FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2535

Teoría De Integración

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. La Integral de Riemann

Estudiaremos las propiedades de la integral de Riemann. Para ello necesitamos el concepto intuitivo, formalizarlo y desarrollar la teoría. La integral de Riemann en forma resumida es sumar infinitamente trozos pequeños.

1.1. Definiciones y Propiedades

Definición 1.1. (Partición, Suma de Riemann y Riemann-integrable)

(a) *Decimos que un conjunto de puntos dada por,*

$$\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

Es una partición de $[a, b]$*. Definimos la malla (o paso) de la partición* Π *como,*

$$|\Pi| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - x_{i-1}|$$

Y decimos que un conjunto de puntos,

$$\underline{\mathcal{C}} = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n\}$$

es un conjunto representante de Π *partición de* $[a, b]$ *si,*

$$\mathcal{C}_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

para todo $i = 1, \ldots, n$.

(b) *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada. Sea* Π *una partición y sea* $\underline{\mathcal{C}}$ *un conjunto representate de* Π*, definimos la suma de Riemann por,*

$$S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{C}_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{C}_i)\Delta x_i$$

Donde $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *y* $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$.

(c) *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada. Decimos que* f *es Riemann-integrable (R-integrable/R-int.) si el límite,*

$$\lim_{|\Pi| \to 0} S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}})$$

existe.

Nota 1.1.

- Los elementos del conjunto representante de una partición Π, puede ser cualquier valor , mientras esté dentro de un intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- Cuando trabajamos con funciones R-integrable, o relacionados, asumiremos que la función es acotada. Esto es importante para que ser R-int. esté bien definido.

- Como comentario, siempre que hablemos de integrables de Riemann, siempre nos referiremos a funciones con dominio compacto o donde f sea acotado, cuando hablamos de integrables impropias, nos referimos a tomar una integral de Riemann y tomar su límite, y esto ocurre en f no acotadas, entre otros.

Notación. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada R-int. Definimos/denotamos la integral de Rimann de f por,

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{|\Pi|\to 0} S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}})$$

Observación 1.1. Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada donde,

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) = I \in \mathbb{R}$$

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque,

$$|S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) - I| < \varepsilon$$

para todo $|\Pi| < \delta$ y para cualquier $\underline{\mathcal{C}}$ representante de Π. Es decir, el límite es independiente del conjunto representante.

Ejemplo 1.1. Veamos un ejemplo de una función no Riemann-integrable. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si f fuera R-int. entonces el límite,

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}})$$

existe y sería único. Sea Π una partición cualquiera de $[0, 1]$, sea $\underline{\mathcal{C}}$ un representante de Π talque $\mathcal{C}_i \in \mathbb{Q}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Luego,

$$S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{C}_i)(x_i - x_{i-1}) = 1$$

Pero por otro lado, si tomamos $\underline{\mathcal{C}}$ un representante con elementos irracionales se observa que,

$$S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) = 0$$

En cualquier caso podemos tomar $|\Pi|$ tan pequeño como queramos y entonces,

$$1 = \lim_{|\Pi|\to 0} S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) = 0$$

Dado que el representante no afecta al límite, pero luego $1 = 0$ siendo imposible por lo que f no puede ser R-integrable. $\Subset$

Intentar determinar la integral de una función acotada es complicado, ya que debemos calcular un límite complicado, por lo que construiremos una forma de calcular la integral de una función que no consista en usar el límite. Para ello usaremos las sumas de Darboux.

Definición 1.2. (Suma Inferior y Suma Superior) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Sea $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Para todo $i = 1, \dots, n$, definimos,*

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Además, definimos,

(a) La suma inferior por,

$$L(f, \Pi) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

(b) La suma superior por,

$$U(f, \Pi) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

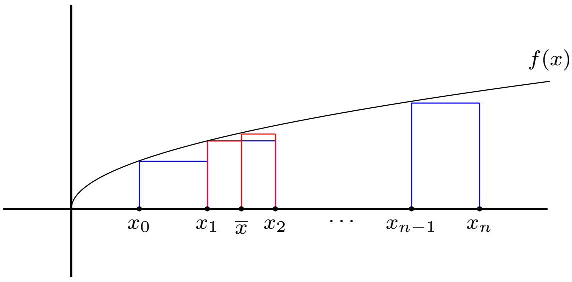
Observación 1.2. Tanto m_i, M_i como las sumas superiores e inferiores de una función acotada, están bien definidas, en el sentido de que toman un valor finito, ya que f al ser acotada, al tomar f restringido en un intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ este es acotado, luego tiene supremo e ínfimo. Y con respecto a la sumas inferiores y superiores, estos siempren toman un valor real por construcción.

Observación 1.3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, Π una partición entonces,

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)(b - a) \leq L(f, \Pi) \leq S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) \leq U(f, \Pi) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)(b - a)$$

Para todo representante de Π. En virtud de la definición de Riemann y de la definición de suma superior e inferior.

Observación 1.4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotado, sea $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ y sea $\overline{x} \in [a, b] \setminus \Pi$. Definimos la partición $\Pi' := \Pi \cup \{\overline{x}\}$, en un gráfico tendriamos algo de la forma,



Podemos observar que la suma inferior de Π' tiene valor mayor a la suma inferior Π, (la recta roja está superpuesta de la azul), en general si $\Pi \subseteq \Pi'$ (refinidad) con Π, Π' particiones de $[a, b]$, se tiene que,

$$L(f, \Pi) \leq L(f, \Pi')$$

Por otro lado, se puede observar que,

$$U(f, \Pi) \geq U(f, \Pi')$$

Y en efecto, supongamos que,

$$\Pi' = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, \overline{x}, x_i, \ldots, x_n\}$$

Sean $m' = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, \overline{x}]\}, m'' = \text{ínf}\{f(x) : x \in [\overline{x}, x_i]\}$. Entonces,

$$L(f, \Pi') - L(f, \Pi) = m'(\overline{x} - x_{i-1}) + m''(x_i - \overline{x}) - m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0$$

Ya que,

$$m_i \leq m', \quad m_i \leq m''$$

Entonces,

$$L(f, \Pi') \geq L(f, \Pi)$$

Para probar de forma general basta usar un proceso finito al ser elementos finitos. Con respecto a la suma superior se procede de forma análoga. Por lo tanto, siempre podemos mejorar la suma inferior y la suma superior a un valor finito. Otra observación que podemos concluir, es que si Π_1, Π_2 son dos particiones cualesquiera de $[a, b]$ se tiene,

$$L(f, \Pi_1) \leq U(f, \Pi_2)$$

Y en efecto, tomando la partición $\Pi_1 \cup \Pi_2$ vemos que,

$$L(f, \Pi_1) \leq L(f, \Pi_1 \cup \Pi_2) \leq U(f, \Pi_1 \cup \Pi_2) \leq U(f, \Pi_2)$$

Definición 1.3. (Integral Superior e Inferior) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos,*

(a) La integral superior por,

$$\mathcal{L}(f) := \sup\{L(f, \Pi) : \Pi \textit{ partición de } [a, b]\}$$

(b) La integral inferior por,

$$\mathcal{U}(f) := \text{ínf}\{U(f, \Pi) : \Pi \textit{ partición de } [a, b]\}$$

Observación 1.5. La integral superior e inferior están bien definidas ya que $L(f, \Pi)$ es acotado superiormente y $U(f, \Pi)$ es acotado inferiormente.

Teorema 1.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es R-integrable si y sólo si $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$. En tal caso,*

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$$

Es decir, una función acotada es R-integrable si la integral inferior coincide con la superior, además si coinciden entonces toman valor la integral de f.

Lema 1.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(a) $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$

(b) Para todo $\varepsilon > 0$ existen Π_1, Π_2 particiones tales que,

$$U(f, \Pi_2) - L(f, \Pi_1) < \varepsilon$$

(c) Para todo $\varepsilon > 0$ existe Π partición talque,

$$U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon$$

(d) Para todo $\varepsilon > 0$ existen una partición Π talque,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

donde $w_i = M_i - m_i$ y $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$.

Dem. Notemos que las afirmaciones (c),(d) son equivalentes, también vemos que (c) implica (b). Para probar el lema probaremos que (a) implica (b), (b) implica (c) y (c) implica (a).

(a) ⇒ (b). Si $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$, entonces para $\varepsilon > 0$, existen Π_1, Π_2 particiones tales que,

$$\begin{aligned} L(f, \Pi_1) &> \mathcal{L}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \\ U(f, \Pi_2) &< \mathcal{U}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

En virtud de la caracterización de supremo e ínfimo. Luego,

$$\begin{aligned} |U(f, \Pi_2) - L(f, \Pi_1)| &= |U(f, \Pi_2) - \mathcal{U}(f) + \mathcal{L}(f) - L(f, \Pi_1)| \\ &\leq |U(f, \Pi_2) - \mathcal{U}(f)| + |L(f, \Pi_1) - \mathcal{L}(f)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Concluyendo (b).

(b) $\Rightarrow$ (c). Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen particiones Π_1, Π_2 tales que

$$U(f, \Pi_2) - L(f, \Pi_1) < \varepsilon$$

Tomando la unión de Π_1, Π_2, se observa que,

$$U(f, \Pi_1 \cup \Pi_2) - L(f, \Pi_1 \cup \Pi_2) < U(f, \Pi_2) - L(f, \Pi_1) < \varepsilon$$

Concluyendo (c).

(c) $\Rightarrow$ (a). Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe una partición Π talque,

$$U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon$$

Notemos que,

$$0 \leq \mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f) \leq U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que,

$$|\mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f)| < \varepsilon$$

Por tanto $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$, concluyendo (a) y probando el lema. ■

Dem. (Teorema 1.1) Supongamos que f es R-integrable. Sea $\varepsilon > 0$, basta demostrar que existe una partición Π talque,

$$U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon$$

Sabemos que existe un $\delta > 0$ talque si $|\Pi| < \delta$, entonces,

$$|S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) - I| < \varepsilon$$

para cualquier representante $\underline{\mathcal{C}}$ de Π. Sea $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición talque $|\Pi| < \delta$, notemos que para $\frac{\varepsilon}{(b-a)} > 0$ existe un $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ talque,

$$\left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \Delta x_i < f(x_i^*) \Delta x_i$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \Delta x_i < S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) \Longleftrightarrow U(f, \Pi) < S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) + \varepsilon$$

Es decir, existe un representante de Π talque,

$$U(f, \Pi) < S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) + \varepsilon$$

Similarmente podemos encontrar un Π' talque $|\Pi'| < \delta$ y un representante de forma que,

$$L(f, \Pi) > S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) - \varepsilon$$

Tomando $\overline{\Pi} := \Pi \cup \Pi'$, se puede ver que,

$$U(f, \overline{\Pi}) - L(f, \overline{\Pi}) < U(f, \Pi) - L(f, \Pi') < 2\varepsilon$$

Por lo tanto, por el lema anterior se tiene que $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$.

Supongamos ahora que $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces por el lema anterior, existe una partición $\overline{\Pi} = \{\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_{\overline{n}}\}$ (con $\overline{n}$ fijo) talque,

$$U(f, \overline{\Pi}) - L(f, \overline{\Pi}) < \varepsilon$$

Consideremos otra partición $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$, y sea $\delta := |\Pi|$. Sea el conjunto

$$A := \left\{ i = 1, \dots, n : [x_{i-1}, x_i] \cap \overline{\Pi} = \emptyset \right\}$$

Este conjunto es una enumeración finita, donde nos interesa los i tales los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ no estén los elementos $\overline{x}_j$, para algun j. Luego podemos ver que,

$$U(f, \Pi) = \sum_{i \in A} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \notin A} M_i(x_i - x_{i-1})$$

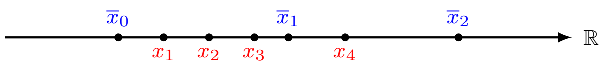
En particular,

$$\sum_{i \notin A} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \notin A} \sup |f| \delta \leq (\overline{n} + 1) \cdot \sup |f| \cdot \delta$$

Eso ocurre por un cálculo sencillo. (Consideramos $\sup |f|$ para evitar problemas). Sea el conjunto,

$$A_1 := \{ i \in A : [x_{i-1}, x_i] \subseteq [\overline{x}_0, \overline{x}_1] \}$$

En un caso particular tendriamos los $i \in A$ tales que,



En este caso claramente $1, 2, 4 \in A_1$ y para $i = 4$ se tiene que $[x_3, x_4] \not\subseteq [\overline{x}_0, \overline{x}_1]$. Volviendo a la demostración, a partir de A_1 tenemos que,

$$\sum_{i \in A_1} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in A_1} \overline{M}_1(x_i - x_{i-1}) = \overline{M}_1 \sum_{i \in A_1} (x_i - x_{i-1}) \leq \overline{M}_1(\overline{x}_1 - \overline{x}_1)$$

donde $\overline{M}_1 = \sup\{f(x) : x \in [\overline{x}_0, \overline{x}_1]\}$. Con respecto a la última desigualdad, esto se cumple ya que la suma $\sum_{i \in A_1}(x_i - x_{i-1})$ es tomar trozos dentro del trozo $\overline{x}_1 - \overline{x}_0$ y claramente resulta un valor menor a este último. En general, sea el conjunto,

$$A_i := \{ j \in A : [x_{j-1}, x_j] \subseteq [\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i] \}$$

con $i = 1, \dots, \overline{n}$ podemos ver que,

$$\sum_{i \in A_i} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{M}_i(\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1})$$

Si además $A_1, \ldots, A_{\overline{n}}$ es una partición de A, podemos concluir que,

$$\sum_{i\in A} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{k=1}^{\overline{n}} \overline{M}_k(\overline{x}_k - \overline{x}_{k-1}) = U\left(f, \overline{\Pi}\right)$$

Por lo tanto,

$$U(f,\Pi) \leq U(f,\overline{\Pi}) + (\overline{n}+1)\cdot \sup|f|\cdot\delta$$

Tomando $\delta \leq \frac{\varepsilon}{(\overline{n}+1)\cdot\sup|f|}$ obtenemos que,

$$U(f,\Pi) < U(f,\overline{\Pi}) + \varepsilon$$

Y esto es para todo $|\Pi| < \delta$. De forma similar se puede concluir que,

$$L(f,\Pi) > L(f,\overline{\Pi}) - \varepsilon$$

para todo $|\Pi| < \delta$. Sea $|\Pi| < \delta$ y sea $\underline{C}$ un representante cualquiera de Π, entonces,

$$U(f,\overline{\Pi}) - 2\varepsilon \leq L(f,\overline{\Pi}) - \varepsilon < L(f,\Pi) \leq S(f,\Pi,\underline{C}) \leq U(f,\Pi) < U(f,\overline{\Pi}) + \varepsilon \leq L(f,\overline{\Pi}) + 2\varepsilon$$

Digamos que $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f) = I$, luego por la desigualdad anterior, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ talque si $|\Pi| < \delta$ y para cualquier representante $\underline{C}$, se tiene que,

$$I - 2\varepsilon \leq S(f,\Pi,\underline{C}) \leq I + 2\varepsilon$$

O dicho de otra forma, el siguiente límite existe y tiene valor

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S(f,\Pi,\underline{C}) = I$$

Por lo tanto, f es R-integrable y

$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$$

Probando el teorema. ■

Observación 1.6. En la demostración anterior no usamos el representante, solo basta con la desigualdad de las sumas de Riemann con la suma superior e inferior. Por lo que el límite es independiente del representante.

Corolario 1.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces es R-integrable.*

Dem. Para probar que f es R-integrable, debemos probar que $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$ y para ello usarmos la condición (d) del lema 1.1. Notemos que f es acotada y alcanza su máximo y mínimo al ser continua en un conjunto compacto. Ahora, usaremos el siguiente resultado:

Teorema. *Si $f : K \to \mathbb{R}$ es una función continua en K compacto, entonces f es uniformemente continua.*

Entonces f es uniformemente continua, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $\delta > 0$ talque si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, supongamos que

$$\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

para todo intervalo $I \subseteq [a, b]$ de largo menor a δ. Luego para $\varepsilon > 0$ podemos tomar una partición talque todos sus intervalos tienen largo menor a $\delta > 0$ de forma que,

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

Por lo tanto, $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$ y por lo que f es R-integrable. ■

Corolario 1.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada con una cantidad finita de discontinuidades, entonces f es R-integrable.*

No demostraremos el corolario por el momento. Aunque se puede pensar en que si f es discontinua en un punto x_0 entonces es continua en $[a, x_0), (x_0, b]$ y se cumple que es R-integrale y además,

$$\int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Es decir, podemos integrar con límites donde f no está definido y la suma de las integrales es la integral de sobre todo $[a, b]$. Luego aplicando una recursión finita llegamos a que f es R-integtable.

1.2. Caracterización de la Integrabilidad

Sabemos que algunos tipos de funciones son Riemann-integrables por ejemplo, las monótonas, las constantes, las continuas, entre otras. Pero existen muchas funciones que no cumplen estas condiciones y si son R-integrables, por lo que daremos un resultado para saber si es R-integrable, pero antes necesitamos algunas construcciones.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función R-integrable, luego es acotada, consideremos el conjunto de los puntos de $[a, b]$ donde f es discontinua,

$$\mathcal{D} := \{x \in [a, b] : f \text{ discontinua en } x\}$$

Por el corolario 1.2 si $\mathcal{D}$ es finito entonces f es R-integrable, este resultado lO vamos a generalizar.

Definición 1.4. (Oscilación de un Punto) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Sean $x \in I \subseteq [a, b]$ y la oscilación de f en I por,*

$$\omega(f, I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x)$$

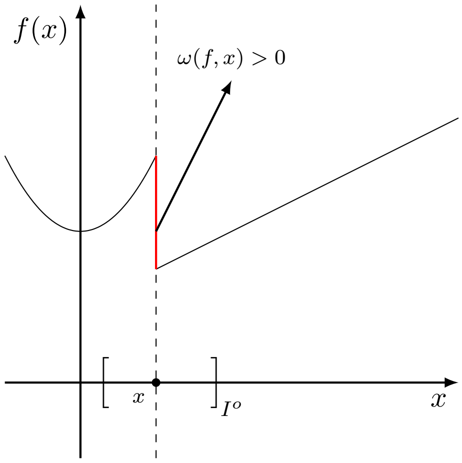
Definimos la oscilación de un punto $x \in [a, b]$ *por,*

$$\omega(f, x) := \lim_{\substack{x \in I^o \\ |I| \to 0}} \omega(f, I)$$

donde $|I|$ *es el largo del intervalo y* I^o *es el interior del intervalo.*

Observación 1.7. Si f es una función acotada entonces la oscilación de un intervalo I está bien definido al ser f acotado, luego también lo está un punto.

Observación 1.8. Con respecto a la oscilación de un punto debemos entender que estamos tomando los intervalos I talque $x \in I^o$ ya que nos interesa un entorno de x, (puede pasar que si x está en un " extremo "no esté definido la función), donde $|I| \to 0$ para acercanos a x.



Volvamos a la función f R-integrable, a partir de la oscilación de punto podemos decir que,

$$\mathcal{D} = \{x \in [a, b] : \omega(f, x) > 0\}$$

Y esto es claro observando la figura anterior. En general, si $\omega(f, x) > 0$ entonces el supremo e ínfimo sobre un intervalo I nunca coinciden, por tanto hay una discontinuidad, por otro lado, si f es discontinua en un punto x_0 entonces necesariamente debe haber una separición, es decir, $\omega(f, x) > 0$.

Nota 1.2. Sea I un intervalo, diremos que tiene medida $|I|$ donde,

$$|I| = \sup_{x \in I} I - \inf_{x \in I} I$$

Más adelante entraremos en detalle al concepto de medida.

Separemos las discontinuidades, sea $\eta > 0$ definimos las discontinuidades con oscilación mayor o igual a η por,

$$\mathcal{D}_\eta := \{x \in [a, b] : w(f, x) \geq \eta\}$$

En particular a $\mathcal{D}_\eta$ podemos encerrarlo en una unión numerable de intervalos cerrados donde la suma de los intervalos es tan pequeña como queramos. Probemos el hecho. Sea $\varepsilon > 0$, consideremos f R-integrable, luego existe $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ partición talque,

$$U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < \varepsilon$$

Sea $x \in \mathcal{D}_\eta$ y sea j^* talque $x \in [x_{j^*-1}, x_{j^*}]$ (este j^* existe por construcción). Luego,

$$\begin{aligned} \eta\,(x_{j^*} - x_{j^*-1}) &\leq \omega(f,x)(x_{j^*} - x_{j^*-1}) \\ &\leq (M_{j^*} - M_{j^*-1})\,(x_{j^*} - x_{j^*-1}) \\ &\leq U(f,\Pi) - L(f,\Pi) < \varepsilon \end{aligned}$$

Entonces $x_{j^*} - x_{j^*-1} < \frac{\varepsilon}{\eta}$, luego el largo de un intervalo dada de una partición es tan pequeño como queramos, es más, sea el conjunto,

$$D_\eta := \{i = 1, \ldots, n : [x_{i-1}, x_i] \cap \mathcal{D}_\eta \neq \emptyset\}$$

El conjunto de los i donde el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ contiene una discontinuidad con oscilación mayor o igual a η. Luego se cumple,

$$\eta \sum_{i \in D_\eta} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i \in D_\eta} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq U(f,\Pi) - L(f,\Pi) < \varepsilon$$

Entonces,

$$\sum_{i \in D_\eta} (x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{\eta}$$

Es decir, a partir de una partición podemos encontrar intervalos de forma que la suma de sus largos sea tan pequeño como queramos. O dicho de otra forma, existen $I_1, \ldots, I_N \subseteq [a,b]$ intervalos cerrados tales que,

- $\mathcal{D}_\eta \subseteq \bigcup_{i=1}^N I_i$
- $\sum_{i=1}^n |I_i| < \frac{\varepsilon}{\eta}$

Mejorar dibujo

Concluyendo la afirmación, ahora si $\mathcal{D}_\eta$ puede ser cubierto por intervalos tan pequeños como queramos, podemos ignorar cada punto de discontinuidad, es decir, se puede despreciar $\mathcal{D}_\eta$.

Definición 1.5. (Despreciable) *Sea $E \subset \mathbb{R}$. Decimos que E es despreciable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de intervalos abiertos tales que,*

(a) $E \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n$

(b) $\sum_{n=1}^\infty |I_n| < \varepsilon$

Prodriamos suponer que $\mathcal{D}_\eta$ es un conjunto despreciable pero la definición pide que los intervalos sean abiertos y $\mathcal{D}_\eta$ se cumple para las condiciones sobre cerrados. Para arreglar esto necesitamos estudiar el siguiente resultado.

Proposición 1.1. *Se satisfacen las siguientes afirmaciones,*

(a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrable, entonces para todo $\eta > 0$, el conjunto $\mathcal{D}_\eta$ es despreciable.

(b) Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ entonces E es despreciable si y sólo si existe una colección $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de intervalos cerrados que satisfacen las condiciones de despreciables.

(c) Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $\{x\}$ es despreciable.

Dem.

(a) Sea f R-integrable, por la observación anterior para $\varepsilon > 0$ y para $\eta > 0$ fijo existen intervalos $I_1, \ldots, I_N$ cerrados tales que,

- $\mathcal{D}_\eta \subseteq \bigcup_{i=1}^N I_i$.
- $\sum_{i=1}^N |I_i| < \frac{\varepsilon}{2}$

(La suma de intervalos sabemos que es menor a ε/η, pero escogemos $\varepsilon \cdot \eta$ para eliminar η). Digamos que $I_i = [a_i, b_i]$, sea la colección de intervalos abiertos $\{I_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ dada por,

$$I_i' := \begin{cases} \left(a_i - \frac{\varepsilon}{4N}, b_i + \frac{\varepsilon}{4N}\right), & i = 1, \ldots, N \\ \emptyset, & i > N \end{cases}$$

Luego

- $\mathcal{D}_\eta \subseteq \bigcup_{i=1}^N I_i \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty I_i'$.
- $\sum_{i=1}^\infty |I_i'| = \sum_{i=1}^N |I_i'| = \sum_{i=1}^N |I_i| + \frac{\varepsilon}{2N} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Es decir, $\mathcal{D}_\eta$ es despreciable para todo $\eta > 0$.

(b) Sea E despreciable, sea $\varepsilon > 0$, luego existe una colección de intervalos abiertos $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

- $E \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty I_i$
- $\sum_{i=1}^\infty |I_i| < \varepsilon$

Sea la colección de intervalos cerrados $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde $F_i := \overline{I}_i$, entonces es claro que

- $E \bigcup_{i\geq 1} I_i \subseteq \bigcup_{i\geq 1} F_i$
- $\sum_{i\geq 1} |F_i| = \sum_{i\geq 1} |I_i| < \varepsilon$

Encontrando una colección de intervalos cerrado que satisface las condiciones de despreciable.

Supongamos ahora que $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección de intervalos cerrados que satifacen las condiciones de despreciable, probemos que E es despreciable. Para ello usaremos el mismo truco que (a), definimos I_i' una colección de abiertos por,

$$I_i' := \left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, b_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}\right)$$

Podemos ver que I_i' es siempre abierto para todo i. Luego es claro que,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty I_i'$$

Y que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I'_i| = \sum_{i \geq 1} \left(|I_i| + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por lo tanto E es despreciable.

(c) Sea $x \in \mathbb{R}$, para ver que $\{x\}$ es despreciable, basta considerar para $\varepsilon > 0$ la colección de intervalos abiertos $\{I_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, donde

$$I_i = \begin{cases} (x - \varepsilon, x + \varepsilon), & i = 1 \\ \emptyset, & i \neq 1 \end{cases}$$

Entonces es evidente que

- $\{x\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

- $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = 2\varepsilon$

Por lo tanto $\{x\}$ es despreciable.

■

Nuestro objetivo ahora sera probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es R-integrable, entonces el conjunto $\mathcal{D}$ es despreciable, para ello necesitamos algunos resultados.

Lema 1.2. *Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección de conjuntos despreciables entonces,*

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

es despreciable.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, entonces con respecto a E_n existe una colección de intervalos abiertos $\{I_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que,

- $E_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^n$
- $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i^n| < \varepsilon / 2^n$

Consideremos la colección $\{I_i^n\}_{i,n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abiertos numerable (ya que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable), luego se cumple,

- $E \subseteq \bigcup_{i,n \geq 1} I_i^n$
- $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i \geq 1} |I_i^n| \right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$

Por lo tanto, E es despreciable. ■

Nota 1.3. Recordemos que un conjuntos es despreciable si para $\varepsilon > 0$ existe un conjuntos numerable de intervalosa abiertos que lo contenga y que su suma sea menor a ε. Perfectamente podemos tener la colección $\{I_{i,j,p}\}$ con $i, j, p \in \mathbb{N}$ que es numerable.

Lema 1.3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ R-integrable, entonces $\mathcal{D}$ es despreciable.*

Dem. Sea $\eta > 0$, luego $\mathcal{D}_\eta$ es despreciable, notemos que,

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\eta>0} \mathcal{D}_\eta$$

Y en efecto, si $x \in \mathcal{D}$, entonces $\omega(f,x) > 0$ luego $\omega(f,x) \geq \delta$ para algún $\delta > 0$, por lo que es claro que $x \in \bigcup_{\eta>0} \mathcal{D}_\eta$. Para la otra inclusión basta ver que si $x \in \bigcup_{\eta>0} \mathcal{D}_\eta$, entonces $\omega(f,x) \geq \eta > 0$, luego $x \in \mathcal{D}$.

Usaremos el lema 1.2 pero necesitamos una unión enumerable, notemos que,

$$\mathcal{D} = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{D}_{1/k}$$

Para verlo es similar a la prueba de la igualdad anterior. Ahora si $\mathcal{D}_{1/k}$ es despreciable, por lo tanto $\mathcal{D}$ es despreciable. ■

Tenemos que una función R-integrable tiene conjunto de discontinuidades despreciable, pero lo más impresionante que esto es una equivalencia, es decir, una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada que tiene conjunto $\mathcal{D}$ despreciable, es R-integrable. El siguiente teorema resume y prueba esta afirmación.

Teorema 1.2. (Caracterización de la Integral) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotado, entonces f es R-integrable si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f es despreciable.*

Dem. Si f es R-integrable, entonces por el lema anterior, $\mathcal{D}$ es despreciable por lo que solo debemos probar la otra dirección.

Probemos que $\mathcal{D}$ si es despreciable, entonces f es R-integrable. Sea $\varepsilon > 0$, vamos a encontrar una partición Π talque,

$$U(f,\Pi) - L(f,\Pi) < \varepsilon$$

Sea $\eta > 0$, como $\mathcal{D}$ es despreciable entonces el subconjunto $\mathcal{D}_\eta$ de este es despreciable, luego existe una colección de intervalos abiertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que ,

- $\mathcal{D}_\eta \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$

Afirmación. *El conjunto $\mathcal{D}_\eta$ es compacto.*

Luego, existe una cubierta abierta finita de forma que,

- $\mathcal{D}_\eta \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} I_n$.
- $\sum_{n=1}^{N} |I_n| < \varepsilon$

Sea Π la partición obtenida a partir de los extremos de los I_i, (notar que está bien definida Π). Sea $D_\eta := \{i = 1, \ldots, k : [x_{i-1}, x_i] \cap \mathcal{D}_\eta \neq \emptyset\}$ para algún k, luego,

$$U(f, \Pi) - L(f, \Pi) = \sum_{i \in D_\eta} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i \notin D_\eta} (M_i - m_i)\Delta x_i$$

Podemos ver que,

$$\sum_{i \in D_\eta} (M_i - m_i)\Delta x_i \leq 2 \sup |f| \cdot \varepsilon$$

Para el otro sumando, si $x \in \bigcup_{i \notin D_\eta} [x_{i-1}, x_i]$ entonces $\omega(f, x) < \eta$, luego existe $\delta_x > 0$ talque,

$$\omega(f, (x - \delta_x, x + \delta_x)) < \eta$$

Por compacticidad tenemos que,

$$\omega(f, (x - \delta, x + \delta)) < \eta$$

para todo $x \in \bigcup_{i \in D_\eta} [x_{i-1}, x_i]$. Podemos asumir que $|\Pi| < \delta$ (en caso contrario refinamos Π de tal forma que lo sea) luego,

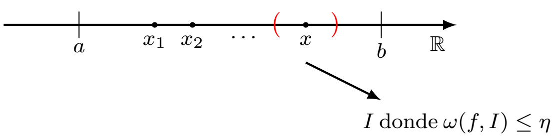
$$\sum_{i \notin D_\eta} (M_i - m_i)\Delta x_i < \eta \sum_{i \notin D_\eta} \Delta x_i \leq \eta(b - a)$$

Y entonces,

$$U(f, \Pi) - L(f, \Pi) < 2 \sup |f| \cdot \varepsilon + \eta(b - a)$$

Si ε, η son arbitrarios, podemos tomar tan pequeño como queramos, de forma que podemos concluir que f es R-integrable. ■

Dem. (Afirmación) Recordemos que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto si es acotado y cerrado, claramente $\mathcal{D}_\eta$ es acotado dado que $\mathcal{D}_\eta \subseteq [a, b]$. Falta ver que es cerrado, sea $\{x_n\} \subseteq \mathcal{D}_\eta$ talque $x_n \to x$, supongamos que $x \notin \mathcal{D}_\eta$ entonces $\omega(f, x) < \eta$ y donde $\omega(f, x_n) \geq \eta$ para todo $n \geq 1$. En dibujo,



Luego existe un $\delta > 0$ talque,

$$\omega(f, [x - \delta, x + \delta]) < \eta$$

Y entonces $\omega(f, y) < \eta$ para todo $y \in [x - \delta/2, x + \delta/2]$, entonces,

$$[x - \delta/2, x + \delta/2] \cap \mathcal{D}_\eta = \emptyset$$

Pero esto es imposible ya que en algún n natural se tiene que $x_n \in [x - \delta/2, x + \delta/2]$, por lo tanto $x \in \mathcal{D}_\eta$, y por lo tanto $\mathcal{D}_\eta$ es acotado y cerrado, por lo que es compacto. ■

Ejemplo 1.2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sabemos que f no es integrable, comprobémoslo si estudiamos con respecto a $\mathcal{D}$, podemos ver que $\mathcal{D} = [0,1]$, ya que f no es continua en ningún punto, veamos que no es despreciable. Supongamos que si, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección de intervalos abiertos $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

- $[0,1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$

pero si tomamos $\varepsilon = 1$ se puede ver que para toda colección donde la unión contiene a $[0,1]$, se tiene que la suma de estos intervalos es mayor a 1, es decir,

$$\sum_{i\geq 1} |I_i| \geq 1$$

Por lo tanto $[0,1]$ no puede ser despreciable. $\Subset$

Ejemplo 1.3. (Función Popcorn) Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \text{ fracción irreducible} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, x = 0 \end{cases}$$

Notemos que $\mathcal{D} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, es decir, f es discontinua en los racionales y continua en los irracionales.

- **Continua en los irracionales.** Consideremos el siguiente resultado,

  Lema $\star$. *Sea $x \in [0,1]$ irracional, entonces para $N \in \mathbb{N}$ fijo existe $\delta_N > 0$ talque para todo racional en $(x - \delta_N, x + \delta_N)$ se tiene que el denominador es mayor a N.*

  Sea $x_0 \in [0,1]$ irracional, sea $\varepsilon > 0$ luego existe $N > \frac{1}{\varepsilon}$, por el lema anterior existe $\delta_N > 0$ talque si el racional $x = \frac{x_1}{x_2} \in (x_0 - \delta_N, x_0 + \delta_N)$ entonces $x_2 > N$ luego si $|x - x_0| < \delta_N$ entonces,

  $$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x_2}\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

  Si $x \in (x_0 - \delta_N, x_0 + \delta_N)$ irracional, es claro que,

  $$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| < \varepsilon$$

  Por tanto f es continua en los irracionales.

- **Discontinua en los racionales.** Sea $x_0 = p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Sea la sucesión $\{x_n\} \subseteq [0,1]$ dada por:

$$x_n := x_0 + \frac{i}{n}$$

donde i es irracional de tal forma que x_n es irracional, notemos que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq 1/q = f(x_0)$$

Por lo que no es continua en los racionales. Si $x_0 = 0$ se argumenta de forma similar.

De esta forma $\mathcal{D} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, veamos que es despreciable, notemos que,

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{Q} = \bigcup_{n\geq 1} \{q_n\}$$

Si $\{q_n\}$ es despreciable, entonces $\mathbb{Q}$ lo es y por lo tanto, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ es despreciable, de forma que f es R-integrable. $\Subset$

Observación 1.9. Tenemos que,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$$

Pero $\mathbb{R}$ no es despreciable y tiene sentido ya que en la parte derecha la unión no es numerable.

Dem. (Lema $\star$) Sea $x \in [0,1]$, sea $N \in \mathbb{N}$ fijo, existe un $1 \leq k < N$ talque,

$$x \in \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$$

Existe un $\varepsilon_N > 0$ talque,

$$(x - \varepsilon_N, x + \varepsilon_N) \subseteq \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right)$$

En particular, si $y \in (x - \varepsilon_N, x + \varepsilon_N)$ es racional, entonces y no puede tener denominador N pero puede tener denominador $N-1, N-2, \ldots, 1$. Para arreglar esto escogemos ε_{N-1} igual que antes con respecto a $N-1$, luego si $y \in (x - \varepsilon_{N-1}, x + \varepsilon_{N-1})$ entonces y no puede tener denominador $N-1$, recursivamente generamos ε_k con $k = 1, \ldots, N$. Sea,

$$\varepsilon := \min_{1\leq k\leq N} \{\varepsilon_k\}$$

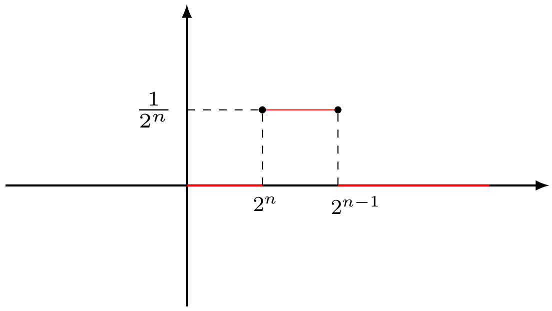
Entonces si $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ racional, este no puede tener denominador $1, 2, \ldots, N$, por tanto tiene denominador mayor a N como queriamos probar. ■

1.3. Limitaciones de Riemann

La integral de Riemann resuelve muchas funciones como las continuas y monótonas, pero con respecto algunas funciones no funciona bien. Por ejemplo, la integral de Riemann no se comporta bien con el límite. Sea la función $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$f_n(x) := \begin{cases} 2^n, & x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y sea la función $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Con respecto a f_n vemos que,



Notemos que f_n es R-integrable al tener solo dos discontinuidades y claramente f lo es. Para f_n observamos que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$$

para todo $x \in [0,1]$. También que,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{2^n}{2^n} = 1$$

Pero ocurre que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 \int_0^1 f(x)dx$$

Sin embargo, si f_n es R-integrable y f_n converge uniformemente a f entonces,

i) f es R-integrable.

ii) Y además,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)$$

Arreglando el problema del límite. $\Subset$

Ejemplo 1.4. Sea $\{q_n\}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se tiene que f_n converge puntualmente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donde,

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Podemos ver que f_n es R-integrable al tener conjuntos discontinuidades despreciable, pero f no es R-integrable al tener integral superior e inferior distintos. También se puede ver por discontinuidades ya que f es discontinua en todo $\mathbb{R}$. $\Subset$

Ejemplo 1.5. Sea $\mathcal{R} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es R-integrable}\}$. Se define

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx, \; f \in \mathcal{R}$$

Que es casi una norma y $(\mathcal{R}, \|f\|_1)$ no es completo por el ejemplo 1.4. $\Subset$

2. Espacio de Medida

Ya sabemos como definir y trabajar la integral de Riemann además de sus limitaciones, ahora vamos a estudiar la teoría de medida que consiste en medir objetos matemáticos, vamos a construir el espacio de medida por partes, hablaremos de funciones medibles y revisaremos algunos conceptos con el objetivo de poder definir la integral de Lebesgue ya que esta nos permite estudiar funciones más complicadas.

Recordemos que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función, Π es una partición de $[a, b]$ y $\underline{\mathcal{C}}$ un representante de Π se define la suma de Riemann por,

$$S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{C}_i)\Delta x_i$$

donde Δx_i es el tamaño del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y se dice que f es R-integrable si existe el límite,

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) = \int_a^b f(x)dx$$

En un caso más general, sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente, entonces poemos definir,

$$S_g(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) := \sum_{i=1}^{n} f(\mathcal{C}_i)\Delta g(x_i)$$

donde $\Delta g(x_i)$ es otra noción de tamaño de $[x_{i-1}, x_i]$, (Integral de Riemann-Sheljes). Queremos lidiar con funciones más complicadas y para eso necesitamos extender la noción de medida.

Objetivo. Sea $\Omega \neq \emptyset$ cualquiera, queremos encontrar una buena noción de medida para el subconjunto de Ω, es decir, queremos una función de la forma,

$$\begin{aligned} \mu : 2^{\Omega} &\to [0, \infty] \\ A &\mapsto \mu(A) \text{ tamaño de } A \end{aligned}$$

De forma intuitiva podemos pensar en $\mu(A) = |A|$ que funciona bien en intervalos, pero en conjuntos que no son intervalos no funciona tan bien. Para empezar a construir empezemos por un conjunto despreciable.

Recordemos que un conjuneto $E \subset \mathbb{R}$ es despreciable si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de abiertos tales que,

- $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$

A partir de esto podemos pensar en la medida de un conjunto por, tomar intervalos que cubren al conjuntos y tomar la suma de sus medidad bajo $|\cdot|$, pero como pueden haber más de una cubierta se considera el ínfimo de las sumas de todas las cubiertas del conjuntos, de aquí definimos la **Medida exterior de Lebesgue** por,

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ colección de intervalos abiertos} \right\}$$

Observación 2.1. Intuitivamente la medida de un conjunto despreciable debe ser nula, es más, debiesen ser equivalentes, lo cual se cumple en la medida exterior de Lebesgue, si $E \subseteq \mathbb{R}$ es despreciable, es claro que $\lambda^*(E) = 0$ y por el otro lado, si E es un conjunto cualquier talque $\lambda^*(E) = 0$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una colección de intervalos abiertos tales que,

- $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$

Es decir, E es despreciable.

Observación 2.2. El valor $\lambda^*(E)$ está bien definida todo $E \subseteq \mathbb{R}$. Es decir, es una función de la forma,

$$\lambda^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$$

que funciona bien.

Lema 2.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Entonces,*

$$\lambda^*(I) = |I|$$

Dem. Vamos a demostrar primero para compactos, luego generalizaremos y finalmente estudiaremos el caso infinito.

