FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2705

Variable Compleja

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. El Mundo Complejo

1.1. Introducción

En este curso se estudiará funciones de la forma $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y estudiaremos el comportamiento de las cosas, al igual que en análisis derivamos, integramos entre otros.

En la integral tendremos problemas del estilo, determinar el valor de

$$\int_\gamma f(x)dx$$

Donde γ es una curva. Veremos si el valor depende de la curva o no. También veremos como la derivada entrega información a la función. La derivada es similar de una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, se define por

$$f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Donde $h \in \mathbb{C}, f'(z) \in \mathbb{C}$, y se considera la norma euclidiana. Si f es diferenciable, decimos que es holomorfa.

Con respecto a la funciones complejas, se cumplen algunas propiedades interesante.

- Si f es holomorfa en ω, entonces f es infinitamente diferenciable en sentido complejo.
- Si f es holomorfa en Ω y γ es un camino cerrado bueno en Ω, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

- Sean f, g funciones holomorfas sobre Ω abierto conexo. Supongamos que f, g coinciden en un disco abierto (bola) en Ω, entonces $f = g$ en Ω.

Estas propiedades las iremos probando.

1.2. Definciones y Propiedades

Antes de estudiar algunas funciones complejas, repasemos los complejos y de algunas propiedades.

Definición 1.1. (Complejos, Operaciones, Módulo y Conjugado)

- *Un número complejo, es una expresión de la forma:*

$$z = x + iy$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, e i e la unidad imaginaria. A $x = Re(z)$ le llamamo parte real y $y = Im(z)$ le llamamos parte imaginaria. En el plano lo representamos como ***figura.***

- *Los números complejas puede ser sumados y multiplicado. Sean $z = x_1 + iy_1, w = x_2 + iy_2$ números complejos, luego se define la suma por:*

$$z + w := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

Y se define la multiplicación por:

$$zw = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Con esto $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ conforma un campo.

- *El módulo (distancia) de un complejo $z \in \mathbb{C}$, se define por:*

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2} = \|(x.y)\|$$

(norma euclidiana).

- *Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un complejo, se define el conjugao de z, por el complejo*

$$\overline{z} := x - iy$$

Proposición 1.1 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$ complejos, entonces se cumple las siguiente propiedades*

(a) ***Desigualdad Triangular.*** $|z + w| \leq |z| + |w|$.

(b) $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$.

(c) $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

(d) *z es real si y sólo si $z = \overline{z}$.*

(e) *z es permanentemente imaginario si y sólo si $\overline{z} = -z$.*

(f) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Dem. Sean $z = x_1 + iy_1, w = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, entonces

(a) Notemos que

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\
&= (x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1^2 + y_2^2) \\
&\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

Luego aplicando la raiz, y al ser dos cosas no negativas, se mantiene la desigualdad, de forma que

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

(b) claro que

$$|x_1|, |y_1| \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Luego por definición se observa que

$$|Re(z)| \leq |z|, \quad |Im((z)| \leq |z|$$

(c) Por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} |z| &\leq |z-w| + |w| \\ |w| &\leq |z-w| + |z| \end{aligned}$$

Luego

$$||z| - |w|| \leq |z-w|$$

(d) Supongamos que z es real, luego es su propio conjugado. Si $z = \overline{z}$, entonces

$$x_1 + iy_1 = x_1 - iy_1 \Longleftrightarrow y_1 = 0$$

Entonces $z = x_1 \in \mathbb{R}$, de forma que es real.

(e) Supongamos que z es un imaginario, entonces $z = iy_1$, luego

$$\overline{z} = -iy_1 = -z$$

Por otro lado, si $\overline{z} = -z$, entonces

$$x_1 + iy_1 = -x_1 + iy_1 \Longleftrightarrow x_1 = 0$$

Luego $z = iy_1$.

(f) Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{z+\overline{z}}{2} &= x = Re(z) \\ \frac{z-\overline{z}}{2i} &= y = Im(z) \end{aligned}$$

Probando la proposición. ■

Definición 1.2. (Forma polar) *Sea $z \in \mathbb{C}$, sea $r := |z|$ y θ el ángulo del eje x al z. Entonces z en forma porlar es*

$$z = re^{i\theta}$$

Nota 1.1. La forma polar está bien ya que

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta) \in \mathbb{C}$$

Con esta forma también podemos mutliplicar,

$$zw = r_1 r_2 e^{i\theta_1\theta_2}$$

Otra caracteriztica importante en análisis, es la convergencia de sucesiones.

Definición 1.3. (Convergencia) *Sea $\{z_n\}_n \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión compleja. Decimos que converge en $z \in \mathbb{C}$ si*

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$$

Teorema 1.1. *En $\mathbb{C}$ con el módulo (distancia euclidiana) es un espacio completo.*

Dem. Probemos primero que $\mathbb{R}$ es completo, sea $\{x_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión de Cauchy, entonces la sucesión es acotada en $\mathbb{R}$, entonces la sucesión está contenida en un intervalo compacto $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces x_n converge en I, (análisis real) luego sea $\{z_n\}_n \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión Cauchy. Podemos definir las sucesiones reales

$$x_n := Re(z_n), \quad y_n := Im(z_n)$$

Si z_n es Cauchy, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ talque

$$|z_n - z_m| = |x_n - x_m + i(y_n - y_m)| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \varepsilon$$

Para todo $n, m \geq N$. Luego podemos ver que

$$|x_n - x_m|, |y_n - y_m| \leq \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} < \varepsilon$$

Para todo $n, m \geq N$. Por tanto, x_n, y_n son Cauchy. Por lo anterior, tenemos que x_n, y_n convergen, digamos que

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \quad y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$$

Definiendo $z := x + iy \in \mathbb{C}$, tenemos que para $\varepsilon > 0$ se tiene

$$|z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$

para n suficientemnte grande. Por lo tanto

$$z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$$

Y por lo tanto $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo. ■

1.3. Funciones Complejas

Una función f es compleja cuando está definida en un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ no vacío, con codominio los complejos. Es decir, son funciones de la forma

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Definición 1.4. (Función continua) *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función. f es continua en $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, talque si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Que se puede denotar como:*

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} |f(z) - f(z_0)| = 0$$

Proposición 1.2. *Si $f(z)$ es continua, entonces $|f(z)|$ también.*

Dem. Sea $z_0 \in \Omega$, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $\delta > 0$ talque si

$$|z - z_0| < \delta$$

Entonces

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Tomando la siguiente desigualdad

$$||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Podemos ver que $|f(z_0)|$ es continua en z_0. ■

Teorema 1.2. *Si f es continua sobre un compacto Ω, entonces $|f|$ es acotada y alcanza su máximo y su mínimo.*

Dem. Notemos que $|f| : \Omega \to \mathbb{R}$. Si Ω es compacto y f es continuo, entonces $f(\Omega)$ es compacto, luego $|f(\Omega)|$ es también compacto, ($|\cdot|$ es continuo) , si

$$|f(\Omega)| \subseteq \mathbb{R}$$

compacto, entonces es acotado y tiene máximo y mínimo. Es decir, $|f|$ es acotado y alcanza su máximo y mínimo. ■

Definición 1.5. (Función holomorfa) *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función con Ω abierto. Decimos que es holomorfo en z_0 si el cuociente*

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Converge a un complejo cuando h tiende a 0. Si tal límite existe, lo denotamos por $f'(z_0)$ y le llamamos derivada de f en z_0. Si f está definida en todo $\mathbb{C}$ y es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, decimos que f es entera.

Ejemplo 1.1 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = z$, entonces

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 1$$

Entonce $f'(z) = 1$ para todo $z \in \Omega$, por lo que f es holomorfa.

Ejemplo 1.2. Sea $f(z) = \overline{z}$, veamos si es holomorfa en algún punto. Sea $z \in \mathbb{C}$, luego para $h \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

Digamos que $h = x + iy$, entonces

$$\frac{\overline{h}}{h} = \frac{x - iy}{x + iy}$$

Si $x = y$ entonces

$$\frac{1-i}{1+i}$$

Por lo que puede ser que $f'(z) = \frac{1-i}{1+i}$, pero si tomamos $x = 2y$, se obtiene

$$\frac{1-2i}{1+2i}$$

Es decir, otro posible valor para la derivada por lo qie el límite converge a al menos a dos valores distinto, de forma que diverge. Por tanto, para todo z, el cociente

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

no converge y por tanto, f no es holomorfa. Notemos que si lo pensamos en su equivalente en $\mathbb{R}^2$, podemos ver que

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, -y) \end{aligned}$$

Que es lineal y por tanto, es diferenciable es cada coordenada. Por lo que en $\mathbb{R}^2$ ser diferenciable, en su forma compleja no necesariamente diferenciable.

Observación 1.1. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja, entonces f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$ si y sólo existe un $a \in \mathbb{C}$, y existe una función $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = ah + h\psi(h)$$

donde $\psi(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Donde h está definido para una vecindad de 0. A partir de esta identidad se puede deducir la continuidad en z_0, ya que cuando $h \to 0$, entonces

$$\lim_{h \to 0} f(z_0 + h) - f(z_0) = 0 \iff \lim_{h \to 0} f(z_0 + h) = f(z_0)$$

Al ser $f(z_0)$ un valor complejo fijo.

Probemos esta equivalencia. Supongamos que f es una función talque existen $a \in \mathbb{C}, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = ah + h\psi(h)$$

donde $\psi(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Digamos que h no puede ser 0, veamos si f es holomorfa en $z_0 \in \Omega$, dividiendo por h podemos ver que

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = a + \psi(h)$$

Tomando $h \to 0$, se puede ver que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = a$$

Por lo tanto, f es holomorfa en z_0.

Supongamos ahora que f es holomorfa en z_0, sea $a := f'(x_0) \in \mathbb{C}$, y sea

$$\psi(h) := \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - a$$

Una función definida en $\mathbb{C}$ donde $\psi(0) = 0$ y para $h \in V$ (vecindad de 0) talque $z_0 + h \in \Omega$. Veamos si converge a 0, por definición se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \psi(h) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - a \\ &= a - a = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, existen $a \in \mathbb{C}, \psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = ah + h\psi(h)$$

donde h está definido en una vecindad de 0. Probando la equivalencia.

Como sabemos, las funciones sobre los complejos funcionan de forma parecida como en los reales, una que otra diferencia, pero con respecto a la diferenciabilidad funciona de igual forma.

Proposición 1.3. *Sean f, g funciones holomorfas en Ω abierto. Entonces*

(a) $f + g$ es holomorfa en Ω, y

$$(f + g)' = f' + g'$$

(b) fg es holomorfa, y

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(c) Si $g(z_0) \neq 0$, entonces f/g es holomorfa en z_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(d) Si $f : \Omega \to U, g : U \to \mathbb{C}$, entonces $(g \circ f)$ es holomorfa y para todo $z \in \Omega$ se tiene que

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$$

Dem. La demostración es similar que en $\mathbb{R}$.

(a) Sea $z_0 \in \Omega$, por definición

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) + g(z_0+h) - f(z_0) - g(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h} \\ &= f'(z_0) + g'(z_0)\end{aligned}$$

Por lo tanto $f + g$ es holomorfa en Ω y $(f+g)' = f' + g'$.

(b) Sea $z_0 \in \Omega$, por definición

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0)g(z_0)}{h} = \\ &\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)g(z_0+h) - f(z_0+h)g(z_0) - f(z_0)g(z_0) + f(z_0+h)g(z_0)}{h} = \\ &\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)(g(z_0+h) - g(z_0)) + g(z_0)(f(z_0+h) - f(z_0))}{h}\end{aligned}$$

Con respecto al límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)}{h}$$

Toman valor $f(z_0)$, ya que f al ser holomorfa en z_0, se tiene que es continua. Finalmente obtenemos que fg es holomorfa en Ω y

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(c) Supongamos que $g(z_0) \neq 0$, sea $\psi : A \to \mathbb{C}$, donde $A = \{z \in \mathbb{C} : g(z) \neq 0\}$, dada por:

$$\frac{f}{g}(z) = \psi(z)$$

Podemos multiplicar por $g(z)$ y obtener

$$f = \psi \cdot g$$

Si f es holomorfa, entonces necesariamente ψ es holomorfa, luego por el punto (b) obtenemos que

$$\begin{aligned}(f)'(z_0) = (\psi \cdot g)'(z_0) &\iff f'(z_0) = \psi' g + (z_0)\psi g'(z_0) \\ &\iff \psi(z_0) = \frac{f'(z_0) - \psi g'(z_0)}{g(z_0)} = \frac{f' g(z_0) - f g'(z_0)}{g^2(z_0)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, f/g es holomorfa en A. Y además

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

(d) Pendiente

Probando la proposición. ■

Ejemplo 1.3. Por inducción se puede observar que la función

$$f(z) = z^n$$

es holomorfa para todo $n \in \mathbb{N}$. Con derivada $f'(z) = nz^{n-1}$. De aquí se deduce que las funciones polinomiales, que son de la forma

$$f(z) = \sum_{i=1}^{n} c_i z^i$$

con $c_i \in \mathbb{C}$, son holomorfas. Con derivada

$$f'(z) = \sum_{i=1}^{n} i c_i z^{i-1}$$

Ejemplo 1.4. La función

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Con derivada $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

1.4. Funciones a Valores Comlejos como Mapeo

Vamos a realizar un estudio sobre la diferenciabilidad y como se comporta en el plano. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to C$ una función holomorfa en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ con Ω abierto, y sean $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

donde u, v son funciones que toman la parte real de $f(z)$ (por ejemplo si $f(z) = 2z = 2x + 2iy$, entonces $u(z) = 2x, v(z) = 2y$). A f lo podemos pensar como una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ dada de la siguiente forma:

$$F(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

Podemos realizar el siguiente abuso de notación

$$u(x, y) = u(z)$$

donde $z = x + iy$. Donde el u del lado izquierdo es sobre $\mathbb{R}^2$ y el lado derecho es sobre $\mathbb{C}$. Lo mismo con v.

Nota 1.2. La parte real e imaginaria tienen un comportamiento $\mathbb{R}$-lineal, en efecto, si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \;\; Re(w) = \frac{w + \overline{w}}{2}$$

entonces para $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$aRe(z) + Re(w) = a\frac{z + \overline{z}}{2} + \frac{w + \overline{w}}{2} = \frac{az + w + \overline{az + w}}{2} = Re(az + w)$$

(recordad que $a = \overline{a}$ al ser real). Con respecto a la parte imaginaria se argumenta de forma similar.

Si f es holomorfa en z_0, ¿acaso u, v, F serán diferenciable en $P_0 = (x_0, y_0)$? Todo en término de las derivadas parciales. Para ello definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + x) - f(z_0)}{x} \in \mathbb{C}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{y} \in \mathbb{C}$$

Donde la primera derivada parcial es por el eje horizontal, por lo que tomamos un x que se asocie con x_0 y la segunda derivada es por el eje vertical, por lo que tomamos un y que se asocie con y_0 y para ello añadimos el i al y. Notemos que por definición de holomorfa,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$$

ya que estamos acercándonos a 0 por el eje horizontal. Ahora podemos acercanos por el eje vertical, de forma que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{iy} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{y} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

obteniendo la siguiente identidad

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

Probemos que u, v son diferenciables en $z_0, (x_0, y_0)$. Si $u(z) = Re(f(z))$, entonces para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{f(z_0+x)-f(z_0)}{x} - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right) &= \frac{Re(f(z_0+x)) - Re(f(z_0))}{x} - Re\left(\frac{\partial f}{\partial x(z_0)}\right) \\ &= \frac{u(z_0+x)-u(z_0)}{x} - Re\left(\frac{\partial f}{\partial x(z_0)}\right) \\ &= \frac{u(x_0+x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x} - Re\left(\frac{\partial f}{\partial x(z_0)}\right) \end{aligned}$$

Si

$$\left|Re\left(\frac{f(z_0+x)-f(z_0)}{x} - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right)\right| \leq \left|\frac{f(z_0+x)-f(z_0)}{x} - \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right| \overset{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$$

existe. Con respecto a la derivada de u sobre la segunda variable, se toma $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, con respecto a v se toma la parte imaginaria de f. Luego se concluye que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0),\ \ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),\ \ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existen. Es más,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= Re\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= Re\left(\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) &= Im\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\right) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) &= Im\left(\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \end{aligned}$$

Podemos concluir que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

De aquí podemos estudiar la siguiente identidad/ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\ \text{ y }\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Esto es conocido como **ecuaciones de Cauchy-Riemann**. Por lo que si f es holomorfa en $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, entonces se cumple,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \text{ y }\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

Nota 1.3. Por la relacion u sobre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ podemos notar que son iguales, ya que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z)=\lim_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ x\to 0}}\frac{u(z+x)-u(z)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{u(z_1+x,z_2)-u(z_1,z_2)}{x}=\frac{\partial u}{\partial x}(z_1,z_2)$$

donde $z=z_1+iz_2$, lo mimo la derivada parcial sobre y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(z)=\lim_{\substack{y\in\mathbb{R}\\ y\to 0}}\frac{u(z+iy)-u(z)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{u(z_1,z_2+y)-u(z_1,z_2)}{y}=\frac{\partial u}{\partial y}(z_1,z_2)$$

Por lo que podemos calcular las derivadas parciales de forma directa en su forma compleja como en su forma real.

Volviendo a F, si las parciales de u,v existen, entonces podemos tomar la Jacobiana, la cual es

$$J_F=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

De las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos que

$$J_F=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}$$

De aquí podemos ver que d

$$\det(J_F)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\geq 0$$

Y que esto es una matriz rotación, . ¿F es diferenciable en (x_0,y_0)? Para ello recordemos que es diferenciable en P_0 en el sentido $\mathbb{R}^2$ si y sólo si existe $\Psi(H):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donde $\psi(H)\xrightarrow{H\to 0}0$ $(H=(h_1,h_2),h=h_1+ih_2)$ talque

$$\|F(P_0+H)-F(P_0)-J_F(P_0)(H)\|=\|H\||\Psi(H)|$$

También se puede pensar en

$$F(P_0+H)-F(P_0)-J_F(P_0)\cdot H=\|H\|\Psi(H)$$

Veamos que la Jacobiana de F tiene relación con la derivada de f. Y en efecto,

$$\begin{aligned}(J_F)(H) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}h_1+\frac{\partial u}{\partial y}h_2 \\ -\frac{\partial u}{\partial y}h_1+\frac{\partial u}{\partial x}h_2\end{pmatrix} \\ &\iff \left(\frac{\partial u}{\partial x}h_1+\frac{\partial u}{\partial y}h_2\right)+i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}h_1+\frac{\partial u}{\partial x}h_2\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(h_1+ih_2) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)h \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}h=f'(z_0)h\end{aligned}$$

(Siempre considerando las derivadas sobre (x_0,y_0)). Por lo tanto hay una relación con el Jacobiano con f'. A partir de esto podemos deducir que F es diferenciable en P_0.

Definición 1.6. *Se definen los siguientes operadores diferenciables,*

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Estamos definiendo la derivada parcial sobre un complejo y su conjugada.

Proposición 1.4. *Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ con Ω abierto, si f es holomorfa en z_0, entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)=0 \quad y \quad f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}=2\frac{\partial u}{\partial z}$$

Si definimos su paralelo en $\mathbb{R}^2$ dado por:

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$F(x,y):=\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y)\end{pmatrix}$$

Donde $u,v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ son funciones tales que $f=u+iv$ (en sentido complejo), entonces F es diferenciable en sentido real en $P_0=(x_0,y_0)$ donde $z_0=x_0+iy_0$ y además

$$\det(J_F(P_0))=\left|\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\right|^2$$

Dem. Por definición

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}f(z_0)\right) = 0$$

Y

$$\begin{aligned}
f'(z_0) = \frac{2f'(z_0)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)\\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + i\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - 2i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\right)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0)
\end{aligned}$$

Probando la primera parte, ahora probemos que F es diferenciable, recordemos que es diferenciable si existe un $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ talque $\Psi(H) \to 0$ cuando $H \to 0$, y

$$F(P_0 + H) - F(P_0) - JH = \|H\|\Psi(H)$$

donde $h \in I$ una vecindad de 0. Para llegar a esto, partiremos del hecho de que f es holomorfa en z_0. Y antes de eso, hemos probado que en F, $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ poseen derivadas parciales, por lo que F posee Jacobiana, luego, con respecto a P_0 se tiene

$$\begin{aligned}
J_F(P_0)H &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(P_0) \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(P_0) & \frac{\partial u}{\partial x}(P_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(P_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(P_0)h_2 \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(P_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}(P_0)h_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esto en $\mathbb{C}$ sería

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)h_2\right) + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)h_1 + \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)h_2\right)\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\right)(h_1 + ih_2)
\end{aligned}$$

Tomando $h = h_1 + ih_2$ obtenemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\right)h = f'(z_0)h$$

Como f es holomorfa en z_0, existe $\psi(h) \to 0$, donde $h \to 0$,

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + \psi(h)h$$

Definimos $\Psi(H) := \frac{h}{|h|}\psi(h)$, donde $H = (h_1, h_2)$, entonces

$$\|\Psi(H)\| = \left|\frac{h}{|h|}\psi(h)\right| \to 0$$

cuando $H \to 0$. Esto implica que

$$F(P_0 + H) - F(P_0) - J_F(P_0)H = \Psi(H)\|H\|$$

Por lo tanto F es diferenciable en el sentido real. Finalemnte

$$\begin{aligned}\det(J_F(P_0)) &= \frac{\partial}{\partial x}u(x_0, y_0)\frac{\partial}{\partial y}v(x_0, y_0) - \frac{\partial}{\partial y}u(x_0, y_0)\frac{\partial}{\partial x}v(x_0, y_0) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}u(x_0, y_0)\right)^2 = \left|2\frac{\partial}{\partial z}u(x_0, y_0)\right|^2 \\ &= |f'(z_0)|^2 \geq 0\end{aligned}$$

$\blacksquare$

A partir de la Jacobianda de F podemos deducir el comportamiento de f', resulta que el gráfico de f' es una manipulación de f rotada que crece o de crece. Esto significa que si una función **Falta responder duda.**

Teorema 1.3. *Sea $f = u + iv$ una función a $\mathbb{C}$, definida sobre $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, si u, v tienen derivadas parciales continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en Ω, entonces f es holomorfa en Ω.*

Dem. Como u, v tienen derivadas parciales, entonces son diferenciables en Ω. Es decir, existen ψ_1, ψ_2 tales que $\psi_1(h), \psi_2(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Y si hacemos

$$\begin{aligned}u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)h_1 + \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)h_2 + |h|\psi_1(h) \\ v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}v(x, y)h_1 + \frac{\partial}{\partial y}v(x, y)h_2 + |h|\psi_1(h)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}f(z + h) - f(z) &= u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) + i(v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}u(x, y)h_1 + \frac{\partial}{\partial y}u(x, y)h_2 + |h|\psi_1(h) + i\left(\frac{\partial}{\partial x}v(x, y)h_1 + \frac{\partial}{\partial y}v(x, y)h_2 + |h|\psi_2(h)\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) - i\frac{\partial}{\partial y}u(x, y)\right)h + |h|(\psi_1(h) + \psi_2(h)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x, y) - i\frac{\partial}{\partial y}u(x, y)\right)h + h\psi(h)\end{aligned}$$

Donde $\psi(h) = \frac{|h|}{h}(\psi_1(h) + i\psi_2(h)) \to 0$ cuando $h \to 0$. Obteniendo que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = ah + h\psi(h)$$

donde $\psi(h) \to 0$ cuando $h \to 0$, es decir, f es holomorfo en z_0. Más aún,

$$f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

■

Nota 1.4. La condiciones de tener derivadas parciales continuas es importante, así u, v son C^1 y tiene una expansión lineal, es que lo que usamos para demostrar el resultado.

1.5. Serie de Potencias

Repasaremos las series pero con respecto a los complejos.

Definición 1.7. (Series) *Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión compleja. Definimos la suma parcial de z_n de los primeros N elementos por:*

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} z_n \in \mathbb{C}$$

Si el límite de la sumas parciales de z_n existe, definimos la serie de z_n por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

Y decimos que converge en $\mathbb{C}$. Si tal límite no existe, decimos que diverge.

Observación 1.2. La serie $\sum z_n$ converge si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, talque si $n, m \geq N$ (suponiendo sin pérdida que $n \leq m$) se tiene que

$$\left| \sum_{k=n}^{m} z_k \right| < \varepsilon$$

Es decir, una serie converge si y sólo si las sumas parciales son de Cauchy. Y en efecto esto, si es una serie es Cauchy, entonces como $\mathbb{C}$ es completo, se tiene una sucesión $\{S_n\}_n$ de sumas parciales de z_n, de forma que S_n converge en $\mathbb{C}$ y luego la serie converge. Por otro lado, si $\sum z_n$ es una serie convergente, se tiene que existe un $L \in \mathbb{C}$ talque

$$\lim_{N\to\infty} \left| \sum_{n=0}^{N} z_n - L \right| = 0$$

y esto ocurre si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n \geq N$, entonces

$$\left| \sum_{n=0}^{N} z_n - L \right| < \varepsilon/2$$

Tomando $n, m \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} z_k\right| &= \left|\sum_{k=0}^{m} z_k - \sum_{k=0}^{n} z_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{m} z_k - L + L - \sum_{k=0}^{n} z_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{m} z_k - L\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} z_k - L\right| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto las sumas parciales son de Cauchy.

Proposición 1.5. *Sea $\{z_n\}_n \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión compleja, entonces*

i) Si la serie $\sum z_n$ converge, entonces

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$$

ii) Y si para todo $N \in \mathbb{N}_0$, la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} z_n$$

es convergente. Entonces

$$\sum_{n=N}^{\infty} z_n \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dem.

i) Supongamos que $\sum z_n = L \in \mathbb{C}$, notemos que

$$z_n = S_{n+1} - S_n$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} |S_{n+1} - S_n| = 0$$

Ya que si la serie converge, entonces las sumas parciales son de Cauchy.

ii) Notemos que para todo N, $\sum_{n=N}^{\infty} z_n$ es un valor finito en $\mathbb{C}$. Sea $\varepsilon > 0$, notemos que

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} z_n\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n - \sum_{n=0}^{N} z_n\right|$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = L$, entonces existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ talque si $N \geq N_0$, se tiene que

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} z_n \right| = \left| \sum_{n=0}^{N} z_n - L \right| < \varepsilon$$

Dicho de otra forma

$$\lim_{N\to\infty} \left| \sum_{n=N}^{\infty} z_n \right| = 0$$

Probando la proposición. ■

La parte más útil de la proposición anterior, es que si una serie converge, entonces la sucesión $\{z_n\}$ debe converger a 0. Esto sirve para descartar de forma inmedianta si una serie diverge o no. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n$$

diverge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} |1+i|^n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n = \infty$$

La segunda propiedad es más es otra forma de pensar la convergencia.

