: Sea X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Denotamos el espacio dual algebraico de X por $X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$, y denotaremos el dual topológico de X por $X^* = B(X,\mathbb{R})$. Y para $f \in X^*$ (ó X') tenemos $f(x) = \langle f, x\rangle$, donde,

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X' \times X \to \mathbb{R}$$

es bilineal.

Teorema: *Sean* X, Y *espacios vectoriales normados y sea* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) T *es continua en* X *(con la topología inducida por las normas).*

ii) T *es continua en un punto* $x_0 \in X$.

iii) T *es acotado.*

Demostración: Como estamos usando la topología inducida por las normas, podemos pensar la continuidad habitual en espacios métricos al ser equivalentes.

- **i) implica ii):** Si T es continua en X, entonces claramente es continua en $x_0 \in X$.
- **ii) implica iii):** Sea T continua en $x_0 \in X$. Sabemos que,

  $$T(x_0) + B_Y(0,1)$$

  es una vecindad de $T(x_0)$. Luego por la continuidad en x_0, existe $\delta > 0$ tal que si $x = x_0 + z$ donde $z \in \delta B_X(0,1)$, entonces,

  $$T(x_0) + T(z) = T(x) \in T(x_0) + B_Y(0,1)$$

  Lo importante es que $T(z) \in B_Y(0,1)$, es decir, si $\|z\|_X < \delta$, entonces $\|T(z)\|_Y < 1$. Por lo tanto, para $0 < \widetilde{\delta} < \delta$ se tiene que,

  $$\|T(x)\|_Y = \left\| T\left(\frac{\widetilde{\delta} x}{\|x\|_X}\right)\right\| \cdot \frac{1}{\widetilde{\delta}}\|x\|_X$$

Observemos que,

$$\widetilde{\delta}\frac{x}{\|x\|} \leq \widetilde{\delta} < \delta$$

Entonces,

$$\|T(x)\|_Y \leq \frac{1}{\widetilde{\delta}}\|x\|_X$$

para todo $x \in X$. Por lo que T es acotado.

- **iii) implica i):** Sea T acotado, luego existe $C > 0$ tal que,

$$\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$$

para todo $x \in X$. Notemos que para todo $x, y \in X$ se cumple que,

$$\|T(x) - T(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X$$

Esto implica que T es Lipschitz y por tanto T es continua en X.

Demostrando el teorema. ■

Este teorema es importante ya que entonces $B(X,Y)$ es el conjunto de todas las funciones continuas de X a Y.

Definición: *Sean X, Y espacio vectorial normado. Entonces X, Y son isomorfos isométricos topologicamente si y sólo si existe $T : X \to Y$ tal que es isometría lineal biyectiva bicontinua.*

Corolario: *Sean X, Y espacios vectoriales normados. Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces T es isomorfia topologicamente si y sólo si $T \in B(X,Y)$ es invertible y $T^{-1} \in B(Y,X)$.*

Demostración: Si T es isomorfía topologicamente, entonces es lineal, biyectiva y bicontinua, es decir, $T \in B(X,Y)$ y $T^{-1} \in B(Y,X)$. Por otro lado, si $T \in B(X,Y)$ y $T^{-1} \in B(Y,X)$, entonces T es biyectiva lineal y bicontinua, es decir, T es isomorfía topologicamente. ■

Observación: Sea X espacio vecorial normado. Supongamos que tiene dos normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, entonces generan la misma topología si y sólo si existen $c, d > 0$ tales que,

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq d\|x\|_1$$

Definición: *Sean X, Y espacios vectoriales normados. En $B(X,Y)$ definimos la norma por,*

$$\|T\| := \text{ínf}\{C > 0 : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \textit{ para todo } x \in X\}$$

Proposición: *Sea X, Y espacios vectoriales normado. Entonces la norma en $B(X,Y)$ está bien definida y se alcanza.*

Demostración: Sea $T \in B(X,Y)$, entonces por definición T es acotado, es decir existe $C > 0$ tal que $\|Tx\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$. Esto implica que el conjunto,

$$\{C > 0 : \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \text{ para todo } x \in X\}$$

no es vacío. Además está incluido en el conjunto $(0, \infty)$, es decir, es acotado inferiormente, por lo que el ínfimo existe.

Demostremos que se alcanza. Sea $\varepsilon > 0$, luego $\|T\| + \varepsilon$ no es cota inferior, existe $0 \leq \delta < \varepsilon$ tal que,

$$\|T\| + \delta \in \{C > 0 : \|Tx\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in X\}$$

Luego para todo $x \in X$ se tiene que,

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &\leq (\|T\| + \delta)\|x\|_X \\ &\leq (\|T\| + \varepsilon)\|x\|_X \end{aligned}$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que,

$$\|Tx\|_Y \leq (\|T\| + \varepsilon)\|x\|_X$$

Lo que implica que,

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$$

Es decir, el ínfimo se alcanza. ■

Nota: Con respecto a la norma de $B(X, Y)$ en algunos casos no denotaremos $\|\cdot\|_{B(X,Y)}$ pero en otros casos cuando ya trabajemos con más conjuntos acotado lo denotaremos por un tema de orden.

Proposición: *Sea X, Y espacios vectoriales normado. Entonces la norma de $B(X, Y)$ satisface que,*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \end{aligned}$$

Demostración: Vamos a decir que,

$$\begin{aligned} (1) &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y \\ (2) &= \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y \\ (3) &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \end{aligned}$$

Por definición sabemos que $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Aquí tenemos tres casos:

a) Si $\|x\|_X \leq 1$, entonces $\|Tx\|_Y \leq \|T\|$, por lo que $(1) \leq \|T\|$.

b) Si $\|x\|_X = 1$, entonces $\|Tx\|_Y \leq \|T\|$, por lo que $(2) \leq \|T\|$.

c) Si $x \neq 0$, entonces,

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X \Leftrightarrow \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T\|$$

Por lo que $(3) \leq \|T\|$.

Por lo tanto $(1),(2),(3) \leq \|T\|$. Probemos la otra desigualdad. Si $\widetilde{C} < \|T\|$, entonces existe $\widetilde{x} \in X$ tal que,

$$\widetilde{C}\|\widetilde{x}\| \leq \|T\widetilde{x}\|_Y$$

donde $\widetilde{x} \neq 0$. Entonces,

$$\widetilde{C} < \frac{\|T\widetilde{x}\|_Y}{\|\widetilde{x}\|_X} \Leftrightarrow \widetilde{C} < \left\|T\left(\frac{\widetilde{x}}{\|\widetilde{x}\|_X}\right)\right\|_Y$$

De aquí podemos concluir que $\widetilde{C} < (1),(2),(3)$. Esto implica $\|T\| \leq (1),(2),(3)$, por lo tanto,

$$\|T\| = (1) = (2) = (3)$$

Como queriamos demostrar. ■

Afirmación: *$\|T\|$ es una norma bien definida en $B(X,Y)$.*

Demostración: Debemos probar los tres axiomas de norma.

i) Sea $T \in B(X,Y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|T\| = 0 &\Leftrightarrow \|Tx\|_Y \leq 0 \text{ para todo } x \in X\\ &\Leftrightarrow T = 0\end{aligned}$$

ii) Para todo $x \in X$ se cumple que,

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \frac{\|(\lambda T)x\|_Y}{|\lambda|\|x\|_X}$$

aplicando el supremo sobre los $x \neq 0$, se obtiene que,

$$\|T\| = \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda T\|$$

Por lo tanto $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$.

iii) Sean $T, S \in B(X,Y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|T+S\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|(T+S)(x)\|_Y\\ &\leq \sup_{\|x\|_X=1} (\|Tx\|_Y + \|Sx\|_Y)\\ &\leq \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y + \sup_{\|x\|_X=1} \|Sx\|_Y\\ &= \|T\| + \|S\|\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T\|$ es norma bien definida. ■

Teorema: *Sea X, Y espacios vectoriales normado. Si Y es Banach, entonces $B(X,Y)$ es Banach.*

Demostración: Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X,Y)$ una sucesión de Cauchy. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon$$

para todo $n, m \geq N$. Sea $x \in X$ fijo, entonces $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión definida en Y. Notemos que para $\varepsilon > 0$, si tomamos N como antes, se tiene que,

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \leq \|T_n - T_m\|\|x\|_X \leq \varepsilon\|x\|_X$$

para todo $n, m \geq N$. Como x es fijo, se tiene que $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y, por lo que converge en Y. Digamos que,

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \in Y$$

Esto define una función,

$$\begin{aligned} T : X &\to Y \\ x &\mapsto Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x \end{aligned}$$

Afirmación: *T es una función lineal y acotada.*

Demostración: Demostremos que es lineal y acotada.

- **Lineal:** Sean $x, y \in X$ y λ, μ escalares, entonces,

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu\lambda) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + \mu y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda T_n(x) + \mu T_n(y) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \mu \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\ &= \lambda T(x) + \mu T(y) \end{aligned}$$

  Luego T es lineal.

- **Acotada:** Sea $x \in X$, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|T_n x - T_m x\|_Y < \varepsilon$$

  para todo $n, m \geq N$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &\leq \|Tx - T_m x\|_Y + \|T_m x\|_Y \\ &= \lim_{n\to\infty} \|T_n x - T_m x\|_Y + \|T_m x\|_Y \\ &< \varepsilon + \|T_m x\|_Y \\ &\leq \varepsilon + \|T_m\|\|x\|_X \end{aligned}$$

tomando $m \geq N$. Si consideremos $\|x\|_X \leq 1$, obtenemos que,

$$\|Tx\|_Y \leq \varepsilon + \|T_m\|$$

Por definición la norma se define por:

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$$

Luego,

$$\|T\| \leq \varepsilon + \|T_m\| < \infty$$

para todo $m \geq N$. Es decir, la norma es acotada y por tanto bien definida. Esto implica que T es acotada.

De esta forma $T \in B(X, Y)$, es decir, es lineal y acotada. ■

Demostremos que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a T. Sea $x \in X$, entonces,

$$\begin{aligned} \|Tx - T_m x\|_Y &= \lim_{n\to\infty} \|T_n x - T_m x\|_Y \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|T_n - T_m\| \|x\|_X \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\|_Y < \varepsilon$ para todo $n, m \geq N$. Entonces al tomar $m \geq N$ se obtiene que,

$$\|Tx - T_m x\|_Y < \varepsilon \|x\|_X$$

Esto implica que para todo $m \geq N$ se tiene que,

$$\|T - T_m\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx - T_m x\|_Y < \varepsilon$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = T$$

Demostrando que $B(X, Y)$ es Banach. ■

Nota: Sea X un $\mathbb{R}$-e.v normado (ó bien en $\mathbb{C}$). Entonces el espacio dual topólógico $X^* = B(X, \mathbb{R})$ es Banach por el resultado anterior.

Por otro lado, podemos extender la norma en $B(X, Y)$ a todo $\mathcal{L}(X, Y)$. Esta norma se define como,

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Luego podemos entender $B(X, Y)$ de la siguiente forma:

$$B(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y) \cap \{\|T\| < \infty\}$$

2.4. Operadores Adjuntos

Sean X, Y espacios vectoriales normado sobre $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$). Sea $T \in B(X,Y)$ Definimos el operador adjunto de T por:

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\to X^* \\ g &\mapsto T^*_g \end{aligned}$$

donde $T^*_g(x) = g(T(x))$.

Afirmación: T^* *está bien definido, es lineal y es acotado.*

Demostración:

- **Bien definido:** Sea $g : Y \to \mathbb{R}$ una función lineal acotada ($g \in Y^*$), si $T \in B(X,Y)$, entonces $g \circ T \in B(X, \mathbb{R})$ al ser ambas acotadas y lineales. Entonces $g \circ T \in X^*$ y por lo tanto $T^*_g \in X^*$, de forma que está bien definida.
- **Lineal:** Sean $g, f \in Y^*$ y sean λ, μ escalares. Entonces para todo $x \in X$ se tiene que,

$$\begin{aligned} T^*_{\lambda g+\mu f}(x) &= (\lambda g + \mu f)(T(x)) \\ &= \lambda g(T(x)) + \mu f T((x)) \\ &= \lambda T^*_g(x) + \mu T^*_f(x) \\ &= (\lambda T^*_g + \mu T^*_f)(x) \end{aligned}$$

  Por lo tanto T^* es lineal.
- **Acotado:** Debemos demostrar que para todo $g \in Y^*$ existe $C > 0$ tal que

$$\|T^*_g\|_{X^*} \leq C\|g\|_{Y^*}$$

  Sea $x \in X$, entonces $T^*_g(x) \in \mathbb{R}$, luego se tiene que,

$$\begin{aligned} \left|T^*_g(x)\right| &= |g(T(x))| \\ &\leq \|g\|_{Y^*}\|Tx\|_Y \\ &\leq \|g\|_{Y^*}\|T\|_{B(X,Y)}\|x\|_X \end{aligned}$$

  Por tanto,

$$\begin{aligned} \|T^*_g\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} |T^*_g(x)| \\ &= \|T\|_{B(X,Y)}\|g\|_{Y^*} \end{aligned}$$

  Por lo tanto $T^* \in B(X^*, Y^*)$.

Demostrando la afirmación. ■

Dado que $T^* \in B(X^*, Y^*)$ entonces se le puede definir una norma:

$$\|T^*\|_{B(X^*,Y^*)} = \sup_{\|g\|_{Y^*} \leq 1} \|T^*_g\|_{X^*}$$

En particular,

$$\begin{aligned}\|T^*\|_{B(X^*,Y^*)} &= \sup_{\|g\|_{Y^*}\leq 1} \|T_g^*\|_{X^*} \\ &\leq \|T\|_{B(X,Y)}\end{aligned}$$

De esta forma obtenemos una relación interesante,

$$\|T^*\|_{B(Y^*,X^*)} \leq \|T\|_{B(X,Y)}$$

Más adelante veremos que esto es una igualdad y finalmente escribimos con abuso de notación que,

$$\|T^*\| = \|T\|$$

Y en notación corchete escribimos,

$$\begin{aligned}T_g^*(x) &= \langle T^*g, x\rangle_{X^*\times X} \\ g(T(x)) &= \langle g, Tx\rangle_{Y^*\times Y}\end{aligned}$$

Teorema: *Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados y sean $T \in B(X,Y), S \in B(Y,Z)$. Entonces $ST = S \circ T \in B(X,Z)$ y,*

$$\|ST\|_{B(X,Z)} \leq \|S\|_{B(Y,Z)}\|T\|_{B(X,Y)}$$

En particular, si $B(X) := B(X,X)$ es cerrado bajo la composición de operadores, entonces $B(X)$ es un álgebra de Banach con unidad (identidad), es decir, es un álgebra con unidad y con X Banach tal que para todo $A, B \in B(X)$ se tiene que,

$$\|AB\|_{B(X)} \leq \|A\|_{B(X)}\|B\|_{B(X)}$$

Demostración: Solo demostraremos la primera parte. Vamos a probar que ST es lineal, acotado y satisface la desigualdad del enunciado.

- **Lineal:** Sean $x, y \in X$ y λ, μ constantes, entonces,

$$(ST)(\lambda x + \mu y) = S(\lambda Tx + \mu Ty) = \lambda STx + \mu STy$$

- **Acotada:** Sea $x \in X$, entonces,

$$\|(ST)(x)\|_Z = \|S(Tx)\|_Z \leq \|S\|_{B(Y,Z)}\|Tx\|_Y \leq \|S\|_{B(Y,Z)}\|T\|_{B(X,Y)}\|x\|_X$$

  Luego ST es acotada.

- **Desigualdad:** De lo anterior se tiene que para todo $\|x\|_X \leq 1$, se cumple que,

$$\|(ST)(x)\|_Z \leq \|S\|_{B(Y,Z)}\|T\|_{B(X,Y)}$$

  Es decir, $\|S\|_{B(Y,Z)}\|T\|_{B(X,Y)}$ es cota superior de $\|(ST)(x)\|_Z$ cuando $\|x\|_X \leq 1$, es decir,

$$\|(ST)\|_{B(X,Z)} \leq \|S\|_{B(Y,Z)}\|T\|_{B(X,Y)}$$

Demostrando el teorema. ■

3. Teorema Hanh-Banach

Vamos a introducir el teorema de Hanh-Banach, pero antes necesitamos resultados previos y definiciones.

Definición: *Sea X un conjunto dotado con un orden binario $\leq$, es decir, $(X, \leq)$ es una par donde $\leq$ es reflexivo, es antisimétrico y es transitivo.*

- *Diremos que X está totalmente ordenado, es decir, para todo $x, y \in X$ se tiene que $x \leq y$ ó $y \leq x$.*
- *Diremos que X está parcialmente ordenado, es decir, existen pares $(x, y) \in X \times X$ tales que $\sim (x \leq y)$ y $\sim (y \leq y)$ (hay elementos que no se puede ordenar).*
- *Diremos que un subconjunto de $S \subseteq X$ es una cadena si está totalmente ordenado, es deicir $(S, \leq \big|_S)$ está ordenado.*
- *Un elemento $x \in X$ es maximal si para todo $y \in X$ tal que $x \leq y$, entonces $x = y$.*
- *Un elemento $x \in X$ es cota superior de un conjunto $S \subseteq X$, si $y \leq x$ para todo $y \in S$.*

Lema de Zorn: *Sea X un conjunto parcialmente ordenado que satisface:*

i) $X \neq \emptyset$.

ii) *Toda cadena en X admite una cota superior en X.*

Entonces X tiene al menos un elemento maximal.

El lema de Zorn es un resultado muy importante. Este además es equivalente al axioma de elección sobre la teoría de conjuntos.

Corolario: *Todo espacio vectorial tiene una base.*

Corolario del lema de Zorn: *Sea X conjunto parcialmente ordenado tal que $X \neq \emptyset$ y toda cadena en X admite una costa superior en X. Entonces para todo $a \in X$ existe un elemento maximal $b \in X$ tal que $a \leq b$.*

Demostración Por hacer no fácil:

Sea X espacio vectorial normado (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Nos interesa estudiar el dual topológico $X^* = B(X, \mathbb{R})$.

- ¿Será vacío?
- Si $x, z \in X$ ¿existirá $f \in X^*$ único tal que $f(x) \neq f(z)$?
- ¿Cual es el dual topológico de X^*?

Observación: Sea $f \in X^*$ y consideremos la bola $B = B_X(0, 1)$, entonces $f(B) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto acotado, en particular,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{X^*}$$

para todo $x \in B$. Por lo que,

$$f(B) \subseteq [-\|f\|_{X^*}, \|f\|_{X^*}]$$

Afirmación: *Sea $f \in X' \setminus X^*$, entonces $f(B) = \mathbb{R}$.*

Demostración: Tenemos que f es una función lineal no acotada. Para todo $\lambda > 0$ existe $x_\lambda \in B$ tal que,

$$|f(x_\lambda)| > \lambda$$

Entonces,

$$[-\lambda, \lambda] \subseteq \{f(sx_\lambda) : s \in [-1, 1]\} \subseteq f(B)$$

Tomando $\lambda \to \infty$ se concluye que $f(B) = \mathbb{R}$. ■

Definición: *Sea X espacio vectorial. Sea $Y \subseteq X$ subespacio vectorial de codimensión 1, es decir, $\dim X - \dim Y = 1$. Sea $H := \{\lambda x_0 : \lambda \text{ escalar}\} \oplus Y$ con $x_0 \in X \setminus Y$, entonces diremos que H es un hiperplano afín.*

Afirmación: *Todo elemento de $x \in X$ se escribe de forma única como $x = y + \lambda x_0$ sobre el hiperlano afín H.*

Demostración: Supongamos que x tiene dos escrituras, es decir,

$$x = y_1 + \lambda_1 x_0 = y_2 + \lambda_2 x_0$$

Entonces,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)x_0 = (y_2 - y_1)$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces se tiene que $x_0 \in Y$ siendo imposible, por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2$ y entonces $y_1 = y_2$. Por lo tanto la escritura de x en H es única. ■

Definición:*Sea $f \in X'$ no nulo. Entonces definimos (reescribimos) el kernel de f por:*

$$K(f) := \ker(f) = f^{-1}(\{0\})$$

Y definimos el hiperplano de f por:

$$I(f) := f^{-1}(\{1\})$$

Teorema: *Sea X espacio vectorial.*

a) Si $f \in X'$ y si existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$, entonces $K(f)$ es un subespacio vectorial de X con codimensión 1 y además, para todo $x \in X$ existen únicos $y \in K(f)$ y escalar λ tal que,

$$x = y + \lambda x_0$$

Además, $I(f)$ es un hiperplano que no contiene al $0 \in X$.

b) Sean $f, g \in X' \setminus \{0\}$. Entonces $f = \lambda g$ para algún escalar λ, si y sólo si $K(f) = K(g)$.

c) El mapa $f \mapsto I(f)$ es una biyección entre $X' \setminus \{0\}$ y los hiperplanos afines de X que no contienen al 0.

Demostración: Por hacer...

Ejemplo: Consideremos $X = \mathbb{R}^n$ Para todo $f \in X'$, podemos asociarlo a único elemento $x_f \in \mathbb{R}^n$ tal que,

$$f(x) = x_f \cdot x$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular,

$$\begin{aligned} K(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_f \cdot x = 0\} \\ I(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_f \cdot x = 1\} \end{aligned}$$

Afirmación: $X' \cong \mathbb{R}^n$.

Demostración: Supongamos que trabajamos con las coordenadas habituales en $\mathbb{R}^n$, entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \end{aligned}$$

donde e_i es el vector con 1 en el índice i y ceros en el resto. Esto define un elemento x_f con coordenadas,

$$\begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}$$

De esta forma existe un $x_f \in \mathbb{R}^n$ asociado a f, es más, este x_f es único, si existieran x_f, y_f asociados a f entonces,

$$x_f \cdot x = f(x) = x_g \cdot x$$

Esto para todo $x \in \mathbb{R}^n$, pero esto implica que $x_f = x_g$, luego x_f es único. Acabamos de construir el siguiente mapa:

$$\begin{aligned} \gamma : X' = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^n \\ f &\mapsto g(f) = x_f \end{aligned}$$

Claramente es inyectivo por la unicidad de x_f y es sobreyectivo puesto que dado $y \in \mathbb{R}^n$, podemos definir $f_y(x) := y \cdot x$ el cual es lineal que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Luego γ es una biyección.

Veamos que γ es lineal. Sean $f, g \in X'$ y sean λ, μ escalares, luego,

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda f + \mu g) &= (x_{\lambda f + \mu g}) \cdot x \\ &= \begin{bmatrix} (\lambda f + \mu g)(e_1) \\ \vdots \\ (\lambda f + \mu g)(e_n) \end{bmatrix} \cdot x \\ &= \left(\lambda \begin{bmatrix} f(e_1) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} g(e_1) \\ \vdots \\ g(e_n) \end{bmatrix} \right) \cdot x \\ &= (\lambda x_f + \mu x_g) \cdot x = \lambda \gamma(f) + \mu \gamma(g)\end{aligned}$$

Por lo tanto γ es un isomorfismo y X' es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. ■

Definición: *Sea X espacio topológico. Decimos que $A \subseteq X$ es denso en ninguna parte si,*

$$int(\overline{A}) = \emptyset$$

Teorema: *Sea X un espacio vectorial normado (sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).*

a) Sea $f \in X^*$ no nulo. Entonces $K(f), I(f)$ son cerrado y densos en ninguna parte en X. Por otro lado, si $f \in X' \setminus X^*$, entonces $K(f), I(f)$ son densos en X.

b) El mapa $f \mapsto I(f)$ es una biyección entre $X^* \setminus \{0\}$ y los hiperplanos cerrados en X que no contienen a 0.

Demostración:

a) Por definición $K(f) = f^{-1}(\{0\})$ y $I(f) = f^{-1}(\{1\})$ donde $\{0\}, \{1\}$ son cerrados en sus respectivos conjuntos. Dado que f es continua, entonces $K(f), I(f)$ son conjuntos cerrados. Demostremos ahora que son densos en ninguna partde X.

Si f no es nulo, entonces existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Luego para todo $x \in K(f)$ se tiene que,

$$f(x + \varepsilon x_0) = \varepsilon f(x_0) \neq 0$$

para todo ε escalar. Supongamos que el interior de $K(f)$ tiene un elemento $\widetilde{x}$, entonces existe $r > 0$ tal que,

$$B(\widetilde{x}, r) \subseteq K(f)$$

Sin embargo podemos tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que,

$$\widetilde{x} + \varepsilon x_0 \in B(\widetilde{x}, r)$$

sin embargo $f(\widetilde{x} + \varepsilon x_0) \neq 0$, siendo contradicción, por lo tanto necesariamente $\text{int} K(f) = \emptyset$.

Probemos ahora que $I(f)$ es denso en ninguna parte. De forma análoga notemos que podemos tomar $x \in X$ tal que $f(x_0) \neq 1$, luego $f(x + \varepsilon x_0) \neq 1$ con $x \in I(f)$ y $\varepsilon \neq 0$.

Supongamos ahora que $f \in X' \setminus X^*$. Supongamos que $K(f)$ no es denso, esto implica que existe un $x_0 \in X$ tal que existe una vecindad, digamos la bola $B(x_0, \delta)$, no intersecta a $K(f)$, es decir,

$$B(x_0, \delta) \cap K(f) = \emptyset$$

Ahora tenemos que,

$$f(B(x_0, \delta)) = f(x_0) + \delta f(B(0, 1)) = \mathbb{R}$$

Pero como la intersección con $K(f)$ es vaçia, se tiene que no tiene a 0, pero esto impplica que $f(B(0, 1))$ no es $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$), siendo una contradicción, por lo tanto $K(f)$ es denso.

Ahora $I(f)$ es una translación de $K(f)$, es más $I(f)$ es denso si y sólo si $K(f)$.

b) Probemos que el mapa es biyectivo. Sean $f, g \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $I(f) = (g)$. Sea $x \in X$, entonces,

$$f(x) \in I(g)$$

terminar

Demostrando el teorema. ■

Observación: Sea $f \in X'$, entonces,

$$f(B_X(x_0, r)) = f(x_0) + rf(B_X(0, 1))$$

Este no contiene a 0, lo que permite estimar $\|f\|$, puesto que,

$$|f(x_0)| > r|f(x)|$$

para todo $x \in B_X(0, 1)$, luego,

$$\|f\| \leq \frac{1}{r}|f(x_0)|$$

Definición: *Sea $Y \subseteq X$ espacio vectorial y sea $f \in X', g \in Y'$, decimos que f es una extensión de g si $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.*

Definición: *Consideremos una función de la forma $p : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Diremos que es funcional convexo si,*

i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ *para todo* $\lambda > 0$ *para todo* $x \in X$.

ii) *Para todo* $x, y \in X$ *para todo* $\lambda \in (0, 1)$ *se satisface que,*

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y)$$

Afirmación: *La condición ii) es equivalente a decir que p es subaditivo, es decir, $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$ para todo $x, y \in X$.*

Demostrar Supongamos que p es funcional convexo y que se cumple ii), entonces

Convención: Seguiremos las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty \\ t + \infty &= 0; \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ t \cdot \infty &= 0; \quad \text{para todo } t > 0 \end{aligned}$$

Observación: Si X es un espacio vectorial normado y $C > 0$, entonces $p(x) = C\|x\|$ es funcional convexo. Además, si consideremos $f \in X^*$ tal que $\|f\| \leq C$, este es equivalente a decir que $f \in X'$ y $|f(x)|$ está dominado por $p(x) = C\|x\|$ (decimos que está dominado si $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$)

Lema: *Sea X un $\mathbb{R}$ espacio vectorial normado. Sea $f_0 \in Y'$ donde Y es subespacio vectorial de X con codim$Y$=1. Supongamos que f_0 es dominado por p un funcional convexo. Entonces existe una extensión $f \in X'$ de f_0 dominado por p*

Demostración: (Revisar) Sea $z \in X \backslash Y$ fijo. Como $Y \subseteq X$ es subespacio tal que $\operatorname{codim} Y = 1$, entonces todo elemento de $x \in X$ puede ser escrito de la siguiente forma,

$$x = y + \lambda z$$

donde $y \in Y$ y λ es escalar, son únicos. Sea $f \in X'$ tal que,

$$f(x) = f(y) + \lambda f(z)$$

Podemos tomar f lineal tal que $f(y) = f_0(y)$ y como z es un valor fijo, podemos tomar $c := f(z)$. De esta forma $f \in X'$ es una extensión. Veamos que está dominado por p. Queremos demostrar que,

$$f(x) = f(y + \lambda z) \leq p(y + tz)$$

terminar

Teorema Hanh-Banach: *Sea X un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sea Y subespacio de X. Sea $p : X \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ funcional convexo. Si $f_0 \in Y'$ está dominado por p, entonces existe $f \in X'$ dominado por p que extiende a f_0.*

Demostración: Consideremos $\mathcal{F} = \{f_\gamma : Y_\gamma \to \mathbb{R} : \gamma \in \Gamma\}$ la colección de todas las extensiones lineales de f_0 dominadas por p con Y_γ subespacio vectorial de X que contiene a Y. Notemos que $\mathcal{F}$ es no vacío, puesto que $f_0 \in \mathcal{F}$. Vamos a definir la relación $\subseteq$ de la siguiente forma,

$$f_\gamma \subseteq f_\nu \Leftrightarrow Y_\gamma \text{ es subespacio de } Y_\nu \text{ y } f_\gamma \text{ es extensión de } f_\nu$$

Afirmación: $(\mathcal{F}, \subseteq)$ *es de orden parcial.*

Demostración: Debemos probar que es solamente reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- **Reflexiva:** Claramente Y_γ es su propio subespacio vectorial y f_γ es su propia extensión. Luego $\subseteq$ es simétrico.
- **Antisimétrico:** Sean $f_\gamma, f_\nu \in \mathcal{F}$ tales que,

$$f_\gamma \subseteq f_\nu \ \text{ y } \ f_\nu \subseteq f_\gamma$$

  Esto implica que $Y_\gamma \subseteq Y_\nu$ y $Y_\eta \subseteq Y_\gamma$, por lo que $Y_\gamma = Y_\nu$, y si f_ν es extensión de f_γ y viceversa, entonces necesariamente $f_\gamma = f_\nu$. De forma que $\subseteq$ es antisimétrico.
- **Transitivo:** Sean $f_\gamma, f_\eta, f_\beta \in \mathcal{F}$ tales que,

$$Y_\gamma \subseteq Y_\nu \ \text{ y } \ Y_\nu \subseteq Y_\beta$$

  Luego, $Y_\gamma \subseteq Y_\nu \subseteq Y_\beta$, es decir, Y_γ es subespacio de Y_β, y si f_β es extensión de f_ν, y este es extensión de f_γ, entonces f_β es extensión de f_γ. Por lo tanto $f_\gamma \subseteq f_\beta$, de forma que $\subseteq$ es transitiva.