- **Sobre compactos.** Supongamos que I es compacto. Es decir, $I = [a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, sea el intervalo abierto,

  $$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

  Notemos que cubre a I por lo que ,

  $$\lambda^*(I) \leq \left|\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right| = b - a + \varepsilon$$

  Esto se puede hacer para todo $\varepsilon > 0$ por lo tanto,

  $$\lambda^*(I) \leq b - a$$

  Nos falta demostrar la otra desigualdad. Sea $\varepsilon > 0$, luego existe una colección $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos que cubre a I tales que,

  $$\sum_{n=1}^{\infty} |I_i| - \varepsilon \leq \lambda^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_i|$$

  Si $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} |I_n|$ con I compacto, se tiene por compacidad que,

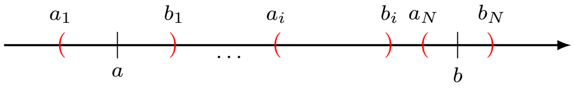
  $$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} I_i$$

  Sin perdida de generalidad asumamos que,

i) Si $i_1 \neq i_2$, con $i_1, i_2 \in \{1, \dots, N\}$, entonces

$$I_{i_1} \not\subseteq I_{i_2} \quad \text{y} \quad I_{i_2} \not\subseteq I_{i_1}$$

ii) Y que los intervalos $\{I_i\}_{i=1}^N$ están ordenados,



Luego se tiene que,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(I) + \varepsilon &\geq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \\
&\geq \sum_{i=1}^{N} |I_i| \\
&= b_N - a_N + b_{N-1} - a_{N-1} + \cdots + b_2 - a_2 + b_1 - a_1 \\
&= b_N + (b_{N-1} - a_N) + \cdots + (b_1 - a_2) - a_1 \\
&\geq b_N - a_1 \geq b - a
\end{aligned}$$

Para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto,

$$\lambda^*(I) \geq b - a$$

Probando que $\lambda^*(I) = b - a$ para todo I compacto para todo $-\infty < a < b < \infty$.

- **Generalización.** Probemos para el intervalo abierto, notemos que si $A \subseteq B$ (A, B intervalos cerrado), entonces $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$. Y en efecto, si $[a, b] \subseteq [c, d]$, se tiene que necesariamente $c \leq a, b \leq d$, aplicando la medida se obtiene que,

$$\lambda^*(A) = b - a \leq d - c = \lambda^*(B)$$

Luego si $I = (a, b)$ con $-\infty < a < b < \infty$, entonces,

$$[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subseteq (a, b) \subseteq [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$$

Aplicando la definición se puede observar que,

$$b - a - 2\varepsilon \leq \lambda^*(a, b) \leq b - a + 2\varepsilon$$

Luego se concluye que,

$$\lambda^*(a, b) = |(a, b)| = b - a$$

Y para el caso $(a, b], [a, b)$ se procede de forma análoga.

- **Caso infinito** Si I es infinita ($|I| = \infty$), entonces para todo $M > 0$, existen $a_M < b_M$ tales que,

i) $[a_M, b_M] \subseteq I$.

ii) $b_M - a_M > M$

Luego $\lambda^*(I) \geq M$ y esto es para todo $M > 0$, lo que implica que $\lambda^*(I) = \infty$.

Probando el lema. ■

Vamos a añadir más condiciones para nuestra busqueda de la medida, queremos una medida $\lambda : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ que cumpla,

(a) $\lambda(I) = |I|$ para todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$

(b) Si $A \subseteq B$ entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

(c) Si $A \cap B = \emptyset$ entonces queremos que,

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

De hecho vamos a pedir algo más general, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ son disjuntos a pares entonces queremos que,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

(d) Que se cumpla $\lambda(A) = \lambda(A + x)$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ donde,

$$A + x := \{a + x : a \in A\}$$

Es decir, la traslación del conjunto no afecte a la medida.

Desafortunadamente no existe tal medida y esto se le conoce como teorema de Ulom que más adelante mencionaremos.

Ejemplo 2.1. Si tomamos $\lambda = \lambda^*$ se cumple todas las condiciones menos la conidición (c). La primera es por lema, la segunda se cumple por definición ya que si tenemos $A \subseteq B$, entonces si $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta de intervalos abiertos de B, entonces se tiene que,

$$\lambda^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

Pero además $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es una cubierta de A luego,

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

Para toda cubierta de B. Por tanto,

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$$

Probemos la condición (d), sea $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de intervalos abiertos que cubren a A, notemos que $\{I_n + x\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de intervalos abiertos tales que $|I_n| = |I_n + x|$ y,

$$A + x \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n + x$$

Luego,

$$\lambda(A + x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n + x| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

Por tanto $\lambda(A + x) \leq \lambda(A)$, usando un argumento similar se prueba la otra desigualdad, probando que $\lambda(A + x) = \lambda(A)$. $\Subset$

Observación 2.3. Con respecto a λ^*, la condición (c) no se cumple pero podemos restringir el dominio de forma que se cumpla, esto significa que no todo conjunto es medible por una medida.

2.1. Premedida y Medida Exterior Inducida

A partir de lo anterior, necesitamos una base para poder construir la medida. Usaremos como motivación la medida exterior de Lebesgue para construir una generalización de la medida exterior.

Definición 2.1. (Pavimento, Premedida y Medida Exterior) *Sea Ω un conjunto no vacío,*

(a) Decimos que $\mathcal{C} \subseteq 2^{\Omega}$ es un pavimento si $\emptyset \in \mathcal{C}$.

(b) Sea $\mathcal{C}$ un pavimento de Ω. Decimos que,

$$\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$$

es una premedida si $\tau(\emptyset) = 0$.

(c) Para τ premedida sobre el pavimento $\mathcal{C}$ definimos la medida exterior inducida por el pavimento $\mathcal{C}$ y la premedida τ como,

$$\mu^* : 2^{\Omega} \to [0, \infty]$$

talque si $A \subseteq \Omega$, entonces,

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) : \{C_n\} \subseteq \mathcal{C}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\}$$

con la convención,

$$\inf_{\emptyset} = \infty$$

Ejemplo 2.2. Sea $\Omega = \mathbb{R}$, sea $\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \{(a, b) : a < b\}$ un pavimento y sea la premedida asociada a $\mathcal{C}$ dada por,

$$\tau(\emptyset) = 0, \quad \tau(I) = |I|$$

Entonces la medida exterior dada a partir de la premedida es λ^* que es la medida exterior de Lebesgue. $\Subset$

Observación 2.4. Si $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} C_n$, entonces,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n\geq 1} \tau(C_n)$$

y en efecto, al ser $\mu^*(A)$ un ínfimo es claro que es menor o igual a cualquier suma numerable.

Observación 2.5. Si consideramos la medida exterior de Lebesgue inducida por τ, tenemos que,

$$\lambda^*(I) = |I| =: \tau(I)$$

Cosa que hemos demostrado. Pero esto no se cumple en general, puede pasar que,

$$\mu^*(C) \neq \tau(C)$$

para algún $C \in \mathcal{C}$.

Ejemplo 2.3. Sea $\Omega = \{a, b\}$, sea el pavimento $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \Omega\}$ y sea la premedida,

$$\tau(\emptyset) = 0, \quad \tau(\{a\}) = 2, \quad \tau(\Omega) = 1$$

Luego se cumple que $\mu^*(\{a\}) = 1$, y en efecto, vemos que $\{a\}$ tiene pocas cubiertas que influyen en la medida y una finita cantidad de sumas de estas, luego es fácil ver que la menor suma es 1, por tanto,

$$\mu^*(\{a\}) \neq \tau(\{a\})$$

Sin embargo se cumple que,

$$\mu^*(C) \leq \tau(C)$$

para todo $C \in \mathcal{C}$. Se puede comprobar tomando la cubierta trivial $(C, \emptyset, \emptyset, \dots)$, luego

$$\mu^*(C) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n) = \tau(C)$$

$\Subset$

Proposición 2.1. *Sea Ω un conjunto no vacío, sea $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$ un pavimento. Sea τ una premedida sobre $\mathcal{C}$ y sea μ^* la medida exterior inducida. Luego se cumple,*

(a) ***Nuladidad.*** $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(b) ***Monotonía*** *Si* $A \subseteq B$*, entonces* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

(c) σ***-subaditividad.***

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Dem.

(a) Por el ejemplo anterior se tiene que,

$$0 \leq \mu^*(\emptyset) \leq \tau(\emptyset) = 0$$

Luego $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(b) Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cubierta de B por lo que,

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

Luego también cubre a A, es decir,

$$A \subseteq \bigcup_{i=n}^{\infty} C_n$$

Por definición de medida exterior se tiene que,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(C_n)$$

Para toda cubierta de B, por lo tanto $\mu^*(A)$ es cota inferior, de este modo,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

(c) Sea $\varepsilon > 0$, para cada $n \geq 1$ sea el cubrimiento de A_n $\{C_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ talque,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(C_{n,k}) \leq \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

Por la caracterización del supremo, luego se cumple,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n,k}$$

Y por tanto,

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_j\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\tau(C_{n,k}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)+\varepsilon\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es tan pequeño como queramos se obtiene lo pedido.

Demostrando la proposición ■

2.2. Medida Exterior

La proposición anterior motiva a definir de forma más general el concepto de medida exterior sin una premedida.

Definición 2.2. (Medida exterior) *Sea Ω un conjunto no vacío. Decimos que,*

$$\mu^* : 2^{\Omega} \to [0,\infty]$$

es una medida exterior si

(a) ***Nuladidad.*** *$\mu^*(\emptyset) = 0$.*

(b) ***Monotonía.*** *Si $A \subseteq B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*

(c) ***σ-subaditividad.***

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$$

Observación 2.6. Toda medida exterior inducida es una medida exterior.

Ejemplo 2.4. Sean $\delta, \alpha > 0$ y sea $\Omega = \mathbb{R}$. Definimos

- El pavimento $\mathcal{C}_\delta := \{\emptyset\} \cup \{I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervalo abierto talque } |I| < \delta\}$.
- La premedida $\tau_\alpha(\emptyset) := 0, \tau_\alpha(I) := |I|^\alpha$.
- Y $\mu^*_{\alpha,\delta}$ la medida exterior inducida por $\mathcal{C}_\delta, \tau_\alpha$.

Se cumple la monotonía sobre los pavimentos, en particular, si $\delta_1 < \delta_2$, entonces $\mathcal{C}_{\delta_1} \subseteq \mathcal{C}_{\delta_2}$, además, para $\alpha > 0, A \subseteq \mathbb{R}$ fijos se tiene que,

$$\mu^*_{\alpha,\delta_1}(A) \geq \mu^*_{\alpha,\delta_2}(A)$$

Y en efecto, sabemos que,

$$\mu^*_{\alpha,\delta_2}(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\tau(C_n) : \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_{\delta_2}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right\}$$

Sea $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_{\delta_1}$ una cubierta de A, luego A está cubierto por una colección de $\mathcal{C}_{\delta_2}$, por lo que,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(C_n) \geq \mu^*_{\alpha,\delta_2}(A)$$

Para toda cubierta que cubre a A, por lo tanto μ^*_{α,δ_2} es cota inferior y se concluye la desigualdad antes mencionada,

$$\mu^*_{\alpha,\delta_1}(A) \geq \mu^*_{\alpha,\delta_2}(A)$$

A partir de la desigualdad de las medidas podemos definir la medida cuando $\delta \to 0^+$,

$$\mu^*_{\alpha}(A) := \lim_{\delta\to 0^+} \mu^*_{\alpha,\delta}(A)$$

Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$. Notemos que está bien definida ya que al tomar $\delta \to 0^+$, entonces $\mu^*_{\alpha,\delta}(A)$ crece hasta ser ∞ o se mantiene constante, en cualquier caso se tiene que,

$$\mu^*_{\alpha} : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$$

Veamos que es medida exterior.

(a) Si $A = \emptyset$ entonces

$$\mu^*_{\alpha}(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0^+} \mu^*_{\alpha,\delta}(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0^*} 0 = 0$$

(b) Si $A \subseteq B$, entonces para todo $\delta > 0$ se tiene que,

$$\mu^*_{\alpha,\delta}(B) - \mu^*_{\alpha,\delta}(A) \geq 0$$

tomando $\delta \to 0^+$ y sabiendo que cada término al tomar su límite existe (considerando también el ∞ como elemento), se tiene que,

$$\mu^*_{\alpha}(B) \geq \mu^*_{\alpha}(A)$$

(c) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$, luego,

$$\begin{aligned}\mu^*_{\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \lim_{\delta\to 0^+} \mu^*_{\alpha,\delta}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\\ &\leq \lim_{\delta\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{\alpha,\delta}(A_n)\end{aligned}$$

Tenemos dos casos, que la serie sea infinito o finito. Si es infinito no hay problema ya que,

$$\mu^*_{\alpha,\delta}(A) \leq \lim_{\delta\to 0^+} \mu^*_{\alpha,\delta}(A)$$

Luego la serie,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lim_{\delta\to 0^+} \mu^*_{\alpha,\delta}(A) = \infty$$

Entonces se cumple la σ-subaditividad. Si la serie fuera finito entonces converge uniformemente y luego podemos introducir el límite dentro de la serie, es decir,

$$\mu^*_{\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*_{\alpha}(A_n)$$

Probando que es medida exterior. $\Subset$

Observación 2.7. Con respecto a la definición de medida exterior, la condición (c) se puede hacer más fuerte de la siguiente forma, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección disjunta, entonces,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Aunque esto no es cierto en general, ni siquiera se cumple,

$$\mu^*(A \cup A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c)$$

Que de forma intuitiva debería cumplirse. El siguiente ejemplo demuestra este hecho.

Ejemplo 2.5. Sea $\Omega = \{a, b\}$, sea el pavimento $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \Omega\}$ y sea τ una premedida talque,

$$\tau(\emptyset) = 0, \quad \tau(\{a\}) = 2, \quad \tau(\Omega) = 1$$

Luego la medida exterior inducia cumple que,

$$\mu^*(\{a\}) = \mu^*(\{b\}) = \mu^*(\Omega) = 1$$

Por lo tanto,

$$\mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{a\}^c) \neq \mu^*(\{a\} \cup \{a\}^c)$$

Por otro lado, hay algunos conjuntos que cumplen la igualdad de la observación anterior, por lo que los vamos a estudiar de forma general.

Definición 2.3. **(μ^*-Medible)** *Sea Ω un conjunto no vacío y sea μ^* una medida exterior sobre 2^{Ω}. Decimos que $E \subseteq \Omega$ es μ^*-medible si,*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

para todo $A \subseteq \Omega$.

Nota 2.1. Que un conjunto sea μ^*-medible, significa que cualquier subconjunto de Ω puede ser descompuesto por E y por E^c manteniendo la medida. Además, si $B \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces,

$$\mu^*(B \cup B^c) = \mu^*(\Omega) = \mu^*(B) + \mu^*(B^c)$$

Observación 2.8.

- Un conjunto E es μ^*-medible si y sólo si su complemento es μ^*-medible. Esto se puede comprobar por definición.
- Siempre se cumple que,

  $$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

  Para cualquier conjunto $E \subseteq \Omega$. En efecto, basta con ver que,

  $$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

  y aplicando el tercer axioma de medida exterior se llega a la desigualdad.

Lema 2.2. *Sea* μ^* *una medida exterior definida en* 2^Ω *y sea* $E \subseteq \Omega$. *Si* $\mu^*(E) = 0$, *entonces* E *es* μ^**-medible.*

Dem. Por la observación anterior,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Para todo $A \subseteq \Omega$, por lo que solo debemos probar la otra desigualdad. Notemos que $A \cap E \subseteq E$ y luego,

$$\mu^*(A \cap E) \leq \mu^*(E) = 0$$

También se cumple que $A \cap E^c \subseteq A$, por lo que,

$$\mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$$

Por lo tanto, obtenemos que,

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$$

Es decir, E es μ^*-medible. ■

Lema 2.3. *Sea* μ^* *una medida exterior en* 2^Ω *y sean* $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ *conjuntos* μ^**-medibles. Entonces* $E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$ *son* μ^**-medibles.*

Dem. Probemos primero que $E_1 \cup E_2$ es μ^*-medible. Para A fijo tenemos que,

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*((A \cap E_1^c) \cap E_2) + \mu^*((A \cap E_1^c) \cap E_2^c) \end{aligned}$$

También se cumple que,

$$A \cap E_1^c \cap E_2^c = A \cap (E_1 \cup E_2)^c$$
$$(A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2) = A \cap (E_1 \cup E_2)$$

Luego sobre la medida exterior μ^* se cumple,

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) \leq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2)$$

Y concluomos que,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

Por lo tanto $E_1 \cup E_2$ es μ^*-medible. Ahora por la observación anterior, si E_1, E_2 son μ^*-medibles entonces también lo son E_1^c, E_2^c, luego $E_1^c \cup E_2^c$ es μ^*-medible. Luego $E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c))^c$ es μ^*-medible. ■

Observación 2.9. Ahora que la unión e intersección de dos conjuntos μ^*-medibles es otro conjunto μ^*-medible, entonces podemos concluir que la unión o intersección de finitos μ^*-medible es también μ^*-medible.

Corolario 2.1. *Sea μ^* medida exterior, sean $E_1, \ldots, E_n$ conjuntos μ^*-medible, entonces,*

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

es μ^*-medible.

Dem. Supongamos que la unión de $n-1$ medibles es medible, consideremos el conjunto,

$$A := \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$$

Tenemos que la unión $A \cup E_n$ es medible por el lema 2.2, luego E es μ^*-medible. ■

Lema 2.4. *Sea μ^* medida exterior. Sean $E_1, \ldots, E_n$ conjuntos μ^*-medibles disjuntos a pares. Entonces,*

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$$

para todo $A \subseteq \Omega$.

Dem. Vamos a probarlo por inducción. Sean E_1, E_2 conjuntos μ^*-medibles tales que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, luego,

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2)$$

Supongamos que se cumple para $m \leq n$. Sean $E_1, \ldots, E_{m+1}$ conjuntos μ^*-medibles disjuntas a pares. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m+1} E_i\right)\right) &= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i \cup E_{m+1}\right)\right) \\
&= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right)\right) + \mu^*\left(A \cap E_{m+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E_{m+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{m+1} \mu^*(A \cap E_i)
\end{aligned}$$

Probando por inducción el lema. ■

Observación 2.10. Si escogemos $A = \Omega$ entonces,

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i)$$

Y esta es la condición más fuerte que pedimos anteriormente, que se cumple sobre los μ^*-medibles. Ahora vamos a estudiar este conjunto y definiremos una estructura para la medida.

Ejemplo 2.6. Sea $\Omega = \{a, b\}$ donde $a \neq b$. Sea el pavimento,

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \Omega\}$$

Sea la premida τ talque,

$$\tau(\emptyset) = 0, \;\; \tau(\{a\}) = 2, \;\; \tau(\Omega) = 1$$

Sea μ^* la medida exterior inducida sobre 2^Ω, luego $\{b\}$ no es μ^*-medible ya que,

$$\mu^*(\Omega) = 1 \neq 2 = \mu^*(\Omega \cap \{b\}) + \mu^*(\Omega \cap \{b\}^c)$$

$\Subset$

Sea μ^* una medida exterior sobre 2^Ω, sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los conjuntos μ^*-medibles, en forma resumida sobre este conjunto se cumple que,

(a) $E \subseteq \Omega$ es μ^*-medible si y sólo si E^c lo es.

(b) Si $\mu^*(E) = 0$, entonces E es μ^*-medible.

(c) Sean $E_1, \ldots, E_n$ conjuntos μ^*-medibles, entonces $\bigcup_{i=1}^n E_n$ es μ^*-medible. Si además son disjuntos a pares, entonces,

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i)$$

Para todo $A \subseteq \Omega$.

Con respecto a la conidición (c) podemos tomar hacía el infinito, el siguiente teorema generaliza el comportamiento de $\mathcal{F}$.

Teorema 2.1. *Sea Ω un conjunto no vacío y sea μ^* medida exterior sobre 2^Ω. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los conjuntos μ^*-medibles, entonces,*

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) Si $E \in \mathcal{F}$, entonces $E^c \in \mathcal{F}$.

(c) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$$

Sea μ la función μ^* restringida en $\mathcal{F}$, entonces,

(d) $\mu(\emptyset) = 0$.

(e) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ tales que $E_1 \subseteq E_2$, entonces $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

(f) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ son disjuntos a pares, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Dem.

(a) Por definición de medida exterior $\mu^*(\emptyset) = 0$, luego $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) Si $E \subseteq \Omega$ es μ^*-medible, entonces por definición, E^c también lo es.

(c) Supongamos que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección disjunta a pares. Sea,

$$E := \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Sea $A \subseteq \Omega$ cualquier conjunto, definimos la unión de los primeros n E_i por,

$$F_n := \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

Claramente es μ^*-medible para todo $n \geq 1$ al ser una unión finita de μ^*-medibles. Luego,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c)$$

Como E_i son disjuntos a pares se tiene,

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap F_n^c)$$

Si $F_n \subseteq E$, entonces $E^c \subseteq F_n^c$, luego,

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Tomando $n \to \infty$ nos queda que,

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap E_c)$$

Y si $A \cap E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)$, entonces,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Concluyendo que,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Es decir, E es μ^*-medible y luego $E \in \mathcal{F}$. Supongamos ahora que $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ es cualquier colección de μ^*-medibles, definimos la colección $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por,

$$\begin{aligned} F_1 &: = E_1 \\ F_2 &: = E_2 \setminus E_1 \\ F_n &: = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Que es una colección de μ^*-medibles.

Afirmación. *La colección $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es disjunta a pares y además,*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

Dem. (Afirmación) Sean $m < n$, luego,

$$F_n \cap F_m = C \cap E_m^c \cap E_m = \emptyset$$

para algún conjunto C, siendo disjuntos a pares. Para la igualdad la inclusión $\supseteq$ es clara. Probemos la otra inclusión, sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ luego $x \in E_j$ para algún $j \geq 1$, digamos que j es el menor natural que contiene a x, si $x \in F_s$ para $s < j$ entonces j no es el menor natural talque E_j contiene a x siendo una contradicicón, luego $x \notin F_s$ para todo $s < j$, por otro lado, si $s > j$ entonces $x \in E_j^c$, también siendo imposible, por lo tanto, la única opción es que $x \in F_j$ la cual se cumple ya que $x \in E_j$ y $x \notin \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i$. $\blacksquare$

De la afirmación concluimos que,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$$

(d) Por definición de μ,

$$\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$$

(e) Sean $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, entonces,

$$\mu(E_1) = \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2) = \mu(E_2)$$

(f) Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una colección de medibles disjuntos a pares, luego,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\end{aligned}$$

Para la otra desigualdad se tiene que,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \\ &= \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$ concluimos que,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Probando el teorema. ■

2.3. Espacio Medible y Espacio de Medida

Del teorema 2.1 podemos definir dos estructuras importantes, la primera va a ser como el conjunto $\mathcal{F}$ de los μ^*-medibles y luego definiremos una función sobre $\mathcal{F}$ que se comporte como las tres últimas condiciones del teorema, que es la medida que tanto queriamos encontrar. Todo debido al comportamiento del conjunto $\mathcal{F}$.

Definición 2.4. (σ-álgebra) *Sea Ω un conjunto cualquiera. Decimos que $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ es un σ-álgebra si,* *(a)* $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(b) Si $E \in \mathcal{F}$*, entonces* $E^c \in \mathcal{F}$.

(c) Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$*, entonces,*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$$

Decimos que $(\Omega, \mathcal{F})$ *es un espacio medible. Si* $E \in \mathcal{F}$*, decimos que* E *es medible.*

Ejemplo 2.7.

- Sea $\Omega \neq \emptyset$, los σ-álgebra canónicos son $\{\emptyset, \Omega\}$ y 2^{Ω}. El primero es evidente y el segundo es solo aplicar la definición de potencia de Ω.
- Sea μ^* una medida exterior, luego el conjunto de los μ^*-medibles es un σ-álgebra como ya hemos probado.
- Sea $\mathcal{C} \subseteq 2^{\Omega}$ un subconjunto no vacío. Definimos la σ-álgebra generado por $\mathcal{C}$ como,

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F}\ \sigma\text{-álgebra} \\ \mathcal{F} \supseteq \mathcal{C}}} \mathcal{F}$$

  Este conjunto es un σ-álgebra, ya que,

  (a) $\emptyset \in \sigma(\mathcal{C})$ como $\emptyset \in \mathcal{F}$ para todo σ-álgebra que contienen a $\mathcal{C}$.

  (b) Si $E \in \sigma(\mathcal{C})$ luego $E \in \mathcal{F}$ para todo σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, luego por las propiedades de σ-álgebra se llega a que $E^c \in \sigma(\mathcal{C})$.

  (c) Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$, luego $E_n \in \mathcal{F}$ para todo σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, luego,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$$

  Entonces la unión numerable de los E_n está en $\sigma(\mathcal{C})$.

  En particular, $\sigma(\mathcal{C})$ es el σ-álgebra más pequeño que contiene a $\mathcal{C}$ ya que si $\mathcal{G}$ es un σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, entonces por definición,

$$\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{G}$$

- Sea (X, ρ) un espacio métrico y sea O la colección de todos los conjuntos abiertos. Definimos el σ-álgebra de Borel como

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(O)$$

  En la mayor parte se trabajará en el espacio métrico $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ con σ-álgebra de borel dada por,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\{O \subseteq \mathbb{R} : O \text{ es un conjunto abierto}\})$$

Definición 2.5. (Medida) *Sea* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espacio medible. Decimos que* $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ *es una medida si,*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$ *son tales* $E_1 \subseteq E_2$*, entonces* $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

(c) Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ *es una colección de disjuntos a pares, entonces,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Decimos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *es un espacio de medida.*

Ejemplo 2.8.

- Sea μ^* una medida exterior, sea $\mathcal{F}$ la colección de medibles, entonces la medida μ dada por restringir μ^* en $\mathcal{F}$ forma un espacio de medida.
- Sea $\Omega = \mathbb{R}$, sea el pavimento $\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \{(a, b) : -\infty < a < b < \infty\}$. Definimos la premedida,

$$\tau(\emptyset) = 0, \quad \tau(I) = |I|$$

  Luego se genera la medida exterior de Lebesgue λ^*. Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todos los λ^*-medibles. Sea la medida,

$$\lambda := \lambda^*|_{\mathcal{L}}$$

  A esta medida se le conoce como medida de Lebesgue aunque le falta alguans característica ,y además $I \in \mathcal{L}$ para todo intervalo. Más adelante le daremos una mejor interpretación a $\mathcal{L}$.

$\Subset$

Proposición 2.2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$*. Entonces*

(a) Si $E_n \subseteq E_{n+1}$*, entonces,*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

(b) Si $E_n \supseteq E_{n+1}$ *y* $\mu(E_1) < \infty$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Observación 2.11. Sea $\Omega = \mathbb{R}$, sea $\mathcal{F} = \mathcal{L}$, sea $\mu = \lambda$ y sea $E_n = [n, \infty)$, luego,

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$$

se tiene que $\lambda(E) = 0$, pero $\lambda(E_i) = \infty$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = \infty \neq 0 = \lambda(E)$$

Por lo que la condición $\mu(E_1) < \infty$ es sumamente importante.

Dem. (Proposición 2.2)

(a) Sea la colección $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por,

$$\begin{aligned} A_1 &:= E_1 \\ A_2 &:= E_2 \setminus E_1 \\ &\vdots \\ A_n &:= E_n \setminus E_{n-1} \end{aligned}$$

Luego los A_n son medibles al ser intersección finito de medibles, son disjuntos y,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Probemos la igualdad, la inclución $\subseteq$ es evidente, para la otra sea $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ entonces $x \in E_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, sea el mínimo que contiene a x, luego $x \notin E_m$ para todo $m < n$ y luego $x \in A_n$, luego se cumple la igualdad.

Probemos que son disjuntos, sea $x \in A_n \cap A_m$ con $n < m$, entonces $x \in E_{m-1}^c$, por el crecimiento de la colección $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que $x \in E_n^c$ siendo imposible, luego la colección $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es disjunta a pares.

A partir de la definición de medida tenemos que,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} An\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \mu(E_m) \end{aligned}$$

(b) Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ talque $E_n \supseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\mu(E_1) < \infty$. Sean $B_n = E_1 \setminus E_n \in \mathcal{F}$, luego,

$$B_n \subseteq B_{n+1}$$

y por la parte anterior,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

Notemos que,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Y luego,

$$\mu\left(E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_n)$$

Entonces $\mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty}(\mu(E_1) - \mu(E_n))$, donde usamos crucialmente que $\mu(E_1) < \infty$. Cancelando $\mu(E_1)$ obtenemos,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Probando la proposición. ■

2.4. Construcción de Medida

Sabemos como construir un espacio de medida a partir de un conjunto, un pavimento y una premedida.

$$(\Omega, \mathcal{C}, \tau) \longrightarrow (\Omega, 2^{\Omega}, \mu^*) \xrightarrow[\mu=\mu^*|_{\mathcal{F}}]{} (\Omega, \mathcal{F}, \mu)$$

Pero aún está el problema de que $\mu(A) \neq \tau(A)$, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9. Sea el conjunto $\Omega = \{a, b\}$, sea el pavimento $\mathcal{C} = \{\emptyset, \{a\}, \Omega\}$, y sea τ una premedida talque,

$$\tau(\emptyset) = 0, \ \ \tau(\{a\}) = 2, \ \ \tau(\Omega) = 1$$

Sabemos que $\tau(\{a\}) \neq \mu(\{a\})$, sin embargo esto es un muy mal ejemplo ya que,

- $\mathcal{C}$ tiene muy poca estructura (no puede ser σ-álgreba).
- τ no es monótona.

$\Subset$

Definición 2.6. (Álgebra y la Medida de un Álgebra) *Sea Ω un conjunto no vacío.*

(a) Decimos que $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ es un álgebra si,

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

iii) Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ entonces,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

(b) Decimos que $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una medida sobre $\mathcal{A}$ álgebra si,

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Si $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subseteq B$, entonces,

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

iii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ es una colección disjunta a pares y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observación 2.12. Notemos que la diferencia entre un σ-algebra y un álgebra es la que álgebra pedimos una unión finita. También vemos que un σ-álgebra es también un álgebra pero no viceversa.

Ejemplo 2.10. Sea $\Omega = \mathbb{R}$, sea el conjunto,

$$\mathcal{A} = \{\text{uniones finitas de conjuntos } (-\infty, a), [a, \infty), [a, b]\} \cup \{\emptyset\}$$

Entonces $\mathcal{A}$ es un álgebra. Y en efecto,

(a) Claramente $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(b) Notemos que,

$$\begin{aligned} (\infty, a)^c &= [a, \infty) \\ [a, b]^c &= (-\infty, a) \cup (b, \infty) \end{aligned}$$

Entonces es claro que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

(c) Sean $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, luego,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

Al ser una unión finita de uniones finitas. Siendo una unión finita.

En particular podemos encontrar una medida μ sobre $\mathcal{A}$ talque $\mu([a,b]) = b - a$ y para ello basta tomar $\mu = \lambda^*\big|_{\mathcal{A}}$ y esto funciona puesto que $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$. Luego por un lema que hemos visto tenemos que $\mu([a,b]) = b - a$.

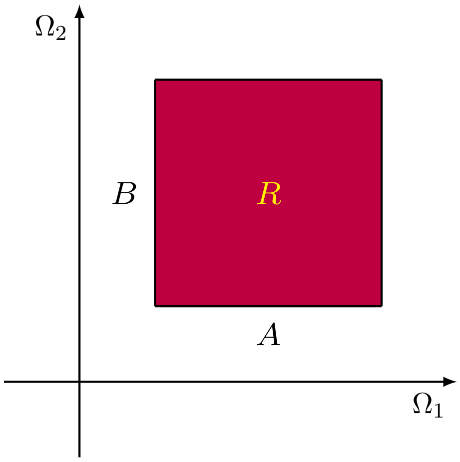
Ejemplo 2.11. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ espacios medibles. Sea el conjunto,

$$\mathcal{R} := \{A \times B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$$

Definimos $\mathcal{A} :=$ {uniones finitas de elementos de R}. Luego $\mathcal{A}$ es un álgebra, y en efecto,

(a) Si $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathbb{R}$, entonces $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(b) Sea $R = A \times B \in \mathcal{A}$, si Ω_1, Ω_2 fuesen $\mathbb{R}$ podriamos pensarlo como un dibujo,



A partir del dibujo concluimos que $R^c = A^c \times B^c \cup A \times B^c \cup A^c \cup B$, esto se puede hacer generalmente para cualquier Ω_1, Ω_2, luego $R^c \in \mathcal{A}$. Si $R \in \mathcal{A}$ es una unión finita de elementos de $\mathcal{R}$ entonces R^c es la intersección de elementos de $\mathcal{R}$ y esto gráficamente es un rectángulo, es decir, $R^c \in \mathcal{A}$.

(c) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ es evidente que,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$$

por definición de esta.

De forma general, si μ es una medida sobre $\mathcal{A}$ álgebra podemos definir,

(a)

$$\mu^*(E) := \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

(b) $\mathcal{F}$ el conjunto de μ^*-medibles.

(c) $\overline{\mu} = \mu^*\big|_{\mathcal{F}}$

Entonces, nos preguntamos si,

$$\overline{\mu}\big|_{\mathcal{A}} = \mu$$

Dicho de otra forma, a partir de una medida μ sobre $\mathcal{A}$ un álgebra queremos ver si podemos generar una única extensión, y en efecto se puede. Pero antes necesitamos algunos resultado.

Lema 2.5. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y sea μ una medida sobre $\mathcal{A}$. Luego,*

(a) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces A es μ^*-medible.

(b) $\mu^*(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

Dem. Sea μ^* la medida dada por μ. Luego,

(a) Sea $A \in \mathcal{A}$, tenemos que demostrar que,

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$$

para todo $B \subseteq \Omega$. Si $\mu^*(B) = \infty$, entonces por observación,

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) = \infty$$

Por la igualdad se tiene que uno de los dos sumandos es ∞, luego,

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \leq \mu^*(B)$$

Probando la igualdad. Si ahora $\mu^*(B) < \infty$ entonces, sea $\varepsilon > 0$ y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ talque $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y,

$$\begin{aligned}
\mu^*(B) + \varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap A^c)\right) \\
&\geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)
\end{aligned}$$

Donde $A \in \mathcal{A}$ y donde,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap A) \supseteq B \cap A$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap A^c) \supseteq B \cap A^c$$

Probando que A es μ^*-medible.

(b) Sea $A \in \mathcal{A}$, como $\{A\}$ es un cubrimiento de A por ser elemento de $\mathcal{A}$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ talque $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mu^*(A)+\varepsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap A)\\ &\geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap A)\right)\\ &\geq \mu(A)\end{aligned}$$

Probando la igualdad.

Probando el lema. ■

Observación 2.13. Por lo tanto, una medida sobre un álgebra se puede extender a una medida, el problema es que no sabemos cual es el σ-álgebra pero veremos que es una extensión de $\mathcal{A}$.

Teorema 2.2. (Extensión de Caratheodory) *Sea μ una medida sobre un álgebra $\mathcal{A}$, sea μ^* la medida exterior asociada a μ y sea $\overline{\mu}$ su restricción a la colección $\mathcal{F}$ de todos los conjunto μ^*-medibles. Entonces,*

(a) $\mathcal{F}$ es un σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$.

(b) $\overline{\mu}$ es una medida que extiende μ a $\mathcal{F}$ y, por lo tanto a $\sigma(\mathcal{A})$.

(c) Si $\mu^*(E)=0$, entonces $E\in\mathcal{F}$.

(d) Si existe una colección $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{A}$ talque $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ y $\mu(\Omega_n)<\infty$, entonces, $\overline{\mu}$ es la única extensión de μ a $\sigma(\mathcal{A})$.

Dem.

(a) Ya sabemos que $\mathcal{F}$ es un σ-álgebra. Además demostramos que si $A\in\mathcal{A}$, entonces A es μ^*-medible.

(b) Ya sabemos que $\overline{u}$ es medida y además demostramos que

$$\overline{\mu}(A)=\mu(A)$$

para todo $A\in\mathcal{A}$. Además si $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{F}$ por la primera parte, entonces $\sigma(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{F}$.

(c) Supongamos que, $\mu^*(E)=0$, entonces para $A\in X$ (donde μ^* está definido), entonces

$$\mu^*(A)\leq\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)\leq\mu^*(A)$$

Luego,

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)$$

Es decir, $E\in\mathcal{F}$.

Con respecto al cuarto punto necesitamos algumos preliminares. Probando el teorema de forma parcial. ■

Definición 2.7. (Redifiniciones) *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.*

i) Decimos que $E \subseteq \Omega$ es despreciable si existe $N \in \mathcal{F}$ talque $E \subseteq N$ y $\mu(N) = 0$.

ii) Decimos que $\mathcal{F}$ es completa con respecto a μ si contiene todas los conjuntos despreciables.

Estamos generalizando el concepto de ser despreciable para cualquier espacio de medida.

Definición 2.8. *Sea $\Omega \neq \emptyset, \mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ un σ-álgebra, $\mathcal{A} \subseteq 2^\Omega$ álgebra.*

(a) Sea μ una medida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

i) Decimos que μ es finito si $\mu(\Omega) < \infty$.

ii) Decimos que μ es σ-finita si existe $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ talque

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega, \quad \mu(\Omega_n) < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sea μ medida sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Decimos que μ es fuertemente σ-finito si existe $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ talque

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \quad \mu(\Omega_n) < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.8. Notemos que para una medida sobre $\mathcal{A}$ álgebra, es fuertemente σ-finito, ya que si se cumple, entonces es σ-finito, ya que un σ-álgebra también es un álgebra.

Observación 2.9. Según convenga, podemos suponer,

- $\{\Omega_n\}_n$ disjunta a pares o
- $\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 2.13.

- $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(O : O \subseteq \mathbb{R}$ abierto$)$. Sea λ la medida de Lebesgue. $\Omega_n := [-n, n]$, entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \mathbb{R}$$

Y $\lambda(\Omega_n) = 2n < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego λ es σ-finita.

- $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, tomando

$$\mu(A) := \begin{cases} \#A, & \text{Si } A \text{ es finito.} \\ \infty, & \text{Si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

  Entonces, μ no es σ-finita.

Ejemplo 2.14. Sea $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ el álgebra de uniones finitas de intervalos del tipo $[a, b]$ o $(-\infty, b)$ o $[a, \infty)$ y $\emptyset$. Tales que

$$\mu([a, b]) = \infty, \quad \mu(\emptyset) = 0$$

Ahora podemos reformular el teorema de Thedory.

Teorema 2.2. (Reformulación) *Sea μ una medida sobre un álgebra $\mathcal{A}$, μ^* la medida exterior asociada a μ y sea $\overline{\mu}$ la función μ^* restringida a la colección $\mathcal{F}$ de todos los conjunto μ^*-medibles. Entonces,*

(a) $\mathcal{F}$ es un σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$.

(b) $\overline{\mu}$ es una medida que extiende μ a $\sigma(\mathcal{A})$.

(c) $\mathcal{F}$ es completa con respecto a $\overline{\mu}, \mu^*$.

(d) Si μ es fuertemente σ-finito, entonces existe una única extensión de μ a $\sigma(\mathcal{A})$.

Dem. (Teorema Theodory, parte (d)) Probaremos la parte (d) del teorema usando el teorema de las clases monótona.

Definicion 2.9. *Sea $\Omega \neq \emptyset$. Decimos que $\mathcal{M} \subseteq 2^\Omega$ es una clase monótona si,*

i) $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$ talque $A_i \subseteq A_{i+1}$, entonces,

$$\bigcup_i A_i \in \mathcal{M}$$

ii) $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$ talque $A_i \supseteq A_{i+1}$, entonces,

$$\bigcap_i A_i \in \mathcal{M}$$

Observación 2.10.

- Si $\mathcal{F}$ es σ-álgebra, entonces es clase monótona.
- **Afimración.** *Sea $\mathcal{A}$ álgebra y clase monótona, entonces $\mathcal{A}$ es σ-álgebra.*

  Dem. (Afirmación) Al ser álgebra se cumple las dos primeras propiedades, probemos la tercera.

Sea $\{A_i\}_i \subseteq \mathcal{A}$, notemos que,

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_n \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)}_{B_n:=}$$

Claramente $B_n \in \mathcal{A}$ al ser álgebra. Si $B_n \subsetneq B_{n+1}$ y $\mathcal{A}$ es clase monótona, se tiene que,

$$\bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$$

Es decir, $\mathcal{A}$ es σ-álgebra. ■

Definición 2.10. *Sea $\mathcal{C} \subseteq 2^\Omega$ no vacío. Definimos, el conjunto*

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{C} \\ \mathcal{M}' \ c.m}} \mathcal{M}'$$

Como la clase monótona más pequeño que contiene a $\mathcal{C}$.

Observación 2.11. Veamos que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ está bien definido. Sea $\{M_i\}_i \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{C})$, creciente, entonces

$$\{M_i\}_i \subseteq \mathcal{M}'$$

para todo $\mathcal{M}'$ clase monótona que contiene a $\mathcal{C}$, luego,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$$

De forma similar si es decreciente la colección. Viendo que es una clase monótona.

Teorema 2.3. (De las Clases monótona) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra, luego,*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

Continuemos la demostración, sean $\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2$ extensiones de μ a $\sigma(\mathcal{A})$. Sea

$$\mathcal{M} := \{E \in \sigma(\mathcal{A}) : \overline{\mu}_1(E) = \overline{\mu}_2(E)\}$$

Notemos que, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$ (si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{\mu}_1(A) = \overline{\mu}_2(A)$). Y que, $\sigma(\mathcal{A}) \supseteq \mathcal{M}$ (definición de $\mathcal{M}$). Si $\mathcal{M}$ es de clase monótona, entonces,

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \supseteq \sigma(\mathcal{A})$$

Dem...

En forma resumida, si tenemos $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ con $\mathcal{A}$ álgebra, entonces existe una medida exterior μ^* donde podemos restringirla a $\mathcal{F}$ el conjunto de los μ^*-medibles y entonces, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, $\overline{\mu}$ extiende μ a $\sigma(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}$ es completa y si μ es fuertemente σ-finito, entonces $\overline{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$ es única.

2.5. La Medida de Lebesgue

Recordemos que la medida exterior de Lebesgue es la función λ^* asociada al pavimento de los intervalos abiertos, con premedida $\tau(I) = |I|$ para todo intervalo abierto y $\tau(\emptyset) = 0$. Sea $\mathcal{L}$ el conjuntos de los λ^*-medibles (Lebesgue medibles), entonces definimos,

$$\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$$

como la medida de Lebesgue. La pregunta es, ¿λ es la única extensión de τ? Y para poder ver ello necesitamos el teorema de Caratheodory.