Definición 1.8. (Convergencia absoluta) *Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente, si la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \in \mathbb{R}$$

converge.

Observación 1.3. Si la serie $\sum z_n$ converge absolutamente, entonces converge. Y en efecto, si $\sum |z_n|$ converge, entonces es de Cauchy, por lo que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, talque si $n, m \geq N$ se tiene que

$$\left| \sum_{k=n}^{n} |z_k| \right| < \varepsilon$$

Además por la desigualdad triangula, se tiene que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left| \sum_{k=n}^{m} z_k \right| < \sum_{k=n}^{m} |z_n|$$

De forma que para n, m suficientemente grande se observa que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} z_k\right| < \varepsilon$$

Es decir, la serie $\sum z_n$ es convergente.

Ejemplo 1.6. (Serie exponencial) Una serie clásia es la serie exponencial. Para $z \in \mathbb{C}$ se define

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

De cursos anteriores sabemos que la serie converge para todo $z \in \mathbb{R}$. Pero no sabemos si para todo z complejo, aun así, usaremos que converge en los z reales para probar que converge en los complejos. Notemos que

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!} \in \mathbb{R}$$

Si

$$e^{|z|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

converge, tenemos que para $z \in \mathbb{C}$ fijo, la serie converge absolutalmente. De forma que converge para todo $z \in C$. Otra forma de concluir que está bien definido, es mediante el criterio del cociente,

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Por lo tanto, la serie converge.

Ejemplo 1.7. (Serie geométrica) La serie geométrica se define por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

donde $z \in \mathbb{C}$. Tenemos que la serie converge absolutamente cuando $|z| < 1$ y diverge cuando $|z| > 1$. Aunque no probaremos cuando diverge, podemos probar al menos converge cuando $|z| < 1$. Como $\mathbb{C}$ es un campo, podemos ver que

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

Si consideramos $|z| < 1$ podemos ver que

$$\sum_{n=0}^{N} |z|^n = \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - |z|}$$

Esto implica que la serie geométrica converge cuando $|z| < 1$, determinemos su valor, si $|z|^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces por definición z^n converge a 0, luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Cuando $|z| \geq 1$ no estamos tan seguro como se comporta la serie geométrica, ya que puede converge de forma habitual pero no absolutamente. Entonces, ¿cómo estudiamos la convergencia de una serie de pontencia? Las cuales son de la forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$. Vamos a usar el argumento de la raíz para responder a la pregunta, notemos que

$$|a_n z^n| = \left(|a_n|^{1/n}|z|\right)^n$$

Podemos usar la sucesión $x_n := |a_n|^{1/n}|z|$, por lo que la serie converge cuando

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| < 1 \iff |z| < \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$$

Es decir, la serie converge cuando la norma de $|z|$, es menor a 1 sobre el límite superior de la sucesión $|a_n|^{1/n}$. Por lo tanto tenemos que la serie converge dentro de un radio, ya que por lo que vimos, la serie converge en una circuferencia en el plano complejo de radio

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} \in [0, \infty)$$

Recodatorio.

- Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{\overline{x}_n\}_n \subseteq \mathbb{R}$, por:

$$\overline{x}_n := \sup_{k\geq n}\{x_k\}$$

  De forma que $\{\overline{x}_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente. Por lo tanto converge, y en tal caso definimos el límite superior de x_n por:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n}\{x_k\}\right)$$

  De forma análoga se puede definir el límite inferior, aunque no será de ultilidad.

- El criterio del cuociente dice que si $\{z_n\}$ es una sucesión talque

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$$

Observación 1.4. El límite superior es equivalente al mayor punto de acumulación de la sucesión x_n. Probemos esta afirmación. Sea el conjunto

$$\mathcal{L} = \{l \in \mathbb{R} : l \text{ es punto acumulado de } x_n\}$$

esto son los $l \in \mathbb{R}$ tales que para toda vecindad V de l, hay infintos $x_n \in V$. **Terminar**

Observación 1.5. Si una serie compleja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

talque

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} := r < 1$$

entonces la serie converge absolutamente. En efecto, digamos la serie de arriba, la serie principal. Sabemos que existe una subsucesión $\{n_k\}_k$ de $\{n\} \subseteq \mathbb{N}$ talque

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} = r$$

Entonces podemos tomar $\varepsilon > 0$ de forma que $r - \varepsilon > 0$ y $r + \varepsilon < 1$, luego a para un K suficientemente grande, se tiene que si $k \geq K$, entonces

$$(r-\varepsilon)^{n_k} < |a_{n_k}| < (r+\varepsilon)^{n_k}$$

Luego

$$\sum_{k=K}^{N} |a_{n_k}| \leq \sum_{k=K}^{N} (r+\varepsilon)^{n_k} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} L < \infty$$

Como $(r+\varepsilon)^{n_k} < 1$, y luego

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n_k}| = \sum_{k=0}^{K-1} |a_{n_k}| + \sum_{k=k}^{\infty} |a_{n_k}| < \infty$$

Es decir, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n_k}|$$

converge. Pero esto no prueba la serie principal converge, para concluir esto debemos notar $|a_n|$ tiene finitos puntos de acumulación como el mayor es finito, luego a cada punto de acumulación podemos ver que la serie es finita, pero esto cubre algunos elementos de $n \in \mathbb{N}$, para los n que sobre, se tiene que son finitos, luego podemos sumarlos sin problemas, por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{k=1}^{P} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{k_j}| + C < \infty$$

para algún $C > 0$. Es decir, la serie principal, converge.

Teorema 1.4. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencia. Entonces existe un $0 \leq R \leq \infty$ talque*

(a) *Si* $|z| < R$, *entonces la serie converge absolutamente.*

(b) *Si* $|z| > R$, *entonces la serie diverge.*

A tal R le llamamos radio de convergencia y se determina por:

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

También por convenio decimos que $1/\infty = 0, 1/0 = \infty$.

Un ejemplo que ya vimos, es la serie exponencial, que tene radio de convergencia todo $\mathbb{R}$, es decir, converge para todo $|z| \geq 0$. Y la serie geométrica converge para $R = 1$, ya que

$$\limsup_{n\to\infty} |1|^{1/n} = 1 = \frac{1}{R}$$

Dem. (Teorema) Probemos que existe tal $0 \leq R \leq \infty$. Sabemos que por el criterio de la raíz, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Conberge absolutamente si

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| < 1$$

Notemos que podemos definir la sucesión

$$x_n := |a_n|^{1/n}$$

con z fijo. Esta sucesión tiene límite superior por construcción, aquí obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1/R \in [0, \infty)$$

De aquí observamos que existe un $R \in [0, \infty)$. Ahora probemos donde converge y diverge.

(a) Supongamos que $|z| < R$, y esto es si y sólo si

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| < 1$$

Y esto implica la serie converge absolutamente.

(b) De forma análoga, $|z| > R$ si y sólo si

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| > 1$$

Es decir, la serie diverge.

Probando el teorema. ■

Dem. (Alternativa) Falta convergencia.

Entonces

$$|z| > R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \iff \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| > 1$$

Entonces existe una sucesión $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ talque $n_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y talque

$$|a_{n_k}|^{1/n_k}|z| > 1 \Longrightarrow |a_{n_k} z^{n_k}| > 1$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.

Supongamos que $R = 0$, esto es si y sólo si

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$$

Luego para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| = \infty$$

Luego, existe una sucesión $\{n_k\}$ igual que antes talque

$$|a_{n_k}|^{1/n_k}|z| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Por lo tanto, la serie diverge para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por último, supongamos que $R = \infty$ y esto es si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$$

Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z| = 0$$

Entonces existe $\{n_k\}$ igual que antes talque

$$|a_{n_k}|^{1/n_k}|z| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Podemos pensarlo como

$$|a_n|^{1/n}|z| < \frac{1}{2} \Longrightarrow |a_n z^n| < \frac{1}{2^n}$$

Por lo tanto la serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

Nota 1.5. También se puede hacer con respecto al criterio del cuociente. Es decir, existe al menos dos formar de calcular el radio.

Ejemplo 1.8. Las funciones senos y cosenos pueden ser escritos como series

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\operatorname{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

con $z \in \mathbb{C}$, se puede probar que las series convergen para todo $z \in \mathbb{C}$. También se cumple

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Tomemos la serie de la exponencial

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

¿Podremos determinar su derivada en tal caso de que exista? Si existiera, sería algo del estilo

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z$$

Si esto fuera cierto, entonces podemos probar que para todo $z \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(e^z)' = e^z$$

Teorema 1.5. *Sea $f(z)$ una función definida por la serie de pontencia*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Entonces es holomorfa en su disco de convergencia. La derivada de f se obtiene derivando término a término en la serie de potencia, es decir,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

Más aún, f, f' tienen el mismo radio de convergencia.

Dem. Probemos que la serie $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge en el mismo radio de f. En efecto, el radio de convergencia es

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} |(n+1)a_{n+1}|^{1/n} &= \limsup_{n\to\infty} |n+1|^{1/n} |a_{n+1}|^{1/n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{n+1}}
\end{aligned}$$

Es decir, g y f tienen el mismo radio de convergencia, digamos que el radio es R. Probemos que $f(z_0)$ tiene derivada $g(z_0)$. Supongamos que $|z_0| < r \leq R$ talque $|z_0 + h| < r$, para que la serie estén bien definida, estudiemos

$$\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0)\right|$$

Definimos

$$E_N(z) := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - g(z_0)\right| \leq & \left|\frac{\sum_{n=0}^{N} a_n(z_0+h)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z_0^n}{h} - \sum_{n=0}^{N} n a_n z_0^{n-1}\right| \\ & + \left|\underbrace{\frac{E_N(z_0+h)-E_N(z_0)}{h}}_{=:A} - \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right|\end{aligned}$$

Considerando la siguiente identidad

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Luego

$$A = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{(z_0+h-z_0)((z_0+h)^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1})}{h}$$

Usando que $|z_0|, |z_0+h| < r$, entonces

$$|A| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}$$

Como $r \leq R$, entonces la serie como cota superior, converge. Por lo tanto

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Con esto, para $\varepsilon > 0$ existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ talque si $N \geq N_0$, entonces

$$\left|A - \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Y para $N \geq N_0$ fijo, existe $\delta > 0$ talque si $|h| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{N} a_n(z_0+h)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n z_0^n}{h} - \sum_{n=0}^{N} n a_n z_0^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Y por lo tanto, f es holomorfa en z_0 con derivada $g(z_0)$ para todo z_0 dentro del disco de convergencia. ■

Corolario 1.1. *Las funciones definidas por series de potencias son infinitamente diferenciables en el sentido complejo. Además, todas las derivadas tienen igual disco convergente.*

Dem. Es solo aplicar el teorema 1.5, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ con disco de convergencia D, entonces es diferenciable en D con derivada

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

Definiendo $b_n := (n+1)a_{n+1}$, obtenemos una serie de potencia, luego es diferenciable en D. Esto se puede hacer de forma recursiva, de forma que f es infinitamente diferenciable en D. Ahora, notar que la k-ésima derivada de f tiene forma

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z^n$$

■

A una serie de potencia podemos cambiar su disco de convergencia, manteniendo su radio. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, se define la serie de potencia entorno a z_0 por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

El radio por definición es

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

Observando claramente que es el mismo si $z_0 = 0$. Veamos si es diferenciable. Sea $w(z) = z - z_0$ claramente diferenciable, luego

$$g(w) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

Siendo una serie de potencia y por tanto, diferenciable, luego por regla de la cadena

$$(g(z-z_0))' = g'(z-z_0) \cdot 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n = f'(z)$$

Corolario 1.2. *Sea*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

una serie de potencia entorno a z_0. Entonces f es infinitamente diferenciable en su disco de convergencia.

Dem. Basta con aplicar la observación anterior. ■

Definición 1.9. (Función analítica) *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con Ω abierto. Decimos que f es analítica, si admite un desarrollo en serie de potencia en z_0, es decir, existe $R > 0$ talque $\mathbb{D}(z_0, R) \subseteq \Omega$ y*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$. Decimos que f es analítica en Ω, si lo es en cada punto.

Recordatorio. Se define el disco/bola abierta de centro z_0 y radio $R > 0$ por:

$$\mathbb{D}(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$$

1.6. Integración

La última parte de nuestra introducción a variable compleja, es la integración. Primero pensemos en un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{C}$. (Esto son número complejos con parte imaginaria nulo).

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una función continua. Queremos definir la integral de alguna forma, recordemos que se usa sumas de Riemann para ello, veamos que la integral

$$\int_a^b f(t)dt \in \mathbb{C}$$

está bien definido como suma de Riemann. Esto significa que si $\mathcal{P}$ es una partición y $\mathcal{C}$ es un representante, entonces

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} S(f, \mathcal{P}, \mathcal{C})$$

existe y es complejo. En otras palabras, a partir de que f es continuo, debemos probar que

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} S(f, \mathcal{P}, \mathcal{C}) = I \in \mathbb{C}$$

Para algún I complejo. Para probarlo haremos uso de sucesiones de Cauchy para ver que existe. Sean las particiones $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ y $\mathcal{S} = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$ donde $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$. Sean

$$\begin{aligned} s_{k_0} &: = t_0 = s_0 \\ s_{k_1} &: = t_1 \\ &\vdots \\ s_{k_n} &: = t_n = s_m \end{aligned}$$

Esto está bien defindo por construcción. Notemos que para $i = 1, \dots, n$ fijo podemos hacer la siguiente relación

$$f(t_i^\star)\Delta t_i - \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i} f(s_j^\star)\Delta s_j = \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i} (f(t_i^\star) - f(s_j^\star))\Delta s_j$$

Ya que $\Delta t_i = \sum_{j=k_{i-1}}^{k_i} \Delta s_j$. Lo importante de esto es que usaremos la uniformidad continua de f (es continua en un compacto), para acota la diferencia de las sumas de Riemann, a una cota que podamos controlar. Entonces tenemos que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i^\star)\Delta t_i - \sum_{j=1}^{m} f(s_j^\star)\Delta s_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k_{i-1}}^{k_i} |f(t_i^\star) - f(s_j^\star)|\Delta s_j$$

Sea $\varepsilon > 0$, supongamos que $\max\limits_{j=1,\dots,m} |s_j - s_{j-1}| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i^\star)\Delta t_i - \sum_{j=1}^{m} f(s_j^\star)\Delta s_j\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k_{i-1}}^{k_i} \varepsilon\Delta s_j \\ &\leq \varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

Esto significa que si tomamos dos particiones $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ talque la malla de $\mathcal{S}$ es suficientemente pequeña o que m es suficientemente grande, se tiene que

$$|S(f, \mathcal{P}, \mathcal{C}_1) - S(f, \mathcal{S}, \mathcal{C}_2)| < \varepsilon$$

Esto implica que podemos definir una sucesión $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ donde $|\mathcal{P}_i| \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donde $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_{i+1}$, y esto genera una sucesión de sumas de Riemann que es Cauchy, luego existe un $I \in \mathbb{C}$ talque

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = I$$

Para concluir el resultado basta ver que para una partición $\mathcal{P}$, podemos tomar una afinidad $\mathcal{S}$ luego si $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{S}| < \delta$, entonces se tiene que

$$|S(f, \mathcal{P}, \mathcal{C}) - I| \leq \varepsilon$$

Y por lo tanto

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} S(f, \mathcal{P}, \mathcal{C}) = I \in \mathbb{C}$$

Y por tanto, la integral

$$\int_a^b f(z)dz = I \in \mathbb{C}$$

está bien definido.

Para determinar la integral de una función con integral, es bastante difícil al ser un límite, pero podemos probar la siguiente identidad,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f(t))dt + i\int_a^b Im(f(t))dt$$

Luego $Re(f), Im(f)$ son funciones reales y podemos usar las propiedades de integrales de funciones reales. **Probar.**

Proposición 1.6. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *continua. Se tiene que*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Dem. Si f es continua, entonces $|f|$ también es continua, luego es R-integrable en el sentido complejo. Sabemos que $f(z) = u(z) + iv(z)$ donde $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ son la parte de real e imaginaria de f respectívamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)dt\right|^2 &= \left|\int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt\right|^2 \\
&= \left(\int_a^b u(t)dt\right)^2 + \left(\int_a^b v(t)dt\right)^2 \\
&\leq \dots
\end{aligned}$$

Terminar. ■

Ahora queremos integrar en la región, el problema es que f termina en $\mathbb{C}$ que es isomorfo a $\mathbb{R}^2$, por lo que la integrar regiones no tiene mucho sentido, pero recordemos que podemos trabajar las curvas con integrales de lineas, y esto es lo que haremos.

Figuta

Para poder integrar queremos un camino, por lo que tomaremos un camino/curva que va de z_1 a z_2. Digamos que $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua talque $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$. Queremos poder determinar la integral sobre γ que además tiene una aproximación

$$\int_\gamma f(z)dz \approx \sum_{i=1}^n f(\gamma(t_i^\star))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

donde $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$ es una partición de $[a,b]$ y $t_i^\star \in [t_{i-1}, t_i]$. Para que esto funcione necesitamos que la curva γ exista y sea finito. **Figura.**

Para una curva γ cualquiera, se define el largo de este por

$$l(\gamma) := \sup_{\text{particiones}} \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

Si $l(\gamma)$ es finito, se diece que es rectificable (que se puede estirar). En particular, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continuo, entonces es rectificable. (Al er uniformemente continuo)

Proposición 1.7. *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva continua. Si $\overline{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{C}$ es otra curva continua talque*

$$\overline{\gamma} \circ \varphi = \gamma$$

donde $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ es homeomorfismo creciente. Entonces $\overline{\gamma}, \gamma$ son equivalentes y

$$l(\overline{\gamma}) = l(\gamma)$$

Dem. Recordemos que una función homeomorfa, es una función continua invertible con inversa continua. Notemos que si φ es creciente y biyectiva, entonces

$$\varphi(a) = c, \quad \varphi(b) = d$$

Si $\gamma, \overline{\gamma}$ son continuas, entonces son rectificables. Probemos que tienen igual largo. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera, luego

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta\gamma(t_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\Delta\overline{\gamma}(\varphi(t_i))|$$

Notemos que $\{\varphi(t_0), \ldots, \varphi(t_n)\}$ es una partición de $[c, d]$, luego

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta\gamma(t_i)| \leq l(\overline{\gamma})$$

Esto se puede hacer para toda partición de $[a, b]$, luego

$$l(\gamma) \leq l(\overline{\gamma})$$

Para la otra desigualdad basta usar que φ^{-1} es creciente continuo, luego se llega a que

$$l(\gamma) = l(\overline{\gamma})$$

■

Proposición 1.8. *Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continua y diferenciable, entonces*

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Proposición 1.9. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ talque $\gamma([a, b]) \subseteq \Omega$ es rectificable. Entonces la integral por sumas de Riemann*

$$\int_\gamma f(t) dt$$

está bien definida.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, sean $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$, $\mathcal{S} = \{s_0, \dots, s_m\}$ partionces de $[a, b]$. Estudiaremos la diferencia de las sumas de Riemann bajo las partionces $\mathcal{P}, \mathcal{S}$, es decir, vamos a estudiar

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma(t_i) - \sum_{i=1}^{m} f(\gamma(s_i^\star))\Delta\gamma(s_i)$$

donde $t_i^\star \in [t_{i-1}, t_i]$, $s_i^\star \in [s_{i-1}, s_i]$. Sin pérdida de generalidad definimos $s_{k_0} := s_0 = t_0, s_{k_1} = t_1$, y así sucesivamente hasta que $s_{k_n} := s_m = t_n$. Esto significa que en $[t_0, t_1]$ están los elementos $s_0, s_1, \dots, s_{k_1}$, luego

$$\begin{aligned}
\left| f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma(t_i) - \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\gamma(s_j^\star))\Delta\gamma(s_j) \right| &= \left| \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma(s_j) - f(\gamma(s_j^\star))\Delta\gamma(s_j) \right| \\
&\leq \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma(s_i) - f(\gamma(s_j^\star))\Delta\gamma(s_j)| \\
&= \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |(f(\gamma(t_i^\star)) - f(\gamma(s_j^\star)))\Delta\gamma(s_j)|
\end{aligned}$$

Esto se puede hacer ya que

$$\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} \Delta\gamma(s_j) = \Delta\gamma(t_i)$$

Ahora, como $f \circ g$ es continuo en $[a, b]$, se tiene que es uniformemente continuo, luego existe $\delta > 0$ talque si $|t - s| < \delta$, entonces

$$|f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))| < \frac{\varepsilon}{l(\gamma)}$$

como el largo de γ es rectificable. Supongamos ahora que las mallas de $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ son menores a δ, entonces

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma(t_i) - \sum_{i=1}^{m} f(\gamma(s_i^\star))\Delta\gamma(s_i) \right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} |(f(\gamma(t_i^\star)) - f(\gamma(s_j^\star)))||\Delta\gamma(s_j)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{l(\gamma)} \sum_{j=1}^{m} \Delta\gamma(s_j) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Hemos probado que dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ conveniente, donde si $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ son particiones tales que sus mallas son menores a δ, entonces la diferencia de sus sumas de Riemann, es menor a ε. Es decir, podemos generar una sucesión de Cauchy, y esto implica convergencia. Si $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una colección de particiones tales que

$$diam(P_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Entonces la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n_k} f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma^{(k)}(t_i)$$

(k está asociado a $\mathcal{P}_k$) es Cauchy, por lo que existe un $I \in \mathcal{C}$ taque

$$S_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} I$$

Finalmente, usando la propiedades se concluye que

$$I = \int_\gamma f(z)dz$$

■

Recordatorio. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$, decimos que f es R-integrable sobre la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ si existe un $I \in \mathbb{C}$ talque para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque para toda partición $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n$ si

$$\max_{i=1,\ldots,n} |t_i - t_{i-1}| < \delta$$

Entonces

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma(t_i) \right| < \varepsilon$$

con $t_i^\star \in [t_{i-1}, t_i]$

Proposición 1.10. *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva continuamente diferenciable (C^1) y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Dem. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Tenemos la siguiente aproximación por sumas de Riemann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(t)dt &\approx \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma(t_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))(\gamma'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})\psi(t_{i-1}, t_i - t_{i-1}))
\end{aligned}$$

Tomando una aproximación lineal, nuestro problema es el ψ que queremos acotarlo para que cuando t_i, t_{i-1} se acercen mucho, sea despreciable. Sabemos que, ($h > 0$)

$$\begin{aligned}
\psi(t, h) &= \frac{\gamma(t + h) - \gamma(t)}{h} - \gamma'(t) \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \gamma'(s)ds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \gamma'(t)ds \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} (\gamma'(s) - \gamma'(t)ds)\right)
\end{aligned}$$

Luego

$$|\psi(t,h)| \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \underbrace{|\gamma'(s)-\gamma'(t)|}_{\text{se puede acotar}} ds$$

dado que γ' es continua en $[a,b]$.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque para todo $t, s \in [a,b]$ si $|t-s| < \delta$, entonces $|\gamma'(t)-\gamma'(s)| < \varepsilon$. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición $[a,b]$ talque

$$diam\mathcal{P} < \delta$$

Entonces, si $|h| < \delta, t \in [a,b]$ se tiene

$$|\psi(t,h)| \leq \varepsilon$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))\Delta\gamma(t_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))\gamma'(t_{i-1})\Delta t_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))\Delta t_i \psi(t_{i-1}, t_i - t_{i-1})}_{=:A}$$

Pero

$$\|A\| \leq \sup_{z\in\gamma}|f(z)||b-a|\varepsilon$$

Esto implica que tomando $\varepsilon > 0$ muy pequeño, A se desprecia y existe un $\delta > 0$ talque para todo $\mathcal{P}$ con malla menor a δ, se tiene que

$$\left|\int_\gamma f(z)dz - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^\star))\gamma'(t_{i-1})\Delta t_i\right| < \varepsilon$$

Es decir,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Probando la proposición. ■

Lema 1.1. *Sea $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ continuamente diferenciable, entonces*

$$\int_a^b F'(z)dz = F(b) - F(a)$$

Dem. Si F es continuamente diferenciable, entonces F' es R-integrable, si

$$\int_a^b F'(z)dz = \int_a^b Re(F'(z))dz + i\int_a^b Im(F'(z))dz$$

Probemos que

$$\int_a^b Re(F'(z))dz = Re(F(b)) - Re(F(a))$$

Si F' es continua, entonces $Re(F')$ es continua luego es R-integrable, si $Re(F') : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces tenemos una integral real. Probemos que $Re(F)$ es diferenciable con derivada $Re(F')$. Tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = F'(z)$$

Ahora tenemos que $Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tiene un comportamiento $\mathbb{R}$-lineal, veamos si es continua, sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, sea $\varepsilon > 0$, tomemos $z = x + iy$ talque

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

luego

$$|Re(z) - Re(z_0)| = |Re(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \varepsilon$$

Por lo tanto Re es continua, de esto se concluye lo siguiente,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{Re(F(z+h)) - Re(F(z))}{h} &= Re\left(\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{F(z+h) - F(z)}{h}\right) \\ &= Re(F'(z)) \end{aligned}$$

Es decir, $Re(F)$ es diferenciable con derivada $Re(F')$ para todo abierto que contiene a $[a,b]$. (O también en (a,b)). Luego podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, obteniendo,

$$\int_a^b Re(F'(z))dz = Re(F(b)) - Re(F(a))$$

Con respecto a $Im(F)$ se procede de forma análoga, luego

$$\int_a^b F'(z)dz = Re(F(b)) - Re(F(a)) + iIm(F(b)) - iIm(F(a)) = F(b) - F(a)$$

■

Proposición 1.11. *Sean $\gamma, \overline{\gamma}$ continuamente diferenciables y sea ϕ un difeomorfismo creciente talque*

$$\gamma = \overline{\gamma} \circ \phi$$

entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\overline{\gamma}} f(w)dw$$

Por otro lado, si definimos

$$\gamma^{-}(t) := \gamma(b + a - t)$$

entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma^{-}} f(w)dw$$

Dem. Supongamos que f es continua, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ y $\overline{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{C}$, y ϕ es difeomorfismo creciente, es decir, es diferenciable con inversa diferenciable. Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\\ &= \int_a^b f(\overline{\gamma}(\phi(t)))\phi'(t)dt\end{aligned}$$

Si definimos $y(t) = \phi(t)$, entonces $dy = \phi'(t)dt$, luego

$$\int_c^d f(\overline{\gamma}(s))\gamma'(s)ds = \int_{\overline{\gamma}} f(z)dz$$

■

Corolario 1.3. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es continuamente diferenciable a trozos finitos, entonces está bien definido*

$$\int_{\gamma} f(z)dz$$

Y cumple el resto de propiedades.