Finalmente $\subseteq$ es de orden parcial. ■

Consideremos $\mathcal{F}_0$ una cadena, es decir, $(\mathcal{F}_0, \subseteq)$ está totalmente ordenado, donde,

$$\mathcal{F}_0 = \{f_\nu : \nu \in \Gamma_0\}$$

Definimos,

$$\widetilde{Y} := \bigcup_{\nu \in \Gamma_0} Y_\nu$$

Afirmación: *$\widetilde{Y}$ es subespacio vectorial de X.*

Demostración: Claramente $0 \in \widetilde{Y}$ al ser unión de subespacio. Sean $x, y \in \widetilde{Y}$, digamos que $x \in Y_{\nu_1}$ e $y \in Y_{\nu_2}$. Como $\mathcal{F}_0$ es totalmente ordenado, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que $Y_{\nu_1} \subseteq Y_{\nu_2}$, entonces $x, y \in Y_{\nu_2}$, esto implica que $\lambda x + \mu y \in Y_{\nu_2}$ con λ, μ escalare. Finalmente,

$$\lambda x + \mu y \in \widetilde{Y}$$

Por lo que $\widetilde{Y}$ es subespacio de X. ■

Definimos $\widetilde{f} : \widetilde{Y} \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma, $\widetilde{f}(y) = y$ para todo $y \in Y_\nu$ y $\nu \in \Gamma_0$.

Afirmación: *$\widetilde{f}$ es una función lineal bien definida que es cota superior $\mathcal{F}$, que además está dominado por p.*

Demostrar...

Por el lema de Zorn existe $\hat{f} : \hat{Y} \to \mathbb{R}$ maximal en $\mathcal{F}$, donde $\hat{f}$ es una extensión de f_0, $\hat{Y}$ es subespacio vectorial de X y está dominado por p.

Nos falta demostrar que $\hat{Y} = X$. Supongamos que $\hat{Y} \neq X$, entonces existe $z \in X \setminus \hat{Y}$. Ahora, por el lema anterior podemos extender $\hat{f}$ a un funcional lineal en el subespacio vectorial,

$$\operatorname{span}\left\{\hat{Y} \cup \{z\}\right\}$$

dominado por p, pero esto implica que $\hat{f}$ no es máximal siendo contradicción. Por lo tanto $\hat{Y} = X$. Demostrando el teorema. ■

Corolario: *Sea X un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y Y un subespacio de X. Entonces si $f_0 \in Y^*$, entonces existe $f \in X^*$ que extiende a f_0 y además,*

$$\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*}$$

Demostración: Sea $f_0 \in Y^*$. Consideremos la función,

$$p(x) := \|x\|_X \cdot \|f_0\|_{Y^*}$$

Entonces claramente p es funcional convexo, puesto que para todo $\lambda > 0$ se tiene,

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \|\lambda x\|_X \|f_0\|_{Y^*} \\ &= \lambda \|x\|_X \|f_0\|_{Y^*} = \lambda p(x) \end{aligned}$$

Y para todo $\lambda \in (0,1)$ se tiene,

$$\begin{aligned} p(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \|\lambda x + (1-\lambda)y\|_X \|f_0\|_{Y^*} \\ &\leq \lambda \|x\|_X \|f_0\|_{Y^*} + (1-\lambda)\|y\|_X \|f_0\|_{Y^*} \\ &= \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) \end{aligned}$$

Además,

$$\|f_0\|_{Y^*} = \sup_{\substack{y \neq 0 \\ y \in Y}} \frac{|f_0(y)|}{\|y\|_Y}$$

Lo que implica que,

$$|f_0(y)| = \frac{|f_0(y)|}{\|y\|_Y} \cdot \|y\|_Y \leq \|f_0\|_{Y^*} \|y\|_Y = p(y)$$

para todo $y \neq 0$ (si p es funcional convexa sobre X, entonces también lo es sobre Y, además $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_X$). Por el teorema anterior existe $f \in X^*$ que es extensión de f_0 y que está dominado por p. Además,

$$|f(x)| \leq \|x\|_X \|f_0\|_{Y^*}$$

Esto implica que,

$$\|f\|_{X^*} \leq \|f_0\|_{Y^*}$$

Y para ver la igualdad, notemos que si f es extensión de f_0, entonces,

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{Y^*} &= \sup_{\substack{y\neq 0\\ y\in Y}} \frac{|f_0(y)|}{\|y\|_Y}\\ &= \sup_{\substack{y\neq 0\\ y\in Y}} \frac{|f(y)|}{\|y\|_X}\\ &\leq \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in Y}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \|f\|_{X^*}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*}$$

Demostrando el corolario. ■

Se puede extender el resultado a un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Sea X un espacio vectorial normaod sobre $\mathbb{C}$. Sea $X_{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ hederado de X, luego $X_{\mathbb{R}}^* = B(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ y el mapa,

$$\begin{aligned}r : X^* &\to X_{\mathbb{R}}^*\\ r(f) &= \Re(f)\end{aligned}$$

Es $1-1$ sobreyectivo que preserva la norma, es decir,

$$\|f\|_{X^*} = \|r(f)\|_{X_{\mathbb{R}}^*}$$

Y,

$$\begin{aligned}r^{-1} : X_{\mathbb{R}}^* &\to X^*\\ g &\mapsto r^{-1}(g) = g(x) - ig(ix)\end{aligned}$$

Extendiendo a $\mathbb{C}$ el resultado.

3.1. Resultados del teorema de HB:

El teorema HB nos entrega resultados muy interesantes. Veamos algunos.

Corolario: *Sea X un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ y sea $x_0 \in X$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\|_{X^*} = 1$ y que $f(x_0) = \|x_0\|_X$. Además,*

$$\|x_0\|_X = \sup_{\substack{\|g\|_{X^*}\leq 1\\ g\in X^*}} |g(x_0)|$$

Demostración: Supongamos que $x_0 \neq 0$. Sea $Y := \text{span}\{x_0\} = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Definimos la función,

$$\begin{aligned}f_0 : Y &\to \mathbb{R}\\ y = \lambda x_0 &\mapsto f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|_X\end{aligned}$$

Notemos que es lineal puesto que,

$$\begin{aligned} f_0(\nu y_1 + \mu y_2) &= f_0(\nu \lambda_1 x_0 + \mu \lambda_2 x_0) \\ &= f_0((\nu \lambda_1 + \mu \lambda_2) x_0) \\ &= (\nu \lambda_1 + \mu \lambda_2) \|x_0\|_X \\ &= \nu \left(\lambda_1 \|x_0\|_X\right) + \mu \left(\lambda_2 \|x_0\|_X\right) = \nu f_0(y_1) + \mu f_0(y_2) \end{aligned}$$

para todo $y_1, y_2 \in Y$, para todo ν, μ escalares. Y es acotada puesto que,

$$|f_0(y)| = |\lambda \|x_0\|_X| = |\lambda| \|x_0\|_X = \|\lambda x_0\|_X = \|y\|_X$$

para todo $y \in Y$. Por lo tanto, $f_0 \in Y^*$ y por tanto, tiene definida una forma. Por definición,

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{Y^*} &= \sup_{y \neq 0} \frac{|f_0(y)|}{\|y\|_X} \\ &= \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f_0(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|_X} \\ &= \sup_{\lambda \neq 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

Por el teorema HB, existe $f \in X^*$ que extiende a f_0 tal que $f(x_0) = f_0(x_0) = \|x_0\|_X$ y tal que,

$$\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{Y^*} = 1$$

Ahora caractericemos la norma de x_0. Sea $g \in X^*$ tal que $\|g\|_{X^*} \leq 1$, entonces,

$$|g(x_0)| \leq \|x_0\|_X \|g\|_{X^*} \leq \|x_0\|_X$$

Esto implica que,

$$\sup_{\substack{\|g\|_{X^*} \leq 1 \\ g \in X^*}} |g(x_0)| \leq \|x_0\|_X$$

Para ver la igualdad basta tomar f anterior, luego se tiene,

$$\begin{aligned} \|x_0\|_X &= f_0(x_0) \\ &= f(x_0) \\ &\leq \|x_0\|_X = \sup_{\substack{\|g\|_{X^*} \leq 1 \\ g \in X^*}} |g(x_0)| \end{aligned}$$

Probando la igualdad. Probando el corolario. ■

Corolario: *Sea X un espacio vectorial normado. Sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$, entonces $x_0 = 0$.*

Demostración: Por el corolario anterior se tiene que,

$$\begin{aligned} \|x_0\|_X &= \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} = 1}} |f(x_0)| \\ &= \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} = 1}} 0 = 0 \end{aligned}$$

Entonces $x_0 = 0$. ■

Teorema: *Sean X, Y espacios vectoriales normados. Sea $T \in B(X,Y)$, entonces $T^* \in B(Y^*, X^*)$ y,*

$$\|T^*\|_{B(Y^*,X^*)} = \|T\|_{B(X,Y)}$$

Demostración: Ya hemos demostrado que $T^* \in B(Y^*, X^*)$ y que,

$$\|T^*\|_{B(Y^*,X^*)} \leq \|T\|_{B(X,Y)}$$

Por lo que falta demostrar la otra desigualdad. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\|_X = 1$, entonces,

$$\|Tx_0\|_Y \geq \|T\|_{B(X,Y)} - \varepsilon$$

Como hemos demostrado anteriormente, existe $g \in Y^*$ tal que,

$$\begin{aligned} g(Tx_0) &= \|Tx_0\|_Y \\ \|g\|_{Y^*} &= 1 \end{aligned}$$

Luego, con respecto a este g se cumple,

$$\begin{aligned} (T^*g)(x_0) &= g(Tx_0) \\ &= \|Tx_0\|_Y \geq \|T\|_{B(X,Y)} - \varepsilon \end{aligned}$$

Dado que $\|x_0\|_X = 1$ se cumple que,

$$\|T^*g\|_{X^*} = \sup_{\|x_0\|_X = 1} |(T^*g)(x_0)| \geq \|T\|_{B(X,Y)} - \varepsilon$$

Y dado que $\|g\|_{Y^*} = 1$, se cumple que,

$$\|T^*\|_{B(Y^*,X^*)} = \sup_{\|g\|_{Y^*} = 1} \|T^*g\|_{X^*} \geq \|T\|_{B(X,Y)} - \varepsilon$$

Finalmente se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que,

$$\|T^*\|_{B(Y^*,X^*)} \geq \|T\|_{B(X,Y)} - \varepsilon$$

Finalmente concluimos que,

$$\|T^*\|_{B(Y^*,X^*)} = \|T\|_{B(X,Y)}$$

■

Sea X espacio vectorial normado. Sabemos que $X^* = B(X, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial normado, de forma que podemos definir el dual topológico del dual topológico de X, en particular,

$$X^{**} := (X^*)^* = B(X^*, \mathbb{R})$$

Hay una inmersión natural de X en X^{**},

$$\begin{aligned} i : X &\to X^{**} \\ x &\mapsto \hat{x} = i(x) \end{aligned}$$

Tal que si $v \in X^*$, $\hat{x}(v) = v(x) : X \to \mathbb{R}$ o bien,

$$\langle \hat{x}, v \rangle_{X^{**} \times X^*} = \langle v, x \rangle_{X^* \times X}$$

Claramente,

$$|\hat{x}(v)| = |v(x)| \leq \|v\|_{X^*} \|x\|_X$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|_{X^{**}} &= \sup_{v \neq 0} \frac{|\hat{x}(v)|}{\|v\|_{X^*}} \\ &\leq \sup_{v \neq 0} \|x\|_X = \|x\|_X \end{aligned}$$

Es decir,

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X \Leftrightarrow \|i(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$$

Obteniendo una desigualdad interesante del mapa i.

Afirmación: *El mapa i es una inyección lineal continua.*

Demostración: Demostremos que es inyección, lineal y continua.

- **Inyectiva:** Sean $x, y \in X$ tales que $i(x) = i(y)$, entonces para todo $f \in X^*$ se tiene que,

$$\begin{aligned} (i(x))(f) = (i(y))(f) &\Leftrightarrow \hat{x}(f) = \hat{y}(f) \\ &\Leftrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Leftrightarrow f(x - y) = 0 \end{aligned}$$

  Es decir, para todo $f \in X^*$ se tiene que $f(x - y) = 0$, por lo que, por el corolario anterior se cumple que $x - y = 0$. Lo que implica que i es inyectiva.

- **Lineal:** Sean $x, y \in X$ y sean λ, μ escalares. Entonces para todo $f \in X^*$ se cumple que,

$$\begin{aligned} i(\lambda x + \mu y)(f) &= f(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= (\lambda i(x) + \mu i(y))(f) \end{aligned}$$

  Por lo tanto i es lineal.

- **Continua:** Con la desigualdad que hemos deducido, nos indica que i es Lipschitz, puesto que,

$$\|i(x) - i(y)\|_{X^{**}} = \|i(x - y)\|_{X^{**}} \leq \|x - y\|_X$$

  Por lo tanto i es continua.

Demostrando la afirmación. ■

Teorema: *Sea X espacio vectorial normado y sea X^{**} el doble dual topológico de X. Consideremos el mapa inmersión $i : X \to X^{**}$, entonces i es una inyección lineal continua isométrico.*

Demostración: Ya hemos demostrado que i es inyectivo, lineal y continua. Demostremos que es isometría. Usando la caracterisación de la norma sobre funciones X^*, se tiene quem

$$\begin{aligned} \|x\|_X &= \sup_{\substack{\|f\|_{X^*}=1 \\ f\in X^*}} |f(x)| \\ &= \sup_{\substack{\|f\|_{X^*}=1 \\ f\in X^*}} |\hat{x}(f)| \\ &= \|i(x)\|_{X^{**}} \end{aligned}$$

Por lo tanto i preserva la norma. ■

Definición: *Sea X un espacio vectorial normado y consideremos el mapa inmersivo $i : X \to X^{**}$. Decimos que X es reflexivo si $i(X) = X^{**}$*

Ejemplo: Pensemos en $L^p(\mathbb{R})$ con $p \in [1.\infty)$. Este es un espacio vectorial normado por lo que tiene definido el doble dual topológico. Se cumple que el dual topológico es isomorfo al espacio $L^q(\mathbb{R})$ donde q es el cociente conjugado $(1/p + 1/q = 1)$, es decir,

$$L^q(\mathbb{R}) \cong (L^p(\mathbb{R}))^*$$

Entonces,

$$(L^p(\mathbb{R}))^{**} \cong (L^q(\mathbb{R}))^* \cong L^p(\mathbb{R})$$

Por lo tanto,

$$L^p(\mathbb{R}) \cong (L^p(\mathbb{R}))^{**}$$

Definición: *Sea X espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sea $q : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, diremos que es funcional cóncavo si $-q$ es funcional convexo, es decir,*

i) q es positívamente homogéno.

ii) $q(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda q(x) + (1-\lambda)q(y)$ para todo $x, y \in X$ y para todo $\lambda \in (0,1)$.

Teorema HB Fuerte: *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea Y subespacio vectorial de X. Sean p, q funcionales convexo y cóncavo respectivamente. Si $f_0 \in Y'$ es tal que,*

$$f_0(y) \leq p(x+y) - q(x)$$

para todo $y \in Y, x \in X$. Entonces existe $f \in X'$ extensión de f_0 tal que,

$$q(x) \leq f(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in X$.

Por demostrar......

Corolario: *Sea X espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Sean q, p funcionales cóncavo y convexo respectivamente tal que $q(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Entonces existe $f \in X'$ tal que,*

$$q(x) \leq f(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in X$.

Demostración: Sea $Y = \{0\} \subseteq X$. Sea $f_0 : \{0\} \to \mathbb{R}$ el mapa que manda $0 \in X$ a $0 \in \mathbb{R}$. Claramente se cumple que,

$$f_0(y) \leq p(x+y) - q(x)$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Luego por HB fuerte existe $f \in X'$ tal que,

$$q(x) \leq f(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in X$. ■

Teorema HB geométrico: *Sea X espacio vectorial $\mathbb{R}$. Sean A, B conjuntos disjuntos no vacíos convexos. Supongamos que existe $\alpha \in A$ tal que para todo $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que,*

$$\alpha + tx \in A$$

para todo $|t| < \varepsilon_\varepsilon$. Entonces A y B pueden ser separados por un hiperplano.

Nota: Que dos conjuntos A y B puedan ser separados signiica que existe $f \in X'$ no nulo y $c \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq c, \ \text{ para todo } x \in A \\ f(y) &\geq c, \ \text{ para todo } y \in B \end{aligned}$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que $\alpha = 0$ (ver que pasa en gewneral). Entonces apra todo $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $tx \in A$ para todo $|t| < \varepsilon_x$, es decir,

$$[-\varepsilon_x x, \varepsilon_x x] \subseteq A$$

Definimos,

$$\begin{aligned} p(x) &:= \inf\{t \geq 0 : x \in tA\} \\ q(x) &:= \sup\{t \geq 0 : x \in tB\} \end{aligned}$$

Afirmación: *q, p son funcionales cóncavo y convexo respectivamente.*

demostrar....

Como $tA \cap tB = \emptyset$ para todo $t > 0$, entonces,

$$q(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in X$. Por el corolario anterior existe $f \in X'$ no nulo tal que,

$$q(x) \leq f(x) \leq p(x)$$

para todo $x \in X$. En particular, si $x \in A$ e $y \in B$, entonces,

$$f(x) \leq p(x) \leq 1 \leq q(y) \leq f(y)$$

Luego nuestra constante es $c = 1$ y por tanto $I(f) = f^{-1}(1)$ separa a A y B. ■

3.2. Teoremas de Categorias de Baire y sus Consecuencias

Teorema de Baire: *Sean $G_1, G_2, \ldots$ una sucesión de conjuntos abiertos densos en un espacio métrico completo X. Entonces,*

$$G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

es denso en X.

Observación: Sea X espacio vectorial normado. Entonces,

- Se cumple la igualdad $\overline{B}_r(x) = \overline{B_r(x)}$. Notemos que es evidente que,

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \overline{B}_r(x)$$

  Para ver la igualdad tomamos $y \in \overline{B}_r(x)$, por lo que $\|x - y\|_X \leq r$. Definimos $y_n = x/n + (1 - 1/n)y$, en particular se tiene que,

$$\begin{aligned} \|x - y_n\|_X &= \left\| x - \left(\frac{x}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) y \right) \right\|_X \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|_X \\ &< \|x - y\|_X \leq r \end{aligned}$$

  Es decir, $\|x - y_n\|_X < r$. Entonces se tiene que $y_n \in B_r(x)$ y además,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y$$

  Por tanto y es punto límite de elementos de $B_r(x)$ y por tanto $y \in \overline{B}_r(x)$. Probando la igualdad.

  En espacios métrico se cumple $\overline{B_r(x)} \subseteq \overline{B}_r(x)$, pero no necesariamente la igualdad.

- Para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\overline{B}_r(x) \subseteq B_{r+\varepsilon}(x)$, ya que dado $y \in \overline{B}_r(x)$, se tiene que,

$$\|x-y\|_X \leq r < r+\varepsilon$$

Demostración: (Revisar clase 7/4 Vamos a demostrar que para todo $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap G \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ y $r > 0$, escogemos $x_1 \in X$ y $0 < r_1 < 1$ tal que,

$$B_{r_1}(x_1) \subseteq G_1 \cap B_r(x)$$

por la densidad de G_1. Ahora escogemos $x_2 \in X$ y $0 < r_2 < 1/2$ tal que,

$$B_{r_2}(x_2) \subseteq G_2 \cap B_{r_1}(x)$$

por la densidad de G_2. Y así construimos las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y además,

$$B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq G_n \cap B_{r_n}(x)$$

De esta forma,

$$B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{r_n}(x_n) \subseteq \cdots \subseteq B_r(x)$$

En particular se tiene una sucesión de Cauchy. Como X es completo, entonces $x_n \to x_0 \in X$ cuando $n \to \infty$ donde $x_0 \in B_{r_n}(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es más,

$$\bigcap_{n\in N} B_{r_n}(x_n) = \{x_0\}$$

Notemos también que $B_{r_n}(x_n) \subseteq G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que $x_0 \in B_r(x)$. Luego

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_{r_n}(x_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = G$$

Por lo tanto $B_r(x) \cap G \neq \emptyset$. ■

Enunciado equivalente: *Sea X espacio métrico completo. Supongamos que,*

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

con F_n cerrado. Entonces al menos uno de los F_n tiene interior no vacío.

Demostración: Sea $G_n := X \setminus F_n$, entonces obtenemos que,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n = \emptyset$$

Notemos que si todos los G_n es denso entonces la intersección sería no vacío, por lo que existe un G_n no denso.

Afirmación: *int*$(F_n) = X \setminus \overline{G_n}$

Demostración: Notemos que $X \setminus \overline{G_n}$ es un abierto, es más, si $x \in X \setminus \overline{G_n}$, entonces $x \in X \setminus G_n = F_n$ (como $\overline{G_n} \subseteq G_n$). Por tanto, por la caracterisación del interior de F_n, se tiene que,

$$X \setminus \overline{G_n} \subseteq \text{int}(F_n)$$

Ahora, sea $A \subseteq F_n$ abierto (todo abierto de un subconjunto topológico inducido por una norma, es un abierto en todo el espacio topológico inducido por la norma, por lo que podemos pensar en A abierto en X), entonces,

$$G_n = X \setminus F_n \subseteq \underbrace{X \setminus A}_{\text{cerrado}}$$

Luego se tiene que,

$$\overline{G_n} \subseteq X \setminus A \Leftrightarrow A \subseteq X \setminus \overline{G_n}$$

Luego tomando $A = \text{int}(F_n)$ se concluye que,

$$\text{int}(F_n) = X \setminus G_n$$

Demostrando la afirmación. ■

Finalmente tenemos que el interior de F_n es no vacío.

Definición: *Sea X espacio topológico y sea $Y \subseteq X$. Diremos que Y es denso en ninguna parte en X si int$(\overline{Y}) = \emptyset$.*

Observación: $Y \subseteq X$ es denso en ninguna parte si y sólo si $\overline{Y} \subseteq X$ es denso en ninguna parte.

Definición: *Sea X espacio topológico. Diremos que un subconjunto $Z \subseteq X$ es magro (meager) si es de primera categoría, es decir, Z es unión numerable de conjuntos denso en ninguna parte. Es decir,*

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

donde int$(\overline{Z_n}) = \emptyset$.

Observación: Unión numerable de conjuntos magros es un conjunto magro.

Definición: *Sea X espacio topológico. Diremos que un subconjunto $U \subseteq X$ es de segunda categoría si para todo $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ colección numerable de cerrados que cubren a U, al menos uno e estos F_n tiene interior no vacío.*

Teorema de Baire (Equivalente): *El complemento de un subconjunto magro en un espacio métrico completo X es denso.*

Demostración: Sea $Z \subseteq X$ magro, por lo que,

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$$

donde Z_n es denso en ninguna parte en X. Sin pérdida de generalidad supongamos que Z_n son cerrados. **terminar** ■

Afirmación: *Si X es espacio métrico completo, entonces es de segunda categoría.*

Demostración: Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de cerrados que cubre a X, es decir,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

Supongamos que $\text{int}(F_n) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero esto implica que X es un conjunto magro (primera categoría) y entonces por el teorema anterior se tiene que $\emptyset = X \setminus X$ es denso, siendo una contradicción, por lo tanto existe al menos un F_n con interior no vacío y por tanto X es de segunda categoría. ■

Afirmación: *Sea X espacio métrico completo. Entonces el complemento de un conjunto de primera categoría es de segunda categoría.*

Demostración: Sea $Z \subseteq X$ de primera categoría, por lo que se puede escribir como,

$$Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$$

donde $\text{int}(\overline{Z_n}) = \emptyset$. Sea $Y = X \setminus Z$ y sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de cerrados que cubren a Y, por lo que,

$$Y \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

Y supongamos que para todo F_n tiene interior vacío. **terminar**

Por lo tanto concluimos que en un espacio métrico completo X. Un conjunto $Y \subseteq X$ es de segunda categoría si y sólo si su complemento es de primera categoría.

Teorema (Principio de Acotamiento Uniforme): *Sea X espacio métrico y sea $U \subseteq X$ de segunda categoría. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas $f : X \to \mathbb{R}$ tal que,*

$$\mathcal{B}_u := \{f(u) : f \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathbb{R}$$

sea acotada para todo $u \in U$. Entonces existen $x_0 \in X, r > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq N$ para todo $f \in \mathcal{F}$ y $x \in B(x_0, r)$. En particular, el resultado se mantiene si además X es completo y $\mathcal{B}_u$ es acotado para todo $u \in X$.

Demostración: Definimos,

$$F_n := \{x \in X : |f(x)| \leq n, \text{ para todo } f \in \mathcal{F}\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que,

$$F_n = \bigcap_{f\in\mathcal{F}} f^{-1}([-n, n])$$

Por hipótesis se tiene que,

$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

pero U es de segunda categoría por lo que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que F_N tiene interior no vacío, es decir, existe $x_0 \in F_N$ y $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq F_N$, entonces para todo $x \in B(x_0, r)$ se tiene que $|f(x)| \leq N$ para todo $f \in \mathcal{F}$.

Ahora supongamos que X es completo y que $\mathcal{B}_u$ es acotado para todo $u \in X$, entonces como hemos visto se tiene que X es de segunda categoría y luego podemos replicar la demostración observando que existen $x_0 \in X, r > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \leq N$ para todo $f \in \mathcal{F}$ y para todo $x \in B(x_0, r)$. ■

Teorema Cota Uniforme (Banach-Stranhauss): *Sean X, Y espacios vectoriales y sea $U \subseteq X$ de segunda categoría. Sea $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ tal que para todo $u \in U$ se tiene que,*

$$\sup\{\|Tu\|_Y : T \in \mathcal{F}\} < \infty$$

Entonces existe $M > 0$ tal que,

$$\|T\|_{B(X,Y)} \leq M$$

para todo $T \in \mathcal{F}$. En particular, el resultado se mantiene si además X es completo y para todo $u \in X$ se tiene que,

$$\sup\{\|Tu\|_Y : T \in \mathcal{F}\} < \infty$$

Demostración: Sea $T \in \mathcal{F}$, luego,

$$\begin{aligned} f_T : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|Tx\|_Y \end{aligned}$$

Notemos que es continua puesto que,

$$\lim_{x\to x_0} \|Tx\|_Y = \left\| \lim_{x\to x_0} Tx \right\|_Y = \|Tx_0\|_Y$$

donde $\|\cdot\|_Y$ es continuo al ser norma. Entonces generamos una colección $\mathcal{F} = \{f_T : T \in B(X, Y)\}$ de funciones continuas. En particular,

$$\mathcal{B}_u = \{f_T(u) : T \in \mathcal{F}\}$$

es acotada puesto que,

$$f_T(u) \leq \sup\{\|Tu\|_Y : T \in \mathcal{F}\} < \infty$$

Luego por el teorema anterior existe $x_0 \in X, r > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $T \in \mathcal{F}$ y para todo $x \in B(x_0, r)$ se tiene que,

$$\|Tx\|_Y \leq N$$

Luego para todo $\|z\| \leq 1$ y $T \in \mathcal{F}$ se tiene que,

$$\begin{aligned}\|Tz\|_Y &= \frac{2}{r}\left\|T\left(x_0 + \frac{r}{2}z\right) - T(x_0)\right\| \\ &\leq \frac{2}{r}(2N) = \frac{4N}{r}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|T\|_{B(X,Y)} \leq \frac{4N}{r}$$

para todo $T \in \mathcal{F}$. ■

Nota: Para el teorema de Banach-Stranhauss, usaremos la abreviación BS.

Teroema BS (Forma alternativa): *Sea X espacio vectorial normado completo y Y espacio vectorial normado. Dado $\gamma \in \Gamma$ definimos $T_\gamma : X \to Y$ lineal tal que para todo $\gamma \in \Gamma$ existe $M_\gamma > 0$ tal que,*

$$\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y \leq M_\gamma$$

Y existe $M_X > 0$ tal que,

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \|T_\gamma x\|_Y \leq M_Y$$

para todo $\|x\|_X \leq 1$. Entonces existe M tal que,

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T_\gamma x\|_Y \leq M$$

Demostrar...

Corolario: *Sean X, Y espacios vectoriales normados con X completo. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X,Y)$ tal que,*

$$\lim_{n\to\infty} T_n x$$

existe para todo $x \in X$. Entonces podemos definir $T : X \to Y$ donde $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ donde $T \in B(X,Y)$ y tal que,

$$\|T\|_{B(X,Y)} \leq \limsup_{n\to\infty} \|T_n\|_{B(X,Y)}$$

Demostrar: Definimos la función,

$$\begin{aligned} T : X &\to Y \\ x &\mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x\end{aligned}$$

Claramente está bien definido por hipótesis. Demostremos que $T \in B(X,Y)$.