Observación 2.12. Notemos que el conjunto,

$$\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \{I : \ I \text{ intervalo}\}$$

no es álgebra, por lo que no podemos aplicar el teorema de Caratheodory para garantizar la unicidad de la extensión, es decir, sabemos que,

$$\lambda(I) = \tau(I)$$

para todo intervalo I en $\mathcal{C}$, pero podría no ser la única medida que lo cumpla. Intentemos aplicar Caratheodory de alguna forma.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de las uniones finitos de intervalos del tipo $(-\infty, b], (a, b], (a, \infty)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ incluyendo a $\emptyset$. Para,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \in \mathcal{A}$$

con los I_i's disjuntos a pares, se define para $A \in \mathcal{A}$,

$$\tau(A) := \sum_{i=1}^{n} |I_i|$$

De esta forma, a partir de la función $\tau : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ podemos generar la medida exterior de Lebesgue $\lambda^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ donde $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}$. El probolema es que queremos que $\mathcal{A}$ sea álgebra y τ una medida de $\mathcal{A}$.

Observación 2.13.

- Para cualquier $A \in \mathcal{A}$ se puede escribir como la unión finita de intervalos como mostramos antes.
- **Afirmación.** *τ está bien definido sobre $\mathcal{A}$.*

  Es decir, si

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{k=1}^{m} \bar{I}_k$$

con intervalos disjuntos a pares, entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} |I_i| = \sum_{k=1}^{m} |\overline{I}_k|$$

Dem.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |I_i| &= \sum_{i=1}^{n} |I_i \cap A| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| I_i \cap \bigcup_{k=1}^{m} \overline{I}_k \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |I_i \cap \overline{I}_k| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |I_i \cap \overline{I}_k| \\
&= \sum_{i=1}^{m} |\overline{I}_k|
\end{aligned}$$

■

- τ es, de hecho, una medida sobre $\mathcal{A}$. Además, τ es fuertemente σ-aditivo.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1], \;\; \tau(n, n+1]) = 1 < \infty$$

  Luego, por Caratheodory, λ es la única extensión de τ a $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}$, donde no sabemos aún que es $\sigma(\mathcal{A})$. Donde $\mathcal{L}$ es la colección de los λ^*-medibles.

Observación 2.14. Cuando escribimos que $\lambda(I) = \tau(I)$, asumiremos fácilmente que todo intervalo es medible. Solo lo sabemos para $(a, b], (-\infty, b], (a, \infty)$, que están en $\mathcal{A}$.

Lema 2.5. *Sea $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto, entonces $O \in \mathcal{L}$*

Dem. Como O es abierto sobre $\mathbb{R}$, entonces,

$$O = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

Con $\{I_i\}_i$ una colección de intervalos abiertos disjuntos. Luego basta demostrar que $(a, b) \in \mathcal{L}$ para todo $a < b$ y, de hecho, basta probar que $(-\infty, b) \in \mathcal{L}$ para todo $a \in \mathbb{R}$, puesto que,

$$(a, b) = (-\infty, b) \setminus (-\infty, a] \in \mathcal{A}$$

Primera demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, demostremos que,

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap (-\infty, b)) + \lambda^*(A \cap (-\infty, b)^c)$$

Supongamos que $b \notin A$, de modod que,

$$\lambda^*(A \cap [b, \infty)) = \lambda^*(A \cap (b, \infty))$$

Sea $\{I_i\}$ intervalos abiertos tales que,

$$A \subseteq \bigcup_i I_i$$

...

Segunda demostración. Basta demostrar que,

$$(a, b) \in \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}$$

Y en efecto, notemos que,

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathcal{A})$$

Luego $O \in \mathcal{L}$.

Tercera demostración. Notemos que,

$$(a, b) = \underbrace{(a, b]}_{\in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}} \setminus \{b\}$$

Si $\lambda^*(\{b\}) = 0$, entonces $\{b\} \in \mathcal{L}$, luego tenemos la intersección de dos λ^*-medibles, es decir, $(a, b) \in \mathcal{L}$. ■

Observación 2.15. Con la segunda demostración, demostramos que,

$$O \in \sigma(\mathcal{A})$$

para todo $O \subseteq$ abierto. Por lo tanto,

$$\{O : O \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto}\} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$$

Y recordemos que,

$$\sigma(\{O : O \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Por lo que ,$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Demostremos que $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, notemos que,

$$\begin{aligned}
&(b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{ (es abierto)} \\
&(a, b] = \bigcap_{n \geq 1} \left(a, b + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
&(-\infty, a] = \bigcap_{n \geq 1} \left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Luego si $A \in \mathcal{A}$, entonces claramente $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, y por la caracterización del menor σ-álgebra, se tiene que,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Por lo tanto, tenemos τ una medida sobre $\mathcal{A}$, que genera λ^*, a la cual la podemos restringir a λ sobre $\mathcal{L}$ los λ^*-medibles y por el teorema de Cathedory, tenemos que, existe una única extensión de τ , la cual es $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$. A esta medida le llamamos medida de Lebesgue.

Gran conclusión. λ es la única extensión de τ a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Algo más a tener en cuenta. si λ está definido en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces todo conjunto A que es unión infinita de intervalos de la forma $(-\infty, a), (a, b], (b, \infty)$, es λ^*-medible.

Observación 2.16. Tomemos $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$.

i) Se puede demostrar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{L}$.

ii) Se puede demostrar que $\mathcal{L} \neq 2^{\Omega}$, es decir, "existen" conjuntos no medibles.

Teorema 2.4. (Ulom) *Sea μ medida sobre $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$, talque,*

i) $\mu([n, n+1]) < \infty$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\mu(\{x\}) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$

Luego $\mu(A) = 0$ *para todo* $A \subseteq \mathbb{R}$

La demostración usa el axioma de elección. (Ver también la apradoja de Banach-Toski).

2.6. Para mayores dimensiones

El argumento de la medida de Lebesgue se puede replicar para mayores dimensiones. Aunque no lo probaremos, es todo casi análogo. Sea $d \geq 1$. Construimos la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ de la misma manera,

- Decimos que $I \subseteq \mathbb{R}^d$ es un intervalo si,

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$$

  con $I_i \subseteq \mathbb{R}$.

- Definimos,

$$\tau(I) = \prod_{i=1}^{d} |I_i|$$

  Luego,

  Figura.

- Tal como en el caso $d = 1$,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}_d$$

Luego todo elemento de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ es medible.

Obteniendo la medida de Lebesgue dada por,

$$\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$$

donde,

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \tau(I_i) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}$$

2.7. Funciones Medibles

Hemos estudiamo los espacios medibles y espacios de medida. También vimos como construir una medida a partir de un álgebra y una medida sobre el álgebra. Ahora estudiaremos funciones que toman espacios medibles.

Definición 2.11. *Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ dos espacios medibles. Decimos que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$-medible si,*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$$

para todo $A \in \mathcal{F}_2$. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Decimos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ es medible si,

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, con $d \geq 1$. Es decir, si f es $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-medible.

Lema 2.5. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

i) f es medible.

ii) $f^{-1}(O) \in \mathcal{F}$ para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto.

iii) $f^{-1}(a, b) \in \mathcal{F}$ para todo $a < b$.

iv) $f^{-1}(a, \infty) \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

v) $f^{-1}(a, b] \in \mathcal{F}$ para todo $a < b$.

Dem. Notemos que i) implica todo lo demás, ya que si f es medible, entonces,

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Y si $O, (a,b), (a,\infty), (a,b]$ (O abierto, $a < b$) son elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Luego se i) implica el resto. También notar que ii) implicar iii) y iv). Veamos que iii) implicar ii). Recordemos que,

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

con $\{I_n\}$ intervalos abiertos disjuntos a pares, luego,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n) \in \mathcal{F}$$

(Tenemos una unión infinita de elemento de $\mathcal{F}$, luego la unión infinita es elemento de $\mathcal{F}$).

Probemos que v) implica i). Supongamos que $f^{-1}(a,b] \in \mathcal{F}$ para todo $a < b$. Sea

$$C := \{(a,b] : a < b\}$$

Y sea

$$\mathcal{C} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$$

Claramente $C \subseteq \mathcal{C}$. Probemos que $\mathcal{C}$ es un σ-álgebra. Entonces,

i) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$, luego $\emptyset \in \mathcal{C}$.

ii) Sea $B \in \mathcal{C}$, luego,

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in \mathcal{F}$$

Luego $B^c\mathcal{C}$.

ii) Sea $\{B_i\} \subseteq \mathcal{C}$, luego,

$$f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}$$

Luego la unión numerable de los B_i es elemento de $\mathcal{C}$.

Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{C}$ es σ-álgebra que contiene a C. Entonces,

$$\mathcal{C} \supseteq \sigma(C) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Por tanto, $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y esto implicar que f es medible. **Probar el resto de casos.**■

Observación 2.17. El conjunto de Borel también se define por,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a,b] : a < b\})$$

Por lo tanto, para probar que una función es medible, basta probar algunas de las afirmaciones anteriores.

Lema 2.6. *Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles y $c \in \mathbb{R}$, entonces,* *i)* $cf, f+g, fg$ *son medibles.*

ii) $|f|$ *es medible.*

iii) $\max\{f,g\}, \min\{f,g\}$ *son medibles.*

Dem.

i) Veamos la suma, sea $a \in \mathbb{R}$, luego,

$$\begin{aligned}\{w \in \Omega : f(w) + g(w) > a\} &= \{w \in \Omega : f(w) > a - g(w)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{w \in \Omega : f(w) > r > a - g(w)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{w \in \Omega : f(w) > r\} \cap \{w \in \Omega : g(w) > a - r\}\end{aligned}$$

Si,

$$\{w \in \Omega : f(w) > r\}, \{w \in \Omega : g(w) > a - r\} \in \mathcal{F}$$

Entonces, $\{w \in \Omega : f(w) + g(w) > a\} \in \mathcal{F}$. Probando que,

$$(f+g)^{-1}(a, \infty) \in \mathcal{F}$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego $f+g$ es medible. Para cf basta notar que si $c > 0$ entonces,

$$\{w \in \Omega : a < fc < b\} = \{w \in \Omega : a/c < f < b/c\} f^{-1}(a/c, b/c) \in \mathcal{F}$$

Para todo $a < b$. Si $c < 0$ solo se invierte las desigualdad.

ii) Notemos que,

$$\{w \in \Omega : |f(w)| > a\} = \{w \in \Omega : f(w) > a\} \cup \{w \in \Omega : f(w) > -a\} \in \mathcal{F}$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$. Luego $|f|$ es medible.

iii) Notemos que,

$$\begin{aligned}\max\{f,g\} &= \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \\ \min\{f,g\} &= \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)\end{aligned}$$

Luego es claramente medible. ■

Lema 2.7. *para dada* $n \geq 1, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *medible, entonces,*

i) $\sup_n f_n$.

ii) $\inf_n f_n$.

iii) $\overline{\lim_n} f_n$.

iv) $\underline{\lim}_n f_n$

son medibles.

Observación 2.18. La función $\underset{\sup}{n} f_n$ es la función que para $x \in \Omega$, toma el valor supremo de los f_n. Y $\overline{\lim}_n$ es el límite superior, es deic,r

$$\overline{\lim_n} = \inf_k \sup_{k \geq n} f_k$$

Dem.

i) Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left\{ w \in \Omega : \sup_n f_n(w) > a \right\} = \left\{ w \in \Omega : \exists n \geq 1, \sup_n f_n(w) > a \right\}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ w \in \Omega : f_n(w) > a \} \in \mathcal{F}$$

Luego $\sup_n f_n$ es medible.

ii) Notemos que,

$$-\sup_n(-f_n) = \inf_n f_n$$

Luego, $\inf_n f_n$ es medible.

iii) Por definición de límite d superior, tenemos el ínfimos sobre k de funciones,

$$\sup_{k \geq n} f_k$$

que es medible, por i), y como estamos tomando ínfimo, es claro que es medible.

iv) Es similiar al argumento de iii). Siendo el límite inferior medible.

Probando el lema. ∎

Observación 2.18. Estas cantidades siempren están bien definida con valores en $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Las operaciones suma y producto se extienden a $\overline{\mathbb{R}}$ con algunas restricciones.

$$\infty - \infty, \ 0 \cdot \infty, \ \frac{\infty}{\infty}$$

no están bien definidas. De esta forma $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si $f^{-1}(a, \infty] \in \mathcal{F}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Corolario 2.1. *Sean $f_n, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones donde f_n son medibles y talque,*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(w) = f(w)$$

para todo $w \in \Omega$. Entonces f es medible.

Dem. Como el límite de f_n existe para cada w, entonces,

$$\overline{\lim_n} f_n = \lim_{n\to\infty} f$$

Luego f es claramente medible. ■

Por lo tanto, si una función de f_n medibles converge puntualmente/uniformemente a f, entonces f es medible.

Observación 2.19. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$ ($\mathcal{B}$ los boreleanos sobre $[0,1]$). Definimos $f_n(x) = x^n$ para $n \geq 1$ que es medible. Notemos que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(w) = f(w) = \begin{cases} 1, & w = 1 \\ 0, & w \in [0,1) \end{cases}$$

y $f = 0$ fuera de un conjunto de medida 0. f es medible ya que f_n converge puntualmente a f.

Definición 2.12. *Sea $(\Omega, f.\mu)$ un espacio de medida. Sean $f, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Decimos que f_n converge a f μ-casi en todas partes si existe $\Omega_0 \subseteq \Omega$ talque,*

i) $f(w) = \lim_{n\to\infty} f_n(w)$ *para todo* $w \in \Omega_0$

ii) Ω_0^c *es despreciable.*

Observación 2.20. Ω_0^c es despreciable si existe $N \in \mathcal{F}$ talque

$$N \supseteq \Omega_0^c, \quad \mu(N) = 0$$

Notación. Por comodidade denotaremos la convergencvia μ-casi en todas partes por,

$$\mu\text{-cte}$$

Observación 2.21. Decimos que una propiedad se cumple μ-ctp si se cumple fuera de un conjunto despreciable.

Lema 2.8. *Supongamos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es completo. Sean*

$$f_n, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$$

medibles tales que $f_n \to f$ de forma μ-ctp. Entonces f es medible.

Dem...

Definición 2.12. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sean $f_n, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Decimos que f_n converge a f en medida si para todo $\delta > 0$, se tiene que,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{\omega \in \Omega : |f_n(w) - f(w)| > \delta\}) = 0$$

Observación 2.22 Las convergencias μ-ctp y μ-medida no tiene relación en "general".

i) Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, tomando,

$$f_n(x) = \mathbb{1}_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geq n \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Luego f_n converge a 0 λ-ctp (de hecho en todas partes), pero para todo $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{\omega \in \Omega : |f_n(w) - f(w)| > \delta\}) = \infty$$

Luego f_n no converge a $f = 0$ de forma λ-medible.

ii) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Definiendo,

$$f_1 = \mathbb{1}_{[0,1/2]}, \;\; f_2 = \mathbb{1}_{[1/2,1]}, \;\; f_3 = \mathbb{1}_{[0,1/4]}, \;\; f_4 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2]}, \ldots$$

Luego f_n converge a 0 en medida, pero no en λ-ctp.

Lema 2.9. *Supongamos que $\mu(\Omega) < \infty$. Luego si $f_n \to f$ en forma μ-ctp, entonces lo hace en μ-medida.*

Dem.

Notación. Cuando f_n converga a f es μ-medida, denotaremos

$$f_n \overset{\mu}{\to} f$$

Proposición 2.1. *Supongamos que $f_n \overset{\mu}{\to} f$, entonces existe una subsucesión f_{n_k} que converge a f en μ-ctp.*

Sea $\{E_n\} \subseteq \mathcal{F}$. Al cojunto,

$$\begin{aligned} \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n \geq m} E_n &= \{w \in \Omega : n \geq 1, \exists n \geq m : w \in E_n\} \\ &= \{w \in \Omega : w \text{ pertenece a infinitos } E_n\} \\ &=: \{\{E_n\}_n \; i.o\} \end{aligned}$$

Lema 2.10. (Borel-Contelli) *Sean $\{E_n\}_n \subseteq \mathcal{F}$. Luego, si,*

$$\sum_{n\geq 1} \mu(E_n) < \infty$$

entonces,

$$\mu(\{E_n\} \; i.o) = 0$$

Dem. Por definición,

$$\begin{aligned}
\mu(\{E_n\}\ i.o\}) &= \mu\left(\bigcap -m \geq 1 \bigcup_{n\geq m} E_n\right)\\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n\geq m_0} E_n\right), \text{ para todo } m_0 \geq 1\\
&\leq \sum_{n\geq m_0} \mu(E_n) \overset{m_0\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

(La serie es la cola de una serie convergente).

Dem. (Proposición) Supongamos que $f_n \overset{\mu}{\to} f$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{w\in\Omega : |f_n(w) - f_m(w)| \geq \delta) = 0$$

para todo $\delta > 0$. Luego, para todo $k \geq 1$, existe $n_k \geq 1$ talque,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{w\in\Omega : |f_{n_k}(w) - f(w)| \geq 1/k\right) < \frac{1}{2^k}$$

para todo $n_{k+1} > n_k$ para todo $k \geq 1$. Sea

$$E_k := \{w\in\Omega : |f_n(w) - f(w)| \geq 1/k\}$$

Luego,

$$\sum_{k\geq 1} \mu(E_k) < \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} < \infty$$

Por Borel.Contelli,

$$\mu(E) = 0,\ \ E = \{\{E_n\}_n\ i.o\}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
E^c &= \left(\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{k\geq m} E_k\right)^c\\
&= \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{k\geq m} E_k^c \left\{w\in\Omega : |f_n(w) - f(w)| < \frac{1}{k}\right\}\\
&\subseteq \{w\in\Omega . f_{n_k}(w) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f\}
\end{aligned}$$

Sea $\Omega_0 = E^c$, luego,

$$\begin{gathered}
\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(w) = f(w), \text{ para todo } \Omega\\
\mu(\Omega_0^c) = 0
\end{gathered}$$

Luego, $f_{n_k} \to f_k$ de forma μ-ctp.

2.8. Los Tres Principios de Littlewood

Hemos visto que,

- Un conjunto medible, es **casi** un abierto.
- La convergencia ctp, es **casi** uniforme.
- Una función medible, es **casi** continua.

Lema 2.11. (Primer Principio) *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto λ-medible, entonces,*

i) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto talque $E \subseteq O$ y $\lambda(O \setminus E) < \varepsilon$.

ii) Existe $G \in G_\delta$ talque $E \in G$ y $\lambda(G \setminus E) = 0$.

iii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $F \in \mathbb{R}$ cerrado talque $F \subseteq E$ y $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$.

iv) Existe $F \in F_\delta$ talque, $F \subseteq E$ y $\lambda(E \setminus F) = 0$.

Observación 2.23.

- $G \in G_\delta$ si existe $\{O_n\}_n$ abiertos talque,

$$G = \bigcap_{n \geq 1} O_n$$

- $F \in F_\delta$ si existe $\{F_n\}_n$ cerrados talque,

$$F = \bigcap_{n \geq 1} F_n$$

Dem.

i) Sea $E \in \mathcal{L}$, luego,

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \lambda^*(E) \\ &= \text{ínf} \left\{ \sum_n |I_n| : \bigcup_n I_n \supseteq E, \{I_n\}_n \text{ intervalos abiertos} \right\} \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, luego, existe $\{I_n\}_n$ intervalos abiertos talque,

$$E \subseteq \bigcup_n I_n$$

y,

$$\sum_n |I_n| < \lambda(E) + \varepsilon$$

Luego tomando $O := \bigcup_n I_n$ abierto, se tiene, $E \subseteq O$ y,

$$\lambda(O) \leq \sum_{n\geq 1} \lambda(I_n) < \lambda(E) + \varepsilon$$

y por lo tanto,

$$\mu(O \setminus E) < \varepsilon$$

ii) Sea O_n abierto talque, $E \subseteq O_n$ y $\lambda(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. En particular,

$$\lambda(E) \leq \lambda(O_n) < \lambda(E) + \frac{1}{n}$$

Sea $G := \bigcap_n O_n$, luego, $E \subseteq G$ y,

$$\lambda(G) = \lambda\left(\bigcap_n O_n\right)$$

Entonces,

$$\lambda(G \setminus E) \leq \lambda(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$$

para todo $n \geq 1$. Finalemnte,

$$\lambda(G \setminus E) = 0$$

iii) Sea $\varepsilon > 0$, por la parte i) existe O abierto talque, $O \supseteq E^c$ y $\lambda(O) < \lambda(E^c) + \varepsilon$. Sea $F := O^c$, ahora,

$$\begin{aligned} E \setminus F &= E \cap F^c \\ &= E \cap O \\ &= O \cap (E^c)^c \\ &= O \setminus E^c \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lambda(E \setminus F) &= \lambda(O \setminus E^c) \\ &= \lambda(O) - \lambda(E^c) < \varepsilon \end{aligned}$$

iv) **Demostrar**.

Teorema 2.5. (Egorov, Segundo Principio) *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ espacio de medida finita. Sean $f, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles talque, $f_n \to f$ de forma μ-ctp. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ talque, $\mu(\Omega_0^c) < \varepsilon$ y $f_n \to f$ de forma uniforme sobre Ω_0. Es decir,*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{w\in\Omega_0} |f_n(w) - f(w)| = 0$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, definimos,

$$E_{k,n} := \left\{ w \in \Omega : |f_n(w) - f(w)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Sea

$$\begin{aligned} B_k : &= \{\{E_{k,n}^c\}\ i.o\} \\ &= \left\{ w \in \Omega : \forall m \geq 1, \exists n \geq m, |f_n(w) - f(w)| \geq \frac{1}{k} \right\} \\ &\subseteq \{w \in \Omega : f_n \not\to f\} \end{aligned}$$

Luego para todo $k \geq 1$,

$$O = \mu(B_k) = \lim_{m \to \infty} \mu(\bigcup_{n \geq m} E_{k,n}^c)$$

Sean $m_k \leq m_{k+1}$ talque,

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq m_k} E_{k,n}^c \right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Sean

$$B = \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq m_k} E_{k,n}^c, \ \ \Omega_0 = B^c$$

Luego,

$$\mu(\Omega_0^c) = \mu(B) \leq \sum_{k \geq 1} \mu\left(\bigcup_{k \geq m_k} E_{k,n}^c \right) < \varepsilon$$

Y,

$$\Omega_0 = \bigcap_{k \geq 1} \bigcap_{n \geq m_k} E_{k,n} = \left\{ w \in \Omega : \forall k \geq 1, \forall n \geq m_k, |f_n(w) - f(w)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Sea $\eta > 0, k \geq 1$ talque, $\frac{1}{k} < \eta$. Si $w \in \Omega_0$, entonces para todo $n \geq m_k$ se cumple que,

$$|f_n(w) - f(w)| < \eta$$

Es decir,

$$\sup_{w \in \Omega} |f_n(w) - f(w)| \leq \eta$$

para todo $n \geq m_k$. ■

Observación 2.24. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ talque $\lambda(\Omega) < \infty$, podemos asumir que Ω_0 es cerrado (usando iii) del lema 2.11).

Teorema 2.6. (Lousin, Tercer Principio) *Consideremos* $([0,1], \mathcal{L}, \lambda)$. *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ λ*-medible. Luego para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\Omega_0 \in [0,1]$ *donde* $\Omega_0 \in \mathcal{L}$ *talque,*

$$\lambda(\Omega_0^c) < \varepsilon$$

y existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continua talque,*

$$f(x) = g(x)$$

para todo $x \in \Omega_0$.

Definición 2.13. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espacio medible. Decimos que* $S : \Omega \to \mathbb{R}$ *es simple si existen* $M \geq 1, \{a_k\}_{k=1}^M \subseteq \mathcal{F}$, *talque,*

$$S = \sum_{k=1}^{M} a_k \mathbb{1}_{A_k}$$

Observación 2.25. Siempre podemos asumoir,

- $a_k \neq a_j$ para todo $k \neq j$. $(A_k = S^{-1}(\{a_k\}))$.
- $\{A_k\}_{k=1}^M$ disjuntos a pares.
- $\bigcup_{k=1}^M A_k = \Omega$.

Falta aglo celular.

Vamos a demostrar el tercer principio de Littlewood, pero necesitamos dos lemas.

Lema 2.12. *El tercer principio se cumple para funciones simples.*

Lema 2.13. *Sea* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *medible y acotado. Luego existe* $\{S_n\}_n$ *una sucesión de funciones simples talque* $s_n \uparrow f$, *es decir,*

i) $S_n(x) \leq S_{n+1}(x)$ *para todo* $x \in [0,1]$ *para todo* $n \geq 1$.

ii) $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in [0,1]$.

Nota 2.. La función del lema 2.13 se puede generalizar para un dominio $[a, b]$.

Dem. (Lema 2.12) Sea $S : [0,1] \to \mathbb{R}$ simple, es decir, existen $M \geq 1$, $a_1, \ldots, a_M \in \mathbb{R}$ y$A_1, \ldots, A_n$ medibles y disjuntos a pares talque,

$$S = \sum_{j=1}^{M} a_j \mathbb{1}_{A_j}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y para cada $j = 1, \ldots, M$, sea, $F_j \subseteq A_j$ cerradp talque,

$$\lambda(A_j \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{M}$$

Sea

$$F := \bigcup_{j=1}^{M} F_j \ \text{(cerrado)}$$

y decimos que,

$$\lambda(F^c) \leq \sum_{i=j}^{M} \lambda(A_i \setminus E_i) < \varepsilon$$

Definimos $g(x) = a_j$ si $x \in F_j$, como F^c es abierto, existe una colección $\{I_n\}_n$ de intervalos abietos disjuntos talque,

$$F^c = \bigcup_n I_n$$

Si $I_n = (a_n, b_n)$, luego, $a_n, b_n \in \mathcal{F}$, y está definido en esos puntos y definimos $g(x)$ por interpolación de $g(a_n), g(b_n)$ sobre I_n. ■

Dem. (Lema 2.13) Sin pérdida de generalidad que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$.

Figuta.

A cada intervalo I_j definimos A_j. Para la demostración, basta definir,

$$S_n := \sum_{j=1}^{2^n} \frac{j-1}{2^n} \mathbb{1}_{\frac{j-1}{2^n} \leq f \leq \frac{j}{2^n}}$$

Notemos que $S_n(x) \leq S_{n+1}(x)$ para todo $x \in [0,1]$ y, además,

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

para todo $x \in [0,1]$ y para todo $n \geq 1$.

Dem. (Tercer Principio) Supongamos que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$.

(a) Sea $\{S_n\}_n$ sucesión de funciones talque $S_n \uparrow f$ y,

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \geq 1$. (Lema 2.13).

(b) Para cada $n \geq 1$, sea $F_n \subseteq [0,1]$ cerrado, $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuo talque,

$$\lambda(F_n^c) < \frac{\varepsilon}{2^n} \ \text{ y } \ g_n(x) = S_n(x)$$

para todo $x \in F_n$ (Lema 2.12). Sea,

$$F := \bigcap_n F_n$$

leugo es cerrado y,

$$\lambda(F^c) = \lambda\left(\bigcup_n F^c\right) < \varepsilon$$

Adempás, si $x \in F$, entonces,

$$|g_n(x) - f(x)| \overset{x \in F_n}{=} |S_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad (\star)$$

Luego, $g_n|_F$ converge a una función $\overline{g} : F \to R$. Como la convergencia es uniforme, se tiene que $\overline{g}$ es continua. Por $(\star)$, $\overline{g}(x) = f(x)$ para todo $x \in F$. Finalmente, tal como es la demostración del lema 2.12, extendemos $\overline{g}$ a todo $[0, 1]$ como una función continua g,

$$\begin{cases} g(x) = \overline{g}(x) = f(x), \ \forall x \in \mathcal{F} \\ g, \text{ continua.} \\ \lambda(F^c) < \varepsilon \end{cases}$$

Probando el teorema. ■

3. La Integral de Lebesgue

Figura.

3.1. Integral de Funciones Simples Positivas

Para trabjar con la integral de Lebesgue, fijaremos un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Empezaremos trabajando con funciones simple positivas al ser más sencillas de trabajar y al tener la función caracteristica, podemos trabajar con la medida de tal conjunto.

Definición 3.1. (Integral de una Función Simple) *Sea $s : \Omega \to [0, \infty)$ una función simple,*

$$s = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

con $a_i \geq 0, A_i \in \mathcal{F}$ con $i = 1, \ldots, N$. Definimos la integral de Lebesgue de s como,

$$\int s d\mu = \int_{\Omega} s d\mu := \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(A_i) \in [0, \infty]$$

Para $E \in \mathcal{F}$ definimos,

$$\int_E s d\mu = \int s \cdot \mathbb{1}_E d\mu$$

Nota 3.1. Hemos ocultado la variable de integración, de forma general se tiene,

$$\int s d\mu = \int s(w) d\mu(w) = \int s(w) \mu(d(w))$$

Esto se hace ya que es claro sobre que variable estamos trabajando, pero en algunos casos será necesario usa la forma explicita.

Observación 3.1. Vemos que para funciones simples positivas lo que hacemos es tomar un largo a_i y un ancho $\mu(A_i)$, lo mismo que hacemos para definir la integral de Riemann, solo que para al necesitar el valor del conjunto medible $A_i \in \mathbb{F}$, se toma la medida μ.

Ejemplo 3.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Determinemos la integral,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} d\lambda$$

Notemos que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ es una función simple, luego por definición,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} d\lambda &= \lambda(\mathbb{Q}) \\
&= \lambda\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}\right) \\
&= \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(\{q\}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Lema 3.1. *Sean s, t funciones simples positivas, luego se cumple,*

i) ***Linealidad.*** *Si $\alpha, \beta \geq 0$ entonces,*

$$\int (\alpha s + \beta t) d\mu = \alpha \int s d\mu + \beta \int t d\mu$$

ii) ***Monotonía.*** *Si $s \leq t$, entonces,*

$$\int s\mu \leq \int t d\mu$$

Dem.

i) Sean s, t funciones simples, digamos que,

$$s = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{A_n}, \quad t = \sum_{n=1}^{M} b_n \mathbb{1}_{B_n}$$

Luego, $\alpha s + \beta t \geq 0$,

$$\alpha s + \beta t = \sum_{n=1}^{M+N} c_n \mathbb{1}_{C_n}$$

donde $c_n = \alpha a_n, C_n = A_n$ para $n = 1, \ldots, N$ y $c_n = \beta b_{n-N}, C_n = B_{n-N}$ donde $n = N+1, \ldots, M+N$. Es decir, $\alpha s + \beta t$ es una función simple, luego tiene integral. Ahora por definición,

$$\begin{aligned}
\int (\alpha s + \beta t) d\mu &= \sum_{n=1}^{N+M} c_n \mu(C_N) \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n) + \beta \sum_{n=1}^{M} b_n \mu(B_n) \\
&= \alpha \int s d\mu + \beta \int t d\mu
\end{aligned}$$

ii) Probemos que la integral es no negativa, si $s \geq 0$, entonces es claro que,

$$\int s d\mu = \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n) \geq 0$$

Luego si $s \leq t$, entonces $t - s \geq 0$, y de esta forma,

$$\int (t - s) d\mu \geq 0 \Longleftrightarrow \int t d\mu \geq \int s d\mu$$

Probando el lema. ■

Lema 3.2. *Sea el espacio de medida* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$*, sea* $s : \Omega \to [0, \infty)$ *simple y sea* $\varphi : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ *una función definida por,*

$$\varphi(E) := \int_E s d\mu$$

Luego, φ *es una medida sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$*.*

Dem. Notemos que φ está bien definido ya que por definición de integral, φ puede alcanzar $[0, \infty]$. Digamos que,

$$s = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{A_n}$$

Probemos los tres axiomas de medida,

i) Notemos que,

$$\begin{aligned}
\varphi(\emptyset) &= \int_\emptyset s d\mu \\
&= \int s \mathbb{1}_\emptyset d\mu \\
&= \int \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{(A_n \cap \emptyset)} d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n \cap \emptyset) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ii) Sea $A \subseteq B$ en $\mathcal{F}$, luego,

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \int s \cdot \mathbb{1}_A d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n \cap A) \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} a_n \mu(A_n \cap B) \\
&= \varphi(B)
\end{aligned}$$

iii) Sea $\{E_m\}_m \subseteq \mathcal{F}$ disjuntos a pares, luego,

$$\begin{aligned}\varphi\left(\bigcup_m E_m\right) &= \sum_{n=1}^{N} a_n\mu\left(A_n \cap \bigcup_m E_m\right)\\ &= \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_m \mu(A_n \cap E_m)\\ &= \sum_m \sum_{n=1}^{N} a_n\mu(A_n \cap E_m)\\ &= \sum_m \varphi(E_m)\end{aligned}$$

Por tanto, φ es medida. ■

Nota 3.2. Por tanto, si tenemos el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, podemos definir la medida $(\Omega, \mathcal{F}, \varphi)$ donde,

$$\varphi(E) := \int_E s d\mu$$

para todo $E \in \mathbb{F}$ y con s función simple fijo.

3.2. Integrando Funciones Positivas

Vamos a extender la definición de integral de Lebesgue a una función medible positiva, pero antes consideremos el siguiente resultado.

Nota/Proposición. *Sea el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, si $f : \Omega \to [0, \infty]$ es una función medible no negativa, entonces exites una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples no negativas talque $s_n \uparrow f$*

Definición 3.2. *Sea $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Definimos la integral de Lebesgue de f como,*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu$$

donde $\{s_n\}_n$ es cualquier sucesión de funciones simples talque,

i) $0 \le s_n(w) \le s_{n+1}(w)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $w \in \Omega$.

ii) $\lim_{n\to\infty} s_n(w) = f(w)$ *para todo* $w \in \Omega$.

Observación 3.2. La integral de f está bien definida, ya que al ser no negativa y medible, entonces tiene una sucesión s_n de funciones simples positivas talque $s_n \uparrow f$. Además, si $\{s_n\}_n, \{\overline{s}_m\}_m$ son sucesiones de funciones simples positivas talque $s_n, \overline{s}_m \uparrow f$ entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \overline{s}_m d\mu$$

Y en efecto, definimos,

$$I := \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu$$

Sea $m \geq 1$ fijo y $c \in (0,1)$. Sea,

$$E_n^m := \{w \in \Omega : s_n(w) \geq c\overline{s}_m(w)\}$$

Luego,

i) $E_n^m \subseteq E_{n+1}^m$.

ii) $\bigcup\limits_n E_n^m = \Omega$. Esto se cumple ya que al tomar $n \to \infty$, entonces,

$$E_\infty^m = \{w \in \Omega : f(w) \geq c\overline{s}_m(w)\}$$

Que se cumple para todo $w \in \Omega$.

Notemos que,

$$\begin{aligned} I \geq \int_\Omega s_n d\mu \geq \int_\Omega s_n \mathbb{1}_{E_n^m} d\mu \\ &= \int_{E_n^m} s_n d\mu \\ &\geq \int_{E_n^m} c\overline{s}_m d\mu \\ &= c\int_{E_n^m} \overline{s}_m d\mu \\ &=: c \cdot \varphi(E_n^m) \end{aligned}$$

(dado que s_n es creciente). Esto es para todo $n \geq 1$, si $\{E_n^m\}$ es creciente donde $\bigcup_n E_n^m = \Omega$, entonces,

$$\begin{aligned} I \geq c \lim_{n\to\infty} \varphi(E_n^m) &= \varphi\left(\bigcup_n E_n^m\right) \\ &= c\varphi(\Omega) \\ &= c\int \overline{s}_m d\mu \end{aligned}$$

Finalmente, si $c \uparrow 1$ y $m \to \infty$, se obtiene que,

$$I \geq \lim_{m\to\infty} \int \overline{s}_m d\mu$$

Para la ota desigualdad basta con intercambiar los argumentos por s_n. Y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \overline{s}_m d\mu$$

De forma que la integral de f está bien definida.

Observación 3.3. Notemos que toda integral de una función medible positiva está bien definida aunque puede tomar valor infinito. También notemos que la función necesariamente sea medible, ya que en un sentido estamos trabajando con la medida de $f^{-1}(A)$, y para ello necesitamos que sea medible.

Observación 3.4. Si s es una función simple positiva talque $s \leq f$, entonces,

$$\int f d\mu \geq \int s d\mu$$

Por tanto,

$$\int f d\mu \geq \sup\left\{\int s d\mu : 0 \leq s \leq f, \text{ simple}\right\}$$

Ademas, el lado izquierdo corresponde al límite de cantidades considerables de funciones simples del lado derecho, por lo tanto,

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int s d\mu : 0 \leq s \leq f, \text{ simple}\right\}$$

Caracterizando la integral de Lebesgue de f .

Proposición 3.1. *Sean $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles. Sean $\alpha, \beta \geq 0, A, B \in \mathcal{F}$, luego,*

i) ***Linealidad.***

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = a \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

ii) ***Monotonía de funciones.*** *Si $f \leq g$, entonces,*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

iii) ***Monotonía de medibles.*** *Si $A \subseteq B$ en $\mathcal{F}$, entonces,*

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

iv) $f = 0$ de forma μ-ctp si y sólo si,

$$\int f d\mu = 0$$

v) Si $\mu(A) = 0$, entonces,

$$\int_A f d\mu = 0$$

Dem.

i) Sean $s_n, t_n \geq 0$ funciones simples tales que $s_n \uparrow s, t_n \uparrow t$. Notemos que $\alpha s_n + \beta g_n \uparrow \alpha f + \beta g$ ya que para todo $n \geq 1$ se tiene,

$$0 \leq \alpha s_n + \beta t_n \leq \alpha s_{n+1} + \beta t_{n+1}$$

Y,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha s_n(w) + \beta t_n(w) = \alpha f(w) + \beta g(w)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int (\alpha f + \beta g) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \alpha \int s_n d\mu + \beta \int t_n d\mu \\ &= \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu\end{aligned}$$

ii) Por la observación tenemos que,

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \sup\left\{\int s d\mu : 0 \leq s \leq f, \text{ simple}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\int s d\mu : 0 \leq s \leq g, \text{ simple}\right\} \\ &= \int g d\mu\end{aligned}$$

iii) Sea $A \subseteq B$ con $A, B \in \mathcal{F}$, notemos que $f(x)\mathbb{1}_A \leq f(x)\mathbb{1}_B$, luego,

$$\begin{aligned}\int_A f x \mu &= \int_\Omega f \mathbb{1}_A d\mu \\ &\leq \int_\Omega f \mathbb{1}_B d\mu \\ &= \int_B f d\mu\end{aligned}$$

iv) Si $0 \leq s \leq f$ con s simple, luego $s = 0$ μ-ctp, luego,

$$\begin{aligned}\int_\Omega s d\mu &= \int_{\Omega_0} s d\mu + \int_{\Omega_0^c} s d\mu \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(A_k \cap \Omega_0^c) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(\Omega_0^c) = 0\end{aligned}$$

Luego por la caracterización de la integral de f, tenemos que,

$$\int f d\mu = 0$$

Supongamos ahora que,

$$\int f d\mu = 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega f d\mu \\ &\geq \int_{\{w: f(w) \geq 1/n\}} f d\mu \\ &\geq \int_{\{w: f(w) \geq 1/n\}} \frac{1}{n} d\mu \\ &= \frac{1}{n}\mu(w : f(w) \geq 1/n) \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene,

$$\mu(w : f(w) \geq 1/n) = 0$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mu(w : f(w) > 0) &= \mu\left(\bigcup_n \{w : f(w) \geq 1/n\}\right) \\ &\geq \sum_n \mu(w : f(w) \geq 1/n) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto donde $f \neq 0$ tiene medida nula o en otras palabras, $f = 0$ de forma μ-ctp.

v) Sea $\mu(A) = 0$, luego $f(x)\mathbb{1}_A = 0$ de forma μ-ctp ya que,

$$f(x)\mathbb{1}_A = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Luego, $f(x)\mathbb{1}_A = 0$ para todo $x \in A^c$ y si $\{w : f(x)\mathbb{1}_A \neq 0\} \subseteq A$, luego,

$$\mu(w : f(x)\mathbb{1}_A \neq 0\}) = 0$$

Luego $f(x)\mathbb{1}_A = 0$ de forma μ-ctp y por tanto,

$$\int_A f ds = \int_\Omega f\mathbb{1}_A ds = 0$$

■

3.3. Teorema de Convergencia I

Hay formas de calcular la integral de Lebesgue de una función, el primero y el más sencillo es el teorema de la convergencia monótona (TCM).

Teorema 3.1. (de convergencia monótona) *Sean $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ medible talque, $f_n(w) \leq f_{n+1}(w)$ para todo $w \in \Omega$ y para todo $n \geq 1$. Luego,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

Dem. Sea $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ (está bien definido). Sea $0 \leq s \leq f$ simple y $c \in (0, 1)$, luego,

$$\begin{aligned}\int f_n d\mu &\geq \int_{f_n \geq cs} f_n d\mu \\ &\geq \int_{f_n \geq cs} cs d\mu \\ &= c \int_{f_n \geq cs} s d\mu\end{aligned}$$

Ahora si,

$$\bigcup_n \{f_n \geq cs\} = \Omega$$

como $f_n \uparrow f \geq cs$, entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu &\geq \lim_{n\to\infty} c \int_{f_n \geq cs} s d\mu \\ &= c \int_{\Omega} s d\mu\end{aligned}$$

esto para todo $0 \leq s \leq f$ simple y para todo $c \in (0, 1)$. Tomando $c \uparrow 1$, obtenemos que.