Dem. Si γ es continua a trozos, entonces es continua en los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ bajo una partición $\mathcal{P} = \{t_0, \ldots, t_n\}$. Luego aquí podemos aplicar la integral, en particular

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\end{aligned}$$

■

Teorema 1.6. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ continuamente diferenciable a trozos. Si f tiene una primitiva F en Ω, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dem. Supongamos que γ es completamente continuamente difernciable, entonces

$$\int_\gamma f(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dado que $F(\gamma)$ es la primitiva de $f(\gamma)\gamma'$.

Si γ es continuamente diferenciable a trozos, basta pensar que las curvas se puede separar de forma que obtengamos curvas completamente continuamente diferenciables, luego

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \sum_{i=1}^n F(\gamma(a_i)) - F(\gamma(a_{i-1})) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\end{aligned}$$

■

Corolario 1.4. *Si f es continua con primitiva en Ω, entonces para toda curva γ continuamente diferenciable a trozos y cerrado, cumple que*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Dem. Basta usar el teorema anterior, luego

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

Como $\gamma(b) = \gamma(a)$. ■

Ejemplo 1.8. Sea $f(z) = 1/z$ definido en el disco $D(0,2)$. ¿Existirá una primitva? Sea $\gamma(t) = e^{it}$ continuamente diferenciabel en $t \in [0, 2\pi]$, luego

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i \neq 0$$

Si $1/z$ tuviera primitiva entonces el valor de la integral sería 0. Por lo que no tiene en el disco $D(0,2)$.

Corolario 1.5. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continuamente diferenciable, donde Ω es abierto conexo y $f' = 0$, entonces f es constante en Ω.*

Dem. Si Ω es abierto conexo, entonces todo elementos z, w de Ω pueden ser conextados por una curva continua. (¿? continuamente diferenciables) Sea $\gamma_z : [a, b] \to \Omega$ continuamente diferenciable donde $\gamma_z(a) = z_0$ fijo y $\gamma_z(b) := z$, entonces como f es primitiva de f' se tiene que

$$0 = \int_{\gamma_z} f'(z)dz = \int_a^b f'(\gamma_z(t))\gamma_z'(t)dt = f(\gamma_z(b)) - f(\gamma_z(a))$$

Es decir $f(z_0) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Esto implica que f es constante. ■

2. Teorema de Cauchy y Aplicaciones

Teorema 2.1. (Goursat) *Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfa y* Ω *abierto. Entonces si* $T \subseteq \Omega$ *es un triangulo talque su interior está contenido en* Ω*, entonces*

$$\int_T f(z)dz = 0$$

Dem. Consideremos la siguiente figura

Figura.

Podemos ver que el triangulo T puede ser dividido en cuatro curvas digamos que tomamos el punto medio de cada recta generando estos cuatros triangulos, determinadas por: $\overline{T}_1, \overline{T}_2, \overline{T}_3, \overline{T}_4$. Podemos ver que existe un $i = 1, 2, 3, 4$ talque

$$\left|\int_T f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{\overline{T}_i} f(z)dz\right|$$

También podemos notar que

$$diamT = \frac{1}{2}diam\overline{T}_i, \quad l(T) = \frac{1}{2}l(\overline{T}_i)$$

Con $i = 1, 2, 3, 4$. Digamos que $T_0 := T$ y sea $T_1 := \overline{T}_i$ para tal i, entonces a T_1 podemos realizar el mismo proceso y así construir una secuencia decreciente de triangulos. Entonces, tenemos $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ una secuencia de triangulos tales que:

- $T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_n \supset$
- $diamT_i = \frac{1}{2}diamT_{i+1}$ y $l(T_i) = \frac{1}{2}l(T_{i+1})$
- $$\left|\int_{T_i} f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{T_{i+1}} f(z)dz\right|$$

Si $diamT_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ entonces existe un $z_0 \in \mathbb{C}$ talque

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}_0} T_i = \{z_0\}$$

(**Revisar**). Queremos poder concluir

$$\left|\int_T f(z)dz\right| = 0$$

usando la secuencia T_i, pero tenemos que

$$\left|\int_T f(z)dz\right| \leq 4^n\left|\int_{T_n} f(z)dz\right|$$

Entonces debemos probar que

$$\left|\int_{T_n} f(z)dz\right|$$

se acerca a 0 más rápido que 4^n. Como f es holomorfa, tenemos que

$$f(z_0) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\psi(z)$$

donde $\psi(z) \xrightarrow{z \to z_0} 0$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_{T_n} f(z)dz &= \int_{T_n} f(z_0)dz + \int_{T_n} f'(z_0)(z - z_0) + \int_{T_n} (z - z_0)\psi(z)dz \\
&= \underbrace{\int_{T_n} f(z_0)dz + \int_{T_n} f'(z_0)(z - z_0)}_{=0 \text{ la constante 1 y } z - z_0 \text{ tienen primitiva}} + \int_{T_n} (z - z_0)\psi(z)dz
\end{aligned}$$

Y entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_{T_n} f(z)dz\right| &= \left|\int_{T_n} (z - z_0)\psi(z)dz\right| \\
&\leq \sup_{z \in T_n} |z - z_0||\psi(z)| \cdot l(T_n) \\
&\leq \frac{1}{4} diam(T_n) l(T_n) \sup_{z \in T_n} |\psi(z)| \\
&\leq \frac{1}{4^n} diam(T) l(T) \sup_{z \in T_n} |\psi(z)|
\end{aligned}$$

(**Revisar**). Si $C = diam(T)l(T)$ obtenemos que

$$\left|\int_{T} f(z)dz\right| \leq C \sup_{z \in T_n} |\psi(z)|$$

para n fijo. Tomando $n \to \infty$, se tiene

$$\left|\int_{T} f(z)dz\right| \leq C \sup_{z \in T_n} |\psi(z)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Es decir,

$$\left|\int_{T} f(z)dz\right| = 0$$

Probando el teorema. ■

Sabemos que si f tiene una primitiva en Ω donde está definido, entonces la integral de linea sobre la curva que representa el triangulo (que es C^1 a trozos), se anula. Pero ahora pedimos que f sea holomorfa en Ω. Siendo un resultado bastante fuerte.

Corolario 2.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces si R es un rectángulo en Ω con interior en Ω, tenemos que*

$$\int_R f(z)dz = 0$$

Dem. Sea un rectangulo R con interior en Ω. Sea γ la curva que representa el rectángulo en orientación positiva, si trazamos una linea en cualquier diagonal, podemos generad dos curvas que conforman un triangulo, digamos que T_1, T_2, entonces si f es holomorfa en Ω con $T_1, T_2 \subseteq R$, entonces

$$\int_R f(z)dz = \int_{T_1} f(z)dz + \int_{T_2} f(z)dz = 0$$

■

Esto implica que si tenemos un poligono, podemos triangulizarlo y ver que si f es holomorfa en Ω, donde el poligono $\mathcal{P}_n \subseteq \Omega$, entonces

$$\int_{\mathcal{P}_n} f(z)dz = 0$$

Teorema 2.2. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa en un disco abierto $\mathcal{D}$, entonces f tiene primitiva en $\mathcal{D}$.*

Dem. Sea $D := \mathcal{D}(\overline{z}, R)$ un disco, donde $\mathcal{D}(\overline{z}, R) \subseteq \Omega$. Tomemos la siguiente figura

Figura.

Sean $z_0, z \in D$, como en la figura, tenemos dos caminos de z_0 a z y de z_0 a $z + h$ donde h es talque $z + h \in D$. Estos caminos son C^1 a trozos al ser rectas verticales y horizontales. Definimos

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw$$

para todo $z \in D$, donde $\gamma_z : [0, 1] \to D$ es la curva que va de z_0 a z. Notemos que F está bien definida ya que f es holomorfa, luego es continuo en D, y γ_z es C^1, entonces existe tal valor y es finito. Veamos que cuando h es muy pequeño (cerca del origen), entonces

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \to f(z)$$

Notemos que existe una curva $\gamma_{z,z+h}(t) = z + th$ para todo $t \in [0, 1]$, luego para $h \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw + \int_{\gamma^-_{z,z+h}} f(w)dw + \int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)dw\right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)dw\right) \end{aligned}$$

Ya que con las curvas $\gamma_{z+h}, \gamma^-_{z,z+h}$ se elimina con la curva $\gamma_{\gamma^-_z}$, quedando solo la integral de linea de $\gamma_{z,z+h}$. Como $\gamma_{z,z+h}$ es C^1 con f continua, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\int_{\gamma_{z,z+h}} f(w)dw\right) &= \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)hdt \\ &= \int_0^1 f(z+th)dt\end{aligned}$$

Ahora, como f es holomorfa en D, podemos realizar la expansión lineal, es decir, existe un $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ talque $\psi(th) \to 0$, cuando $th \to 0$, talque

$$f(z+th) = f(z) + f'(z)th + \psi(th)th$$

Reemplazando en la integral, obtenemos que,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(z+th)dt &= \int_0^1 f(z)dt + \int_0^1 f'(z)thdt + \int_0^1 \psi(th)thdt \\ &= f(z) + \frac{f'(z)h}{2} + \int_0^1 th\psi(th)dt\end{aligned}$$

Si ψ es acotado podemos deducir que

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \leq \frac{f'(z)h}{2} + hC \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Por lo tanto F es diferenciable en todo el disco D donde

$$F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$$

Luego f tiene primitiva en D. ■

Corolario 2.2. *Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa. Si C es una circuferencia en Ω cuyo interior está en Ω, entonces*

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Dem. Sea z_0 el centro de la circuferencia y R el radio de esta. Para todo $z \in C$ existe un $r_z > 0$ talque $B(z, r_z) \subseteq \Omega$ como Ω es abierto, entonces

. sea

$$r := \inf_{z\in C} r_z$$

Si $r = 0$ entonces existe una sucesión r_{z_n} talque

$$r_{z_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Arreglar

Entonces $r > 0$ y podemos definir el disco $\mathcal{D}(z_0, \overline{R})$, donde $\overline{R} = R + r > R$, claramente $C \subseteq \mathcal{D}(z_0, r)$, como el disco está contenido en Ω y f es holomorfa, entonces tiene primitiva en el disco, luego

$$\int_C f(z)dz = 0$$

■ Luego tomando el disco $D(z_0, r)$ se tiene que $C \subseteq D(z_0, r)$ luego f tiene una primitiva y entonces

$$\int_C f(z)dz = 0$$

■

Ejemplo 2.1. Probemos que

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx$$

Si $\xi = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx &= 2\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right)dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Sea $\xi > 0$, entonces...

2.1. Fórmulas Integrales de Cauchy

Teorema 2.3. *Supongamos que f es holomorfa en un abierto Ω y sea $\overline{D} \subseteq \Omega$ un disco cerrado. Sea C la curva que define el borde del disco y supongamos que C está orientado de manera positivo. Entoces para todo $z \in D$ se tiene*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$$

Es decir, en un disco f tiene un comportamiento particular, $f(z)$ es una consante por la integral de lineal sobre la curva de toma el borde del disco.

Dem. Consideremos la figura **Figura.**

Tenemos una curva $\gamma_{\varepsilon,\delta}$ y una curva $\gamma_{z,\varepsilon}^{-}$ por la 'circuferencia de adentro'. Ocurre que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta\to 0}\int_{\gamma_{\varepsilon,\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{\gamma_{z,\varepsilon}^{-}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \end{aligned}$$

Si

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \underbrace{\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}}_{\text{acotado}} + \frac{f(z)}{\zeta - z}$$

Luego

$$\int_{\gamma_{z,\varepsilon}^{+}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \int_{\gamma_{z,\varepsilon}^{+}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta + \int_{\gamma_{z,\varepsilon}^{+}} \frac{f(z)}{\zeta - z}$$

Como

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

es acotado en una vecindad de z, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\gamma_{z,\varepsilon}^{+}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}d\zeta\right| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} C \cdot l(\gamma_{z,\varepsilon}) \to 0$$

Luego

$$\int_{\gamma_{z,\varepsilon}^{+}} \frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta = f(z)2\pi i$$

Y entonces

$$0 = \int_C \frac{f(z)}{\zeta - z}d\zeta - 2\pi i f(z)$$

Concluyendo el teorema. ■

Observación 2.1.

- Esta fórmula también sirve para rectángulo, es decir, si f es holomorfa y $R \subseteq \Omega$, entoces para todo elemento del interior del rectángulo, se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_R \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}d\zeta$$

- si tomamos $z \notin C^o$ (interior), entonces

$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

es holomorfa en todo ζ en el interior, en un disco, esto implica que tiene primitiva y luego

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$$

Corolario 2.3. *Si f es holomorfa en Ω abierto, entonces f es infinitamente diferenciable en sentido complejo. Más aún,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

donde C es el borde de un disco cerrado $\overline{D} \subseteq \Omega$ talque z pertenece al interior de D, y C tiene orientación positiva.

Dem. Si Ω es abierto, entonces Ω es una unión de disco, por lo que probaremos en un disco fijo que f es infinitamente diferenciable, luego lo es en todo Ω.

Sea un disco $\mathcal{D}$, probaremos por inducción. Si $n = 0$ ya fue probado. Supongamos que la fórmula se cumple para n y mostraremos que es cierta para $n+1$. Veamos que $f^{(n+1)}(z)$ existe para $z \in \mathcal{D}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(z+h) - f^{(n)}(z)}{h} &= \frac{n!}{2\pi i} \frac{1}{h} \left(\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^{n+1}} d\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right) \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_C \underbrace{\frac{f(\zeta)}{h} \left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} \right)}_{=:G(\zeta,h)} d\zeta \end{aligned}$$

Notemos que

$$\lim_{h \to 0} G(\zeta, h) = \frac{(n+1) f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}}$$

El problema es que queremos podemos meter el límite adentro de la integral, si redefinimos

$$g_h(\zeta) := G(\zeta, h)$$

debemos probar que g_h converge uniformemente cuando $h \to 0$ a una función. Tenemos que

$$G : C \times \overline{D(0,r)} \to \mathbb{C}$$

Es decir, G está definido en un conjunto acotado y cerrado. Luego es uniformemente continua, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si $(\xi, h), (\xi', h')$ son tales que

$$\max\{|\xi - \xi'|, |h - h'|\} \leq \delta$$

entonces

$$|G(\xi,h)-G(\xi,h')|<\varepsilon$$

Tomando $h'=0,\xi=\xi'$, se obtiene

$$|g_h(\xi)-g_0(\xi)|<\varepsilon$$

para todo $|h|<\delta$, entonces $g_h \xrightarrow{U} g_0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{n!}{2\pi i}\int_C G(\xi,h)d\xi &= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \lim_{h\to 0} G(\xi,h)d\xi\\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+2}}d\zeta\end{aligned}$$

■

Corolario 2.4. (Desigualdad de Cauchy) *Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorfa con Ω abierto. $\overline{D}\subseteq\Omega, C=\partial D$ donde $D=D(z_0,R)$, entonces,*

$$|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{n!}{R^n}\sup_{w\in C}|f(w)|$$

Dem. Sea $\gamma(t)=z_0+Re^{it}$ con $t\in[0,2\pi]$ la curva que representa a C. Entonces como z_0 está en el interior del disco, se tiene que

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}}Rie^{it}dt\right|\\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z_0+Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}}Rie^{it}\right|dt\\ &= \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z_0+Re^{it})}{R^n}\right|dt\\ &= \frac{n!}{2\pi}\frac{2\pi}{R^n}\sup_{w\in C}|f(w)| = \frac{n!}{R^n}\sup_{w\in C}|f(w)|\end{aligned}$$

Probando la desigualdad ■

Podemos concluir que la derivada n-énesima de $z_0\in\Omega$ es siempre acotada siempre y cuando el disco cerrado está contenido en Ω. Basta encontrar un disco $D(z_0,r_{z_0})$. Pero hay que tener cuidado con el radio, este depende de z_0 y no es cualquiera.

Teorema 2.4. *Supongamos que f es holomorfa en un abierto Ω. Si D es un disco centrado en z_0, con $\overline{D}\subseteq\Omega$, entonces f tienen una extensión en serie de potencia entorno a z_0. Es decir,*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

para todo $z \in D$ con coeficientes

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Dem. Sabemos que para todo $z \in D$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Vamos a expresar el lado derecho como una serie de potencias. Notemos que

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(z-z_0)}{(\zeta - z_0)}}$$

Queremos usar una serie de potencia pero necesitamos que

$$\left| \frac{(z - z_0)}{(\zeta - z_0)} \right| < 1$$

Y en efecto

$$\left| \frac{(z - z_0)}{(\zeta - z_0)} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

como z está en el interior. Entonces

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

Sea $r := \left| \frac{z-z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$, para todo $\zeta \in C$

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq r < 1$$

entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

es uniformemente convergente en ζ. Entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^n \end{aligned}$$

■

Corolario 2.5. (Teorema de Lioreville) *Si f es una función holomorfa acotada definida en todo $\mathbb{C}$, entonces f es constante.*

Dem. Sea el disco $D(z, R)$ con borde $C = \partial D$ con $R > 0$ cualquier, como f es holomorfa, entonces es infinitamente diferenciable en $\mathbb{C}$, esto implica que f es C^1, ahora para z se cumple que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{R}\sup_{w\in C}|f(w)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir, $f'(z) = 0$ y esto para todo $z \in \mathbb{C}$. Como f es C^1, se tiene que f es constante. ■

Corolario 2.6. (Teorema Fundamental del Álgebra) *Si $p(z)$ es un polinomio no constante en $\mathbb{C}$, entonces tiene una raiz en $\mathbb{C}$.*

Dem. Sea $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ un polinomio. Supongamos que p no tiene raíz en $\mathbb{C}$. Notemos que

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = |a_n|$$

Eso implica que

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Es decir, existe un $r > 0$ talque

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right| < \frac{|a_n|}{2}$$

para todo $|z| > r$, esto implica que

$$\frac{|p(z)|}{|z^n|} < \frac{3|a_n|}{2} \Longrightarrow \frac{1}{|p(z)|^n}$$

Terminar.. ■

Nota 2.1. Una región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto conexo.

Teorema 2.5. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con la región Ω talque se anula en una sucesión de puntos distintos que tiene un punto límite en Ω, entonces f es idénticamente nula.*

Dem. Sea $\{z_k\} \subseteq \Omega$ una sucesión compleja talque $z_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \in \Omega$, notemos por continuidad de f que,

$$0 = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} z_k\right) = f(z_0)$$

Como f es holomorfa en una región, entonces,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

para todo z en un disco D de centro z_0. Supongamos que $f \neq 0$ en el disco, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ talque a_{n_0} es el primer cociente donde no se anula, luego,

$$f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_{n_0}(z - z_0)^{n_0}(1 + g(z))$$

donde $g(z) \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0$, por lo que existe un r talque para todo $z \in D(z_0, r)$ se tiene $|g(z)| \leq \frac{1}{2}$, entonces para todo $z \in D(z_0, r)$ se tiene $1 + g(z) \neq 0$, esto implica para todo $z_k \in D(z_0, r)$ de la sucesión, tiene que $f(z_k) \neq 0$ siendo contradicción. Por tanto se anula en el disco D. Extendamos D a todo Ω, sea

$$V := \operatorname{int}\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

Mostremos que V es cerrado, sea $\{w_k\} \subseteq V$ una sucesión que converge a w_0, veamos que $w_0 \in V$, por continuidad de f se tiene que,

$$0 = \lim_{k \to \infty} f(w_k) = f(w_0)$$

Por lo que,

$$w_0 \in \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

Para ver que está en el interior basta encontrar una bola donde f se anula. Sin pérdida de generalidad supongamos que w_k son distintos, como $f(w_0) = 0$ entonces por continuidad existe una vecindad de w_0 donde f se anula, esto implica que $w_0 \in V$ y por lo tanto V es cerrado. Si $V \neq \emptyset$ al contener a z_0, entonces por conexidad necesariamente $V = \Omega$. Por lo tanto f se anula en todo Ω. ■

Corolario 2.7. *Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas en una región Ω y coinciden en una cantidad numerable de puntos distintos con un punto de acumulción en Ω, entonces $f = g$.*

Dem. Sea $\{z_k\} = \{z_1, z_2, \dots\}$ los puntos donde coinciden f y g, si $\{z_k\}$ tiene un punto de acumulación en Ω, podemos considerar la subsucesión $\{z_{k_m}\} \subseteq \Omega$ que converge a z_0 donde coinciden f, g, consideremos la función $h := f - g$ que es holomorfa en Ω que se anula en todos los elementos de la sucesión $\{z_{k_m}\}$, luego por el teorema 2.5, se tiene que,

$$h(z) = f(z) - g(z) = 0$$

para todo $z \in \Omega$. Por tanto, $f = g$. ■

2.2. Aplicaciones

Veremos algunas aplicaciones de los resultados que hemos visto hasta ahora.

Teorema 2.6. (Morera) *Sea f una función continuo en un disco abierto D talque para todo triangulo T en D se tiene que*

$$\int_T f(z)dz = 0$$

entonces f es holomorfa.

Dem. Sea D un disco de centro z_0 y de radio r, si f es continua, entonces podemos definir la integral de linea sobre una curva en el disco, sea,

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw$$

donde $\gamma_z : [0,1] \to D$ y $\gamma_z(0) = z_0, \gamma_z(1) = z$ determinada por el siguiente dibujo,

Figuta.

Notemos que $F(z+h) - F(z)$ generamos una especio de trapecio incompleto, por lo que generamos la curva que va de z a $z+h$ obteneiendo el siguiente dibujo,

Figura.

Ahora si la integral de f sobre todo triangulo contenido en el disco es nula, entonces por construcción la integral sobre un rectángulo es nulo, por lo tanto solo sobrevive una curva, tomemos la reparametrización $\gamma : [0,1] \to D$ dada por, $\gamma(t) = z + (1-t)h$. Luego,

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h}\right| = \int_0^1 f(z + (1-t)h)dt$$

Notemos que existe una función ψ continua talque,

$$f(w) = f(z)\psi(w)$$

donde $\psi(w) \overset{w\to z}{\longrightarrow} 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(z+(1-t)h)dt\right| &\leq |f(z)| + \left|\int_0^1 \psi(z+(1-t)h)dt\right| \\ &\leq |f(z)| + \sup_{t\in[0,1]} |\psi(z+(1-t)h)| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} |f(z)|\end{aligned}$$

Por tanto, F es diferenciable en el disco con derivada f y luego es infinitamente diferenciable lo que implica que f también lo sea, de forma que f es holomorfa. ■

Por lo tanto,

2.3. Sucesiones de Funciones Holomorfas

Teorema 2.7. *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones holomorfa en un abierto Ω que converge uniformemente en compactos a una función f en Ω. Entonces f es holomorfa.*

Nota 2.2. Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente en compactos a f en Ω, si para todo $K \subseteq \Omega$ compacto, $f_n|_K \to f|_K$ uniformemente.

Dem. (Teorema) Sea D un disco abierto en Ω. Sea $T \subseteq \Omega$, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_T f_n(z)dz = 0$$

dado que es holomorfa en D. Además, si $f_n \to f$ uniformemente en compactos, se tiene que,

$$\lim_{n\to\infty}\int_T f_n(z)dz = \int_T f(z)dz = 0$$

Y esto es para todo T en D. Por lo tanto, f es holomorfa en D y esto implica que es holomorfa en Ω. ■

Observación 2.1. No es tan evidente que si $K \subseteq \Omega$ compacto, entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\int_T f_n(z)dz = \int_T f(z)dz$$

Veamos esto, sea $f_n : K \to \mathbb{C}$ que converge uniformemente a $f : K \to \mathbb{C}$ con f_n holomorfas, luego f_n es continua y entonces, f es continua, por lo que la integral está bien definido. Luego, podemos tomar una parametrización de la curva que genera T, digamos que es de la forma $\gamma(t)$, en $t \in [0,1]$, luego,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\right| &\le \int_0^1 |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \\ &\le \sup_{t\in[0,1]}|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| \cdot \sup_{t_1\in[0,1]}|\gamma'(t)|\end{aligned}$$

Todo esto porque $f_n \circ\gamma$, $f\circ\gamma$ es continua y luego está acotado, y γ es continuamente diferenciable. Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n \ge N$, entonces,

$$\left|\int_0^1 f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\right| \le \varepsilon$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\int_T f_n(z)dz = \int_T f(z)dz$$

Teorema 2.8. *Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que converge uniformemente en compactos a una función f en Ω. Entonces $\{f_n'\}_n$ converge uniformemente a f' en cada compacto en Ω.*

Dem. Por el teorema anterior tenemos que f es holomorfa en todo Ω, probemos que f_n' converge uniformemente a f' en cada compacto en un disco. Sea D un disco, luego para todo $z \in D$ se cumple que,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C:=\partial D}\frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

Luego para $z \in D$ fijo se cumple,

$$\begin{aligned}|f_n'(z) - f'(z)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_C\left|\frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^2}\right|dw \\ &\le \frac{1}{2\pi}\sup_{w\in C}\left|\frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^2}\right|2\pi R \\ &= \sup_{w\in C}\frac{|f_n(w)-f(w)|}{|w-z|^2}R\end{aligned}$$

Aquí podemos usar que f_n converge uniformemente a f sobre el compacto C, pero hay un problema con el denominador, consideremos el siguiente dibujo,

Figura

Es decir, existe un $L > 0$ talque $L \leq |w - z|^2$ para todo $w \in C$, luego,

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \sup_{w \in C} |f_n(w) - f(w)| \frac{R}{L}$$

Tomando n suficientemente grande se tiene que,

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \varepsilon$$

Terminar Stein page 54.

2.4. Principio de Reflexión de Schawrtz

Figura.

Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$ simétrico con respecto a $\mathbb{R}$, es decir, si $z \in \Omega$ entonces $\overline{z} \in \Omega$. Definimos,

$$\begin{aligned} \Omega^+ &:= \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\} \\ \Omega^- &:= \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0\} \\ I &:= \Omega \cap \mathbb{R} \end{aligned}$$

Teorema 2.9. (Principio de Simetría) *Si f^+ y f^- son funciones holomorfa en Ω^+ y Ω^- respectívamente. Que se extiende continuamente sobre I y que, $f^+(x) = f^-(x)$ para todo $x \in I$. Entonces la función f en Ω, definida por,*

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z), & z \in \Omega^+ \\ f^+(z) = f^-(z), & z \in I \\ f^-(z) & z \in \Omega^- \end{cases}$$

Es holomorfa en Ω.