- **Lineal:** Sean $x, y \in X$ y α, β escalares, entonces,

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x) + \beta T_n(y) \\ &\alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y) \end{aligned}$$

  Por álgebra de límites. Luego $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- **Acotado: terminar**

Corolario: *Sean X, Y espacios vectoriales normados donde X es además completo. Sea $T_n \in B(X, Y)$ una sucesión tal que,*

$$T_n x \to y \in Y$$

para todo $x \in X$. Entonces existe un funcional $T : X \to Y$ donde,

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

con $T \in B(X, Y)$ y donde,

$$\|T\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|T_n\|$$

Demostrar

Teorema de Condensación de Singularidades: *Sean X, Y espacios vectoriales normados con X completo y sean $T_{nm} \in B(X, Y)$ donde $n, m \in \mathbb{N}$ tal que,*

$$\limsup_{m\to\infty} \|T_{nm}\|_{B(X,Y)} = \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe $U \subseteq X$ de segunda categoría en X tal que para todo $u \in U$ se tiene que,

$$\limsup_{m\to\infty} \|T_{nm}(u)\|_Y = \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $V_n \subseteq X$ definido de la siguiente forma,

$$V_n := \left\{ u \in X : \limsup_{m\to\infty} \|T_{nm}(u)\| < \infty \right\}$$

Por el teorema BS cada V_n es de primera categoría, por lo tanto,

$$V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$$

es de primera categoría, dado que X es completo. Entonces $U := X \setminus V$ es de segunda categoría y este U satisface la hipótesis del enunciado. ■

Notación: Sea X espacio vectorial normado. Escribiremos la bola abierta de centro 0 y radio 1 por $B_X = B_X(0,1)$.

Lema: *Sean X, Y espacios vectoriales normados con X completo. Sea $T \in B(X,Y)$ y si,*

$$B_Y(0,s) \subseteq \overline{T(B_X(0,r))}$$

para algún $r, s > 0$. Entonces,

$$B_Y(0,s) \subseteq T(B_X(0,r))$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que $r = s = 1$. Sea,

$$A = B_Y(0,1) \cap T(B_X(0,1))$$

Afirmación: $\overline{A} = \overline{B_Y}$.

Demostración: Sea $y \in B_Y$, si por hipótesis se tiene que $B_Y \subseteq \overline{T(B_X)}$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(B_X)$ tal que $y_n \to y$. Como B_Y es abierto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in B_Y$ para todo $n \geq N$, luego,

$$\{y_n\}_{n\geq N} \subseteq T(B_X) \cap B_Y = A$$

Entonces $y \in \overline{A}$ y por tanto $B_Y \subseteq \overline{A}$. Finalmente $\overline{B}_Y \subseteq \overline{A}$. La igualdad se observa puesto que $A \subseteq B_Y$, lo que implica que $\overline{A} = \overline{B_Y}$. ■

Sea $z \in B_Y$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\|z\| < 1 - \delta < 1$$

Definimos $y := z/1 - \delta \in Y$. Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq Y$ tal que,

$$\begin{gathered} y_0 = 0 \\ y_n - y_{n-1} \in \delta^{n-1} A \\ \|y_n - y\| < \delta^n \end{gathered}$$

Esto se puede hacer pues dado y_{n-1} con **propiedades correspondientes** tenemos $y \in B(y_{n-1}, \delta^{n-1})$ y el conjunto $\delta^{n-1}A$ es denso en $B_Y(0, \delta^{n-1})$. Por la definición de A existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que,

$$Tx_n = y_n - y_{n-1} \text{ y } \|x_n\|_X < \delta^{n-1}$$

Luego,

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$$

existe dado que X es compelto y que la serie infinita $\|x_n\|$ converge. Entonces,

$$\|x\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta^{n-1} = \frac{1}{1-\delta}$$

Y como $T \in B(X,T)$ y $y_n \to y$, entonces,

$$\begin{aligned} T\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right) &= \sum_{n=1}^{m} T(x_m) \\ &= \sum_{n=1}^{m} y_n - y_{n-1} \\ &= (y_m - y_0) = y_m \end{aligned}$$

Entonces $T(x) = y$, es decir $x \in B_X(0, \frac{1}{1-\delta})$ tal que $T(x) = y$, entonces $z = T((1-\delta)x)$ y $(1-\delta)x \in B_X$, por lo tanto $B_Y \subseteq T(B_X)$ como queriamos demostrar. ■

Teorema de la Aplicación Abierta: *Sean X, Y Banach y sea $T \in B(X,Y)$ sobreyectivo. Entonces T es un mapa abierto, es decir, para todo U abierto en X tal que $T(U)$ es abierto en Y.*

Demostración: Sea $G = T(B_X)$. Como T es lineal, basta demostar que G es una vecindad de O.

Observación: Se cumple que,

$$\begin{aligned} T(B_X(0,r)) &= rT(B_X) \\ \overline{rG} &= r\overline{G} \end{aligned}$$

para todo $r \in \mathbb{R}$. Como,

$$\begin{aligned} Y = T(X) &= T\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_X\right) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(B_X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\overline{G} \end{aligned}$$

Como Y es completo por el teorema de Baire, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N\overline{G}$ tiene interior no vacío, por lo tanto $\overline{G}$ tiene interior no vacío. Como $\overline{G}$ es simétrico respecto al cero ($\overline{G} = -G$) y como es convexo (T lineal B_X es convexo y simétrico a $0 \in X$), entonces $\mathrm{int}(\overline{G}) \neq \emptyset$, entonces existe $B_Y(y_0, r) \subseteq \overline{G}$ (*) (es decir, si $B_Y(0,r) \subseteq \overline{T(B_X)}$ por el lema $B_Y(80,r) \subseteq T(B_X)$, X completo. **demostrar**) ■

Teorema del Mapeo Inverso: *Sean X, Y espacio vectoriales normados Banach. Si $T \in B(X,Y)$ es biyectivo, entonces $T^{-1} \in B(Y,X)$.*

Demostración: Si T es biyectivo, entonces $T^{-1} : Y \to X$ existe, demostremos que es lineal y acotado.

- **Lineal:** Sean $y, w \in Y$ y λ, μ escalares, entonces existen $x, z \in X$ tales que $T(x) = y, T(z) = w$, luego,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda y + \mu w) &= T^{-1}(\lambda T(x) + \mu T(z)) \\ &= T^{-1}(T(\lambda x + \mu z)) \\ &= \lambda x + \mu z \\ &= \lambda T^{-1}(y) + \mu T^{-1}(w) \end{aligned}$$

  Luego $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

- **Acotado:** Por el teorema de la aplicación directa, se tiene que T es un mapa abierto (para todo abierto $U \subseteq X$, se tiene que $T(U) \subseteq Y$ es abierto), lo que implica que T^{-1} es continuo y por tanto es acotado.

Demostrando que $T^{-1} \in B(Y, X)$. ■

Corolario: *Sea X un espacio vectorial y sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas en X tal que X es completo con ambas normas. Entonces las normas son equivalentes.*

Demostración: Definimos la función identidad,

$$\mathrm{Id} : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$$

Notemos que Id es lineal y continua con X completo, entonces su inversa también es lineal y continua, en particular es acotada, lo que implica que para todo $x \in X$ existen $C_1, C_2 > 0$ tales que,

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \|\mathrm{Id}(x)\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \\ \|x\|_2 &= \|\mathrm{Id}^{-1}(x)\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \end{aligned}$$

Es decir, las normas son equivalentes. ■

Teorema del Grafo Cerrado: *Sean X, Y espacios vectoriales Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, entonces $T \in B(X, Y)$ si y sólo si el subgrafo $\Gamma(T) := \{(x, Tx) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ es cerrado en $X \times Y$ con la topología producto.*

Demostración (Revisar):

Afirmación: *La topología producto $X \times Y$ es la topología de $X \times Y$ inducida por la norma $\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.*

Demostración: Recordemos que la topología producto $X \times Y$ tiene base,

$$\beta_1 = \{U \times V, U \subseteq X, V \subseteq Y, \text{ abierto en sus respectivas topologías}\}$$

Antes de demostrar la afirmación verifiquemos que en efecto $\|(\cdot, \cdot)\|_{X \times Y}$ es una norma en $X \times Y$, para ello debemos demostrar los tres axiomas de norma:

i) Notemos que,

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = 0 \Leftrightarrow \|x\|_X + \|y\|_Y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

   Además $\|(x, y)\|_{X \times Y} \geq 0$ para todo $(x, y) \in X \times Y$.

ii) Sea λ un escalar, luego,

$$\begin{aligned}\|\lambda(x,y)\|_{X\times Y} &= \|(\lambda x,\lambda y)\|_{X\times Y}\\ &= \|\lambda x\|_X + \|\lambda y\|_Y\\ &= |\lambda|(\|x\|_X + \|y\|_Y) = |\lambda|\|(x,y)\|_{X\times Y}\end{aligned}$$

para todo $(x,y)\in X\times Y$.

iii) Sean $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$, entonces,

$$\begin{aligned}\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|_{X\times Y} &= \|(x_1+x_2,y_1+y_2)\|_{X\times Y}\\ &= \|x_1+x_2\|_X + \|y_1+y_2\|_Y\\ &\leq \|x_1\|_X + \|x_2\|_X + \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y\\ &= \|(x_1,x_2)\|_{X\times Y} + \|(y_1,y_2)\|_{X\times Y}\end{aligned}$$

De esta forma $\|(\cdot,\cdot)\|_{X\times Y}$ es una norma en $X\times Y$.

Tenemos que la topología de X e Y están inducida por su respectiva norma. Sea β_2 la base de $X\times Y$ con respecto a la topología inducida por la norma $\|(\cdot,\cdot)\|_{X\times Y}$, es decir,

$$\beta_2 = \{B_{X\times Y}((x,y),r) : (x,y)\in X\times Y, r>0\}$$

Demostremos que β_1 y β_2 generan la misma topología. **terminar**

Por lo tanto basta trabajar con la topología inducida por la norma $\|(\cdot,\cdot,)\|_{X\times Y}$. ■

Continuemos con la demostración del teorema. Supongamos que $T\in B(X,Y)$ y sea $\{(x_n,Tx_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\Gamma(T)$ convergente a $(x_0,y_0)\in X\times Y$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,Tx_n) = (x_0,Tx_0) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} Tx_n = y_0$$

Como T es continua se tiene que,

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = Tx_0$$

Es decir $(x_0,T(x_0))\in\Gamma(T)$, por lo tanto el subgrafo es cerrado.

Probemos la otra dirección. Supongamos que $\Gamma(T)$ es cerrado.

Afirmación: *Dado que $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, entonces $\Gamma(T)$ es subespacio vectorial de $X\times Y$.*

Demostración: Sean $(x,T(x)),(z,T(z))\in\Gamma(T)$ y sean λ,μ escalares, entonces,

$$\begin{aligned}\lambda(x,T(x))+\mu(z,T(z)) &= (\lambda x+\mu z, \lambda T(x)+\mu T(z))\\ &= (\lambda x+\mu z, T(\lambda x+\mu z))\in\Gamma(T)\end{aligned}$$

Luego $\Gamma(T)$ es subespacio vectorial. ■

Afirmación: *$X\times Y$ es Banach.*

Demostración: Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $X \times Y$. Tenemos las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X e Y respectivamente. Notemos que,

$$\|x_n - x_m\|_X \leq \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_{X\times Y}$$

Luego se concluye que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en X y por tanto converge a un $x_0 \in X$. De forma análoga se concluye que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en Y y por tanto converge a un $y_0 \in Y$. Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \in X \times Y$$

Como trabajamos en espacios métricos. Por lo tanto $X \times Y$ es Banach. ■

Como $\Gamma(T)$ es cerrado con $X \times Y$ Banach, entonces $(\Gamma(T), \|(\cdot,\cdot)\|_{X\times Y})$ es Banach. Consideremos la función,

$$\begin{aligned} U : \Gamma(T) &\to X \\ (x, Tx) &\mapsto x \end{aligned}$$

Entonces U es lineal (basta estudiar la primera coordenada) además,

$$\|Ux\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X\times Y}$$

Por lo que $U \in B(\Gamma(T), X)$, es más, U es biyectivo y como estamos trabajando en espacios Banach por el teorema del mapeo inverso $U^{-1} \in B(X, \Gamma(T))$, por lo que es acotado y entonces,

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|U^{-1}x\|_{X\times Y} \leq \|U^{-1}\|_{B(X,\Gamma(T))}\|x\|$$

Por tanto T es acotado y entonces $T \in B(X, Y)$. Demostrando el teorema. ■

Podemos obversar que el teorema de la aplicación abierta, del mapeo inverso y del grafo cerrado toman una condición inicial importante. Siempre consideran espacios vectoriales normados Banach y siempre se trabaja con un operador lineal acotado.

AQUI FALTA ALGO IMPORTANTE DE IMPLICANCIA DE LOS TEOREMA. CLASE 7/4

4. Topología Débiles y Dualidad

Definición: *Sea (X, τ) espacio topológico. Decimos que $\sigma \subseteq \tau$ es una subbase si todo abierto en τ es unión arbitraría de intersecciones finitas de σ. Es decir, σ es subbase si y sólo si,*

$$\left\{ \bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} U_\gamma : |\Gamma_0| < \infty, \Gamma_0 \subseteq \Gamma \right\}$$

es una base de τ.

Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\{(X_\gamma, \tau_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ espacios topológicos. Sean las funciones,

$$f_\gamma : X \to X_\gamma$$

con $\gamma \in \Gamma$. Entonces existe una única topología débil tal que todas las funciones

$$f_\gamma : (X, \tau) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$$

son continuas. A esta topología se le conoce como topología débil de X inducida por la colección,

$$\mathcal{F} = \{f_\gamma : X \to (X_\gamma, \tau_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$$

y se denota por $\sigma(X, \mathcal{F})$.

Afirmación: *La topología $\sigma(X, \mathcal{F})$ tiene subbase $\sigma = \{f_\gamma^{-1}(U_\gamma) : U_\gamma \in \tau_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$*

Demostrar...

Por lo tanto, $U \subseteq X$ es un abierto en $\sigma(X, \mathcal{F})$ si y sólo si para todo $x \in U$ existen $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ y $U_1 \in \tau_{\gamma_1}, \cdots, U_n \in \tau_{\gamma_n}$ tales que,

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} f_{\gamma_i}^{-1}(U_i) \subseteq U$$

Proposición: *Sea (Y, ν) espacio vectorial y sea $f : (Y, \nu) \to (X, \sigma(X, \mathcal{F}))$, entonces f es continua si y sólo si,*

$$f_\gamma \circ f : (Y, \nu) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$$

*es continua para todo $\gamma \in \Gamma$ (**propiedad universal**).*

Demostración: Supongamos que f es continua. Sea $\gamma \in \Gamma$ y sea $U_\gamma \subseteq X_\gamma$ abierto en τ_γ, luego,

$$(f_\gamma \circ f)^{-1}(U_\gamma) = f^{-1}(f_\gamma^{-1}(U_\gamma))$$

Como trabajamos en la topología débil $\sigma(X, \mathcal{F})$ se tiene que $f_\gamma^{-1}(U_\gamma) \in \sigma(X, \mathcal{F})$ y dado que f es continua, se tiene que,

$$f^{-1}(f_\gamma^{-1}(U_\gamma)) \in \nu$$

Por lo tanto $f_\gamma \circ f$ es continua para todo $\gamma \in \Gamma$.

Supongamos ahora que $f_\gamma \circ f$ es continua para todo $\gamma \in \Gamma$. Sea $U \subseteq X$ abierto en $\sigma(X, \mathcal{F})$, entonces por definición se tiene que,

$$U = \bigcup_{\gamma \in \Gamma^*} \bigcap_{i=1}^{n} f_{\gamma,\gamma_i}^{-1}(U_{\gamma,\gamma_i})$$

Tomando la preimagen de f y usando propiedades de la preimagen, se obtiene que,

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma^*} \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(f_{\gamma,\gamma_i}^{-1}(U_{\gamma,\gamma_i})) \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma^*} \bigcap_{i=1}^{n} (f_{\gamma,\gamma_i} \circ f)^{-1}(U_{\gamma,\gamma_i}) \end{aligned}$$

Como $f_{\gamma,\gamma_i} \circ f$ es continua, entonces $f^{-1}(U)$ es unión arbitraria de intersecciones finitas de abiertos en ν, por lo tanto $f^{-1}(U)$ es un abierto en ν y por tanto f es continua. ■

Ejemplo: Sean (X_γ, τ_γ) espacios topológicos para todo $\gamma \in \Gamma$. Consideremos el producto cartesiano,

$$X := \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$$

Sea $x \in X$, definimos la componente γ-ésima por,

$$\begin{aligned} x : \Gamma &\to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \\ \gamma &\mapsto x(\gamma) = x_\gamma \in X_\gamma \end{aligned}$$

o bien $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Definimos la proyección de la componente γ por,

$$\begin{aligned} p_\gamma : X &\to X_\gamma \\ x &\mapsto x_\gamma \end{aligned}$$

La topología producto es la topología más débil en X tal que los p_γ son continuos. Notemos que dado un abierto $U_{\gamma_0} \in \tau_{\gamma_0}$, se tiene que,

$$p_{\gamma_0}^{-1}(U_{\gamma_0}) = \prod_{\gamma \neq \gamma_0} X_\gamma \times U_{\gamma_0}$$

Por lo tanto, $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si para todo $x \in X$ existen $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que $x_{\gamma_i} \in U_{\gamma_i}$ para todo $i = 1, \cdots, n$ tales que,

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\gamma_i}^{-1}(U_{\gamma_i}) \subseteq U$$

En particular,

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\gamma_i}^{-1}(U_{\gamma_i}) = \prod_{i=i}^{n} U_{\gamma_i} \times \prod_{\substack{\gamma\neq\gamma_i \\ i=1,\cdots,n}} X_\gamma$$

Ejemplo: Sea $\Gamma = [0,1]$, sea $X_\gamma = \mathbb{R}$ para todo $\gamma \in [0,1]$. Entonces,

$$X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$$

Notemos que si $x \in X$, entonces la componente γ con $\gamma \in [0,1]$ de x es un número real x_γ. Luego,

$$X = \{\text{funciones } f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$$

Sea τ la topología del producto, entonces $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si dado $f \in U$ existen $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in [0,1]$ y abierto $U_{\gamma_1}, \cdots, U_{\gamma_n} \subseteq \mathbb{R}$ tales que,

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} p_{\gamma_i}^{-1}(U_{\gamma_i}) \subseteq U \Leftrightarrow f \in \{\text{funciones } g : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tal que } g(\gamma_i) \in U_{\gamma_i}, i = 1, \cdots, n\} \subseteq U$$

Afirmación: *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, entonces f_n converge a $f \in X$ en el sentido de la topología producto si y sólo si converge puntualmente.*

Demostración: Si la sucesión converge a f en el sentido topológico, entonces para toda vecindad V de f, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n \in V$ para todo $n \geq N$. Sea $\varepsilon > 0$, luego se tiene que,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

Sea $U_x := (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$. Tomando la preimagen de la proyección x obtenemos que,

$$p_x^{-1}(U_x) = \prod_{\gamma\in[0,1]\setminus\{x\}} \mathbb{R} \times U_x =: U$$

Como trabajamos en la topología producto $\sigma(X, \mathcal{F})$, entonces $p_x^{-1}(U_x)$ es abierto, además,

$$f \in U$$

Puesto que es una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \in U_x$, por lo tanto U es una vecindad abierta de f y por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n \in U$ para todo $n \geq N$. Para concluir la convergencia puntual sobre le punto x proyectamos sobre x de forma que,

$$p_x(f_n) = f_n(x) \in U_x \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Por lo tanto,

$$f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

para todo $x \in [0,1]$.

Probemos la otra implicancia. Supongamos que f_n converge puntualmente a f. Sin pérdida de generaldiad sea U vecindad abierta de f, entonces existen $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in [0,1]$ y abiertos $U_{\gamma_1}, \cdots, U_{\gamma_n} \subseteq \mathbb{R}$ tales que,

$$f \in \{\text{funciones } g : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tales que } g(\gamma_i) \in U_{\gamma_i} \text{ para todo } i = 1, \cdots, n\} \subseteq U$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\gamma_i) = f(\gamma_i) \in U_{\gamma_i}$$

para todo $i = 1, \cdots, n$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|f_n(\gamma_i) - f(\gamma_i)| < \varepsilon \Leftrightarrow f_n(\gamma_i) \in (f(\gamma_i) - \varepsilon, f(\gamma_i) + \varepsilon) \subseteq U_{\gamma_i}$$

para todo $n \geq N$ y para todo $i = 1, \cdots, n$. Tomando $N := \max\{N_1, \cdots, N_n\}$ se tiene que,

$$f_n(\gamma_i) \in U_{\gamma_i}$$

para todo $i = 1, \cdots, n$ y para todo $n \geq N$, esto implica que,

$$f_n \in \{\text{funciones } g : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ tales que } g(\gamma_i) \in U_{\gamma_i} \text{ para todo } i = 1, \cdots, n\} \subseteq U$$

para todo $n \geq N$. Por lo tanto para toda vecindad V de f existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n \in V$ para todo $n \geq N$ que es la definición de convergencia topológica. Demostrando la afirmación. ■

Definición: *Sea X espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. Sea $X^* = B(X, \mathbb{R})$ el dual topológico de X.*

i) Definimos la topología fuerte de X es la topología inducida por la norma.

ii) Definimos la topología débil de X por $\sigma(X, X^*)$ y los abiertos en esta topología le decimos ω abiertos o abiertos débiles.

Un conjunto $U \subseteq X$ es abierto débil si para todo $x \in U$ existen $T_1, \cdots, T_n \in B(X, \mathbb{R})$ y $U_1 \subseteq \mathbb{R}, \cdots, U_n \subseteq \mathbb{R}$ tales que,

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} T_i^{-1}(U_i) \subseteq U \Leftrightarrow x \in \{x \in X : T_i(x) \in U_i, i = 1, \cdots, n\} \subseteq U$$

Observación: La topología débil es más gruesa que la topología fuerte.

Definición: *Sea X espacio vectorial normado. En X^* definimos la topología débil estrella por $\sigma(X^*, X)$ donde usamos la identificación $i : X \to X^{**}$. A los elementos de la topología débil estrella decimos ω^* abiertos o abiertos débiles estrella.*

Recordemos que la incrustación $i : X \to X^{**}$ está dada por $x \mapsto \hat{x}(f) = f(x)$ donde $f \in X^*$. Estamos pensando $\sigma(X^*, X)$ con X como una colección de funciones $\hat{x}$ donde son continuas.

Veamos como se comporta un abierto débil estrella. Por definición, $G \subseteq X^*$ es débil estrella si y sólo si para todo $g \in G$ existen $x_1, \cdots, x_n \in X$ (pensandolo como funciones de X^{**}) y existen abierto $U_1 \subseteq \mathbb{R}, \cdots, U_n \subseteq \mathbb{R}$ tales que,

$$\begin{aligned} g \in \bigcap_{i=1}^{n} \hat{x}_i^{-1}(U_i) \subseteq G &\Leftrightarrow g \in \{f \in X^* : \hat{x}_i(f) \in U_i, i = 1, \cdots, n\} \subseteq G \\ &\Leftrightarrow g \in \{f \in X^* : f(x_i) \in U_i, i = 1, \cdots, n\} \subseteq G \end{aligned}$$

Por comodidad podemos tomar $U_i = (g(x_i) - \varepsilon_i, g(x_i) + \varepsilon_i) \subseteq \mathbb{R}$ con $\varepsilon_i > 0$ suficientemente pequeño de forma que,

$$g \in \{f \in X^* : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon_i, i = 1, \cdots, n\} \subseteq \{f \in X^* : f(x_i) \in U_i, i = 1, \cdots, n\} \subseteq G$$

Por lo tanto para ver que $G \subseteq X^*$ es un abierto débil estrella, basta ver que para todo $g \in G$ existen $x_1, \cdots, n \in X$ y $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n > 0$ tales que,

$$g \in \{f \in X^* : |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon_i : i = 1, \cdots, n\} \subseteq G$$

En particular,

$$\{f \in X^* : |f(x_j) - g(x_j)| < \varepsilon_j : j = 1, \cdots, n\} = \bigcap_{j=1}^{n} \{f \in X^* : |\hat{x}_j(f - g)| < \varepsilon_j\}$$

Corolario: *Sea X espacio vectorial normado y sea $Y \subseteq X$ subespacio vectorial normado. Entonces,*

$$\sigma(Y, Y^*) = \sigma(X, X^*)\big|_Y$$

Definición: *Sea X conjunto. Un sistema $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se dice de carácter finito si todo subconjunto $A \in \mathcal{F}$ si y sólo si todos los subconjuntos fintios de A están en $\mathcal{F}$*

Lema de Tukey: *Sea $\mathcal{F}$ de caracter finito y sea $F \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ tiene elemento maximal contenido en F.*

Demostración: Consideremos,

$$\mathcal{F}_0 = \{A \in \mathcal{F} : F \subseteq A\}$$

Ordenemos $\mathcal{F}_0$ con la relación de inclusión, es decir,

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

Luego $\leq$ es un orden parcial en $\mathcal{F}_0$ y si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_0$ es una cadena tomemos,

$$D = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$$

Luego $D \in \mathcal{F}_0$ porque todos los subconjunos finitos de D están en $\mathcal{F}$ y $F \subseteq D$, luego D es una cadena superior de $\mathcal{C}$. Por el lema de Zorn $\mathcal{F}_0$ tiene un elemento maximal, esto es un elemento maximal de $\mathcal{F}$ que contiene a F. ■

Definición: *Sea X un conjunto. Decimos que un sistema de subconjuntos $\mathcal{F}$ de X tiene la propiedad de intersección finita si,*

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_n \neq \emptyset$$

para todo $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{F}$.

Proposición: *Sea (X, τ) espacio topológico, entonces es compacto si y sólo si cualquier familia $\mathcal{F}$ de conjuntos de X con la propiedad de intersección finita, satisface que,*

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$$

Demostración: Supongamos que X es compacto. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntod e X que satisface la propiedad de intersección finita. Supongamos que,

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{F}} X \setminus \overline{F} = X$$

Tenemo que $\{X \setminus \overline{F}\}_{F \in \mathcal{F}}$ es un cubrimiento abierto, por lo que existe $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{F}$ tales que,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X \setminus \overline{F_i} \Leftrightarrow \emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i}$$

Pero esto es una contradicción a la propiedad de intersección finita puesto que,

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F_i} = \emptyset$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$$

Probemos la otra dirección. Sea $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ cubrimiento abierto de X, luego se tiene que,

$$\emptyset = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} X \setminus U_\gamma$$

Es decir, $\{X \setminus U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una familia de subconjuntos el cual no satisface la propiedad de intersección finita (si lo satisface llegamos a una contradicción), luego existen $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que,

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus U_{\gamma_i} \Leftrightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}$$

Encontrando un subcubrimiento finito. Por lo tanto X es compacto. ■

Teorema de Tyohonov: *Sea* (X_γ, τ_γ) *con* $\gamma \in \Gamma$ *espacios topológicos compactos, entonces,*

$$X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$$

es compacto con la topología producto.

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un sistema en X que cumple la propiedad de intersección finita. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los sistemas de conjuntos con la propiedad de intersección finita. Entonces $\mathcal{F}$ es de carácter finito y por el lema de Tukey existe un sistema de conjunto maximal $\mathcal{B}$ con la propiedad de intersección finita que contiene a $\mathcal{A}$. Asumiremos que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ (es decir, $\mathcal{A}$ es maximal puesto que,

$$\bigcap_{B\in\mathcal{B}} \overline{B} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$$

). Como $\mathcal{A}$ es maximal (con respecto a la propiedad de intersección finita). Si $A_1, A2 \in \mathcal{A}$ entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$ y,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

Si $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$. Por lo tanto si $B \subseteq X$ es tal que $B \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $B \in \mathcal{A}$ y si $B \supseteq A$ para algún $A \in \mathcal{A}$, entonces $B \in \mathcal{A}$.

Ahora como,

$$X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\Gamma$$

para cada $\gamma \in \Gamma$ $\{p_\gamma(A) : A \in \mathcal{A}\}$ es un sistema de conjuntos en X_γ que satisface la propiedad de intersección finita, luego,

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{p_\gamma(A)}^{X_\gamma} \neq \emptyset$$

dado que X_γ es compacto. Sea,

$$x_\gamma \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{p_\gamma(A)}$$

en X_γ. Para toda vecindad U_γ de x_γ en X_γ, $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ intersecta a A para todo $A \in \mathcal{A}$. Entonces,

$$p_\gamma^{-1}(U_\gamma) \in \mathcal{A}$$

y,

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\gamma_i}^{-1}(U_{\gamma_i}) \in \mathcal{A}$$

para todo $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \subseteq \Gamma$ y U_{γ_i} vecindad de x_γ. Sea $x = \{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \in X$ y sea U una vecindad de x en la topología producto de X. Entonces existen $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ en Γ y existen $U_{\gamma_1}, \cdots, U_{\gamma_n}$ vecindades de x_{γ_i} con $i = 1, \cdots, n$ tal que,

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\gamma_i}^{-1}(U_{\gamma_i}) \subseteq U$$

Entonces $U \in \mathcal{A}$ y entonces $U \cap A \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Como queríamos demostrar. ■

Ejercicio: Demostrar el caso $\{(X_n, \tau_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos.

Teorema de Alaoglu: *Sea X espacio vectorial normado. La bola cerrada unitaria,*

$$\overline{B}(X^*) = \{f \in X^* : \|f\|_{X^*} \leq 1\} \subseteq X^*$$

es compacta en la topología débil estrella $\sigma(X^*, X)$

Demostración Caso $\mathbb{R}$: Sea $x \in X$, definimos,

$$D_x = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq \|x\|_X\}$$

Sea $D = \prod_{x\in X} D_x$ con la topología producto. Cada D_x es compacto en $\mathbb{R}$ al ser cerrado y acotado. Luego por el teorema de Tychonov D es compacto con la topología producto. Sea $B^* = B(X^*)$ con la topología débil estrella. Sea,

$$\begin{aligned} \varphi : B^* &\to D \\ f &\mapsto (f(x))_{x\in X} = \varphi(f) \end{aligned}$$

Afirmación: *φ es una función continua e inyectivo.*

Demostración: Notemos que,

$$\varphi : (B^*, \sigma(X^*, X)\big|_{B^*}) \to (D, \tau_P)$$

donde τ_P es la topología producto de D.