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

La otra desigualdad es clara, si $f \geq f_n$, entonces,

$$\int f d\mu \geq \int f_n d\mu$$

Tomando $n \to \infty$, se obtiene que,

$$\int f d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

■

Teorema 3.2. (Lema de Fatou) *Sean* $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ *medibles. Luego,*

$$\int \underline{\lim}_n f_n d\mu \leq \underline{\lim}_n \int f_n d\mu$$

Dem. Por definición,

$$\underline{\lim}_n f_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\inf_{m\geq n} f_m}_{=:g_n}$$

Luego,

- $g_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$.
- $g_n(w) \leq g_{n+1}(w)$ para todo $n \geq 1, w \in \Omega$.
- $g_n \leq f_n$ para todo $n \geq 1$.
- $\lim_{n\to\infty} g_n = \underline{\lim}_n f_n$

Con esto,

$$\begin{aligned}
\int \underline{\lim}_n f_n d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} g_n d\mu \\
&\overset{\text{TCM}}{=} \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \\
&= \underline{\lim}_{n\to\infty} \int g_n d\mu \\
&\leq \underline{\lim}_n \int f_n d\mu
\end{aligned}$$

■

Observación 3.4.

i) Si $f_n \to f$ con $f_n \geq 0$ y,

$$\sup_n \int f_n d\mu < \infty$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int \underline{\lim}_n f_n d\mu \\
&\leq \sup_n \int f_n d\mu < \infty
\end{aligned}$$

ii) La desigualdad puede ser estricta, tomando,

$$f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]} \to 0$$

λ-ctp. Luego,

$$0 = \int \underline{\lim_n} f_n d\mu < \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n d\mu}_{=1, \forall n \geq 1} = 1$$

Lema 3.2. *Sean $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ medible, luego,*

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$$

Dem. Sea

$$g_m := \sum_{n=1}^{m} f_n \uparrow g := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

Tenemos que $g_m \uparrow g$, que $g_m : \Omega \to [0, \infty]$ y que es medible, por lo que su integral está bien definida, además, por el teorema de la convergencia monótona, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int g d\mu &= \int \lim_{m\to\infty} g_m d\mu \\
&= \lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int f_n d\mu \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu
\end{aligned}$$

■

Con esto obtenemos un resultado bastante fuerte ya que podemos sacar series o introducir series a la integral, pero siempre y cuando la función sea no negativa.

3.4. La Integral de Lebesgue

Hemos definido la integral de Lebesgue para funciones medibles no negativa, pero ahora generalizaremos para cualquier función medible. Sea $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, consideremos el siguiente gráfico de f,

Figutra.

Como hemos definido la integral para funciones no negativa, vamos separar f en dos parte. Se definen $f^+ := \text{máx}\{f, 0\}$, $f^- := \text{máx}\{-f, 0\}$, luego se cumple,

i) $f = f^+ - f^-$.

ii) $|f| = f^+ + f^-$.

iii) Si f es medible, entonces f^+, f^- son medibles.

Es decir, podemos descompone f en la resta de dos funciones medibles no negativas, luego podemos definir integrales de Lebesgue e iremos más allá.

Definición 3.3. (Lebesgue-integrable) *Sea $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medible.*

i) Decimos que f es Lebesgue-integerable (o L-integrable o integrable) si,

$$\int |f| d\mu < \infty$$

Definimos el conjunto de las funciones integrables en Ω por,

$$L^1 := L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \{g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, g \textit{ integrable}\}$$

ii) Si $f \in L^1$ definimos su integral de Lebesgue como,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Observación 3.5.

i) Ser L-integrable está bien definido, ya que

$$f \in L^1 \iff \int |f| d\mu < \infty$$

Ya que si $|f| = f^+ + f^-, f^+, f^- \geq 0$ medibles, entonces,

$$\int f^+ d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty$$
$$\int f^- d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty$$

Es decir, la integral de Lebesgue de f es finito.

ii) Sea $f \in L^1$, luego,

$$-\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu$$

Entonces,

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

iii) L^1 es un espacio vectorial, es más, es un espacio Banach. Si $f, g \in L^1$ y si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\int |\alpha f + \beta g| d\mu \leq |a| \int |f| d\mu + |\beta| \int |g| d\mu < \infty$$

Definición 3.4. (Lebesgue a los Complejos) *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}, f = g + ih$ donde $g, h : \Omega \to \mathbb{R}$ son la parte real de la función f. Entonces f es medible si g, h son medibles. Si $g, h \in L^1$, definimos la integral de f por,*

$$\int f d\mu = \int g d\mu + i \int h d\mu$$

También se cumple,

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

Lema 3.3. *Sean $f, g \in L^1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Luego,*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

Dem. (Ver Royden)

Por tanto, tenemos linealidad en los L-integrables.

3.5. Teorema de Convergencia II

Hay otro teorema de convergencia para determinar integrables de Lebesgue.

Teorema 3.3. (De convergencia dominada) *Sean $f, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles talque,*

i) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *μ-ctp.*

ii) Existe $g \in L^1$ talque,

$$|f_n| \leq g$$

para todo $n \geq 1$ de forma μ-ctp.

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Es más,

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

Dem. Observamos que $|f| \leq g$ μ-ctp. Sea

$$h_n := 2g - |f - f_n| \geq 0$$

μ-ctp y,

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 2g$$

μ-ctp, luego por Fatou,

$$\begin{aligned}
\int 2g d\mu &= \int \lim_{n\to\infty} h_n d\mu \\
&= \int \underline{\lim}_n h_n d\mu \\
&\leq \underline{\lim}_n \int (2g - |f - f_n|) d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\int 2g d\mu - \int |f - f_n| d\mu \right) \\
&= \int 2g d\mu \\
&= \overline{\lim}_n \int |f - f_n| d\mu
\end{aligned}$$

Como $0 \leq g \in L^1$, podemos concluir,

$$0 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \int |f - f_n| d\mu \leq 0$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \int f d\mu - \int f_n d\mu \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \int f - f_n d\mu \right| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.4. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrable. Luego,*

i) f es Lebesgue medible.

ii) $f \in L^1$ en el sentido λ.

iii)

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$$

Lema 3.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida completo. Sean, $\varphi_n, \psi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ talque,* *i)* $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}, \psi_n \geq \psi_{n+1}$ *para todo* $n \geq 1$.

ii) $\varphi_n \leq \psi_n$ *para todo* $n \geq 1$.

iii) $\varphi_n, \psi_n \in L^1$ *en el sentido* μ *y,*

$$\lim_{n\to\infty} \int (\psi_n - \varphi_n) d\mu = 0$$

Entonces,

(a) $\lim_{n\to\infty} \uparrow \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \downarrow \psi_n =: f$ *existe* μ*-ctp.*

(b) f *es medible.*

(c)

$$\begin{aligned}\int f d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \psi_n d\mu\end{aligned}$$

Dem. Sean

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n, \ \ \psi = \lim_{n\to\infty} \psi_n$$

(Ambas cosas están bien definidas). Luego,

$$\varphi_n \leq \varphi \leq \psi \leq \psi_n$$

para todo $n \geq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}0 &\leq \int (\psi - \varphi) d\mu \\ &\leq \int (\psi_n - \varphi_n) d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Luego, si $\psi - \varphi \geq 0$ y,

$$\int (\psi - \varphi) d\mu$$

Entonces, $\varphi = \psi$ μ-ctp. Esto demuestra (a).

Si

$$f = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n$$

μ-ctp. $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$, entonces f es medible. Esto demuestre (b).

Ahora,

$$\begin{aligned}|f| &= |f-\varphi_1+\varphi_1|\\ &\leq |f-\varphi_1|+|\varphi_1|\\ &= f-\varphi_1+|\varphi_1|\\ &\leq \psi_1+2|\varphi_1|\\ &\leq |\psi_1|+2|\varphi_1| \in L^1\end{aligned}$$

Entonces $f \in L^1$. Y,

$$\begin{aligned}0 \leq \int(\psi_n - f)d\mu \leq \int(\psi_n-\varphi_n)d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\\ 0 \leq \int(f-\varphi_n)d\mu \leq \int(\psi_n-\varphi_n)d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Esto demuestra (c) ■

Dem. (Teorema 3.4) Sean Π_n partciiones de $[a,b]$ talque $|\Pi| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(f,\Pi_n) = \lim_{n\to\infty} L(f,\Pi_n)$$

Existen funciones simples φ_n, ψ_n talque,

$$\begin{aligned}U(f,\Pi_n) &= \int_a^b \psi_n(x)dx = \int \psi_n d\lambda\\ L(f,\Pi_n) &= \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int \varphi_n d\lambda\end{aligned}$$

por cosntrucción. Además, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}, \psi_n \geq \psi_{n+1}$ y,

$$\int(\psi_n-\varphi_n)d\lambda = U(f,\Pi_n) - L(f,\Pi_n)$$

Por el lema anterior,

$$f = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty}\psi_n$$

es λ-ctp y, f es Lebesgue medible. Finalmente,

$$\begin{aligned}\int f d\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n d\lambda\\ &= \lim_{n\to\infty} L(f,\Pi_n)\\ &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.2. Sea $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, demostremos que $f \in L^1([0,\infty), \mathbb{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, para $n \geq 1$ se define,

$$f_n(x) = f(x)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$$

Notemos que f es medible en $[0,\infty)$ y f_n es medible al ser producto de medibles. Notemos que $f, f_n \geq 0$ y $f_n \uparrow f$, si $f \geq 0$ entonces,

$$\int_{[0,\infty)} f d\lambda \in [0,\infty]$$

Luego por el TCM y el teorema 3.4 podemos concluir que,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} f d\lambda &= \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda \\
&\overset{\text{TCM}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f_n d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \frac{1}{1+x^2}\lambda(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{2} < \infty
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3. Sea $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}$. Veamos que $f(x) \in L^1([0,\infty), \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ y que,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\infty)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\lambda(dx) &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}dx
\end{aligned}$$

Tenemos que demostrar que,

$$\int_{[0,\infty)} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right| \lambda(dx) < \infty$$

Y en efecto, sea $f_n(x) = f(x)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ una función medible, notemos que f es Lebesgue integrable ya que,

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1([0,\infty))$$

Y entonces,

$$\int_{[0,\infty)} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right| \lambda(dx) \leq \int_{[0,\infty)} \frac{1}{1+x^2}\lambda(dx) < \infty$$

Por lo que $f \in L^1([0,\infty))$. Determinemos una forma conveniente de la integral de Lebesgue de f, si $g = \frac{1}{1+x^2} \in L^1([0,\infty))$, entonces se cumple que,

i) $|f_n| \leq g$ para todo $n \geq 1$.

ii) $g \in L^1([0,\infty])$

Notemos además que $f_n \to f$ de forma puntual. Luego por el teorema de la convergencia dominada, tenemos que,

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty]} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\lambda(dx) &= \int_{[0,\infty]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\lambda(dx)\\ &\overset{\text{TCD}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty]} f_n(x)\lambda(dx)\\ &= \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

Este procedimiento se puede generalizar para un dominio en $\mathbb{R}$.

Proposición 3.1.

(a) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ talque f es Riemann integrable sobre un intervalo $[-A,B]$ con $A,B \geq 0$ y talque el límite,

$$\lim_{A,B\to\infty}\int_{-A}^{B} f(x)dx$$

existe, entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f d\lambda &= \lim_{A,B\to\infty}\int_{-A}^{B} f(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\end{aligned}$$

(b) Sea $f \in L^1(a,b)$ talque f es Riemann-integrable sobre todo $[a',b'] \subset (a,b)$ y talque el límite,

$$\lim_{\substack{a'\to a\\ b'\to b}}\int_{a'}^{b'} f(x)dx$$

existe, luego,

$$\int_{(a,b)} f d\lambda = \lim_{\substack{a'\to a\\ b'\to b}}\int_{a'}^{b'} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo 3.4. Vamos a resolver las siguientes integrables,

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} \frac{n\operatorname{sen}(x/n)}{x(1+x^2)}\lambda(dx)$$

Tenemos que, $|\operatorname{sen}(y)| \leq |y|$, luego,

$$\underbrace{\left|\frac{n\operatorname{sen}(x/n)}{x(1+x^2)^n}\right|}_{=:f_n} \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

Para ver que $1/(1+x^2) \in L^1(\mathbb{R})$ basta definir $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]}$, luego se tiene que,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2} = \pi < \infty$$

Luego $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ para todo $n \geq 1$ aunque la desigualdad es válida para $x \neq 0$ esto significa que la desigualdad se cumple λ-ctp, ahora veamos que si $x \neq 0$, entonces tenemos convergencia puntual, y en efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x/n)}{x/n} \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Luego por el TCD se tiene que,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\lambda(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\lambda(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\lambda(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x^2)^n} dx$$

Definimos $f_n(x) := \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n}$ para $x \in [0,1]$. Tenemos que f_n es continua y luego es R-integrable, además,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = \mathbb{1}_0$$

Nos gustaría decir que,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \\ &= \int_0^1 \mathbb{1}_0(x)dx = 0\end{aligned}$$

Pero no tenemos un teorema para esto dentro de la teoría de integrables de Riemann, pero sabemos que,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_{[0,1]} f_n d\lambda$$

E intentaremos usar TCD. Necesitamos encontrar $g \in L^1[0,1]$ talque $|f_n| \leq g$ para todo $n \geq 1$. Notemos que,

$$\begin{aligned}(1+x^2)^n &= 1 + nx^2 + \cdots + nx^{2n-2} + x^{2n} \\ &\geq 1 + nx^2\end{aligned}$$

entonces, $f_n(x) = \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} \leq 1 =: g(x) \in L^1[0,1]$. Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\lambda(dx) &= \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\lambda(dx) \\ &= \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{\{0\}}\lambda(dx) = 0\end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \sqrt{x} e^{-n^2x^2} dx$$

Sea $f_n(x) = n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}$ para $x \in [0,1]$. Notemo que,

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{x}e^{-n^2x^2} = 0$$

para todo $x \in [0,1]$, también,

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} n e^{-n^2x^2} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

($h(y) = ye^{-y^2}$ es acotado). Esto último es para todo $x \neq 0$ y para todo $n \geq 1$ con algún $C > 0$. Definiendo $g(x) := \frac{C}{\sqrt{x}} \in L^1[0,1]$ obtenemos lo que queremos, finalmente,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n\sqrt{x}e^{-n^2x^2} dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 n\sqrt{x}e^{-n^2x^2} \lambda(dx) \\ &\overset{\text{TCD}}{=} \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} n\sqrt{x}e^{-n^2x^2} \lambda(dx) \\ &= \int_{[0,1]} 0\lambda(dx) = 0\end{aligned}$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 xe^{-n^2x^2}dx$$

Intentemos replicar el método anterior. Sea $f_n = n^2xe^{-n^2x^2}$ con $x \in [0, 1*$, vemos que,

$$\begin{aligned}|f_n(x)| &= |n^2xe^{-n^2x^2}| \\ &= \frac{1}{x^2}|n^2x^2e - n^2x^2| \\ &\leq \frac{C}{x}\end{aligned}$$

Pero $\frac{C}{x} \notin L^1[0, 1]$, ¿entonces, cómo resolvemos esto? Notemos que tenemos una integral sencillo de estudiar usando la teoría sobre la integral de Riemann, por lo que,

$$\begin{aligned}\int_0^1 n^2xe^{-n^2x^2} &= \frac{1}{2}\int_0^1 2n^2xe^{-n^2x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}(-e^{-n^2x^2})\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1-e^{-n^2}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Observación 3.5. Se tiene que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

pero,

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n dx = 0$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n x^k\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$$

para $k \geq 1$ entero. Definimos $f_n(x) = x^k(1-x/n)^n \cdot \mathbb{1}_{[0,n]}$ para $x \in [0, \infty)$, entones f_n es continua y luego R-integrable, por lo que,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda &= \int_{[0,n]} x^k\left(1-\frac{x}{n}\right)^n d\lambda \\ &= \int_0^n x^k\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx\end{aligned}$$

Notemos que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^ke^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}$$

con $x \in \mathbb{R}$, si,

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$$

Entonces,

$$|f_n| \leq x^k e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)} \in L^1(\mathbb{R})$$

esto último se cumple dado que $x^k e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}$ es continua en $\mathbb{R}$ luego es R-integrable y entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} x^k e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)} d\lambda &= \int_{[0,\infty)} x^k e^{-x} d\lambda \\
&= \int_0^\infty x^k e^{-x} dx \\
&= k!
\end{aligned}$$

Ahora ppdemos aplicar TCD, por lo que,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^k \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx &\overset{\text{TCD}}{=} \int_{\mathbb{R}} x^k e^{-x} \mathbb{1}_{[0,\infty)} d\lambda \\
&= \int_{[0,\infty)} x^k e^{-x} d\lambda \\
&= \int_0^\infty x^k e^{-x} dx \\
&= k!
\end{aligned}$$

Teoema 3.5. *Sean $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles talque,*

$$\sum_n \int |f_n| d\mu < \infty$$

Entonces se tiene que,

i) La serie $\sum_n f_n(w)$ converge absolutamente de forma μ-ctp.

ii) Y podemos meter la serie, es decir,

$$\int \sum_n f_n d\mu = \sum_n \int f_n d\mu$$

Dem. Hint. Usar TCM y TCD ($g \geq 0, g \in L^1$ entonces $g(w) < \infty$ μ-ctp)

Ejemplo 3.5. Queremos determinar,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x - 1} dx$$

con $a > 0$. Sea $f_a(x) := \frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x - 1}$ una función definida en todo $x \neq 0$. Vamos a tomar el abuso de notación $f = f_a$ y a partir de aquí daremos con el valor de la integral.

- **Paso 1.** Veamos que $f \in L^1[0,\infty)$. Si $x \geq 1$ entonces,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{e^x - 1} \leq Ce^{-x}$$

para algún $C > 0$, veamos que $Ce^{-x} \in L^1[1,\infty)$ y en efecto, tenemos que es R-integrable en $[1,b]$ luego,

$$\begin{aligned}\int_{[1,\infty)} Ce^{-x}\lambda(dx) &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b Ce^{-x}dx \\ &= \lim_{b\to\infty} -Ce^{-x}\Big|_1^b \\ &= Ce < \infty\end{aligned}$$

Si $x \in (0,1)$, entonces,

$$|f(x)| \leq \frac{ax}{e^x - 1} \approx \frac{ax}{(1+x)-1} = a \in L^1[0,1]$$

Entonces f es acotado por algo para todo $x \in (0,\infty)$. Por lo que podemos considerar,

$$g(x) = \begin{cases} Ce^{-x}, & x \in [1,\infty) \\ a, & x \in [0,1) \end{cases}$$

Y $g \in L^1[0,\infty]$ ya que al ser no negativo podemos pensar la integral como medida y separar. Finalmente concluimos uque $f \in L^1[0,\infty)$.

- **Paso 2.** Calculemos la integral. Notemos que $e^{-x} < 1$ para todo $x \in (0,\infty)$, entonces,

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n\geq 0} e^{-nx}$$

Luego,

$$f(x) = e^{-x}\frac{\operatorname{sen}(ax)}{1-e^{-x}} = e^{-x}\sum_{n\geq 0} e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)$$

Luego,

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)$$

Vamos a usar el teormea 3.5, pero para ello necesitamos que,

$$\sum_{n\geq 1}\int |e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)|\lambda(dx) < \infty \quad (\star)$$

Calculemos las integrales por separado,

$$\begin{aligned}\int |e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)|\lambda(dx) &\leq \int e^{-nx}\lambda(dx)\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-nx}dx\\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-nx}}{n}\Big|_0^b = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Para todo $n \geq 1$. Pero entonces,

$$(\star) \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} = \infty$$

Por lo que no nos sirve hacer esto, pero recordemos que $|\operatorname{sen}(y)| \leq |y|$, y con esto llegaremos a una cota conveniente,

$$\begin{aligned}\int |e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)|\lambda(dx) &= \int_0^\infty |e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)|dx\\ &\leq \int_0^\infty -e^{-nx}axdx\\ &= \frac{-ae^{-nx}}{n}\Big|_0^\infty + a\int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{n}dx\\ &= \frac{a}{n^2}\end{aligned}$$

Luego,

$$(\star) \leq \sum_{n\geq 1}\frac{a}{n^2} = \frac{a\pi^2}{6} < \infty$$

Por tanto podemos aplicar el teorema 3.5 y por tanto, la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge de forma λ-ctp y lo más importante,

$$\sum_{n\geq 1}\int e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)\lambda(dx) = \int \sum_{n\geq 1} e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)\lambda(dx)$$

- **Paso 3.** Calculemos,

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^\infty e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)dx$$

Notemos que cada término de la serie se puede calcular, luego,

$$\begin{aligned}\int e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)dx &= \int_0^\infty e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)\\ &= \int_0^\infty e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)dx\\ &= -\frac{e^{-nx}}{n}\bigg|_0^\infty + \frac{a}{n}\int_0^\infty e^{-nx}\cos(ax)dx\\ &= -\frac{a}{n^2}e^{-nx}\cos(ax)\bigg|_0^\infty - \frac{a^2}{n^2}\int_0^\infty e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)dx\\ &= \frac{a}{n^2} - \frac{a^2}{n^2}\int_0^\infty e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)dx\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-nx}\operatorname{sen}(ax)dx &= \frac{a/n}{1+\frac{a^2}{n^2}}\\ &= \frac{a}{n^2+a^2}\end{aligned}$$

En conclusión llegamos a que,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x-1}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{a}{n^2+a^2}$$

Lo que hicimos fue encontrar una forma conveniente a partir de una integral impropia usando integrales de Lebesgue, de Riemann y del teorema 3.5. Este resultado se puede replicar por otor camini

Ejemplo 3.6. Recordemos que,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Esto se calcula por definición,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}x}{x}dx :&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\operatorname{sen}x}{x}dx\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Demostremos que $f(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{x} \notin L^1[0,\infty)$, para ello debemos demostrar que,

$$\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right| dx\infty$$

Vamos a pasar la integral como una serie,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx &= \sum_{n\geq 1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \\ &\geq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\operatorname{sen} x|dx \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n} = \infty\end{aligned}$$

Luego, $f \notin L^1[0,\infty)$. Daremos una heurística del cálculo pasado, usaremos que,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{\varepsilon x}-1}{\varepsilon} = x$$

para poder ver esto basta usar la exponencia como serie, luego,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{\varepsilon x}-1}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sum_{k=0}^\infty \frac{(\varepsilon x)^k}{k!}-1}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{k-1}x^k \\ &= x\end{aligned}$$

Entonces tenemos que,

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\frac{\operatorname{sen} x}{e^{\varepsilon x}-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx\ ' &=' \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{e^{\varepsilon x}-1}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon^{-1}y)}{e^y-1}dy \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n\geq 0}\frac{\varepsilon^{-1}}{n^2+\varepsilon^{-2}} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n\geq 0}\frac{\varepsilon}{(\varepsilon n)^2+1} \\ &= \text{Sumas de Riemann para } \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x-1}dx = \sum_{n\geq 0}\frac{a}{n^2+a^2}$$

3.6. Continuidad y Diferenciabilidad

Como pequeño apartado estudiaremos resultados para ver la integral de Lebesgue como una función.

Teorema 3.7. *Sea $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, supongamos que,*

i) $w \mapsto f(t,w)$ *medible para todo* $t \in \mathbb{R}$.

ii) $t \mapsto f(t,w)$ *continua para todo* $w \in \Omega$.

iii) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *talque,*

$$|f(t,w)| \leq g(w)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *de forma* μ*-ctp, para todo* $w \in \Omega$.

Entonces la función,

$$F(t) := \int_\Omega f(t,w)\mu(dw)$$

es continua en todo $t \in \mathbb{R}$

Dem.

Teorema 3.8. *Sea $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$, supongamos que,*

i) $w \mapsto f(t,w)$ *medible para todo* $t \in \mathbb{R}$.

ii) $t \mapsto f(t,w)$ *diferenciable para todo* $w \in \Omega$.

iii) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *talque,*

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,w)\right| \leq g(w)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *de forma* μ*-ctp, para todo* $w \in \Omega$.

iv) Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ *talque* $f(t_0,w) \in L^1(\Omega)$.

Entonces la función,

$$F(t) := \int_\Omega f(t,w)\mu(dw)$$

es diferenciable en todo $t \in \mathbb{R}$ *con derivada,*

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(t,w)\mu(dw)$$

Ejemplo 3.7. Se define la función gamma por,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$$

con $t > 0$. Demostremos que Γ es diferenciable y determinemos su derivada, definimos,

$$f(t,x) = x^{t-1}e^{-x}$$

para $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$ notemos que es medible y diferenciable con derivada,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = x^{t-1}e^{-x}\log(x)$$

Tenemos que encontrar $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ talque,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| \leq g(x)$$

Esto lo haremos para intervalos acotados, sean $0 < a < b$, supongamos que $t \in (a,b)$,

- Si $x \in [1,\infty)$ entonces $|\log(x)| \leq x$, de esta forma,

  $$|f'(t,x)| \leq x^t e^{-x} \leq x^b e^{-x}$$

  para todo $x \in [1,\infty)$ y para todo $t \in (a,b)$.
- Si $x \in (0,1]$, notemos que $x \mapsto x^\alpha \log(x)$ es acotada en $(0,1]$ para todo $\alpha > 0$, sea $\alpha > 0$, luego,

  $$|f'(t,x)| = x^{t-1}e^{-x}|\log(x)| \leq x^{t-1-\alpha}|x^\alpha \log(x)| \leq Cx^{t-1-\alpha} \leq Cx^{a-1-\alpha} \in L^1(0,1]$$

  si $a - 1 - \alpha > -1$, basta escoger $\alpha = \frac{a}{2}$,

En conclusión, para todo $t \in (a,b)$ y para todo $x > 0$ se tiene que,

$$|f'(t,x)| \leq Cx^{\frac{a}{2}-1}\mathbb{1}_{(0,1]}(x) + x^b e^{-x}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x) \in L^1(0,\infty)$$

Es decir, es acotado. Por último debemos encontrar un t_0 talque $f(t,x) \in L^1(\mathbb{R}_+)$, pero basta tomar $t = 1$, luego $f(1,x) = e^{-x} \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Entonces por el teorema anteiror la función Gamma es diferenciable con derivada,

$$\Gamma'(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\log(x)dx$$

Ejemplo 3.8. Sea

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x(x^2+1)}dx$$

Se puede verificar que se satisface la ecuación diferencial,

$$\begin{cases} F'' = F - \frac{\pi}{2} \\ F(0) = 0, \ \ F'(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Resolviendo se obtiene que,

$$F(t) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-t})$$

Concluyamos la ecuación diferencial y luego probaremos la forma simplificada de F. Definimos,

$$f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$$
$$f(t, x) = \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x(x^2 + 1)}$$

Notemos que para todo $t \in \mathbb{R}$, f es continua y luego es medible, siendo F casi bien definida, notemos que para todo $x \in (0, \infty)$, f es diferencaible, con derivada,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = \frac{\cos(tx)}{x^2 + 1}$$

continua en todo $t \in \mathbb{R}$ fijo y luego medible. Notemos que está acotado,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) \right| \leq \frac{1}{x^2 + 1} \in L^1(0, \infty)$$

Por último, tomando $t = 0$ se tiene que,

$$f(0, x) = 0 \in L^1(0, \infty)$$

Por tanto, F está bien definida y,

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{x^2 + 1} dx$$

Este proceso se puede volver a realizar y obtener que,

$$F''(t) = \int_0^\infty \frac{-x \operatorname{sen}(tx)}{x^2 + 1} dx$$

Luego,

$$\begin{aligned} F''(t) - F(t) &= -\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x^2 + 1} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= -\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x} dx \\ &= -\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} dy \quad (y = tx) \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Obteniendo el sistema que mencionamos. Resolvamos la ecuación. Notemos que la solución homogénea está dada por,

$$F_h(t) = Ae^{-t} + Be^t$$

para algunos $A, B \in \mathbb{R}$ y la particular es,

$$F_p(t) = e^t + \frac{\pi}{2}$$

Luego la solución es,

$$F(t) = Ae^{-t} + (B+1)e^t + \frac{\pi}{2}$$

Usando los datos iniciales obtenemos que $A = -\frac{\pi}{2}, B = -1$, entonces,

$$F(t) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-t})$$

4. Productos

Vamos a estudiar el producto de dos σ-álgebras y ver como se comportan. Fijemos los espacios de medida $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$.

Definición 4.1. (Colección de Rectángulos) *Definimos la colección de los rectángulos medibles,*

$$\mathcal{R} := \{A \times B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\} \subseteq \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$$

donde $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ σ-álgebra sobre Ω_1, Ω_2 respectívamente. Se define el álgebra producto por,

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{R}) \supseteq \mathcal{R}$$

Nota 4.1. Estamos usando un abuso de notación ya que $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ no es necesariamente un σ-álgebra. Aun así, siempre que se mencione $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ nos referiremos a $\sigma(\mathcal{R})$.

Definición 4.2. (Secciones) *Consideremos el siguiente dibujo,*
Figura
Sea $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Se define,

$$\begin{aligned} E^1(y) &:= \{x \in \Omega_1 : (x,y) \in E\} \subseteq \Omega_1 \\ E^2(x) &:= \{y \in \Omega_2 : (x,y) \in E\} \subseteq \Omega_2 \end{aligned}$$

Notemos que E^1 es parecido a estudiar un filamento de la figura generada a partir de E. En particular queremos poder estudiar estos filamentos, por lo que necesitamos ver si son medibles.

Lema 4.1. *Sea $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, entonces,*

i) $E^1(y) \in \mathcal{F}_1$ *para todo* $y \in \Omega_2$.

ii) $E^2(x) \in \mathcal{F}_2$ *para todo* $x \in \Omega_1$.

Dem. Demostremos solamente para i) ya que ii) es análogo.

a) Veamos que pasa si $E = A \times B \in \mathcal{R}$. Sea $E = A \times B \in \mathcal{R}$ **Figura.**

   Entonces,

$$E^1(y) = \begin{cases} \emptyset, & y \notin B \\ A, & y \in B \end{cases}$$

   Luego es claro que $E^1(y) \in \mathcal{F}_1$ para todo $y \in \Omega_2$.

b) Consideremos el conjunto,

$$\Sigma := \{E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 : E^1(y) \in \mathcal{F}_1, \forall y \in \Omega_2\} \subseteq \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$$

   Si probamos que Σ es un σ-álgebra que contiene a $\mathcal{R}$, entonces, $\Sigma = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ y luego se cumple i). Probemos los axiomas de σ-álgebra,

i) Si $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{R}$, entonces, $\emptyset \in \Sigma$.

ii) Sea $E \in \Sigma$, demostremos que $E^c \in \Sigma$. Sea $y \in \Omega_2$, entonces,

$$\begin{aligned}(E^c)^1(y) &= \{x \in \Omega_1 : (x,y) \in E^c\} \\ &= \{x \in \Omega_1 : (x,y) \notin E\} \\ &= (E^1(y))^c \in \mathcal{F}_1\end{aligned}$$

Luego $E^c \in \Sigma$.

iii) Sea $\{E_n\}_n \subseteq \Sigma$. Entonces para $y \in \Omega_2$

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_n E_n\right)^1(y) &= \left\{x \in \Omega_1 : (x,y) \in \bigcup_n E_n\right\} \\ &= \{x \in \Omega_1 : \exists n, (x,y) \in E_n\} \\ &= \bigcup_n \{x \in \Omega_1 : (x,y) \in E_n\} \in \mathcal{F}_1\end{aligned}$$

Por lo tanto Σ es efectívamente un σ-álgebra.

Ahora por la parte a) tenemos que $\mathcal{R} \subseteq \Sigma$. Por lo tanto, para todo $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ se tiene que $E^1(y) \in \Omega_1$ para todo $y \in \Omega_2$. ■

Corolario 4.1. *Sea $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$-medible. Luego,*

i) $y \mapsto f(x,y)$ es $\mathcal{F}_2$-medible para todo $x \in \Omega_1$.

ii) $x \mapsto f(x,y)$ es $\mathcal{F}_1$-medible para todo $y \in \Omega_2$.

Dem. Vamos a probar solamente i). Para $x \in \Omega_1$ fijo, definimos $g(y) := f(x,y)$. Supongamos que $f(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y)$. Notemos que dado que x es fijo tenemos que,

$$f(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y) = \mathbb{1}_{A^2(x)}(y)$$

Como $A^2(x) = \{y \in \Omega_2 : (x,y) \in A\}$. En particular, si $A \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, entonces $A^2(x) \in \mathcal{F}_2$. Sea $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ entonces,

$$g^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset, & 0,1 \notin B \\ A^2(x), & 1 \in B, 0 \notin B \\ (A^2(x))^c, & 0 \in B, 1 \notin B \\ \Omega_2 & 0,1 \in B \end{cases}$$

Luego $g^{-1}(B) \in \mathcal{F}_2$. Ahora si,

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$$

con A_k medibles, entonces al ser una suma de medibles se tiene que $g(y)$ es $\mathcal{F}_2$-medible. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f \geq 0$, luego $g(y)$ es una función de Ω_2 a $[0, \infty)$. Como f es medible tenemos que existe una sucesión $s_n \uparrow f$, luego,

$$g(y) = \lim_{n\to\infty} s_n(x, y)$$

con x fijo. Notemos que,

$$g(y) = \overline{\lim} s_n(x, y)$$

y si $s_n(x, y)$ son $\mathcal{F}_2$-medible en la segunda varaible, entonces $g(y)$ es $\mathcal{F}_2$-medible. Probando para i), el caso ii) es análogo. ■

Lema 4.2. *Sea $\mathcal{A}$ la colección de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{R}$, entonces,*

i) *$\mathcal{A}$ es un álgebra.*

ii) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_1 \times \acute{F}_2$.

Dem.

i) Probemos los axiomas de álgebra.

a) Notemos que $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{A}$, luego $\emptyset \in \mathcal{A}$.

b) Sea $E \in \mathcal{A}$, supongamos que $E = A \times B \in \mathcal{R}$, consideremos la siguiente figura,

Figura

Entonces,

$$(A \times B)^c = (\Omega_1 \times B^c) \cup (A^c \times B) \in \mathcal{A}$$

Luego $E^c \in \mathcal{A}$. Si $E = \bigcup_{j=1}^n E_j$ con $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{R}$, entonces,

$$\begin{aligned} E^c &= \left(\bigcup_{j=1}^n E_j \right)^c \\ &= \bigcap_{j=1}^n \underbrace{E_j^c}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \end{aligned}$$

dado que la intersección de rectángulos es un rectángulo.

c) Sean $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$, por el punto anterior es claro que,

$$\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$$

Por lo tanto $\mathcal{A}$ es un álgebra.

ii) Notemos que si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$, para la otra inclusión tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{R})$, por lo tanto $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Probando el lema. ■

Nota 4.2. Con esto podemos caracterisas de mejor manera los elementos de $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Podemos pensarlo como uniones de rectángulos y uno que otro tipo de conjunto.

4.1. La Medida Producto

Hasta ahora tenemos un σ-álgebra $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ sobre el conjunto $\Omega_1 \times \Omega_2$. Ahora queremos definir una medida sobre el producto σ-álgebra. Una posible forma es definir,

i) Para $E = A \times B \in \mathcal{R}$ se podría definir,

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

ii) Definir una medida sobre $\mathcal{A}$.

iii) Luego usar Caratheodory para extender la medida a $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Otra posibilidad es considerar la función,

$$\mu(E) := \int_{\Omega_2} \mu_1(E^1(y))\mu_2(dy)$$

Es decir, estudiar la integral sobre la sección $E^1(y)$.

Figura.

Pero ¿$\mu_1(E^1(y))$ será $\mathcal{F}_2$-medible? Ya que es un requisito importante para definir la integral sobre Ω_2. Veamos el siguiente resultado.

Lema 4.3. *Supongamos que μ_1, μ_2 son σ-finitas bajos sus respectivos espacios de medida. Entonces,*

1. *$y \mapsto \mu_1(E^1(y))$ es $\mathcal{F}_2$-medible.*
2. *$x \mapsto \mu_2(E^2(x))$ es $\mathcal{F}_1$-medible.*

Vamos a postergar la demostración y asumieremos que se cumple. Probemos otro resultado.

Lema 4.4. *Supongamos que μ_1, μ_2 son σ-finitos. Luego,*

i) La función,

$$\mu(E) = \int_{\Omega_2} \mu_1(E^1(y))\mu_2(dy)$$

Define una medida sobre $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

ii) $\mu(A \times B)) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ para todo $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$.

Dem. Demostremos ii). Consideremos la siguiente figura sobre $A \times B$,

Figura.

Luego,

$$\mu_1(E^1(y)) = \begin{cases} \mu_1(A), & y \in B \\ 0, & y \notin B \end{cases}$$

Es decir,

$$\mu_1(E^1(y)) = \mu_1(A)\mathbb{1}_B(y)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu(A \times B) &= \int_{\Omega_2} \mu_1(E^1(y))\mu_2(dy) \\ &= \int_{\Omega_2} \mu_1(A)\mathbb{1}_B(y)\mu_2(dy) \\ &= \mu_1(A) \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_B(y)\mu_2(dy) \\ &= \mu_1(A)\mu_2(B) \end{aligned}$$

Probemos i). Supongamos que el lema anterior se cumple, entonces,

$$y \mapsto \mu_1(E^1(y))$$

es una función $\mathcal{F}_2$-medible. Como además es positiva la función, se tiene que la integral está bien definida (toma valores $[0, \infty]$). Probemos los axiomas de medida,

i) Si $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$, entonces,

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= \mu(\emptyset \times \emptyset) \\ &= \mu_1(\emptyset)\mu_2(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

ii) Sean $E, F \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ con $E \subseteq F$. Notemos que,

$$E^1(y) = \{x \in \Omega_1 : (x, y) \in E\} \subseteq \{x \in \Omega_1 : (x, y) \in F\} = F^1(y)$$

Para todo $y \in \Omega_2$, luego, dado que $E^1, F^1 \in \mathcal{F}_1$ y μ_1 es medida, se tiene que,

$$\mu_1(E^1(y)) \leq \mu_2(F^1(y))$$

para todo $y \in \Omega_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \int_{\Omega_2} \mu_1(E^1(y))\mu_2(dy) \\ &\leq \int_{\Omega_2} \mu_1(F^1(y))\mu_2(dy) = \mu(F) \end{aligned}$$

iii) Sean $\{E_n\} \subseteq \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ disjuntos a pares. Sea $y \in \Omega_2$, luego si $n \neq m$ entonces,

$$\begin{aligned} E_n^1(y) \cap E_m^1(y) &= \{x \in \Omega_1 : (x,y) \in E_n\} \cap \{x \in \Omega_1 : (x,y) \in E_m\} \\ &= \{x \in \Omega_1 : E_n \cap E_m\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Luego $\{E_n^1(y)\} \subseteq \mathcal{F}_1$ son disjuntos a pares para todo $y \in \Omega_2$ y entonces,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_n E_n\right) &= \int_{\Omega_2} \mu_1\left(\left(\bigcup_n E_n^1\right)(y)\right)\mu_2(dy) \\ &= \int_{\Omega_2} \mu_1\left(\bigcup_n E_n^1(y)\right)\mu_2(dy) \\ &= \int_{\Omega_2} \sum_n \mu_1(E_n^1(y))\mu_2(dy) \\ &= \sum_n \int_{\Omega_2} \mu_1(E_n^1(y))\mu_2(dy) \\ &= \sum_n \mu(E_n) \end{aligned}$$

Por lo tanto μ es una medida. ■

Ahora sabemos que estamos bien encaminado, ya que si se cumple el lema 4.3 podemos probar que μ es una medida sobre $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Dem. (Lema 4.3) Por comodidad definiremos,

$$\begin{aligned} f_E(y) &:= \mu_1(E^1(y) \\ g_E(y) &:= \mu_2(E^2(x)) \end{aligned}$$

Probemos que son medibles en sus respectivos σ-álgebras. Sea $E = A \times B \in \mathcal{R}$ con $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$. Consideremos la siguiente figura,

Figura.

Luego,

$$E^1(y) = \begin{cases} A, & y \in B \\ \emptyset, & y \notin B \end{cases}$$

Luego se cumple,

$$f_E(y) = \mu_1(E^1(y)) = \mu_1(A)\mathbb{1}_B(y)$$

Si $\mu_1(A)$ es medible, entonces $f_E(y)$ es medible.

Generalizemos esto, sea $E \in \mathcal{A} = \{\text{Uniones finitas rectángulos medibles}\}$. Entonces $f_E(y)$ también es medible por linealidad. Sea,

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 : f_E \text{ es } \mathcal{F}_2\text{-medible}\} \supseteq \mathcal{A}$$

Demostremos que $\mathcal{M}$ es una clase monótona. De este modo tendriamos que,

$$\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$$

Luego f_E sería $\mathcal{F}_2$-medible para todo $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Sea $\{E_n\}_n \subseteq \mathcal{M}$ talque $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, debemos probar que,

$$\bigcup_n E_n \in \mathcal{M}$$

Y en efecto,

$$\begin{aligned}
f_{\bigcup_n E_n}(y) &= \mu_1\left(\left(\bigcup_n E_n\right)^1(y)\right) \\
&= \mu_1\left(\bigcup_n E_n^1(y)\right) \quad (E_n^1(y) \subseteq E_{n+1}^1(y)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_1(E_n^1(y)) \\
&= \sup_n \mu_1(E_n^1(y)) \\
&= \sup_n \underbrace{f_{E_n}(y)}_{\mathcal{F}\text{-medible}} \quad \mathcal{F}_2\text{-medible}
\end{aligned}$$

Ahora consideremos, $\{E_n\}_n \subseteq \mathcal{M}$ talque $E_n \supseteq E_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, debemos porbar que,

$$\bigcap_n E_n \in \mathcal{M}$$

Aquí distinguimos dos casos.