Dem. Es claro que f es continua en Ω por construcción. Claramente f es holomorfa en Ω^+ y en Ω^-, por lo que probaremos que es holomorfa en I.

Figuta.

Para ello usaremos Morera en un disco que tiene la recta real. Sea $z \in I$ y sea $D = D(z, r)$ un disco talque $\overline{D} \subseteq \Omega$. Sea un triangulo T dento del disco D, si T no intersecta a I, tenemos que $T \subseteq \Omega^+$ o $T \subseteq \Omega^-$, luego es claro que,

$$\int_T f(z)dz = \int_T f^{\pm} f(z)dz = 0$$

Supongamos que $T \subseteq D$ intersecta a I.

Figura.

Podemos tirar una recta de froma qu se generan tres triangulos, donde o bien toca a I en un lado o en un vértice. Por lo que basta trabajar en estos tipos de triangulos. Digamos que $T \subseteq \Omega$ toca a I en un vértice o en un lado por arriba de esta (parte imaginaria positiva), entonces para $\varepsilon > 0$ se tiene que $T + i\varepsilon \subseteq \Omega^+$ donde $(T + i\varepsilon) \cap I = \emptyset$, entonces,

$$\int_{T+i\varepsilon} f(z)dz = \int_{T+i\varepsilon} f^+(z)dz = 0$$

Y entonces,

$$\int_T f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{T+i\varepsilon} f^+(z)dz = 0$$

Lo mismo ocurre si tomamos un triangulo debajo de la recta $\mathbb{R}$. Por lo tanto, todo triangulo en D, tiene integral nula y por morera, f es holomorfa en D. ■

Observación 2.2. (Revisar) Probemos que efectívamente,

$$\int_T f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{T+i\varepsilon} f(z)dz$$

Si $\gamma(t)$ con $t \in [0, 1]$ es una parametrización de T que es continuamente diferenciable en trozos, entonces $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + i\varepsilon$ es una parametrización de $T + i\varepsilon$, luego,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt - \int_0^1 f(\gamma_\varepsilon(t))\gamma'(t)dt\right| &\leq \int_0^1 |f(\gamma(t)) - f(\gamma_\varepsilon(t))||\gamma'(t)|dt \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} |f(\gamma(t) - f(\gamma_\varepsilon(t)))| \cdot \sup_{t\in[0,1]} |\gamma'(t)|\end{aligned}$$

Si γ_ε converge uniformemente a γ, entonces $f \circ \gamma_\varepsilon$ converge uniformemente a $f \circ \gamma$. Luego para todo $\gamma > 0$, existe δ talque si $\varepsilon < \delta$, entonces,

$$\left|\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt - \int_0^1 f(\gamma_\varepsilon(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \gamma$$

Luego,

$$\int_T f(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{T+i\varepsilon} f(z)dz$$

Teorema 2.10. (Principio de Reflexión de Schawrtz) *Suponga que f es una función holomorfa en Ω^+ que se extiende continuamente a I y que f forma valores reales en I. Entonces, existe una función holomorfa F en Ω talque $F = f$ en Ω^+*

Dem. Sea $f : \Omega^+ \to \mathbb{C}$ holomorfa y que se extiende continuamente a I, además, f en I toma valores $\mathbb{R}$. Sea Ω tomar Ω^+ reflejado con la recta real, encontremos la extensión de f a todo Ω. Vamos a considerar

$$f^-(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

donde $z \in \Omega^-$, es fácil ver que f^- se extiende continuamente a I (Ejericio). Veamos que f^- es holomorfa en $\Omega-$

Figura.

Tomando un disco $D(z_0, R)$ en Ω^-, pasemosló a Ω^+, para ello consideramos el conjugado de cada uno, en particular, su reflejo es el disco $D(\overline{z}_0, R)$, en el disco f es una serie de potencia entorno a $\overline{z}_0$, por lo que,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \overline{z_0})^n$$

Luego,

$$f^-(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n}(\overline{z} - \overline{z_0})^n$$

con $z \in \Omega^-$, por tanto, f^- es holomorfa en z_0, y esto se puede hacer para todo $z_0 \in \Omega^-$, por tanto, f tiene una extensión F holomorfa en todo Ω. ■

Entonces, si f es holomorfa en Ω que se extiende continuamente a la recta I, entonces existe una extensión de f a Ω que es simétrica holomorfa, en particular,

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+ \\ f(z) = \overline{f(\overline{z})}, & z \in I \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in \Omega^- \end{cases}$$

3. Funciones Meromorfas y Logaritmo

Vamos a definir las funciones meromorfas, pero antes necesitamos definir las singularidades. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, supongamos que $f(z_0) = 0$, luego en un disco D de centro z_0 se tiene que,

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

para todo $z \in D$ y donde a_n es el primer coeficiente distinto de cero.

$$f(z) = (z - z_0)^n \left(a_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k \right)$$

Digamos que,

$$g(z) := a_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k$$

Luego para todo $z \in D$ se tiene que,

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

Notemos que g es holomorfa y no se anula en el disco, ya que si f y $(z - z_0)^n$ son holomorfas, entonces necesariamente g lo es, y si existe un $w_0 \in D \setminus \{z_0\}$ que anula a g, entonces,

$$f(w_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (w - z_0)^k = 0$$

Luego, $a_k = 0$ para todo $k \geq 1$, siendo imposible.

Podemos probar que n y g son únicos en el disco. Supongamos que $m \in \mathbb{N}$ y h es holomorfa en el disco D, talque,

$$f(z) = (z - z_0)^m h(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

sin pérdida de generalidad supongamos que $m > n$, luego,

$$g(z) = (z - z_0)^{m-n}$$

Luego g se anula en z_0 siendo imposible, luego $m = n$ y luego se concluye que,

$$h(z) = g(z)$$

Siendo n y g únicos.

Observación 3.1. Con el análisis anterior podemos concluir que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa que se anula en $z_0 \in \Omega$, entonces existen únicos $n \in \mathbb{N}$ y función holomorfa g que no se anula en una vecindad V de z_0 tales que,

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

para todo $z \in V$.

Nota 3.1. Si f tiene cero en z_0, entonces en una vecindad de z_0 es de la forma $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, en tal caso diremos que a n la multiplicidad o orden de z_0. Y al conjunto $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ le diremos vecindad pinchada.

Definición 3.1. *Sea f una función holomorfa definida en una vecindad pinchada de z_0, diremos que z_0 es un polo de f si la función $1/f$ está definida en la vecindad pinchada y en z_0 toma valor nulos, además de ser holomorfa.*

Nota 3.2. Si f tiene un polo en z_0, entonces f no está definido en z_0, más adelante veremos que f se aleja del origen cuando $z \to z_0$.

Sea $f : D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa donde z_0 es un polo, entonces $\frac{1}{f} : D(z_0, r) = D \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa donde, $\frac{1}{f}(z_0) = 0$ en un disco/vecindad de z_0, por lo tanto existen únicos $n \in \mathbb{N}$ y g holomorfa que no se anula en D tales que,

$$\frac{1}{f} = (z - z_0)^n g(z)$$

Entonces para todo z en la vecindad pinchada se tiene que,

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$$

donde $h = 1/g$ donde h está bien definida ya que g no se anula en D y luego es holomorfa. El natural n le diremos multiplicidad o orden del polo. Si $n = 1$ diremos que el polo es simple.

Observación 3.2. El orden del polo depende de los coeficiente de la serie, si $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa con polo z_0, entonces sabemos que en una vecindad tenemos que,

$$\frac{1}{f}(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

con g que no se anula en la vecindad holomorfa, luego se llega a que,

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$$

Pero recordemos que n está asociado al primero coeficiente de la expansión de serie de f que no se anula, es otras palabras, n es el menor natural talque $\frac{1}{f}^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Teorema 3.1. *Sea f una función holomorfa en una vecindad pinchada, si tiene un polo de orden n en z_0, entonces,*

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + G(z)$$

donde $G(z)$ es holomorfa en una vecindad de z_0.

Dem. Si z_0 es un polo de f, entonces,

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z)$$

con h holomorfa en una vecindad de z_0. Como h es holomorfa en un disco (vecindad), entonces es una serie de potencia, digamos que,

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$$

Reemplazando en f obtenemos que,

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^n} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{(z - z_0)} + G(z)$$

donde $G(z)$ es el resto de la serie. Tomando $a_{-i} := b_{n-i}$ con $i = 0, \ldots, n-1$ llegamos a lo que pediamos. ■

En la descomposición de f de la demostración, definimos,

$$p(z) := \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

A esto le llamamos parte principal del polo, y el coeficiente a_{-1} le llamamos residuo del polo, que también se denota por,

$$Res_{z_0} f := a_{-1}$$

Notemos además que en la parte principal,

$$\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

tiene primitiva para todo $k = 2, \ldots, n$, luego,

$$\int_{C := \partial D(z_0, r)} p(z) dz = 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \cdot Res_{z_0} f$$

Si z_0 es un polo simple, entonces,

$$Res_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f$$

En general, si z_0 es un polo de orden n de f, entonces podemos calcula el residuo como,

$$Res_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f$$

Y en efecto, si,

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + (z - z_0) a_{-n+1} + \cdots + (z - z_0)^{n-1} a_{-1} + G(z)(z - z_0)^n$$

Luego,

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + H(z)$$

donde H es el resultado de toma la $n-1$-ésima derivada de $G(z)(z-z_0)$, además si $z \to z_0$ entonces $H(z) \to 0$. Luego,

$$Res_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n f$$

Teorema 3.2. (Del residuo) *Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en un abierto que contiene al círculo C (Orientado positivamente), salvo por un polo z_0 en el interior. Entonces,*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res_{z_0} f$$

Dem. Sea C contenido en Ω, queremos usar las propiedades de polo, pero recordemos que esto funciona para un vecindad de z_0 muy pequeña, porque no necesariamente se cumple en el disco generado por C, por lo que debemos hacer es controlar una vecinda de z_0 tan pequeño como queramos. Consideremos el siguiente dibujo,

Figura.

Sea $\gamma_{\varepsilon,\delta}$ la curva como del dibujo, vemos que la curva $\gamma_{\varepsilon,\delta}$ genera un contorno de juguete, luego f tiene una primitiva en tal contorno, es decir, para todo $\varepsilon, \delta > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que,

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,\delta}} f(z)dz = 0$$

Sea C_ε la circuferencia generado al tomar $\delta = 0$ orientado positivamente, se cumple que,

$$0 = \lim_{\delta \to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,\delta}} f(z)dz = \int_C f(z) - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$$

Por lo tanto,

$$\int_C f(z) = \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$$

Es decir, podemos controlar la vecindad de z_0 y la integral sobre la curva C_ε es la misma sobre la curva C. Entonces si f es holomorfa en una vecindad pinchada de z_0 con z_0 polo de orden n, entonces en una vecindad de z_0 se tiene que,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + G(z)$$

donde G es holomorfa en toda la vecindad/disco luego tiene primitiva ahí. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se obtiene que,

$$\begin{aligned}\int_C f(z) &= \int_{C_\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + G(z) \right) dz \\ &= \int_{C_\varepsilon} \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} \\ &= 2\pi i Res_{z_0} f\end{aligned}$$

Como queriamos probar. ■

Teorema. 3.3. (Del residuo general) *Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfo en un abierto que contiene un círculo C, salvo un número finito de polos $z_1, \ldots, z_l$ en el interior C. Entonces,*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{l} Res_{z_k} f$$

Dem. El argumento es similar a la demostración anterior, solo debemos notar que,

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{l} \int C_{\varepsilon_k} f(z)dz$$

donde C_k es la curva que contiene al polo z_k, luego tomando ε_k suficientemente pequeño para cada $k = 1, \ldots, l$ se llega a que,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \sum_{k=1}^{l} \int_{\varepsilon_k} \frac{a_{-1_k}}{(z - z_k)} dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{l} res_{z_k} f\end{aligned}$$

Probando el teorema general. ■

Ejemplo 3.1. Probemos que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

Vamos a usar el teorema del residuo, consideremos el siguiente contorno de Juguete,

Figura.

Donde $R > 1$, γ_1 es la curva de la recta real y γ_2 es la curva que cubre la semicircuferencia. Definimos,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} &\to \mathbb{C} \\ f(z) &= \frac{1}{1+z^2} \end{aligned}$$

Notemos que f no está definido en $z = i$ y además, i están contenido en el contorno de juguete dado que $R > 1$, es más, $z = i$ es un polo ya que,

$$\frac{1}{f}(z) = 1 + z^2$$

está definido en todo $\mathbb{C}$, es holomorfa y se anula en $z = i$, por lo tanto, por el teorema del residuo se tiene que,

$$\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i Res_i f$$

Encontremos el residuo de i, para necesitamos determinar el orden de i, y para ello recordemos que el orden del polo está asociado a los coeficientes de la expansion como serie, en particular, n es el primer natural donde $\frac{1}{f}^{(n)}(i) \neq 0$, si,

$$\frac{1}{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-i)^l$$

donde,

$$a_k = \frac{\frac{1}{f}^{(n)}(i)}{n!}$$

Notemos que,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(i) = 2i \neq 0$$

Por tanto i es un polo simple, ahora usando la fórmula del residuo, obtenemos que,

$$\begin{aligned} Res_i f &= \lim_{z\to i} \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{dz^{1-1}} (z-i)^1 f(z) \\ &= \lim_{z\to i} \frac{z-i}{1+z^2} \\ &= \lim_{z\to i} \frac{1}{i+z} = \frac{1}{2i} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

Ahora estudiemos las curvas, tenemos que,

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Determinemos el valor de la integral de linea sobre γ_2, si,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^2} dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}}{1+R^2e^{2it}} dt\right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{R}{|1+R^2e^{2it}|} dt \end{aligned}$$

Notemos que,

$$|1 + R^2 e^{2it}| = (1 + 2R^2 \cos(2t) + R^4)^{1/2}$$

Queremos que sea mayor a R^2 para acotar la integral sobre la curva γ_2 y ver que se anula cuando $R \to \infty$, notemos que,

$$\frac{1}{R^4} + \frac{2}{R^2}\cos(2t) + 1 \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Por lo que podemos decir que cuando R es suficientemente grande, entonces,

$$|1 + R^2 e^{2it}| \approx R^2$$

Y por lo tanto,

$$\left| \int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \approx \frac{\pi}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ahora sobre la curva $\gamma_1(t) = t$ donde $t \in [-R, R]$ tenemos,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2} dt$$

Por tanto,

$$\pi = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Como queriamos probar.

3.1. Singularidades Aisladas y Funciones Meromorfas

Hemos estudiado los polos, que es una singularidad en particular, ahora estudiaremos de forma general las singularidad. Decimos que f tiene una singularidad aislada en z_0 si f es holomorfa en una vecindad pinchada de z_0. Aquí puede ocurrir que z_0 sea un/una,

- Singularidad Removible.
- Polo.
- Singularidad Esencial.

Una singularidad removible es que podemos arreglar la función en la singularidad, ya sabemos que es un polo y una singularidad esencial es algo que no es removible ni es polo.

Ejemplo 3.2. Sea una función $f(z) = e^{1/z}$ tenemos que se va infinito si $z \to 0^+$ por la recta real, y se va a 0 cuando $z \to \infty$ también por la recta real, pero f rota si $z \to 0$ por la recta imaginaria. Por lo que $z = 0$ es una singularidad que no es polo ni es removible por lo que $z = 0$ es una singularidad esencial.

Teorema 3.4. *Sea f una función holomorfa en Ω abierto salvo por un punto z_0. Si f está acotado en una vecindad pinchada de z_0, entonces z_0 es una singularidad removible.*

Dem. Vamos a probar que f puede ser extendido en todo Ω. Si f está acotado en una vecindad pinchada de z_0, entonces,

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

Definimos la función $h(z)$ en una vecindad de z_0 por,

$$h(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Veamos que h en z_0 es holomorfa. Por definición,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

Por tanto, h es holomorfa en una vecindad de z_0. Como $h(z_0) = 0$, entonces existen únicos $m \in \mathbb{N}$ y g holomorfa en una vecindad de z_0 que no se anula, talque,

$$h(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

Supongamos que $m < 2$, entonces en la vecindad de z_0 se tiene que,

$$(z - z_0)^{2-m} f(x) = g(z)$$

Luego si $z = z_0$, entonces $g(z_0) = 0$, siendo imposible, luego $m \geq 2$. De esta forma,

$$f(z) = (z - z_0)^{m-2} g(z)$$

Construyendo una extensión de f en Ω. ■

Corolario 3.1. *Sea f una función holomorfa en Ω abierto salvo en un punto de $z_0 \in \Omega$. Entonces z_0 es un polo si y sólo si,*

$$|f(z)| \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} \infty$$

Dem. Supongamos que z_0 es un polo de f, entonces,

$$\frac{1}{f(z_0)} = 0$$

luego,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

Supongamos que $|f(z)| \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} \infty$, entonces podemos definir $1/f$ en una vecindad pinchada de z_0, donde es holomorfa y donde además,

$$\frac{1}{|f(z)|} \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$$

Esto implica que $1/f$ este acotado en la vecindad pinchada y por tanto z_0 es removible, en particular,

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^{m-2} g(z)$$

con únicos $m \in \mathbb{N}$ y g función holomorfa en la vecindad que no se anula, luego,

$$\frac{1}{f(z_0)} = 0$$

Además, $1/f$ es holomorfa en z_0 como $(z - z_0)^{m-2} g(z)$ son holomorfas en z_0. Por lo tanto, z_0 es polo de f. ■

Teorema 3.6. (Casoroti-Weierstrass) *Supongamos que f es holomorfa en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ y que z_0 es una singularidad esencial. Entonces,*

$$f(D(z_0, r) \setminus \{z_0\})$$

es denso en $\mathbb{C}$.

Dem. Sea $D := D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Supongamos que $f(D)$ no es denso, luego existen $w \in \mathbb{C}$ y $\delta > 0$ talque,

$$|w - y| \geq \delta$$

para todo $y \in f(D)$, definimos la función,

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$$

para $z \in D$. Veamos que está bien definida, sabemos que $f(z)$ toma valores complejos para todo $z \in D$, pero si $|f(z)| \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} \infty$, entonces g no está bien definido, pero si ocurre esto entonces z_0 es una polo siendo imposible. Ahora puede pasar que $f(z) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} w$, pero entonces para algún $z \in D$ se tendrá que $|f(z) - w| < \delta$, siendo imposible. Por tanto, g está bien definida en todo D, es más,

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\delta}$$

es decir, g está acotado en una vecindad pinchada, luego z_0 es una singularidad removible en g, si $g(z_0) = 0$ entonces $|f(z)| \to \infty$ que imposible, luego $g(z_0) = w_0 \in \mathbb{C}$ y luego,

$$f(z_0) = \frac{1}{w_0} + w \in \mathbb{C}$$

Es decir, z_0 es también singularidad removible para f, siendo también contradicción. Por lo tanto necesariamente $f(D)$ es denso en $\mathbb{C}$. ■

3.2. Funciones Meromorfas

Definición 3.2. (Funciones meromorfas) *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función con Ω abierto. Decimos que f es meromorfa si existen un conjunto numerable,*

$$\{z_0, z_1, \dots\} \subseteq \Omega$$

finito o infinito sin puntos de acumulación en Ω. Talque,

i) f es holomorfa en $\Omega \setminus \{z_0, z_1, \dots\}$.

ii) f tiene polos en $\{z_0, z_1, \dots\}$

Definición 3.3. *Decimos que f tiene una singularidad removible en ∞ o que tiene un polo en ∞ si la función $f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene singularidad removible o tiene polo 0. En tal caso decimos que f es meromorfa en el plano $\mathbb{C}$ extendido.*

Teorema 3.7. *Una función meromorfa en el plano complejo extendido es racional.*

Dem. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es meromorfa en el plano complejo extendido, entonces $f(1/z)$ tiene singularidad removible o polo en 0 y existe un conjunto numerable $P = \{z_1, z_2, \dots\} \subseteq \Omega$ sin puntos de acumulación talque P son polos y f es holomorfa en $\Omega \setminus P$, notemos que,

$$\left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| \overset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

O dicho de otra forma $|f(z)| \overset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$, es decir, para z suficientemente lejos del origen, se tiene que f en torno de tal z, hay finitos polos, (si hubieran infinitos entonces existe un punto de acumulación, siendo imposible).

De forma análoga, si $f(1/z)$ tiene singularidad removible en 0, entonces $f(z)$ es holomorfa para $|z|$ suficientemente grande. Luego hay un número finito de polos.

Enumeremos los polos, sean $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ polos de f. Entonces f es de la forma,

$$f(z) = P_k(z) + G_k(z)$$

para z en una vecindad pinchada de z_k y g_k holomorfa en la vecindad completa de z_k. Si $f(1/z)$ tiene polo en 0, entonce existen $\overline{P}_\infty(z), \overline{g}_\infty(z)$ tales que,

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{P}_\infty(z) + \overline{G}_\infty(z)$$

en una vecindad pinchada de 0 con $\overline{g}_\infty(z)$ holomorfa en toda la vecindad de 0 y $\overline{P}_\infty(z)$ un polinomio en $1/z$. Definimos,

$$P_\infty(z) := \overline{P}_\infty\left(\frac{1}{z}\right)$$

un polinomio en z. Definimos,

$$H(z) := f - P_\infty(z) - P_1(z) - \dots - P_n(z)$$

y tenemos $z_1, \ldots, z_n$ singularidades removible de H y $H(1/z)$ está acotado cuando z está cerda de 0. Esto implica que H se extiende a una función holomorfa y acotada en $\mathbb{C}$ y por Louville, H es cosntante. Despejando f concluimos que f es racional.

En el caso en que ∞ es una singularidad removible es análogo. ■

Esfera de Riemann.

3.3. Principio del Argumento

Sabemos que si $z \in \mathbb{C}$ es complejo, entonces tiene una forma polar, es decir, $z = re^{i\theta}$ para algún θ, en virtud de esto y si se cumple el principio del argumento que mas adelante detallaremos, podemos decir que,

$$\log(f(z)) = \log|f(z)| + i \arg f(z)$$

donde $f(z) = |f(z)|e^{i \arg f(z)}$,

Figura.

Aunque no hemos definido el logartimo, por el momento supondremos que existe. Sabemos que en $\mathbb{R}$ el logaritmo es diferenciable, por lo que la derivada compleja debiese cumplir,

$$(\log f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Ahora, sobre una curva en $\mathbb{C}$ podemos esperar que,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

Pero esto no necesariamente ocurre, puede pasar que f tenga un polo o un cero, veamos que pasa en tal caso. Sea f un cero en z_0, entonces existen únicos $n \in \mathbb{N}$ y g holomorfo que no se anula en una vecindad de z_0 tales que,

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

en una vecindad de z_0, notar que la multiplicidad de z_0 es n. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n(z - z_0)^{n-1}g(z) + (z - z_0)^n g(z)}{(z - z_0)^n g(z)} \\ &= \frac{n}{z - z_0} + G(z) \end{aligned}$$

donde $G = g'/g$ es holomofra en la vecindad de z_0 que está bien definida ya que g no se anula en la vecindad. Por tanto si f tiene un cero en z_0, entonces,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + G(z)$$

con G holomorfa en la vecindad de z_0. En particular, n, G son únicos dado que g lo es.

Veamos que pasa si f tiene un polo de orden m en z_0, tenemos que existe g hoomorfa en una vecindad de z_0 que no se anula talque,

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$$

Usando el mismo argumento anterior llegamos a que, Entonces,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_0} + G(z)$$

En una vecindad pichada de z_0 con G en toda la vecindad de z_0.

Teorema 3.8. (Principio del Argumento) *Si f es meromorfa en Ω abierto y Ω contiene a C y su interior y, supongamos que f no tiene polo ni cero en C ni cero en C entonces,*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \textit{número de ceros menos número de polos dentro de } C.$$

con los ceros y polos contando sus multiplicidades.

Dem. Sea $f : \Omega \to C$ meromorfa, consideremos C donde f no tiene ni ceros ni polos, como estamos trabajando en C entonces hay finitos ceros y polos dentro de C. Para concluir el resultado usaremos el argumento del contorno de juguete. Sin pérdida de generalidad supongamos que f tiene un solo cero z_0 de multiplicidad n y un solo polo w_0 de multiplicidad m, si tenemos el siguiente dibujo,

Figuta.

Entonces es fácil concluir que,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{C_{\varepsilon_1}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{C_{\varepsilon_2}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tan pequeño como queramos, para el disco con centro z_0 se tiene que por la observación anterior que en una vecindad de z_0 se tiene que,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{(z - z_0)} + G_1(z)$$

donde G_1 es una función holomorfa en toda la vecindad, y para el disco con centro w_0 se tiene que en una vecindad pinchada de w_0 se tiene,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{(z - w_0)} + G_2(z)$$

con G_2 función holomorfa en toda la vecindad. Tomando $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ suficientemente pequeños, obtenemos que,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(n - m) + \int_{C_{\varepsilon_1}} G_1(z) dz + \int_{C_{\varepsilon_2}} G_2(z) dz$$

Si G_1, G_2 son holomorfas en todo el disco, entonces tienen primitiva y por tanto sus integrales de lineas se anulan, por tanto, se tiene que,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n - m$$

Probando el caso particular, para el caso general basta ver que si f tiene p cero con multiplicidad n_p y q polos con multiplicidad m_q, podemos usar nuevamente el argumento de los contornos de juguete, de forma que se concluye,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{p} n_i - \sum_{j=1}^{q} m_p$$

Que es lo queriamos probar. ■

Veamos algunas aplicaciones del principio del argumento.

Teorema 3.9. (De Reoché) *Supongamos que f y g son funciones holomorfas en un conjunto abierto que contiene al círculo C y su interior. Si,*

$$|f(z)| > |g(z)|$$

para todo $z \in C$, entonces f y $f+g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de C teniendo en cuenta multiplicidades.