- **Continua:** Sea $p_x : (D, \tau_P) \to (D_x, \tau_{\mathbb{R}})$ la proyección sobre el elemento x. Notemos que,

  $$p_x \circ \varphi : (B^*, \sigma(X^*, X)\big|_{B^*}) \to (D_x, \tau_{\mathbb{R}})$$

  donde,

  $$(p_x \circ \varphi)(f) = p_x((f(x))_{x\in X}) = f(x)$$

  Es más, sabemos que $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ donde además si tomamos $f \in B^*$, entonces,

  $$\hat{x}(f) = f(x)$$

  donde $|f(x)| \leq \|f\|_{X^*}\|x\|_X \leq \|x\|_X$, por lo tanto $\hat{x}(B^*) \subseteq D_x$ o mejor dicho, podemos pensar en,

  $$\hat{x} : (B^*, \sigma(X^*, X)\big|_{B^*}) \to (D_x, \tau_{\mathbb{R}})$$

  donde $\hat{x} = p_x \circ \varphi$. Por lo tanto, por definición de $\sigma(X^*, X)$ se tiene que $p_x \circ \varphi$ es continua para todo $x \in X$ y por tanto φ es continua.

- **Inyectivo:** Sean $f, g \in B^*$ tal que,

$$\varphi(f) = \varphi(g) \Leftrightarrow (f(x))_{x\in X} = (g(x))_{x\in X}$$

Igualando por coordenadas se puede ver que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Luego φ es inyectivo.

Demostrando la afirmación. ■

También por la definición de $\sigma(X^*, X)$ y por la topología producto, se tiene que,

$$\varphi^{-1} : \varphi(B^*) \to B^*$$

es continua. Luego B^* es homeomorfo a $\varphi(B^*) \subseteq D$. Si D es compacto, basta demostrar que B^* es compacto lo cual basta demostrar que $\varphi(B^*)$ es cerrado en D.

Probemos esto que $\varphi(B^*)$ es cerrado en D. Sea $\xi = (\xi_x)_{x\in X} \in D$ y $\xi \in \overline{\varphi(B^*)}$ (clausura en D). Definimos la función,

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \xi_x \end{aligned}$$

Afirmación: *f es lineal.*

Demostración: Sean $x, z \in X$ y α, β escalares. Como $\xi \in \overline{\varphi(B^*)}$ existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en B^* tal que,

$$|\xi_x - f_n(x)| + |\xi_z - f_n(z)| + |\xi_{\alpha x+\beta z} - f_n(\alpha x + \beta z)| < \frac{1}{n}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\alpha f(x) + \beta f(z) - f(\alpha x \beta z)| &\leq |\alpha f(x) - \alpha f_n(x) + \beta f(z) - \beta f_n(z) + \alpha f_n(x) + \beta f_n(z) - f(\alpha x + \beta z)| \\ &\leq |\alpha(f(x) - f_n(x)) + \beta(f(z) - f_n(z)) + \alpha f_n(x) + \beta f_n(z) - f(\alpha x + \beta z)| \\ &< \frac{|\alpha| + |\beta| + 1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Luego f es lineal. ■

Si $\xi_x \in D_x$ entonces,

$$|f(x)| = |\xi_x| \leq \|x\|_X$$

Entonces $f \in B^*$, es decir, $\xi = \varphi(f)$ con $f \in B^*$ y por tanto $\varphi(B^*)$ es cerrado (sobre D) y entonces,

$$\overline{\varphi(B^*)} = \varphi(B^*)$$

Ahora, esto implica que $\varphi^{-1}(\varphi(B^*)) = B^*$ es cerrado y compacto por continuidad. Luego se tiene que $B^* = \overline{B}(X^*)$ es compacto débil estrella como queríamos demostrar. ■

Sea X un espacio vectorial normado. Nos preguntamos que propiedades tiene la topología débil $\sigma(X, X^*)$ de X y la topología débil estrella $\sigma(X^*, X)$.

Afirmación: *La topología débil en X y la topología débil estrella en $X*$ son Hausdorff.*

Demostración: Si X es espacio vectorial normado, consideramos la topología débil $\sigma(X, X^*)$. Sean $x, z \in X$ distintos, podemos tomar $Y := \text{span}\{x, z\}$ y definimos,

$$\begin{aligned} f_0 : Y &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 \\ z &\mapsto 0 \end{aligned}$$

donde $f_0 \in Y'$. Como Y es de dimensión finita, se tiene que $f_0 \in Y^*$, entonces por HB existe $f \in X^*$ que extiende a f_0 y definimos,

$$\begin{aligned} U_x &= \{u \in X : f(u) > 1/2\} \text{ es vecidad de } x \text{ en la topología débil} \\ U_z &= \{u \in X : f(u) < 1/2\} \text{ es vecidad de } z \text{ en la topología débil} \end{aligned}$$

donde $U_x \cap U_z = \emptyset$, de forma que la topología débil es Hausdorff.

Ahora para ver X^* con la topología débil estrella es Hausdorff, basta observar que si tomamos $f, g \in X^*$ distintos, existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$, luego,

$$\begin{aligned} V_f &= \left\{ h \in X^* : |h(x) - f(x)| < \frac{|f(x) - g(x)|}{2} \right\} \\ V_g &= \left\{ h \in X^* : |h(x) - g(x)| < \frac{|f(x) - g(x)|}{2} \right\} \end{aligned}$$

Son vecindades abiertas de f y g respectivamente en la topología débil estrella que separa de forma vacía f de g. De forma que $\sigma(X^*, X)$ es Hausdorff ■

Teorema: *Sea X un espacio vectorial normado. Entonces X es isometricamente isomorfo a un subespacio vectorial de $C(K)$ donde $K = \overline{B}(X^*)$ con la topología débil estrella.*

Observación: El conjunto $\overline{B}(X^*)$ es espacio topológico compacto Hausdorff bajo la topología débil estrella.

Demostración: Para $x \in X$ tomemos $i(x) = \hat{x} \in X^{**}$ definido como,

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x)$$

para todo $x^* \in X^*$. Sea $f_x = \hat{x}\big|_K$, luego $f_x \in C(K)$ (definición de la topología débil estrella) y el mapa,

$$\begin{aligned} X &\to C(K) \\ x &\mapsto f_x \end{aligned}$$

es lineal, además por el corolario HB tenemos que,

$$\begin{aligned} \|f_x\|_{C(K)} &= \sup\{|f_x(x^*)| : x^* \in K\} \\ &= \sup\{|x^*(x)| : x^* \in \overline{B}(X^*)\} = \|x\|_X \end{aligned}$$

Demostrando el teorema. ■

Proposición: *Sea* (X,τ) *espacio topológico. Sean* $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ *dos familias de conjuntos de funciones de la forma* $f_\gamma : (X,\tau) \to (X_\gamma, \tau_\gamma)$*. Entonces se cumple que* $\sigma(X,\mathcal{F}) \subseteq \sigma(X,\mathcal{F})$*.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que,

$$\mathcal{F}_1 = \{f_\gamma : (X,\tau) \to: (X_\gamma,\tau_\gamma) : \gamma \in \Gamma_1\}$$
$$\mathcal{F}_2 = \{f_\gamma : (X,\tau) \to: (X_\gamma,\tau_\gamma) : \gamma \in \Gamma_2\}$$

Dado que $\mathcal{F}_1$ es más grueso que $\mathcal{F}_2$, necesariamente $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$. Sea $U \in \sigma(X,\mathcal{F}_1)$, sin pérdida de generalidad supongamos que,

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} f_{\gamma_i}^{-1}(U_i)$$

donde $f_{\gamma_i} \in \mathcal{F}_1$ y $U_i \in \tau_{\gamma_i}$ donde $\gamma_i \in \Gamma$ para todo $i = 1,\cdots,n$. Claramente $f_{\gamma_i} \in \mathcal{F}_2$ y $\gamma_i \in \Gamma_2$ para todo $i = 1,\cdots .n$. Lo que implica que U es intersección finita de elementos de la subbase de $\sigma(X,\mathcal{F}_2)$ y por tanto es elemento de este. Demostrando que,

$$\sigma(X,\mathcal{F}_1) \subseteq \sigma(X,\mathcal{F}_2)$$

■

Observación: Sea X un espacio vectorial normado. En X^* tenemos tres topologías importantes.

- **Topología fuerte:** Es la topología dada por la topología inducida por la norma $\|\cdot\|$, el cual denotamos $\tau_{\|\cdot\|}$.
- **Topología débil:** Es la topología dada por $\sigma(X^*, X^{**})$.
- **Topología débil estrella:** Es la topología dada por $\sigma(X^*, X)$

Dado que $i : X \to X^{**}$ es inyectivo, se tiene que $i(X) \subseteq X^{**}$. Luego se satisface,

$$\sigma(X^*, X) \subseteq \sigma(X^*, X^{**}) \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$$

Por lo tanto, en X^* un abierto débil estrella también es abierto débil y también es abierto fuerte. Es más, si U es cerrado débil estrella, entonces $X \setminus U$ es abierto débil estrella y luego es abierto débil y abierto fuerte, luego U es cerrado débil y cerrado fuerte. Sin embargo, no todo abierto fuerte es débil ni todo abierto débil es débil estrella.

Observación: En X solo tenemos,

$$\sigma(X, X^*) \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$$

Teorema: *Sea* X *espacio vectorial normado. Sea* $C \subseteq X$ *convexo, entonces* C *es cerrado fuerte si y sólo si es* ω *cerrado débil.*

Demostración: Claramente si C es cerrado débil, entonces es cerrado fuerte. Probemos la otra implicancia. Supongamos que C es cerrado fuerte. Observemos que si $f \in X^*$ y dado $c \in \mathbb{R}$, la función,

$$f : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$$

Es continua, luego $f : (X, \sigma(X, X^*)) \to \mathbb{R}$ es continua por la definición de topología débil, y entonces,

$$\mathbb{H}^+_{f,c} = f^{-1}([c, \infty))$$

es cerrado débil. Sabemos que si C es convexo y cerrado fuerte, por HB se comprueba que,

$$C = \bigcap_{C \subseteq \mathbb{H}^+_{f,c}} \mathbb{H}^+_{f,c}$$

Luego C es intersección arbitraria de cerrados débiles, por lo tanto C es cerrado débil. ■

Proposición: *Sea X un espacio vectorial de dimensión infinita. Sea $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ (S es cerrado fuerte), entonces $\overline{S}^{\omega} = \overline{B}(X)$ ($\overline{S}^{\omega}$ es la clausura sobre la topología débil)*

Demostración: Probemos que $B(X) = \{x \in X : \|x\| < 1\} \subseteq \overline{S}^{\omega}$. Sea $x_0 \in B(X)$ y sea U una vecindad débil de x_0, sin pérdida de generalidad supongamos que,

$$U = \{z \in X : |f_i(x_0) - f_i(z)| < \varepsilon_i, i = 1, \cdots, n\}$$

donde claramente $x_0 \in U$ y U es un abierto débil. Ahora sin pérdida de generalidad supongamos que $f_i \neq 0$ para todo $i = 1, \cdots, n-$. Como X es de dimensión infinita se tiene que,

$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j \neq \{0\}$$

Existe $y_0 \neq 0$ tal que $f_j(y_0) = 0$ para todo $j = 1, \cdots, n$ y por tanto existe t_0 tal que,

$$\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$$

Luego $x_0 + t_0 y_0 \in S$. Esto se puede hacer puesto que $\|x_0\| < 1$ y dado que,

$$\|x_0 + t y_0\| \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

Entonces por continuidad ese t_0 existe. Además,

$$f_i(x_0 + t_0 y_0) = f_i(x_0)$$

para todo $i = 1, \cdots, n$. Por lo que $x_0 + t_0 y_0 \in U$, es decir, para todo $x_0 \in B(X)$ y para todo U vecindad débil de x_0 es tal que $U \cap S \neq \emptyset$, lo que implica que $x_0 \in \overline{S}^{\omega}$ y por tanto $B(X) \subseteq \overline{S}^{\omega}$. Dado que ser cerrado débil es un cerrado fuerte, se tiene que,

$$\overline{B}(X) \subseteq \overline{S}^{\omega}$$

Probemos la igualdad. Sabemos que $\overline{B}(X)$ es convexo y fuerte cerrado, entonces es cerrado débil y por tanto,

$$\begin{aligned}\overline{B}(X) &= \overline{B(X)}^{\omega} = \overline{B(X) \cup S}^{\omega} \\ &= \overline{B(X)}^{\omega} \cup \overline{S}^{\omega} = \overline{S}^{\omega}\end{aligned}$$

Demostrando la proposición. ■

Corolario: *Si X es un espacio vectorial de dimensión infinita, entonces $B(X)$ no es abierto débil.*

Demostración: Sabemos que $\overline{B}(X)$ es un cerrado débil, luego,

$$S = \overline{B}(X) \cap B(X)^c$$

Notemos que S no es cerrado débil, ya que si lo fuera entonces $S = \overline{S}^{\omega} = \overline{B}(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ siendo una clara contradicción. Luego si $\overline{B}(X)$ es cerrado débil, necesariamente $B(X)^c$ no es ω cerrado, es decir, $B(X)$ no es abierto débil como queríamos demostrar. ■

Teorema: *Sea X espacio vectorial normado. Entonces $\overline{\overline{B}(X)}^{\omega^*} = \overline{B}(X^{**})$*

Nota: Estamos tomando pensando los elementos de $\overline{B}(X)$ como elemento de X^{**}, por lo que usamos la identificación $i : X \to X^{**}$, en particular, el teorema es equivalente a trabajar con,

$$\overline{i(\overline{B}(X))}^{\omega *} = \overline{B}(X^{**})$$

Por otro lado, tenen encuenta que si trabajamos con $i(\overline{B}(X)) \subseteq X^{**}$, entonces la topología débil estrella es la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$.

Demostración: Demostremos por contradicción. Supongamos que existe $\xi_0 \in \overline{B}(X^* *)$ que no esté en $\overline{i(\overline{B}(X))}^{\omega *}$. Por definición de clausura, existe un vecindad U abierto débil estrella que no intersecta a $\overline{i(\overline{B}(X))}^{\omega *}$, en particular, existen $f_1, \cdots, f_n \in X*$ y $\varepsilon > 0$ tales que,

$$U = \{\xi \in X^{**} : |\xi(f_i) - \xi_0(f_i)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\}$$

(generalmente tomamos $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ pero tomaremos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para solo usar uno.) Se tiene que $U \cap \overline{i(\overline{B}(X))}^{\omega *} = \emptyset$. Luego para todo $x \in \overline{B}(X)$ existe un $i = 1, \cdots, n$ tal que,

$$|i(x)(f_i) - \xi_0(f_i)| \geq \varepsilon$$

Sea $\phi : X \to \mathbb{R}^n$ dada por,

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

Se puede ver que ϕ es linea y continua que además,

$$\|\phi(x) - \alpha\|_\infty \geq \varepsilon$$

donde,

$$\alpha = \begin{bmatrix} \xi_0(f_1) \\ \vdots \\ \xi_0(f_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

para todo $x \in \overline{B}(X)$. Por lo tanto $\alpha \notin \overline{\phi(\overline{B}(X))}^{\omega*}$ donde $\phi(\overline{B}(X))$ es convexo. Por el teorema HB en $\mathbb{R}^n$, existe $\beta{:}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal y existe $c \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\beta(\phi(x)) \leq c < \beta(\alpha)$$

para todo $x \in \overline{B}(X)$. (Usamos la identificación $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$ donde $\beta(z) = \sum_{i=1}^n \beta_i z_i$). Pero luego para todo $\|x\| \leq 1$ se tiene que,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i f_i(x) \leq c < \sum_{i=1}^n \beta_i \xi(f_j)$$

Estudiemos las $\leq$ y $<$ de la desigualdad anterior, digamos (a) y (b) respectivamente. Si deinimos $f = \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \in X^*$ con $f_i \in X^*$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Entonces por (a)

$$f(x) \leq c \text{ para todo } \|x\|_X \leq 1$$

Entonces $\|f\|_{X^*} \leq c$ y por (b),

$$c < \xi_0(f) \leq \|\xi\|_{X^{**}} \|f\|_{X^*} \leq c$$

Entonces $c < c$ siendo una contradicción, por lo tanto,

$$\overline{B}(X^{**}) \subseteq \overline{i(\overline{B}(X))}^{\omega^*}$$

Demostramos la igualdad. Sabemos que,

$$i(\overline{B}(X)) \subseteq \overline{B}(X^{**})$$

Veamos que $\overline{B}(X^{**})$ es cerrado débil estrella. Sea $\xi_0 \notin \overline{B}(X^{**})$, luego $\|\xi_0\|_{X^{**}} > 1$ y entonces,

$$\sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*=1}}} |\xi_0(f)| > 1$$

Luego existe $f_0 \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tal que $|\xi_0(f_0)| > 1 + \varepsilon$. Entonces,

$$U = \{\xi \in X^{**} : |\xi(f_0) - \xi_0| < \varepsilon\}$$

es una vecindad débil estrella de ξ_0 y si $\xi \in U$, entonces,

$$|\xi(f_0)| \geq |\xi_0(f_0)| - |\xi(f) - \xi_0(f_0)| > 1 + \varepsilon - \varepsilon = 1$$

Entonces $\||\xi\|_{X^{**}} \geq |\xi(f_0)| > 1$ donde $\|f_0\|_{X^*} = 1$. Entonces $U \cap \overline{B}(X^{**}) = \emptyset$ por lo tanto $\overline{B}(X^{**})$ es cerrado débil estrella. Finalmente,

$$\overline{i(\overline{B}(X))}^{\omega^*} \subseteq \overline{B}(X^{**})$$

Lo que demuestra el teorema. ■

Teorema: *Sea X espacio vectorial normado. Entonces X es reflexivo si y sólo si $B(X)$ es compacto débil.*

Observación: X y sobre la topología débil, una vecindad débil U de $x_0 \in X$ es tal que existen $f_1, \cdots, f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tal que,

$$x_0 \in \{z \in X : |f_i(z) - f_i(x_0)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\} \subseteq U$$

En $\sigma(X^{**}, X^*)$, una vecindad débil estrella U de $x_0^{**} \in X^* *$ es tal que existen $f_1, \cdots, f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tal que,

$$x_0^{**} \in \{z^{**} \in X^{**} : |z^{**}(f_i) - x_0^{**}(f_i)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\} \subseteq U$$

Luego la función,

$$i : (X, \sigma(X, X^*)) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$$

es continua. Y si restringimos el codominio al recorrido obtenemos

$$i : (X, \sigma(X, X^*)) \to (i(X), \sigma(X^{**}, X^*)\big|_{i(X)})$$

Una función biyectiva y por tanto un homeomorfismo. Esto implica que,

$$i : (\overline{B}(X), \sigma(X, X^*)\big|_{\overline{B}(X)}) \to (i(\overline{B}(X)), \sigma(X^{**}, X^*)\big|_{i(\overline{B}(X))})$$

es un homeomorfismo, es decir, es biyectica bicontinua.

Observación; Si Y es un espacio vectorial normado Banach, entonces $B(X, Y)$ es Banach Esto implica que todo dual topológico es Banach (es decir, $X^*, X^{**}, \cdots$ son espacios Banach.)

Demostración: Supongamos que X sea refelxivo, entonces $i(X) = X^{**}$, en particular,

$$i(\overline{B}(X)) = \overline{B}(X^{**})$$

Por el teorema de Alaoglu se tiene que la bola cerrada unitaria $\overline{B}(X^{**}) = i(\overline{B}(X))$ es compacta débil estrella (en $\sigma(X^{**}, X^*)$), entonces $\overline{B}(X^{**})$ es compacta débil estrella restringida a $\overline{B}(X^{**})$ (es $\sigma(X^{**}, X^*)\big|_{\overline{B}(X^{**})}$ compacta.) Como i es homeomorfismo, se tiene que,

$$i^{-1}(i(\overline{B}(X))) = \overline{B}(X)$$

es $\sigma(X,X^*)\big|_{\overline{B}(X)}$ compacto. Finalmente obtenemos que $\overline{B}(X)$ es $\sigma(X,X^*)$ compacta o es débil compacta.

Probemos la otra implicancia. Supongamos que $\overline{B}(X)$ es $\sigma(X,X^*)$ compacta. Entonces también es $\sigma(X,X^*)\big|_{\overline{B}(X)}$ compacta y por tanto aplicando i obtenemos que $i(\overline{B}(X))$ es $\sigma(X^{**},X^*)\big|_{i(\overline{B}(X))}$ compacta. Extendiendo a todo la topología débil estrella, se tiene que $i(\overline{B}(X))$ es $\sigma(X^{**},X^*)$ compacta donde este topología es Hausdorff en X^{**}, por lo tanto,

$$i(\overline{B}(X)) = \overline{i(\overline{B}(X))}^{\omega^*} = \overline{B}(X^{**})$$

Demostrando que X es reflexivo. ■

Corolario: *Si X es espacio vectorial normado reflexivo y si $Y \subseteq X$ es subespacio cerrado fuerte de X, entonces Y es reflexivo.*

Demostración: Sabemos que $\overline{B}(Y) = \overline{B}(X) \cap Y$ donde tenemos una intersección de cerrados fuertes, entonces dado que $\overline{B}(Y)$ es convexo y cerrado fuerte, se tiene que es $\sigma(X,X^*)$ cerrado. Como X es reflexivo, entonces $\overline{B}(X)$ es $\sigma(X,X^*)$ compacto y dado que es Hausdorff, entonces $\overline{B}(Y)$ es $\sigma(X,X^*)$ compacto, luego restringiendo la topología a Y obtenemos que $\overline{B}(Y)$ es $\sigma(X,X^*)\big|_Y$ compacto. Sabemos que,

$$\sigma(X,X^*)\big|_Y = \sigma(Y,Y^*)$$

Entonces $\overline{B}(Y)$ es $\sigma(Y,Y^*)$ compacto y por el resultado anterior Y es reflexivo. ■

Teorema: *Sea X Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X es reflexivo*

ii) *X^* es reflexivo*

iii) $\sigma(X^*,X) = \sigma(X^*,X^{**})$

Recordemos la siguiente cadena de topologías en X^*,

$$\sigma(X^*,X) \subseteq \sigma(X^*,X^{**}) \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$$

Demostración: (falta i) ¡-¿ii) ayudantía).

- **i) $\Rightarrow$ ii):**
- **i) $\Rightarrow$ iii):** Supongamos que X es reflexivo, entonces $i(X) = X^{**}$. Sea $U \in \sigma(X^*,X^{**})$, sin pérdida de generalidad podemos pensar en que,

  $$U = \{g \in X^* : |F_i(g) - F_i(f)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\}$$

  donde $F_1, \cdots, F_n \in X^{**}$ y $\varepsilon > 0$ (existen por la definición de topología débil), luego existen $x_1, \cdots, x_n \in X$ tales que $\hat{x}_i = F_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$ y entonces,

  $$U = \{g \in X^* : |\hat{x}_i(g) - \hat{x}_i(f)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\}$$

  Es decir, $U \in \sigma(X^*,X)$, por lo tanto,

  $$\sigma(X^*,X) = \sigma(X^*,X^{**})$$

- **iii) $\Rightarrow$ ii):** Supongamos $\sigma(X^*, X) = \sigma(X^*, X^{**})$. Sabemos que $\overline{B}(X^*)$ es $\sigma(X^*, X)$ compacta por el teorema de Alaogl, luego también es $\sigma(X^*, X^{**})$ compacta por hipótesis, por lo tanto X^* es reflexivo.

Terminar $\blacksquare$

Corolario: *Sea X espacio vectorial normado reflexivo. Si K es convexo cerrado fuerte y acotado, entonces es compacto débil*

Demostración: Tenemos K convexo cerrado fuerte, entonces como hemos visto, se tiene que K es cerrado débil. Si K es acotad entonces existe $R > 0$ tal que $K \subseteq R \cdot \overline{B}(X)$ ($\|x\| \leq R$ para todo $\in K$). En particular, $R \cdot \overline{B}(X)$ es compacto débil por Alaoglu y dado que la topología débiles es Hausdorff, se tiene que K es compacto débil $\blacksquare$

4.1. Convergencia en Topología débil y débil estrella

Recordemos la convergencia de una sucesión. Si (Z, τ) es un espacio topológico, decimos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Z, converge a $z \in Z$ si para toda vecindad con respecto a τ de z, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in U$ para todo $n \geq N$.

Notación: Sea X espacio vectorial normado.

- Cuando hablemos de convergencia fuerte usamos la notación $\to$
- Cuando hablamos de convergencia débil usamos la notación $\rightharpoonup$
- Y en X^* cuando hablamos de convergencia débil estrella usamos la notación $\overset{*}{\rightharpoonup}$

Proposición: *Sea X espacio vectorial normado. Entonces,*

i) $x_n \to x$ *en la topología fuerte si y sólo si* $\|x_n - x\|_X \to 0$

ii) $x_n \rightharpoonup x$ *en la topología débil* $\sigma(X, X^*)$ *si y sólo si,*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

para todo $f \in X^*$.

iii) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *(convergencia débil estrella) si y sólo si* $f_n(x) \to f(x)$ *para todo* $x \in X$.

Demostración:

i) Tenemos la topología fuerte el cual tiene por base,

$$\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$$

Sabemos que $x_n \to x$ si para toda vecindad de U de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $U = B(x, r)$. Luego dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar la bola $B(x, \varepsilon)$ de forma que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq N$, que es equivalente a decir que $\|x_n - x\|_X < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y por tanto $\|x_n - x\|_X \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Ahora para la otra implicancia notemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|x_n - x\|_X < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in B_(x, \varepsilon)$$

para todo $n \geq N$. Luego para toda vecindad U de x podemos tomar la bola $B(x, \varepsilon)$ de forma que,

$$x_n \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

para todo $n \geq N$. Luego $x_n \to x$ en la topología fuerte.

ii) Supongamos que para todo $f \in X^*$ se tiene que $f(x_n) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$. Sea U una vecindad débil de x (en $\sigma(X, X^*)$), leugo existen $f_1, \cdots, f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tal que,

$$x \in V := \{z \in X : |f_i(z) - f_i(x)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\} \subseteq U$$

Notemos que,

$$\lim_{n \to \infty} f_i(x_n) = f_i(x)$$

para todo $i = 1, \cdots, n$ por hipótesis. En particular, para $\varepsilon > 0$ existen $N_1, \cdots .N_n \in \mathbb{N}$ tales que,

$$|f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N_i$ (tomando cada f_i asociado) para todo $i = 1, \cdots, n$. Tomando $N := \max\{N_1, \cdots, N_n\}$ tenemos que,

$$|f_i(x_n) - f_i(x)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Por lo tanto $x_n \in V$ para todo $n \geq N$. Como tomamos una vecindad débil arbitraria, se concluye que para toda U vecindad débil de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$, y por tanto $x_n \rightharpoonup x$.

Sea $f \in X*$, entonces por definición de la topología débil se tiene que,

$$f : (X, \sigma(X, X^*)) \to \mathbb{R}$$

es continua. Supongamos que $f(x_n)$ no converge a $f(x)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que,

$$|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon \Leftrightarrow f(x_n) \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$$

Luego,

$$x_n \notin \underbrace{f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))}_{\text{es vecindad abierto débil de } x} =: U$$

Luego existe una vecindad débil U de x tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ se tiene que existe $n \geq N$ tal que $x_n \notin U$ y por tanto $x_n \not\rightharpoonup x$ siendo una contradicción. Por lo tanto para todo $f \in X^*$ se tiene que,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

iii) Supongamos que para todo $x \in X$ se tiene que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Sea U vecindad débil estrella de f, entonces existen $x_1, \cdots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que,

$$f \in V := \{g \in X^* : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\} \subseteq U$$

Se tiene que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_i) = f(x_i)$$

para todo $i = 1, \cdots, n$. De forma análogo al punto ii) podemos tomar un N maximal de forma que dado $\varepsilon > 0$ se tiene que,

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$ para todo $i = 1, \cdots, n$. Luego $f_n \in V$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto para toda vecindad débil estrella U de f existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_n \in U$ para todo $n \geq N$, es decir, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Supongamos que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$. Sabemos que,

$$\hat{x} : (X^*, \sigma(X^*, X)) \to \mathbb{R}$$

es continua. Supongamos que existe un $x \in X$ tal que $f_n(x)$ no converge a $f(x)$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que,

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \Leftrightarrow \hat{x}(f_n) = f_n(x) \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$$

Luego,

$$f_n \notin \underbrace{\hat{x}^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))}_{\text{es vecindad abierta débil * de } x}$$

Luego existe una vecindad débil estrella U de f tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ se tiene que existe $n \geq N$ tal que $f_n \notin U$, siendo esto una contradicción por lo tanto $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$.

Recordemos que en X^* tenemos la siguiente cadena de topologías,

$$\sigma(X^*, X) \subseteq \sigma(X^*, X^{**}) \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$$

Afirmación: *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ una sucesión de funcionales acotados y sea $f \in X^*$. Entonces se tiene la siguiente cadena de implicancias,*

$$f_n \to f \Rightarrow f_n \rightharpoonup f \Rightarrow f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$$

Demostración: Sea (a) la primera implicancia y (b) la segunda implicancia.

(a) Supongamos que $f_n \to f$ en la topología fuerte. Sea $F \in X^{**}$, se tiene que,

$$\begin{aligned} |F(f_n) - F(f)| &= |F(f_n - f)| \\ &\leq \|F\|_{X^{**}} \|f_n - f\|_{X^*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Entonces se tiene que $F(f_n) \to F(f)$ cuando $n \to \infty$ para todo $F \in X^{**}$. Por lo tanto $f_n \rightharpoonup f$.