- **Caso 1.** Supongamos que $\mu_1(\Omega_1) < \infty$. Luego,

$$\begin{aligned}
f_{\bigcap_n E_n}(y) &= \mu_1\left(\left(\bigcap_n E_n\right)^1(y)\right) \\
&= \mu_1\left(\bigcup_n E_n^1(y)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu_1(E_n^1(y)) \\
&= \inf_n \mu_1(E_n^1(y)) \\
&= \inf_n \underbrace{f_{E_n}(y)}_{\mathcal{F}\text{-medible}} \quad \mathcal{F}_2\text{-medible}
\end{aligned}$$

- **Caso 2.** Supongamos que el espacio $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ es σ-finito. Sean $\{A_j\}_j \subseteq \mathcal{F}_1$ disjuntos a pares tales que,

$$\bigcup_j A_j = \Omega, \quad \mu_1(A_j) < \infty \ \forall j \geq 1$$

Luego $f_{(\bigcap_n E_n)\cap A_j}$ es $\mathcal{F}_2$ medible para todo $j \geq 1$ por el caso anterior. Entonces,

$$f_{\bigcap_n E_n} = \sum_j f_{(\bigcap_n E_n)\cap A_j}$$

es $\mathcal{F}_2$-medible por ser suma de funciones $\mathcal{F}_2$-medibles.

Demostrando para f_E. La demostración para g_E es análoga. ■

Luego por los dos lemas anteriores, podemos definir una medida μ sobre $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ con respecto a μ_1. Pero también podemos definir la función,

$$\overline{\mu(E)} := \int_{\Omega_1} \mu_2(E^2(x))\mu_1(dx)$$

Que está bien definida dado que $\mu_2(E^2(x))$ es $\mathcal{F}_1$-medible y que además $\overline{\mu}$ es medida sobre $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. La pregunta es ¿se cumplira que $\mu = \overline{\mu}$? Ya que de darse el caso podemos definir una buena medida sobre $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Lema 4.5. *Si los espacios $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ son σ-finitos, entonces $\mu = \overline{\mu}$.*

Dem. Sabemos que si $E = A \times B$ con $A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$. Entonces,

$$\mu(E) = \mu_1(A)\mu_2(B) = \overline{\mu}(E)$$

Luego, $\mu = \overline{\mu}$ sobre $\mathcal{R}$ y por lo tanto, también sobre $\mathcal{A}$ álgebra. Probemos que $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mu)$ es fuertemente σ-finito, ya que entonces por el teorema de Caratheodory implica que μ y $\overline{\mu}$ se extienden de manera única a $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{A})$ y por lo tanto, coinciden sobre $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$.

Dado que los espacios son σ-finito, se tiene que existen $\{A_m\}_m \subseteq \mathcal{F}_1$ y $\{B_n\}_n \subseteq \mathcal{F}_2$ tales que,

$$\Omega_1 = \bigcup_m A_m, \quad \Omega_2 = \bigcup_n B_n$$

con $\mu_1(A_m) < \infty$ y $\mu_2(B_n) < \infty$ para todo $m \geq 1, n \geq 1$. Sea $C_{mn} := A_m \times B_n$ para $m, n \geq 1$, luego,

$$\bigcup_{m,n} C_{mn} = \Omega_1 \times \Omega_2$$

Además, $\mu(C_{mn}) = \mu_1(A_m)\mu_2(B_n) < \infty$ para todo $m, n \geq 1$. Finalmente $C_{mn} \in R \subseteq \mathcal{A}$. Es decir, $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mu)$ es fuertemente σ-finito. Ahora por Caratheodory tenemos que $\mu, \overline{\mu}$ se extienden de forma única en todo $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. ■

Por lo tanto podemos definir una medida producto de dos formas diferentes. Pero antes estudiaremos un pequeño resultado.

Dem.

Definición 4.3. (Medida Producto) *Sean* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ *espacios de medida* σ*-finitos. Definimos la medida producto* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *sobre* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$ *como,*

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(E) = \int_{\Omega_2} \mu_1(E^1(y))\mu_2(dy) = \int_{\Omega_1} \mu_2(E^1(x))\mu_1(dx)$$

con $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$*. En tal caso decimos que* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ *es el espacio producto.*

Podemos definir sobre el producto de tres σ-álgebra de la siguiente forma,

$$\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3 = (\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \times \mathcal{F}_3$$

Con medida producto talque,

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3 = (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3$$

Y así recursivamente.

Lema 4.6. *Sean* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ σ*-finito y* $E \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$*. Definimos,*

$$RE := \{(y, x) \in \Omega_2 \times \Omega_1 : (x, y) \in E\}$$

Luego, si $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ *entonces,*

i) $RE \in \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1$*.*

ii) $(\mu_1 \otimes \mu_2)(E) = (\mu_2 \otimes \mu_1)(RE)$

Notar que $\mu_2 \otimes \mu_1$ es la medida asociado a $\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1$.

Dem.

i) Definimos el conjunto de los rectángulos,

$$\mathcal{R}' = \{B \times A : B \in \mathcal{F}_2, A \in \mathcal{F}_1\}$$

Y el σ-álgebra producto $\sigma(\mathcal{R}') = \mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_1$. Si $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ entonces RE....

ii)

Esto significa que a partir de una medida podemos definir otra medida.

Proposición 4.1. *Se consideran tres espacios de medida* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ *con* $i = 1, 2, 3$*. Entonces,*

i) $(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) \times \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_1 \times (\mathcal{F}_2 \times \mathcal{F}_3)$*.*

ii) $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$ *si los espacios de medida son* σ*-finitos.*

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m})$*.*

2. $\lambda^m \otimes \lambda^n = \lambda^{m+n}$ *donde* λ^d *es la medida de Lebesgue sobre* $\mathbb{R}^d$*.*

Teorema 4.1. (Fubini-Tonelli) *Sean* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ *y* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ *espacios medibles* σ*-finitos. Sea* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *una función* $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$*-medible. Sean,*

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y)(\mu_1 \otimes \mu_2)(dxdy), \\
I_1 &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) \\
I_2 &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_1(dx) \right) \mu_2(dx)
\end{aligned}
$$

Siempre y cuando estén bien definidas. Luego,

i) ***Tonelli.*** *Si* $f \geq 0$ *entonces* $I = I_1 = I_2$*.*

ii) ***Fubini.*** *Si* $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ *entonces* $I = I_1 = I_2$*.*

Usaremos el siguiente lema.

Lema 4.7. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida* σ*-finito y sea la función* $f : \Omega \to [0, \infty)$*. Definimos el conjunto,*

$$G(f) := \{(w,t) : f(w) > t \geq 0\} \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$$

Luego si f *es* $\mathcal{F}$*-medible, entonces,*

$$G(f) \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega f(w)\mu(dw) &= \int_{[0,\infty)} \mu(\{w \in \Omega : f(w) > t \geq 0\})\lambda(dt) \\
&= \int_{[0,\infty)} \mu(G(f)^1(t))\lambda(dt)
\end{aligned}
$$

Dem. Notemos que estamos tomando $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}, \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_1 = \mu, \mu_2 = \lambda$. En dibujo tendriamos,

Figura.

Si $f = \mathbb{1}_A$ con $A \in \mathcal{A}$ luego,

$$G(f) = \{(w,t) : f(w) > t \geq 0\} = A \times [0,1) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$$

Si f es simple postiva el caso es similar. Supongamos que $f \geq 0$ es una función medible y sean $\{s_n\}_n$ simple tales que $0 \leq s_n \leq f$ y $s_n \leq s_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ de forma que,

$$\lim_{n\to\infty} s_n(w) = f(w)$$

para todo $w \in \Omega$. Luego,

$$\begin{aligned} G(f) &= \{(w, f) : f(w) > t \geq 0\} \\ &= \{(w, t) : \exists n \geq 1, s_n(w) > t \geq 0\} \\ &= \bigcup_n \{(w, t) : s_n(w) > t \geq 0\} \\ &= \bigcup_n G(s_n) \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Probemos la integral,

$$\begin{aligned} \int_{[0,\infty)} \mu(\{w \in \Omega : f(w) > t \geq 0\})\lambda(dt) &= \int_{[0,\infty)} \mu((G(f)^1)(t))\lambda(dt) \\ &= \int_{\Omega} \lambda((G(f))^2(w))\mu(dw) \\ &= \int_{\Omega} \lambda(\underbrace{\{t \geq 0 : f(w) > t \geq 0\}}_{[0,f(w))})\mu(dw) \\ &= \int_{\Omega} f(w)\mu(dw) \end{aligned}$$

■

Dem. Notemos que si probamos Tonelli entonces podemos probar Fubini ya que si $f \in L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ podemos separar $f = f^+ - f^-$ donde $f^+, f^- \geq 0$.

Probemos que,

$$\begin{aligned} x &\longmapsto \int_{\Omega_2} f(x, y)\mu_2(dy), \quad \mathcal{F}_1\text{-medible.} \\ y &\longmapsto \int_{\Omega_1} f(x, y)\mu_1(dx), \quad \mathcal{F}_2\text{-medible.} \end{aligned}$$

- **Paso 1.** Supongamos que $f = \mathbb{1}_E$ con $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$. Entonces,

$$\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_E \mu_2(dy) = \mu_2(\{y \in \Omega_2 : (x, y) \in E\}) = \mu_2(E^2(x))$$

- **Paso 2.** Sea f una función simple positiva. Aplicando el paso anterior se llega a que las funciones definidas son medibles.
- **Paso 3.** Sea $f \geq 0$ medible. Sea $\{s_n\}_n$ funciones simples tales que,
  - $0 \leq s_n \leq f$.
  - $s_n(x, y) \leq s_{n+1}(x, y)$ para todo $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ para todo $n \geq 1$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy) &= \int_{\Omega_2} \lim_{n\to\infty} s_n(x,y)\mu_2(dy) \\
&\overset{\text{TCM}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} \underbrace{s_n(x,y)\mu_2(dy)}_{\mathcal{F}_1\text{- medible}} \\
&= \sup_n \int_{\Omega_2} s_n(x,y)\mu_2(dy) \quad \text{siendo } \mathcal{F}_1\text{-medible}
\end{aligned}$$

Probando que el primer mapeo es $\mathcal{F}_1$-medible. Para el otro mapeo es análogo, por lo tanto las integrales están bien definidas.

Sea

$$G(f) := \{(x,y,t) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathbb{R} : f(x,y) > t \geq 0\}$$

Calculemos I, I_1, I_2 y veamos si son iguales. Para I tenemos,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)(\mu_1 \otimes \mu_2)(dxdy) \\
&= (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \lambda(G(f)) \\
&= (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \lambda)(G(f))
\end{aligned}$$

Para I_1 tenemos,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) \\
&= \int_{\Omega_1} (\mu_2 \otimes \lambda) \underbrace{(\{(y,t) : f(x,y) > t \geq 0\})}_{G(f)^1(x)} \mu_1(dx) \\
&= \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \lambda)(G(f)) \\
&= (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \lambda)(G(f))
\end{aligned}$$

Y por último, para I_2 tenemos,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_1(dx) \right) \mu_2(dy) \\
&= \int_{\Omega_2} (\mu_1 \otimes \lambda)(\{(x,t) : f(x,y) > t \geq 0\})\mu_2(dy) \\
&= \mu_2 \otimes (\mu_1 \otimes \lambda)(\{(y,x,t) : f(x,y) > t \geq 0\}) \\
&= (\mu_2 \otimes \mu_1) \otimes \lambda(\{(y,x,t) : f(x,y) > t \geq 0\}) \\
&\overset{\text{L.}}{=} (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \lambda(\{(x,y,t) : f(x,y) > t \geq 0\}) \\
&= (\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \lambda)(G(f))
\end{aligned}$$

Por lo tanto $I = I_1 = I_2$. Probando el teorema para Tonelli y a su vez el de Fubini. ■

Ejemplo 4.1. Sean $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 2^{\mathbb{N}^*}$, y sean $\mu_1(A) = \mu_2(A) = |A|$ para todo $A \subseteq \mathbb{N}^*$. Se define la función medible,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 - 2^{-x}, & x = y \\ -2 + 2^{-x}, & x = y + 1 \\ 0, & eoc \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_2(dx) &= \sum_{x\geq 1} f(x,y) \\ &= f(y,y) + f(y+1,y) \\ &= 2 - 2^{-y} - 2 + 2^{-y+1} \\ &= 2^{-y-1} - 2^{-y} \\ &= -2^{-y-1} \end{aligned}$$

Y entonces,

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_1(dx) \right) \mu_2(dy) = -\sum_{y\geq 1} 2^{-y-1} = -\frac{1}{2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy) &= \sum_{y\geq 1} f(x,y) \\ &= \begin{cases} f(x,x), & x = 1 \\ f(x,x) + f(x,x-1), & x \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3/2, & x = 1 \\ 2 - 2^{-x} - 2 + 2^{-x}, & x \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 3/2, & x = 1 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) = \frac{3}{2} \neq -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto $f \notin L^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$. Es más,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(x,y)|(\mu_1\otimes\mu_2)(dxdy) &\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1}|f(x,y)|\mu_1(dx)\right)\mu_2(dy)\\
&= \int_{\Omega_2}(|f(y,y)+f(y+1,y)|)\mu_2(dy)\\
&= \sum_{y\geq 1}(|2-2^{-y}|+|\underbrace{-2+2^{-y-1}}_{\geq 0}|)\\
&= \sum_{y\geq 1}(2-2^{-y}+2-2^{-y-1}) = \infty
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. Sean $\Omega_1 = [0,1], \Omega_2 = [1,\infty), \mathcal{F}_1 = \mathcal{B}(\Omega_1), \mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(\Omega_2)$ con medida $\mu_1 = \mu_2 = \lambda$. Sea la función,

$$f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_2(dx) &= \int_0^1 (e^{-xy}-2e^{-2xy})dx\\
&= \left(-\frac{e^{-xy}}{y}+\frac{e^{-2xy}}{y}\right)\Bigg|_0^1\\
&= -\frac{e^{-y}}{y}+\frac{e^{-2y}}{y}\\
&= \frac{e^{-2y}-e^{-y}}{y} \in L^1(\Omega_2,\mu_2)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\mu_2(dx)\right)\mu_2(dy) = \int_{[1,\infty)}\frac{e^{-2y}-e^{-y}}{y}\lambda(dy)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy) &= \int_1^\infty e^{-xy}-2e^{-2xy}dy\\
&= \left(-\frac{e^{-xy}}{x}+\frac{e^{-2xy}}{x}\right)\Bigg|_{y=1}^{\infty}, \quad (x\neq 0)\\
&= \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} \in L^1(\Omega_1,\mu_1)\\
&\approx \frac{(1-x)-(1-2x)}{x}\\
&\approx \frac{x}{x}\\
&\approx 1
\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\mu_2(dy)\right) = \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx > 0$$

En conclusión $f \notin L^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.

Ejercio probar que

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(x,y)|(\mu_1 \otimes \mu_2)(dxdy) = \infty$$

5. Diferenciación

Observación 5.1. En este capitulo consideraremos el σ-álgebra $\mathcal{L}$ de los conjunto λ-medibles de $\mathbb{R}$. Ya que,

i) $\mathcal{L}$ es completa (que tiene todos los λ-despecriable).

ii) Se puede definir la derivada como.

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

de forma λ-ctp, entonces f' es $\mathcal{L}$-medible.

Veamos si podemos comparar el TFC de Riemann sobre un tipo de TFC de Lebesgue.

Ejemplo 5.1.

- Si f' es continua, entonces esto es TFC (con la integral de Riemann). Sea la función,

  $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1/2] \\ x+\frac{1}{2}, & x \in (1/2,1] \end{cases}$$

  En el plano sería,

  Figura.

  Vemos que $f' = 1$ de forma λ-ctp y luego,

  $$\int_0^1 f'(x)\lambda(dx) = \int_0^1 1\lambda(dx) = \lambda([1,0]) = 1$$

  Pero también ocurre que f es R-integrable con valor,

  $$\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = \frac{3}{2}$$

  Es decir, las integrales de Lebesgue y de Riemann toman valores distintos. ¿Bastará con continuidad?

- Definimos f_n como la siguiente figura **Figura.**

  usando el conjunto de Cantor. Por construcción,

  $$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$

  para todo $m \geq n \geq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Luego $\{f_n\}_n$ es Cauchy en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Por tanto existe $f \in C[0,1]$ talque,

  $$f_n \to f$$

de forma uniformemente. Podemos ver que $f'(0)$ está fuera del conjunto de Cantor (que tiene medida 0). Luego f' existe λ-ctp y $f' = 0$ λ-ctp, por lo que,

$$\int_0^1 f'(x)\lambda(dx) = 0 \neq f(1) - f(0) = 1$$

Por tanto, no basta con continuidad ni con derivada λ-ctp.

5.1. Funciones Crecientes

Lema 5.1. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ creciente. Luego, f tiene a lo más numerable discontinuidades.*

Dem. Observemos que las discontinuidades de f sólo puende ser saltos acotados por $f(b) - f(a)$. Sea $x \in [a,b]$, sea,

$$w(x) = \lim_{y \to x^+} f(y) - \lim_{y \to x^-} f(y) \geq 0$$

Figura.

Luego,

$$\begin{aligned} w(x_1) &\leq f(b) - f(a) \\ w(x_2) &\leq f(b) - f(a) \\ w(x_1) + w(x_2) &\leq f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Sea,

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{x \in [a,b] : f \text{ es discontinua en } x\} \\ &= \{x \in [a,b] : w(x) > 0\} \\ &= \bigcup_{\delta > 0} \{x \in [a,b] : w(x) > \delta\} \\ &= \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{\{x \in [a,b] : w(x) \geq 1/n\}}_{=:\mathcal{D}_n} \end{aligned}$$

Afirmación. *Cada $\mathcal{D}_n$ es finito.*

Dem. Sean $x_1, \ldots, x_L \in \mathcal{D}_n$ distintos. Luego,

$$\frac{L}{n} \leq \sum_{k=1}^{L} w(x_k) \leq f(b) - f(a)$$

ya que $w(x_k) > 1/n$ para todo $k = 1, \ldots, L$. Por lo tanto, $L \leq n(f(b) - f(a))$, entonces,

$$\mathcal{D}_n \leq n(f(b) - f(a))$$

■

Por lo tanto, $\mathcal{D}$ es unión numerable de conjuntos numerable, luego f tiene a lo más discontinuidades numerable. ■

Nota 5.1. Podemos concluir que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente es acotada y luego es R-integral como tiene conjunto de discontinuidades despreciable.

Definición 5.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos,*

$$\overline{D}f(x) := \lim_{h\to 0^+} \sup_{0<|t|<h} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

$$\underline{D}f(x) := \lim_{h\to 0^+} \inf_{0<|t|<h} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

con valores en $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\}$.

Observación 5.2. f es diferenciable en x si y sólo si,

$$\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$$

En este caso, $f'(x) = \overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$.

Definición 5.2. (Cubrimiento de Vitali) *Sea $\mathcal{V}$ una colección de intervalos cerrados de interior no vacío y sea $E \subseteq \mathbb{R}$. Decimos que $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de Vitali de E si para todo $x \in E$ para todo $\delta > 0$ existe un intervalo $I \in \mathcal{V}$ talque $x \in I$ y $|I| < \delta$.*

Teorema 5.1. (Lema de Vitali) *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ con $\lambda^*(E) < \infty$ y sea $\mathcal{V}$ un cubrimiento de Vitali de E. Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n \geq 1$ e $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{V}$ disjuntos a pares tales que,*

$$\lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) < \varepsilon$$

Dejaremos pendiente la demostración para más adelante.

Lema 5.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente. Luego para todo $\alpha > 0$ se tiene que,*

$$\lambda^*(\{x \in [a, b] : \overline{D}f(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}(f(b) - f(a))$$

Dem. Consideremos el conjunto,

$$E_\alpha := \{x \in [a, b] : \overline{D}f(x) > \alpha\}$$

Si E_α es vacío entonces estamos listo. Supongamos que no es vacío y sea $0 < \alpha' < \alpha$, si $x \in E_\alpha$ entonces,

$$\overline{D}f(x) > \alpha > \alpha'$$

En particular $E_\alpha \subseteq E_{\alpha'}$. Luego existe un $h > 0$ y un $t > 0$ con $0 < |t| < h$ talque,

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t} > \alpha'$$

Usaremos los intervalos $[x, x+t]$ a $[x+t, x]$ definidos de esta forma para construir un cubrimiento de Vitali. Sea,

$$\mathcal{V} := \{[c,d] \subseteq (a,b] : \frac{f(d)-f(c)}{d-c} > \alpha?‘$$

Afirmamos que es un cubrimiento de Vitali de E_α **Demostrar.**

Sea $\varepsilon > 0$, por el lema de Vitali existe $n \geq 1$ y $I_1, \ldots, I_n$ disjuntos tales que,

$$\lambda^*\left(E_\alpha \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) < \varepsilon$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(E_\alpha) &\leq \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) + \varepsilon \\
&= \sum_{i=1}^{n}(d_i - c_i)\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{\alpha'}\sum_{i=1}^{n}(f(d_i) - f(c_i)) + \varepsilon \\
&< \frac{1}{\alpha'}(f(b) - f(a)) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Como podemos tomar cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $0 < \alpha' < \alpha$, concluimos que,

$$\lambda^*(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}(f(b) - f(a))$$

Probando el lema. ∎

Teorema 5.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona entonces,*

i) f es diferenciable λ-ctp.

ii) $f' \in L^1([a,b])$.

iii) Si f es creciente, entonces,

$$\int_a^b f' d\lambda \leq f(b) - f(a)$$

Nota 5.2. Recordemos que una función creciente tiene discontinuidades a lo más numerable, esto también implica que podemos derivar sobre partes continuas y en la parte que no es diferenciable como en una discontinuidad la podemos ignorar ya que es despreciable, de forma que es diferenciable de forma λ-ctp. Aun así debemos formalizar la demostración.

Dem. Sin pérdida de generalidad supongamos que f es creciente. Tomemos $\overline{D}f(x), \underline{D}f(x)$ y por convención digamos que,

$$f(x) = f(a)\ \forall x \leq a, \quad f(x) = f(b)\ \forall x \geq b$$

Sabemos que f es diferenciable en x si y sólo si $\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$. Sea el conjunto,

$$E_\alpha = \{x \in [a,b] : \overline{D}f(x) > \alpha\}$$

Luego por el lema anterior sabemos que,

$$\lambda^*(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha}(f(b) - f(a))$$

i) Probemos que f es diferenciable λ-ctp. Notemos que,

$$\begin{aligned} B :&= \{x \in [a,b] : f \text{ no es diferenciable en } x\} \\ &= \{x \in [a,b] : \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\} \\ &= \bigcup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{Q} \\ \alpha>\beta}} \{x \in [a,b] : \overline{D}f(x) > \alpha > \beta > \underline{D}f(x)\} \end{aligned}$$

Sea,

$$E_{\alpha,\beta} := \{x \in [a,b] : \overline{Df(x)} > \alpha > \beta > \underline{D}f(x)\}$$

Debemos probar que,

$$\lambda^*(E_{\alpha,\beta}) = 0$$

para todo $\alpha > \beta \in \mathbb{Q}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $O \supseteq E_{\alpha,\beta}$ abierto talque,

$$\lambda^*(O \setminus E_{\alpha,\beta}) < \varepsilon$$

Sea,

$$\mathcal{V} := \{[c,d] \subseteq O : c < d, f(d) - f(c) < \beta(d-c)\}$$

Este conjunto es un cubrimiento de Vitali de $\{x \in [a,b] : \underline{D}f(x) < \beta\} \supseteq E_{\alpha,\beta}$. Sean $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{V}$ disjuntos a pares talque,

$$\lambda^*\left(E_{\alpha,\beta} \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) < \varepsilon$$

Escribimos $U_j = [c_j, d_j]$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(E_{\alpha,\beta}) &\leq \lambda^*\left(E_{\alpha,\beta} \cap \bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(E_{\alpha,\beta} \cap [c_i, d_i]) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda^*(E_{\alpha,\beta} \cap [c_i, d_i]) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha}(f(d_i) - f(c_i)) + \varepsilon \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta}{\alpha}(d_i - c_i) + \varepsilon \\
&\leq \frac{\beta}{\alpha}\lambda^*(O) + \varepsilon \\
&\leq \frac{\beta}{\alpha}\lambda^*(E_{\alpha,\beta}) + \frac{\beta}{\alpha}\varepsilon + \varepsilon
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \downarrow 0$ obtenemos,

$$0 \leq \lambda^*(E_{\alpha,\beta}) \leq \frac{\beta}{\alpha}\lambda^*(E_{\alpha,\beta})$$

con $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$, pero entonces $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ por lo tanto,

$$\lambda^*(E_{\alpha,\beta}) = 0$$

Probando que f es diferenciable λ-ctp.

ii) Dado que f es diferenciable podemos tomar,

$$D_h f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde,

$$\lim_{h\to 0} D_h f(x)$$

existe λ-ctp. Definimos,

$$f'(x) := \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} D_h f(x), & \text{si el límite existe.} \\ 0, & \text{cuando no.} \end{cases}$$

Entonces f' es Lebesgue medible al ser un límite. Ahora veamos que está en $L^1[a,b]$. Tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'|d\lambda &= \int_a^b f'd\lambda \quad (f' \geq 0) \\
&= \int_a^b \lim_{h\to 0} D_h f(x)d\lambda \\
&= \int_a^b \underline{\lim}_{h\to 0} D_h f(x)d\lambda \\
&\leq \underline{\lim}_{h\to 0} \int_a^b D_h f(x)d\lambda \\
&= \underline{\lim}_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x+h)d\lambda - \int_a^b f(x)d\lambda\right)
\end{aligned}$$

Figura.

Luego al resta obtenemos,

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f'|d\lambda &\leq \underline{\lim}_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)d\lambda - \int_a^{a+h} \underbrace{f(x)}_{\geq f(a)}d\lambda\right) \\
&\leq \underline{\lim}_{h\to 0} \frac{1}{h}(hf(b) - hf(a)) \\
&= f(b) - f(a) < \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f' \in L^1[a,b]$.

iii) De la parte anterior hemos probado que,

$$\int_a^b f'd\lambda \leq f(b) - f(a)$$

Probando el teorema. ■

Observación 5.1.

- Conocemos ejemplos donde,

$$\int_a^b f'd\lambda < f(b) - f(a)$$

- Para demostrar el teorema fundamental del cálculo neceistamos hipótesis sobre f para cambiar Fatou por un teorema de convergencia.

5.2. Funciones de Variación Acotada

Definición 5.3. (Variación Acotada) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función.*

i) Sea $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ partición de $[a, b]$. Definimos,

$$V(f, \Pi) := \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

ii) Definimos la variación total de f por,

$$V(f, [a, b]) = \sup_{\Pi} V(f, \Pi)$$

En particular, siempre existe.

iii) Decimos que f es variación acotada si,

$$V(f, [a, b]) < \infty$$

Ejemplo 5.3.

- Si f es monótona, entonces es variación acotada. Supongamos que es creciente, luego para cada partición se tiene,

$$\begin{aligned} V(f, \Pi) &= \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &= f(b) - f(a) < \infty \end{aligned}$$

  Luego,

$$V(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$$

- Si f es diferenciable con derivada acotada se tiene que,

$$\begin{aligned} V(f, \Pi) &= \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |f'(c_j)|(x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

  con $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Luego,

$$\begin{aligned} V(f, \Pi) &\leq \sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|(x_j - xj - 1) \\ &= \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|(b - a) < \infty \end{aligned}$$

Por tanto, f es de variación acotada. Es más,

$$V(f,[a,b]) = \int_a^b |f'(x)|dx$$

- Lo mismo vale si f es Lispchitz continua. Es decir, existe $M > 0$ talque,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$$

para todo x, y.

Observaicón 5.2. Si f es de variación acotada y g es continua, podemos definir,

$$\int_a^b gdf := \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{j=1}^n g(x_j^*)\Delta f(x_j)$$

Probar.

Teorema 5.3. (Jordan) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, luego f es de variación acotada si sólo si existen g, h crecientes tales que $f = g - h$.*

Dem. Si $f = g - h$ con g, h es creciente entonces,

$$\begin{aligned}
V(f,\Pi) &= \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \\
&= \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1}) + h(x_{j-1}) - h(x_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^n |g(x_j) - g(x_{j-1})| + \sum_{j=1}^n |h(x_j) - h(x_{j-1})| \\
&= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty
\end{aligned}$$

Y esto es para cualquier partición Π. Por tanto,

$$V(f,[a,b]) < \infty$$

cxxc

Para $x \in [a,b]$ definimos $h(x) := V(f,[a,x])$, luego h es creciente. Para g basta definir $g := h + f$. Veamos que es creciente. Sea $a \leq x \leq y \leq b$, luego por definición,

$$\begin{aligned}
g(x) &= f(x) + V(f,[a,x]) \\
&= f(y) + (f(x) - f(y)) + V(f,[a,x]) \\
&\leq f(y) + |f(y) - f(x)| + V(f,[a,x]) \\
&\leq V(f,[a,y]) + f(y)
\end{aligned}$$

Probando el teorema. ■

Demostremos el lema de Vitali.

Teorema. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ con $\lambda^*(E) < \infty$ y sea $\mathcal{V}$ un cubrimiento de Vitali de E. Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n \geq 1$ e $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{V}$ disjuntos a pares tales que,*

$$\lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} I_i \right) < \varepsilon$$

Dem. Si $\lambda^*(E) < \infty$ entonces por Littlewood existe un abierto $O \supseteq E$ talque $\lambda(O) < \infty$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $I \subseteq O$ para todo $I \in \mathcal{V}$. Sean $\{I_j\}_j \subseteq \mathcal{V}$ disjuntos a pares, luego,

$$\sum_{j \geq 1} |I_j| = \lambda \left(\bigcup_{j \geq 1} I_j \right) \leq \lambda(O) < \infty \ \ (\star)$$

Sea $\varepsilon > 0$ vamos a demostrar que existe $\{I_j\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{V}$ disjuntado de pares talque para todo $n \geq 1$.

$$E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \subseteq \bigcup_{j \geq n+1} 5I_j \ \ (\star\star)$$

donde $5[y - \delta, y + \delta] = [y - 5\delta, y + 5\delta]$. De este modo,

$$\lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{j=1} nI_j \right) \leq \sum_{j \geq n+1} \lambda(5I_j) = 5 \sum_{j \geq n+1} |I_j| < \varepsilon$$

Si n es suficientemente grande. Si existen $I_1, \ldots, I_n$ no hay nada que demostrar. Si no, tomemos $I_1 \in \mathcal{V}$ arbitrario. Supongamos que ya definimos $I_1, \ldots, I_n$. Sea,

$$\mathcal{V}_n := \{I \in \mathcal{V} : I \subseteq O \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j\}$$

En particular, si $x \in E \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ existe $I \in \mathcal{V}_n$ talque $x \in I$. Sea $s_n := \sup\{|I| : I \in \mathcal{V}_n\} \leq \lambda(0) < \infty$, sea $I_{n+1} \in \mathcal{V}$ talque $|I_{n+1}| \geq \frac{s_n}{2}$.

Afirmación. *La colección $\{I_j\}_j$ satisface ($\star\star$) y los I_j's son disjuntos a paress.*

Sea $x \in E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, luego existe $J \in \mathcal{V}_n$ talque $x \in \mathcal{V}_n$. Luego existe $m \geq 1$ talque $J \cap E_m \neq \emptyset$, si no, $J \in \mathcal{V}_n$ para todo $n \geq 1$ y $s_n \geq |J|$ para todo $n \geq 1$, pero entonces tendriamos,

$$|I_n| \geq \frac{s_{n-1}}{2} \geq \frac{|J|}{2} \not\to 0$$

Esto contradice ($\star$) (ya que los I_j's son disjuntos a pares). Finalmente demostremos ($\star\star$). Sea $x \in \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, sea $J \in \mathcal{V}_n$ talque $x \in J$ y sea $m \geq n+1$ talque $I_m \cap J \neq \emptyset$ y $I_j \cap J = \emptyset$ para todo $j < m$.

Figura.

Luego, $x \in S \times I_m$. ■

5.3. Funciones Absolutamente Continuas y Teorema Fundamental de Cálculo

Definición 5.4. (Absolutamente Continua) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Decimos que f es absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque para todo $[c_j, d_j] \subseteq [a,b]$, $j = 1, \ldots, n$ disjuntos a pares si,*

$$\sum_{j=1}^{n} |c_j - d_j| < \delta \Longrightarrow \sum_{j=1} n|f(c_j) - f(d_j)| < \varepsilon$$

Observación 5.3. La definición de absolutamente continua es más fuerte que la continuidad y de ser uniformemente continua.

Teorema 5.4. (Teorema Fundamental del Cáclulo) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua. Luego,*

i) f es diferenciable λ-ctp.

ii) $f' \in L^1[a,b]$.

iii) Para todo $x \in [a,b]$ se cumple,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f' d\lambda$$

Estudiemos algunas propiedades básicas de ser absolutamente continua y la demostración del TFC.

Lema 5.2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua, entonces,*

i) f es continua.

ii) f es uniformemente continua.

iii) f es de variación acotada.

Dem. Demostremos primero ii) ya que este implica i). Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$, como es absolutamente continua si $x, y \in [a,b]$ talque $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Demostremos iii). Sean $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ como antes. Sea,

$$\Pi = \{a = x_0 < \ldots < x_M = b\}$$

con $|\Pi| < \delta$, (M fijo). Sea $\overline{\Pi} = \{x_{j-1} = y_0 < \ldots < y_n = x_j\}$. Luego,

$$\sum_{j=1} n|y_k - y_{k-1}| = |x_j - x_{j-1}| < \delta$$

Por lo tanto, $\sum_{k=1} n|f(y_k) - f(y_{k-1})| < \varepsilon$. TOmando el supremo de las particiones de $[x_{j-1}, x_j]$ llegamos a que,

$$V(f, [x_{j-1}, x_j]) \leq \varepsilon$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
V(f,[a,b]) &\leq \sum_{j=1}^{M} V(f,[x_{j-1},x_j]) \\
&\leq M\varepsilon < \infty
\end{aligned}
$$

■

Dem. (TFC parte 1 y 2) Por el lema anterior, f es de variación acotada. Luego existen $g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ creciente tales que $f=g-h$.

Sabemos que g y h son diferenciables λ-ctp al ser crecientes y por tanto f también lo es. Esto demuestre i).

Sabemos además que $g',h'\in L^1[a,b]$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b |f'|d\lambda &= \int_a^b |g'-h'|d\lambda \\
&\leq \int_a^b |g'|d\lambda + \int_a^b |h'|d\lambda < \infty
\end{aligned}
$$

Y esto demuestra ii). ■

Observación 5.4. Extendemos f como $f(x)=f(a)$ cuando $x\leq a$ y $f(x)=f(b)$ cuando $x\geq b$. Sea,

$$
D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}
$$

Luego converge a $f'(x)$ λ-ctp. Luego como ya vimos,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\int_a^b D_h f d\lambda &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f d\lambda - \int_a^{a+h} f d\lambda\right) \\
&= f(b)-f(a)
\end{aligned}
$$

f continua.

Falta demostrar que,

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\int_a^b D_h f d\lambda &= \int_a^b \lim_{h\to 0} D_f d\lambda \\
&= \int_a bf' d\lambda
\end{aligned}
$$

Para demostrar la última parte necesitamos definir ser uniformemente integrable.

Definición 5.5. (Uniformemente Integrable) *Sea $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y $C\subseteq L^1(\mu)$. Decimos que C es uniformemente integrable si,* *(a) Se cumle,*

$$\lim_{H\to 0}\sup_{f\in C}\int_{|f|\geq M}|f|d\mu = 0$$

(b) Y si,

$$\sup_{f\in C}\int_{\Omega}|f|d\mu < \infty$$

Teorema 5.5. (Teorema Principal) *Sea $f, \{f_n\}_n \subseteq L^1(\mu)$ tales que,*

i) $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

ii) $\{f_n\}_n$ es uniformemente integrable.

iii ***Algo*** *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $E \in \mathcal{F}$ talque $\mu(E) < \infty$ y,*

$$\sup_{n\geq 1}\int_{E^c}|f_n|d\mu < \varepsilon$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\int|f - f_n|d\mu = 0$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Proposición 5.1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Luego f es absolutamente continua si y sólo si $\{D_f\}_h$ es uniformemente integrable.*

Observación 5.6. Esto demuestre el TFC.

Observación 5.7. Supongamos que $\mu(\Omega) < \infty$. Sea $\varepsilon > 0$ y luego existe $M \geq 1$ talque,

$$\int_{|f|\geq M}|f|d\mu < \varepsilon$$

para todo $f \in C$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}|f|d\mu &= \int_{|t|<M}|f|d\mu + \int_{|f|\geq M}|f|d\mu \\ &\leq M\mu(\Omega) + \varepsilon\end{aligned}$$

para todo $f \in C$. Esto implica (b).

Lema 5.2. *Sea $C \subseteq L^1(\mu)$ uniformemente integrable. Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque, (a')*

$$\mu(E) < \delta \Longrightarrow \int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

para todo $f \in C$.

Observación 5.8. El lema anterior es una redefinición del punto (a) de ser uniformemente integrable.

Dem..

Observación 5.9.

- Demostramos que (a) implica (a').
- También que si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces (a) implica (b).
- En probabilidades se deifne uniformemente integrable como (a) con $\mu(\Omega) = 1$.
- En otros libros se define usando (a') y (b).

Teorema 5.6. *Sean $g \in L^1[a, b]$, $c \in \mathbb{R}$ y sea,*

$$f(x) = c + \int_a^x g(t)\lambda(dt)$$

con $x \in [a, b]$. Entonces $f' = g$ λ-ctp.

Dem. Se necesitan los siguientes tres lemas.

Lmea 5.3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Es absolútmamente continua si y sólo si existe $g \in L^1[a, b]$ talque,*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\lambda(dt)$$

para todo $x \in [a, b]$.

Dem.

Lema 5.4. *Sea $g \in L^1[a, b]$ talque,*

$$\int_c^d g(t)\lambda(dt) = 0$$

para todo intervalo $(c, d) \subseteq [a, b]$. Entonces $g = 0$ λ-ctp.

Lema 5.5. *Sea $g \in L^1[a, b]$ y,*

$$h(x) = \int_a^x g(t)\lambda(dt)$$

Entonces $h'(x) = g(x)$ λ-ctp.

6. Espacios L^p

Queremos estudiar funciones para poder resolver ecuaciones diferenciales parciales.

Ejemplo 6.1. El conjunto,

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int |\psi|^2 d\lambda < \infty\right\}$$

En mecánica cuántica

$$P[e^- \text{ en } I] \propto \int_I |\psi|^2 d\lambda$$

6.1. Tres Desigualdades Clásicas

Sabemos que una función la podemos descomponer en $f = f_+ - f_-$.

i) Si,

$$\int f_+ d\mu = \infty, \ \int f_- d\mu < \infty$$

definimos,

$$\int f d\mu = \infty$$

ii) Si,

$$\int f_+ d\mu < \infty, \ \int f_- d\mu = \infty$$

definimos,

$$\int f d\mu = -\infty$$

Si $\mu(\Omega) < \infty$, definimos,

$$\langle f\rangle_\mu := \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f d\mu \tag{1}$$

Siempre y cuando esté bien definida.

Teorema 6.1. (Desigualdad de Jenses) *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita. Sea $f \in L^1(\Omega)$ ysea $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Luego,*

i) $(J \circ f)_- \in L^1(\Omega)$.

ii) $\langle J \circ f\rangle_\mu \geq J(\langle f\rangle_\mu)$

Dem...

Ejemplo 6.2.

- Si $J(t) = t^2$, entonces es convexa y luego,

  $$\langle f^2 \rangle_\mu \geq \langle f \rangle_\mu^2$$

  También se puede demostrar directamente,

  $$\langle f^2 \rangle_\mu - \langle f \rangle_\mu^2 = \langle |f - \langle f \rangle_\mu|^2 \rangle_\mu \geq 0$$

- Si $J(t) = e^t$ entonces,

  $$\langle e^f \rangle_\mu \geq e^{\langle f \rangle_\mu}$$

- Si $J(t) = -\log(t)$ con $t > 0$, entonces,

  $$\langle -\log(f) \rangle_\mu \geq -\log(\langle f \rangle_\mu) \iff \log(\langle f \rangle_\mu) \geq \langle \log(f) \rangle_\mu$$

  En particular, si $a, b, x, y > 0$ con $a + b = 1$ entonces,

  $$a\log(x) + b\log(y) \leq \log(ax + by)$$

- Sean $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ con $p \geq 1$. Si $J(t) = |t|^p$. Sea $\mu(\{j\}) = 1/N$ donde $j = 1, \ldots, N$ y $f(c_j) = x_j$. Luego,

  $$\langle |f|^p \rangle_\mu \geq |\langle f \rangle_\mu|^p$$

  Entonces,

  $$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \geq \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j\right|^p$$

  Luego,

  $$N^{p-1}\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p \geq \left|\sum_{j=1}^{N} x_j\right|^p$$

  Observación 6.1. Si $p \in (0, 1)$ y $x_1, x_2, \ldots, x_N \geq 0$, entonces,

  $$\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^p \leq \sum_{j=1}^{N} x_j^p$$

Teorema 6.2. (Desigualdad de Hölder) *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de meidda arbitrario y sean* $p, q \in [1, \infty)$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Sean* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *medibles. Luego,*

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \right)^{1/q}$$

Nota 6.1. Definimos,

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

más adelantele daremos sentido a la definición.