Dem. Sea $f_t := f + tg$ con $t \in [0,1]$, tenemos que $f_0 = f$ y $f_1 = f + g$. Si $z \in C$ talque $f_t(z) = 0$ entonces $f(z) + tg(z) = 0$, luego,

$$|f(z)| = t|g(z)| < |f(z)$$

siendo imposible, luego f_t no tiene cero en C. Por el principio del argumento el numero de ceros de f_t al interior de C es,

$$n_t := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz$$

para todo $t \in [0,1]$, como $n_t \in \mathbb{N}$ para mostrar que n_t es constante basta ver que n_t continua como una funciín de $\mathbb{C}$. COmo f_t y f_t' son continuas en las variables t y z y además, f_t no se anula, tenemos que,

$$\frac{f_t'(z)}{f_t(z)}$$

es continua en todo $(t,z) \in [0,1] \times C$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque si $\text{máx}\{|t - t'|, |z - z'|\} < \delta$, entonces,

$$\left|\frac{f_t'(z)}{f_t(z)} - \frac{f_{t'}'(z')}{f_{t'}(z')}\right| < \varepsilon$$

esto implica que n_t es continua y por lo tanto, $n_1 = n_0$. ■

Teorema 3.10. (Mapa abierto) *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante con Ω una región, entonces f es abierta.*

Nota 3.3. Una función es abierta si para todo $U \subseteq \Omega$ abierta, entonces $f(U)$ es abierta.

Dem. Sea w_0 elemento de la imagen de f, digamos que $w_0 = f(z_0)$, vamos a probar que todo punto w cerca de w_0 está asociado a la imagen de f. Definimos, $g(z) := f(z) - w$ y, reescribimos de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} g(z) &= (f(z) - w_0) + (w_0 - w) \\ &= F(z) + G(z) \end{aligned}$$

Vamos a tomar $\delta > 0$ talque $\overline{D}(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ y de forma que $f(z) \neq w_0$ en el borde del disco cerrado. Sea $\varepsilon > 0$ talque $|f(z) - w_0| \geq 0$ en el borde del disco cerrado, ahora si $|w - w_0| < \varepsilon$ tenemos que,

$$|F(z)| > |G(z)|$$

para todo z en el borde, luego por el teorema de Rouché se tiene que F y $G + F$ tienen los mismos ceros, si $f(z) - w_0$ tiene un solo cero, entonces $f(z) - w$ tiene un ceros, es decir, existe un $z_1 \in \Omega$ talque $f(z_1) = w$

Observación 3.3. Si una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa con Ω una región, si no es abierta entonces f es constante.

Teorema 3.10. (Principio del Máximo) *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante con Ω una región abierta, entonces f no alcanza su máximo en Ω.*

Dem. Supongamos que f alcanza máximo en Ω, es decir, existe un $z_0 \in \Omega$ talque $|f(z) \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in \Omega$. Si f es holomorfa entonces $f(\Omega)$ es un conjunto abierto, por lo que existe un $r > 0$ talque,

$$B(f(z_0), r) \subseteq f(\Omega)$$

Pero podemos tomar un $z_1 \in \Omega$ talque $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ siendo contradicción. Por tanto no alcanza su máximo en Ω. ■

Figura.

Observación 3.4. Con este teorema podemos probar cuando una función es constante, si f está definido en Ω Región y es holomorfa que alcanza máximo, entonces necesariamente f es constante.

3.4. Homotopía y Dominio simplemente conexo

Definamos la homotopía de dos curvas. Sean γ_0, γ_1 curvas de $[a, b]$ en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y supongamos que γ_0, γ_1 tienen los mismos puntos extremos,

Figura.

Entonces, una homotopía (con extremos fijos) entre γ_0 y γ_1 es una función,

$$H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$$

continua talque,

- $H(0,t) = \gamma_0(t)$ para todo $t \in [a,b]$.
- $H(1,t) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in [a,b]$.
- $H(x,a) = \gamma_0(a)$ para todo $x \in [0,1]$.
- $H(x,b) = \gamma_0(b)$ para todo $x \in [0,1]$.

De forma más coloquial, dos curvas con extremos fijos son homotopías si a partir de una curva podemos pasar a la otra de forma continua. Es decir, si cada punto de la curva traza una linea continua a la otra curva.

Teorema 3.11. (Cauchy) *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con Ω abierto y γ_0, γ_1 son dos curvas con los mismos extremos y homotópicas en Ω, entonces,*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

Es decir, si una curva se puede transformar en la otra curva de forma continua, entonces las integrales de lineas son iguales.

Teorema 3.12. (Cauchy Segunda versión) *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con Ω abierto.*

i) Si γ_0, γ_1 son dos curvas en Ω homopóticos con extremos fijos, entonces,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

ii) Si γ_0, γ_1 son dos curvas cerradas en Ω y homotópicos en Ω, entonces,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Observación 3.5. Podemos decir que una curva se deforma continuamente a un punto usando la idea de homotopía, para ello necesitamos que la curva sea cerrada (si no fuera cerrada tendriamos que deformar **Terminar**)

Corolario 3.2. *Sea f una función holomorfa definida sobre el abierto Ω si γ es una curva cerrada en Ω homotópica en Ω a un punto, entonces,*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Tiene sentido ya que la integral de un punto debiese ser nulo.

Figura.

Necesitamos una definición para decir cuando dos curvas son cercanas.

Definición 3.4. *Dos curvas son cercanas si existe una colección finita de disco $D_0, D_1, \ldots, D_n$ incluidos en Ω, y una partición $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}\}$ de $[a,b]$ talque para todo $j = 1, \ldots, n+1$ se tiene,*

$$\gamma_0([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_{j-1}$$
$$\gamma_1([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_{j-1}$$

Definimos, $z_j = \gamma_0(t_j), w_j = \gamma_1(t_j)$ (γ_0, γ_1 o bien son homotópicas o son cerradas).

Lema 3.1. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa con Ω abierto y sean γ_0, γ_1 cercanas en Ω, entonces,*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Dem. Notemos que para cada disco D_j la función f tiene una primitiva en D_j que denotaremos por F_j, también notemos que en $D_j \cap D_{j+1}$ tenemos dos primitivas de f que son F_j, F_{j+1} respectívamente, por tanto, $F_{j+1} - F_j$ es constante digamos que vale c_j, en el dibujo ($\star$) tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz &= \sum_{j=0}^{n} F_j(z_{j+1}) - F_j(z_j) - \sum_{j=0}^{n} F_j(w_{j+1}) - F_j(w_j) \\
&= -F_0(z_0) + \left(\sum_{j=0}^{n-1} F_j(z_{j+1}) - F_{j+1}(z_{j+1}) \right) + F_n(z_{n+1}) \\
&\quad - (-F_0(w_0) + \left(\sum_{j=0}^{n-1} F_j(w_{j+1}) - F_{j+1}(w_{j+1}) \right) + F_n(w_{n+1})) \\
- &= -F_0(z_0) + \sum_{j=0}^{n-1} -c_j + F_n(z_{n+1}) + F_0(w_0) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j - F_n(w_{n+1}) \\
&= F_n(z_{n+1}) - F_0(z_0) - F_n(w_{n+1}) - F_0(w_0)
\end{aligned}$$

Recordemos que tenemos dos casos, que las curvas sean cerradas o tengan extremos fijos, en cualquier se tiene que,

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Probando el lema. ■

Dem. (Cauchy) Sean γ_0, γ_1 curvas con extremos fijos o curvas cerradas en Ω y consideremos,

$$H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$$

la homotopía entre γ_0, γ_1. Como H es continua entonces,

$$H([0,1] \times [a,b])$$

es un conjunto compacto en Ω. Entonces existe $\varepsilon > 0$ para todo $z \in \Omega$ talque,

$$D(z, 3\varepsilon) \subseteq \Omega$$

Como H uniformemente continua, existe $\delta > 0$ talque si el máximo $\max\{|x-y|, |t-s|\} < \delta$, entonces $|H(x,t) - H(y,s)| < \varepsilon$. Fijemos $x, y \in [0,1]$ con $x < y$ con $x - y < \delta/2$. Definimos,

$$\gamma_x(\cdot) := H(x, \cdot)$$
$$\gamma_y(\cdot) := H(y, \cdot)$$

Sea la partición $\mathcal{P} := t_0, t_1, \ldots, t_{n+1}\}$ de $[a,b]$ talque para todo $j = 1, \ldots, n+1$ se tiene,

$$|t_j - t_{j-1}| < \frac{\delta}{2}$$

Y para todo $j = 0, \ldots, n$ definimos $D_j := D(\gamma_x(t_j), 3\varepsilon)$. Notemos que,

$$\gamma_x([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_{j-1}$$

Y notemos que para $t \in [a,b]$ se tiene $|\gamma_x(t) - \gamma_y(t)| < \varepsilon$. Por lo tanto, para todo $j = 1, \ldots, n+1$ se tiene,

$$\gamma_y([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_{j-1}$$

Por lo tanto γ_x, γ_y son curvas cercanas y por tanto,

$$\int_{\gamma_x} f = \int_{\gamma_y}$$

■

Ejemplo 3.2. Consideremos las siguientes curvas sobre $\Omega \setminus \{z_0, z_1\}$,

Figuta

Queremos relacionar estas curvas de una forma conveniente. Una forma sería pensarlo de forma homotópica, pero es imposible ya que para llegar a otra curva debemos romperla, veamos si conectamos de la siguiente forma, **Figura.**

Obtenemos una dos curvas homotópica, de forma que podemos relacionarlas.

Figura.

De forma general se puede realizar esto,

Figura.

Este resultado también se puede concluir usando el teorema de Green.

Teorema de Green. *Sean $P, Q \in C^1$, sea*

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

donde ∂D es la suma implícita de las curvas orientadas de formas alternantes donde la que cubre a todas tiene orientación positiva.

En variable compleja sería, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfas con $\overline{D} \subseteq \Omega$, luego si $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde $z = x + iy$, tendriamos que,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)dz &= \int_{\partial D} (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy)\\ &\overset{(\star)}{=} \int_{\partial D} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\partial D} u(x,y)dy + v(x,y)dx\end{aligned}$$

Donde $(\star)$ es la igualdad no formal, ya que estamos mulplicando cosas que no se relacional directamente. Si f es holomorfa entonces f es infinitamente diferenciable en el disco y luego u, v también son infinitamente diferenciable, en particular, $u, v \in C^1$, luego por el teorema de Green se tiene que,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} f(z)dz &= \int_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy + i\int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy\\ \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

Es más, este resultado es equivalente. Recordemos la fórmula integral de Cauchy.

Teorema Fórmula Integral de Cauchy. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con Ω abierto. Sea $\overline{D} \subseteq \Omega$ un disco cerrado, entonces para todo $z \in D$ se tiene,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Probemos el teorema de la fórmula integral de Cauchy usando curvas homotópicas.

Figura.

Con z dentro del disco y un disco C_ε de centro z. Claramente C, C_ε son homotópicas. Definimos las función,

$$g(w) = \frac{f(w)}{w - z}$$

holomorfa en la vecindad pinchada de z, luego se tiene que,

$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\\ &= \int_{C_\varepsilon}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{C_\varepsilon}\frac{f(z)}{\zeta-z}d\zeta\\ &\xrightarrow{\varepsilon\to 0} f(z)2\pi i\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$$

para todo z en el interior del disco. Probando la fórmula de Cauchy usando curvas homotópicas.

Definición 3.5. (Número de Vueltas) *Sea γ una curva cerrada en $\mathbb{C}, \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ suave a trozos. Para cada z en el complemento de la imagen de γ, definimos el número de vueltas de γ en z como,*

$$W(\gamma,z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta$$

Por ejemplo,

Figura.

el número de vueltas puede ser $1, 2, 3, \ldots$ y si z esta afuera del interior de la curvas, la vueltas son 0.

VOlvamos a hablar de la formula integral de Cauchy. Sabemos que en general se cumple para una curva que describe un contorno de juguete, pero ¿qué hay de una curva cualquiera? Nos hacemos esta pregunta a esta altura ya que podemos generalizar la fórmula integral de Cauchy.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, consideremos la siguiente curva,

Figura.

Tomemos z como en la figura, podemos ver que tiene definido un número de vueltas, otra cosa que podemos notar es que la curva es homotópica a un punto en Ω ya que podemos contraerla de forma continua sin romperla. Definimos el cuociente,

$$g(w):=\frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

con $w \in \Omega \setminus \{z\}$, como f es holomorfa en el interior de la curva, se tiene que g es holomorfa, consideremos una vecindad pinchada de z, de forma que g es casi acotada ya que no sabemos como se comporta cerca de z, pero si tomamos $w \to z$ llegamos a que,

$$\lim_{w\to z}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}=f'(z)\in\mathbb{C}$$

Luego g es acotada en la vecindad y por tanto z es singularidad removible y luego g es extendible a una función holomorfa en todo Ω. Consideremos el abuso de notación g como la extensión del mismo g. Si la curva γ es homotópico a un punto en Ω se tiene que,

$$\int_\gamma g(w)dw = 0$$

Esto implica que,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Pero la integral de la izquierda es conocida, luego,

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = 2\pi i f(z)W(\gamma, z)$$

Encontrando una fórmula general para la integral de Cauchy que depende del números de vueltas.

Teorema 3.13. (Fórmula Integral de Cauchy) *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa sobre un abierto Ω, y sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada (suave a trozos) homotópica a un punto en Ω. Luego para todo $z \in \Omega$ taque $z \notin \gamma([a, b])$, se tiene que,*

$$f(z)W(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Dem. Consideremos la función,

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w-z}$$

Que por lo anterior sabemos que es extendible a todo Ω y que es holomorfa. Como γ es homotópica a un punto se tiene que,

$$\int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w-z}dw = 0$$

Luego llegamos a que,

$$f(z)W(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

■

Observación 3.6. Si el número de vueltas de z es 0 con respecto a γ, entonces de igual forma se cumple la igualdad, ya que $W(\gamma, z) = 0$ y por otro lado la función,

$$\frac{f(w)}{w-z}$$

no tiene un punto que se anule, es decir, es holomorfa en la figura que genera la curva y luego la integral es nula.

3.5. Descomposición de Laurent y series de Laurent

Teorema 3.14. *Sean $0 \leq r < R \leq +\infty$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Definimos el anillo,*

$$A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$

Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, entonces existen las funciones,

$$f_0 : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$$
$$f_1 : (\overline{D(z_0, r)})^c \to \mathbb{C}$$

holomorfas tales que,

$$(\star) \quad f(z) = f_0(z) + f_1(z)$$

para todo $z \in A$. Además, si $|f_1| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, entonces la descomposición $(\star)$ es única.

Antes de probar el teorema debemos probar un resultado.

Lema 3.1. *Sea $F : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$ una funcion continua con Ω abierto en $\mathbb{C}$. Supongamos que para cada $s \in [a, b]$ la funcion $F(z, s)$ es holomorfa en Ω. Entonces la función,*

$$f(z) := \int_a^b F(z, s)ds$$

es holomorfa en Ω.

Dem...

Dem. (Teorema) Vamos a probar primero la unicidad y luego que existen tales funciones.

Unicidad. Sean f_0, f_1, g_0, g_1 funciones que cumple las hipótesis del teorema, notemos que para todo $z \in A$ se tiene,

$$f_0 + f_1 = g_0 + g_1$$

Luego,

$$f_0 - g_0 = g_1 - f_1$$

Obteneiendo una igualdad conveniente, de aquí podemos definir la función,

$$h(z) := \begin{cases} f_0 - g_0, & |z - z_0| < R \\ g_1 - f_1, & |z - z_0| > r \end{cases}$$

Esta función está bien definida y es holomorfa en todo $\mathbb{C}$, es decir, es entera. Notemos que si $|z| \to \infty$ entonces $|h(z)| \to 0$, es decir, h es acotada y entera por lo que por el teorema de Liouville se tiene que $h \equiv C$, con $C \in \mathbb{C}$, es más, tomando $|z| \to \infty$ se llega a que $C = 0$ luego llegamos a que $f_1 = g_1$, y de aquí se concluye que $f_0 = g_0$, probando la unicidad.

Existencia. Consideremos el siguiente dibujo,

Figura.

Donde $0 \leq r < \rho < \sigma < R \leq +\infty$ y $\varepsilon > 0$. Luego por el teorema de Cauchy tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\sigma}\frac{f(w)}{w-z}dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon(z)}\frac{f(w)}{w-z}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(w)}{w-z}dw \end{aligned}$$

Usando la fórmula integral de Cauchy sobre $C_\varepsilon(z)$. Luego,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\sigma}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

Definimos,

$$f_0 := \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\sigma}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

para todo $z \in D(z_0, r)$. Probemos que f_0 es holomorfa, tomando la parametrización de la curva $C_\sigma(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$ obtenemos que,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})iRe^{i\theta}}{z_0+Re^{i\theta}-z}d\theta$$

Definimos la función,

$$\begin{gathered} F(z,\theta) : D(z_0,r)\times[0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ F(z,\theta) = \frac{f(z_0+Re^{i\theta})iRe^{i\theta}}{z_0+Re^{i\theta}-z} \end{gathered}$$

Que es continua en su dominio, también odemos ver que $F(\cdot,\theta)$ es holomorfa en todo $\theta \in [0, 2\pi]$, por lo tanto, por el lema anterior, la función,

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} F(z,\theta)d\theta$$

es holomorfa. Tomando $f_1 = f - f_0$ podemos probar de forma similar que es holomora. También vemos que si $|z| \to \infty$ entonces $|f_1| \to 0$. Para concluir el resultado basta tomar $\rho \downarrow r, \sigma \uparrow R$, de forma que, existen tales funciones f_0, f_1. ■

De la descomposición de Laurent podemos expresar la función como una serie. Primero, si $f : A \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un anillo A, entonces existen f_0, f_1 holomorfas. Si f_0 está definido en el disco $D(z_0, R)$ entonces se puede expresar como serie,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$$

para todo $z \in D(z_0, R)$. Queremos hacer lo mismo con f_1 y para ello consideraremos el cambio de variable,

$$w = \frac{1}{z - z_0}$$

De aquí definimos la función,

$$\begin{aligned} g : D(0, 1/r) \setminus \{0\} &\to \mathbb{C} \\ g(w) : &= f_1\left(z_0 + \frac{1}{w}\right) \end{aligned}$$

Está función está bien definido ya que si $|w| < 1/r$ entonces, $\left|\frac{1}{w}\right| > r$ y esto implica que,

$$z_0 + \frac{1}{w} \in \overline{D(z_0, r)}^c$$

Podemos ver que $w = 0$ es una singularidad pero si $g(w) \to 0$ cuando $|w| \to 0$ entonces g es acotada en una vecindad pinchada y luego se puede extender a todo el disco $D(0, 1/r)$. Digamos que la extensión es la misma g (abuso de notación) y luego $g(0) = 0$. Por tanto podemos expresarlo como serie,

$$g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

para todo $w \in D(0, 1/r)$.

Nota 3.4. La convergencia de f_0, g son absolutamente convergente y las sumas parciales de cada serie converge uniromemente en un compacto.

Finalmente obtenemos que,

$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

para todo $|z - z_0| > r$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $a_{-n} := b_n$ de forma que,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z - z_0)^n$$

para todo $z \in A$, luego podemos juntar las series y usar la siguiente expresión,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Definición 3.6. (Serie de Laurent) *Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con A un anillo centrado en z_0. Entonces f se puede expresar de la siguiente forma,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

A esta serie le llamamos serie de Laurent y a a_n le decimos coeficientes de la serie de Laurent.

Ahora queremos poder determinar los coeficiente de la serie, una forma sería de forma abrupta que no es lo queremos, por lo que los sacaremos de forma indirecta. Consideremos el siguiente dibujo,

Figura.

donde $r < \overline{r} < R$, sea $n \in \mathbb{Z}$ cualquier entero, notemos que,

$$\begin{aligned}\int_{C_{\overline{r}}} (z - z_0)^{-(n+1)} f(z) dz &= \int_{C_{\overline{r}}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-(n+1)} dz \\ &\overset{(\star)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{C_{\overline{r}}} a_k (z - z_0)^{k-(n+1)} dz\end{aligned}$$

donde $(\star)$ se cumple por la convergencia uniforme. Notemos que para todo $k \in \mathbb{Z}$ distinto de $k = n$ se tiene que $a_k(z - z_0)^{k-(n+1)}$ tiene primitiva sobre una curva cerrada, por lo que se anula en todo menos en $k = n$, de forma que,

$$\begin{aligned}\int_{C_{\overline{r}}} (z - z_0)^{-(n+1)} f(z) dz &= \int_{C_{\overline{r}}} a_n (z - z_0)^{-1} dz \\ &= a_n 2\pi i\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos determinar los coeficiente de la serie de Laurent,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\overline{r}}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Definición 3.7. (Coeficientes de Laurent) *Sea $f : A \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con A un anillo centrado en z_0. Los coeficientes de Laurent de f se determina por,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\overline{r}}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

donde $r < \overline{r} < R$.

Ejemplo 3.2. Calculemos la seire de Laurent de la función,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Primero debemos determar un anillo para f, notemos que f está bien definido en el anillo,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$$

ademas de ser holomorfa. Sea $r \in (1, 2)$ un radio cualquiera, entonces el coeficiente n de Laurent es,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{1}{(z-1)(z-2)z^{n+1}}$$

En particular,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Entonces debemos estudiar las integrales,

$$\int_{C_r} \frac{1}{(z-2)z^{n+1}} dz, \quad \int_{C_r} \frac{1}{(z-1)z^{n+1}} dz$$

La primera integral tiene un polo en $z = 0$, entonces es igual a $2\pi i Re_0$, notemos que el orden del polo es de $n+1$, entonces,

$$\begin{aligned} Re_0 &= \lim_{z \to 0} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^{n+1} \frac{1}{(z-2)z^{n+1}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Calculemos la otra integral. Tenemos dos polos $z = 1, 0$, el primero es simple y el otro es de orden $n+1$. Vemos que,

$$\begin{aligned} Re_0 &= -1 \\ Re_1 &= 1 \end{aligned}$$

Entonces,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} (-\pi i + 0) = -\frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$$

3.6. Aplicación del Teorema de Cauchy a una Región Simplemente conexa

Definición 3.8. *Un abierto conexo Ω en $\mathbb{C}$ es simplemente conexo si para cualquier curva par γ_1, γ_2 con misma parametrización en Ω con los mismos extremos son homotópicos en Ω.*

Nota 3.5. Dicho de una forma informal, esto significa que dos curvas dentro de la región se puede conectar de forma continua, en el sentido de que existe siempre una homotopía entre las curvas, ya que esto significa que existe una forma de transformar una curva a la otra mediante un proceso continuo.

Ejemplo 3.3.

- Claramente $\mathbb{C}$ es simplemente conexo ya que toda curva con misma parametrizacion es homotópica entre si.

- $\mathbb{D}$ (disco unitario) es simplemente conexo, y en efecto, sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{D}$ dos curvas cualesquiera del disco unitario, entonces podemos considerar la homotopía,

$$H(x, t) = x\gamma_1(t) + (1 - x)\gamma_0(t)$$

  De forma que $\mathbb{D}$ es simplemente conexo.

- Todo dominio estrellado es simplemente conexo. **¿qué es un dominio estrellado?**
- El plano cortado $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ es simplemente conexo, y esto es claro ya al tomar dos curvas siempre existe una homotopía.
- Los contornos de juguete son simplemente conexos. **Probar**
- Si Ω es abierto conexo, entonces es simplemente conexo si y sólo si toda curva cerrada es homotópica a un punto.

  Observación 3.7. Que toda curva cerrada sea homotópica es la definición alterna a ser simplemente conexo. Ya que si Ω abierto conexo es simplemente conexo, entonces dado una curva cerrada y un punto en Ω podemos extender la curva de forma que se genera la siguiente curva,

  Figura.

  Luego tomando este punto como el extremo de la curva está se puede deforma continuamente al punto.

Teorema 3.15. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, si Ω es simplemente conexo, entonces f tiene una primitiva en Ω*

Probar.

Corolario 3.. *Sean $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y Ω simplemente conexa, entonces la integral de f sobre una curva cerrada es 0.* **Revisar**

Dem (revisar) Si Ω es simplemente conexo entonces toda curva cerrada es homotópica a un punto **Terminar**

Ejemplo 3.4. El conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo ya que al considerar una curva cerrada que contiene a 0, está no es homotópica a un punto fijo.

3.7. Logaritmo

Intentemos dar una definición de logaritmo. Si $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$, podemos pensar en el logaritmo como,

$$\log(z) = \log(r) + i\theta$$

donde $\log(r)$ el logaritmo real. Está definición tiene sentido, pero el primer problema es que queremos algo inyectivo, por lo que restringimos el θ al conjunto $(-\pi, \pi)$. Pero este logaritmo seríael ideal y en compleja existen más de un logaritmo.

Teorema 3.16. *Sea Ω un abierto simplemente conexo en $\mathbb{C}$ talque $1 \in \Omega$ y $0 \notin \Omega$. Entonces existe una rama del logartimo $F(z) = \log_\Omega(z)$ talque,*

i) F es holomorfa en Ω.

ii) $e^{F(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

iii) $F(r) = \log(r)$ (logaritmo real) para todo r real suficientemente cercano a 1.

Notación. Si se cumple lo anterior diremos que,

$$F(z) = \log_\Omega(z)$$

Si Ω está claro en el contexto basta tomar $F(z) = \log(z)$ y a $F(z)$ se le dice rama del logaritmo.

Dem. Definimos la función,

$$F(z) := \int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

donde γ es un camino que parte en 1 y termina en $z \in \Omega$. Claramente γ es continuamente diferenciable ya que Ω es simplemente conexo y luego es conexo por caminos.

i) Sea $|h| > 0$, consideremos la siguiente figura,

Figura.

Ahora si $1/\zeta$ no está definido en $\zeta = 0$ entonces, dado que $0 \in \Omega$ tenemos que $1/\zeta$ es holomorfa. Con esto tenemos que la integral de linea sobre un triangulo o rectángulo, esta se anula, de esta forma,

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

Consideremos la siguiente parametrización de $\gamma_h(t) = z + ht$ con $t \in [0, 1]$, luego tenemos que,

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^1 \frac{h}{z + th} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{z + th} dt\end{aligned}$$

Recordemos que existe una función ψ talque,

$$\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z} = -\frac{h}{z^2} + \psi(h)$$

donde $\psi(h) \to 0$ cuando $|h| \to 0$. Reemplazando h por th obtenemos que,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{z+th} dt &= \int_0^1 \left(\frac{1}{z} - \frac{th}{z^2} + \psi(th) \right) dt \\ &= \frac{1}{z} - h \int_0^1 \frac{t}{z^2} dt + \int_0^1 \psi(th) dt \\ &\xrightarrow{h \to 0} \frac{1}{z}\end{aligned}$$

Por tanto, F es holomorfa para todo $z \in \Omega$ con derivada,

$$F'(z) = \frac{1}{z}$$

ii) Sea la función $G(z) := ze^{-F(z)}$ bien definida para todo Ω. Por definición de G se tiene que es holomorfa en todo Ω con derivada,

$$G'(z) = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = 0$$

Por tanto G es continuamente diferencaible sobre Ω abierto conexo con $G' = 0$ por tanto G es constante, en particular,

$$G(1) = 1$$

Por tanto,

$$e^{F(z)} = z$$

para todo $z \in \Omega$.

iii) Sea r real suficientemente cercano a 1 ($r \in \Omega$), luego $\gamma : [1, r] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) := t$ es una parametrización continuamente diferenciable, por lo que,

$$F(r) = \int_1^r \frac{1}{x} dx = \log(r)$$

Que es el logaritmo real.