(b) Supongamos que $f_n \rightharpoonup f$, es decir, para todo $F \in X^{**}$ se tiene que $F(f_n) \to F(f)$. Notemos que para todo $x \in X$ entonces $i(x) \in X^{**}$, luego se tiene que,

$$i(x)(f_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} i(x)(f) \Leftrightarrow f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Demostrando la afirmación. ■

Proposición: *Sea X espacio vectorial normado. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y sea $x \in X$, entonces,*

i) Si $x_n \to x$ entonces $x_n \rightharpoonup x$

ii) Si $x_n \rightharpoonup x$, entonces la sucesión $\{\|x_n\|_X\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es acotado y,

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$$

iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ y $f_n \to f$ entonces $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demostración:

i) Recordemos que $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in X^*$, entonces

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|_{X^*} \|x_n - x\|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Luego se tiene que $x_n \rightharpoonup x$.

ii) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, usando la identificación $i : X \to X^{**}$, obtenemos la sucesión $\{i(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^{**}$, donde $i(x_n) \in B(X^*, \mathbb{R})$. Como $x_n \rightharpoonup x$, entonces $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in X^*$, entonces,

$$i(x_n)(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} i(x)(f)$$

para todo $f \in X^*$. Luego $\{i(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de operadores lineales acotados de un Banacha en otro, que es puntualmente acotado, en particular,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |i(x_n)(f)| = c < \infty$$

Por HB existe $M > 0$ tal que,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|i(x_n)\|_{X^{**}} \leq M$$

Entonces $\|x_n\|_{n\in\mathbb{N}} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $f \in X^*$ y $\|f\|_{X^*} = 1$, se tiene que,

$$|f(x_n)| \leq \|f\|_{X^*}\|x_n\|_X = \|x_n\|_X$$

Tomando el límite inferior, obtenemos,

$$|f(x)| = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$$

para todo $f \in X*$ con $\|f\| = 1$. Recordemos que,

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{f\in X^* \\ \|f\|_{X^*}=1}} |f(x)|$$

Entonces,

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$$

iii) Si $f_n \to f$ y $x_n \rightharpoonup x$, entonces,

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &= |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle + \langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\ &\leq |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\ &\leq \|f_n - f\|_{X^*}\|x_n\|_X + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Demostrando la proposición. ■

Definición: *Sea X espacio vectorial. Sea $A \subseteq X$, decimos que y es combinación convexa de elementos en A si existen $x_1, \cdots, x_n \in A$ y $c_1, \cdots, c_n \in [0, 1]$ tal que,*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1 \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = y$$

Definición: *Sea X espacio vectorial y sea $A \subseteq X$. Definimos la envoltura convexa de A,*

$$co(A) = \{todas\ las\ combinaciones\ convexas\ de\ puntos\ en\ A\}$$

Definición: *Sea X espacio vectorial. Sea $C \subseteq X$, decimos que es convexo si para todo $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.*

Proposición: *Sea X espacio vectorial. Sea $A \subseteq X$, entonces $co(A)$ es el menor conjunto convexo que contiene a A.*

Demostración: Veamos que es convexo. Sea $x, y \in \text{co}(A)$ y sea $\lambda \in [0, 1]$. Se tiene que,

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} d_i b_i$$

donde,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$$
$$\sum_{i=1}^{m} d_i = 1$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $m \geq n$ y entonces,

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i a_i$$

donde $c_i = 0, a_i = 0$ para todo $i \geq n+1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} d_i b_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \lambda c_i a_i + (1-\lambda) d_i b_i \end{aligned}$$

terminar

Sea U otro conjunto convexo que contiene a A. Sea $x \in \mathrm{co}A$ **terminar esto**

Teorema de Mazur: *Sea X espacio vectorial normado. Si $x_n \rightharpoonup x$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que consiste en combinaciones convexas de los x_n tal que $y_n \to x$.*

Demostración (Teorema de Mazur): Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \rightharpoonup x$. Sea $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$. Luego $\mathrm{co}(A)$ es convexo, en particular,

$$x \in \overline{A}^{\omega} \subseteq \overline{\mathrm{co}(A)}^{\omega}$$

Si los conjuntos convexos son fuertes y débiles, entonces,

$$\overline{\mathrm{co}(A)}^{\omega} = \overline{\mathrm{co}(A)}$$

Afirmación: *Si C es convexo, entonces $\overline{C}$ también (clausura fuerte)*

Demostración: Pensemos en X espacio vectorial normado con $C \subseteq X$. Sea $x, y \in \overline{C}$, entonces existen sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en C tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} tx_n + (1-t)y_n = tx + (1-t)y$$

Donde $tx_n + (1-t)y_n \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $tx + (1-t)y \in \overline{C}$, por lo tanto $\overline{C}$ es convexo. ■

Como $x \in \overline{\mathrm{co}(A)}$, entonces existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathrm{co}(A)$ tal que $y_n \to x$. ■

Nota: Podemos escoger los y_n como elementos de $\mathrm{co}(\{x_1, \cdots, x_n\})$.

Proposición: *Sea X espacio vectorial normado. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$, entonces,* *i) Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$*, entonces* $\{\|f_n\|_{X^*}\} \subseteq \mathbb{R}$ *es acotado y,*

$$\|f\|_{X^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X^*}$$

ii) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *y* $x_n \to x$*, entonces* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$*.*

Demostración (falta):

i) Si f_n converge débilmente estrella a f, entonces para todo $x \in X$ se tiene que $f_n(x) \to f(x)$. .....

ii) Notemos que,

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &= |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f_n, x\rangle + \langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| \\
&\leq |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f_n, x\rangle| + |\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| \\
&\leq \|f_n\|_{X^*}\|x_n - x\|_X + |\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Demostrando la proposición. ■

Teorema: *Sea* X *espacio vectorial normado Banach. Sea* $A \subseteq X$*, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A compacto débil

ii) A es secuencialmente compacto débil (es decir, toda sucesión de A tiene una subsucesión que converge de forma débil en A)

Afirmación: *La implicancia i)* $\Rightarrow$ *ii) se satisface su* X *es separable.*

Demostrar....:

Teorema: *Sea* X *espacio vectorial normado reflexivo. Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada en* X*. Entonces hay una subsucesión convergente en la topología débil.*

Demostración: Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, existe $R > 0$ tal que,

$$\{x_n\}_{n\in N} \subseteq R \cdot \overline{B}(0,1)$$

Si X es reflexivo, entonces $R \cdot \overline{B}(0,1)$ es compacto débil y luego es secuencialmente compacto débil y luego existe una subsucesión convergente en la topología débil. ■

Definición: *Sea* X *espacio vectorial. Sea* $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*. Decimos que,*

- φ *es propia si* $\varphi \not\equiv \infty$*.*
- φ *es convexo si para todo* $x, y \in X$ *y para todo* $\lambda \in [0,1]$ *se tiene que,*

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$$

- *φ es semi continua inferior si,*
$$\varphi^{-1}((-\infty,\alpha])$$
es cerrado fuerte para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- *φ es coerciva si,*
$$\lim_{\|x\|_X\to\infty} \varphi(x) = \infty$$

Teorema: *Sea X espacio vectorial normado Banach reflexivo. Sea $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia convexo semi continua inferior fuerte y coerciva, entonces existe $x_0 \in X$ tal que,*
$$\varphi(x_0) \leq \inf_{x\in X} \varphi(x)$$

Observación: φ es semi continua inferior en un punto x_0 si,
$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} \varphi(x)$$
Y es semi continua en X si lo es en todo punto $x_0 \in X$.

Observación: Si φ es continua en X, entonces semi continua inferior en X.

Observación: Si φ es convexo, entonces,
$$\varphi^{-1}((-\infty,\alpha])$$
son convexos en X para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (o $\emptyset$)

Demostración: Sea $m = \inf_{x\in X} \varphi(x) \in [-\infty,\infty)$. Sea $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $t_n \downarrow m$, luego,
$$\varphi^{-1}(-\infty,t_1])$$
es acotado (por coersividad). Sea,
$$A_1 := \varphi^{-1}((-\infty,t_n]) \neq \emptyset$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, de forma que tenemos una cadena de conjuntos no vacíos convexos (por φ convexo), cerrados fuertes y acotado. Luego los A_i son cerrados débiles (HB) y como son acotados y X es reflexivo, se tiene que A_i son compactos débiles, luego,
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$$
Sea $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, entonces,
$$\varphi(x_n) \leq t_n$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,
$$\varphi(x_0) = m$$
en particular $m > -\infty$. ■

5. Espectro de un Operador Acotado

A partir de aquí trabajaremos con espacios Banach definidos sobre $\mathbb{C}$, es decir, espacios vectoriales definidos con el cuerpo $\mathbb{C}$ con norma y que es completo.

Nota: Todas las definiciones se pueden definir en $\mathbb{R}$.

Definición: *Un álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ equipado con $\cdot : A \times A \to A$ que satisface:*

i) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

ii) $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$

iii) $(\alpha x) \cdot (\beta y) = (\alpha\beta)(x \cdot y)$

iv) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Nota: Por comodidad en algunos casos escribiremos el producto de a con b por ab.

Definición: *Un álgebra de Banach unital A, es un espacio vectorial normado completo sobre $\mathbb{C}$ que es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ tal que:*

- *Tiene una unidad $e \in A$, es decir, $e \cdot a = a \cdot e = a$ para todo $a \in A$ y $\|e\|_A = 1$.*
- $\|a \cdot b\|_A \leq \|a\|_A \|b\|_A$ *para todo $a, b \in A$.*

Ejemplo: Sea X espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Entonces $B(X)$ es un álgebra de Banach unital con unidad $I : X \to X$. Para ver esto debemos ver que es un álgebra asociativa, ver que tiene unidad con norma 1 y que se satisface la desigualdad del producto.

- **Algebra asociativa:** En $B(X)$ definimos el producto dado por,

$$\begin{aligned} B(X) \times B(X) &\to B(X) \\ (T, S) &\mapsto T \cdot S = T \circ S \end{aligned}$$

  Claramente es un álgebra asociativa sobre $\mathbb{C}$ como X tiene por cuerpo los complejos.

- **Unidad:** Notemos que para todo $T \in B(X)$ se tiene que,

$$IT = TI = T$$

  Y además,

$$\|I\|_{B(X)} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ix\|_X = \sup_{\|x\|_X = 1} 1 = 1$$

- **Desigualdad del producto:** Sean $T, S \in B(X)$, luego,

$$\begin{aligned}\|TS\|_{B(X)} &= \sup_{\|x\|_X=1} \|TSx\|_X \\ &\leq \sup_{\|x\|_X=1} \|T\|_{B(X)}\|Sx\|_X \\ &\leq \|T\|_{B(X)} \sup_{\|x\|_X=1} \|Sx\|_X \\ &= \|T\|_{B(X)}\|S\|_{B(X)}\end{aligned}$$

Como queriamos verificar.

Definición: *Sea A un álgebra de Banach unital. Decimos que un elemento $a \in A$ es invertible si existe $b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = e$. En tal caso denotamos $a^{-1} = b$ y decimos que es la inversa de a.*

Definición: *Sea A un álgebra de Banach unital. Para $a \in A$ definimos el espectro de a por,*

$$\sigma_A(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \text{ no es invertible}\}$$

Definición: *Sea A un álgebra de Banach unital.*

i) *Dado $a \in A$ definimos el conjunto resolvente de a por el conjunto,*

$$\delta_A(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$$

A los elementos del conjunto resolvente les decimos punto regular de a.

ii) *La función,*

$$\begin{aligned}R : \delta_A(a) &\to A \\ \lambda &\mapsto (\lambda e - a)^{-1}\end{aligned}$$

Es la función resolvente de a y el elemento $R(\lambda)$ es la resolvente de a en $\lambda \in \delta_A(a)$.

Veamos con los operadores. Sea X un espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Consideremos el álgebra de Banach unital $A = B(X)$. Sea $T \in A$, entonces por definición,

$$\sigma_A(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es invertible}\}$$

Por comodidad en operadores escribimos el espectro de T simplemente por $\sigma(T)$ ya que más adelante definiremos algo similar. El conjunto resolvente lo escribimos por,

$$\rho(T) := \delta_A(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$$

Volvamos a un A álgebra Banach unital arbitrario. Podemos pensar A como un subconjunto de $B(A)$ usando la siguiente identificación,

$$\begin{aligned}A &\to L_a \\ a &\mapsto L_a(x) = a \cdot x\end{aligned}$$

Que es la multiplicación por la izquierda o la premultiplicación.

Afirmación: $L_a : A \to A$ *es un operador lineal acotado.*

Demostración: Veamos que es lineal y, luego que es acotado.

- **Lineal:** Sean $x, y \in A$ y escalares λ, μ. Entonces,

$$\begin{aligned} L_a(\lambda x + \mu y) &= a \cdot (\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda a \cdot x + \mu a \cdot y \\ &= \lambda L_a(x) + \mu L_a(y) \end{aligned}$$

  Luego $L_a \in \mathcal{L}(A)$.

- **Acotado:** Sea $x \in A$, entonces,

$$\|L_a(x)\|_A = \|a \cdot x\|_A \leq \|a\|_A \|x\|_A$$

  Luego L_a es acotado.

Por tanto $L_a \in B(A)$. ■

Observación: Consideremos la multiplicación por la izquierda L_a.

i) Si $a \in A$ es invertible, entonces L_a también es invertible con inversa $S = L_{a^{-1}} \in B(A)$.

ii) Si L_a es invertible, entonces a es invertible con inversa $b = (L_a)^{-1}e \in A$.

Afirmación: $\sigma_A(a) = \sigma(L_a)$

Demostración: Primero vamos a demostrar los puntos de la observación anterior y luego concluir el resultado.

i) Sea $a \in A$ invertible, entonces podemos definir $L_{a^{-1}} : A \to A$ donde $x \mapsto a^{-1}x$. Notemos que,

$$\begin{aligned} (L_a L_{a^{-1}})(x) = L_a(a^{-1}x) = aa^{-1}x = ex = x \\ (L_{a^{-1}} L_a)(x) = L_{a^{-1}}(ax) = a^{-1}ax = ex = x \end{aligned}$$

   Luego $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$.

ii) Sea L_a invertible con inversa $(L_a)^{-1}$. Notemos que,

$$\begin{aligned} e = L_a((L_a)^{-1}(e)) = a(L_a)^{-1}e \\ e = (L_a)^{-1}(e)(L_a)(e) = ((L_a)^{-1}e)a \end{aligned}$$

   Por lo tanto $a^{-1} = (L_a)^{-1}e$

Concluimos que $a \in A$ es invertible si y sólo si $L_a \in B(A)$ es invertible. Demostremos el enunciado. Sea $\lambda \in \sigma_A(a)$,

$$\begin{aligned} \lambda e - a \text{ no es invertible} &\Leftrightarrow L_{\lambda e - a} \text{ no es invertible} \\ &\Leftrightarrow \lambda I - L_a \text{ no es invertible} \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \sigma(L_a) \end{aligned}$$

Por tanto $\sigma_A(a) = \sigma(L_a)$ ■

Definición: *Sea X espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Sea $T \in B(X)$, definimos el espectro puntual de T por,*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

A los elementos de $\sigma_p(T)$ se les llama valores propios de T. Para un valor propio $\lambda \in \sigma_p(T)$, los elementos de $\ker(\lambda I - T)$ que no son nulos, son los vectores propios de T asociados al valor propio que satisfacen,

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow x \in \ker(\lambda I - T)$$

a $\ker(\lambda I - T)$ se le llama espacio propio de T asociado al valor propio de λ. Claramente se cumple,

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$$

Proposición: *Sea X espacio vectorial de dimensión finita.*

i) Se cumple que $\mathcal{L}(X,X) = B(X,X)$.

ii) Sea $T : X \to X$ operador lineal, entonces se cumple que T es inyectiva si y sólo si T es sobreyectiva.

iii) $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

Demostración: Sea X espacio vectorial de dimensión finita. Sea $B(X)$ álgebra de Banach unital.

i) **terminar**

ii) Sea $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de X. Supongamos que T es inyectivo ($\ker T = \{0\}$) y consideremos el conjunto $\eta = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$. Notemos que si consideramos $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ escalares tales que,

$$\begin{aligned} c_1 T(v_1) + \cdots + c_n T(v_n) = 0 &\Leftrightarrow T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \end{aligned}$$

Luego se tiene que necesariamente $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Por lo que el conjunto η es linealmente independiente y si $\dim X = |\eta| = n$, entonces η es base de X. Aquí se concluye que para todo $y \in X$ se puede expresar como,

$$y = c_1 T(v_1) + \cdots c_n T(v_n) = T(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n)$$

Escogiendo $x = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \in X$ obtenemos que $T(x) = y$.

Ahora probemos la otra dirección. Sea T sobreyectiva y sea $\xi = \{\xi_1, \cdots \xi_n\}$ el conjunto tal que $T(\xi_i) = v_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$ (esto se puede hacer en virtud de la sobreyectividad de T). Notemos que si tomamos $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$ tales que,

$$\begin{aligned} c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_n = 0 \Rightarrow T(c_1\xi_1 + \cdots + c_n\xi_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow c_1T(\xi_1) + \cdots + c_nT(\xi_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow c_1v_1 + \cdots + c_nv_n &= 0 \end{aligned}$$

Lo que implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ y por tanto ξ es base ($\dim X = |\xi| = n$). Sea $x \in \ker T$, entonces existen $d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{C}$ tales que,

$$x = d_1\xi_n + \cdots + d_n\xi_n$$

Pero esto implica que,

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow d_1v_1 + \cdots + d_nv_n = 0$$

Y entonces $d_1 = d_2 = \cdots d_n = 0$ y esto implica que $x = 0$. Por lo tanto $\ker T = \{0\}$, es decir, T es inyectiva. Demostrando que T es inyectiva si y sólo si es sobreyectiva.

iii) Sabemos que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$. Sea $\lambda \in \sigma(T)$, entonces,

$$\lambda I - T \text{ no es invertible} \Leftrightarrow \ker(\lambda I - T) \neq 0$$

Esta equivalencia se cumple puesto que X es de dimensión finita. Luego $\lambda \in \sigma_p(T)$ y por lo tanto $\sigma_p(T) = \sigma(T)$

Demostrando la proposición. ■

Veamos un ejemplo donde el espectro puntual de un operador es distinto a su espectro.

Ejemplo: Sea $X = l^2$ y sea $T : l^2 \to l^2$ dada por,

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots)$$

Este operador es llamado Shift derecha. Notemos que,

$$\begin{aligned} \|Tx\|_2 &= \|(0, x_1, x_2, \cdots)\|_2 \\ &= \|(x_1, x_2, \cdots)\|_2 = \|x\|_2 \end{aligned}$$

Entonces $\|T\|_{B(l^2)} = 1$. Queremos estudiar $\ker(\lambda I - T)$ con $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} (\lambda I - T)x &\Leftrightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \cdots) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Luego $\ker(\lambda I - T) = \{0\}$. Si $\lambda = 0$, entonces $\ker(-T) = \{0\}$ puesto que T es inyectivo. Por lo tanto $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Veamos que pasa con el espectro de T.

Afirmación: $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$

Demostración: Como hemos visto $\lambda I - T$ es inyectivo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ por lo que no nos sirve para estudiar, por lo que sólo nos queda ver no es sobreyectivo. Sea $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ y supongamos que existen $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ que lo mapea, luego,

$$(\lambda I - T)x = y \Leftrightarrow (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \cdots) = (y_1, y_2, \cdots)$$

Entonces se cumple,

$$\begin{aligned} y_n &= \lambda x_n - x_{n-1}, \ \ n \geq 2 \\ y_1 &= \lambda x_1 \end{aligned}$$

En particular, si tomamos $y = (1, 0, 0, \cdots)$ obtenemos que,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda x_n - x_{n-1}, \ \ n \geq 2 \\ 1 &= \lambda x_1 \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$ entonces $1 = 0$ lo cual es imposible. Si $\lambda \neq 0$ entonces,

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{\lambda} = \cdots = \frac{1}{\lambda^n}$$

Por como hemos escogido $x \in l^2$, necesariamente,

$$\|x\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda|^{2n}}$$

debe convergen. Sin embargo, si tomamos $|\lambda| \in (0, 1]$ ocurre que,

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|\lambda|^{2i}} \geq \sum_{i=1}^{N} 1 = N$$

Tomando $N \to \infty$ obtenemos que,

$$\|x\|_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda|^{2n}} = \infty$$

Y por tanto T no es sobreyectiva cuando $|\lambda| \in [0, 1]$.

Nos falta estudiar cuando $|\lambda| > 1$. Tomemos $y \in l^2$ general, entonces, **cosopajero**.

Por lo tanto T no es sobreyectivo en $|\lambda| \leq 1$ y por tanto $\sigma(T) = D[0, 1]$ (disco o bola cerrado de centro 0 y radio 1). ■

Finalmente encontramos un caso donde $\sigma_p(T) \neq \sigma(T)$.

Observación: Podemos definir $S : l^2 \to l^2$ dada por $x = (x_1, x_2, \cdots) \mapsto Sx = (x_2, x_3, \cdots)$. Luego se tiene que $S(Tx) = x$ pero $T(Sx) \neq x$ por lo que $S \neq T^{-1}$.

Recordatorio: Si X es un espacio vectorial normado Banach sobre . Entonces,

- Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty$$

Entonces,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X$$

- Sea $f : [0,1] \to X$ una función cualquiera. Decimos que es Riemann integrable si existe $I \in X$ tal que ,

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \left\| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right\| = 0$$

En tal caso definimos la integral de f por,

$$\int_0^1 f(x)dx = I \in X$$

- Si $|z| < 1$ con $z \in \mathbb{C}$, entonces,

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} \in \mathbb{C}$$

Teorema: *Sea X espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Sea $T \in B(X)$ tal que $\|T\|_{B(X)} < 1$, entonces $(I - T) \in B(X)$ es invertible y,*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n$$

donde la serie es absolutamente convergente en $B(X)$

Demostración: Si $\|T\|_{B(X)} < 1$, entonces,

$$\|T^n\|_{B(X)} \leq \|T\|^n_{B(X)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y si,

$$\sum_{n\geq 0} \|T\|^n_{B(X)} < \infty$$

Entonces dado que $B(X)$ es Banach, se tiene que la serie,

$$\sum_{n\geq 0} T^n \in B(X)$$

converge, es decir, en la topología fuerte $\|\cdot\|_{B(X)}$ tenemos la convergencia fuerte,

$$\sum_{n=0}^{N} T^n \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} S = \sum_{n\geq 0} T^n$$

Probemos ahora que $(I-T)$ es invertible. Demostremos que $S=(I-T)^{-1}$. Notemos que,

$$\begin{aligned}(I-T)S &= (I-T)\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} T^n \\ &= \lim_{N\to\infty}(I-T)\sum_{n=0}^{N} T^n \\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}(T^n - T^{n+1}) \\ &= \lim_{N\to\infty}(I-T^{N+1}) = I\end{aligned}$$

Usando la continuidad de $(I-T)$ y dado que $\|T^{N+1}\|_{B(X)} \to 0$ cuando $N\to\infty$. Para el caso $S(I-T)$ se procede de forma análogo, demostrando que $(I-T)\in B(X)$ es invertible y además,

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} T^n$$

Corolario: *Sea X espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Sea $\lambda\in\mathbb{C}$ no nulo y sea $T\in B(X)$ tal que $\|T\|_{B(X)} < |\lambda|$, entonces $(\lambda I - T)^{-1}$ es invertible y,*

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

Demostración: Notemos que si $\|T/\lambda\|_{B(X)} < 1$, entonces el operador $I - T/\lambda \in B(X)$ es invertible con inversa,

$$\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{T^n}{\lambda^n}$$

Entonces $\lambda I - T \in B(X)$ y es invertible con inversa $\lambda^{-1}(I-T/\lambda)^{-1}$, puesto que,

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)\lambda^{-1}\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1} &= \left(I-\frac{T}{\lambda}\right)\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1} \\ &= I \\ &= \left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\left(I-\frac{T}{\lambda}\right) = \lambda^{-1}\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)(\lambda I - T)\end{aligned}$$

Luego,

$$(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

Como queriamos demostrar. ■

Teorema: *Sea X espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Sean $S, T \in B(X)$ con T invertible y $\|S - T\|_{B(X)} < \|T^{-1}\|_{B(X)}^{-1}$, entonces S es invertible y,*

$$\|S^{-1} - T^{-1}\|_{B(X)} \leq \frac{\|T^{-1}\|_{B(X)}^2 \|S - T\|_{B(X)}}{1 - \|T^{-1}\|_{B(X)}\|S - T\|_{B(X)}}$$

Demostración: Sea $R := T^{-1}(T - S) \in B(X)$, entonces $\|R\|_{B(X)} \leq \|T^{-1}\|_{B(X)}\|T - S\|_{B(X)} < 1$, por el teorema anterior se tiene que $(I - R)$ es invertible donde,

$$(I - R)^{-1} = \sum_{n\geq 0} R^n \Leftrightarrow (I - T^{-1}(T - S))^{-1} = \sum_{n\geq 0} (T^{-1}(T - S))^n$$

Por otro lado,

$$R = T^{-1}(T - S) \Leftrightarrow S = T(I - R)$$

Entonces S es invertible y ,

$$S^{-1} = (I - T^{-1}(T - S))^{-1}T^{-1} = \sum_{n\geq 0} (T^{-1}(T - S))^n T^{-1}$$

Concluimos que,

$$\begin{aligned}
\|S^{-1} - T^{-1}\|_{B(X)} &= \left\| \sum_{n\geq 0} (T^{-1}(T - S))^n T^{-1} - T^{-1} \right\|_{B(X)} \\
&= \left\| \sum_{n\geq 0} ((T^{-1}(T - S))^n - I)T^{-1} \right\|_{B(X)} \\
&= \left\| \sum_{n\geq 1} (T^{-1}(T - S))^n T^{-1} \right\|_{B(X)} \\
&\leq \sum_{n\geq 1} \left(\|T^{-1}\|_{B(X)}\|T - S\|_{B(X)}\right)^n \|T^{-1}\|_{B(X)} \\
&\leq \frac{\|T^{-1}\|_{B(X)}^2 \|S - T\|_{B(X)}}{1 - \|T^{-1}\|_{B(X)}\|S - T\|_{B(X)}}
\end{aligned}$$

Como queriamos demostrar. ■

Definición: *Sea X espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$. En $B(X)$ definimos,*

$$\mathcal{G}(X) := \{T \in B(X) : T \textit{ es invertible}\}$$

Corolario: *Consideremos el conjunto $\mathcal{G}(X)$. Entonces,* *i)* $\mathcal{G}(X)$ *es abierto en* $B(X)$

ii) *Si* $A, B \in \mathcal{G}(X)$*, entonces* $AB \in \mathcal{G}(X)$

iii) *La operación multiplicación (composición),*

$$\begin{aligned} * : \mathcal{G}(X) \times \mathcal{G}(X) &\to \mathcal{G}(X) \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned}$$

Es una función continua.

iv) *El mapeo* $T \mapsto T^{-1}$ *con* $T \in \mathcal{G}(X)$*, es un homeomorfismo de* $\mathcal{G}(X)$ *a* $\mathcal{G}(X)$

Observación: Si $\lambda_0 \in \rho(T)$, entonces para $\lambda \in \rho(T)$ se tiene que,

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0)^{n+1}$$

para todo $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|^{-1}$

Corolario: $\sigma(T)$ *es un subconjunto cerrado del disco* $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|_{B(X)}\}$*. Si* $\|T\|_{B(X)} < |\lambda|$*, entonces,*

$$R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

y $\|R(\lambda)\| \leq 1/(|\lambda| - \|T\|_{B(X)})$.

Demostración: Hemos demostrado que si $\|T\|_{B(X)} < |\lambda|$, entonces $\lambda I - T \in B(X)$ es invertible. Esto implica que si $\lambda I - T$ no es invertible, entonces necesariamente $|\lambda| \leq \|T\|_{B(X)}$, de aquí cooncluimos que $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|_{B(X)}\}$. Probemos que $\sigma(T)$ es cerrado, supongamos que no es cerrado, entonces $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ no es abierto, por lo que existe un $\lambda_0 \in \rho(T)$ tal que para todo $r > 0$ es tal que,

$$D(\lambda_0, r) \nsubseteq \rho(T)$$

Notemos que $R(\lambda_0)$ está bien definido y tiene norma no nula, entonces podemos escoger $r = \|R(\lambda_0)\|_{B(X)}^{-1}$ y entonces existe un $\lambda \in D(\lambda, \|R(\lambda_0)\|_{B(X)}^{-1}$ tal que $\lambda I - T$ no es invertible. Pero luego tenemos que,

$$\|\lambda I - T - (\lambda_0 I - T)\|_{B(X)} = |\lambda - \lambda_0| \|I\|_{B(X)} < \|R(\lambda_0)\|^{-1}$$

Si $R(\lambda_0) = (\lambda_0 I - T)^{-1}$, entonces necesariamente $\lambda I - T$ es invertible pero esto es una contradicción ya que $\lambda I - T$ no es invertible. Por lo tanto necesariamente $\sigma(T)$ es cerrado.

Ahora, si $\|T\|_{B(X)} < |\lambda|$, entonces,

$$R(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

Por último estudiemos la norma, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)\|_{B(X)} &= \left\| \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \right\|_{B(X)} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n\geq 0} \left\| \frac{T}{\lambda} \right\|_{B(X)}^n \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| - \|T\|_{B(X)}} \right) = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{B(X)}}
\end{aligned}$$

Demostrando el corolario. ■

5.1. Un poco de Variable Compleja

Hemos estudiado $\sigma(T)$, pero no sabemos si este conjunto es vacío para ciertos T. Para ello usaremos un poco de variable compleja para demostrar que $\sigma(T) \neq 0$ para todo $T \in B(X)$ con X un espacio vectorial normal Banach en $\mathbb{C}$.

Definición: *Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto (con respecto a la topología dada por la norma $|\cdot|$). Decimos que $f : D \to \mathbb{C}$ es analítica si para todo $z_0 \in D$ existe $R > 0$ tal que en $|z - z_0| < R$ se cumple que,*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ y la serie converge absolutamente.

Teorema: *Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función compleja con D abierto. Entonces f es analítica en D si y sólo,*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe en $\mathbb{C}$ para todo $z_0 \in D$.

Sea $f : D \to \mathbb{C}$ una función compleja. Si el límite,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, decimos que f es holomorfa en $z_0 \in D$, por lo que f es analítica en D si y sólo si es holomorfa en D.

Observación: Sea $z = x + iy$ donde $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja, entonces podemos pensar $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son la parte real e imaginaria de la función f respectivamente. Entonces f es holomorfa en $D \subseteq$ abierto si $\nabla f(z_0)$ existe para todo $z_0 \in D$ si y sólo si,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Teorema de Louville: *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera (definido de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$). Supongamos que es analítica en todo $\mathbb{C}$ y que existe $M > 0$ tal que,*

$$|f(z)| \leq M$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es una función constante.