Dem. Sean $F := \frac{|f|}{\|f\|_p}, G := \frac{|g|}{\|g\|_q}$. Se tiene que,

$$\begin{aligned} \int F^p &= \int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} d\mu \\ &= 1 \end{aligned}$$

Lo mismo para G. Tomemos $a = 1/p, b = 1/q$ y $x = F^p, y = G^q$, entonces por el ejemplo anterior tenemos que,

$$\log(FG) = \frac{1}{p} \log(F^p) + \frac{1}{q} \log(G^q) \leq \log \left(\frac{1}{p} F^p + \frac{1}{q} G^q \right)$$

Tomando la exponcencial llegamos a que,

$$FG \leq \frac{1}{p} F^p + \frac{1}{q} G^q$$

Entonces,

$$\int FG d\mu \leq \frac{1}{p} \int F^p d\mu + \frac{1}{q} \int G^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Entonces,

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

■

Observación 6.1. Si $p = 2$,entonces $q = 2$ y entonces,

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\int |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(|g|^2 \right)^{1/2}$$

Que es la **Desigualdad de Cauchy**. En particular, si $X, Y \in \mathbb{R}^d$ entonces $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \|Y\|$.

Teorema 6.3. (Desigualdad de Minkowski) *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida arbitrario, sea $p \in [1, \infty)$ y sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles. Luego,*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

*También conocida como **Desigualdad Triangular**.*

Dem. Sea $p = 1$, entonces $|p+q| \leq |f| + |g|$ y luego,

$$\|f+g\|_1 = \int |f+g| d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu$$

Si $p > 1$ sea q talque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Y si,

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

Entonces,

$$|f+g|^p = |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

Y por la desigualdad de Hölder tenemos,

$$\int |f||f+g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

Dado que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $p = q(p-1)$ y entonces,

$$\int |f||f+g|^{p-1} d\mu \leq \|f\| \|f+g\|_p^{p/q}$$

Análogamente tenemos,

$$\int |f||f+g|^{p-1} d\mu \leq \|g\|_p \|f+g\|^{p/q}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^p d\mu \\ &\leq \|f+g\|^{p/q} (\|f\|_p + \|g\|_p) \end{aligned}$$

Y si $p - \frac{p}{q} = 1$, finalmente obtenemos,

$$\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$$

■

6.2. Espacios L^p

Observación 6.2. Sea $p \in [1, \infty)$, luego $\| \cdot \|_p$ es casi una norma ya que se cumple,

i) **No negatividad.** $\|f\|_p \geq 0$.

ii) **Constante.** $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$.

iii) **Desigualdad triangular.** $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Y notemos que $\|f\|_p = 0$ si y sólo si $f = 0$ de forma μ-ctp. Es decir, no necesariamente es una norma ya que necesitamos que sea f nula para que se cumpla y tenemos una colección que anula a la norma. Para arreglar esto hablaremos de clases de equivalencia. Diremos que $f \equiv g$ si y sólo si $f = g$ de forma μ-ctp y en efecto es una relación de equivalencia.

Ahora podemos considedar la clases de equivalencia,

$$[f] = \{g : f = g \ \mu\text{-ctp}\}$$

Definimos $\|[f]\|_p := \|g\|_p$ donde g es cualquier elemento de la clase de equivalencia.

Con esto obtenemos que $\|[f]\|_p = 0$ si y sólo si $[f] = [0]$, de forma que es una norma sobre la clase de equivalencia.

Definición 6.1. (Espacio L^p) *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida arbitrario y sea $p \in [1, \infty)$. Definimos el espacio L^p por,*

$$L^p := L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ medibles} : \|f\|_p < \infty\}$$

con norma,

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Observación 6.3. Sean $f, g \in L^p$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\|\alpha f + \beta g\|_p \leq |\alpha| \|f\|_p + |\beta| \|g\|_p < \infty$$

Es decir, $\alpha f + \beta g \in L^p$ y por lo tanto L^p es un espacio vectorial normado.

Observación 6.4. Podemos definir $\varphi_p(f, g) = \|f - g\|_p$ como una métrica (sobre la clases de equivalencias).

Teorema 6.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida completo (como espacio de medida). Luego L^p es un espacio completo (como espacio métrico).*

Dem. Sea $\{f_n\}_n \subseteq L^p$ una sucesión de Cauchy, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque,

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$$

Para todo $n, m \geq N$. Sea $n_1 \geq 1$ talque $\|f_n + f_m\|_p < \frac{1}{2}$ para todo $m > n_1$, habiendo definido $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ escogemos $n_{k+1} > n_k$ talque $\|f_{n_{k+1}} - f_m\|_p < \frac{1}{2^{k+1}}$ para todo $m > n_{k+1}$, de este modo $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p < \frac{1}{2^k}$ para todo $k \geq 1$. Sean,

$$g_m := \sum_{k=1}^{m} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$
$$g := \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

Y definimos,

$$\overline{g} := \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

Notemos que $\overline{g}$ están bien defino con valores $[0, \infty]$. Notemos que por desigualdad triangular,

$$\|\overline{g}\|_p \leq \sum_{k \geq 1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p$$
$$\leq \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} < \infty$$

Por tanto,

$$\int |\overline{g}|^p d\mu < \infty$$

con $0 \leq \overline{g} < \infty$ de forma μ-ctp. Por lo tanto, g es absolutamente convergente μ-ctp.

Luego $g_m \to g$ de forma μ-ctp y si cada g_m es medible y $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es completo, entonces g es completo, entonces g es medible. Además,

$$\|g\|_p \leq \sum_{k \geq 1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \infty$$

Y entonces $g \in L^p$. Vamos a probar que el límite de la sucesión es g. Tenemos que,

$$\|g_m - g\|_p \leq \sum_{k \geq m} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Luego $g_m \to g$ en L^p. Finalmente $f_n \to f_{n_1} + g$ en L^p. ■

Por lo tanto, si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es completo, entonces $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio normado completo, es decir, esun espacio de Banach.

Definición 6.2. (Espacio de Hilbert) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Decimos que es un espacio de HIlbert si existe un producto punto $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ talque $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ para todo $v \in X$.*

En el caso de L^2 se tiene,

$$\|f\|_2^2 = \int |f|^2 d\mu = \langle f, f\rangle$$

Luego si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es completo, entonces L^2 es espacio de Hilbert.

En el caso complejo consideramos funciones a $\mathbb{C}$, definimos,

$$\langle f, g\rangle = \int \overline{f} g d\mu$$

de modo que,

$$\langle f, f\rangle = \int \overline{f} f d\mu = \int |f|^2 d\mu$$

6.3. Funciones Lineales

Definición 6.2. *Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacio vectorial normado. Decimos que es una función lineal $l : X \to Y$ es continua si existe $c \in (0, \infty)$ talque,*

$$\|l(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

para todo $x \in X$. Si $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ decimos que $l(x)$ es funcional lineal continua.

Ejemplo 6.3.

- Sea $p \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $g \in L^q$. Sea $l : L^p \to \mathbb{R}$ talque,

  $$f \mapsto \int f g d\mu$$

  Luego,

  $$|l(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

  Entonces l es funcional lineal continua.

- $X = C^1(\mathbb{R})$, $\|f\| = \|f\|_\infty$, $l(f) = f'(0)$ no continua. Luego,

  $$f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(n^2 x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  En $\|\cdot\|_\infty$, y

  $$l(f_n) = n \to \infty$$

Lema 6.1. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert y $l : X \to \mathbb{R}$ funcional lineal continua. Luego existe un único $y \in X$ talque $l(x) = \lambda y, x\rangle$ para todo $x \in X$.*

Dem. Terminar.

Observación 6.5. Si $p = 1$ entonces $q = \infty$. Definimos el supremo escencial de f como,

$$\text{sup-es} f = \text{ínf}\{M \in \mathbb{R} : \mu(\{w : f(w))$$

Luego,

$$\|f\|_\infty = \text{sup-es}|f|, \quad L^\infty = \{f \text{ medible} : \|f\|_\infty < \infty\}$$

Si $g \in L^1$ entonces,

$$\begin{aligned}\left|\int fg d\mu\right| &\leq \int |f||g| d\mu \\ &\leq \|f\|_\infty \int |g| d\mu \\ &= \|f\|_\infty \|g\|_1\end{aligned}$$

esto es Hölder en el caso $p = 1$.

7. Ayudantías

7.1. Ayudantía 1

P1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrable. Demuestre que existe una sucesión $\{\Pi_n\}_n$ de particiones de $[a, b]$ talque $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(f, \Pi_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, \Pi_n)$$

Sol. Si f es R-integrable, entonces para $1/n > 0$ existe una partición Π'_n talque

$$U(f, \Pi'_n) - L(f, \Pi'_n) < \frac{1}{n}$$

De esta forma definimos una colección de particiones $\{\Pi_n\}_n$, definimos la siguiente partición

$$\Pi_1 := \Pi'_1$$
$$\Pi_n := \bigcup_{k=1}^{n} \Pi'_k$$

Podemos observar que

$$\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$$

Y que además

$$U(f, \Pi_n) - L(f, \Pi_n) < U(f, \Pi'_n) - L(f, \Pi'_n) < \frac{1}{n}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} U(f, \Pi_n) - L(f, \Pi_n) = 0$$

Como $\{U(f, \Pi_n)\}_n, \{L(f, \Pi_n)\}_n$ son sucesiones monótnas y acotadas, se tiene que los límites existen y son iguales, ahora como $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$ y son independientes de índice n, se puede observar que

$$\lim_{n\to\infty} L(f, \Pi_n) \leq \mathcal{L}(f) = \mathcal{U}(f) \leq \lim_{n\to\infty} U(f, \Pi_n)$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} U(f, \Pi_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, \Pi_n) = \mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$$

Concluyendo el enunciado.

P2. (Lema de Riemann-Lebesgue) *Sea f Riemann-integrable en $[a, b]$. Demuestre que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}(nx)dx = 0$$

Sol. Si f es R-integrable, entonces para $\varepsilon > 0$ existe una función s escalonada $s \leq f$ talque

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b s(x)dx < \varepsilon$$

(Recordemos que las funciones escalonadas son R-integrables). Si

$$s(x) = \begin{cases} m_1, & x \in [x_0, x_1] \\ \vdots & \\ m_n, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Entonces

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Si

$$\int_a^b \operatorname{sen}(nx)dx = -\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_a^b$$

Luego

$$\int_a^b s(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \int_{x_0}^{x_1} m_1 \operatorname{sen}(nx)dx + \cdots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} m_n \operatorname{sen}(nx)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

por lo anterior, ahora notemos que

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(nx) - \int_a^b s(x)\operatorname{sen}(nx)dx\right| &\leq \int_a^b |f(x) - s(x)||\operatorname{sen}(nx)|dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - s(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Aplicando el límite $n \to \infty$, observamos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(nx)\right| \leq \lim_{n\to\infty}\left|\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(nx)dx - \int_a^b s(x)\operatorname{sen}(nx)\right| + 0 < \varepsilon$$

Y esto se puede hacer para todo $\varepsilon > 0$, probando que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\operatorname{sen}(nx) = 0$$

P3. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrables:*

(a) Pruebe que fg es Riemann-integrable.

(b) Para cada partición Π *de* $[a,b]$*, elegimos dos puntos* $\xi_j, \eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$*. Pruebe que:*

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)g(\eta_j)(x_j - x_{j-1}) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Sol.

(a) Enunciaremos y probaremos el siguiente lema:

Lema. *Si* $f : [a,b]$ *es R-integrable, entonces* f^2 *es R-integrable.*

Dem. Si f es R-integrable, entonces existe un $K \in \mathbb{R}$ talque $|f| \leq K$, luego para todo $x, y \in [a,b]$ se tiene

$$|f^2(x) - f^2(y)| \leq |f(x) + f(y)||f(x) - f(y)| \leq 2K|f(x) - f(y)|$$

Es muy parecido a ser Lipschitz. Recordemos que la oscilación de un intervalo I es

$$w(f, I) = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$$

Luego

$$w(f^2, I) = \sup_{x\in I} f^2(x) - \inf_{x\in I} f^2(x) \leq 2K \left(\sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x) \right) = 2Kw(f, I)$$

Ya que **Completar...**. En virtud de que f es R-integrable, para $\varepsilon > 0$, existe un Π talque

$$\sum_{i=1}^{n} w(f, I_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2K}$$

donde $I = [x_{i-1}, x_i]$ en función de la partición Π. Para esta misma partición se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} w(f^2, I_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} 2Kw(f, I_i)\Delta x_i < \varepsilon$$

Por lo tanto, f^2 es R-integrable sobre $[a,b]$. ■

Ahora, para demostrar que fg es R-integrable, notemos que

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

Es decir, si f, g son R-integrables, entonces $f+g, f-g$ también lo son y por lema anterior $(f+g)^2, (f-g)^2$ también son R-integrable, por lo tanto fg es R-integrable.

(b)

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i\right| \leq & \left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i\right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n (f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\xi_i)g(\xi_i))\Delta x_i\right| \\ & \left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i\right| \\ & + \left|\sum_{i=1}^n (f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\xi_i)g(\eta_i))\Delta x_i\right|\end{aligned}$$

Al lado derecho del menor igual, en la tercera fila, le diremos $\star_1$ al valor absoluto, y al de la fila cuatro notemos que

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(g(\xi_i) - g(\eta_i))\Delta x_i\right| \leq K\left|\sum_{i=1}^n (g(\xi_i) - g(\eta_i))\Delta x_i\right| \leq K\left|U(g,\Pi) - L(g,\Pi)\right|$$

donde $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$, y Π es una partición bien definida donde $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Digamos que $\star_2 := K|U(g,\Pi) - L(g,\Pi)|$, luego con respecto a $\star_1$ tenemos una suma de Riemann con un representante con elementos ξ_i, por lo que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ talque si $|\Pi| < \delta_1$, entonces

$$|\star_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Con respecto a $\star_2$ tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta_2 > 0$ talque si $|\Pi| < \delta_2$, entonces

$$|\star_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego finalmente, para cualquier $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ de forma que si $|\Pi| < \delta$, entonces

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon$$

Concluyendo el enunciado.

P4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $f_n(x) = ne^{-nx}$.*

(a) Pruebe que f_n es Riemann-integrable para cada $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) := f(x) = 0$$

para todo $x \in (0,1]$.

(c) *Pruebe que:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$$

Sol.

(a) Sea n fijo, notemos que f_n es diferenciable en todo $[0,1]$, por lo que es continua en todo $[0,1]$. Por lo que es R-integrable.

(b) Sea $x \in (0,1]$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{nx}} = 0$$

Ya que e^x crece más rapido que cualquier función polinomial, también por l'hopital

$$\frac{1}{ne^{nx-1}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

(c) Vemos que

$$\int_0^1 ne^{-nx}dx = -e^{-nx}\Big|_0^1 = -e^{-n}+1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$$

7.2. Ayudantía 2

P1. *Sea f una función real defenida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Suponga que f es no negativa y acotada. Demuestre que si I_1, I_2 son abiertos tales que $I_1 \subset I_2 \subset (a,b)$ entonces $w(f,I_1) \leq w(f,I_2)$.*

Sol. Si f es acotado no negativo, entonces está bien definido el supremo e ínfimo en cualquier intervalo contenido en (a,b). Notemos que si $I_1 \subset I_2$, entonces

$$\sup_{x\in I_1} f(x) \leq \sup_{x\in I_2} f(x)$$

Ya que si paa todo $x \in I_1$ se tiene que

$$f(x) \leq \sup_{x\in I_2} f(x)$$

como $I_1 \subseteq I_2$, luego el supremo de f sobre I_2 es cota superior de los $x \in I_1$. Con este argumento se puede concluir que

$$\inf_{x\in I_1} f(x) \geq \inf_{x\in I_2} f(x)$$

Por lo tanto

$$\sup_{x\in I_1} f(x) - \inf_{x\in I_1} f(x) \leq \sup_{x\in I_2} f(x) - \inf_{x\in I_2} f(x) \Longleftrightarrow w(f,I_1) \leq w(f,I_2)$$

P2. *Para cada $n \geq 1$, sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función R-integrable. Supongamos que existe una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ talque $f_n \to f$ uniformemente.*

(a) Demuestre que f R-integrable.

(b) Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Sol.

(a) Recordemos que una función f_n converge uniformemente a f si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, talque para todo $n \geq N, x \in [a,b]$ se tiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Además, si f_n son R-integrables, entonces son acotadas, luego f es acotada, de forma que está bien definido para integral superior e inferior. De aquí se puede ver que

$$-\varepsilon + f_n(x) < f(x) < \varepsilon + f_n(x)$$

para cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$, luego

$$-\varepsilon + m_i \leq m_i' \leq M_i' \leq M_i + \varepsilon_1$$

Probemos que f es R-integrable. Si los f_n son R-integrables, tenemos que para todo $\varepsilon' > 0$ existe una partición Π talque

$$U(f_n, \Pi) - L(f_{,n}, \Pi) < \varepsilon'$$

Luego

$$\begin{aligned}
U(f, \Pi) - L(f, \Pi) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')\Delta x_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ((M_i - m_i) + 2\varepsilon)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} 2\varepsilon \Delta x_i \\
&< \varepsilon' + 2\varepsilon(b-a)
\end{aligned}$$

Podemos tomar $\varepsilon', \varepsilon$ tan pequeño como queramos, de forma que f es R-integrable.

(b) Si f_n converge uniformemente a f, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe N talque

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

para todo $n \geq N, x \in [a, b]$. Si f_n, f son R-integrable, se tiene que $f_n - f$ es R-integrable, luego por propiedades de integral, se tiene que

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx < \varepsilon$$

Y eso para todo $n \geq N$. Por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

P3. *Sea* $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ *y así sucesivamente. Definimos el conjunto de Cantor por:*

$$\mathcal{C} := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Pruebe que $\mathcal{C}$ *es despreciable.*

Sol. Notemos que $\mathcal{C} \subseteq C_n$. Entendamos la forma de C_n

Figura.

En el fondo, el intervalo $[a, b] \subseteq [0, 1]$ lo dividimos en tres intervalos e ignoramos el del medio. Podemos ver que los largos de cada unión de C_n, es de $1/3^n$ y tendría 2^n intervalos cerrados. Por lo que para C_n se cumple

- $C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$.
- $|I_{n,k}| = \frac{1}{3^n}$

Sumando todos los intervalos, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{2^n} |I_{n,k}| = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir, la suma de los intervalos se hace tan pequeño. Por lo tanto $\mathcal{C}$ es despreciable ya que para $\varepsilon > 0$, podemos tomar n suficientemente grande y generar la colección $\{I_i\}_i$ de intervalos cerrados, donde la unión contiene a $\mathcal{C}$ y la suma de estos es menor a ε.

P4. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$ es despreciable. Demuestre que $f = g$.*

Sol. Supongamos que $f \neq g$, entonces existe un $x_0 \in [a, b]$ talque $f(x_0) \neq g(x_0)$. Digamos que $A = \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$, luego $x_0 \in A$. Por continuidad de f, g tenemos que para todo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ respectívamente, tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1, \quad |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_2$$

para todo $|x - x_0| < \delta_1, \delta_2$. Sea $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$|(f - g)(x) - (f - g)(x_0)| < \varepsilon$$

para todo $|x - x_0| < \delta$, como $f(x_0) \neq g(x_0)$ podemos ver que tomar $\varepsilon > 0$ de tal manera que

$$\underbrace{-\varepsilon + \underbrace{(f - g)(x_0)}_{\neq 0}}_{\neq 0} < (f - g)(x)$$

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (si $(f - g)(x_0)$ toma un valor positivo o negativo, por continuidad $f - g$ estará acotado siendo positivo o negativo cuando x está muy cerca de x_0). Es decir $f \neq g$ en un intervalo abierto (no es despreciable), por lo tanto A no es despreciable, siendo una contradicción. Por lo tanto $f = g$.

P5. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función R-integrable talque el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$ es despreciable. Demuestre que*

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

(Hint: Tener en cuenta que si $E \subset \mathbb{R}$ es despreciable, entonces E^c es denso en $\mathbb{R}$).

Sol. Si el conjunto

$$E := \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$$

es despreciable, entonces E^c es denso. Sea $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición cualquiera, recordemos que

$$L(f,\Pi) \leq S(f,\Pi,\underline{\mathcal{C}}) \leq U(f,\Pi)$$

con $\underline{\mathcal{C}}$ un representante de Π. Como E^c es denso, en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ podemos tomar $\mathcal{C}_i \in E^c$ talque $f(\mathcal{C}_i) = 0$, de forma que

$$L(f,\Pi) \leq 0 \leq U(f,\Pi)$$

para toda partición. Esto implica que

$$\mathcal{L}(f) \leq 0 \leq \mathcal{U}(f)$$

Y como f es R-integrable, se concluye que

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

7.3. Ayudantía 3

P1. *Si E es despreciable. Demuestre que E^c se denso en $\mathbb{R}$.*

Sol. Recordemos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es denso, si $\overline{A} = \mathbb{R}$ o bien, para todo $x \in \mathbb{R}$, y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $y \in A$ talque

$$|x - y| < \varepsilon$$

Sea $x \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$, si $x \in E^c$ estamos listo, ya que entonces $x \in \overline{E^c}$. Supongamos que $x \in E$, para $\varepsilon > 0$ existe una colección de intervalos abiertos $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

- $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$.
- $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$

Entonces existe un intervalo $I_i := (a_i, b_i)$ que contiene a x. Notemos que $I_i \setminus E \neq \emptyset$, ya que si no, tendriamos que todos los elementos de I_i están en E para que E los saque de I_i, es decir, $I_i \subseteq E$, pero entonces E no es un conjunto despreciable, siendo contradicción. Por lo tanto existe un $y \in I_i \cap E^c \subseteq I_i$ talque

$$|x - y| \leq b_i - a_i = |I_i| \leq \sum_{i=1} \infty |I_i| < \varepsilon$$

Probando ue E^c es denso en $\mathbb{R}$.

Sol. (Alternativa) Si E es despreacible, entonces $\lambda^*(E) = 0$, queremos probar que si $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$B(x, \varepsilon) \cap E^c \neq \emptyset$$

Probemos que $\lambda^*((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap E^c) > 0$ ya que entonces $B(x, \varepsilon) \cap E^c \neq \emptyset$. Si E es despreciable, entonces es λ^*-medible, es decir

$$\begin{aligned} \lambda^*(x - \varepsilon, x + \varepsilon) &= \lambda^*((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap E) + \lambda^*((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap E^c) \\ &= \lambda^*((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap E^c) \end{aligned}$$

(Notemos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap E \subseteq E$, luego vale 0). Entonces

$$\lambda^*((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap E^c) = 2\varepsilon > 0$$

Por lo tanto

$$B(x, \varepsilon) \cap E^c \neq \emptyset$$

P2.

(a) Probar que $\lambda^*(A) = \lambda^*(A + x)$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$, donde $A + x = \{y + x : y \in A\}$.

(b) Sea $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-medible. Pruebe que $A + h$ es Lebesgue-medible.

Sol.

(a) Probemos que $\lambda^*(A+x)$ es cota inferior de las sumas que cubren a A. Sea $\{I_i\}$ una colección de intervalos abietos que cubren a A, notemos que

$$|I_i + x| = |I_i|$$

para todo i. Luego

$$A + x \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i + x| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Y entonces

$$\lambda^*(A+x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

Para cualquier cubrimiento abierto de A. Es decir

$$\lambda^*(A+x) \leq \lambda^*(A)$$

Para la otra dirección es análogo.

(b) Sea A medible, probemos que $A+x$ es medible. Notemos que

$$B \cap (A+x) = [(B-x) \cap A] + x$$
$$B \cap (A+x)^c = [(B-x) \cap A^c] + x$$

Sea $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda^*(B) &\leq \lambda^*(B \cap (A+x)) + \lambda^*(B \cap (A+x)^c)\\ &= \lambda^*([(B-x) \cap A] + x) + \lambda^*([(B-x) \cap A^c] + x)\\ &= \lambda^*([(B-x) \cap A]) + \lambda^*([(B-x) \cap A^c])\\ &= \lambda^*(B-x) = \lambda^*(B)\end{aligned}$$

(No parece tan obvio, pero probamos que $\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B \cap (A+x)) + \lambda^*(B \cap (A+x)^c)$ y la otra desigualdad). Por lo tanto $A+x$ es medible.

P3. *Sea $\delta > 0$ y sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $dist(A,B) > \delta$. Demuestre que $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.*

Sol. Sabemos por propiedades de medida exterior, que

$$\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

Sea $\varepsilon > 0$, existe un cubrimiento talque

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \leq \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon$$

Supongamos que I_i intersecta a A o a B, pero no a ambos. Definimos

$$J_E := \{i \in \mathbb{N} : I_i \cap E \neq \emptyset\}$$

Sean $\{I_i\}_{i\in J_A}, \{I_i\}_{i\in_B}$, entoncdes

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{j\in J_A} |I_i|, \quad \lambda^*(B) \leq \sum_{j\in J_B} |I_i|$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) + \lambda^*(B) &\leq \sum_{j\in J_A} |I_i| + \sum_{j\in J_B} |I_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \\
&\leq \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Esto se puede hacer para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leq \lambda^*(A \cup B)$$

Probando la igualdad para el caso que siempre exista tal J_i. En general, dado $\delta > \eta > 0$, todo I_j lo podemos dividir en intervalos de largo a lo más (de forma conveniente) y obtenemos una colección de intervalos $\{\overline{I}_j\}_j$ que a lo más intersecta a A o B pero no a ambos.

P4. *Pruebe que no existe una medida exterior no nula μ^* sobre $\mathbb{Q}$ talque*

$$\mu^*(\{x \in \mathbb{Q} : a \leq x \leq b\}) = b - a$$

Para todo $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$.

Sol. Supongamos que existe una medida que satisface tales condiciones sobre $\mathbb{Q}$. Notemos que para $q \in \mathbb{Q}$

$$\mu^*(\{q\}) \leq \mu^*\left(\left(q - \frac{\varepsilon}{2}, q + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \mathbb{Q}\right) = \varepsilon$$

Tomando $\varepsilon = 1/n > 0$, se observa que $\mu^*(\{q\}) = 0$. Ahora tenemos que

$$\mu^*(\mathbb{Q}) = \mu^*\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}\right) \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}} \mu^*(\{q\}) = 0$$

Este argumento se puede hacer para todo subconjunto de $\mathbb{Q}$. Por lo tanto la única medida que cumple estas característica es la medida nula. Siendo contradicción.

P5. *Sea un conjunto X y μ^* sobre $(X, \mathcal{P}(X))$. Suponga que $A, B \in \mathcal{P}(X)$ son μ^*-medibles con $A \subset B$, $\mu^*(A) < \infty$ y $\mu^*(B) = \mu^*(A)$.Demuestre que para todo $C \in \mathcal{P}(X)$ y μ^*-medible se tiene que:*

$$\mu^*(A \cap C) = \mu^*(B \cap C)$$

Sol. Notemos que

$$\begin{aligned}\mu^*(B\cap C) &= \mu^*((B\cap C)\cap A)+\mu^*((B\cap C)\cap A^c)\\ &= \mu^*(A\cap C)+\mu^*((B\cap C)\cap A^c)\end{aligned}$$

Si

$$\mu^*(B)=\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c)=\mu^*(A)+\mu^*(B\cap A^c)$$

Luego $\mu^*(B\cap A^c)=0$. Concluyendo que

$$\mu^*(A\cap C)=\mu^*(B\cap C)$$

7.4. Ayudantía 4

P1. *Sea λ^* la media exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Lipschitz. Pruebe que si $\lambda^*(E) = 0$, entonces $\lambda^*(f(E)) = 0$.*

Sol. Propiedad. *Se cumple que*

$$\lambda^*(x + A) = \lambda^*(A), \quad \lambda^*(xA) = \|x\|^n \lambda^*(E)$$

Dem. La primera propiedad ya la hemos probado, probemos la segunda. Definimos $xA = \{xa : a \in A\}$ con $x \in \mathbb{R}^n$...

Como E es despreciable, para $\varepsilon > 0$ existe $\{I_i\}$ talque

- $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$.
- $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$.

Como f es Lipschitz, existe $M > 0$ talque si $x, y \in I_i$ entonces

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \leq M \cdot diam(I_i) \overset{\textbf{Af.}}{=} diam(I_i \cdot M)$$

(Si $M > 0$ y $I_i \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos $M \cdot I_i = \{M \cdot j : j \in I_i\}$).

Recodatorio. Se definia el diametro de un conjunot $A \subseteq \mathbb{R}^n$ por

$$diam(A) := \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$$

Luego $f(I_i) \subseteq M\overline{I}_i$ (probar) con $\overline{I}_i = I_i + x$, y luego

$$\begin{aligned} \lambda^*(f(I_i)) &\leq \lambda^*(M\overline{I}_i) \\ &= |M^n|\lambda^*(\overline{I}_i) \\ &= M^n \lambda^*(I_i) \end{aligned}$$

Como $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, entonces $f(E) \subset \bigcup_{I=1}^{\infty} M\overline{I}$, luego

$$\lambda^*(f(E)) \leq M^n \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(I_i)$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^*(I_i)$ es tan pequeño como queramos, se tiene que finalmente que

$$\lambda^*(f(E)) \leq \varepsilon$$

Para todo $\varepsilon > 0$. Luego $\lambda^*(f(E)) = 0$.

Dem. (Afirmación) Sean $x, y \in M \cdot I_i$, entonces

$$\|x - y\| = \|M\overline{x} - M\overline{y}\| = M\|\overline{x} - \overline{y}\| \leq M \cdot diam(I_i)$$

con $\overline{x}, \overline{y} \in I_i$. Luego

$$diam(M \cdot I_i) \leq M \cdot diam(I_i)$$

para la otra desigualdad tenemos que si $x, y \in I_i$, entonces

$$M\|x - y\| = \|Mx - My\| \leq diam(M \cdot I_i)$$

Luego

$$diam(M \cdot I_i) = M \cdot diam(I_i)$$

■

P2. *Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y un espacio medible $(E, \mathcal{M})$ consideremos una función $f : \Omega \to E$ talque*

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

para todo $B \in \mathcal{M}$. Demuestre que $\mu_f : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ definida por $\mu_f(B) = \mu(f^{-1}(B))$ es una medida sobre $(E, \mathcal{M})$. Si μ es medida finita ¿Es μ_f es una medida finita?

Sol. Probemos que μ_f es medida.

i) $\emptyset \in \mathcal{M}$, luego

$$\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$$

ii) Sean $A, B \in \mathcal{M}$ tales que $A \subseteq B$, luego $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$, ya que si $x \in f^{-1}(A)$ entonces $f(x) \in A \subseteq B$, luego $x \in f^{-1}(B)$. Luego

$$\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A)) \leq \mu(f^{-1}(B)) = \mu_f(B)$$

iii) Sea $\{A_i\} \subseteq \mathcal{M}$ una colección disjunta a pares, notemos que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$$

al ser σ-álgebra, luego

$$\begin{aligned}
\mu_f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(A_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_f(A_i)
\end{aligned}$$

Probando que μ_f es una medida sobre $(E, \mathcal{M})$.

Definición. *Una medida es finita si* $\mu(\Omega) < \infty$

No necesariamente μ_f sea finita.

P3. *Pruebe que la clase $\mathcal{N}$ de los conjuntos $E \subset \mathbb{R}^n$ tales que E o $\mathbb{R}^n \setminus E$ tiene medida de Lebesgue nula, es un álgebra. ¿Es una σ-álgebra?*

Sol. Tenemos que,

$$\mathcal{N} = \{E \subseteq \mathbb{R}^n : \lambda^*(E) = 0 \vee \lambda^*(R^n \setminus E) = 0\}$$

Probemos que es álgebra.

i) Si $\lambda^*(\emptyset) = 0$, entonces $\emptyset \in \mathcal{N}$.

ii) Sea $E \in \mathcal{N}$, entonces o bien E tiene medida nula o $\mathbb{R} \setminus E$ tiene medida nula, en cualquier caso claramente $E^c \in \mathcal{N}$.

iii) Sea $\{E_n\}_{n=1}^m \subseteq \mathcal{N}$. Notemos que,

$$\bigcap_{n=1}^m E_n^c \subseteq E_i^c$$

para todo $i = 1, \ldots, m$. Si algún E_i^c es medible estamos listo, ya que,

$$\lambda^* \left(\bigcap_{n=1}^m E_n^c \right) \leq \lambda^*(E_i^c) = 0$$

De forma que, $\bigcup_{n=1}^m E_n$ es medible. Supongamos que ningún E_i^c es medible, entonces E_i es medible para todo i, luego la unión finita de medible, es algo medible, es particular,

$$\lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^m E_n \right) \leq \sum_{n=1}^m \lambda^*(E_n) = 0$$

Luego,

$$\bigcup_{n=1}^m E_n \in \mathcal{N}$$

Luego $\mathcal{N}$ es álgebra.

Con la subaditividad de λ^* podemos ver que $\mathcal{N}$ es un σ-álgebra.

P4. *Considere un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ con μ medida finita. Demeustre que el conjunto:*

$$A = \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) > 0\}$$

Es a lo más numerable.

Sol. Sea

$$A_n := \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) > 1/n\}$$

Notemos que,

$$A = \bigcup_n A_n$$

Supongamos que A es no numerable, entonces existe un N talque A_N es no numerable. Sea $B \subseteq A_N$ numerable, luego su medida es,

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu\left(\bigcup_{b \in B} \{b\}\right) \\ &= \sum_{b \in B} \mu(\{b\}) \\ &\geq \sum_{b \in B} \frac{1}{N} = \infty \end{aligned}$$

Pero entonces $\mu(\Omega) \neq \infty$. Por tanto, A debe ser numerable.

7.5. Ayudantía 5

P1. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, $\mathcal{X} \neq \emptyset$ y $F : \mathcal{X} \to \Omega$.*

(a) $\mathcal{G} = \{F^{-1}(E) : E \in \mathcal{F}\}$. Demuestre que $\mathcal{G}$ es un σ-álgebra.

(b) Sea μ una medida definida sobre $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ y para $E \in \mathcal{F}$, definida $\nu(E) = \mu(F^{-1}(E))$. Demuestre que ν es medida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$.

P2. *Sea $E \subset \mathbb{R}$. Demuestre que existe una colección de abiertos $\{O_n\}_n$ talque, $E \subset O_n$ para todo n y,*

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(O)$$

donde,

$$O := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}$$

Sol. Si la medida de E es infinita, basta tomar $\mathbb{R}$. Sea $\lambda^*(E) < \infty$, sea $\varepsilon > 0$, luego existe un cubrimiento de intervalos abietos $\{I_n\}$ que cubre a E, y además,

$$\sum_n |I_n| \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$$

Sea $O := \bigcap_n I_n$, luego

$$\lambda^*(O) \leq \sum_n |I_n| \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$$

Tomemos $\varepsilon = 1/n$, entonces existe un $E \subseteq O_n$ talque,

$$\lambda^*(O_n) \leq \lambda^*(E) + \frac{1}{n}$$

Sea

$$O' := \bigcap_n O_n$$

si $E \subset O_n$, entonces $E \subseteq O'$, luego,

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(O') \leq \lambda^*(O) \leq \lambda^*(E) + \frac{1}{n}$$

Tomando $n \to \infty$, concluimos,

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(O')$$

Como queriamos demostrar.

P3. *Sea λ la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ y $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto lebesgue medible con $\lambda(E) > 0$. Demuestre que para todo $\alpha \in (0,1)$ existe un intervalo abierto I talque,*

$$\lambda(E \cap I) > \alpha\lambda(I)$$

Sol. Supongamo que $\lambda(E) < \infty$. Supongamos que existe un $\alpha \in (0,1)$ talque, para todo intervalo abierto I se tiene que,

$$\lambda(E \cap I) \leq \alpha\lambda(I)$$

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe un $\mathcal{U} \supset E$ abierto talque,

$$\lambda(\mathcal{U} \setminus E) < \varepsilon$$

Entonces,

$$\lambda(\mathcal{U}) - \lambda(E) < \varepsilon$$

Y luego,

$$\lambda(\mathcal{U}) < \varepsilon + \lambda(E)$$

Como $\mathcal{U}$ es abierto, entonces,

$$\mathcal{U} = \bigcup_n I_n$$

donde $\{I_n\}_n$ son intervalos abiertos disjuntos. Luego, $E = \bigcup_n (I_n \cap E)$, y así,

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \sum_n \lambda(I_n \cap E) \\ &\leq \sum_n \alpha\lambda(I_n) \\ &= \alpha\lambda(\mathcal{U}) \\ &\alpha\lambda(E) + \alpha\varepsilon \end{aligned}$$

Luego,

$$\lambda(E) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Pero entonces E tiene medida 0, siendo contradicción.

Supongamos ahora que $\lambda(E) = \infty$, en este caso como λ es σ-finita se puede demostrar que es semi-finita. Entonces, existe un $A \subseteq E$ talque $0 < \mu(A) < \infty$. Por lo anterior, existe un intervalo abierto I talque,

$$\lambda(A \cap I) > \alpha\lambda(I)$$

Como $A \subseteq E$, entonces $A \cap I \subseteq E \cap I$, luego,

$$\lambda(E \cap I) > \alpha\lambda(I)$$

Concluyendo el resultado.

7.6. I1

P1. *Sea $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Demuestre que existe $c \in [a, b]$ talque,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Sol. Sea la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por,

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Notemos que F está bien definido dado que $f|_{[a,x]}$ es continua para todo $x \in [a, b]$, luego es R-integrable. Probemos que F es diferenciable en todo (a, b). Sea $x_0 \in (a, b)$ y sea $0 < |h|$, luego,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) + f(x_0))dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \end{aligned}$$

Si f es continua, entonces, para x_0 y para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Luego para $\varepsilon > 0$ fijo, existe un $\delta > 0$ para x_0 igual que antes, digamos que $0 < |h| < \delta$, entonces $|t - x_0| \leq h < \delta$ ya que estamos integrando en esa región, luego,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &< \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Para todo $0 < |h| < \delta$. Entonces,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Por tanto, F es diferenciable en (a, b) con derivada $F' = f$. Por el teorema del valor medio, existe un $c \in [a, b]$ talque,

$$F(b) - F(a)f(c)(b-a) \iff \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Probando el problema.

P2. *Sea $(\Omega.\mathcal{F})$ un espacio medible y, para cada $n \geq 1$, se dea $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{F}$-medible. Sea*

$$E := \{w \in \Omega : \textit{la sucesión } \{f_n(w)\}_n \textit{ converge}\}$$

Demuestre que $E \in \mathcal{F}$.

Sol. Probaremos que E es la unión/intersección numerable de conjuntos medibles. Sea $w \in E$ fijo, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(w)$$

existe. Luego $\{f_n(w)\}_n \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n, m \geq N$, entonces,

$$|f_n(w) - f_m(w)| < \varepsilon$$

Con esto podemos rescribir el conjunto E, luego,

$$\begin{aligned} E &= \{w \in \Omega : \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m \geq N, |f_n(w) - f_m(w)| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq N} \{w \in \Omega : |f_n(w) - f_m(w)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Pensando $\varepsilon = 1/k$ con $k \in \mathbb{N}$, obtenemos que,

$$E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq N} \{w \in \Omega : |f_n(w) - f_m(w)| < 1/k\}$$

Obteniendo una unión y intersección de un conjunto. Veamos que el conjunto

$$\{w \in \Omega : |f_n(w) - f_m(w)| < 1/k\}$$

es medible. Si f_n es medible para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la función,

$$g(w) := |f_n(w) - f_m(w)|$$

es medible. Luego tomando $(0, 1/k) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces,

$$g^{-1}(0, 1/k) = \{w \in \Omega : |f_n(w) - f_m(w)| < 1/k\} \in \mathcal{F}$$

Por lo tanto,

$$E \in \mathcal{F}$$

P3. *Para $A \subset \mathbb{R}$ y $t > 0$, definimos,*

$$tA = \{tx : x \in A\}$$

(a) *Demuestre que,*

$$\lambda^*(tA) = t\lambda^*(A)$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$ y $t > 0$, donde λ^* denota la medida exterior de Lebesgue.

(b) *Suponga que $A \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue medible y sea $t > 0$. Demuestre que tA es Lebesgue medible.*

Sol.

(a) Sea $\{I_n\}_n$ un cubrimiento de A de intervalos abiertos, entonces,

$$A \subseteq \bigcup_n I_n$$

Donde $I_n = (a_n, b_n)$, como $t > 0$, entonces $tI_n = (ta_n, tb_n)$ y luego, $\lambda(tI_n) = t(b_n - a_n)$, y además,

$$tA \subseteq \bigcup_n tI_n$$

ya que si $x \in tA$, entonces $x = ta$ con $a \in I_m$ para algún m, luego $x \in \bigcup_n tI_n$, entonces,

$$\lambda^*(tA) \leq \sum_n |tI_n| = t \sum_n |I_n|$$

O mejor dicho,

$$\frac{\lambda^*(tA)}{t} \leq \sum_n |I_n|$$

Esto es para todo cubrimiento de A de intervalos abiertos, por lo que,

$$\lambda^*(tA) \leq t\lambda^*(A)$$

Para la otra dirección tomamos $\{I_n\}$ cubrimiento abierto de tA, luego,

$$A \subseteq \bigcup_n \frac{I_n}{t} \quad \text{y} \quad \lambda^*(A) \leq \frac{\sum_n |I_n|}{t}$$

$(1/t > 0)$. Luego,

$$t\lambda^*(A) \leq \sum_n |I_n|$$

Y esto es para todo cubrimiento de tA, por lo tanto,

$$\lambda^*(tA) = t\lambda^*(A)$$

(b) Supongamos que A es Lebesgue medible. Vamos a probar dos cosas,

$$t(N \cap M) = tN \cap tM \quad \text{y} \quad (tN)^c = tN^c$$

Para cualquier $N, M \subseteq \mathbb{R}$.