Probando que existe una rama del logaritmo. ■

Ejemplo 3.5. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ queremos definir un logaritmo en este cojunto. Notemos que Ω es simplemente conexo ya qeu toda curva cerrada es homotópica a un punto. Luego existe una rama del logaritmo. Es más, aquí podemos definir el logaritmo principal que toma curva sencillas. Determinemos esta rama. Sea $z \in \Omega$ luego $z = |z|e^{i\theta}$ con $|z| \neq 0$ y $\theta \in (-\pi, \pi)$. Considarmos,

$$F(z) := \int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

donde γ es la curva que se mueve a $|z|$ luego se mueve θ como se aprecia en la figura de abajao,

Figura.

En base a esta curva tenemos que para todo $z \in \Omega$ se tiene,

$$\begin{aligned}\log(z) &= \int_1^{|z|} \frac{1}{x} dx + \int_0^\theta \frac{1}{|z|e^{it}} i|z|e^{it} dt \\ &= \log(|z|) + i\theta\end{aligned}$$

Siendo esta el logaritmo principal. Notemos que es la forma intuitiva del logaritmo, por lo que nuestra intuición fue buena.

Al igual que en el mundo real, el logaritmo se puede expandir como serie cuando $|z| < 1$ y para ello derivando, en particular,

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

Dado que está definido en un disco de centro 0 y radio 1, luego se puede expresar como la serie mostrada.

Observación 3.8. Las propiedades que conocemos de logaritmo no siempren se cumplen. Si tomamos $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ con el logaritmo principal se tiene que,

$$\log(z_1 \cdot z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2)$$

Tomando $z_1 = e^{\frac{2\pi}{3} i} = z_2$, luego,

$$2\log(z_1) = \frac{4\pi}{3} i \neq -\frac{2\pi}{3} i = \log(z_1^2)$$

Teorema 3.17. *Si $f(z)$ es una función holomorfa definida sobre un dominio simplemente conexo Ω talque no se anula en Ω. Entonces existe $g(z)$ holomorfa en Ω talque,*

$$e^{g(z)} = f(z)$$

para todo $z \in \Omega$. Podemos decir que, $g(z)$ es una rama logarítmica de $f(z)$, es decir, $g(z) = \log(f(z))$.

Dem. Sea $z_0 \in \Omega$ fijo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de forma que no se anula en Ω. Sea la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por,

$$g(z) := \int_\gamma \frac{f'(w)}{f(w)} dw + c_0$$

donde γ es un camino que parte en z_0 y llega a z el cual existe dado que Ω es también conexo por caminos y sea c_0 de tal forma que,

$$e^{c_0} = f(z_0)$$

y tal c_0 existe dado que,

$$f(z_0) = Re^{i\theta}$$

Como $R > 0$ entonces podemos tomar,

$$f(z_0) = e^{\log(R) + i\theta}$$

Probemos que g es una función holomorfa que satisface lo anterior. Consideremos la siguiente figura,

Figura

Si $\frac{f'(w)}{f(w)}$ es una función holomorfa entonces la integral de un polígono es nula, de forma que,

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{\gamma_h} \frac{f'(w)}{f(w)}dw$$

Sea la parametrización $\gamma_h(t) = z + th$ con $t \in [0,1]$, luego,

$$\frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \int_0^1 \frac{f'(z+th)}{f(z+th)}dt$$

De aquí concluimos que,

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Por tanto g es holomorfa en todo Ω y además,

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Consideremos la función,

$$h(z) = f(z)e^{-g(z)}$$

para todo $z \in \Omega$ y que es holomorfa. Notemos que la derivada es,

$$\begin{aligned} h'(z) &= f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto h es constante, tomando $z = z_0$ tenemos que,

$$h(z_0) = f(z_0)$$

Por tanto,

$$e^{g(z)+c_0} = f(z)$$

Para concluir el resultado basta tomar $g_0(z) := g(z) + c_0$ que es diferenciable, probando que existe un $g_0(z)$ talque,

$$e^{g_0(z)} = f(z)$$

■

Ejemplo 3.6. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ simplemente conexo. Tenemos que $f(z) = z$ es holomorfa que no se anula, luego existe un g talque,

$$e^{g(z)} = z$$

Observación 3.7. A partir del teorema anterior podemos extender la noción de potencia que está asociado a la rama.

3.8. Series de Fourier y Funciones Armónicas

Sea $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ holomorfa, luego,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Teorema 3.18. *Los coeficiente de la serie de pontencia de f están dado por,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta$$

para todo $n \geq 0$ y para todo $0 < r < R$. Más aún, para todo $n < 0$ tenemos que,

$$\frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0$$

Dem. Es solo aplicar la fórmula integral de Cauchy. Sea $C_r \subseteq D(z_0, R)$ el disco de centro z_0 y radio $r < R$, entonces,

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

Tomando la parametrización $C_r(t) := re^{i\theta} + z_0$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, luego,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \end{aligned}$$

Si $n < 0$ entonces tenemos la integral de una función con primitiva y lueg claramente es nula. ■

Teorema 3.19. *Se tiene que,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})$$

Dem...

Corolario 3.2. *Si $u : D(z_0, R) \to \mathbb{R}$ es armónica, entonces,*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

4. Mapas Conformes

Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ conjuntos abiertos. Consideremos la función $f : U \to V$, diremos que es conforme si f es biyectiva y holomorfa (tambien se dice biholomorfa).

Teorema 4.1. (De la Función Inversa) *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función y sea $z_0 \in \Omega$ talque $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe una función g definida en una vecindad de $f(z_0)$ talque $(g \circ f)(z) = z$ y,*

$$g'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

Dem. Sea $w_0 := f(z_0)$. Como $f'(z_0) \neq 0$ tenemos que f no es constante, entonces existe un $r > 0$ talque para todo $z \in \overline{D(z_0, r) \setminus \{z_0\}}$ talque $f(z) \neq w_0$. Entonces existe $\delta > 0$ talque para todo $z \in \delta D(z_0, r)$ talque,

$$|f(z) - w_0| > \delta$$

Sea $w \in D(w_0, \delta)$ y consideremos la función $F(z) := f(z) - w$. Queremos mostrar que $F(z)$ tiene único 0 en $D(z_0, r)$. Notemos que,

$$F(z) = f(z) - w_0 + w_0 - w$$

Y la función $f(z) - w_0$ tiene único 0 en $D(z_0, r)$ con multiplicidad 1 puesto que $f'(z_0) \neq 0$. Como para todo $z \in D(z_0, r)$ tenemos que,

$$|f(z) - w_0| > \delta > |w_0 - w|$$

Luego por el teorema de Rouche $f(z) - w_0 + w_0 - w$ y $f(z) - w_0$ tieen un mismo cero. Luego f tiene única solución en z en $D(z_0, r)$ por lo tanto existe $f^{-1} : D(w_0, \delta) \to D(z_0, r)$.

Tomando r suficientemente pequeño podemos suponer que para todo $z \in D(z_0, r)$ que $f'(z) \neq 0$, para cada $w \in D(w_0, \delta)$ definimos,

$$\zeta \mapsto \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}$$

Que tiene singularidad en $z \in D(z_0, r)$ talque $f(z) = w$, es más, es un polo. Determinemos el orden de la singularidad, notemos que,

$$\begin{aligned}
\lim_{\zeta \to z} (\zeta - z) \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} &= \lim_{\zeta \to z} \frac{\zeta f'(\zeta)}{\frac{f(\zeta) - w}{\zeta - z}} \\
&= \frac{z f'(\zeta)}{f'(z)} = z
\end{aligned}$$

Por tanto, el polo es simple con residuo z. Integrando obetenemos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta = z = f^{-1}(w)$$

Encontrandor una fórmula para la derivada. Es más, si parametrizamos la curva y reemplazamos lo de adentro de la integral, obtenemos una función de dos variables continua con primer argumento diferenciable, luego la función,

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta D(z_0,r)} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

es holomorfa. ■

Observación 4.1. Para todo $w \in D(w_0, \delta)$ se tiene que,

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

Probar.

Proposición 4.1. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Entonces para todo $z_0 \in \Omega$ tenemos que $f'(z_0) \neq 0$. Más aún,*

$$f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$$

es holomorfa y en particular, todo mapa conforme es biholomorfo.

Dem. Por contradicción. Sea $z_0 \in \Omega$ talque $f'(z_0) = 0$. Sea $r > 0$ talque para todo $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ talque $f'(z) \neq 0$. Este r existe por la inyectividad de f. Sea $w_0 = f(z_0)$ y sea $\delta > 0$ talque para todo $z \in \partial D(z_0, r)$ se tiene,

$$|f(z) - w_0| > \delta$$

Entonces para cada $w \in D(w_0, \delta)$, consideremos la función,

$$|f(z) - w_0| > \delta$$

Entonces para cada $w \in D(w_0, \delta)$ consideremos la función,

$$F(z) = f(z) - w = f(z) - w_0 + w_0 - w$$

Luego se cumple la condición de Rouche y entonces F tiene los mismos ceros que $f(z) - w_0$ en $D(z_0, r)$. Pero $f(z) - w_0$ tiene un único cero z_0 en $D(z_0, r)$ con multiplicidad $k \geq 2$. Entonces F tiene $k \geq 2$ ceros en $D(z_0, r)$ contando multiplicidad. Perom para todo $z \in D(z_0, r)$ se tiene $f'(z) \neq 0$, entonces F en $D(z_0, r)$ tiene ceros con multiplicidad 1 y como $k \geq 2$ entonces hay almenos 2 ceros distintos, por lo que $f(z) = w$ tiene almenos 2 soluciones, pero entonces f no es inyectiva, contradicción. Por tanto $f'(z) \neq 0$ **Completar**. ■

4.1. Disco Unitario y Semi-plano Superior

Sea $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario y sea $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ el semiplano. Sean las funciones,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{H} &\to \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{i-z}{i+z} \\ G : \mathbb{D} &\to \mathbb{H} \\ w &\mapsto i \cdot \frac{1-w}{1+w} \end{aligned}$$

Proposición 4.2. *La función $F : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ es biyectiva y holomorfa y su inversa G es holomorfa. En particular, $\mathbb{D}$ y $\mathbb{H}$ son coformamente equivalente.*

Dem. Notemos que la funcion F es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{-i\} \supset \mathbb{H}$ y notemos que para cada $z \in \mathbb{H}$ tenemos,

$$|i-z| < |-i-z|$$

Entonces $|F(z)| < 1$. Falta ver que es biyectiva y para ello basta ver que G envía a $\mathbb{H}$ y que $G \circ F = z, F \circ G = w$. **Terminar** ■

Ejemplo 4.1. Sea F como antes. Supongamos que podemos tomar $x \in \mathbb{R}$, veamos que pasa. Tenemos que,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{i-x}{i+x} \\ &= \frac{i-x}{i+x} \cdot \frac{i-x}{i-x} \\ &= \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Consideremos la parametrización $x = \tan\theta$ con $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, luego,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} + i\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \\ &= \cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta) \\ &= e^{i2\theta} \end{aligned}$$

Es decir, la recta real proyecta la circuferencia de radio 1.

Figura.

Lema 4.1. (De Schawrz) *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa y talque $f(0) = 0$. Entonces,*

(a) Para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $|f(z)| \leq |z|$.

(b) Si existe $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ talque $|f(z_0)| = |z_0|$, entonces f es una rotación. Es decir, existe $\theta \in \mathbb{R}$ talque,

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

(c) Se tiene que $|f'(0)| \leq 1$ y si $|f'(0)| = 1$, entonces f es una rotación.

Dem.

(a) Consideremos la función,

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z}$$

Claramente $z = 0$ es una singularidad, es más, es removible dado que,

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0) \in \mathbb{C}$$

Por lo que $f(z)/z$ se puede extender a todo $\mathbb{D}$ además de ser holomorfa. Probemos la desigualdad, tenemos que para todo $z \in (0, 1)$ si $|z| = 1$ entonces,

$$\frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{1}{r}$$

Si $1 > |z| > r$, entonces $1/|z| < 1/r$, por lo que,

$$\frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}$$

Juntando ambas desigualdad tenemos que para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ y para todo $r \in (0, 1)$ se tiene,

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}$$

Tomando $r \uparrow 1$ llegamos a que para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ se tiene que,

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$$

Si además, $|f(0)| \leq |0|$, entonces para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene,

$$|f(z)| \leq |z|$$

(b) Supongamos que $z_0 \neq 0$ talque $|f(z_0)| = |z_0|$. Entonces $f(z)/z$ alcanza su máximo en $\mathbb{D}$. Por tanto por el teorema del máximo $f(z)/z$ es constante y el módulo de $|f(z)|/|z|$ es 1 es decir,

$$|f(z)| = |z|$$

Y por lo que f es una rotación.

(c) Por (a) se tiene que $|f(z)| \leq |z|$, entonces para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ se tiene,

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$$

Esto implica que $|f'(0)| \leq 1$. Si $|f'(0)| = 1$ entonces $f(z)/z$ alcanza el máximo en $\mathbb{D}$ y entonces f es una rotación.

■

Estudiemos los automorfismos sobre el disco $\mathbb{D}$. Definimos el conjunto de los automorfismos en $\mathbb{D}$ por,

$$Aut(\mathbb{D}) := \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{D} : f \text{ biyectiva, holomorfa y con inversa holomorfa}\}$$

Este conjunto es un grupo. Para cada $\alpha \in \mathbb{D}$ definimos la función,

$$\psi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$
$$\psi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

Notemos que ψ_α está bien definida y es holomorfa. **Terminar.**

Otro tipos de funciones que están en los automorfismos de $\mathbb{D}$ son las rotaciones.

Observación 4.2. Para todo $\alpha \in \mathbb{D}$ se tiene que,

$$\psi_\alpha(0) = \alpha, \quad \psi_\alpha(\alpha) = 0$$

Teorema 4.1. *Sea $f \in Aut(\mathbb{D})$, entonces existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{D}$ tales que,*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$

Dem. Terminar.

5. Ayudantías

5.1. Ayudantía 1

P1. *Muestre que es imposible definir una orden total en $\mathbb{C}$, es decir, no existe una relación de orden $\prec$ en $\mathbb{C}$ talque*

(a) Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ una y solo de las siguientes es verdad $z \prec w, w \prec z, z = w$.

(b) Para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ la relación $z_1 \prec z_2$, implica $z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$.

(c) Para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, con $0 \prec z_3$, la relación $z_1 \prec z_2$ implica $z_1 z_3 \prec z_2 z_3$

Sol. Supongamos que $(\mathbb{C}, \prec)$ es un orden total. Supongamos que $0 \prec i$, entonces

$$0 \cdot i \prec i \cdot i \Longrightarrow 0 \prec -1$$

por la condición (c), ahora si tenemos dos caminos, el primero si aplicamos -1 ambos lado tenemos

$$0 \prec 1$$

Y el otro es sumar ambos lado 1, obteniendo

$$1 \prec 0$$

Es decie $1 \prec 0$ y $0 \prec 1$, pero esto es implosible por la condición (a). Por tanto $(\mathbb{C}, \prec)$ no puede ser un orden total.

P2. *Demuestre que si un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto, entonces Ω es conexo si y sólo si es conexo por caminos.*

Sol. Un conjunto es disconexo si y sólo si existen $U, V \neq \emptyset$ subconjuntos abiertos tales que son disjuntos y la unión genera al conjunto.

Supongamos que Ω es disconexo. Entonces existen $U, V \subseteq \Omega$ abiertos tales que

$$U \cup V = \Omega \ \text{ y } \ U \cap V = \emptyset$$

Como Ω es conexa por camino, si $u \in U, v \in V$, existe una curva continua $\gamma : [0,1] \to \Omega$ talque $\gamma(0) = u, \gamma(1) = v$. Como es continua, $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)$ son abiertos en $[0,1]$ tales que $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = [0,1]$ y $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \emptyset$. Es decir, $[0,1]$ es un conjunto disconexo, pero esto es imposible ya que $[0,1]$ no puede ser la unión de dos conjuntos abiertos al ser cerrado. Por lo tanto, Ω necesariamente es conexo.

Supongamos ahora que Ω es abierto conexo. Sea $w \in \Omega$ fijo, definimos Ω_1 como los $z \in \Omega$ talque existe $\gamma : [0,1] \to \Omega$ que une w con z, y sea Ω_2 los z tales que esto no pasa. Notemos que

$$\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$$

Y

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

Probemos que Ω_1 es abierto, sea $z \in \Omega_1 \subseteq \Omega$. Como Ω es abierto, entonces existe un $r > 0$ talque $B(z, r) \subseteq \Omega$. Si $x \in B(z, r)$, entonces $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ definida por:

$$\gamma(t) = tz + (1 - t)x$$

conecta a x y z, (podemos tomar una curva en virtud de que estamos en la métrica euclidiana). Como $z \in \Omega_1$ se tiene que existe una curva $\gamma_1 : [0, 1] \to \Omega$ talque

$$\gamma_1(0) = z, \quad \gamma_1(1) = w$$

Redefiniendo las curvas γ, γ_1, podemos generar la curva $\gamma' : [0, 1] \to \Omega$ talque

$$\gamma'(0) = x, \quad \gamma'(1) = w$$

Probando que $B(z, r) \subseteq \Omega_1$, de forma que Ω_1 es abierto.

Probemos ahora que Ω_2 es abierto. Sea $z \in \Omega_2$, luego existe $r > 0$ talque $B(z, r) \subseteq \Omega$, si $x \in B(z, r)$, entonces existe un camino por lo antes mencionado, si x tiene un camino hacía w, entonces z tiene camino a w siendo imposible, por lo que x no debe tener camino hacía w y por lo tanto $x \in \Omega_2$. De forma que Ω_2 es abierto.

Ahora, tenemos que Ω es la unión de disjunta de dos abiertos, pero al ser conexo, necesariamente uno debe ser vacío. En particular $\Omega_1 \neq \emptyset$ ya que podemos tomar la constante $\gamma(t) = w$. Por lo tanto Ω_2 y así Ω es conexo por camino.

P3. *Sea f holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Muestre que si se tiene una de las siguientes opciones:*

(a) $Re(f)$ es constante.

(b) $Im(f)$ es constante.

(c) $|f|$ es constante.

Entonces f es constante.

Sol.

(a) Supongamos que $f = c + iv$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial v}{\partial y}$$

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial v}{\partial y} = i\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Por lo tanto, f es constante.

(b) Es análogo a (a).

(c) Supongamos que $|f|^2 = u^2 + v^2 = c$. Entonces

$$0 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$0 = 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{y}$$

Multiplicando u en la primefa fila y v en la segunda, obtenemos

$$0 = u^2\frac{\partial u}{\partial x} + uv\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$0 = uv\frac{\partial u}{\partial y} + v^2\frac{\partial v}{\partial y}$$

Restando y usando Cauchy-Riemann, llegamos a que

$$0 = u^2\frac{\partial u}{\partial x} + v^2\frac{\partial v}{\partial x} = (u^2 + v^2)\frac{\partial u}{\partial x}$$

Entonces, o bien $u^2 + v^2 = 0$ o la derivada parcial de u sobre x es 0. Si ocurre lo primero, entonces f es constante, si ocurre lo segundo, entonces la parte real de f es constante luego f es constante.

P4.

(a) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $\overline{w}z \neq 1$. Muestre que si $|z| < 1$ y $|w| < 1$, entonces

$$\left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z}\right| < 1$$

y que si $|z| = 1$ o $|w| = 1$, entonces

$$\left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z}\right| = 1$$

(b) Sea $w \in \mathbb{D}$ fijo y $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por:

$$F(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}$$

Demuestre que F es holomorfa y biyectiva.

Sol.

(a) Notemos que

$$\left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z}\right| \iff |w - z| \leq |1 - \overline{w}z|$$

Elevando al cuadrado obtenemos que

$$(w-z)\overline{(w-z)} \leq (1-\overline{w}z)\overline{(1-\overline{w}z)} \iff |w|^2+|z|^2 \leq 1+|w|^2|z|^2$$
$$\iff |w|^2(1-|z|^2) \leq 1-|z|^2$$

De aquí obtenemos el resultado.

(b) Se define $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Notemos que F esta bien definido ya que si $|z| < 1$, entonces $|F(z)| < 1$, también notemos que $\overline{w}z \neq 1$, ya que si $\overline{w}z = 1$, entonces $|w||z| = 1$ y necesariamente un multiplicando es mayor que 1. Luego $\overline{w}z \neq 1$ como $w, z \in \mathbb{D}$.

Probemos que F es biyectiva, notemos lo siguiente

$$(F \circ F)(z) = \frac{w - \frac{w-z}{1-\overline{w}z}}{1-\overline{w}\frac{w-z}{1-\overline{w}z}} = \frac{\frac{w-|w|^2z-w+z}{1-\overline{w}z}}{\frac{1-\overline{w}z-\overline{w}w+\overline{w}z}{1-\overline{w}z}} = \frac{z-z|w|^2}{1-|w|^2} = z$$

Luego F es su propía inversar, es decir, F es biyectiva.

P5. *Sea $f = u + iv$ con $u, v \in C^2$. Muestre que*

$$4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} = \Delta f$$

Concluya que si f es holomorfa, entonces también armónica ($\Delta f \equiv 0$)

Sol. Notemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z}$$

Si f es holomorfa, entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

Luego

$$\Delta f = 0$$

Propuesto 1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $z \in \Omega$. La **componente conexa** de Ω que contiene a z, denotado por C_z, es el conjunto de todos los puntos $w \in \Omega$ tales que existe una curva en Ω que une a z y w.*

(a) Verifique que C_z es abierto y conexo. Luego demuestre que $w \in C_z$ define una relación de equivalencia, es decir, $z \in C_z, w \in C_z$ implica $z \in C_w$ y que si $w \in C_z, z \in C_\xi$, entonces $w \in C_\xi$.

(b) Muestre que Ω tiene a lo más una cantidad numerable de componentes conexas distintas. (Use que $\mathbb{C}$ tiene una base numerable en el sentido topológico, es decir, todo abierto en $\mathbb{C}$ se puede escribir como una unión numerable de las bolas abiertos).

(c) Pruebe que si Ω es el complemento de un conjunto compacto, entonces Ω solamente tiene una componente conexa no acotada. (Considere el complemente de la bola que contiene al conjunto compacto).

Sol.

(a) Probemos que C_z es abierto y conexo.

- **Abierto.** Sea, $w \in C_z \subseteq \Omega$, entonces existe un $r > 0$ talque $B(w,r) \subseteq \Omega$, sea $y \in B(w,r)$, bajo la métrica usual podemos definir la curva

$$\overline{\gamma} : [0,1] \to \Omega$$
$$\overline{\gamma}(t) := (1-t)w + ty$$

Claramente bien definida. Luego si y tiene un camino con w y este con z, entonces existe un camino/curva continua de y a z, por lo que $y \in C_z$ y por lo tanto $B(w,r) \subseteq C_z$, de forma que C_z es abierto.

- **Conexo.** Si $w, y \in C_z$, entonces hay un camino de w a z y de z a y, luego es claro que hay un camino de w a y, por lo tanto C_z es conexo por caminos y por lo tanto, conexo.

Ahora probemos la relación de equivalencia. Si $z \in C_z, w \in C_z$, entonces entre z y w hay claramente un camino, luego $z \in C_w$ por definición y si $w \in C_z, z \in C_\xi$, entonces hay un camino de w a z y de z a ξ, luego hay un camino de w a ξ, de forma que $w \in C_\xi$.

(b) **Definición**

Propuesto 2. *Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ abiertos. Muestre que si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ son diferenciables en el sentido real y $h = g \circ f$, entonces*

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} \quad y \quad \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}$$

5.2. Ayudantía 2

P1. *Muestre que si* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* $\mathbb{C}$ *de términos no nulos tales que,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L$$

Sol. Notemos que $|a_n| \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces definimos por convenio $b_n := |a_n|$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = L$$

entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Sea $\varepsilon > 0$ fijo ($\varepsilon < L$), podemos desarrollar el valor absoluto, de forma que si $n \geq N$, entonces

$$-\varepsilon + L < \frac{b_{n+1}}{b_n} < \varepsilon + L$$

En forma general

$$-\varepsilon + L < \frac{b_{n+k}}{b_{n+k-1}} < \varepsilon + L$$

Podemos multiplicar de la siguiente forma

$$(L-\varepsilon)^k < \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}} \cdots \frac{b_{n_0+k}}{b_{n_0+k-1}} < (L+\varepsilon)^k$$

Luego

$$(L-\varepsilon)^k < \frac{b_{n_0+k}}{b_{n_0}} < (L+\varepsilon)^k$$

Luego

$$(L-\varepsilon)^{k/n_0+k} < \left(\frac{b_{n_0+k}}{b_{n_0}} \right)^{1/n_0+k} < (L+\varepsilon)^{k/n_0+k}$$

Tomando $k \to \infty$, ocurre que

$$L - \varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} \leq L + \varepsilon$$

Esto se puede hacer para todo ε, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L$$

Observación. Esto implica podemos usar el criterio del cuociente para saber el radio y si converge una serie de potencias.

P2. *Muestre que para* $|z| < 1$ *se tiene,*

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2n}}{1-z^{2n}} + \cdots = \frac{z}{1-z}$$

Y

$$\frac{z}{1+z} + \frac{2z^2}{1+z^2} + \cdots + \frac{2^n z^{2n}}{1+z^{2n}} + \cdots = \frac{z}{1-z}$$

Sol.

La primera serie como sumatoria sería

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$$

Notemos que

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

Luego $|z^{2^{n+1}}| < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \left(\frac{1}{1-z^{2^{n+1}}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(z^{2^{n+1}}\right)^k \\
&= \sum_{n,k=0}^{\infty} z^{k2^{n+1}+2^n}
\end{aligned}$$

Reemplazadno k uno por uno podemos ver que:

$$(z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots) + (z^3 + z^6 + z^{12} + \dots) + (z^5 + z^{10} + \dots)$$

Nuestro problema es que no sabemos si se repite una potencia y si aparecen todas. Basta estudiar que para todo $j \in \mathbb{N}$ existe un único $k, n \geq 0$ talque $j = k2^{n+1} + 2^n = 2^n(2k+1)$. Y en efecto, en general si $j \in \mathbb{N}$ entonces podemos expresarlo como $j = 2^n \cdot l$ con $n = 0, 1, \dots$ para algún l natural. Es decir, n es único para cada j (pueden tener igual n pero el l es distinto), luego es fácil ver que existen únicos k, n talque $j = 2^n(1+2k)$. Probando así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

Aplicando el argumento anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-z^{2^n}\right)^k \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} (-1)^k 2^n z^{2^n(k+1)} \\ &= (z - z^2 + z^3 + \dots) + (2z^2 - 2z^4 + 2z^5 + \dots) + (4z^4 - 4z^8 + 4z^{12} + \dots)\end{aligned}$$

Veamos si es igual a la serie $1 + z + z^2 + \dots$.

Si $n = 0$, entonces z está elevado a algo impar, es decir, k es par.

Si $n \geq 1$, entonces $k + 1 = 2^m \cdot l$ donde l es impar. Luego

$$\begin{aligned}z^{2^n(k+1)} = z^{2^{n+m} \cdot l} &= 2^n z^{2^{n+m} \cdot l} - 2^{n-1} z^{2^{n+m} \cdot l} z^{2^{n+m} \cdot l}. \\ &= 2^n z^{2^{(n+m)+0} \cdot l} - 2^{n-1} z^{2^{(n-1+m)+1} \cdot l}\end{aligned}$$

P3. *Un conjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ está en progesión aritmética si,*

$$S = \{a, a+d, a+2d, \dots$$

Para algunos $a, d \in \mathbb{N}$. Muestre que no existe una colección finita de conjuntos en progresión aritmétcia S con diferentes a, d que particionen a $\mathbb{N}$.

Sol. Supongamos que existe una partición finita talque

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$$

donde $S_i = \{a_i, a_i + d_i, \dots\}$. Sea $|z| < 1$, luego

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} z^n &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{n \in S_i} z^n \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} z^{a_i + k d_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} z^{a_i} \sum_{k=0}^{\infty} (z^{d_i})^k \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{z^{a_i}}{1 - z^{d_i}} = \frac{z}{1-z}\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d_N = \max\{d_i : 1 \leq i \leq N\}$, definimos $z_0 = e^{\frac{2\pi i}{d_N}}$, claramente con módulo menor a 1, entonces $1 - z_0^{d_N} = 0$. Si $z \to z_0$, entonces

$$\frac{z}{1-z}$$

está acotada, pero

$$\frac{z^{a_N}}{1-z^{d_N}}$$

no está acotada cuando $z \to z_0$ dado que lo el numerador es acotado y el denominador se aleja del origen. Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{z^{a_i}}{1-z^{d_i}} \neq \frac{z}{1-z}$$

Siendo una contradicción. Esto implica que los naturales no pueden ser una partición finita de conjuntos en progesión aritmética.

P4. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva continuamente diferenciable. Demuestre que es rectificable y que,*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Sol. Recordemos la defínción de el largo de una curva,

$$L(\gamma) = \sup_{\text{particiones}} \sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$$

Sea $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ partición de $[a,b]$, si γ es continuo podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)dt$$

Luego

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|dt$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{N} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \int_a^b |\gamma'(t)|dt < \infty$$

Por lo que

$$L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|dt \leq \int_a^b \sup_{t\in[a,b]} |\gamma'(t)|dt = \sup_{t\in[a,b]} |\gamma'(t)|(b-a)$$

Por lo tanto, el largo es rectificable. Hemos probado una desigualdad, probemos la otra. Sea $\varepsilon > 0$ y $a \leq T \leq b$, definimos

$$\Omega_\varepsilon := \left\{ T_\star \in [a,b] : \int_a^T |\gamma'(t)|dt - \varepsilon(T-a) \leq L\left(\gamma_{[a,T]}\right), \text{ para todo } a \leq T \leq T_\star \right\}$$

Notemos que Ω_ε es cerrado en $[a,b]$ y $a \in \Omega_\varepsilon$, ahora si $T_\star < b$ y $T_\star \in \Omega_\varepsilon$, entonces existe $\delta > 0$ talque $[T_\star, T_\star + \delta] \subseteq [a,b]$ y se tiene

$$\left| \frac{\gamma(T) - \gamma(T_\star)}{T - T_\star} - \gamma'(T_\star) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Para todo $T \in [T_\star, T_\star + \delta]$. Esto último implica que

$$|\gamma(T) - \gamma(T_\star)| \geq \left| \gamma'(T_\star)(T - T_\star) - \frac{\varepsilon}{2}(T - T_\star) \right|$$

Y por la continuidad de $|\gamma|$ tenemos

$$\int_{T_\star}^T |\gamma'|dt \leq \left(|\gamma'(T_\star)| + \frac{\varepsilon}{2} \right)(T - T_\star)$$

para δ suficientemente pequeño. Sumando con la anterior desigualdad

$$L\left(\gamma|_{[T_\star,T]}\right) \geq (\gamma(T) - \gamma(T_\star)) \geq \int_{T_\star}^T |\gamma'|dt - \varepsilon(T - T_\star)$$

Observación. Si γ_1, γ_2 son curvas bien definidos, entonces

$$L(\gamma_1 + \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$$

La propiedad de Ω_ε se extiende a $[T_\star, T_\star + \delta]$, es decir, Ω_ε es también abierto, si era cerrado y no es vacío, entonces $\Omega_\varepsilon = [a,b]$.

Finalmente

$$L(\gamma|_{a,T}) \geq \int_a^T |\gamma'(t)|dt - \varepsilon(T-a)$$

se cumple para todo $[a,b]$, tomando $T = b$ y $\varepsilon \to 0$, concluimos que

$$L(\gamma) \geq \int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Probando la igualdad.

P5. *Demuestre que el largo es invariante bajo reparametrizaciones, es decir, si* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *y* $\gamma' : [c, d] \to \mathbb{C}$ *son continuas y existe un homemorfismo* $\varphi : [a, b] \to [c, d]$ *talque* $\gamma = \gamma' \circ \varphi$, *entonces* $L(\gamma) = L(\gamma')$

Sol. Probemos que φ es una función monótona estricta. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f(a) < f(b)$. Veamos que $f(b)$ es el máximo y $f(a)$ el mínimo, y en efecto, si hay un $f(x) > f(b)$, eso implica que si $f(a) < z < f(x)$, entonces existe un **Terminar...**

Supongamos que φ es creciente. Sea $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$, entonces al aplicar φ obtenemos el conjunto

$$\{\varphi(t_0), \ldots, \varphi(t_n)\} \subseteq [c, d]$$

Que son distintos entre si dado que φ es biyectiva. Notemos que $\varphi(t_0) = c, \varphi(t_n) = d$, luego tenemos una partición de $[c, d]$, y entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |\overline{\gamma}(\varphi(t_i)) - \overline{\gamma}(\varphi(t_{i-1}))| \leq l(\overline{\gamma})$$

Y esto se puede hacer para toda partición de $[a, b]$, luego $l(\gamma) \leq l(\overline{\gamma})$. Para la otra desigualdad se usar el mismo método. Por lo tanto, $l(\gamma) = l(\overline{\gamma})$.

5.3. Ayudantía 3

P1. *Muestre que si* $|a| < r < |b|$, *entonces*

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b}$$

donde γ *es el círculo centrado en el origen de radio* r *con orientación positiva.*

Sol.

- **Primera forma.** Notemos que,

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

Luego

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{1}{a-b}\left(\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz - \int_\gamma \frac{1}{z-b} dz\right)$$

Si tomamos $f(z) := \frac{1}{z-b}$, vemos que es holomorfo en todo $\mathbb{C} \setminus \{b\}$, pero lo que importa es que es holomorfo en el disco $D(0, r)$, luego tiene primitiva y entonces

$$\int_\gamma \frac{1}{z-b} dz = 0$$

Por otro lado, para $z \neq 0$ tenemos,

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}$$

Y si $\frac{|a|}{|z|} < \frac{r}{|z|} = 1$, entonces tiene expansión por serie de potencias, es decir

$$\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} dz$$

Además, la sumas son uniformemente convergente, por lo que podemos sacar la serie y también notemos que,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \ldots$$

Donde todos los términos, menos el $\frac{1}{z}$, tienen primitiva por definición. Por lo tanto

$$\frac{1}{a-b} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = \frac{1}{a-b} \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

Haciendo el cálculo usual se concluye que

$$\frac{2\pi i}{a-b} = \int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz$$

Segunda forma.

Figura. Sea $\gamma_1(t) = a + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, luego

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)} &= \int_{\gamma 1} \frac{dz}{(z-a)(z-a)} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{idt}{a-b+\varepsilon e^{it}}\end{aligned}$$

Cuando $\varepsilon \to 0$ entonces la integral resulta

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}$$

Tercera forma. Se define $f(z) = \frac{1}{z-b}$, holomorfa en todo $\mathbb{C} \setminus \{b\}$, notemos que está bien definida en el disco $D(0, r)$, luego para todo z en el disco se cumple

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Tomando $z = a$ se llega a que

$$f(a) = \frac{1}{a-b} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - a)(\zeta - b)}$$

Y por lo tanto,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}$$

P2. *Encuentre el valor de las siguientes integrables,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx$$

con $\xi \in \mathbb{R}$. *Y*

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

(a) Supongamos que $\xi > 0$, sea $f(z) = e^{-\pi\xi^2}$, consideremos el siguiente dibujo

Figura.

La curva γ_R es la que rodea al rectángulo. Como f es entera, entonces

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 0$$

Sea

$$I_R = \int_0^{\xi} f(R+iy)idy = \int_0^{\xi} e^{-\pi(R^2-2iRy-y^2)}idy$$

Veamos su valor, tenemos que

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq \int_0^{\xi} |e^{-\pi(R^2-2IRy-y^2)}|dy \\ &= \int_0^{\xi} |e^{-\pi(R^2-y^2)}|dy \\ &\leq \int_0^{\xi} |e^{-\pi R^2}|dy \\ &= \xi e^{-\pi R^2} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Veamos de $-R$ a R

$$\begin{aligned} \int_R^{-R} e^{-\pi(x+i\xi)^2}dx &= -e^{\pi\xi^2}\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}e^{2\pi i x\xi}dx \\ &= -e^{\pi\xi^2}\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2} \end{aligned}$$

Si

$$\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}dx = 1, \text{ (cuando } R\to\infty)$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}(...)dx = e^{-\pi\xi^2}$$

(b) Definimos la función

$$f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$$

Vamos a tomar el camino

Figura.

f es holomorfa en la región que cubre la curva. Por lo que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Luego

$$\left|\frac{1-e^{iz}}{z^2}\right| \leq \frac{2}{|z|^2}$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{2}{R^2}dz \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Consideremos la expansión de e, por lo que

$$f(z) = \frac{iz}{z^2} + E(z)$$

donde $E(z)$ acotado cuando z tiende a 0. Luego

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2}dz &= -\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{i}{z} + E(z)dz \\ &= -\int_0^\pi \left(\frac{i}{\varepsilon e^{it}} + E(z)\right) - \varepsilon i e^{-it}dt \\ &= -\int_0^\pi -(i^2)dt = -\pi\end{aligned}$$

$(E(z) \to 0)$. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \pi$$

Como $\frac{1-\cos x}{x^2}$ es par, entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

P3....

Supongamos que para todo $z \in D(z_0, \varepsilon)$ se tiene que $|f(z)| \leq M$. Al triangulo mayor, podemos generar triangulos muy pequeños, de forma que se generar un triangulo $\triangle$ donde z_0 está en el. Luego como f es holomorfa, en los trianuglos generados, menos en el $\triangle$, tiene integral 0, luego

$$\left|\int_T f(z)dz\right| = \left|\int_\triangle f(z)dz\right| \leq l(\triangle)M \leq 2\pi\varepsilon M \overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Por lo tanto

$$\int_T f(z)dz = 0$$

P4.

5.4. Ayudantía 4

P1.

Sol. Notemos que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^2}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma -\frac{f(-z)}{z^2}dz \end{aligned}$$

Para ver la segunda igualdad basta notar que si $g(z) = -f(-z)$, entonces $g'(0) = f'(0)$, concluyendo que,

$$2|f'(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{f(z)-f(-z)}{z^2}dz\right|$$

Tomamos $r \in (0,1)$ y $\gamma(t) = r\cdot e^{it}$. Luego

$$\begin{aligned} 2|f'(0)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{-it})-f(-re^{it})|}{r^2e^{2it}}ire^{it}dt|\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{it})-f(-re^{it})|}{|re^{it}|}dt \end{aligned}$$

Como $re^{it} \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2|f'(0)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d}{r}dt \\ &= \frac{d}{r} \end{aligned}$$

Podemos ver que

$$2|f'(0)| \le \frac{d}{r} \to d$$

P2.

Usaremos el primer problema, entonces por la identidad de la derivada de una función compleja, se tiene que

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}ds$$

Aplicar valor absoluto

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(0)\right| &\leq \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}dz \\
&< \frac{n!}{2\pi}\int_{|z|=r}\frac{1}{(1-|z|)|z^{n+1}|}dz \\
&= \frac{n!}{2\pi}\frac{1}{(1-r)r^{n+1}}2\pi r \\
&= \frac{n!}{(1-r)r^n}
\end{aligned}$$

Debemos encontrar el mínimo de $g(r) = \frac{n!}{(1-r)r^n}$, la derivada es

$$g'(r) = n!\left(\frac{-1}{(1-r)^2r^{2n}}(-r^n + (1-r)nr^{n-1})\right)$$

Esto se anula cuando $r^\star = \frac{n}{1+n} \in (0,1)$, veamos si es mínimo,

$$g''(r^\star) = \frac{(n+1)^{n+4}}{n^{n+1}} > 0$$

Por lo tanto es mínimo y es la mejor cota para $|f^{(n)}(0)|$.

P3.

Tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

Y queremos que a partir de algún n, la n-ésima derivada de f sea 0. Notemos que f es entera, se uede escribir como una serie de potencia centrada en 0 y de radio de convergencia $R = \infty$. En particular, f es holomorfa en $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ para todo $r > 0$. Fijando $r > 0$ tenemos que

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!\|f\|_{\mathbb{D}_r}}{r^n}$$

Por hipótesis se tiene que

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n}M|z|^{n_0}$$

Si $n > n_0$ y tomando $r \to 0$ obtenemos que para $n > n_0$ se tiene

$$f^{(n)}(0) = 0$$

Es decir,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n_0} c_k z^k$$

Por lo que f es un polinomio de grado a lo más n_0.

P4.

(a) Sea $|z| < R$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{Re^{it} - z} iRe^{it} dt \end{aligned}$$

—**Tesolver**

(b) Basta pasarlo a algo conveniente. Multiplicando por el conjugado del denominador.

5.5. I1

P1. *De un ejemplo de una función que cumpla la ecuaciones de Cauchy-Riemann en* 0*, pero no sea holomorfa en* 0*.*

Sol. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por,

$$f(z) = \sqrt{|x||y|}$$

donde $z = x + iy$. Veamos si cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0, y en efecto, notemos que $u(x, y) = f(x, y)$ y que $v(x, y) = 0$, y por definición,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathbb{R}}} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = 0$$

Luego es claro que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0)$$

De forma que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en 0, veamos que f no es holomorfa en 0, por definición,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{|h_1||h_2|}}{h_1 + ih_2}$$

Si ocurre que $h_1 = 2h_2$, entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h_2|}{h_2} \frac{\sqrt{2}}{(2+i)}$$

Si h_2 se acerca por abajo del origen, entonces el límite toma valor $-\frac{\sqrt{2}}{2+i}$, pero si h_2 se acerca por arriba, toma valor $\frac{\sqrt{2}}{2+i}$, es decir, dos límites distintos, por lo tanto tal límite no existe y por lo tanto f no es holomorfa en 0.

P2. *Sea f una función holomorfa sobre el disco abierto D_{R_0} centrado en cero y radio R_0. Sea $0 < R < R_0$ y $|z| < R$.*

(a) Sea C_R la circuferencia de centro 0 *y radio R (orientada en sentido positivo). Muestre que para $w = \frac{R^2}{\bar{z}}$,*

$$\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)} d\zeta = 0$$

(b) Muestre que,

$$Re\left(\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\right) = \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{it}-z|^2}$$

(c) Use las partes (a),(b) y la fórmula general de Cauchy para mostrar que,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})Re\left(\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\right)dt$$

Sol.

(a) Sabemos que f es holomorfa en D_{R_0} y que $D_R \subseteq D_{R_0}$, veamos que $(\zeta - w)$ es holomorfa en todo D_R. Notemos que si $\xi = w$ entonces

$$|\xi| = |w| \iff R = \frac{R^2}{|\overline{z}|} \iff |z| = |\overline{z}| = R$$

Es decir, $|z| = R$ y eso es imposible, luego w no está en en C_R, es más, si $|z| < R$ entonces

$$|w| > R$$

Por lo tanto $|w| \notin D_R$ y entonces $(\zeta - w)$ es holomorfa en todo el disco D_R, en conclusión

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)}$$

es holomorfa en D_R y por tanto tiene primitiva, luego como C_R es una curva continuamente diferenciable se tiene que,

$$\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)}d\zeta = 0$$

(b) Antes de calcular la parte real del complejo, recordemos que para todo $z, w \in \mathbb{C}$ se cumple que,

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\overline{w}, \quad Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}, \quad z\overline{z} = |z|^2$$

Luego, suponiendo que $Re^{it} - z \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z} &= \frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z} \cdot \frac{\overline{Re^{it}-z}}{\overline{Re^{it}-z}} \\
&= \frac{(Re^{it}+z)(R\overline{e^{it}}-\overline{z})}{|Re^{it}-z|^2} \\
&= \frac{R^2|e^{it}| - |z|^2 + R\overline{e^{it}}z - Re^{it}\overline{z}}{|Re^{it}-z|^2} \\
&= \frac{R^2 - |z|^2 + \overline{Re^{it}}z - \overline{\overline{Re^{it}}z}}{|Re^{it}-z|^2} \\
&= \frac{R^2 - |z|^2 + i2Im(\overline{Re^{it}}z)}{|Re^{it}-z|^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Re\left(\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\right)=\frac{R^2-|z|^2}{|Re^{it}-z|^2}$$

(c) Notemos que para todo $z\in D_R$ se cumple que,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta$$

Como,

$$\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-w)}d\zeta=0$$

entonces podemos restar 0 a $f(z)$ por la parte (a) y, obtenemos que,

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta-z)}-\frac{1}{(\zeta-w)}\right)d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}f(\zeta)\left(\frac{w-z}{(\zeta-z)(w-\zeta)}\right)d\zeta\end{aligned}$$

Tomando la curva $\gamma(t)=Re^{it}$ para $t\in[0,2\pi]$ que es continuamente diferenciable, entonces

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{it})\left(\frac{Re^{it}(R^2/\overline{z}-z)}{(Re^{it}-z)(R^2/\overline{z}-Re^{it})}\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(Re^{it})\left(\frac{e^{it}(R^2-|z^2|)}{\overline{z}(Re^{it}-z)(R/\overline{z}-e^{it})}\right)\end{aligned}$$

Probemos que,

$$\frac{e^{it}}{(R-\overline{z}e^{it})}=\frac{1}{(\overline{Re^{it}-z})}$$

Pero antes notemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{it}}&=\frac{1}{\cos(t)+i\operatorname{sen}(t)}\\&=\frac{\cos(t)-i\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)}\\&=\overline{e^{it}}\end{aligned}$$

Es decir, $\overline{e^{it}}=\frac{1}{e^{it}}$, luego,

$$\begin{aligned}\frac{e^{it}}{(R-\overline{z}e^{it})}&=\frac{1}{(R/e^{it}-\overline{z})}\\&=\frac{1}{(\overline{Re^{it}}-\overline{z})}\\&=\frac{1}{(\overline{Re^{it}-z})}\end{aligned}$$

Como queriamos probar. Reemplazando dentro de la integral obtenemos finalmente usando la parte (b), que,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\frac{R^2-|z|^2}{(Re^{it}-z)(\overline{Re^{it}-z})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})Re\left(\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\right) \end{aligned}$$

Como queriamos probar.

P3. *Sea $u:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ una funci´pn que es dos veces continuamente diferenciable y armónica, es decir, para todo $z=(x,y)$ en $\mathbb{D}$,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

(a) Muestre que la función,

$$g(z) := 2\frac{\partial u}{\partial z}$$

es holomorfa en $\mathbb{D}$.

(b) Pruebe que existe f holomorfa en $\mathbb{D}$ talque $Re(f)=u$.

Sol.

(a) Por definición,

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

Digamos que,

$$f_1(z) := \frac{\partial u}{\partial x}(z), \quad f_2(z) := -\frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

Son la parte real e imaginaria de g. Probemos que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y que además tienen derivadas parciales continuas. La función u se puede extender a los complejos, de forma que $u:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$, además al ser dos veces continuamente diferenciable, existen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(z)$$

para todo $z\in\mathbb{D}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned}$$

Como son continuas entonces g es holomorfa en todo $\mathbb{D}$.

(b) Si $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un disco, entonces tiene primitiva G de la forma

$$G(w) := \int_{\gamma_z} g(w)dw$$

con γ_z la curva que conecta 0 con $z \in \mathbb{D}$. Como es primitiva es holomorfa en $\mathbb{D}$ talque

$$G'(w) = g(w)$$

para todo $w \in \mathbb{D}$. Probemos que $Re(G) = u$. Supongamos que $G = U + iV$ donde U, V son la parte real e imaginaria respectívamente. Como G es holomorfa se tiene que,

$$\frac{\partial G}{\partial z}(z_0) = 2\frac{\partial U}{\partial z}(z_0) = G'(z_0)$$

Y si,

$$G'(z_0) = g(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0)$$

Entonces

$$\frac{\partial U}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial z}(z_0)$$

para todo $z_0 \in \mathbb{D}$. Ahora si u es su propia parte real y tiene parte imaginaria nulo, entonces u es holomorfa en todo $z \in \mathbb{D}$, entonces se cumple que

$$u'(z_0) = 2\frac{\partial u}{\partial z}$$

Lo mismo se puede concluir con U, además podemos ver que U tiene parte real con derivada continua, entonces

$$u'(z_0) = U'(z_0)$$

Luego $(u' - U')(z_0) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$u = U + C$$

para algún $C \in \mathbb{C}$. Tomando $C = 0$ se puede concluir que u puede ser la parte real de G y por lo tanto existe f holomorfa en $\mathbb{D}$ talque

$$Re(f) = u$$

5.6. Ayudantía 5

5.7. Ayudantía 6

P1. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera talque si $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) \in \mathbb{R}$. Muestre que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple,*

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z})$$

Sol. Sean $f_1(z) := \overline{f(z)}, f_2(z) = f(\overline{z})$, notemos que f_2 es entera, veamos que f_1 es también entera, si $f = u + iv$, entonces,

$$f_2 = u - iv$$

como f es entera, entonces u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es más, f al ser infinitamente diferenciable, u, v tiene derivadas parciales continuas, luego la parte real e imaginaria de f_2 satisfacen la ecuación de Cauchy-Riemann y además son continuas, luego f_1 es entera. Encontremos una sucesión convergente donde f_1, f_2 coinciden, sea $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ la sucesión que converge a $0 \in \mathbb{C}$, notemos que,

$$f_1(1/n) = f(\overline{1/n}) = f(1/n) = \overline{f(1/n)} = f_2(1/n)$$

como $1/n \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\overline{f(z)} = f(\overline{z})$$

P2. *Suponga que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica talque para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ al menos un coeficiente en la expansión,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

es igual a 0. Muestre que f es un polinomio.

Sol. Sea K un compacto talque contiene un abierto U. Sea $\{z_\alpha\}_{\alpha\in\alpha}$ una familia no numerable de puntos de K talque $f^{\{}(n)\}(z_\alpha) = 0$ para algún n. Si las derivadas de f son numerables, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $f^{(n_0)}(z_\alpha) = 0$ para infinitos α, sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión a partir de los infinitos α, como K es compacto existe una subsucesión convergente, digamos que,

$$z_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} z_0 \in K$$

Si $f^{(n_0)}(z_k) = 0$ entonces $f^{(n_0)}(z) = 0$ para todo $z \in K$, por tanto, $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $n \geq n_0$ y por tanto se tiene que,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n(z - z_0)^n$$

es decir, f es un polinomio.

P3. *Suponga que* $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ *es una función que no se anula, es continua en* $\overline{\mathbb{D}}$ *y holomorfa en* $\mathbb{D}$*. Pruebe que si* $|f(z)| = 1$ *para todo* $|z| = 1$*, entonces* f *es constante.*

Sol. Como $\overline{\mathbb{D}}$ es compacto y f es continua, entonces $|f|$ alcanza máximo y mínimo. Como f no se anula, entonces existe un $c > 0$ talque $|f(z)| \geq c$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Vamos a extender f para todo $\mathcal{C}$. Si $|z| > 1$ definimos,

$$\overline{f}(z) = \frac{1}{\overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}}$$

Si $|z| = 1$, entonces,

$$f(z) = \frac{1}{\overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}} = f(z)$$

ya que $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1$. Luego f con la extensión , está bien definida. Sea,

$$g = \begin{cases} f, & |z| \leq 1 \\ \overline{f}, & |z| > 1 \end{cases}$$

Veamos que la integral de g sobre un triangulo, es nulo. Si el triangulo está en el disco $\mathbb{D}$ estamos listo (visto en clases).

Figura.

Entonces, la integral sobre el triangulo T de g, es nula. Por lo tanto, g es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Veamos que g es acotado, claramente lo es si $|z| \leq 1$, si $|z| > 1$, y si $|f(z)| \geq c$, entonces,

$$|\overline{f}(z)| \leq \frac{1}{c}$$

para todo $|z| > 1$. Luego g que es constante y por tanto, f es constante.