Corolario: *Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ un polinomio complejo donde $a_n \neq 0$ (es de grado n). Entonces p tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$.*

Demostración: Supongamos que p no tiene raíz en $\mathbb{C}$, por lo que podemos definir sin problemas la función,

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Notemos que $p(z)$ al ser un polinomio, entonces es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ donde derivada,

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$$

Y f es holomorfa donde,

$$f'(z) = (p(z)^{-1})' = -\frac{p'(z)}{p^2(z)}$$

que está bien definida dado que $p^2(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces f es analítica para en $\mathbb{C}$. Ahora, por otro lado,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \frac{1}{|p(z)|} \\ &= \frac{1}{|z|^n \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right|} \\ &\xrightarrow{|z| \to \infty} 0 \end{aligned}$$

Esto implica que f se puede acotar en $\mathbb{C}$. Finalmente tenemos f acotada analítico en $\mathbb{C}$ y por tanto es constante, es más, necesariamente $f(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ para que el límite anterior se satisfaga, y esto implica que $p(z) = 1/0$ siendo imposible. Por lo tanto p tiene una raíz en $\mathbb{C}$. $\blacksquare$

Generalizemos el concepto de analítica para espacios vectoriales.

Definición: *Sea X espacio vectorial normado Banach en $\mathbb{C}$. Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Decimos que $F : D \to X$ es analítica en D si para todo $z_0 \in D$ existe $r(z_0) > 0$ tal que,*

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ donde $a_n \in X$ (estos dependen de z_0 y r) y la serie es absolutamente convergente en X.

Observación: La resolvente $R : \rho(T) \to B(X)$ es una función analítica con respecto a valores en $B(X)$, es decir,

$$R(\lambda) = \sum_{n\geq 0}(\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0)^{n+1}$$

para todo $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0)\|_{B(X)}^{-1}$ para todo $\lambda_0 \in \rho(T)$.

Observación: Si $F : D \to X$ es analítica en $z_0 \in D$ con D abierto, entonces,

$$F'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

existe en X. Además, la derivada está bien definida puesto que al ser analítica en z_0, existe $R > 0$ tal que,

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$$

para todo $|z - z_0| < R$ y $F(z_0) = a_0$. Luego,

$$\frac{F(z) - F(z)}{z - z_0} = \sum_{n\geq 1} a_n(z - z_0)^{n-1}$$

Por tanto,

$$F'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \sum_{n\geq 1} a_n(z - z_0)^{n-1} = a_1$$

donde la serie converge absolutamente.

Proposición: *Sea $F : D \to X$ analítico con D abierto y sea $\phi \in X^* = B(X, \mathbb{C})$, entonces $\phi \circ F : D \to \mathbb{C}$ es analítica.*

Demostraciónn: Sea $z_0 \in D$ y entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d\phi \circ F}{dz}(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{(\phi \circ F)(z) - (\phi \circ F)(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z\to z_0} \phi\left(\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}\right)\end{aligned}$$

por la linealidad de ϕ. Ahora, dado que F es analítica en z_0 y ϕ es continua, se tiene que se puede introducir el límite y obtener,

$$\frac{d\phi \circ F}{dz}(z_0) = \phi\left(\lim_{z\to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}\right) = \phi(F'(z_0)) \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto $\phi \circ F$ es holomorfa en z_0 y por tanto es analítica. Finalmente se concluye que $\phi \circ F$ es analítica en D. ■

Teorema de Louville: *Sea X espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Si $F : \mathbb{C} \to X$ es analítica y existe $M > 0$ tal que $\|F(z)\|_X \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces F es constante.*

Demostración: Sea $\phi \in X^*$. Luego $\phi \circ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función entera que es analítica. Además,

$$\begin{aligned} |(\phi \circ F)(z)| &= |\phi(F(z))| \\ &\leq \|\phi\|_{X^*}\|F(z)\|_X \\ &\leq \|\phi\|_{X^*}M \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Luego por el teorema de Louville sobre funciones complejas, se tiene que $\phi \circ F$ es una función constante para todo $\phi \in X^*$. Es más,

$$\phi(F(0)) = \phi(F(z))$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $\phi \in X^*$, luego por HB se tiene que $F(0) = F(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, y esto implica que F es constante. ■

Teorema: *Sea X espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Sea $T \in B(X)$, entonces $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Demostración: Supongamos que $\sigma(T) = \emptyset$. Sea $R : \rho(T) \to B(X)$ donde $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \mathbb{C}$ es una función analítica en todo $\mathbb{C}$. Además,

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|_{B(X)}} \overset{|\lambda|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \|R(\lambda)\|$ es una función continua que se va a 0 cuando $|\lambda| \to \infty$, entonces,

$$\|R(\lambda)\| \leq M$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $M > 0$. Por Louville se tendría que R es constante, es más, $R \equiv 0$, pero esto es una contradicción puesto que $R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$ es invertible. Por lo tanto $\sigma(T) \neq \emptyset$. ■

Finalmente resumimos todo lo que hemos estado trabajando.

Teorema: *Sea X espacio vectorial normado Banach sobre $\mathbb{C}$. Sea $T \in B(X)$, luego $\sigma(T)$ es no vacío cerrado contenido en el disco,*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|_{B(X)}\}$$

Además, si λ es punto regular de T tal que,

$$d(\lambda, \sigma(T)) := \text{mín}\{|\lambda - \mu| : \mu \in \sigma(T)\} = d$$

Entonces $\|R(\lambda)\| \geq 1/d$.

6. Espacios de Hilbert

Definición: *Sea V espacio vectorial en $\mathbb{C}$ (o sobre $\mathbb{R}$). Un producto interno en V es una función compleja (o $\mathbb{R}$ en el caso real),*

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$$

tal que para todo $x, y, z \in V$ y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se cumple que,

i) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.

ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

iii) $(x, x) \geq 0$.

iv) $(x, x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

A $(V, (\cdot,\cdot))$ se le llama un espacio vectorial con producto interno o bien EVPI.

Notación: Para un producto interno denotamos $(x, y), \langle x, y\rangle$ o $x \cdot y$.

Observación: Notemos que la condición ii) implica que $(x, x) = \overline{(x, x)}$, es decir, $(x, x) \in \mathbb{R}$.

Teorema: *Sea V un EVPI. Entonces se cumple,*

- ***Desigualdad de Cauchy-Schawrz:*** *Para todo $x, y \in V$ se tiene que,*

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

- ***Desigualdad triangular:*** *Para todo $x, y \in V$ se tiene que,*

$$(x + y, x + y)^{1/2} \leq (x, x)^{1/2} + (y, y)^{1/2}$$

Demostración: Demostremos primero la desigualdad de Cauchy-Schawrz. Sean $x, y \in V$ no nulos, luego existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $(\alpha x, y) \in \mathbb{R}$. Notemos que,

$$(\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2(x, x) = (x, x)$$

Tenemos que para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (t\alpha x + y, t\alpha x + y) \\ &= t^2(x, x) + 2t(\alpha x, y) + (y, y) \end{aligned}$$

Este último es un polinomio real que tiene a lo más una raíz, entonces el discriminante es no positivo, es decir,

$$4(\alpha x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0 \Leftrightarrow (\alpha x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Entonces,

$$|(x, y)|^2 = |(\alpha x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Si x o y es nulo es directo la desigualdad puesto que,

$$(0, y) = (x, 0) = 0$$

para todo $x, y \in V$. Además, la igualdad se alcanza si y sólo si existe $\hat{t} \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\begin{aligned}(\alpha\hat{t}x + y, \alpha\hat{t}x + y) = 0 &\Leftrightarrow \alpha\hat{t}x + y = 0\\ &\Leftrightarrow y = -\alpha\hat{t}x\end{aligned}$$

Ahora demostremos la desigualdad triangular. Notemos que,

$$\begin{aligned}0 \leq (x + y, x + y) &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)\\ &\leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y)\\ &\leq (x, x) + 2(x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} + (y, y)\\ &= ((x, x)^{1/2} + (y, y)^{1/2})^2\end{aligned}$$

Esto implica que,

$$(x + y, x + y)^{1/2} \leq (x, x)^{1/2} + (y, y)^{1/2}$$

Demostrando el teorema. ■

Observación: Sea $(x, x) = 0$, entonces para todo $y \in V$ se tiene que $(x, y) = 0$ puesto que,

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) = 0$$

para todo $y \in V$.

Definición: *Sea V un EVPI. Decimos sque $x, y \in V$ son ortogonales bajo ese producto interno si $(x, y) = 0$.*

Afirmación: *La función $f : V \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x, x)^{1/2}$ es una norma en V.*

Demostración: Probemos que está bien definida y los tres axiomas de norma.

- **Bien definida:** Sabemos que $(x, x) = \overline{(x, x)}$ lo que implica que $(x, x) \in \mathbb{R}$ y además $(x, x) \geq 0$. Entonces $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in V$.
- **Primer axioma:** Notemos que,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- **Segundo axioma:** Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ escalar, entonces,

$$f(\lambda x) = |\lambda|(x, x)^{1/2} = |\lambda| f(x)$$

- **Tercer axioma:** Sean $x, y \in V$, entonces,

$$f(x + y) = (x + y, x + y)^{1/2} \leq (x, x)^{1/2} + (y, y)^{1/2} = f(x) + f(y)$$

Por lo tanto f es una norma. ■

Definición: *Sea V EVPI, entonces definimos la norma inducida por $\|x\|_V = (x, x)^{1/2}$ para todo $x \in V$.*

Definición: *Decimos que un espacio vectorial normado es Euclidiano o pre-Hilbert si la norma está inducida por un producto interno. Y decimos que un espacio Euclidiano es un espacio de Hilbert si es completo bajo la norma inducida.*

Observación: En un espacio Euclidiano, si $(\cdot, \cdot)$ es el producto interno que induce la norma, entonces en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ es continua.

Afirmación: $(\cdot, \cdot)$ *es continua.*

Demostración: Usaremos la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para producto interno y $(\cdot, \cdot)$ para un par del elemento $V \times V$. Sea $\{(v_n, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $V \times V$ tal que (v_n, w_n) converge fuertemente a $(v, w) \in V \times V$. Demostremos que,

$$\langle v_n, w_n \rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle v, w \rangle$$

Si V es un espacio vectorial normado, entonces se cumple que $v_n \to v, w_n \to w$ cuando $n \to \infty$. Ahora notemos que,

$$\begin{aligned}
|\langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle| &= |\langle v_n, w_n \rangle - \langle v_n, w \rangle + \langle v_n, w \rangle - \langle v, w \rangle| \\
&= |\langle v_n, w_n - w \rangle + \langle v_n - v, w \rangle| \\
&\leq |\langle v_n, w_n - w \rangle| + |\langle v_n - v, w \rangle| \\
&\leq \|v_n\|_V \|w_n - w\|_V + \|v_n - v\|_V \|w\|_V
\end{aligned}$$

La última desigualdad usamos CS. Si $w_n \to w$ y $v_n \to v$, entonces $\|v_n\|$ se puede acotar y $\|v_n - v\| \to 0, \|w_n - w\| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces,

$$|\langle v_n, w_n \rangle - \langle v, w \rangle| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por lo tanto,

$$\langle v_n, w_n \rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle v, w \rangle$$

Demostrando que el producto interno es continuo. ■

Afirmación: *Sea $f_y : V \to \mathbb{C}$ con $y \in V$ dado por $f_y(x) = (x, y)$, entonces $f_y \in V^*$.*

Demostración: Sea $y \in V$ arbitrario. Claramente f_y es lineal por la linealdiad del producto interno. Y es acotada puesto que,

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \leq (x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} = \|y\|_V \|x\|_V$$

faltar eso es más, $\|f_y\|_{V^*} = \|y\|_V$. ■

Identidades de Polarización: *Sea V un EVPI donde $(\cdot,\cdot)$ es el producto interno y $\|\cdot\|_V$ es la norma inducida por el producto interno. Entonces se cumple que,*

$$4(x,y) = \|x+y\|_V^2 - \|x-y\|_V^2 + i\|x+iy\|_V^2 - i\|x-iy\|_V^2$$

En el caso real (producto interno real y V real) se cumple que,

$$2(x,y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|_V^2 - \|x-y\|_V^2)$$

Demostración:

- **Caso complejo:** Tenemos que $\|x\|_V = (x,x)^{1/2}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_V^2 &= \|x\|_V^2 + \|y\|_V^2 + (x,y) + (y,x)\\
\|x-y\|_V^2 &= \|x\|_V^2 + \|y\|_V^2 - (x,y) - (y,x)\\
\|x+iy\|_V^2 &= \|x\|_V^2 + \|y\|_V^2 - i(x,y) + i(y,x)\\
\|x-iy\|_V^2 &= \|x\|_V^2 + \|y\|_V^2 + i(x,y) - i(y,x)
\end{aligned}$$

  Entonces,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_V^2 - \|x-y\|_V^2 &= 2(x,y) + 2(y,x)\\
i\|x+iy\|_V^2 - i\|x-iy\|_V^2 &= 2(x,y) - 2(y,x)
\end{aligned}$$

  Si sumamos obtenemos el caso complejo.

- **Caso real:** Aquí es más sencillo ya que $(x,y) = (y,x)$ (estamos tomando V real con producto interno real). Luego,

$$\|x+y\|_V^2 - \|x-y\|_V^2 = 4(x,y)$$

Demostrando la identidades de polarización. ■

Identidades de Polarización Generalizada: *Sea $(V,(\cdot,\cdot))$ un espacio Euclidiano sobre $\mathbb{C}$ y sea $T : V \to V$ lineal. Entonces,*

$$4(T(x),y) = (T(x+y),x+y) - (T(x-y),x-y) + i(T(x+iy),x+iy) - i(T(x-iy),x-iy)$$

Demostración: Notemos que,

$$\begin{aligned}
(T(x+y),x+y) &= (T(x),x) + (T(y),y) + (T(x),y) + (T(y),x))\\
(T(x-y),x-y) &= (T(x),x) + (T(y),y) - (T(x),y) - (T(y),x))\\
(T(x+iy),x+iy) &= (T(x),x) + (T(y),y) - i(T(x),y) + i(T(y),x))\\
(T(x-iy),x-iy) &= (T(x),x) + (T(y),y) + i(T(x),y) - i(T(y),x))
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) &= 2(T(x), y) + 2(T(y), x) \\ i(T(x+iy), x+iy) - i(T(x-iy), x-iy) &= 2(T(x), y) - 2(T(y), x) \end{aligned}$$

Entonces al sumar obtenemos $4(T(x), y)$ que es la identidad de polarización generalizada. ■

Corolario: *Sea V un espacio Euclidiano y $T : V \to V$ lineal tal que,*

$$(Tx, x) = 0$$

para todo $x \in V$, entocnes $T \equiv 0$.

Demostración: Sabemos que $(Tx, x) = 0$ para todo $x \in V$ implica que $(Tx, y) = 0$ para todo $x, y \in V$ por la polarización generalizada. Tomando $y = Tx$ obtenemos que para todo $x \in V$ se tiene que $(Tx, Tx) = 0$, es decir, $T \equiv 0$. ■

Teorema de Pitágoras y Regla del paralelogramo: *Sea E un espacio Euclidiano. Sean $x_1, \cdots, x_n \in E$ ortogonales a pares, entonces,*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^2$$

y además para todo $x, y \in E$ se tiene que,

$$\|x+y\|_E^2 + \|x-y\|_E^2 = 2\|x\|_E^2 + 2\|y\|_E^2$$

Demostración: Por definición de norma inducida se tiene que,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i, x_i) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \end{aligned}$$

Demostremos la regla del paralelogramo. Por definición,

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y, x+y) + (x-y, x-y) \\ &= 2(x, x) + 2(y, y) = 2\|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Demostrando el teorema. ■

6.1. Ejemplos de Espacios Euclidianos y Espacios de Hilbert

Ejemplo:

- En $\mathbb{C}^n$ para $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$ definimos el producto interno,

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Afirmación: *El producto interno está bien definido y $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración: Demostremos que cumple los cuatro axiomas de producto interno.

i) Sea $x, z, y \in \mathbb{C}^n$ y sea $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\lambda x + \mu z, y) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu z_i)\overline{y_i} \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} + \mu \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{y_i} \\
&= \lambda(x, y) + \mu(z, y)
\end{aligned}$$

Luego es lineal en el primer argumento.

ii) Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$, entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{(x, y)} &= \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i} = (y, x)
\end{aligned}$$

Luego es Hermitiana.

iii) Sea $x \in \mathbb{C}^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(x, x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Luego es positiva.

iv) Notemos que,

$$\begin{aligned}
(x, x) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x_i = 0; \text{ para todo } i = 1, \cdots, n \\
&\Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Luego es un producto interno. Luego $\mathbb{C}^n$ es un espacio Euclidiano donde $\|x\|_{\mathbb{C}^n} = (x,x)^{1/2}$. Podemos ver que la norma inducida es la norma usual de $\mathbb{C}^n$ que ya hemos demostrado que es completo, por tanto $\mathbb{C}^n$ es un espacio de Hilbert. ■

- En $l^2(\mathbb{C})$ para $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definimos el producto interno,

$$(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_i\overline{y_i}$$

Afirmación: *El producto interno está bien definido y $l^2(\mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración: Demostremos que los cuatro axiomas de producto interno.

i) Sean $x,z,y \in l^2(\mathbb{C})$ y sean $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ escalares. Entonces,

$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu z, y) &= \sum_{n\in\mathbb{N}}(\lambda x_n + \mu z_n)\overline{y_n} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda x_n\overline{y_n} + \mu z_n\overline{y_n} \\ &= \lambda\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n} + \mu\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n\overline{y_n} \\ &= \lambda(x,y) + \mu(z,y)\end{aligned}$$

Podemos separar la serie como trabajamos con límites bien definidos. Luego es lineal en el primer argumento.

ii) Sean $x,y \in l^2(\mathbb{C})$, entonces,

$$\overline{(x,y)} = \overline{\sum_{n\in\mathbb{N}} x_i\overline{y_i}}$$

Terminar ■

- En $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ continua}\}$ para $f,g \in C[0,1]$ definimos el producto interno,

$$(f,g) = \int_0^1 f(z)\overline{g(z)}dz$$

Afirmación: *El producto interno está bien definido pero $C[0,1]$ es solamente un espacio Euclidiano (no es espacio de Hilbert).*

- En $L^1[0,1]$ **falta algo** (clase de equivalencia de funciones iguales ctp). Para $f,g \in L^1[0,1]$ definimos el producto interno,

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

Afirmación: *El producto interno está bien definido y $L^1[0,1]$ es un espacio de Hilbert.*

Teorema: *Sea E un espacio Euclidiano, entonces la completación $\overline{E}$ de E también es Euclidiana y por tanto es un espacio de Hilbert.*

Demostración: Demostraremos que el producto interno,

$$(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{C}$$

puede ser extendido a $\overline{E}$. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de Cauchy en E. Sea x, y los puntos límites de las sucesiones respectviamente en $\overline{E}$. Definimos,

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n)$$

Este límite está bien definido puesto que,

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| &\leq |(x_n - x_m, y_n)| + |(x_m, y_n - y_m)| \\ &\leq \|x_n - x_m\|_E \|y_n\|_E + \|x_m\|_E \|y_n - y_m\|_Y \\ &\overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Notemos que a $\overline{x}, \overline{y}$ podemos tomar cualquier sucesión en E que converga ellos. Ahora, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ es un producto interno usando álgebra de límites. Por lo tanto $\overline{E}$ es un espacio Euclidiano y por tanto es un espacio de Hilbert. ■

Definición: *Sea E espacio Euclidiano y sea $S \subseteq E$, definimos,*

$$S^\perp := \{y \in E : (y, x) = 0 \textit{ para todo } x \in S\}$$

Observación: Sea $x \in E$, entonces,

$$\{x\}^\perp = \{y \in E : (x, y) = 0\} =: x^\perp$$

Observación: Sabemos que $(\cdot,\cdot) \to \mathbb{C}$ es continua y si pensamos en $f_x(y) = (y, x)$ con $y \in E$, entonces $x^\perp = f_x^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial de E cerrado y ademas,

$$S^\perp = \bigcap_{x\in S} x^\perp$$

Por lo que S es un subespacio vectorial de E cerrado.

Proposición: *Sea E espacio Euclidiano y sea $S \subseteq E$. Definimos $F = span(S)$, entonces,*

$$F^\perp = S^\perp$$

Demostración: Sea $x \in F^\perp$, entonces $(x, y) = 0$ para todo $y \in F$, dado que $S \subseteq F$, entonces $(x, y) = 0$ para todo $y \in S$, por lo que $F^\perp \subseteq S^\perp$.

Para demostrar la igualdad notemos que si $x \in S^\perp$, entonces $(x, y) = 0$ con $y \in S$ y si $F = \mathrm{span}(S)$, entonces para todo $f \in F$ se puede escribir,

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i s_i$$

donde c_i son escalares, $s_i \in S$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces para $f \in F$ se tiene que,

$$(x, f) = \left(x, \sum_{i=1}^{n} c_i s_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i}(x, s_i) = 0$$

Luego $F^\perp = S^\perp$. ■

Observación: Si F es un subespacio vectorial de E, entonces,

$$F \cap F^\perp = \{0\}$$

Además, si $x \in F$ e $y \in F^\perp$, entonces,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Con la norma inducida por el producto interno. Entonces,

$$\begin{aligned} F + F^\perp &\to F \\ x + y &\mapsto x \\ F + F^\perp &\to F \\ x + y &\mapsto y \end{aligned}$$

En general $F + F^\perp \subseteq E$, pero no necesariamente son iguales.

Teorema: *Sea E espacio Euclidiano y sea $F \subseteq E$ subespacio vectorial completo, entonces $F \oplus F^\perp = E$. Además, $\|x_2\| = \|x - x_1\| < \|x - y\|$ para todo $y \in F$ distinto de x_1.*

Demostración: Sea $d := \inf_{y \in F} \|x - y\|$ y sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ tal que,

$$\|x - y_n\| < d^2 + \frac{1}{n}$$

Veamos que la sucesión es de Cauchy en F. Por la regla del paralelogramo,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \underbrace{\|2x - y_n - y_m\|^2}_{\geq 4d^2} \\ &< 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Luego dado que F es completo, se tiene que $y_n \to x_1 \in F$. Luego,

$$\|x_1 - x\|^2 \leq d^2$$

Y esto implica que $\|x_| - x\|^2 = d^2$. Ahora definimos $x_2 = x - x_1$, veamos que $x_2 \perp y$ para todo $y \in F$. Supongamos que no, por lo que existe $y \in F$ tal que,

$$(x_2, y) \neq 0$$

Sea $z = (x_2, y)y \in F$, luego se satisface,

$$\begin{aligned}(x_2, z) = (x_2, (x_2, y)y) &= \overline{(x_2, y)}(x_2, y) \\ &= |(x_2, y)|^2 > 0\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\|x - (x_1 + \varepsilon z)\|^2 &= \|x_2 - \varepsilon z\|^2 \\ &= \|x_2\|^2 - 2\varepsilon(x_2, z) + \varepsilon^2\|z\|^2\end{aligned}$$

Definimos $h(\varepsilon) = \|x - (x_1 + \varepsilon z)\|^2$, entonces,

$$h'(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = -2(x_2, z) < 0$$

Luego si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño se tiene que,

$$\|x - (x_1 + \varepsilon z)\|^2 < \|x_2\|^2 = d^2$$

Lo que contradice la definición de d. Por lo tanto concluimos que $(x_2, y) = 0$ para todo $y \in F$, es decir, $x_2 \in F^\perp$. Ahora, si $y \in F$ e $y \neq x_1$, entonces,

$$\|x - y\|^2 = \|x_1 + x_2 - y\|^2 = \|x_2\|^2 + \|x_1 - y\|^2 > \|x_2\|^2 = d$$

si y sólo si $x_1 \neq y$. Esto demuestra la unicidad y cooncluimos el teorema. ■

Definición: *Sea E espacio Eucliando y $F \subseteq E$ subespacio vectorial completo definimos el complemento ortogonal de F por $F^\perp$ donde $F \oplus F^\perp = E$. Además definimos las proyección ortogonal de F por,*

$$\begin{aligned}P_F : E &\to E \\ x_1 + x_2 &\mapsto x_1\end{aligned}$$

donde $x_1 \in F$ y $x_2 \in F^\perp$.

Corolario: *Sea E espacio Euclidiano y sea F subespacio vectorial completo. Entonces la proyección es única y $P_F \in B(E)$ tal que,*

$$P_F(x) = \begin{cases} x, & x \in F \\ 0, & x \in F^\perp \end{cases}$$

La proyección ortogonal además cumple las siguientes propiedades,

i) $ImP_F = F$ *y* $\ker P_F = F^\perp$

ii) $P_F^2 = P_F$ *y* $(I - P_F)^2 = I - P_F$

iii) Si $x, y \in E$, entonces,

$$(P_F x, y) = (P_F x, P_F y) = (x, P_F y)$$

iv) Si $F \neq \{0\}$, entonces $\|P_F\| = 1$ y si $F \neq E$, entonces $\|I - P_F\| = 1$.

Demostrar: Demostremos que es única y que $P_F \in B(X)$. Claramente es única puesto que por definición depende de la suma directa de $F \oplus F^{\perp}$. Veamos que es linea y acotada.

- **Lineal:** Sean $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in E$ donde $x_1, y_1 \in F$ y $x_2, y_2 \in F^{\perp}$, y sean escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_F(\lambda x + \mu y) &= P_F((\underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1)}_{\in F} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in F}) \\ &= \lambda x_1 + \mu y_1 \\ &= \lambda P_F(x_1 + x_2) + \mu P_F(y_1 + y_2) \\ &= \lambda P_F(x) + \mu P_F(y) \end{aligned}$$

  Luego P_F es lineal.

- **Acotada:** Sea $x = x_1 + x_2 \in E$ donde $x_1 \in F, x_2 \in F^{\perp}$, entonces,

$$\|P_F(x)\|_E = \|x_1\|_E \leq \|x_1\|_E + \|x_2\|_E = \|x_1 + x_2\|_E = \|x\|_E$$

  Luego P_F es acotada.

Finalmente se cumple si $x \in F$, entonces $x = x + 0$ con $0 \in F^{\perp}$, luego $P_F(x) = x$. Y si $x \in F^{\perp}$, entonces $x = 0 + x$ con $0 \in F$, luego $P_F(x) = 0$. Por lo tanto,

$$P_F(x) = \begin{cases} x, & x \in F \\ 0, & x \in F^{\perp} \end{cases}$$

Demostremos las propiedades.

i) Claramente $\mathrm{Im} P_F = F$ y,

$$\begin{aligned} x \in \ker P_F &\Leftrightarrow P_F(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in F^{\perp} \end{aligned}$$

Luego $\ker P_F = F^{\perp}$.

ii) Sea $x \in F$, entonces,

$$P_F^2(x) = P_F(x)$$

Y si $x \in F^{\perp}$, entonces,

$$P_F^2(x) = P_F(0) = 0 = P_F(x)$$

Luego $P_F^2 = P_F$. Por otro lado tenemos,

$$(I - P_F)^2 = I - 2P_F + P_F^2 = I - P_F$$

iii) Sean $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2 \in E$ con $x_1, y_1 \in F$ y $x_2, y_2 \in F^{\perp}$ Entonces,

$$\begin{aligned}(P_F x, y) &= (P_F x, y_1 + y_2)\\ &= (P_F x, P_F y) + \underbrace{(P_F x, y_2)}_{=0}\\ &= (P_F x, P_F y)\\ &= \underbrace{(x_2, P_F y)}_{=0} + (P_F x, P_F y)\\ &= (x_1 + x_2, P_F y) = (x, P_F y)\end{aligned}$$

Demostrando la igualdad.

iv) Supongamos que F no es subespacio trivial. Notemos que,

$$\|P_F\|_{B(E)} = \|P_F^2\|_{B(E)} \leq \|P_F\|_{B(X)}^2$$

Entocnes $1 \leq \|P_F\|_{B(X)} \leq 1$ y luego $\|P_F\|_{B(E)} = 1$. Ahora supongamos que $F \neq E$, entonces para $x = x_1 + x_2 \in E$ con $x_1 \in F$ y $x_2 \in F^{\perp}$ se tiene que,

$$\|(I - P_F)(x)\|_E = \|x - P_F x\|_E = \|x_2\|_E \leq \|x_1\|_E + \|x_2\|_E = \|x\|_E$$

Luego $\|I - P_F\|_{B(E)} \leq 1$. Por otro lado,

$$\|I - P_F\|_{B(E)} = \|(I - P_F)^2\|_{B(X)} \leq \|I - P_F\|_{B(X)}^2$$

Lo que implica que $\|I - P_F\|_{B(X)} = 1$.

Demostrando el corolario. ■

Corolario: *Sea H espacio de Hilbert y sea $S \subseteq H$ y sea $M = span(S)$, entonces $(S^{\perp})^{\perp} = (M^{\perp})^{\perp} = M$*

Demostración: Sabemos que se cumple que,

$$M^{\perp} = S^{\perp}$$

Si H es espacio de Hilbert y dado que $M, M^{\perp}$ son cerrados. Entonces $M, M^{\perp}$ son completos, por lo tanto,

$$M \oplus M^{\perp} = (M^{\perp})^{\perp} \oplus M^{\perp} = H$$

Si además, $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$, necesariamente se tiene que $(M^{\perp})^{\perp} = M^{\perp}$. ■

Teorema de Representación de Riesz: *Sea H espacio Hilbert y sea $f \in H^*$, entonces existe un único $x_0 \in H$ tal que,*

$$f(x) = (x, x_0)$$

para todo $x \in H$. Además $\|f\|_{H^*} = \|x_0\|_H$.

Observación: La función $(\cdot, x_0) : H \to \mathbb{C}$ está en H^*.

Demostración: Si $F \equiv 0$ entonces estamos listo puesto que x_0 es el único que cumple. Supongamos que $f \not\equiv 0$ y sea $M = \ker f$ que es un subespacio vectorial cerrada de H de codimensión 1. Por el teorema del complemento ortogonal existe $M^\perp$ el complemento ortogonal de M ($H = M \oplus M^\perp$) que tiene dimensión 1.