- Notemos que,

$$\begin{aligned} x \in t(N \cap M) &\iff x = tw, \ \ (w \in N \cap M) \\ &\implies x \in tN \cap x \in tM \end{aligned}$$

Obteniendo una inclusión, para la otra si $x = tn = tm$ con $n \in N, m \in M$, entonces necesariamente $n \in M$, ya que si no, entonces $m \notin M$, siendo imposible, lo mismo con $m \in N$. Entocnes podemos decir que $x = tw$ con $w \in N \cap M$, luego,

$$x \in t(N \cap M)$$

De forma que,

$$t(N \cap M) = tN \cap tM$$

- Vemos que,

$$\begin{aligned} x \in (tN)^c &\iff x \notin tN \\ &\iff x \neq tn, \ \ (n \notin N) \\ &\iff \frac{x}{t} \neq n \\ &\iff \frac{x}{t} \notin N \\ &\iff \frac{x}{t} \in N^c \\ &\iff x \in tN^c \end{aligned}$$

(Si ocurre que $ta \in tN$ con $a \notin N$, entonces $ta = tn$ con $n \in N$, pero implica que $a = n$, luego necesariamente $a \in N$).

Ahora, para $X \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que,

$$\begin{aligned} \lambda^*(X) &= t\lambda^{\star(X/t)} \\ &= t(\lambda^*(X/t \cap A) + \lambda^*(X/t \cap A^c)) \\ &= \lambda(X \cap tA) + \lambda^*(X \cap tA^c) \\ &= \lambda(X \cap tA) + \lambda^*(X \cap (tA)^c) \end{aligned}$$

Por tanto, tA es medible.

P4. *Sea $\Omega \neq \emptyset$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Denotamos los boreleanos de $\mathbb{R}$ por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

(a) Sea

$$\mathcal{F} := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Demuestee que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

(b) Demuestre que f es $\mathcal{F}$-medible.

(c) *Sea μ una medida sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y sea*

$$\nu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \ \ A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$$

Demuestre que ν es una medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Sol.

(a) Probemos los tres axiomas de σ-álgebra.

i) Notemos que, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $\emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces $\emptyset \in \mathbb{F}$.

ii) Sea $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ y luego $A^c \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ como es σ-álgebra. Y además,

$$(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in \mathcal{F}$$

Luego $(f^{-1}(A))^c \in \mathcal{F}$.

iii) Sea $\{f^{-1}(A_n)\}_n \subseteq \mathbb{F}$, luego $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo n, entonces,

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Y además,

$$\left(\bigcup_n f^{-1}(A_n)\right) = f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right) \in \mathcal{F}$$

Luego,

$$\bigcup_n f^{-1}(A_n) \in \mathbb{F}$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

(b) Notemos que $f^{-1}(A) \subseteq 2^\Omega$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, luego $(\Omega, \mathcal{F})$ es un espacio medible. Si además, por definición, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, entonces f es $\mathcal{F}$-medible.

(c) Probemos los tres axiomas de medida.

i) Notemos que,

$$\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$$

ii) Sean $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ talque $A \subseteq B$, entonces $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$ y como μ es medida se tiene que,

$$\nu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \leq \mu(f^{-1}(B)) = \nu(B)$$

iii) Sea $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjuntos a pares, luego,

$$\bigcup_n f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right)$$

Y $\{f(A_n)\}_n$ son disjuntos a pares, entonces,

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right)\right)\\
&= \mu\left(\bigcup_n f^{-1}(A_n)\right)\\
&= \sum_n \mu(f^{-1}(A_n))\\
&= \sum_n \nu(A_n)
\end{aligned}$$

Probando que ν es una medida sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

7.7. Ayudantia 6

P1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Pruebe que es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-medible.*

Sol. Supongamos que f es creciente, sea $(a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

P2. *Sea $(E, \mathcal{F})$ un espacio medible.*

(a) Pruebe que χ_A es una función medible si y sólo si $A \in \mathcal{F}$.

(b) Sea $A \in \mathcal{F}$ un conjunto medible que contiene un subconjunto $B \subset A$ talque $B \notin \mathcal{F}$. Considere $f : E \to \mathbb{R}$ dada por, $f(x) = \chi_B(x) - \chi_{A\setminus B}(x)$. Demeustre que f no es $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-medible pero $|f|$ si lo es.

Sol.

(a) Tenemos que, $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ dada por,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Supongamos que es medible, luego si $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, entonces $\chi_A^{-1}(X)$ o bien es vacío, o bien es E, o bien es A o bien es A^c, entonces es claro que $A \in \mathcal{F}$ para que sea medible. Por otro lado, si $A \in \mathcal{F}$, entonces por lo anterior, χ_A es medible.

(b) Probemos que f es no medible y $|f|$ si lo es. Notemos que,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ -1, & x \in A \setminus B \\ 0, & x \in A^c \end{cases}$$

Notemos que $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, luego $f^{-1}(\{1\}) = B$, pero $B \notin \mathcal{F}$, por lo tanto f no es medible. Ahora para la otra función,

$$|f(x)| = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in A^c \end{cases}$$

Y claramente es medible.

Pasting Lemma. *Sean $(\Omega, \mathcal{F}), (\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$ espacios medibles. Supongamos que $\Omega = A \cup B$, donde $A, B \in \mathcal{F}$ y, sea $f : \Omega \to \overline{\Omega}$. Entonces f es medible si y sólo si f es medible en A y en B.*

Dem. Supongamos que f es medible. Entonces para todo $E \in \overline{\mathcal{F}}$, $f^{-1}|_A(E) = f^{-1}(E) \cap A$. Tenemos la intersección de dos conjuntos medibles, luego,

$$f^{-1}|_A(E) \in \mathcal{F}$$

Con $f^{-1}|_B(E)$ es análogo el proceso.

Supongamos que f es medible en las restricciones A, B. Veamos que f es medible, si,

$$f^{-1}|_A(E) = f^{-1}(E) \cap A f^{-1}|_B(E) = f^{-1}(E) \cap B$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f^{-1}(E) &= f^{-1}(E) \cap (\Omega) \\ &= f^{-1}|_A(E) \cup f^{-1}|_B(E) \end{aligned}$$

Luego $f^{-1}(E)$ es medible al ser la unión de dos cosas medible. ■

P3. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida talque, $\mu(\Omega) < \infty$. Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones medibles tales que, para todo $\delta > 0$,*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \mu(\{|f_n - f_m| \geq \delta\}) = 0$$

Demuestre que existe una función medible f talque, f_n converge a f en medida.

Sol. Para todo $\delta > 0, \varepsilon > 0$ existe un N_k talque si $n, m \geq N_k$, entonces,

$$\mu\left(\left\{|f_n - f_m| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}$$

Sea $M_k := \max\{N_k, N_{k+1}\}$ y sea

$$E_k := \left\{w \in \Omega : |f_{M_{k+1}}(w) - f_{M_K}(w)| \geq 2^{-k}\right\}$$

Como μ es finita, se tiene que, $\mu(E_k) < \frac{1}{2^k}$, luego,

$$\sum_k \mu(E_k) < \infty$$

Definiendo

$$E := \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{j \geq k} E_j$$

Luego, $\mu(E) = 0$. Si $w \notin E$, entonces $w \notin \bigcup_{j\geq k} E_j$

$$|f_{n_{j+1}}(w) - f_{n_j}(w)| \leq \frac{1}{2^j}$$

Luego,

$$\sum_j |f_{n_{j+1}}(w) - f_{n_j}(w)| < \infty$$

Por lo tanto, existe un f taltque $f_{n_k} \to f$ de forma μ-ctp. Ahora, si $w \in E$, definimos $f(w) = 0$.

7.8. Ayudantía 7

P1. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to [0, \infty)$ una funcion Borel-medible.*

(a) Pruebe que $\lambda(A) = \int_A f d\mu$ define una medida.

(b) Demuestre que,

$$\int g d\lambda = \int g f d\mu$$

para toda función $g : X \to \mathbb{R}$ Borel-medible.

(c) Pruebe que si $\mu = \delta_n$ para algún $a \in X$, entonces,

$$\int f d\delta_a = f(a)$$

Sol.

(a) Probemos que λ es una medida, para ello debemos probar los tres axiomas de medida,

i) Por definición,

$$\lambda(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = 0$$

ya que $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Sean $A \subseteq B$ con $A, B \in \mathcal{F}$, luego se cumple que,

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu = \lambda(B)$$

iii) Sean $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ conjuntos disjuntos a pares, sea $\{s_m\}$ una sucesión de funciones simples positivas talque $s_m \uparrow f$, luego,

$$\begin{aligned} \int_{\bigcup_n A_n} f d\mu &= \lim_{m\to\infty} \int_{\bigcup_n A_n} s_m d\mu \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_n \int_{A_n} s_m d\mu \end{aligned}$$

Dado que, $\int s d\mu$ es una medida, ahora queremos meter el límite adentro de la serie, para ello necesitamos que si,

$$f_n := \int_{A_n} s_m d\mu$$

Entonces $\sum f_n$ converge uniformemente, y en efecto,

$$\sum_n f_n = \int_{\bigcup_n A_n} s_m d\mu \in [0, \infty]$$

Si, $\lim_{m\to\infty} f_n = \int f d\mu$, entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_n \int_{A_n} s_m d\mu &= \sum_n \lim_{m\to\infty}\int_{A_n} s_m d\mu\\ &= \sum_n \int_{A_n} f d\mu\end{aligned}$$

Por lo tanto, λ es medida.

(b) Supongamos que g es simple positiva, luego,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{A_k}(x)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int g d\lambda &= \sum_{k=1}^{N} a_k \lambda(A_k)\\ &= \sum_{k=1}^{N} a_k \int_{A_k} f d\mu\\ &= \sum_{k=1}^{N}\int_{A_k} a_k f d\mu\\ &= \sum_{k=1}^{N}\int a_k \mathbb{1}_{A_k j} f d\mu\\ &= \int\sum_{k=1}^{N}\int a_k \mathbb{1}_{A_k} f d\mu\\ &= \int g f d\mu\end{aligned}$$

Supongamos que $g : X \to [0,\infty)$ medible, luego existe $\{s_m\}$ de sucesiones simples positivas talque $s_m \uparrow g$, luego,

$$\begin{aligned}\int g d\lambda &= \lim_{m\to\infty}\int s_m d\lambda\\ &= \lim_{m\to\infty}\int s_m f d\mu\end{aligned}$$

Notemos que, $s_m f \uparrow g f$ ya que $s_m f$ es creciente y para todo $x \in X$ se tiene que,

$$\lim_{m\to\infty} s_m(x) f(x) = g(x) f(x)$$

Luego,

$$\int g d\lambda = \int g f d\mu$$

Para llegar a lo pedido recordemos que si $g : X \to \mathbb{R}$ medible, entonces $g = g^+ - g^-$ con $g^+, g^- : X \to [0, \infty)$ medibles y si,

$$\int g^+ d\lambda - \int g^- d\lambda$$

Luego se concluye que,

$$\begin{aligned}\int g d\lambda &= \int g^+ d\lambda - \int g^- d\lambda \\ &= \int g^+ f d\mu - \int g^- f d\mu \\ &= \int (g^+ - g^-) f d\mu \\ &= \int g f d\mu\end{aligned}$$

(c) Sea $\mu = \delta_n$ para algún $a \in X$, entonces,

$$\int F d\delta_a = F(a)$$

donde,

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \notin B \end{cases}$$

Supongamos que F es simple, luego,

$$F = \sum_{k=1}^{N} a_k \mathbb{1}_{A_k}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int F d\delta_a &= \sum_{k=1}^{N} a_k \delta_a(A_k) \\ &= a_{k^*} = F(a)\end{aligned}$$

para algún k^*

P2. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida con μ una medida σ-finita. Sean $\{f_i\}$, f funciones finitas μ-ctp en Ω con $f_i \to f$ puntualmente μ-ctp. Suponga además que las funciones f_n son medibles. Pruebe que existe $\{E_k\}_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ talque $f_i \to f$ uniformemente en E_k y con $\mu(\Omega \setminus \bigcup E_k) = 0$.*

Sol. Como μ es r-finita, existe $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{F}$ talque $\mu(A_n) < \infty$ y,

$$\Omega = \bigcup_n A_n$$

como $f_n \to f$ de forma μ-ctp y $\mu(A_n) < \infty$, por Egorov en cada A_n existe $\{B_{i,n}\}_i \subseteq \mathcal{F}$ talque $B_{i,n} \subseteq A_n$ y,

$$\mu(A_n \setminus B_{i,n}) < \frac{1}{i}$$

y $f_n \to f$ uniformemente en $B_{i,n}$. Consideremos,

$$F_{i,n} := \bigcup_{k=1}^{i} B_{k,n} \subseteq A_n$$

Entonces,

$$\mu(A_n \setminus F_{i,n}) < \frac{1}{i}$$

y $f_n \to f$ uniformemente en $F_{i,n}$. Por construcción,

$$F_{i,n} \subseteq F_{i+1,n}$$

Luego,

$$A_n \setminus F_{i,n} \supseteq A_n \setminus F_{i+1,n}$$

Sea $\{E_k\} = \{F_{k,n}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\Omega \setminus \bigcup_k E_k &= \bigcup_n A_n \setminus \bigcup_{i,n} F_{i,n} \\
&= \left(\bigcup_n A_n\right) \cap \left(\bigcap_i \bigcap_n F_{i,n}^c\right) \\
&\subseteq \left(\bigcup_n A_n\right) \cap \left(\bigcup_n \bigcap_i F_{i,n}^c\right) \\
&= \bigcup_n \left(A_n \cap \left(\bigcap_i F_{i,n}^c\right)\right) \\
&= \bigcup_n \bigcap_i \left(A_n \cap F_{i,n}^c\right) \\
&= \bigcup_n \bigcap_i (A_n \setminus F_{i,n})
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_k E_k\right) &\leq \mu\left(\bigcup_n \left(\bigcap_i (A_n \setminus F_{i,n})\right)\right) \\
&\leq \sum_n \mu\left(\bigcap_i (A_n \setminus F_{i,n})\right) \\
&\leq \sum_n \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus F_{i,n}) \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\mu\left(\Omega \setminus \bigcup_n E_n\right) = 0$$

P3. *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to (0, \infty)$ talque $f \in L^1(X)$. Demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{F}$ con $\mu(A) < \infty$ talque,*

$$\int f d\mu \leq \int_A f d\mu + \varepsilon$$

Sol. Definimos,

$$E_n := \{x \in X : f(x) > 1/n\}$$

Luego se tiene que,

$$X = \bigcup_n E_n$$

y $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Luego se tiene que,

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \int_{\bigcup_n E_n} f d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu
\end{aligned}$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque,

$$\int_X f d\mu \leq \int_{E_n} f d\mu + \varepsilon$$

Veamos que $\mu(E_n) < \infty$, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\mu(E_n) &= \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu \\
&\leq \int_{E_n} f d\mu \\
&\leq \int_X f d\mu < \infty
\end{aligned}$$

Como $f \in L^1(X)$. Probando lo que queriamos probar.

P4.

(a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, y sean $f_n, f : \Omega \to [0, \infty]$ medibles. Suponga que para $w \in \Omega \setminus N$ se cumplen las siguientes condiciones,

i) $f_n(w) \leq f_{n+1}(w)$.

ii) $f(w) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(w)$ donde $N \in \mathcal{F}$ es un conjunto de medida nula.

Pruebe que,

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$$

(b) Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función positiva monótona no-creciente (continua en 0). Determine el límite de,

$$\left(\int_{[0,1]} f(x^n) d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Sol.

(a) Notemos que,

$$\varphi(E) := \int_E f d\mu$$

es una media, luego se tiene que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\mu &= \int_{\Omega\setminus N} f d\mu + \int_N f d\mu \\ &= \int_{\Omega\setminus N} f d\mu\end{aligned}$$

Como $\mu(N) = 0$. Lo mismo para f_n, por lo que basta probar que,

$$\int_{\Omega\setminus N} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus N} f_n d\mu$$

Sea,

$$I := \int_{\Omega\setminus N} f d\mu$$

Claramente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\setminus N} f_n d\mu \leq \int_{\Omega\setminus N} f d\mu$$

Por lo que debemos probar la otra desigualdad, sea,

$$E_n := \{w \in \Omega \setminus N : 0 \leq cs \leq f_n\}$$

con s simple y $c \in (0,1)$, luego,

$$\Omega \setminus N = \bigcup_n E_n$$

Y entonces,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus N} f_n d\mu &\geq \int_{E_n} f_n d\mu \\ &\geq c\int_{E_n} s d\mu\end{aligned}$$

Si $E_n \subseteq E_{n+1}$ entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus N} f_n d\mu &\geq c\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} s d\mu \\ &= c\int_{\Omega\setminus N} s d\mu\end{aligned}$$

Tomando $c \uparrow 1$ y sabiendo que se puede hacer para todo s simple, enemos que,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus N} f_n d\mu \geq \int_{\Omega\setminus N} f d\mu$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus N} f_n d\mu = \int_{\Omega\setminus N} f d\mu$$

(b) Sea $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g_n(x) := f(x^n)$ medible (por conveniencia). Vamos a usar el resultado anterior. Probemos que g_n es creciente y que converge a un valor cuando $x \in [0,1] \setminus N$ para algún N que despues determinaremos.

- **Creciente.** Sea $x \in [0,1]$, si $x = 0, 1$ entonces $x^n = x^{n+1}$, luego,

  $$g_n(x) = f(x^n) = f(x^{n+1}) = g_{n+1}(x)$$

  Si $x \in (0,1)$, entonces $x^n > x^{n+1}$, luego al ser f no creciente, se tiene que,

  $$g_n(x) = f(x^n) \leq f(x^{n+1}) = g_{n+1}$$

  Siendo g_n creciente.

- **Convergente.** Si f es continua en 0, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si $0 \leq x < \delta$, entonces, $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Sea $x \in [0,1)$, luego para $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque $0 \leq x^n < \delta$, luego,

$$|f(x^n) - f(0)| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(0)$$

Para todo $x \in [0,1)$. Si $x = 1$ entonces este converge a $f(1)$, pero notemos que,

$$\lambda(\{1\}) = 0$$

Por tanto tenemos g_n es creciente en $[0,1)$ y converge puntualmente $f(1)$ que es medible al ser constante, luego por (a) se tiene que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g_n d\lambda = \int_{[0,1]} f(0) d\lambda = f(0)\mu([0,1]) = f(0)$$

7.9. Ayudantía 8

P1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida* σ*-finito. Sea* $f : \Omega \to [0, \infty]$ *de integrable-finita y suponga que para todo* $A \in \mathcal{F}$ *con* $\mu(A) < \infty$ *se tiene que,*

$$\int_A f d\mu \leq c$$

donde $c \in \mathbb{R}$*. Pruebe que,*

$$\int_\Omega f d\mu \leq c$$

Sol. Como el espacio es σ-finito existe $\{A_n\}_n$ talque $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\mu(A)$

P2. *Sea* $f : X \to [0, \infty)$ *medible y de integral finita. Demuestre que,*

$$\int_X f d\mu = \lim_{r \downarrow l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^n \mu\left(\left\{x \in X : r^n \leq f(x) < r^{n+1}\right\}\right)$$

P3. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *espacio de medida.*

(a) (TCD generalizado) Sean $f, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *funciones mediles tales que* $f_n \to f$ μ*-ctp. Suponga que* $g, g_n : \Omega \to [0, \infty)$ *son funciones medibles tales que* $g_n \to g$ μ*-ctp. Suponga además que* $|f_n| \leq g_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Demuestre que si,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

(b) (Lema de Scheffe) Sean $f_n, f \in L^1$ *y* $f_n \to f$ μ*-ctp. Pruebe que,*

$$\int_\Omega |f_n - f| d\mu \to 0 \iff \int_\Omega |f_n| d\mu \to \int_\Omega |f| d\mu$$

P4. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sean* $f_n, f : \Omega \to [0, \infty)$ *funciones en* L^1 *tales que,*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n \geq f \ \ \mu\text{-ctp} \ \ \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu \leq \int_\Omega f d\mu$$

Pruebe que $\int_\Omega |f_n - f| \to 0$*.*

7.10. I2

P1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida y sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *Lebesgue-integrable.*

(a) Sea $E_n = \{w \in \Omega : |f(w)| \leq n\}$. *Demuestre que,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(w)\mu(dw) = \int_\Omega f(w)\mu(dw)$$

7.11. Ayudantía 10

P1.

Sol. Consideremos la función,

$$g(t,w) := pt^{p-1}\mathbb{1}_{\{w:f(w)>t\}}$$

con $(t,w) \in [0,\infty) \times \Omega$ que es no negativa. Sea $f : \Omega \to (0,\infty)$ medible. Notemos que,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{1}_{\{w:f(w)>t\}}dt &= \int_{[0,\infty)} pt^{p-1}\mathbb{1}_{\{w:f(w)>t\}}\lambda(dt)\\ &= \int_{[0,f(w))} pt^{p-1}\lambda(dt)\\ &= \int_0^{f(w)} pt^{p-1}dt\\ &= f(w)\end{aligned}$$

Ahora como $g \geq 0$ podemos usar Tonelli, de forma que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f^p d\mu &= \int_\Omega \left(\int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{1}_{\{w:f(w)>t\}}dt\right) d\mu\\ &= \int_0^\infty \left(\int_\Omega pt^{p-1}\mathbb{1}_{\{w:f(w)>t\}}d\mu\right) dt\\ &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{w : f(w) > t\})dt\end{aligned}$$

P2.

Sol. Supongamos que $f \in L^1(X \times Y)$, esto implica que $f(x,y)$ con x fijo es $L^1(Y)$ y lo mismo fijando y. Con esto podemos concluir que,

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\lambda(dx) = \int_0^1 f(x,y)dx$$

Ahora al ser integrable tenemos que,

$$\int_0^1 \left(\int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-xy})dy\right) dx = \int_1^\infty \left(\int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-xy})dx\right) dy$$

Pero vemos que,

$$\int_0^1 \left(\int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-xy})dy\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-2x}}{x}\right) dx$$

Donde el valor de la derecha al ser finito (al asumir que f es L^1) debiese ser positivo por la forma de la función. Por otro lado,

$$\int_1^\infty \left(\int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-xy})dx\right) dy = \int_1^\infty \left(-\frac{e^{-y}}{y} + \frac{e^{-2y}}{y}\right) dy$$

Que es negativo. Por tanto tenemos que algo negativo es positivo siendo imposible. Por lo tanto $f \notin L^1(X \times Y)$.

P3.

Sol. Se tiene que f es medible. Supongamos que f es integrable. Notemos que.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right) dy &= \int_0^1 \left(-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}dx\right) dy \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy \\ &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Por tanto $\pi/2 = -\pi/2$ siendo claramente imposible. Por tanto f no es integrable,

P4.

Sol. Probemos que f es integrable. Notemos que $|f(x,y)| \leq e^{-x}$, luego,

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(x,y)|\lambda'(dxdy) \leq \int_0^\infty e^{-x}dx < \infty$$

Probemos el valor de la integral. Notemos que,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x}\operatorname{sen}(2xy)dy &= -e^{-x}\frac{\cos(2xy)}{2x}\Bigg|_0^1 \\ &=\end{aligned}$$

7.12. Ayudantía 11

P1.

Sol. Notemos que,

$$|f(x)| = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x:|f(x)|>t\}} dt$$

Entonces si E tiene medida finita podemos aplicar Tonelli y luego,

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|dx &= \int_0^\infty \left(\int_E \mathbb{1}_{\{x:|f(x)|>t\}} dx \right) dt \\
&= \int_0^\infty \lambda(\{x : |f(x) > t|\} \cap E) dt \\
&= \int_0^{1/\sqrt{\lambda(E)}} \lambda(\{x : |f(x) > t|\} \cap E) dt + \int_{1/\sqrt{\lambda(E)}} \lambda(\{x : |f(x) > t|\} \cap E) dt \\
&\leq \int_0^{1/\sqrt{\lambda(E)}} \lambda(E) dt + \int_{1/\sqrt{\lambda(E)}}^\infty \lambda(\{x : |f(x) > t|\}) dt \\
&\leq \sqrt{\lambda(E)} + \sqrt{\lambda(E)} + c\sqrt{\lambda(E)} \\
&= (1+c)\sqrt{\lambda(E)}
\end{aligned}$$

P2.

Sol. Sea la función,

$$f(x,y) = e^{-xy}$$

Donde $(x,y) \in (0,\infty) \times [a,b]$. En particular es no negativa, luego por Tonelli se tiene que,

$$\int_{[a,b]} \left(\int_{(0,\infty)} f(x,y)\lambda(dx) \right) \lambda(dy) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{[a,b]} f(x,y)\lambda(dy) \right) \lambda(dx)$$

En particular lo podemos pensar como integrales de Riemann dado que f es claramente no negativa y continua. Luego tenemos,

$$\int_a^b \left(\int_0^\infty f(x,y)dx \right) dy = \int_0^\infty \left(\int_a^b f(x,y)dy \right) dx$$

Notemos que,

$$\int_a^b f(x,y)dy = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

Estudiemos la otra igualdad,

$$\int_0^\infty e^{-xy} dx = -\frac{e^{-xy}}{y}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{y}$$

Luego,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \log(b/a)$$

P3.

Sol. Consideremos el conjunto,

$$G(f) := \{(x, y) : f(x) = y\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Consideremos la medida $\lambda' = \lambda \otimes \lambda$, si $G(f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (σ-álgebra producto) se tiene que,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(G(f)^1(y))\lambda(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(G(f)^2(x))\lambda(dx)$$

Notemos que,

$$G(f)^2(x) = \{y \in \mathbb{R} : f(x) = y\} = \{y\}$$

Es un conjunto despreciable, lueg,

$$\lambda(G(f)^2(x)) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(G(f)^1(y))\lambda(dy) = 0$$

Por tanto,

$$\lambda(G(f)^1(y)) = 0$$

de forma λ-ctp para todo y.

P4.

Sol. Consideremos la función,

$$F : [0, a]^2 \to \mathbb{R}$$
$$F(x, t) = \frac{f(t)}{t} \mathbb{1}_{[x,a]}$$

Notemos que es medible y no negativa con espacios σ-finito. Entonces por Fubini tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,a]} g(x)dx &= \int_{[0,a]} \left(\int_{[0,a]} \frac{f(t)}{t} \mathbb{1}_{[x,a]}(t)dx \right) dt \\
&= \int_{[0,a]} \frac{f(t)}{t} \left(\int_{[0,a]} \mathbb{1}_{[0,t]}(x)dx \right) dt \\
&= \int_{[0,a]} f(t)dt
\end{aligned}$$

8. Guías

8.1. Guía 1

Ejercicios Generales.

P1. *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de índices y $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una familiar de reales positivos, es decir, $x_\alpha \geq 0$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$. Suponga que $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha < \infty$. Demuestre que el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{A} : x_\alpha > 0\}$ es a lo más numerable.*

Sol.

P2. *Para cada $i, j \geq 1$, sea $a_{i,j} \geq 0$. Demuestre que*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$$

Sol.

P3. *Sea $\{a_j\} \subset \mathbb{R}$ talque $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$ existe y es finito, pero $\sum_j |a_j| = \infty$ (es decir, la serie congerge pero no absolutamente). Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que existe un reordenamiento $\{a_{j_k}\}_k$ de $\{a_j\}$ talque*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{j_k} = x$$

Integral de Riemann.

P1. *Sea I un intervalo abierto. Demuestre que I no es despreciable.*

Sol. Supongamos que I es despreciable, entonces bajo la medida de Lebesgue, existe un $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ talque,

$$I \subseteq N \ \text{ y } \ \lambda(N) = 0$$

Por monotonía se tiene que,

$$|I| = 0$$

Pero $|I| = b - a \neq 0$. Luego I no puede ser despreciable.

P2. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto despreciable. Demuestre que E^c es denso en $\mathbb{R}$.*

Sol. Debemos probar que para todo $x \in \mathbb{R}$ para todo $r > 0$ se tiene que

$$B(x,r) \cap E^c) \neq \emptyset \iff (x-r, x+r) \cap E^c \neq \emptyset$$

Si $x \in E^c$ estamos listo, sea $x \in E$, entonces para $\varepsilon > 0$ existe una colección de intervalos abiertos $\{I_i\}$ talque,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$$

Luego para algún $i \in \mathbb{N}$, $x \in I_i = (a_i, b_i)$, si $|I_i| < \varepsilon$, entonces todo $x', y' \in (a_i, b_i)$ se tiene que,

$$|x' - y'| < b_i - a_i < \varepsilon$$

Notemos que

$$(a_i, b_i) \nsubseteq E$$

ya que si fuera así, entonces E no sería despreciable. Por lo que existe un $y \in I_i \cap E^c$ talque,

$$|x - y| < \varepsilon$$

Es decir,

$$y \in B(x, \varepsilon) \cap E^c$$

Y esto es para todo $\varepsilon > 0$. Probando que E^c es denso.

P3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable talque el conjunto $\{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$ es despreciable. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

Sol. Digamos que,

$$A := \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$$

Como f es R-integrable, entonces el límite

$$\lim_{|\Pi| \to 0} S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}})$$

existe y es finito. Sea $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$, si A^c es denso en $\mathbb{R}$, entonces en el intervalo (x_{i-1}, x_i) existe un $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$, luego $f(x_i^*) = 0$, tomando $\underline{\mathcal{C}} = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ se tiene que

$$S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) = 0$$

Luego si,

$$L(f, \Pi) \leq S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}}) \leq U(f, \Pi)$$

Entonces, por caracterización del supremo e ínfimo, se tiene que,

$$\mathcal{L}(f) \leq 0 \leq \mathcal{U}(f)$$

Y por lo tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

P4. *Para cada $n \geq 1$, sea $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable. Suponga que existe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ talque $f_n \to f$ uniformemente.*

(a) *Demuestre que f es Riemann-integrable.*

(b) *Demuestre que ,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Sol.

(a) Si f_n es R-integrable, entonces es acotado, como f_n converge uniformemente a f entonces f es acotado. Probemos que es R-integrable. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ talque,

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$$

para todo $n \geq N, x \in [a,b]$. Para una partición $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ cualquiera, si $x \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces,

$$m_i^{(n)} - \varepsilon < m_i \leq M_i \leq M_i^{(n)} + \varepsilon$$

donde $m_i^{(n)}$ es el ínfimo de f cuando $x \in [x_{i-1}, x_i]$, lo mismo con $M_i^{(n)}$. Para $\varepsilon_1 > 0$ existe una partición Π talque

$$U(f_n, \Pi) - L(f_n, \Pi) < \varepsilon_1$$

Entonces, si $n \geq N$ se tiene,

$$\begin{aligned} U(f,\Pi) - L(f,\Pi) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}(M_i^{(n)} - m_i^{(n)})\Delta x_i + 2\varepsilon \\ &< \varepsilon_1 + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Como $\varepsilon_1, \varepsilon$ son tan pequeño como queramos, se tiene que $\mathcal{U}(f) = \mathcal{L}(f)$. Probando que f es R-integrable.

(b) Si f_n converge uniformemente a f, entonces,

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$$

Integrando sobre $[a,b]$ obtenemos,

$$\int_a^b (f_n(x) - \varepsilon)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b (f_n(x) + \varepsilon)dx$$

para todo $n \geq N$. Luego,

$$\int_a^b f_n(x)dx - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f_n(x) + \varepsilon(b-a)$$

para todo $n \geq N$. Dicho de otra forma, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n \geq N$, entonces,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

P5. *Dé ejemplos de sucesiones de funciones Riemann integrables $\{f_n\}_n$ talque f_n converge puntualmente a alguna función f y talque,*

- *f no es Rieman integrable pero,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

  existe.

- *f es Riemann integrable pero,*

$$\int_a^b f(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

- *$\{f_n\}_n$ no converge uniformemente pero f es Riemann integrable y*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Sol.

- Sea $\{q_1, q_2, \dots\}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Sea $f_n : [0,1] \to \{0,1\}$ dada por,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \cap [0,1] \\ 0, & x \notin \{q_1, q_2, \dots, q_n\} \cap [0,1] \end{cases}$$

  Si $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, entonces a partir de algún m, se tiene que $f_n(x) = 1$ para todo $n \geq m$, y si $x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$, entonces $f_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces f_n converge puntualmente a, $f : [0,1] \to \{0,1\}$ dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

  Notemos que f_n es discontinua en finitos puntos, por lo que es R-integrable, pero f no es R-integrable al no tener límite. La integral de f_n es,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 0$$

Ya que es solo ignorar los puntos de discontinuidad los cuales son $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$$

- Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por, $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$. Se tiene que f_n converge puntualmente a $f = 0$. Claramente f_n, f son R-integrable. Si,

$$\begin{aligned}\int_0^1 n^2 x(1-x^2)^n dx &= n^2 \int_0^1 x(1-x^2)^n dx \\ &= \frac{n^2}{2(n+1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\end{aligned}$$

  Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx$$

- Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por, $f_n(x) = x^n$, luego f_n converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x = [0,1) \end{cases}$$

  En particular, f_n no converge uniformemente ya que entonces f sería continua y no lo es. Claramente f_n, f son R-integrable, la primera por se continua y la otra por tener una discontinuidad. Además,

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \quad \int_0^1 f(x)dx = 0$$

  Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

P6. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann integrable y sea*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

para todo $x \in [a,b]$.

(a) Demuestre que F es continua sobre $[a,b]$.

(b) Suponga que f es continua en (a,b). Demuestre que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Sol.

(a) Sea $K > 0$ talque $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a, b]$. Tenemos que f es R-integrable en todo intervalo $[a, x]$ con $x \in (a, b]$. Sea $x_0 \in [a, b]$ fijo, sea x arbitrario, entonces

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &\leq \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \\
&\leq K|x - x_0|
\end{aligned}$$

Tomando $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{K}$ se tiene que,

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$$

Luego, F es continua en $[a, b]$.

(b) Supongamos que f es continua en (a, b). Probemos que F es diferenciable con derivada $F' = f$. Sea $x \in [a, b]$ fijo y sea $|h| > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt
\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un δ para x, talque si $|t - x| < \delta$ entonces $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$, si tomamos $0 < |h| < \delta$ entonces $|t - x| \leq h < \delta$, luego

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

para todo $0 < |h| < \delta$. Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Concluyendo que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in (a, b)$.

P7. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas talque g es diferenciable sobre (a, b) con derivada continua. Para toda partición $\Pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ y todo conjunto $c = \{c_j : j = 1, \ldots, n\}$ de representantes de Π, definimos,*

$$S(\Pi, c) := \sum_{j=1}^{n} f(c_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

(a) *Demuestre que ,*

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S(\Pi, c)$$

existe y no depende de la elección de representantes.

(b) *Demuestre que,*

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S(\Pi, c) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Sol. Notemos que,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

está bien definido ya que fg' es una función continua. Digamos que

$$I := \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Notemos que dada $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ se tiene que, existe un representaten $\overline{c}$ de Π talque

$$S(\Pi, c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)g'(\overline{c}_i)\Delta x_i$$

Por el teorema del valor medio. Probemos que el límite cuando $|\Pi| \to 0$ existe y vale I. Sea $\varepsilon > 0$, sea Π una partición cualquiera, luego

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)g'(\overline{c}_i)\Delta x_i - I\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)g'(\overline{c}_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)g'(\overline{c}_i)\Delta x_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)g'(\overline{c}_i)\Delta x_i - I\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}(f(c_i) - f(\overline{c}_i))g'(\overline{c}_i)\Delta x_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)g'(\overline{c}_i)\Delta x_i - I\right|
\end{aligned}$$

Tenemos que f es uniformemente continua, por lo que para el $\varepsilon > 0$ que tomamos, existe δ_1 talque si $|x - y| < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ y como el límite

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S(f, \Pi, \underline{\mathcal{C}})$$

existe, hay un δ_2 talque si $|\Pi| < \delta_2$, entonces,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)g'(c_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

para todo representante de Π. Tomando $\delta := \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, si tomamos $|\Pi| < \delta$, entonces,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}(f(c_i) - f(\overline{c}_i))g'(\overline{c}_i)\Delta x_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\overline{c}_i)g'(\overline{c}_i)\Delta x_i - I\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon|g'(\overline{c}_i)|\Delta x_i + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon\left(\sup_{x\in[a,b]}|g'| + 1\right)\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es tan pequeño como queramos, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si $|\Pi| < \delta$, entonces,

$$|S(\Pi, c) - I| < \varepsilon$$

y para cualquier representante c. (En la demostración se puede hacer con cualquier partición). Por lo tanto, el límite cuando $|\Pi| \to 0$ de $S(\Pi, c)$ existe, es independiente del representante y,

$$\lim_{|\Pi|\to 0} S(\Pi, c) = \int_a^b f(x)dx$$

Medida Exterior.

P1. *Sea λ^* la medida exterior de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que*

$$\text{ínf}\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0$$

Demuestre que $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$

Sol. Supongamos que,

$$\text{ínf}\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > \delta$$

para algún $\delta > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ fijo, entonces existge un cubrimiento de $A \cup B$, digamos $\{I_n\}_n$ de intervalos abiertos tales que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon$$

Notemos que I_n puede ser separado en conjuntos medibles, donde cada uno de ello de diametro menor a δ, que contiene o solo elementos de A o solo elementos de B, si ocurre, por ejemplo $J \subseteq I_n$ contiene elementos de x, y, entonces,

$$\text{ínf}\{|x - y| : x \in A, y \in B\} \leq \delta$$

Que es imposible. Sea $I_n^{(A)}$ la unión de los conjuntos que contienen a los elementos de A, lo mismo con $I_n^{(B)}$, luego,

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) + \lambda^*(B) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^{(A)}| + \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^{(B)}| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \\ &< \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon\end{aligned}$$

Y esto para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto,

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

P2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha, es decir,*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Sea $\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \{(a, b] : a < b\}$ y

$$\tau_f(\emptyset) = 0, \quad \tau_f((a, b]) = f(b) - f(a), \ \ a < b$$

Sea λ_f^* la medida exterior asociada a τ. Demuestre que $(a, b]$ es medible para todo $a < b$ y que,

$$\lambda_f^*((a, b]) = f(b) - f(a)$$

para todo $a < b$.

P3. *Sea $d \geq 1$. Decimos que I es un intervalo de $\mathbb{R}^d$ si existen intervalos de $\mathbb{R}, I_1, \ldots, I_d$ tales que*

$$I = I_1 \times \cdots \times I_d$$

Sea $\mathcal{C} = \{\emptyset\} \cup \{I : I \text{ intervalos de } \mathbb{R}^d\}, \tau(\emptyset) = 0$ y,

$$\tau(I) = \prod_{j=1}^{d} |I_j|$$

Si $I = I_1 \times \cdots \times I_d$. Sea λ^* la medida exterior asociada a la premedida τ. Demueste que,

(a) $\lambda^*(I) = \tau(I)$ para todo intervalo de $\mathbb{R}^d$-

(b) Los abiertos de $\mathbb{R}^d$ son λ^*-medibles.

(c) Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es λ^*-medible y $x \in \mathbb{R}^d$, entonces $E + x$ es λ^*-medible y

$$\lambda(E + x) = \lambda(E)$$

P4. *Sean*

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &= \{O : O \subset \mathbb{R} \text{ es abierto}\} \\ \mathcal{I} &= \{\emptyset\} \cup \{(a, b) : a < b\} \\ \mathcal{I}' &= \{\emptyset\} \cup \{(a, b] : a < b\} \end{aligned}$$

Sea $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O})$. Demuestre que,

(a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$.

(b) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I}')$.

Sol.

(a) Si $(a,b) \in \mathcal{I}$, entonces es claro que $(a,b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ al ser abierto, luego,

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Luego $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es un σ-álgebra que contiene a $\mathcal{I}$ y, entonces,

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Para la otra desigualdad recordemos que para todo $O \subseteq \mathbb{R}$ abierto, existe un cubrimiento numerable disjunto de intervalos abiertos, digamos que,

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Notemos que $I_n \in \sigma(\mathcal{I})$, luego al ser σ-álgebra, $O \in \sigma(\mathcal{I})$, y por lo tanto,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I})$$

(b) Notemos que,

$$(a,b] = \bigcap_{n} \left(a, b + \frac{1}{n}\right)$$

Luego $(a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y, entonces,

$$\sigma(\mathcal{I}') \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Para la otra desigualdad notemos que,

$$(a,b) = \bigcup_{n} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$$

Luego $(a,b) \in \sigma(\mathcal{I}')$ y entonces,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}')$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I}')$$

8.2. Guía 2

Espacio Medible.

P1. *Encuentre un espacio medible* $(\Omega, \mathcal{F})$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *talque* $|f|$ *es medible pero* f *no lo es.*

Sol. Sea $(\mathbb{R}, \{\emptyset, \{1\}, \{1\}^c, \mathbb{R}\})$ un espacio medible, sea,

$$f(x) = 2 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) - 1 = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Veamos que no es medible. Notemos que $f(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$, luego $\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{-1, 1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ son los únicos conjuntos que se pueden tomar, notemos ahora que,

$$f^{-1}(\{-1\}) = \mathbb{Q} \notin \mathcal{F}$$

Por tanto f no es medible. Ahora si aplicamos valor absoluto, obtenemos que,

$$|f(x)| = 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que los únicos conjuntos a tomar son $\emptyset, \{1\}$, y vemos que,

$$|f|^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R},\ |f|^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{F}$$

Por tanto $|f|$ es medible. **P2.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espacio medible y sean* $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *funciones medibles. Sea*

$$E = \{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \textit{ existe}\}$$

Demuestre que $E \in \mathcal{F}$

Sol. Vamos a probar que E es una unión numerable de conjuntos medibles (en $\mathcal{F}$). Notemos que para w fijo, se tiene que $\{f_n(w)\}_n$ es Cauchy, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n, m \geq N$, entonces,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f(w) \text{ existe}\} = \{w \in \Omega : \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n, m \geq N, |f_n(w) - f_m(w)| < \varepsilon\}$$

Tomando $\varepsilon = 1/q$ con $q \in \mathbb{N}$, obtenemos,

$$\begin{aligned} &\{w \in \Omega : \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n, m \geq N, |f_n(w) - f_m(w)| < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{q\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq N} \{w \in \Omega : |f_n(w) - f_m(w)| < 1/q\} \end{aligned}$$

Veamos que,

$$\{w \in \Omega : |f_n(w) - f_m(w)| < 1/q\}$$

es medible, y en efecto, tenemos dos la suma de dos funciones medibles con valor absoluto, por lo que es medible y por tanto,

$$\{w \in \Omega : |f_n(w) - f_m(w)| < 1/q\} \in \mathcal{F}$$

para tood n, m. Como tenemos intersección y unión de cosas numerable, concluimos que $E \in \mathcal{F}$.