P4. *Sea* $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n$ *para* $|z| < 1$*, donde* $d(n)$ *denota el número de divisores de* n*.*

(a) Verifique,

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

(b) Muestre que si $\theta = 2\pi p/q$ *con* $p, q \in \mathbb{Z}^+$ *y* $z = re^{i\theta}$*, entonces,*

$$|F(z)| \geq \frac{1}{1-r} \log(1/(1-r)) - \frac{1}{1-r} \log(q) - b_{p,q}$$

cuando $r \to 1$*, donde* $b_{p,q}$ *es una constante que depende de* p *y* q*.*

(c) Concluya que F *no tiene una extensión analítica fuea del disco unitario.*

Sol.

(a) Tenemos que,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} z^{mn} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{d|k} 1\right) z^k \\ &= \sum_{k=1} d(k) z^k\end{aligned}$$

(b)

5.8. Ayudantía 7

P1. *Suponga que f es holomorfa en $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ y supongamos que $|f(z)| \leq a|z - z_0|^{\varepsilon - 1}$ para algún $\varepsilon > 0$ y $a > 0$ constantes. Muestre que la singularidad en z_0 es removible.*

Sol. Tenemos cosa casos que estudiar, cuando $\varepsilon \geq 1$ y cuando $\varepsilon \in (0, 1)$.

- Supongamos que $\varepsilon \geq 1$, entonces para todo f en la vecindad pinchada tenemos que,

$$|f(z)| \leq a|z - z_0|^{\varepsilon - 1}$$

si $z \in D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, entonces es claro que,

$$|f(z)| \leq ar^{\varepsilon - 1}$$

Luego z_0 es una singularidad removible.

- Supongamos que $\varepsilon \in (0, 1)$, no sabemos que f es acotado en la vecindad pinchada por lo que veremos que existe una extensión de f en z_0. Notemos que,

$$|f(z)| \leq a|z - z_0|^{\varepsilon - 1} \iff |z - z_0||f(z_0)| \leq a|z - z_0|^{\varepsilon} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0$$

Luego,

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

Definimos la función,

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

para todo $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Por construcción g es holomorfa en toda la vecindad pinchada, veamos que también lo es en $z = z_0$, por definición tenemos,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

Luego g es holomorfa en toda la vecindad pinchada. Si $g(z_0) = 0$ entonces existe h talque,

$$g(z) = (z - z_0)^2 h(z)$$

donde h está definido en toda la vecindad de z_0 (puede tener un cero), luego tenemos que,

$$h(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = f(z)$$

Es decir, existe una extensión h de f donde está definida en z_0, por tanto z_0 es una vecindad removible.

P2. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Evalue la integral,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+1} dx$$

Sol. Sea la función $f(z) = \frac{1}{z^{2n}+1}$ definida en todo $\mathbb{C}$ menos en $2n$ puntos que son polos, consideremos el siguiente dibujo,

Figura.

con $R > 1$. Determinemos estos polos que están el en contorno de juguete, notemos que,

$$z^{2n} = e^{i\pi}$$

Luego las soluciones son,

$$z_k = e^{\frac{i\pi}{2n} + i\frac{2\pi}{2n}k} = e^{\frac{i\pi}{2n}(1+2k)}$$

con $k = 0, \ldots, 2n-1$. Por construcción hay n polos con parte imaginaria positiva y n polos con parte imaginaria negativa, notemos que los z_k con $k = 0, \ldots, n-1$ están arriba. Luego se tiene que,

$$\int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} Res_{z_k}(f)$$

Determinemos los residuos, notemos que los polos son simples, luego,

$$Res_{z_k} f = \lim_{z \to z_k} \frac{z - z_k}{z^{2n}+1} \xrightarrow{\text{L.h}} \lim_{z \to z_k} \frac{1}{2nz^{2n-1}} = \frac{1}{2ne^{\frac{i\pi(2n-1)}{2n}(1+2k)}}$$

Lugo,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} Res_{z_k}(f) &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\pi i(2k+1)/2n} \\
&= -\frac{1}{2n} \frac{e^{i\pi/2n}(1 - e^{\pi i})}{1 - e^{\pi i/n}} \\
&= -\frac{e^{\pi i/2n}}{n(1 - e^{\pi i/n})} \\
&= -\frac{1}{n(e^{-\pi i/2n} - e^{\pi i/2n})} \\
&= -\frac{i}{2n \operatorname{sen}(\pi/2n)}
\end{aligned}$$

Ahora si tenemos que C_R es generado a partir de dos curvas, podemos calcular por separado y obtener el resultado, notemos que,

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R}{|1 + R^{2n}e^{2nit}|} dt$$

Notar que,

$$|1 + R^{2n}e^{2nit}| = (1 + 2R^{2n}\cos(2nt) + R^{4n})^{1/2} \geq R^2$$

para R suficientemente grande, luego,

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \frac{R}{R^2}\pi \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Por tanto, tomando $R \to \infty$ se concluye que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n\,\mathrm{sen}(\pi/2n)}$$

P3. *Suponga que f es holomorfa en un abierto conteniendo el disco unitario cerrado, excepto por un polo un z_0 en el círculo unitario. Muestre que si,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0$$

Sol. Si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ salvo en el polo z_0, entonces f se puede escribir como,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + G(z)$$

con G holomorfa en el disco y donde $b_{-n} \neq 0$. Sean c_m los coeficientes de los z^m generados a partir de la parte principal y sean d_m los coeficientes generados a partir de $G(z)$, entonces por definición $a_m = c_m + d_m$, luego,

$$\frac{a_m}{a_{m+1}} = \frac{c_m + d_m}{c_{m+1} + d_{m+1}}$$

Como G es holomorfa,

P4. *Suponga que f es holomorfa en $0 < |z| < 2$ y satisface $f(1/n) = n^2, f(-1/n) = n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que f tiene una singularidad esencial en 0.*

Sol. Debemos probar que 0 no es ni removible ni polo. Notemos que cuando $n \to \infty$, entonces $|f(1/n)| \to \infty$, entonces 0 no puede ser removible. Ahora supongamos que 0 es polo, entonces existe un único m y una función h que no se anula en una vecindad holomorfa talque,

$$f(z) = z^{-m}h(z)$$

tomando $z = 1/n$ tenemos que,

$$f(1/n) = n^m h(1/n) = n^2$$

Luego $h(1/n) = n^{2-m}$, tomando $n \to \infty$ y como h está definido en 0 y $h(0) \neq 0$ se tiene que $m = 2$, tomando ahora $z = -1/n$ llegamos a que, $h(-1/n) = (-1)^m n^{3-m}$, tomando $n \to \infty$ se concluye que, $3 = m$, siendo imposible. Por tanto 0 no puede ser polo y de esta forma, 0 es singularidad esencial.

5.9. Ayudantía 8

P1. *Encuentre el valor de,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

Sol. Notemos que,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \\
&= \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} \right) \\
&= \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \\
&= -\frac{7}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}
\end{aligned}$$

Por tanto, solo es necesario calcular la serie $\sum \frac{1}{n^4}$. Consideremos la función $f(z) = \frac{\cot(z)}{z^4}$ que es una función holomorfa menos en $z = 0$ y en $z = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, que además son polos. Determinemos los residuos, notemos todos los polos son simples menos $z = 0$ que es un polo de orden 5 luego para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) \frac{\cot(z)}{z^4} = \frac{(-1)^n}{n^4 \pi^4} \lim_{z \to n\pi} \frac{(z - n\pi)}{(-1)^n \operatorname{sen}(z - n\pi)} \\
= \frac{1}{n^4 \pi^4}
\end{aligned}$$

Determinmos cuando $z = 0$, por definición,

$$\begin{aligned}
Res_0 f &= \lim_{z \to 0} \frac{1}{4!} \frac{d^4}{dz^4} z^5 f(z) \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{d^4}{dz^4} z \cot(z) \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{1}{4!} = -\frac{8}{360} = -\frac{1}{45}
\end{aligned}$$

Ahora usaremos un contorno de juguete, sea γ_N la curva dada por la siguiente figura,

Figura.

Podemos ver que esta curva no pasa por ningún polo y están contenido los polos $z = n\pi$ con $n = -N, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, N$. Luego por el teorema del residuo general tenemos que,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_N} f(z) dz = -\frac{1}{45} + \frac{2}{\pi^4} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^4}$$

Vamos a probar que la integral de linea sobre γ_N se anula cuando $N \to \infty$. Notemos que,

$$|\cot(z)| = \left|\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1}\right|$$

Tomando la curva $\gamma_N(t) = t + i(N+1/2)\pi$ se obtiene,

$$|\cot(t+i(N+1/2)\pi)| \leq \frac{1+e^{-3\imath}}{1-e^{-3\pi}} < 2$$

P2. *Muestre que toda función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entera e inyectiva es de la forma $f(z) = a + bz$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $b \neq 0$.*

P3. *Sea Ω un abierto talque $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa y no constante.*

(a) Muestre que si $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$, entonces la imagen de f contiene el disco unitario.

(b) Muestre que si $|f(z)| \geq 1$ cuando $|z| = 1$ y existe un punto $z_0 \in \mathbb{D}$ talque $|f(z_0)| < 1$. Entonces la imagen de f contiene al disco unitario.

(c) Muestre que si $|f(z)| < 1$ cuando $|z| = 1$, entonces f tiene un único punto fijo en $\mathbb{D}$.

Propuesto 1. *De manera similar al primer ejercicio, demuestre que,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Propuesto 2. *Sea Ω abierto y suponga que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función armónica no cosntante. Muestre que u no alcanza su máximo en Ω. Es más, si $\overline{\omega}$ es compacto y u es continua en $\overline{\Omega}$, entonces,*

$$\sup_{z\in\Omega}|u(z)| = \sup_{z\in\partial\Omega}|u(z)|$$

Hint. *Asuma que en z_0 la función u alcanza un máximo local y tome f holomorfa cerda de z_0 talque $Re(f) = u$, luego muestre que f no es abierta.*

5.10. Ayudantía 9

P1. *Calcule el número de raíces del polinomio* $p(z) = z^5 - 6z^2 + 3z + 1$ *en* $1 < |z| < 2$.

Sol. Definimos $g(z) = z^5$ y $h(z) = -6z^2 + 3z + 1$, funciones que son enteras. Vamos a usar el teorema de Rouché en el disco unitaro y en el disco $\mathbb{B}(2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. En el borde del disco unitario se tiene que,

$$|g(z)| = |z|^5 = 1 < 2 = 6 - 3 - 1 \leq 6|z|^2 - |3z + 1| \leq |6z^2 - 3z + 1| = |h(z)|$$

Luego por el teorema de Rouché se tiene que h y $h + g$ tienen lo mismos ceros en el interior del círculo. Determinemos los ceros de h en el disco unitario, como tenemos una cuadrática, se tiene que,

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{12}$$

Si $\sqrt{33} \sim 5{,}5$, entonces es claro que $z_{1,2} \in \mathbb{D}$, luego h tiene dos ceros y por tanto, $h + g$ también. Ahora en el borde del disco de centro 0 y radio 2 se tiene que,

$$|h(z)| \leq 6 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 = 31 < 32 = |g(z)|$$

Entonces g y $g + h$ tienen los mismos ceros en el interior de la circuferencia, si g tiene un cero de multiplicidad 5, entonces $g + h$ tiene 5 ceros (contando las multiplicidades), por tanto, cuando $1 \leq |z| < 2$ se tiene que $g + h = p$ tiene $5 - 2$ ceros, veamos que pasa cuando un cero cumple que $|z| = 1$, en tal caso se tiene que,

$$0 = |z^5 - 6z^2 + 3z + 1| \geq |z|^5 - |6z^2 - 3z - 1| \Longleftrightarrow |h(z)| \geq |g(z)|$$

Por lo anterior sabemos que la desigualdad es estricta, luego no puede pasar que $|z| = 1$. Por tanto, en $1 < |z| < 2$ hay solamente 3 ceros.

P2. *Muestre que,*

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2 - z^2}$$

Sol. Tomamos $z \in \mathbb{C}$ arbitrario talque $z \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, tomemos,

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta(\zeta - z)\operatorname{sen}(\zeta)}$$

f tiene un polo doble en $\zeta = 0$ y polo simples en $\zeta = n\pi, \zeta = z$. Tomemos δ_n el camino circular centrado en 0 con irentación positiva y de radio $\pi n + \frac{1}{2}$, luego,

$$\int_{\gamma_n} f(z)dz = 2\pi i \left(\sum_{k=-n}^{n} Res_{k\pi}(f) + Res_z(f) \right)$$

para n suficientemente grande talque $|z| < |\gamma_n(t)|$, determinemos la integral,

$$\left|\int_{\gamma_n} f(z)dz\right| \leq \frac{2\pi(n+1)\sup|f|}{2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Estudiemos los residuos, para z se tiene,

$$Res_z(f) = \lim_{\zeta\to z} \frac{\zeta - z}{\zeta(\zeta - z)\operatorname{sen}(\zeta)} = \frac{1}{z\operatorname{sen}(z)}$$

Estudiemos para $k\pi \neq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} Res_{k\pi}(f) &= \lim_{\zeta\to k} \frac{\zeta - k\pi}{\zeta(\zeta - z)\operatorname{sen}(\zeta)} \\ &= \frac{1}{k\pi(k\pi - z)} \lim_{\zeta\to k\pi} \frac{\zeta - k\pi}{(-1)^k \operatorname{sen}(\zeta - k\pi)} \\ &= \frac{(-1)^k}{k\pi(k\pi - z)} \end{aligned}$$

Por último, cuando $k = 0$ que tiene orden 2, luego,

$$\begin{aligned} Res_0(f) &= \lim_{\zeta\to 0} \frac{d}{d\zeta} z^2 f(z) \\ &= -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$0 = \frac{1}{z\operatorname{sen}(z)} - \frac{1}{z^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2 - z^2}$$

P3. *Sea f una función meromorfa en un abierto que contiene a $\overline{\mathbb{D}}$ y $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ el camino que recorre $\partial\mathbb{D}$. Suponga que $f \neq 0$ en $\partial\mathbb{D}$ y cumple,*

$$\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$$

para toda función holomorfa g en $\overline{\mathbb{D}}$. Muestre que f no tiene polos ni ceros en $\mathbb{D}$.

Sol. Supongamos que en $\mathbb{D}$ f tiene ceros y/o polos, digamos que $P = \{z_1, \dots\}, Q = \{w_1, \dots\} \subseteq \mathbb{D}$ son los polos y ceros respectívamente de f, en particular, P, Q son finitos ya que si fueran infinitos entonces como $P, Q \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, entonces existe un punto de acumulación donde está definido f, para P sería imposible por definición de meromorfa y para Q se tendria una sucesión convergente en $\mathbb{D}$ (usando cosntrucciones convenientes se observa) donde f se anula, luego $f = 0$ en $\mathbb{D}$ siendo también imposible. Por tanto, P, Q son finitos, digamos que $P = \{z_1, \dots, z_m\}$ y $Q = \{w_1, \dots, w_m\}$. Sabemos que si z_1 es un polo entonces en una vecindad de z_1 se tiene que,

$$f(z) = (z - z_1)^{-a} g(z)$$

donde g no se anula en la vecindad, luego se deduce que,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-a}{z - z_1} + G(z)$$

donde G es holomorfa en la vecindad. Esto se puede para todo z_k y para w_k ocurre que,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{b}{z - w_k} + G_1(z)$$

para una vecindad de w_k. Ahora usando discos covenientes podemos concluir que,

$$\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_{i_\varepsilon}} \frac{p_i g(z)}{z - z_i}dz - \sum_{j=1}^{m}\int_{\gamma_{j_\varepsilon}} \frac{q_j g(z)}{z - w_j}dz + \int_{algo} g(z)G_{algo}(z)dz$$

donde la integral lineal sobre algo es nulo ya que gG_{algo} es holomorfo de forma en una vecindad/disco y luego tiene primitiva. Ahora notemos lo siguiente, para la curva γ_{i_ε} tomamos la parametrización,

$$\gamma_{i_\varepsilon} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma_{i_\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{it} + z_i$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{i_\varepsilon}} \frac{g(z)}{z - z_i}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{g(\varepsilon e^{it} + z_i)i\varepsilon e^{it}}{\varepsilon e^{it}}dt \\ &= i\int_0^{2\pi} g(\varepsilon e^{it} + z_i)dt\end{aligned}$$

Si la curva es continua, entonces g está definido en un conjunto compacto y luego es uniformemente continua, esto implica que convergencia uniforme con respecto a $\varepsilon > 0$, por tanto,

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_0^{2\pi} g(\varepsilon e^{it} + z_i)dt = i\int_0^{2\pi} g(z_i)dt = 2\pi i g(z_i)$$

Por tanto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que,

$$\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2\pi i\left(\sum_{i=1}^{n} p_i g(z_i) - \sum_{j=1}^{m} q_j g(w_j)\right)$$

Por hipótesis se tiene que para toda función g holomrfa se cumple,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g(z_i) = \sum_{j=1}^{m} q_j g(w_j)$$

Si P no es vacío podemos tomar g talque se anula en todo $z_1, \ldots, z_{n-1}$ pero no en z_n, si Q es vacío entonces,

$$p_n g(z_n) = 0$$

luego $p_n = 0$ siendo contradicción. Lo mismo si se asume Q no vacío, de cualquier forma se concluye que P, Q son vacíos o en otras palabras, f no tiene ni polos ni ceros en $\mathbb{D}$.

P4. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω que contiene a $\overline{\mathbb{D}}$ talque $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos de Ω y f no es la función nula. Suponga que $f \neq 0$ sobre $\partial\mathbb{D}$. Muestre que para n suficientemente grande, f_n y f tienen la misma cantidad de ceros contando multiplicidad.*

Sol. Si $f_n, f : \Omega \to \mathbb{C}$ y f_n converge uniformemente a f sobre compactos, entonces f es una función holomorfa. Notemos que $\overline{\mathbb{D}}$ es compacto, luego para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ talque,

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq N$ y para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Ahora si f es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, entonces alcanza su mínimo que no es nulo por hipótesis, digamos que para $\delta > 0$ se cumple,

$$|f(z)| \geq \delta > 0$$

para todo $z \in \partial\mathbb{D}$. Ahora para tal $\delta > 0$ existe un $N' \in \mathbb{N}$ talque,

$$|f_n(z) - f(z)| < \delta \leq |f(z)|$$

para todo $z \in \partial\mathbb{D}$, luego por el teorema de Rouché se tiene que f, f_n tienen la misma cantidad (contando la multiplicidad) de ceros en el interior del disco unitario.

P5. *Muestre que no existe una función holomorfa f en $\mathbb{D}$ talque se extiende continuamente a $\partial\mathbb{D}$ y $f(z) = 1/z$ en $\partial\mathbb{D}$*

Sol. Supongamos existe tal función con extensión F holomorfa a $\overline{\mathbb{D}}$ talque $F(z) = 1/z$ en $\partial\mathbb{D}$, entonces ocurre lo siguiente,

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0$$

donde γ_ε es la circuferencia contenida en el disco unitario donde está a una distancia $\varepsilon > 0$ de esta. Sabemos que se anula la integral ya que f es holomorfa en un disco y luego tiene primitva ahora notemos lo siguiente,

$$\int_{C:=\partial\mathbb{D}} F(z)dz = \int_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i$$

Y si F está definido en un compacto, entonces es uniformemente continua, por lo tanto,

$$2\pi i = \int_C F(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \underbrace{f(z)}_{=F(z)} dz = 0$$

Llegando a una contradicción, por lo que tal función no existe.

5.11. Ayudantía 10

6. Problemas/Solución

P2. Sean $z = x_1 + iy_1, w = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$(z, w) + (w, z) = (z, w) + \overline{(z, w)} = 2Re(z, w)$$

Luego

$$\langle z, w\rangle = Re(z, w) = \frac{(z, w) + (w, z)}{2}$$

P3. Sea $w = se^{i\varphi}$, donde $s \geq 0$, tenemos una ecuación de orden n por lo que por el teorema fundamental del álgebra, se tiene que hay n soluciones complejas, si

$$se^{i\varphi} = \left(\sqrt[n]{s}e^{(i\varphi+2\pi)/n}\right)^n$$

Entonces podemos intuir que la soluciones son

$$z_j = \sqrt[n]{s}e^{(i\varphi+2\pi j)/n}$$

Con $j = 1, \ldots, n$, y en efecto, notemos

$$(z_j)^n = se^{i\varphi+2\pi j} = s^{i\varphi} = z^n$$

Ahora veamos si son distintas, si $j \neq l$ entonces $2\pi i \neq 2\pi l$, y esto implica que los ángulos $i\varphi + 2\pi j, i\varphi + 2\pi l$ son distintos y por lo tanto, al elevarlo a e, se genera dos complejos de distintos ángulos y por tanto, son distinto. Determinando que tiene n soluciones.

P1.4. Supongamos que $\mathbb{C}$ es ordenado por $\preceq$, vemos si $i \preceq 0$ es posible, por tricotomía se tiene que o bien $i \preceq 0$, o bien $0 \preceq i$ (ya que $i \neq 0$). Supongamos que $i \preceq 0$, entonces para todo $z = z_1 + iz_2, w = w_1 + iw_2 \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$zi \preceq 0$$

tomando

P1.7. Los mapas introducidos en la sección 1 tienen un rol importante. Estos mapas de vez en cuando son llamados factores de Blashke.

1.
2. - El disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, si $z, w \in \mathbb{D}$, entonces por (a) tenemos que

   $$|F(z)| = \left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z}\right| = \left|\frac{w - z}{1 - \overline{w}z} - 0\right| < 1$$

   Es decir $F(z) \in \mathbb{D}$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Veamos que es holomorfa en $\mathbb{D}$. Por definición

   $$\begin{aligned}
   \lim_{h\to 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{w-z-h}{1-\overline{w}(w+h)} - \frac{w-z}{1-\overline{w}z}}{h} \\
   &= \lim_{h\to 0} \frac{|w|^2h - h}{(1 - \overline{w}z)(1 - \overline{w}(z + h))h} \\
   &= \lim_{h\to 0} \frac{|w^2| - 1}{(1 - \overline{w}z)(1 - \overline{w}(z + h))} = \frac{|w|^2 - 1}{(1 - \overline{w}z)^2}
   \end{aligned}$$

   Entonces F es diferenciable donde $\overline{w}z \neq 1$. Siendo holomorfa.

- Si $z = 0$, entonces

$$F(0) = \frac{w}{1} = 2$$

Y si evaluamos en w

$$F(w) = \frac{w - w}{1 - |w|^2} = 0$$

- Digamos que $|z| = 1$, entonces por la parte (a)

$$|F(z)| = 1$$

- Estudiemos $F \circ F$, por definición

$$(F \circ F)(z) = \frac{w - \frac{w-z}{1-\overline{w}z}}{1 - \overline{w}\frac{w-z}{1-\overline{w}z}} = \frac{\frac{w-|w|^2z-w+z}{1-\overline{w}z}}{\frac{1-\overline{w}z-\overline{w}w+\overline{w}z}{1-\overline{w}z}} = \frac{z - z|w|^2}{1 - |w|^2} = z$$

Como $(1 - |w|^2 \neq 0)$. Por lo tanto F es inyectiva y sobreyectiva, de forma que es biyectiva.

P1.9. Recordemos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann de una función holomorfa son

$$\frac{\partial u}{x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinada por $f(z) = u(z) + iv(z)$. Recordemos que tod complejo tiene una forma porlar, sea $z = re^{i\theta}$ donde r es el módulo de z y $\theta \in (-\pi, \pi)$ el ángulo de z. Podemos notar que la función logaritmica complea se puede separar como

$$\log z = \log r + i\theta$$

y que además es holomorfa donde $r > 0, \theta \in (-\pi, \pi)$, y en efecto, por definición

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(z + h) - \log(z)}{h}$$

tomando $z = re^{i\theta}$ fijo y $h = r_h e^{i\phi}$, donde $r_h \to 0$ y ϕ es un ángulo fijo, luego

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log}{}$$

P1.14. (Sumatoria por partes) De la igualdad de la derecha llegaremos a la izquierda. Notemos que

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N} a_n B_n - a_n B_{n-1} \\
&= \sum_{n=M}^{N} (a_n - a_{n+1}) B_n + \sum_{n=M}^{N} a_{n+1} B_n - a_n B_{n-1} \\
&= \sum_{n=M}^{N} (a_n - a_{n+1}) B_n + a_{N+1} B_N - a_M B_{M-1} \\
&= a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N} (a_{n+1} - a_n) B_n
\end{aligned}$$

Observación. (Teorema de Abel) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, entonces cuando tomamos $r < 1$ talque $r \to 1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Dado por la sumatoria por partes. Es decir, que multiplica por algo menor a 1, r^n, entonces no afecta al valor de la serie como tal.

P1.16.

(a) Si $a_n = (\log(n))^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log^2(n)} &= \lim_{n\to\infty} e^{\log(\log(n))\frac{2}{n}} \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

Luego el radio es $R = 1$.

(b) Si $a_n = n!$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1)+\cdots+\log(n)}{n}}$$

Si $z_n \to \infty$, entonces

$$\frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

Entonces $R = 0$, es decir, la serie solo converge cuando $z = 0$.

(c) Usaremos el criterio del cuociente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(4^n+3n)}{n^2(4^{n+1}+3n+3)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{R}$$

Luego $R = 4$ es el radio de convergencia.

(d) Usando el criterio de división obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!^3(3n)!}{(3n+3)!n!} = \frac{1}{27}$$

P1.19.

(a) El radio de convergencia es R, entonces converge cuando $|z| < 1$, si $|z| = 1$ digamos que $z = 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$$

Como sabemos. Luego no converge en el circulo unitario.

(b) Tenemos que converge cuando $|z| < 1$, si $|z| = 1$ ocurre lo siguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Entonces cuando $|z| = 1$, la serie converge absolutamente, luego converge en todo punto del disco unitario.

(c) Claramente el radio es $R = 1$, luego la serie converge para todo $|z| < 1$

P1.25.

(a) Sea $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, entonces z^n tiene primitiva en $\mathbb{C}$ o en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dependiendo de n , el cual es $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, si γ es la curva de un círculo, entonces no pasa por 0, luego está bien definido la integral, si $\gamma(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ una curva C^1, entonces

$$\int_\gamma z^n dz = 0$$

Al ser una curva cerrada. Veamos cuando $n = -1$, en este caso $1/z$ no necesariamente tiene primitiva, pero es continua en el circulo, entonces

$$\int_\gamma z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt = 2\pi i$$

(b) Sea γ la curva de un circulo que no contiene a 0, digamos que $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ donde R es talque, $0 \notin D(z_0, R)$. Luego para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, z^n tiene primitiva en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o en $\mathbb{C}$, entonces

$$\int_\gamma z^n dz = 0$$

Es decir, no cambia. Veamos cuando $n = -1$.