Luego sea $x_1 \in M^\perp$ con $\|x_1\| = 1$. Se tiene que,

$$M^\perp = \{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{C}\} \subseteq H$$

Sea $x_0 = \overline{f(x_1)}x_1 \in M^\perp$ ($x_0 \neq 0$). Para todo $x \in H$ se puede escribir,

$$x = y + \lambda x_1$$

donde $y \in M, \lambda \in \mathbb{C}$ y entonces,

$$\begin{aligned}(x, x_0) &= (y + \lambda x_1, \overline{f(x_1)}x_1) = (\lambda x_1, \overline{f(x_1)}x_1) \\ &= \lambda f(x_1)(x_1, x_1) \\ &= \lambda f(x_1)\|x_1\|_H^2 \\ &= f(\lambda x_1) = f(y + +\lambda x_1) = f(x)\end{aligned}$$

Es decir, $f(x) = (x, x_0)$ para todo $x \in H$. La unicidad del x_0 se obtiene viendo que si x_0, x_0^* cumplen esta condición, entonces para todo $x \in H$ se tiene,

$$\begin{aligned}(x, x_0) = (x, x_0^*) &\Leftrightarrow (x, x_0 - x_0^*) = 0 \text{ para todo } x \in H \\ &\Leftrightarrow x_0 - x_0^* = 0\end{aligned}$$

Luego por CS se obtiene que,

$$|f(x)| = |(x, x_0)| \leq \|x\|_H \|x_0\|_H$$

para todo $x \in H$, y entonces $\|f\|_{H^*} \leq \|x_0\|_H$. Y por otro lado,

$$\|x_0\|_H^2 = (x_0, x_0) = f(x_0) \leq \|f\|_{H^*}\|x_0\|_H$$

Probando que $\|f\|_H^* = \|x_0\|_H$. ■

Corolario: *Sea H espacios Hilbert. Para todo $y \in H$ definimos $f_y \in M^*$ tal que $f_y(x) = (x, y)$. El mapa,*

$$\begin{aligned}H &\mapsto H^* \\ y &\mapsto f_y\end{aligned}$$

es una isometría antisomorfo ($f_{\lambda y} = \overline{\lambda} f_y$). Si H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$, el mapa es una isometría isomorfa. ($H = H^*$)

6.2. Operadores Adjuntos II

Retomemos el concepto de un operador adjunto. Sea X un espacio vectorial normado y sea X^* su dual topológico ($X^* = B(X, \mathbb{R})$ o $X^* = B(X, \mathbb{C})$). Sea $f \in X^*$, entonces tenemos la siguiente notación,

$$f(x) = \langle x, f \rangle_{X \times X^*} = \langle f, x \rangle_{X^* \times X}$$

Donde,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^* \to (\mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R})$$

Es una forma bilineal (es lineal en cada argumento) si es sobre $\mathbb{R}$ y es antilineal (lineal en el primer argumento) si es sobre $\mathbb{C}$.

Nota: En algunos casos escribiremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sin decir donde va X y X^*.

Siguendo esta notación tenemos las siguentes propiedades:

$$\begin{aligned} |\langle x, f \rangle| &\leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X \\ \|f\|_{X^*} &= \sup_{\|x\|_X = 1} |\langle x, f \rangle| \\ \|x\|_X &= \sup_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |\langle x, f \rangle| \end{aligned}$$

Hemos definido $T^* \in B(Y^*, X^*)$ como el operador lineal tal que,

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\to X^* \\ g &\mapsto T^*(g) \end{aligned}$$

con $(T^*(g))(x) = g(T(x))$. Ocupando la notación obtenemos que,

$$g(T(x)) = \langle Tx, g \rangle_{Y \times Y^*} = \langle x, T^* g \rangle_{X \times X^*} = (T^*(g))(x)$$

Por otro lado notemos que el operador adjunto $T*$ es único al estar relacionado directamente con T.

Definición: *Definimos el operador adjunto o dual de T^* por $T^{**} = (T^*)^* \in B(X^{**}, Y^{**})$ donde,*

$$\langle T^{**} \varphi, g \rangle_{Y^{**} \times Y^*} = \langle \varphi, T^* g \rangle_{X^{**} \times X^*}$$

para todo $g \in Y^*$ y para todo $\varphi \in X^{**}$.

Teorema: *Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados. Sean $T, T_1, T_2 \in B(X, Y)$ y sea $S \in B(Y, Z)$. Entonces,*

a) $T^* \in B(Y^*, X^*)$ *y* $\|T^*\| = \|T\|$.

b) Sean λ_1, λ_2 escalares, entonces,

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \overline{\lambda}_1 T_1^* + \overline{\lambda}_2 T_2^*$$

c) Consideremos la inclusión canónica. Con abuso de notación se cumple que $T^{**}\big|_X = T$, *es decir,* $T^{**}x = Tx$ *para todo* $x \in X$.

d) $(ST)^* = T^*S^*$.

e) Si T *es invertible* ($T^{-1} \in B(Y, X)$)*. Entonces* T^* *también es invertible y* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Demostración:

a) Por definición de operador adjunto, se tiene que,

$$|(T^*g)(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\|_{Y^*}\|T\|\|x\|_X$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{\|g\|=1} \|T^*g\| \\ &\leq \|T\|\end{aligned}$$

Por el corolario de HB se tiene que $\|T^*\| \leq |T\|$ (visto anteriormente), demostrando la igualdad.

b) Usaremos la definición antilineal de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces,

$$\begin{aligned}\langle (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* g, x\rangle_{X^* \times X} &= \langle g, (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)x\rangle_{Y^* \times Y} \\ &= \overline{\lambda}_1 \langle g, T_1 x\rangle_{Y^* \times Y} + \overline{\lambda}_2 \langle g, T_2 x\rangle_{Y^* \times Y} \\ &= \overline{\lambda}_1 \langle T_1^* g, x\rangle_{Y^* \times Y} + \overline{\lambda}_2 \langle T_2^* g, x\rangle_{Y^* \times Y} \\ &= \langle (\overline{\lambda}_1 T_1^* + \overline{\lambda}_2 T_2^*) g, x\rangle_{X^* \times X}\end{aligned}$$

Por la unicidad del operador adjunto, se tiene que,

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \overline{\lambda}_1 T_1^* + \overline{\lambda}_2 T_2^*$$

Nota: En el caso real se cumple,

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$$

c) La igualdad

$$T^{**}\big|_X = T$$

No está de forma explícita. Cuando hablamos de la igualdad queremos decir que,

$$(T^{**} \circ i_x) = (i_y) \circ T$$

donde $i_x : X \to X^{**}$ y $i_y : Y \to Y^{**}$. Por definición se tiene que,

$$\begin{aligned}\langle T^{**} \circ i_x x, g\rangle_{Y^{**} \times Y^*} &= \langle T^{**}(i_x((x)), g\rangle_{Y^{**} \times Y^*} \\ &= \langle i_x(x), T^* g\rangle_{X^{**} \times X^*} \\ &= \langle x, T^* g\rangle_{X \times X^*} \\ &= \langle Tx, g\rangle_{Y \times Y^*} \\ &= \langle (i_y \circ T)(x), g\rangle_{Y^{**} \times Y^*}\end{aligned}$$

esto para todo $x \in X$. Concluyendo la igualdad.

d) Por definición se tiene que,

$$\begin{aligned}\langle (ST)^* g, x\rangle_{X^*\times X} &= \langle g, STx\rangle_{Z^*\times Z}\\ &= \langle S^* g, Tx\rangle_{Y^*\times Y}\\ &= \langle T^* S^* g, x\rangle_{X^*\times X}\end{aligned}$$

Luego por unicidad se tiene que $(ST)^* = T^* S^*$.

e) Si $T^{-1} \in B(Y, X)$ está bien definido, entonces tiene un operador adjunto $(T^{-1})^* \in B(X^*, Y^*)$. Luego por d) se tiene que,

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = I^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^* T^*$$

Estudiemos I^*. Por construcción del operador adjunto se tiene que para todo $x \in X$

$$(I^*(g))(x) = g(Ix) = g(x) = (I_{X^*}(g))(x)$$

donde I_{X^*} es la identidad de X^* a X^*. Esto implica que $I^* = I_{X^*}$ y por tanto,

$$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I_{X^*}$$

Lo que implica el operador adjunto de T es invertible y que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Demostrando el teorema. ■

Corolario: *Si X es reflexivo, entonces $T^{**} = T$ (con la inyección canónica $X \cong X^{**}$)*

6.3. Operadores Adjuntos en Espacios Hilbert

Definición: *Sean H, K espacios de Hilbert. Sea $T \in B(H, K)$, definimos el operador adjunto de T por $T^* \in B(K, H)$ que satisface,*

$$(Tx, y)_{K\times K} = (x, T^* y)_{H\times H}$$

para todo $x \in H$ y para todo $y \in K$ bajo el producto interno.

Observación: El producto interno $(\cdot,\cdot) : H \times H \to (\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$ es una forma bilineal si H está definido sobre $\mathbb{R}$ y es Hermitiana si está definido sobre $\mathbb{C}$. Y la idenficiación,

$$\begin{aligned} x_0 \in H &\to f_{x_0} \in H^*\\ x_0 &\mapsto (\cdot, x_0)_{H\times H}\end{aligned}$$

es antilineal si H está definido sobre $\mathbb{C}$.

Teorema: *Sean H, K, W espacios de Hilbert. Sean $T, T_1, T_2 \in B(H, K)$ y $S \in B(K, W)$. Entonces,*

a) $T^* \in B(K, H)$ con $\|T^*\| = \|T\|$.

b) Para todo λ_1, λ_2 escalares se tiene que,

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \overline{\lambda}_1 T_1^* + \overline{\lambda}_2 T_2$$

c) $(ST)^* = T^*S^*$.

d) $T^{**} = T$.

e) *Si* $K = H$, *entonces,*

$$\|T\|^2_{B(H)} = \|T^*T\|_{B(H)} = \|TT^*\|_{B(H)} = \|T^*\|^2_{B(H)}$$

Demostración:

a) Sea $y \in K$ y consideremos $f_y(\cdot) = (\cdot, y) \in K^*$. Entonces,

$$f_y(Tx) = (Tx.y)$$

Sea $g : X \to (\mathbb{R} \,\mathrm{o}\, \mathbb{C})$ Por el teorema de representación de Riezs existe un único $u \in H$ tal que g **terimar...**

b) Sean λ_1, λ_2 escalares, entonces,

$$\begin{aligned}(x, (\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* y)_{X\times X} &= ((\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)x, y)_{Y\times Y} \\ &= \lambda_1 (T_1 x, y)_{Y\times Y} + \lambda_2 (T_2 x, y)_{Y\times Y} \\ &= (x, \overline{\lambda}_1 T_1^* y)_{X\times X} + (x, \overline{\lambda}_2 T_2^* y)_{X\times X} \\ &= (x, (\overline{\lambda}_1 T_1^* + \overline{\lambda}_2 T_2^*)y)_{X\times X}\end{aligned}$$

Lo que implica que,

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)^* = \overline{\lambda}_1 T_1^* + \overline{\lambda}_2 T_2^*$$

c) Por definición se tiene que,

$$\begin{aligned}((ST)^* x, y)_{H\times H} &= (x, STy)_{W\times W} \\ &= (S^* x, Ty)_{K\times K} \\ &= (T^* S^* x, y)_{H\times H}\end{aligned}$$

para todo $x \in W$ e $y \in H$. Luego por unicidad se tiene que $(ST)^* = T^*S^*$.

d) Si $T \in B(H, K)$, entonces $T^* \in B(K, H)$. Tomando el dual de T^* obtenemos que $T^{**} \in B(H, K)$ donde además,

$$\begin{aligned}(Tx, y)_{Y\times Y} &= (x, T^* y)_{X\times X} \\ (x, T^* y)_{X\times X} &= (T^{**} x, y)_{Y\times Y}\end{aligned}$$

Luego,

$$((T - T^{**})x, y)_{Y\times Y} = 0$$

para todo $x \in H, y \in K$. Por lo tanto,

$$T^{**} x = Tx$$

para todo $x \in H$.

e) Supongamos que $H = K$, entonces,

$$\begin{aligned}\|T\|^2_{B(H)} &= \sup_{\|x\|_H=1} \|Tx\|^2_Y \\ &= \sup_{\|x\|_H=1} (Tx, Tx) \\ &= \sup_{\|x\|_H=1} (x, T^*Tx) \\ &\leq \sup_{\|x\|_H=1} \|T^*T\|_{B(H)}\|x\|^2_H \\ &\leq \|T^*T\|_{B(X)}\end{aligned}$$

Luego,

$$\|T\|^2_{B(H)} \leq \|T^*T\|_{B(H)} \leq \|T^*\|_{B(H)}\|T\|_{B(H)} = \|T\|^2_{B(H)}$$

Por lo tanto,

$$\|T\|^2_{B(H)} = \|T^*T\|^2_{B(H)}$$

Para la otra igualdad basta tomar el adjunto de T^*T.

Demostrando el teorema. ■ **terminar demostradion 4/6...**

Definición: *Sea X espacio vectoria normado y sea X^* el dual topológico. Sea $K \subseteq X$ subconjunto, definimos el aniquilador de K por,*

$$K^o := \{f \in X^* : \langle x, f\rangle_{X\times X^*} = 0 \textit{ para todo } x \in K\}$$

Sea $L \subseteq X^*$, definimos el aniquilador de L por,

$$^oL := \{x \in X : \langle x, f\rangle_{X\times X^*} = 0 \textit{ para todo } f \in L\}$$

Notación: Las notaciones $K^o, ^o L$ también se ocupa para denotar el conjunto polar.

Observación:

i) K^o es subespacio vectorial cerrado de X^* y ^oL es subespacio vectorial cerrado de X.

ii) $K^o = (\mathrm{span}(K))^o = (\overline{\mathrm{span}(K)})^o$ y $^oL =^o (\mathrm{span}(L)) =^o (\overline{\mathrm{span}(L)})$.

Teorema: *Sea X, Y espacio vectorial normado $T \in B(X, Y)$, entonces,*

$$\ker T =^o (ImT^*)$$
$$ImT = (\ker T^*)^o$$

Demostración: Por definición,

$$\begin{aligned}\ker T &= \{x \in X : Tx = 0\} \\ &= \{x \in X : \langle Tx, g\rangle = 0 \text{ para todo } g \in Y^*\} \\ &= \{x \in X : \langle x, T^*g\rangle = 0 \text{ para todo } g \in Y^*\} \\ &= \{x \in X : \langle x, f\rangle = 0 \text{ para todo } f \in \mathrm{Im}T^*\} \\ &=^o (\mathrm{Im}T^*)\end{aligned}$$

Similarmente para Ker$T^* = (\text{Im}T)^o$. Demostrando el teorema. ■

Observación:

i) Si X es reflexivo, entonces podemos identificar $L \subseteq X^*$ con X con X^{**} canónicamente,

$$L^o_{\subseteq X^{**}} =^o L_{\subseteq X}$$

ii) Si H es espacio de Hilbert y identificando H con H^*, entonces,

$$L^o =^o L = L^\perp$$

Corolario: *Si H, K son espacios de Hilbert y sea $T \in B(H, K)$, entonces,*

$$\ker T = (ImT)^\perp$$
$$\ker T^* = (ImT)^\perp$$

Demostrar...

Observación: En general la imagen de T no es igual a $(\ker T)^\perp$ (o bien la imagen de T no es igual al aniquilador de $\ker T$).

Proposición: *Se cumple que,*

$$\overline{ImT} =^o (\ker T^*)$$

Definición: *Sea H Hilbert y sea $T \in B(H)$. Decimos que T es Hermitiano o autoadjunto si y sólo,*

$$(Tx, y)_{H\times H} = (x, Ty)_{H\times H}$$

para todo $x, y \in H$.

Observación: Si S, T son autoadjunto y conmutan, entonces ST es autoadjunto puesto que,

$$(STx, y)_{H\times H} = (Tx, Sy)_{H\times H} = (x, TSy)_{H\times H} = (x, TSy)_{H\times H}$$

Observación: Si T es autoadjunto, entonces T^n también lo es para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si,

$$\|T^2\|_{B(H)} = \|T^*T\|_{B(H)} = \|T\|^2_{B(H)}$$

Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que,

$$\|T^{2^k}\|_{B(H)} = \|T\|^{2^k}_{B(H)}$$

Tomando $1 \leq n \leq 2^k$, entonces,

$$\begin{aligned} \|T^{2^k}\|_{B(H)} &= \|T^n T^{2^n - n}\|_{B(H)} \\ &\leq \|T^n\|_{B(H)} \|T^{2^k - n}\|_{B(H)} \\ &\leq \|T^n\|_{B(H)} \|T\|_{B(H)}^{2^k - n} \\ &\leq \|T\|_{B(H)}^{2^k} = \|T^{2^k}\|_{B(H)} \end{aligned}$$

Luego,

$$\|T^n\|_{B(H)} \|T\|_{B(H)}^{2^k - n} = \|T\|_{B(H)}^{2^k} \Leftrightarrow \|T^n\|_{B(H)} = \|T\|^n$$

Probando para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación: Si T es autoadjunto y H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, entonces,

$$(Tx, x)_{H \times H} = (x, Tx)_{H \times H} = \overline{(Tx, x)}_{H \times H}$$

Entonces $(Tx, x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in H$. En particular, podemos definir,

$$\begin{aligned} H \times H &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto (Tx, y)_{H \times H} =: \langle x, y \rangle_T \end{aligned}$$

Entonces,

i) $\langle \alpha x + \beta z, y \rangle_T = \alpha \langle x, y \rangle_T + \beta \langle z, y \rangle_T$.

ii) $\langle x, y \rangle_T = \overline{\langle y, x \rangle}_T$

Por lo que es una forma Hermitianda.

Observación: Si $T \in B(H)$ con H espacio de Hilbert, entonces T^*T es autoadjunto y posivo ya que,

$$(T^*Tx, y)_{H \times H} = (Tx, Ty)_{H \times H} = (x, T^*Ty)_{H \times H}$$

y,

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0$$

De forma análoga TT^* es autoadjunto y positivo.

Teorema: *Sea H espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Si $T \in B(H)$, entonces existen únicos $T_1, T_2 \in B(H)$ autoadjuntos tales que $T = T_1 + iT_2$.*

Demostración: Sea $T \in B(H)$, definimos,

$$\begin{aligned} T_1 &:= \frac{1}{2}(T + T^*) \\ T_2 &:= -\frac{1}{2}i(T - T^*) \end{aligned}$$

Entonces $T_1, T_2 \in B(H)$ son autoadjuntos puesto que,

$$
\begin{aligned}
T_1^* &= \frac{1}{2}(T^* + T^{**}) = \frac{1}{2}(T + T^*) = T_1 \\
T_2^* &= \frac{1}{2}i(T^* - T^{**}) = -\frac{1}{2}i(T - T^*) = T_2
\end{aligned}
$$

Y además,

$$T_1 + iT_2 = \frac{1}{2}(2T) = T$$

Probando que existen T_1, T_2 autoadjuntos. Demostremos unicidad. Supongamos que $S_1, S_2 \in B(H)$ son autoadjuntos tales que,

$$T = T_1 + iT_2 = S_1 + iS_2$$

Entonces,

$$(T_1 - S_1) + i(T_2 - S_2) = 0$$

En particular $T_1 - S_1, T_2 - S_2$ son autoadjuntos y entonces,

$$S_1 + iS_2 = 0 = 0^* = (S_1 + iS_2)^* = S_1 - iS_2$$

Por lo tanto $S_1 = S_2 = 0$. Demostrando el teorema. ■

6.4. Ejemplos Operadores Autoadjuntos

Ejemplo: Sea H espacio de Hilbert y sea $M \subseteq H$ subespacio vectorial cerrado. Entonces se cumple que $H = M \oplus M^\perp$ y podemos definir la proyección $P_M : H \to H$, entonces se cumple que,

$$
\begin{aligned}
H &= \ker P_M \oplus (\ker P_M)^\perp \\
&= \mathrm{Im} P_M \oplus (\mathrm{Im} P_M)^\perp
\end{aligned}
$$

Donde además se cumple que,

$$(P_M x, y)_{H\times H} = (x, P_M y)_{H\times H} = (P_M x, P_M y)_{H\times H}$$

Entonces P_M es un operador autadjunto.

Ejemplo: Sea $\varphi \in C[0,1]$ ($\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ continua). Definimos el operador multiplicación e L^2 de φ por,

$$
\begin{aligned}
T_\varphi : L^2[0,1] &\to L^2[0,1] \\
f &\mapsto T_\varphi(f)
\end{aligned}
$$

donde,

$$T_\varphi(f)(t) = f(t)\varphi(t)$$

para todo $t \in [0,1]$. Este es un operador lineal acotado $T_\varphi \in B(L^2)$ y en $L^2[0,1]$ definimso el producto interno,

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$$

con $f,g \in L^2[0,1]$. Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned}(T_\varphi(f),g) &= \int_0^1 f(t)\varphi(t)\overline{g(t)}dt\\ &= \int_0^1 f(t)\overline{\overline{\varphi(t)}g(t)}dx\\ &= (f, T_{\overline{\varphi}}(g))\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$$

Afirmación: *T_φ es autoadjunto si y sólo si φ es una función real y T_φ es positivo, es decir, $(T_\varphi f, f) \geq 0$ si y sólo si $\varphi \geq 0$.*

Ejemplo: Sea $H = l^2(\mathbb{N})$ donde $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2(\mathbb{N})$ si y sólo si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty$ con $x_n \in \mathbb{C}$. Definimos el producto interno,

$$(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y}_n$$

Sea $T : H \to H$ el Shift a la derecha, es decir,

$$x = (x_1, x_2, \cdots) \overset{T}{\mapsto} Tx = (0, x_1, x_2, \cdots)$$

Entonces T es lineal acotado, es decir, $T \in B(H)$. Entonces, ¿cuál es el operador adjunto de T? Por definición es $T^* : H \to H$ lineal acotado tal que,

$$(Tx, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_{n+1}} = (x, T^*y)$$

Por lo tanto podemos pensar en,

$$y = (y_1, y_2, \cdots) \overset{T^*}{\mapsto} T^*y = (y_2, y_3, \cdots)$$

Es decir, T^* es el Shift a la izquierda.

Observación: Notemos que,

$$\|T\|_{B(H)} = \|T^*\|_{B(H)} = 1$$

Y que $T^*T = I$. Sin embargo $TT^* \neq I$ puesto que si tomamos $x = (x_1, x_2, \cdots)$ con $x_1 \neq 0$, entonces,

$$TT^*x = (0, x_2, \cdots)$$

11/6/2025

Teorema: *Sea H espacio de Hilbert y sea $P \in B(H)$ autoadjunto de proyección (es decir $P^2 = P = P^*$). Entonces $M = ImP$ es cerrado y P es la proyección ortogonal de M.*

Demostración: Como P es autoadjunto, entonces,

$$\ker P = (\mathrm{Im}P^*)^{\perp} = \mathrm{Im}P$$

Entonces,

$$H = \ker P \oplus \mathrm{Im}P$$

Entonces $M = \mathrm{Im}P$ es cerrado y por lo tanto P es la proyección ortogonal sobre M ■

Definición; *Sea H espacio de Hilbert y sea $T \in B(H)$. Entonces diremos que T,*

i) es normal si $T^*T = TT^*$.

ii) es unitario si T es invertible y $T^{-1} = T^*$.

Teorema: *Sea H espacio de Hilbert. Sea $T \in B(H)$.*

i) T es normal si y sólo si $\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H$ para tood $x \in H$.

ii) Si T es normal, entonces,

$$\|T^n\|_{B(H)} = \|T\|^n_{B(H)}$$
$$\ker T = \ker T^* = (ImT)^{\perp} = (ImT^*)^{\perp}$$

Demostración:

i) Para $x \in H$ notemos que,

$$\begin{aligned}\|Tx\|_H^2 - \|T^*x\|_H^2 &= (Tx, Tx) - (T^*x, T^*x) \\ &= (T^*Tx, x) - (TT^*x, x) \\ &= ((T^*T - TT^*)x, x) = 0\end{aligned}$$

Luego T es normal si y sólo si $\|Tx\|_H = \|T^*x\|_H$ para todo $x \in H$.

Observación: T es normal si y sólo si T, T^* conmutan.

ii) Si T es normal, entonces $Tx = 0$ si y sólo si $T^*x = 0$, entonces,

$$(\mathrm{Im}T^*)^{\perp} = \ker T = \ker T^* = (\mathrm{Im}T)^{\perp}$$

Como T^*T es autoadjunto,

$$\|(T * T)^n\| = \|T^*T\|^n = (\|T\|^2)^n = \|T\|^{2n}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|T\|^{2n} &= \|(T^*T)^n\| \\ &= \|(T^*)^nT^n\| \\ &\leq \|(T^*)^n\|\|T^n\| \\ &\leq \|T^n\|\|T^*\|^n \\ &\leq \|T^*\|^n\|T\|^n \\ &\leq \|T\|^{2n}\end{aligned}$$

Entonces por sandwich se tiene que,

$$\|T^n\| = \|T\|^n$$

Demostrando el teorema. ■

Corolario: *Sea H espacio de Hilbert. Sea $P \in B(H)$ tal que $P^2 = P$ donde P es normal. Entonces $M = ImP$ es cerrado y P es la proyección ortogonal sobre M.*

Demostración: Si P es normal, entonces $\ker P = (\mathrm{Im}P)^{\perp}$, entonces podemos escribir,

$$H = \ker P \oplus \mathrm{Im}P$$

De aquí concluimos que $\mathrm{Im}P$ es cerrado y que P es proyección sobre $\mathrm{Im}P$. ■

Teorema: *Sea H espacio de Hilbert y sea $U \in B(H)$ tal que $ImU = H$. Entonces son equivalentes,*

i) *U es unitario.*

ii) *U es una isometría,*

$$\|Ux\|_H = \|x\|_H$$

para todo $x \in H$.

iii) *U preserva el producto interno, es decir,*

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

para todo $x, y \in H$.

Demostración:

- **ii) $\Leftrightarrow$ iii):** Si U preserva el producto interno, entonces U es isometría. Para la otra dirección usamos la identidad de polarización, notemos que para todo $x, y \in H$ se cumple que,

$$\begin{aligned}4(x,y) &= \|x+y\|_H^2 - \|x-y\|_H^2 + i\|x+iy\|_H^2 - i\|x-iy\|_H^2 \\ &= \|U(x+y)\|_H^2 - \|U(x-y)\|_H^2 + i\|U(x+iy)\|_H^2 - i\|U(x-iy)\|_H^2 \\ &= \|U(x)+U(y)\|_H^2 - \|U(x)-U(y)\|_H^2 + i\|U(x)+iU(y)\|_H^2 - i\|U(x)-iU(y)\|_H^2 \\ &= 4(Ux, Uy)\end{aligned}$$

  Entonces $(Ux, Uy) = (x, y)$.

- **i) $\Rightarrow$ iii):** Si U es unitario, entonces,

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, y)$$

para todo $x, y \in H$.

- **iii), ii) $\Rightarrow$ i):** Notemos que por iii) se tiene que para todo $x, y \in H$ se tiene,

$$(x, y) = (Ux, Uy) = (U^*Ux, y)$$

Lo que implica que $U^*U = I$. Entonces necesariamente U es inyectiva y por hipótesis, U es sobreyectiva, entonces $U^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Ahora por ii) se tiene,

$$\|Ux\|_H = \|x\|_H \Leftrightarrow \|U^{-1}y\|_H = \|y\|_H$$

con $Ux = y$. Lo que implica que U^{-1} es acotado y luego $U^{-1} \in B(H)$. Finalmente si U es invertible, entonces U^* tambíen donde además $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$, por lo que,

$$U^* = U^{-1} \text{ y } UU^* = I$$

Por lo tanto U es unitario.

Demostrando el teorema. ■

Tenemos el teorema de que si T es invertible, entonces T^* es invertible, pero ¿cuándo se cumple que si T^* es invertible, entonces T es invertible?

Definición: *Decimos que $T \in B(X, Y)$ es acotado por debajo si existe $\varepsilon > 0$ tal que ,*

$$\|Tx\|_Y \geq \varepsilon \|x\|_X$$

para todo $x \in X$.

Teorema: *Sea X espacio Banach y sea Y espacio vectorial normado. Sea $T \in B(X, Y)$. Entonces T es invertible (T^{-1} existe y $T^{-1} \in B(Y, X)$) si y sólo si ImT denso en Y y T es acotado por abajo.*

Demostración: Supongamos que T es invertible, entonces Im$T = Y$ y si $T^{-1} \in B(Y, X)$, entonces,

$$\|T^{-1}y\|_X \leq c\|y\|_Y \Leftrightarrow \frac{1}{c}\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y$$

Probemos la otra dirección. Sea T acotado por abajo con imagen denso en Y. Entonces si $x, y \in X$ son tales que $Tx = Ty$, entonces,

$$\|x - y\|_X \leq c\|T(x - y)\| = 0$$

De forma que T es inyectivo.

Probemos que es sobreyectiva, sea $Z = \text{Im}T$, entonces $T^{-1} \in \mathcal{L}(Z, X)$ y si Z es denso en Y entonces para todo $y \in Y$ existen una sucesiones $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que $z_n \to y$ y con $Tx_n = z_n$. En particular,

$$\begin{aligned}\|z_n - z_m\|_Y &= \|Tx_n - Tx_m\|_Y \\ &= \|T(x_n - x_m)\|_Y \\ &\geq \|x_n - x_m\|_X\end{aligned}$$

Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión de Cauchy en X, por lo que existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ y si $T \in B(X, Y)$, entonces,

$$y \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} z_n = Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$$

Por unicidad de límites se tiene que $Tx = y$ y por lo tanto $\text{Im}T = Y$. Finalmente T es invertible y $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Como T es acotado por abajo, se tiene que,

$$\|T^{-1}\|_{B(Y,X)} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Por lo tanto $T^{-1} \in B(Y, X)$. ■

Teorema: *Sea X espacio Banach y sea Y espacio vectorial normado tal que $T \in B(X, Y)$. Entonces T invertible si y sólo si T^* es invertible.*

Demostración: Si T es invertible, entonces T^* es invertible.