P3. *El objetivo de este problema es demostrar que no existe ninguna σ-álgebra infinita numerable. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Para cada $w \in \Omega$ se define,*

$$A_p(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}, x \in A} A$$

Decimos que $A_p(x)$ es un átomo de $\mathcal{F}$.

- *(a) Demuestre que los átomos de $\mathcal{F}$ forman una partición de Ω, es decir, $\bigcup_{\omega \in \Omega} A_p(\omega)$ y, si $A_p(\omega_1) \neq A_p(\omega_2)$, entonces $A_p(\omega_1) \cap A_p(\omega_2) = \emptyset$.*
- *(b) Demuestre que, si $\mathcal{F}$ es a lo más numerable, entonces $\mathcal{F}$ contiene a todos los átomos y que cada elemento de $\mathcal{F}$ se puede escribir como una unión a los más numerable de átomos.*
- *(c) Resuleva el problema inicial usando (a),(b).*

Sol.

(a) Notemos que si $x \in \Omega$, entonces $\Omega \in \mathcal{F}$ por definición dd σ-álgebra, luego

$$A_p(x) \subseteq \Omega$$

Y esto es para todo x. Luego,

$$\bigcup_{w \in \Omega} A_p(w) \subseteq \Omega$$

Para probar la igualdad, notemos que si $x \in \Omega$, entonces $x \in A_p(x)$, $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Luego,

$$\bigcup_{w \in \Omega} A_p(w) = \Omega$$

Probemos que los $A_p(x)$ son disjuntos cuando el argumento es distinto. Supongamos que $A_p(w_1) \neq A_p(w_2)$, si la intersección es no vacía, entonces hay un x en ambos lado, notemos que si $x \in A_p(w_1)$, entonces $x \in A$ para todo $A \in \mathcal{F}$ que contiene a w_1. Pero notemos que si $A \in \mathcal{F}$ y contiene a w_1, entonces necesariamente contiene a x, luego $A_p(x) \subseteq A_p(w_1)$, probemos que $A_p(x) = A_p(w_1)$, supongamos que no, entonces existe un conjunto $B \in \mathcal{F}$ talque $x \in B$ pero $w_1 \notin B$, entonces $w_1 \in B^c$ y como hemos concluido, necesariamente $x \in B^c$, siendo contradicción. Por lo tanto, tienen que ser iguales. Si además, $x \in A_p(w_2)$, entonces,

$$A_p(w_1) = A_p(w_2)$$

Contradicción. Probando que los átomos de $\mathcal{F}$ conforman una partición de Ω.

(b)

P4. *Sean $(A,\mathcal{A})$ y $(B,\mathcal{B})$ dos espacios medibles, $\mathcal{C}\subset 2^B$ talque $\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}$ y $f:A\to B$. Muestre que f es medible si y sólo si $f^{-1}(C)\in\mathcal{A}$ para todo $C\in\mathcal{C}$. Concluya que toda función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es Borel medible.*

Sol. Sea f medible, entonces para todo $X\in\mathcal{B}$ se tiene que, $f^{-1}(X)\in\mathcal{A}$. Sea $C\in\mathcal{C}$, si,

$$\mathcal{C}\subseteq\sigma(\mathcal{C})=\mathcal{B}$$

Luego, $f^{-1}(X)\in\mathcal{A}$.

Supongamos que $f^{-1}(C)\in\mathcal{A}$ para todo $C\in\mathcal{C}$. Sea el conjunto,

$$\mathcal{X}:=\{C\in\sigma(\mathcal{C}):f^{-1}(C)\in\mathcal{A}\}$$

Notemos que, $\mathcal{X}\supseteq\mathcal{C}$ por definición, probemos que $\mathcal{X}$ es un σ-álgebra.

i) Si $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{A}$, entonces $\emptyset\in\mathcal{X}$.

ii) Sea $C\in\mathcal{X}$, luego,

$$f^{-1}(C^c)=(f^{-1}(C))^c\in\mathcal{A}$$

Luego, $C^c\in\mathcal{X}$.

iii) Sea $\{C_n\}_n\subseteq\mathcal{X}$, luego,

$$f^{-1}\left(\bigcup_n C_n\right)=\bigcup_n f^{-1}(C_n)\in\mathcal{C}$$

Entonces,

$$\bigcup_n C_n\in\mathcal{X}$$

Por tanto $\mathcal{X}$ es un σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, y por tanto, $\mathcal{X}=\sigma(\mathcal{C})$. Luego, $f^{-1}(C)\in\mathcal{A}$ para tood $C\in\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{C})$, esto es que f es medible.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Basta probar que $f^{-1}(C)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo C abierto, (recordemos que $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma\{O:O\subseteq\mathbb{R}\,\text{abierto}\}$). Como f es continua, entonces $f^{-1}(O)$ es abierto para todo O abierto, luego claramente $f^{-1}(O)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por tanto, por lo anterior, f es Borel-medible.

P5. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e inyectiva. Demuestre que $f(B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ para todo $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Sol. Si f es continua e inyectiva, entonces es biyectiva, es más, f tiene inversa continua monótona. Esto implica que $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que medible, es decir, para todo $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que,

$$(f^{-1})^{-1}(B)=f(B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Medidas.

P1. *Sean μ y η dos medida σ-finitas sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tales que,*

$$\mu((a,b]) = \eta((a,b])$$

para todo $a < b$. Demuestre que $\mu = \eta$. Dé un ejemplo de dos medidas, necesariamente no σ-finitas, tales que se cumpla la identidad anterior y tales que $\mu \neq \eta$.

Sol. Sea el conjunto,

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu(A) = \eta(A)\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

notemos que no es vacío ya que $(a,b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Probemos que es σ-álgebra.

i) Por definición de medida,

$$\mu(\emptyset) = 0 = \eta(\emptyset)$$

Luego $\emptyset \in \mathcal{C}$.

ii) Notemos que $(n, n+1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, luego,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1] = \mathbb{R}$$

Una unión numerable disjunta. Luego,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1]\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(n, n+1] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \eta(n, n+1] \\ &= \eta\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1]\right) \end{aligned}$$

Esto implica que $\mu(\mathbb{R}) = \eta(\mathbb{R})$. Notemos que todo elemento de $\mathcal{C}$ es medible sobre μ, η. Luego, si $A \in \mathcal{C}$, entonces,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{R} \cap A^c) &= \mu(\mathbb{R}) - \mu(\mathbb{R} \cap A) \\ &= \eta(\mathbb{R}) - \eta(R \cap A) \\ &= \eta(\mathbb{R} \cap A^c) \end{aligned}$$

Luego $A^c \in \mathcal{C}$.

iii) Sea $\{A_n\} \subseteq \mathcal{C}$ disjuntos a pares, claramente,

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$$

Ahora si $\{A_n\}$ es cualquier colección, podemos definir,

$$\begin{aligned}
B_1 &:= A_1 \\
B_2 &:= A_2 \setminus A_1 \\
&\vdots \\
B_n &:= A_n \setminus (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})
\end{aligned}$$

Luego $\{B_n\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjunto talque,

$$\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_n B_n\right) \\
&= \eta\left(\bigcup_n B_n\right) \\
&= \eta\left(\bigcup_n A_n\right)
\end{aligned}$$

Probando que,

$$\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$$

Por tanto, $\mathcal{C}$ es un σ-álgebra que contiene al conjunto de los intervalos $(a,b]$. Finalmente,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}$$

Probando que $\mu = \eta$.

Supongamos que μ, η son dos medida que cumplen lo anterior y que no son σ-finito. Notemos que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \eta)$ dado por,

$$\eta(A) = \begin{cases} \#A, & A \text{ finito} \\ \infty, & A \text{ infinito} \end{cases}$$

Que no es σ-finito. Ahora sea $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ dada por,

$$\mu(\emptyset) = 0, \ \ \mu(A) = \infty$$

Para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, que es medida ya que cumple la primera, la segunda y la tercera, además, de no ser σ-finito. Si $a < b$, entonces,

$$\mu(a,b] = \infty = \eta(a,b]$$

Pero,

$$\mu(\{1,2,3\}) = \infty \neq 3 = \eta(\{1,2,3\})$$

De forma que, $\eta \neq \mu$.

P2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espacio de medida finita. Suponga que, para todo* $A \in \mathcal{F}$ *talque* $\mu(A) > 0$, *existe* $B \in \mathcal{F}$ *talque* $B \subset A$ *y* $\mu(B) < \mu(A)$. *Demuestre que, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $A \in \mathcal{F}$ *talque* $0 < \mu(A) < \varepsilon$.

Sol. Se tiene que $\mu(\Omega) < \infty$, digamos que $\mu(\Omega) = L_0$, si $\varepsilon > L_0 > 0$, es evidente que,

$$0 < \mu(\Omega) = L_0 < \varepsilon$$

Sea $0 < \varepsilon$ fijo, como $\Omega \in \mathcal{F}$, existe un $A_1 \in \mathcal{F}$ talque $A_1 \subseteq A_0 := \Omega$ y,

$$0 < \mu(A_1) < \mu(\Omega)$$

Con A_1 podemos repetir el proceso, de forma que se genera una secuencia $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{F}$ talque,

$$A_{n+1} \subset A_n, \;\; 0 < \mu(A_{n+1}) < \mu(A_n)$$

Es decir, tenemos una sucesión $\{\mu(A_n)\}_n$ decreciente y acotada inferiormente, por lo que el límite,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

existe. Si el límite vale 0 estamos listo, ya que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n \geq N$, entonces,

$$0 < \mu(A_n) < \varepsilon$$

Como A_n no anula a μ por cosntrucción.

Supongamos que el límite es $0 < L < L_0$, notemos que $\mu(A_0) = L_0 < \infty$ y $\{A_n\}$ es decreciente, por lo tanto,

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = L$$

Y como $\mathcal{F}$ es σ-álgebra, se tiene que,

$$\bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

que no es vacío, sino $L = 0$ contradicción. Lo importante, es que existe un $B \in \mathcal{F}$ talque,

$$B \subset \bigcap_n A_n$$

Y,

$$0 < \mu(B) < \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = L$$

El problema es que vamos si algún límite de esto no se anula, entonces se genera $\{L_n\}$ decreciente estricto y acotado, luego este tiene un límite. Antes de probar que es 0, vamos a usar algunas notaciones. Sea $\{A_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ la secuencia decreciente generada donde $A_0^{(n)} = L_n$, donde $A_0^0 = \Omega = L_0$, sea,

$$B_n := \bigcap_k A_k^{(n-1)}$$

este satisface que,

$$\mu(B_n) = L_n$$

Notemos que, $B_{n+1} \subseteq B_n$ ya que por definición de este,

$$B_n \subset A_k^{(n-1)} \subset B_{n-1}$$

Ahora, se tiene que si $\overline{L} > 0$ es el límite de $\{L_n\}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{L} &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(B_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k^{(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

La cosa es que,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k^{(n-1)} \in \mathcal{F}$$

P3. *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible talque $\{w\} \in \mathcal{F}$ para todo $w \in \Omega$. Sea μ una medida sobre $\mathcal{F}$.*

P4. *Considere $(\mathbb{R}, \mathcal{F}^*, \lambda)$. Para $A \subset \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos.*

$$tA = \{tx : x \in A\}$$

Sea $A \in \mathcal{F}^*$.

(a) Demuestre que tA es medible para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Demeuestre que $\lambda(tA) = |t|\lambda(A)$.

8.3. Guia 3

Integral de Lebesgue.

Observación. $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ denota un espacio de medida arbitrario, a menos que se especifique lo contrario.

P1. *Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por,*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no es Lebesgue integrable.

P2. *Sea $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Encuentre todos los valores de α tales que,*

(a) $f_\alpha \in L^1(0,1)$ con la medida de Lebesgue.

(b) $f_\alpha \in L^1[1,\infty)$ con la medida de Lebesgue.

Sol.

(a) Sea $f_\alpha : (0,1) \to [0,\infty)$ donde $f_\alpha(x) = x^\alpha$, notemos que $|f_\alpha| = f_\alpha$ por lo que no debemos preocuparnos por el valor absoluto. Si $f_\alpha \in L^1(0,1)$ podemos determinar α. Notemos que f_α es continua en $(0,1)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ por lo que es R-integrable en todo $[a,b] \subseteq (0,1)$, veamos si el límite,

$$\lim_{a\to 0} \int_a^1 x^\alpha dx$$

existe. Notemos que x^α tiene primitiva para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\lim_{a\to 0} \int_a^1 x^\alpha dx = \lim_{a\to 0} \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^1$$

Este límite existe si $\alpha > -1$. Por tanto,

$$\int_{(0,1)} x^\alpha \lambda(dx) = \frac{1}{\alpha+1} < \infty$$

cuando $\alpha > -1$. Esto significa que cuando $\alpha \leq -1$ entonces $f_\alpha \notin L^1(0,1)$. Veamos que si $\alpha > -1$ entonces se tiene lo pedido. Si $\alpha \geq 0$ es evidente ya que $f_\alpha \leq 1$ y $1 \in L^1(0,1)$, sea $\alpha \in (-1,0)$, definimos,

$$f_n := x^\alpha \mathbb{1}_{[1/n,1)}$$

Tenemos que f_n es medible al ser continua, se tiene $f_n \leq f_{n+1}$ y además,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^\alpha \mathbb{1}_{(0,1)}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} f d\lambda &= \lim_{n\to\infty}\int_{[1/n,1)} x^{-\alpha} d\\ &= \frac{1}{\alpha+1} < \infty\end{aligned}$$

Por tanto $f_\alpha \in L^1(0,1)$ cuando $\alpha > -1$.

(b) Sea $f_\alpha : [1,\infty) \to [0,\infty)$. Supogamos que $f_\alpha \in L^1[1,\infty)$, notemos que f_α es continua y luego R-integrable en todo intervalo $[1,b] \subseteq [1,\infty)$. También notemos que el límite,

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^\alpha dx$$

existe solamente cuando $\alpha < -1$. Luego si $\alpha \geq -1$ entonces $f_\alpha \notin L^1[1,\infty)$, supogamos que $\alpha < -1$, y haciendo el mismo truco anterior llegamos a que,

$$\int_{[1,\infty)} x^\alpha = -\frac{1}{\alpha+1} < \infty$$

Por tanto, $f_\alpha \in L^1[1,\infty)$ cuando $\alpha < -1$.

P3. *Repita el ejercicio anterior con* $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$.

Sol.

(a)

P4. *Encuentre todos los valores de* α *y* β *tales que* $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\log(x))^\alpha}{1+x^\beta}$ *es integrable en* $[2,\infty]$.

P5. *Suponga que* $\mu(\Omega) < \infty$. *Sean* $f, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *medibles tales que* $f_n \to f$ μ*-ctp y sea* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua y acotada. Demuestre que,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g(f_n)d\mu = \int_\Omega g(f)d\mu$$

Sol. Notemos que $g(f_n), g(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ son funciones $L^1(\Omega)$ ya que g al ser acotada se tiene que, $|g(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y luego,

$$\int_\Omega |g(f_n)|d\mu \leq \int_\Omega C d\mu = C\mu(\Omega) < \infty$$

Lo mismo para $g(f)$. Esto significa que las integrables son finitas y están bien definidas. Para probar el resultado usaremos el teorema de la convergencia dominada. Definimos $g_n(w) := g(f_n(w))$, veamos que son medibles. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, luego,

$$\begin{aligned}(g(f_n))^{-1}(A) &= \{w \in \Omega : g(f_n(w)) \in A\}\\ &= f_n^{-1}(g^{-1}(A))\end{aligned}$$

Si g es continua, entonces es medible, luego $B := g^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, y si f_n es medible, entonces $f_n^{-1}(B) \in \mathbb{F}$. Luego g_n es medible. Notemos que,

$$\lim_{n\to\infty} g(f_n(w)) = g\left(\lim_{n\to\infty} f_n(w)\right) = g(f)$$

de forma μ-ctp. Por último,

$$|g(f_n(w))| \leq C \in L^1(\Omega)$$

Por tanto, por el teorema de la convergencia dominada tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega g(f) d\mu$$

Reemplazando g_n llegamos al resultado pedido.

P6. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue medible talque $f, f^2 \in L^1(\mathbb{R})$ con la medida de Lebesgue. Demuestre que,*

$$\left(\int f d\lambda\right)^2 \leq \int f^2 d\lambda$$

Sol. Consideremos $\lambda \in \mathbb{R}$, luego se tiene que, $(f(x) + k\mathbb{1}_{[-n,n]})^2 \geq 0$, notemos que es $L^1(\mathbb{R})$ ya que,

$$\begin{aligned}
\int_\mathbb{R} (f(x) + k\mathbb{1}_{[-n,n]})^2 d\lambda &= \int_\mathbb{R} f^2 + 2kf\mathbb{1}_{[-n,n]} + k^2\mathbb{1}_{[-n,n]} d\lambda \\
&= \int_\mathbb{R} f^2 d\lambda + 2k\int_{[-n,n]} f d\lambda + k^2 \int_{[-n,n]} d\lambda \\
&= \int_\mathbb{R} f^2 d\lambda + 2n(k^2 + k) < \infty
\end{aligned}$$

Esto para todo $n \geq 1$. Si,

$$\int_\mathbb{R} f^2 d\lambda + 2k\int_\mathbb{R} f\mathbb{1}_{[-n,n]} d\lambda + k^2 \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_{[-n,n]} d\lambda \geq 0$$

Entonces el discrimantes es siempre no positivo, por lo que,

$$4\left(\int_\mathbb{R} f\mathbb{1}_{[-n,n]} d\lambda\right)^2 \leq 4\int_\mathbb{R} f^2 d\lambda \int_\mathbb{R} \mathbb{1}_{[-n,n]} d\lambda$$

Es decir,

$$\left(\int_{[-n,n]} f d\lambda\right)^2 \leq 2n \int_\mathbb{R} f^2 d\lambda$$

P7. *Suponga que $\mu(\Omega) < \infty$. Use los principios de Littlewood para demostrar el teorema de convergencia acotada, es decir, si $f_n \to f$ μ-ctp con f_n, f medibles y si existe $M \geq 0$ talque $|f_n| \leq M$ μ-ctp para todo $n \geq 1$ entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$$

Sol. Usaremos el segundo principio de Littlewood. Tenemos el espacio de medida finito $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, si $f_n \to f$ μ-ctp con f_n, f medibles, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ talque $\mu(\Omega_0^c) < \varepsilon$ y,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{w\in\Omega_0} |f_n - f| = 0$$

Notemos que si $|f_n| \leq M$ μ-ctp y $M \in L^1(\Omega)$, entonces $f_n \in L^1$ luego, $f \in L^1(\Omega)$ por el teorema de la convergencia dominada. Ahora notemos que $|f_n - f| : \Omega \to [0, \infty)$ medibles, luego para $\varepsilon > 0$ existe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ talque,

$$\int_\Omega |f_n - f| d\mu = \int_{\Omega_0^c} |f_n - f| d\mu + \int_{\Omega_0} |f_n - f| d\mu$$

Probemos que $|f| \leq M$ de forma μ-ctp y en efecto, si,

$$|f| \leq |f_n - f| + |f_n| \leq |f_n - f| + M \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M$$

de forma μ-ctp, entonces podemos tomar $\Omega_0^c \cap A$ de forma que $|f_n - f| \leq 2M$ de forma μ-ctp y si,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega_0} |f_n - f| = 0$$

dado que f_n converge uniformemente a f sobre Ω_0. Por lo tanto,

$$\int_\Omega |f_n - f| d\mu = 2M\varepsilon + \int_{\Omega_0} |f_n - f| d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2M\varepsilon$$

Y esto se puede hacer para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| d\mu = 0$$

8.4. Guía 4

Medida Producto

P1.

P2.

Sol. Vamos a usar la medida del producto. Sean $0 < a < b < \infty$ fijos, consideremos la función,

$$\begin{aligned} f &: (0,\infty) \times [a,b] \to \mathbb{R} \\ f(x,y) &= \frac{e^{-xy}y}{x} \end{aligned}$$

Que es una función continua en su dominio y además es positiva. Consideremos los espacios $((0,\infty), \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda), ([a,b], \mathbb{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ que son σ-finitos. Si $f \geq 0$ entonces por Tonelli se tiene que,

$$\int_{(0,\infty)} \left(\int_{[a,b]} \frac{e^{-xy}y}{x} \lambda(dy) \right) \lambda(dx) = \int_{[a,b]} \left(\int_{(0,\infty)} \frac{e^{-xy}y}{x} \lambda(dx) \right) \lambda(dy)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \frac{e^{-xy}y}{x} \lambda(dy) &= \int_a^b \frac{e^{-xy}y}{x} dy \\ &= \frac{1}{x} \left(-e^{-xy} \Big|_a^b \right) \\ &= \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \end{aligned}$$

Que es lo que queremos estudiar. Sea y fijo, sea la función

$$f_n := \frac{e^{-xy}y}{x} \mathbb{1}_{(0,n]} \uparrow f$$

luego si f es una función continua con y fijo se tiene que,

$$\int_{(0,\infty)} \frac{e^{-xy}y}{x} \lambda(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{e^{-xy}y}{x} dx$$

Estudiemos el límite, notemos que,

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{e^{-xy}y}{x} dx &= e^{-xy}y \Big|_0^n - \int_0^n \left(\frac{-e^{-xy}y^2x - e^{-xy}y}{x} \right) dx \\ &= ye^{-ny} - y + \int_0^n e^{xy}y^2 dx + \int_0^n \frac{e^{-xy}y}{x} dx \end{aligned}$$

9. Tareas

P1.

(a) Vamos a usar la caracterización de la integración, pero antes probemos que si R es el conjunto de discontinuidades de $|f|$, entonces existe un $S \subseteq \mathbb{R}$ que son la discontinuidades de f talque $R \subseteq S$. Sabemos que existe el conjunto de discontinuidades de f, que bien puede ser vacío o no.

Sea $x_0 \in R$ y supongamos que f es continua en x_0, por lo que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ahora, si $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función continua, entonces se tiene que $|f(x)|$ es continua en x_0 por composición de funciones continuas en un punto, siendo contradicción, luego $x_0 \in S$, es decir, S es no vacío y además $R \subseteq S$.

Ahora, supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada R-integrable, luego $|f|$ también es acotada. Como f es R-integrable, se tiene que el conjunto S de discontinuidades de f, es despreciable, como $R \subseteq S$, entonces R es despreciable y por lo tanto, $|f|$ es R-integrable.

Probemos la desigualdad. Si $|f|$ es R-integrable, podemos realizar la siguiente desigualdad

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Para todo $x \in [a, b]$, podemos integrar en $[a, b]$, de forma que se mantiene la integral (Cálculo II), de forma que

$$\int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Como la integral es un supremo/ínfimo, podemos realizar el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \sup\{L(-|f|, \Pi)\} : \Pi \text{ partición}\} &= \sup\{-U(|f|, \Pi) : \Pi \text{ partición}\} \\ &= -\inf\{U(|f|, \Pi) : \Pi \text{ partición}\} \end{aligned}$$

Considerando que si Π es una partición de n elementos, entonces

$$L(-|f|, \Pi) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = -\sum_{i=1}^{n} (M_i' - m_i')\Delta x_i$$

donde M_i' es el supremo de $|f|$ en el intervalo i, análogamente con m_i'. Por lo tanto podemos sacar el menos como mutiplicando a la integral de $|f|$. De forma que y por tanto

$$-\int_a b|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \iff \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Probando la desigualdad.

(b) Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si $|x - y| < \delta$, entonces $|F(x) - F(y)|$. Además, si f es R-integrable (por definición de $F(x)$), por lo que es acotada, digamos que $|f(x) \leq K|$ para todo $x \in [a, b]$. Sea $\varepsilon > 0$, sin pérdida de generalidad sean $y < x$, con $x, y \in [a, b]$, notemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| &\leq \int_y^x |f(t)|dt \\ &\leq \int_y^x K dt = K(x - y) \end{aligned}$$

Escogiendo $\delta := \frac{\varepsilon}{K} > 0$, obtenemos que si $|x - y| < \delta$, entonces

$$|F(x) - F(y)| \leq K(x - y) < \varepsilon$$

Probando que F es uniformemente continua.

(c) Sea f continua, por lo que es R-integrable (visto en clase), por lo que F está bien definido. Probemos que F es diferenciable en (a, b) y que $F'(x) = f(x)$. Vamos a probar que para todo $x_0 \in (a, b)$, se tiene que,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Sea $x_0 \in (a, b)$, sea $\varepsilon > 0$, notemos la siguiente desigualdad para $h > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - hf(x_0) \right| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt \right| \\ &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \end{aligned}$$

Si f es continua, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Si escogemos $0 < h < \delta$, entonces estamos integrando en el intervalo $[x_0, x_0 + h] \subseteq [x_0, +\delta)$, es decir, $|t - x_0| < \delta$, luego

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - hf(x_0) \right| &\leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \\ &\leq \varepsilon \cdot h \end{aligned}$$

Es decir,

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

cuando $0 < h < \delta$. Por lo tanto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Falta probar cuando $h < 0$, y en tal caso debemos notar que

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_{x+h}^{x} f(x)dx \right| = \left| \int_{x}^{x+h} f(x)dx \right|$$

Luego aplicando el mismo argumento anterior concluimos que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ talque

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

Para todo $-\delta < h < 0$. Y por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Probando que F es diferenciable en (a,b) con derivada,

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

con $x \in (a,b)$.

P2. Notemos que g' es R-integrable en todo intervalo $[a, x]$ para todo $x \in (a, b]$, ya que es continua en un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$.

Probemos la identidad. Si $x = a$ es evidente que

$$g(x) = g(a) + 0 = g(a) + \int_a^a g'(t)dt$$

Sea $x \in (a, b]$ y sea $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, x]$, luego

$$\begin{aligned} g(x) - g(a) &= g(x_n) - g(x_0) \\ &= g(x_n) - g(x_{n-1}) + g(x_{n-1}) - g(x_{n-2}) + \cdots + g(x_1) - g(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(x_i) - g(x_{i-1}) \end{aligned}$$

Si g es diferenciable en un abierto que contiene al intervalo $[a, b]$, entonces se tiene que para todo $\alpha, \beta \in [a, b]$ (asumiendo sin pérdida de generalidad $\alpha < \beta$), se tiene que por el teorema del valor medio, existe un $\gamma \in (\alpha, \beta)$ talque

$$g(\beta) - g(\alpha) = g'(\gamma)(\beta - \alpha)$$

Entonces, para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe un ξ_i talque

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Luego

$$g(x) - g(a) = \sum_{i=1}^{n} g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = S(g'_x, \Pi, \underline{\mathcal{C}})$$

(g'_x es la función g' restringida en $[a, x]$). Donde $\underline{\mathcal{C}} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ es un representante de Π. Esto se puede hacer para cualquier partición de Π, por lo tanto, si $|\Pi| \to 0$ y como el representante es independiente de la malla de Π, se concluye que

$$g(x) - g(a) = \lim_{|\Pi| \to 0} S(g', \Pi, \underline{\mathcal{C}}) = \int_a^x g'(t)dt$$

Probando que para todo $x \in [a, b]$, se tiene

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)dt$$

P3. Sea $\varepsilon = 1/n > 0$, entonces existe una partición $\overline{\Pi}_n$, talque

$$U(f, \overline{\Pi}_n) - L(f, \overline{\Pi}_n) < \frac{1}{n}$$

(si ocurre que $\overline{\Pi}_n$ tiene los mismos elementos que $\overline{\Pi}_{n+1}$, entonces afinamos $\overline{\Pi}_{n+1}$ y lo reemplazamos como nuevo $\overline{\Pi}_n$ y esto se puede hacer por propiedades de afinidad. De forma que $\overline{\Pi}_n$ tenga al menos un elemento distinto para todo $n \in \mathbb{N}$). Definimos la partición

$$\Pi_1 := \overline{\Pi}_1$$
$$\Pi_n := \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Pi}_i$$

Entonces es evidente que $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$ y que para $1/n > 0$, existe Π_n talque

$$U(f, \Pi_n) - L(f, \Pi_n) \leq U(f, \overline{\Pi}_n) - L(f, \overline{\Pi}_n) < \frac{1}{n}$$

Entonces

$$\mathcal{U}(f) \leq U(f, \Pi_n) < L(f, \Pi_n) + \frac{1}{n} \leq \mathcal{U}(f) + \frac{1}{n}$$

Luego si $n \to \infty$, se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} U(f, \Pi_n) = \mathcal{U}(f)$$

Haciendo similarmente a $L(f, \Pi_n)$ con $\mathcal{L}(f)$, se concluye

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U(f, \Pi_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, \Pi_n)$$

P4. Digamos que

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$$

Supongamos que $f \neq g$, por lo que existe un $x_0 \in A$, talque $f(x_0) = g(x_0)$, vemos que $f - g$ es continua entonces para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|(f - g)(x) - (f - g)(x_0)| < \varepsilon$ o mejor dicho,

$$-\varepsilon + (f - g)(x_0) < (f - g)(x) < \varepsilon + (f - g)(x_0)$$

Digamos que $\varepsilon > 0$ es tan pequeño de tal forma que

$$-\varepsilon + (f - g)(x_0), \varepsilon + (f - g)(x_0)$$

tienen el mismo signo, esto implica que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, es decir, el intervalo abierto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq A$, por lo tanto A no puede ser despreciable, siendo una contradicción. Por lo tanto, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

P5.

(a) Sabemos que,

$$\mu_F^*(a,b] = \text{ínf}\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \tau_F(\mathcal{C}_i) : \{\mathcal{C}_i\}_i \subseteq \mathcal{C}, (a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i\right\}$$

Sean $-\infty < a < b < \infty$ fijos, es claro que $(a,b] \subseteq (a,b] \in \mathcal{C}$, luego considerando la colección $\{\mathcal{C}_i\}_i$ dada por $\mathcal{C}_1 = (a,b], \mathcal{C}_i = \emptyset$ con $i > 1$, se tiene que,

$$\mu_F^*(a,b] \leq \tau_F(a,b] = F(b) - F(a)$$

Probemos que $F(b) - F(a) \leq \mu^*(a,b]$. Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y sea $\{C_i\}$ un cubrimiento de $(a,b]$, notemos que,

$$[a+\varepsilon, b] \subseteq (a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

Digamos que $C_i = (a_i, b_i]$, sin pérdida de generalidad supongamos que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i) < \infty$$

Tomamos $\gamma > 0$ fijo, y ahora tenemos que

$$[a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i + \gamma)$$

Como $[a+\varepsilon, b]$ es compacto, existe un cubrimiento abierto finito, digamos que,

$$[a+\varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma)$$

Donde $(a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma) \cap [a+\varepsilon, b] \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, N$ y de forma que ninguno sobre, es decir, nunca ocurre que

$$(a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma) \subseteq (a_{m_j}, b_{m_j} + \gamma)$$

para algunos i, j. (Si ocurre esto basta con simplificarlo para que no ocurra). Como tenemos finitos $(a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma)$ que cubre a un intervalo, podemos reordenar los límites de cada intervalo y generar los intervalos $(a_{\overline{m}_i}, b_{\overline{m}_i}]$ con $i = 1, \ldots, M$, para algún $M \in \mathbb{N}$, tales que,

$$a_{\overline{m}_1} \leq b_{\overline{m}_1} = a_{\overline{m}_2} \leq b_{\overline{m}_2} = \cdots \leq a_{\overline{m}_M} \leq b_{\overline{m}_M} = b, \quad a_{\overline{m}_j} = a + \varepsilon,$$

para algún j, aunque tal j no es tan importante para la prueba ya que nos interesa solo una desigualdad. También mencionar que escogemos $b_{\overline{m}_M} = b$ ya que puede pasar que

$b \leq b_{m_i} + \gamma$ para algún $i = 1, \ldots, N$, entonces si escogemos $b_{\overline{m}_N} = b_{m_i} + \gamma$ puede ocurrir problemas al tomar un elementos que no está en la unión de los $(a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma)$. Además se cumple,

$$[a + \varepsilon, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} (a_{\overline{m}_i}, b_{\overline{m}_i}] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma)$$

por construcción de los intervalos ordenados. Ahora, si F está definido en todo $\mathbb{R}$ y es creciente, entonces es claro que,

$$F(b) \leq F(b_{\overline{m}_M}), \quad F(a + \varepsilon) \geq F(a_{\overline{m}_1})$$

Y entonces,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a + \varepsilon) &\leq F(b_{\overline{m}_M}) - F(a_{\overline{m}_1}) \\ &= F(b_{\overline{m}_M}) - F(a_{\overline{m}_M}) + \cdots + F(b_{\overline{m}_1}) - F(a_{\overline{m}_1}) \\ &= \sum_{i=1}^{M} F(b_{\overline{m}_i}) - F(a_{\overline{m}_i}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} F(b_{m_i} + \gamma) - F(a_{m_i}) \quad (\star) \end{aligned}$$

Nota. Intentaré dar dos un argumento formalmente de porque se cumple $(\star)$ que es todo lo que está en letra curvisa, la primera forma es estudiar localmente el comportamiento de los intervalo y la segunda es hacer uso de unas hipótesis que no pude demostrar, pero todo apunta que es cierto (usaré la notación (Hipótesis) para especificar cuando usé una hipótesis). Si el argumento es muy engorroso, confuso, tedioso, erroneo, sin sentido, etc. Favor ignorar todo lo que está en cursiva.

- ***Forma 1.*** *Para concluir la desigualdad $(\star)$, podemos pensar en vez de $b_{\overline{m}_i}$, como $a_{\overline{m}_{i+1}}$ y tomando $b = b_{\overline{m}_M} = a_{\overline{m}_{M+1}}$, es decir, solo intervalos de la forma $(a_{\overline{m}_i}, a_{\overline{m}_{i+1}}]$, y notemos que en el intervalo cerrado (tomamos el intervalo cerrado para poder tomar unos elementos sin problemas),*

  $$[a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma]$$

  contiene a los elementos $a_{m_i} = a_{\overline{m}_l}, a_{\overline{m}_{l+1}}, \ldots, a_{\overline{m}_j} = b_{m_i} + \gamma$ para algunos $l, j = 1, \ldots, M$, si ocurre $b \in [a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma]$, se usa lo mismo, solo que

  $$a_{\overline{m}_{M+1}} = b < b_{m_i} + \gamma$$

  Y luego $F(b_{m_i} + \gamma) - F(a_{m_i}) \geq F(a_{\overline{m}_{M+1}}) - F(a_{\overline{m}_l})$. Lo importante de esto, es que podemos concluir que

  $$F(b_{m_i} + \gamma) - F(a_{m_i}) = F(a_{\overline{m}_j}) - F(a_{\overline{m}_l})$$

Usando la definición de los $a_{\overline{m}_i}$ y de F creciente. Ahora si existen i, j tales que

$$(a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma) \cap (a_{m_j}, b_{m_j} + \gamma) \neq \emptyset$$

Esto significa que $a_{\overline{m}_l}, a_{\overline{m}_{l+1}}$ están en ambos intervalos en su forma cerrada para algún l. Pero esto implica que,

$$\begin{aligned} F(b_{m_j} + \gamma) - F(a_{m_j}) + F(b_{m_i} + \gamma) - F(a_{m_i}) &\geq F(a_{\overline{m}_{s_1}}) - F(a_{\overline{m}_{s_2}}) + F(a_{\overline{m}_{l+1}}) - F(a_{\overline{m}_l}) \\ &\geq F(a_{\overline{m}_{s_1}}) - F(a_{\overline{m}_{s_2}}) \end{aligned}$$

donde $a_{\overline{m}_{s_1}} = b_{m_j} + \gamma, a_{\overline{m}_{s_2}} = a_{m_i}$ (también se cumple cuando ocupamos el b), por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{N} F(b_{m_i} + \gamma) - F(a_{m_i}) \geq \sum_{i=1}^{M} F(b_{\overline{m}_i}) - F(a_{\overline{m}_i})$$

- ***Forma 2.*** *Notemos que*

$$(a_{\overline{m}_1}, b_{\overline{m}_M}] \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (a_{m_i}, b_{m_i} + \gamma)$$

Como F es creciente se tiene que

$$(F(a_{\overline{m}_1}), F(b_{\overline{m}_M})] \overset{\text{(Hipó (1)):}}{\subseteq} \bigcup_{i=1}^{N} (F(a_{m_i}), F(b_{m_i} + \gamma))$$

(Tiene sentido cuando $y \in (F(a_{\overline{m}_1}), F(b_{\overline{m}_M})]$ tiene preimagen, pero cuando no, hay que notar que (Hipótesis (2)): $y \in ((F(a_0-), F(a_0))$ donde F es discontinua no arreglable en a_0, y luego $(F(a_0-), F(a_0)) \subseteq (F(a_{m_i}), F(b_{m_i} + \gamma))$ para algún $i = 1, \ldots, N$, o que está en una unión finita de intervalos $(F(a_{m_i}), F(b_{m_i}+\gamma))$). Entonces podemos aplicar medida exterior de Lebesgue y por la subaditividad se tiene que,

$$F(b_{\overline{m}_M}) - F(a_{\overline{m}_1}) = \sum_{i=1}^{M} F(b_{\overline{m}_i}) - F(a_{\overline{m}_i}) \leq \sum_{i=1}^{N} F(b_{m_i} + \gamma) - F(a_{m_i})$$

De esta forma,

$$F(b) - F(a + \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{N} F(b_{m_i} + \gamma) - F(a_{m_i})$$

Tomando $\gamma \to 0^+$ obtenemos que,

$$F(b) - F(a + \varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{N} F(b_{m_i}) - F(a_{m_i})$$

Dado que F es continua por la derecha y al tener una suma finita. Luego se tiene que,

$$\sum_{i=1}^{N} F(b_{m_i}) - F(a_{m_i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i)$$

Como estamos sumando términos positivo, y por lo tanto,

$$F(b) - F(a+\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i)$$

Y esto se cumple para todo cubrimiento de cubrimiento de $(a, b]$ y para todo $\varepsilon > 0$. Tomando $\varepsilon \to 0^+$ se tiene concluye,

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i)$$

(el límite no afecta a la serie al ser finito). Y por lo tanto,

$$F(b) - F(a) \leq \mu^*(a, b]$$

como queriamos probar.

(b) Notemos que

$$\lim_{x\to a^-} F(x) < \infty$$

Ya que $F(x) \leq F(a)$ para todo $x \leq a$, y como F es creciente, se tiene que el límite existe y es finito. Ahora notemos que para todo $\varepsilon > 0$, $\{a\} \subseteq (a-\varepsilon, a]$, entonces,

$$\mu^*(\{a\}) \leq F(a) - F(a-\varepsilon)$$

Esto implica que $\mu^*(\{a\})$ es finito. Tomando $\varepsilon \to 0^+$ se tiene que,

$$\mu^*(\{a\}) \leq F(a) - F(a-)$$

Probando la primera desigualdad. Para la segunda lo haremos por definición. Sea $\{C_i\} \subseteq \mathcal{C}$ ($C_i = (a_i, b_i]$) una cubierta talque ,

$$\{a\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i]$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i) < \infty$$

(Si fuera infinito es evidente que $F(a) - F(a-) < \sum \tau_F(C_i)$ al ser una desigualdad de algo finito con algo infinito). Luego $a \in (a_i, b_i]$ para algún $i \in \mathbb{N}$, podemos tomar $\gamma > 0$

suficientemente pequeño de forma que $a - \gamma \in (a_i, b_i]$ al ser un conjunto semiabierto y, entonces,

$$(a - \gamma, a] \subseteq (a_i, b_i] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i]$$

Aquí se concluye que,

$$F(a) - F(a - \gamma) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i)$$

Tomando $\gamma \to 0^+$, $(a - \gamma \to a^-)$ obtenemos,

$$F(a) - F(a-) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i)$$

(como la serie es finita podemos aplicar límites sin problemas). Es decir, para toda cubierta proveniente del pavimento $\mathcal{C}$, se tiene que,

$$F(a) - F(a-) \leq \sum_{i=1}^{\infty} F(b_i) - F(a_i)$$

Por lo tanto

$$\mu^*(\{a\}) = F(a) - F(a-)$$

(c) Sean $-\infty < a < b < \infty$ fijos y supongamos que F es continua en a. Entonces

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = \lim_{x \to a^-} F(x) = F(a)$$

Tenemos que

$$\mu^*[a, b] \leq \mu^*(\{a\}) + \mu^*(a, b] = F(b) - F(a-)$$

Por la subaditividad y, por otro lado $\{a\} \subseteq [a, b]$, entonces,

$$F(b) - F(a-) = \mu^*(\{a\}) \leq \mu^*[a, b]$$

Por lo tanto,

$$\mu^*[a, b] = F(b) - F(a-)$$

Y como F es continua en a, se tiene que,

$$\mu^*[a, b] = F(b) - F(a)$$