Supongamos que $T*$ es invertible. Probemos que T es acotado por abajo y que su imagen es deno en Y.

Notemos que $\{0\} = \ker T^* = (\text{Im}T)^o$, luego $\text{Im}T$ es denso en Y por HB. Sea $x \in X$ y sea $f \in X^*$ tal que $\|f\|_{X^*} = 1$ y $\langle x, f\rangle = \|x\|$. Luego,

$$\begin{aligned}\|x\|_X &= \langle x, f\rangle \\ &= \langle x, T^*(T^*)^{-1}f\rangle \\ &= \langle Tx, (T^*)^{-1}f\rangle \\ &\leq \|Tx\|_Y\|(T^*)^{-1}f\|_{X^*} \\ &\leq \|Tx\|_Y\|(T^*)^{-1}\|_{B(X^*,Y^*)}\|f\|_{X^*} \\ &= \|Tx\|_Y\|(T^*)^{-1}\|_{B(X^*,Y^*)}\end{aligned}$$

Es decir,

$$\|Tx\|_Y \geq \frac{1}{\|(T^*)^{-1}\|}\|x\|$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto T es acotado por abajo y por lo tanto T es invertible. ■

Observación: Si $\text{Im}T = Z$ no es denso en Y, en ese caso existe $\rho \in Y^*$ no nulo tal que,

$$\overline{Z} \subseteq \ker \rho$$

Luego $\langle x, T^*\rho\rangle = \langle Tx, \rho\rangle = 0$ para todo $x \in X$. Entonces $T^*\rho = 0$ luego T^* no es invertible.

Lema: *Si T^* es acotado por debajo, entonces ImT denso en Y.*

Teorema: *Sen X espacio Banach e Y espacio vectorial normado. Sea $T \in B(X, Y)$, entonces son equivalentes,*

i) T invertible.

ii) T^* invertible.

c) ImT denso en Y y T es acotado por abajo.

d) T y T^* son acotados por abajo.

7. Sistemas Ortonormales

Definición: *Sea E un espacio Euclidiano. Sea $S \subseteq E$ no vacío. Entonces,*

i) Diremos que S es ortogonal si $(x, y) = 0$ para todo $x, y \in S$.

ii) Diremos que es ortonormal si es ortogonal y además $\|x\|_E = 1$ para todo $x \in S$.

iii) Diremos que S es fundamental o total si es ortogonal tal que,

$$\overline{span(S)} = E$$

iv) Diremos que S es un conjunto ortonormal (sistema ortonormal) completo si es maximal.

v) Un sistema ortonormal completo se llama base ortonormal.

Teorema: *Sea E espacio Euclidiano y sea $S \subseteq E$ ortonormal. Entonces,*

i) Si S es fundamental, entonces S es completo.

ii) Si E es espacio de Hilbert y S es completo, entonces S es es fundamental.

Demostración: Sea E espacio Euclidiano.

i) Si S es fundamental, entonces,

$$S^\perp = (\overline{\text{span}(S)})^\perp = E^\perp = \{0\}$$

Por lo tanto S es maximal y luego es fundamental.

ii) Si S es maximal, entonces $M = \overline{\text{span}(S)}$ es el elemento maximal. Luego,

$$S^\perp = \{0\} = M^\perp$$

Como estamos en un espacio de Hilbert se tiene que,

$$M = (M^\perp)^\perp = E$$

Por lo tanto S es fundamental.

Demostrando el teorema. ■

7.1. Algoritmo de Gram-Schmidt

Teorema: *Sea E espacio Euclidiano. Sea $x_1, x_2, \cdots$ una secuencia de elementos linealmente independientes en E. Entonces existe $y_1, y_2, \cdots$ una secuencia ortonormal de E tal que,*

$$\mathit{span}(\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}) = \mathit{span}(\{y_1, y_2, \cdots, y_n\})$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Para $k \in \mathbb{N}$ definimos,

$$M_k := \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_k\}$$

que es subespacio cerrado de E de dimensión finita (también definimos $M_0 = \{0\}$). Definimos,

$$z_{k+1} := x_{k+1} - P_{M_k} x_{k+1}$$

para todo $k \geq 0$, que es distinto de 0 como los x_k son linealmente independientes. Además,

$$z_{k+1} \perp M_k \text{ y } \operatorname{span}\{\{x_1, \cdots, x_k\} \cup \{z_{k+1}\}\} = M_k$$

Finalmente tomamos $y_k := z_k / \|z_k\|$ obteniendo lo pedido. ■

Observación: Si $\{y_1, \cdots, y_k\}$ es una base ortonormal de M_k para todo $x \in E$ se tiene que,

$$P_{M_k} x = \sum_{j=1}^{k} (x, y_j) y_j$$

Puesto que,

$$\left(x - \sum_{j=1}^{k} (x, y_j) y_j, y_i \right) = 0$$

para todo $i = 1, \cdots, k$, es decir,

$$\left(x - \sum_{j=1}^{k} (x, y_j) y_j \right) \perp M_k$$

revissar

Nota: Abreviaremos por GS cuando usemos Gram-Schmidt.

Teorema:

a) Si E es un espacio Euclidiano separable (tiene un subconjunto denso y numerable), entonces E admite una sucesión ortonormal fundamental.

b) Si E es un espacio Euclidiano, entonces todo conjunto ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal.

Demostración:

a) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en E. Podemos tomar la sucesión de tal forma que sea linealmente independiente, si existe un x_n que es combinación de otros elementos de la sucesión, entonces lo quitamos y dejamos los otros (esto se puede hacer dado que E es de dimensión finita). Luego,

$$E = \overline{\mathrm{span}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})}$$

Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión ortonormal obtenida por GS a partr de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Luego,

$$\mathrm{span}\{y_k : k \in \mathbb{N}\} \supseteq \{x_k : k \in \mathbb{N}\} = E$$

Luego la sucesión de los y_k es un sistema ortonormal maximal.

b) Sea S_0 un conjunto ortonormal, definimos,

$$\Sigma := \{S \text{ sistema ortonormal que contiene a } S_0\}$$

Y consideremos el orden parcial de inclusión. Si $\Sigma' \subseteq \Sigma$ es una cadena (subconjunto totalmente ordenado), entonces,

$$S' = \bigcup_{S\in\Sigma'} S$$

es una cota superior de Σ' en Σ. Luego por el lema de Zorn, existe $\hat{S}$ elemento maxima en Σ y por tanto $\hat{S}$ es un sistema ortonormal maximal que contiene a S_0.

Demostrando el teorema. ■

Clase 18/6/2025

7.2. Ejemplos de Sistemas Ortonormales

Ejemplo: En l^2 definimos,

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_i \overline{y_i}$$

Sabemos que este es un espacio de Hilbert y la coleción $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ donde e_i es el elemento con solo un elemento no nulo en la componente i. Luego este es una base ortonormal.

Ejemplo En $C([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \text{ continuas}\}$. Tenemos el producto interno,

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\overline{g(z)}dz$$

Luego tenemos un espacio Euclidiano. Definimos la familia $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$, entonces este es una familia ortonormal,

$$\begin{aligned}(e^{int}, e^{imt}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}dt \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}\end{aligned}$$

Además, por Stone-Weierstrass,

$$\overline{\text{span}\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}}^{\|\cdot\|_\infty} = C([0, 2\pi])$$

Y,

$$\|f - g\|_{L^2} \leq \|fg\|_\infty$$

Entonces es un sistema ortonormal fundamental, más aún, si $L^2([0, 2\pi])$ es la completación de $C([0, 2\pi])$ **terminar...**

Ejemplo: En $C([-1, 1])$ la familita $\{1, t, t^2, \cdots\}$ es linealmente independientes con,

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

y su span es denso, entonces por GS obtenemos una familia $\{y_1, y_2, \cdots\}$ de polinomios ortonormales y forman un sistema ortonormal fundamental de $C([-1, 1])$ con,

$$y_n = P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}D^n[(t^2 - 1)^n]$$

donde D es el operador derivada.

Teorema: *Sea $\{\varphi_n\}_{n\in N}$ un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert H y sea $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares (en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$), luego,*

$$\sum_{n\in N} c_n\varphi_n$$

converge en H si y sólo si la serie,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2$$

converge (en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$).

Demostración: Sea $x_n = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$, entonces por pitágoras se tiene que,

$$\|x_n\|_H^2 = \sum_{k=1}^{n} \|c_k\varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

Luego para $m > n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene,

$$\|x_m - x_n\|^2 = \sum_{k=m+1}^{m} |c_k|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 - \sum_{k=1}^{m} |c_k|^2\right|$$

Entonces, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge si y sólo si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en H, y esto es si y sólo si,

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es Cauchy (en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$) y esto es equivalente a decir que,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2$$

converge. Como queriamos demostrar. ■

Observación: Del teorema anterior se puede concluir que,

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\varphi_n\right\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2$$

Teorema: *Sea H espacio de Hilbert y sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistema ortonormal. Sea $M := \overline{span(\{\varphi_n\})}$, entonces para todo $x, y \in H$ se tiene que,*

i) $\sum_{n\in\mathbb{N}}(x, \varphi_n)\varphi_n = P_M x$.

ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, \varphi_n)|^2 = \|P_M x\|_H^2 \leq \|x\|_H^2$.

iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}}(y,\varphi_n)\overline{(x,\varphi_n)} = (P_Mx, P_My) = (x, P_My) = (P_Mx, y)$.

iv) *Si* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de reales tal que* $\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2 < \infty$*, entonces existe un único* $u \in M$ *tal que* $c_n = (u,\varphi_n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y,*

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\varphi_n$$

Definición: *Sea* H *espacio de Hiblert y sea* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *sistema ortonormal. Si* $u \in H$*, entonces,*

$$c_n := (u,\varphi_n)$$

son los coeficientes de Fourier de u *con respecto a* $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración:

i) Sea $x_n = \sum_{k=1}^{n}(x,\varphi_k)\varphi_k$, luego,

$$(x - x_n, \varphi_j) = 0$$

para todo $j = 1,\cdots,m$. Entonces $x_n \in \text{span}\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$. y $x = x_n + (x - x_n)$ donde $x_n \perp (x - x_n)$, luego por pitágoras,

$$\begin{aligned}\|x\|_H^2 &= \|x_n\|_H^2 + \|x - x_n\|_H^2 \\ &\geq \|x_n\|_H^2 = \sum_{k=1}^{n}|(x,\varphi_k)|^2\end{aligned}$$

Como la serie,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\}}|(x,\varphi_n)|^2$$

converge en $\mathbb{R}$, entonces $\widetilde{x} = \sum_{n\in\mathbb{N}}(x_n,\varphi_n)\varphi_n$ converge en H y para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que,

$$(x - \widetilde{x}, \varphi_k) = \lim_{n\to\infty}(x - x_n, \varphi_k) = 0$$

Entonces $x - \widetilde{x} \perp M$ y por lo tanto $\widetilde{x} = P_mx$.

ii) Por el indice anterior,

$$\|P_Mx\|_H^2 = \|\widetilde{x}\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}|(x,\varphi_n)|^2$$

y como $\|P_Mx\|_H \leq \|x\|_H$ se obtiene lo pedido.

iii) Sean $x, y \in H$. Sean,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_n)\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} P_M x$$
$$y_n = \sum_{k=1}^{n} (y, \varphi_n)\varphi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} P_M y$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(x, P_M y) = (P_M x, y) &= (P_M x, P_M y)\\ &= \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_n)\varphi_n, \sum_{k=1}^{n} (y, \varphi_n)\varphi_n \right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x, \varphi_k)\overline{(y, \varphi_k)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (x, \varphi_n)\overline{(y, \varphi_n)}\end{aligned}$$

iv) Si la serie,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2$$

converge, entonces,

$$u := \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\varphi_n$$

existe en H y en particular,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$$

y,

$$(u, \varphi_j) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k, \varphi_j \right) = c_j$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Para la unicidad se verifica si $v \in H$ es tal que $(v, \varphi_k) = c_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\begin{aligned}v = P_m v &= \sum_{n\in N} (v, \varphi_n)\varphi_n\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n\varphi_n = u\end{aligned}$$

Demostrando el teorema. ■

Corolario: *Sea E espacio Euclidiano, sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistema ortonormal. Entonces para todo $x \in E$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x,\varphi_n)|^2 \leq \|x\|_E^2$$

Si ahora tenemos un espacio de Hilbert H, entonces para todo $x, y \in H$ se tiene que,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |(x,\varphi_n)|^2 = \|x\|_H^2$$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (x,\varphi_n)\overline{(y,\varphi_n)} = (x,y)$$

Demostración ¿?

Teorema: *Sea H espacio de Hilbert separable, sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de H, entonces el mapa,*

$$H \to l^2$$
$$x \in H \mapsto \hat{x} := \{(x,\varphi_n)\}_{n\in N} \in l^2$$

Es una isometría lineal de H en l^2 que preserva el producto interno $(x,y)_H = (\hat{x},\hat{y})_{l^2}$. Es más, todo H separable de dimensión infinita es isometricamente isomorfo a l^2. Si H es de dimensión n, entonces $H \cong \mathbb{R}^n$.

Teorema: *Sea H espacio de Hilbert, existe $\Gamma = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sistema ortonormal/fundamental/completo y para todo $x \in H$ tal que,*

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x,\varphi_n)|^2$$

Y $(H, (\cdot,\cdot)) \cong (l^2(\Gamma), (\cdot,\cdot)_{l^2(\Gamma)})$.

Ayudantías

Ayudantía 1

Solución P1: Usaremos la noción de que las topologías inducidas por un espacio métrico están dadas por las bolas abiertas de estas.

- **i) implica ii):** Sea $O \in \tau_Y$ abierto. Demostremos que $f^{-1}(O)$ es abierto en el sentido métrico. Sea $x_0 \in f^{-1}(O)$, luego $f(x_0) \in O$. Si O es abierto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que,

  $$f(x_0) \in B_2(f(x_0), \varepsilon) \subseteq O$$
  $$\Leftrightarrow$$
  $$x_0 \in f^{-1}(B_2(f(x_0), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(O)$$

  Por continuidad de f para tal $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B_1(x_0, \delta)$, entonces $f(y) \in B_2(f(x_0, \varepsilon))$, o mejor dicho,

  $$y \in B_1(x_0, \delta) \Rightarrow y \in f^{-1}(B_2(f(x_0), \varepsilon))$$

  Por lo tanto,

  $$x_0 \in B_1(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_2(f(x_0), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(O)$$

  Lo que implica que para todo $x_0 \in f^{-1}(O)$ podemos encontrar una bola abierta de τ_X que contiene a x_0 y que está incluido en $f^{-1}(O)$, es decir, $f^{-1}(O)$ es abierto en τ_X. Probando lo que queriamos demostrar.

- **ii) implica iii):** Sea $F \subseteq Y$ cerrado. Luego F^c es abierto en τ_Y, entonces $f^{-1}(F^c)$ es abierto. Si $(f^{-1}(F^c)^c = f^{-1}(F)$, entonces $f^{-1}(F)$ es cerrado, como se quería demostrar.

- **iii) implica i):** Demostraremos que f es continua en un punto arbitrario $x_0 \in X$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la bola abierta,

  $$B_2 := B_2(f(x_0), \varepsilon) \in \tau_Y$$

  Notemos que B_2^c es cerrado, luego por iii) se tiene que $f^{-1}(B_2)^c$ es cerrado. Tomando el complemento, obtenemos que $f^{-1}(B_2)$ es abierto en τ_X. Si $x_0 \in f^{-1}(B_2)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que,

  $$x_0 \in B_1(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B_2(f(x_0), \varepsilon))$$

  Por lo tanto, si $x \in B_1(x_0, \delta)$, entonces,

  $$x \in f^{-1}(B_2(f(x_0), \varepsilon)) \Leftrightarrow f(x) \in B_2(f(x_0), \varepsilon)$$

  Dicho de otra forma, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_1(x, x_0) < \delta$, entonces $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, que es la definición de que f sea continua en $x_0 \in X$.

  Aplicando este argumento para todo punto de$X$, se concluye que f es continua en X.

Solución P2: Notemos que $(F, \tau\big|_{\tau})$ es espacio topológico bien definido. Sea $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ cubrimiento abierto de F, es decir,

$$F \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$$

Si F es cerrado, entonces F^c es abierto, ahora consideremos la colección $\{U_\gamma \cup F^c\}_{\gamma\in\Gamma}$, el cual es cubrimiento abierto de X.Como X es compacto, existe una colección finita de abiertos $\{U_{\gamma_i} \cup F^c\}_{i=1}^n$ que cubre a X, por lo que también cubre a F,

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\gamma_i} \cup F^c)$$

Como $F \cap F^c = \emptyset$, entonces se concluye que,

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\gamma_i}$$

Es decir, F es compacto. ■

Observación: Sea (X, τ) espacio topológico compacto. Entonces $F \subseteq X$ es compacto si y sólo si F es cerrado.

Solución P3:

a) Tenemos los espacios topológicos $(X, \tau_{\|\cdot\|_1}), (X, \tau_{\|\cdot\|_2})$ donde las topologías tienen por base las bolas definidas en su respectiva norma. Queremos demostrar que si O es un abierto en $\tau_{\|\cdot\|_2}$, entonces O es abierto $\tau_{\|\cdot\|_1}$.

Recordemos que O es abierto métricamente en $\tau_{\|\cdot\|_2}$ si y sólo si para todo $x \in O$ existe un abierto V tal que,

$$x \in V \subseteq O$$

En particular, podemos tomar $r > 0$ tal que,

$$x \in B_{\|\cdot\|_2}(x, r) \subseteq O$$

Observemos que,

$$B_{\|\cdot\|_1}(x, r/c_1) = \{y \in X : \|x - y\|_1 < r/c_2\} \subseteq B_{\|\cdot\|_2}(x, r)$$

Es decir, existe un abierto en $\tau_{\|\cdot\|_1}$ tal que,

$$x \in B_{\|\cdot\|_1}(x, r/c_1) \subseteq O$$

De forma que O es un abierto en $\tau_{\|\cdot\|_1}$. Para la otra dirección se demuestra de forma análoga. Por lo tanto, $\tau_{\|\cdot\|_1} = \tau_{\|\cdot\|_2}$.

b)

Solución P4:

a) Debemos demostrar que $f^{-1} : Y \to X$ es continua. Usaremos la definición de preimagen de cerrados es un cerrado para la continuidad de f. Sea $U \in \tau_1$ cerrado, luego si $U \subseteq X$ con X compacto, se tiene que U es compacto.

Afirmación: $f(U)$ *es compacto.*

Demostración: Sea $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ cubrimiento abierto de $f(U)$, por lo que,

$$f(U) \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$$

Aplicando f^{-1} obtenemos,

$$U \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(V_\gamma)$$

donde $f^{-1}(V_\gamma)$ es abierto en τ_1, entonces $\{f^{-1}(V_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ es cubrimiento abierto de U. Como U es compacto existe una colección finita de abiertos tales que,

$$U \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\gamma_i})$$

Ahora aplicando f se obtiene,

$$f(U) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\gamma_i}$$

Por lo tanto $f(U)$ es compacto. ■

Si $f(U) \subseteq Y$ es compacto con Y hausdorff, entonces $f(U)$ es cerrado y por tanto f^{-1} es continuo. Demostrando que f es un homeomorfismo.

b) Consideremos la función identidad:

$$\text{id} : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$$

Observemos que es biyección y es continua puesto que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Si (X, τ_1) es compacto y (X, τ_2) es Hausdorff, entonces se tiene que id es un homeomorfismo. Esto implica que,

$$\text{id}^{-1} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$$

es continua, es decir, para todo $U \in \tau_1$, se tiene que $U = \text{id}^{-1}(U) \in \tau_2$, por lo que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, y por tanto $\tau_1 = \tau_2$.

c)

Ayudantía 2

Solución P1: Como estamos trabajando en L^p, entonces la norma $\|\cdot\|_p$ está bien definido.

a) Probemos que es acotada. Por definición,

$$\begin{aligned}\|S(x)\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |S(x)_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \|x\|_p\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x \in L^p$ se tiene que $\|S(x)\|_p \leq \|x\|_p$, por lo que S es acotado. Determinemos su norma. Sabemos que,

$$\|S\| = \sup_{\|x\|_p=1} \|S(x)\|_p$$

Entonces es evidente que $\|S\| = 1$.

b) Probemos que es acotada. Notemos que,

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T(x)_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p\end{aligned}$$

Por lo tanto T es acotado. Determinemos su norma. Notemos que,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_p=1} \|T(x)\|_p \leq \sup_{\|x\|_p=1} \|x\_p = 1$$

Por otro lado, podemos tomar $x \in L^p$ tal que,

$$x = (0, 1, 0, 0, \cdots)$$

Es decir, que solo un índice sea 1. Por lo que $\|x\|_p = 1$ y entonces,

$$1 = \|T(x)\|_p \leq \|T\| \leq 1$$

Finalmente $\|T\| = 1$.

c) Demostremos que $TS = I$. Sea $x = (x_1, x_2, \cdot) \in L^p$, entonces,

$$(TS)(x) = T(0, x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots) = x$$

Es decir, $(TS)(x) = x$ para todo $x \in L^p$. Ahora, se puede ver que $ST \neq I$, puesto que si tomamos $x = (x_1, x_2, \cdots)$ con primer elemento no nulo, ocurre que,

$$(ST)(x) = S(x_2, x_3, \cdots) = (0, x_2, x_3, \cdots) \neq x$$

Solución P2:

Solución P4:

a) Observemos que,

$$p(\vec{0}) = p(0 \cdot \vec{x}) = 0p(\vec{x}) = 0$$

donde $\vec{0}$ es el vector nulo de X (solo representaremos que es un vector solo en este caso, seguiremos denotandolo sin la flecha), y que,

$$0 = p(0) = p(x - x) \leq p(x) + |-1|p(x) = 2p(x)$$

Es decir, $0 \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Observación: p es una norma si $p(x) = 0$ implica que $x = 0$.

b)

Solución P5: Lo que nos dice el problema, es que para todo $x \neq 0$, se tiene que,

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(x) \in (0, \infty)$$

Luego definimos,

$$\begin{aligned} p : X &\to \mathbb{R} \\ p(x) &:= \sup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(x) \end{aligned}$$

Demostremos que p es norma.

i) Si $x = 0$, claramente $p(x) = 0$. Supongamos que $p(x) = 0$, entonces necesariamente $x = 0$, ya que por hipótesis si $x \neq 0$, entonces $p(x) \neq 0$. Luego,

$$x = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0$$

ii) Sea λ escalar, entonces,

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \sup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(\lambda x) \\ &= \sup_{\gamma \in \Gamma} |\lambda| p_\gamma(x) \\ &= |\lambda| \sup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(\lambda x) = |\lambda| p(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

iii) Sean $x, y \in X$, entonces,

$$\begin{aligned}
p(x+y) &= \sup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(x+y) \\
&\leq \sup_{\gamma\in\Gamma}(p_\gamma(x)+p_\gamma(y)) \\
&\leq \sup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(x) + \sup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(y) \\
&= p(x)+p(y)
\end{aligned}$$

Por lo tanto p es una norma sobre X.

Ayudantía 3

Solución P3 (revisar):

a) Definamos la codimensión de un espacio vectorial finito.

Definición: *Sea V espacio vectorial y sea $W \subseteq V$ subespacio, entonces,*

$$\text{codim } W = \dim V - \dim W$$

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ lineal no nulo y consideremos el subespacio $\ker f$ de X. Entonces queremos encontrar la codimensión. Sabemos que,

$$\dim \ker f + \dim f(X) = \dim X$$

Ahora, notemos que $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ es un espacio de $\mathbb{R}$, por lo que,

$$\dim f(X) \leq \dim \mathbb{R} = 1$$

Dado que f no es nulo, necesariamente $\dim f(X) = 1$. Finalmente,

$$\text{codim } \ker f = \dim X - \dim \ker f = \dim f(X) = 1$$

Veamos que significa esto. Si X es de dimensión n, entonces $\ker f$ es de dimensión $n-1$, por lo que todo número $x \in X$ se puede escribir de la siguientes forma:

$$x = y + \lambda x_0$$

donde $y \in \ker f$ y $f(x_0) \neq 0$ con escalar λ.

b) Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones lineales no nulos. Supongamos que $f = \lambda g$ con $\lambda \neq 0$ escalar (si $\lambda = 0$, entonces $f = 0$ siendo imposible), entonces,

$$\begin{aligned}\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\} &= \{x \in X : \lambda g(x) = 0\} \\ &= \{x \in X : g(x) = 0\} \\ &= \ker g\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\ker f = \ker g$. Sabemos existe un subespacio de X de dimensión 1, en particular,

$$\ker f \oplus \langle x_0 \rangle = X = \ker g \oplus \langle x_0 \rangle$$

Sea $x \in X$, entonces $x = y + \lambda x_0$ donde $y \in \ker f = \ker g$, λ es escalar y $f(x_0), g(x_0)$ no se anula. Notemos que si $f(x_0), g(x_0) \in \mathbb{R}$, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ no nulo tal que.

$$kg(x_0) = f(x_0)$$

Luego tenemos que,

$$\begin{aligned}f(x) &= f(y + \lambda x_0) \\ &= \lambda f(x_0) = \lambda k g(x_0) \\ &= kg(y + \lambda x_o) = kg(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f = kg$, como queriamos demostrar.

c) Consideremos γ el mapa que toma f y lo manda a $\gamma(f) = f^{-1}(1)$ con f lineal no nulo. Observemos que f no es nulo, entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) = \lambda$ on λ no nulo, luego,

$$ff\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1$$

Es decir, $f^{-1}(1)$ no es vacío para todo f lineal no nulo.

Consideremos f, g lineales no nulos tales que,

$$\gamma(f) = \gamma(g) \Leftrightarrow f^{-1}(1) = g^{-1}(1)$$

Sea $x \in X$ tal que $f(x) = \lambda$ con λ no nulo, entonces,

$$\begin{aligned} f(x) = \lambda &\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow g\left(\frac{x}{\lambda}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow g(x) = \lambda \end{aligned}$$

Supongamos que $x \in X$ es tal que $f(x) = 0$, sea $y \in X$ tal que $f(y) = 1$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x+y) = 1 \\ &\Leftrightarrow g(x+y) = 1 \\ &\Leftrightarrow g(x) = 0 \end{aligned}$$

Es decir, $f(x) = g(x) = 0$. Finalmente para todo $x \in X$ se tiene que $f = g$.

Ayudantía 4

Solución P1: Consideremos $W := \text{span}(Y \cup \{z\})$.

Afirmación: *Todo elemento $w \in W$ se puede escribir de forma única como,*

$$w = y + \lambda z$$

donde $y \in Y$ y λ escalar son únicos.

Demostración: Debemos probar que existen tales $y \in Y$ y λ escalar y que son únicos. Claramente existe esa representación puesto que por definición W es la combinación lineal de elemento de Y combinado con z, luego todo elemento se expresa de la forma,

$$w = y + \lambda z$$

Probemos que son únicos. Sean $y_1, y_2 \in Y$ y λ_1, λ_2 escalares tales que,

$$w = y_1 + \lambda z = y_2 + \lambda_2 z$$

Entonces,

$$(y_1 - y_2) = (\lambda_2 - \lambda_1)z$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $z \in Y$ siendo una contradicción, por tanto $\lambda_1 = \lambda_2$ y luego $y_1 = y_2$. ■

Definimos la función,

$$\begin{aligned} f_0 : W &\to \mathbb{R} \\ w = y + \lambda z &\mapsto \lambda d(y, z) \end{aligned}$$

Que está bien definida por la afirmación anterior. Probemos que es lineal acotada.

Linealidad: Sean $w_1 = y_1 + \lambda_1 z, w_2 = y_2 + \lambda_2 z \in W$ y sean λ, μ escalares, luego,

$$\begin{aligned} f_0(\lambda w_1 + \mu w_2) &= f_0(\lambda y_1 + \lambda\lambda_1 z + \mu y_2 + \mu\lambda_2 z) \\ &= f_0(\underbrace{(\lambda y_1 + \mu y_2)}_{=y_0} + \underbrace{(\lambda\lambda_1 + \mu\lambda_2)}_{=\lambda_0} z) = \lambda_0 d(y_0, z) \end{aligned}$$

terminar

Falta ver que es acotada y su norma es 1

Solución P2:

a) Si X^* es separable, entonces existe $W \subseteq X^*$ tal que $\overline{W} = X^*$, donde W es una subcolección numerable de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ lineales acotadas.

Solución P3:

Ayudantía 6

Solución P1: Recordemos el siguiente resultado.

Teorema: *En un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes.*

Sea $T : X \to Y$ operador lineal, sea $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ la norma de X y de Y respectivament. Definimos la norma $\|x\|^* = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$.

Afirmación: $\|x\|^*$ *es una norma bien definida en* X.

Demostraicón: Debemos probar los axiomas de norma.

i) Tenemos la siguiente cadena de implicancias,

$$\begin{aligned}\|x\|^* = 0 &\Leftrightarrow \|x\|_X + \|Tx\|_Y = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\|_X = 0 \text{ y } \|Tx\|_Y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

ii) Sea λ escalar, luego,

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|^* &= \|\lambda x\|_X + \|T(\lambda x)\|_Y \\ &= |\lambda|\|x\|_X + |\lambda|\|Tx\|_Y \\ &= |\lambda|(\|x\|_X + \|Tx\|_Y) \\ &= |\lambda|\|x\|^*\end{aligned}$$

iii) Sean $x, y \in X$, entonces,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^* &= \|x+y\|_X + \|T(x+y)\|_Y \\ &\leq \|x\|_X + \|y\|_X + \|Tx\|_Y + \|Ty\|_Y \\ &= \|x\|^* + \|y\|^*\end{aligned}$$

Luego $\|\cdot\|^*$ es una norma en X. Por el teorema anterior $\|\cdot\|^*$ y $\|\cdot\|_X$ son equivalentes, por lo que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\|x\|^* \leq C\|x\|_X \Rightarrow \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X - \|x\|_X \leq C\|x\|_X$$

Lo que implica que $\|T\| \leq C$ y por tanto T es continua.

Ayudantía 10

Problema 1:

Ayudantía 13

Problema 1: