



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

PONTIFICADA UNIVERSIDAD CATÓLICA

MAT1136

Cálculo III

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. El espacio \mathbb{R}^n	2
1.1. ¿Qué es el Cálculo?	2
1.2. Topología en \mathbb{R}^n	3
1.3. Clausura de un Conjunto	12
1.4. Límite y Sucesiones en \mathbb{R}^n	13
2. Funciones en Varias Variables y Otros	23
2.1. Límites y Continuidad de funciones	27
2.2. Derivadas Parciales y Direccionales	41
2.3. Curvas en \mathbb{R}^n	46
2.4. La regla de la cadena I	52
2.4.1. Aplicaciones	54
3. Diferenciabilidad	58
4. Funciones de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n	68
4.1. Continuidad y Diferenciabilidad	71
4.2. Regla de la Cadena II	75
4.3. Función Inversa	79
4.4. Función Implícita	86
5. Integrales Múltiples	89
5.1. Motivación	89
5.2. El paso a mayores dimensiones	95
5.3. Cambio de Variable	106
5.3.1. Pequeña motivación	106
5.3.2. Cambio de Variable	106
5.3.3. Coordenadas esféricas	111
5.3.4. Coordenadas cilíndricas	113
5.4. Curvas en \mathbb{R}^n II	115
5.4.1. Parametrización de curvas	117
6. Campos Vectoriales, Integrales de Línea y de Superficie	120
6.1. Campos vectoriales	120
6.2. Integrales de Línea y propiedades de campos	122
6.2.1. Conjuntos arco-conexos y simplemente conexos	132
6.3. Teorema de Green	137

1. El espacio \mathbb{R}^n

1.1. ¿Qué es el Cálculo?

Es importante entender que el cálculo es una rama de las matemática que influyen en todo, física, análisis, probabilidades, entre otros. La importancia de su estudio es que ayuda a entender de mejor manera la realidad. ¿De dónde proviene?, todo parte de los reales si tener en claro que son los reales, se dieron cuenta que pueden construir los reales partiendo de los naturales y considerando ciertos axiomas.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Considerando estas inclusiones vemos como cada conjunto mayor arregla un problema que presenta el conjunto anterior, por ejemplo, los naturales no tienen inverso aditivo, por lo que los enteros arreglan este problema, pero los enteros también tiene un problema, no tienen inverso multiplicativo, por lo que los racionales lo arregla. Pero aun falta algo, y ese algo es que existen número irracionales y además, si tomamos cualquier sucesión racional convergente", puede ocurrir que no converga en \mathbb{Q} , por ello para solucionar esto se toma los reales como una construcción que satisface esta condición. En particular los reales satisfacen la complitud, es decir, satisfacen el criterio de cauchy. Es decir, una sucesión real converge si y sólo si es de cauchy. Cosa que el resto de conjuntos mencionados no cumple. Dicho esto, se va a expandir de \mathbb{R} a \mathbb{R}^n , pasando por todas las nociones de cálculo, las cuales consisten en continuidad, diferenciabilidad, integrales, ect. Para ello entendamos mejor \mathbb{R}^n

Definición 1. Se define el espacio \mathbb{R}^n por

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$$

Además, es importante entender que en \mathbb{R}^n existe una función distancia, que será muy útil para el paso multidimensional.

Definición 2. Se define la función distancia $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$

Nota. En algunas ocasiones se usará \vec{x} para representar (x_1, \dots, x_n) .

Propiedad 1. La función distancia satisface las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$

3. $d(x, y) = d(y, x)$

4. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que para todo $z \in \mathbb{R}^n$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Dem. 1. Es directa por definición de distrancia.

2. \Leftarrow) Es directo

\Rightarrow Si $d(x, y) = 0$, entonces

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = 0$$

Luego necesariamente $(x_i - y_i)^2 = 0$ lo que implica que $x_i = y_i$, de esta forma $x = y$

3. Basta con aplica la definción de distancia

4. Notemos que para todo $z \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ si y sólo si

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \cdots + (z_n - y_n)^2 + 2d(x, z)d(z, y)$$

Manipulando la parte izquierda tenemos entonces

$$2(x_1 - z_1)(z_1 - y_1) + \cdots + 2(x_n - z_n)(z_n - y_n) \leq 2d(x, z)d(z, y)$$

Notemos que la parte izquierda es

$$\begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ \vdots \\ x_n - z_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 - y_1 \\ \vdots \\ z_n - y_n \end{pmatrix}$$

Luego por la desigualdad Cauchy-Schwarz tenemos que la parte izquierda es menor o igual a $d(x, z)d(z, y)$. Probando así la desigualdad triangular.

Observación. Podemos definir el par (\mathbb{R}^n, d) como un espacio métrico. donde d satisface las propiedades de distancia, no necesariamente d es la distancia definida con anterioridad.

1.2. Topología en \mathbb{R}^n

Para dar el paso de contuinuidad, derivada ,etc. A \mathbb{R}^n , debemos estudiar el concepto de conjunto abierto.,

Definición 3. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Se define $B(x, r)$ como la n -bola abierta de centro x y radio r por

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

Convenio. Cuando se habla de bola, nos vamos a referir a una bola abierta.

Definición 4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es abierto si para todo $x \in A$, existe un $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq A$

Es decir, si A es abierto, entonces podemos generar bolas en cada punto.

Lema 1. Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Entonces $B(x, r)$ es abierta.

Dem. Queremos probar que, dado un $y \in B(x, r)$, existe $r_y > 0$ talque $B(y, r_y) \subseteq B(x, r)$. Para ello consideremos $r_y = r - d$, donde $d = d(x, y)$, entonces, sea $w \in B(y, r_y)$, luego

$$d(w, y) < r_y = r - d$$

moviendo d y aplicando la desigualdad triangular obtenemos que

$$d(w, x) \leq d(w, y) + d(x, y) < r$$

Entonces $d(w, x) < r$. Por tanto $w \in B(x, r)$. ■

Lema 2. Sea $(A_i)_{i \in I}$ una colección de conjuntos abiertos. Entonces

$$\bigcup_{i \in I} A_i \text{ es abierto.}$$

El lema nos dice que podemos aplicar una cantidad finita o infinita de uniones de conjuntos abiertos, de modo que la unión resultante es abierto. Esto es útil para construir conjuntos y verificar que son abiertos.

Ejemplo. Sean A_1, \dots, A_n abiertos, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es abierto.

Dem.(Lema) Queremos probar que todo punto de $\bigcup A_i$ genera una bola de forma que está incluida en al unión, es decir, existe un $r = r(x) > 0$ talque $B(x, r) \subseteq \bigcup A_i$. Para ello consideremos $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces, para algún $\lambda \in I$, se tiene que $x \in A_\lambda$ y dado que todo A_i es abierto, tenemos que existe un $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq A_\lambda \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Por tanto

$$B(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \quad \blacksquare$$

Lema 3. Sean A_1, \dots, A_n conjuntos abiertos, entonces

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \text{ es abierto.}$$

Nota. Este lema tiene una gran diferencia con el anterior lema y esta es que la unión toma tanto infinitos como finitos, mientras que la intersección de abiertos se necesitan que sean finitos. Esto significa que si hacemos infinitas intersecciones, es posible que el resultado no sea un conjunto abierto. Por ejemplo, sea $A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$$

que evidentemente es un conjunto no abierto.

Dem. (Lema) Queremos probar que para todo x dentro de $\bigcap A_i$, existe un $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq \bigcap A_i$.

Consideremos $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, entonces $x \in A_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, luego, como A_i es abierto, existen $r_i > 0$ tales que $B(x, r_i) \subseteq A_i$. Definimos $r := \min_{1 \leq i \leq n} \{r_i\}$, de esta forma $B(x, r) \subseteq B(x, r_i) \subseteq A_i$, si aplicamos n intersecciones obtendremos que

$$B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n B(x, r_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$$

Probando el lema ■

Con el lema 2 y 3 podemos manipular colecciones de conjuntos abiertos, teniendo cuidado cuando intersectamos, una buena referencia es que cuando juntamos abiertos no hay límites de unión, en cambio cuando achicamos conjuntos en base a la intersección, siempre debe ser finito.

Observación. Los conjuntos \emptyset y \mathbb{R}^n son abiertos.

Corolario 1. *Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si A es una unión de bolas (no necesariamente disjuntas)*

Dem. \Leftarrow) Si $A = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$, por el lema 2, tenemos que A es abierto.

\Rightarrow) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, entonces, para todo $x \in A$, existe $r_x > 0$ talque $B(x, r_x) \subseteq A$. Verifiquemos que

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) = A$$

\subseteq) Sea $y \in \bigcup B(x, r_x)$, entonces para algún $x' \in A$ se tiene que $y \in B(x', r_{x'}) \subseteq A$, luego

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A$$

\supseteq) Sea $y \in A$, entonces existe $r_y > 0$ talque $B(y, r_y) \subseteq A$, evidentemente $y \in B(y, r_y) \subseteq \bigcup B(x, r_x)$. Por tanto

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) = A \quad \blacksquare$$

Ejemplo. Considere el siguiente conjunto

$$A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$$

Entonces A_r es abierto. Y en efecto lo es, para poder verlo, más que demostrar, tenemos que si se considera una recta cualquiera

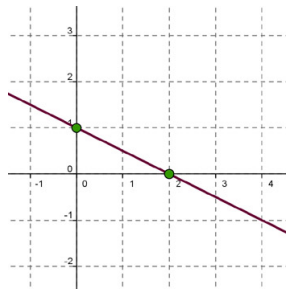


Figura 1: función afín

podemos probar que el conjunto formado por los elementos bajo o sobre la recta sin considerar los puntos de la recta, es un conjunto abierto. De esta forma A_r si lo grafica, resulta un rectángulo formado por la intersección de 4 conjuntos abierto, por tanto la intersección que resulta ser A_r es abierto.

Ejemplo. Considere la siguiente elipse Si consideremos todos los punto dentro de ella sin

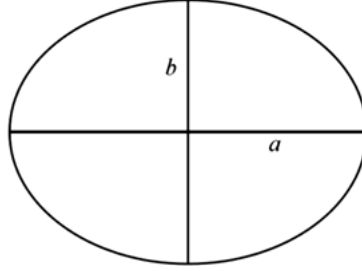


Figura 2: elipse

considerar los borde definida por

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

es abierto. La demostración es algo más complicado, pero lo que nos interesa es que la condición de S es una función de la forma $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, la cual la llamamos, función de varias variable. De hecho, un adelante es que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, sigue que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) < C\}$ es abierta, con $C \in \mathbb{R}$.

Afirmación 1. Sean A_1, A_2 abiertos, entonces $A_1 \times A_2$ es abierto. En efecto, sea $(x, y) \in A_1 \times A_2$, luego existen $r_x, r_y > 0$ tales que $B(x, r_x) \subseteq A_1$ y $B(y, r_y) \subseteq A_2$, sea $r = \min\{r_x, r_y\}$, verifiquemos que $B((x, y), r) \subseteq B(x, r_x) \times B(y, r_y)$. Sea $z \in B((x, y), r)$, entonces

$$(x - z_1)^2 + (y - z_2)^2 < r^2$$

Entonces

$$(x - z_1)^2 < r^2 - (y - z_2)^2 < r^2$$

luego $z_1 \in B(x, r_x)$ y de manera análoga para y se concluye que $z_2 \in B(y, r_y)$, de esta forma $z \in B(x, r_x) \times B(y, r_y) \subseteq A_1 \times A_2$. Por tanto $A_1 \times A_2$ es abierto.

Proposición 1. Sea $\{A_1, \dots, A_n\}$ una colección de conjuntos abiertos. Entonces el conjunto

$$A_1 \times \dots \times A_n = \bigtimes_{i=1}^n A_i$$

es abierto.

Dem. Sea $x \in \bigtimes A_i$, entonces si $x = (x_1, \dots, x_n)$ luego para cada x_i existe un $r_i > 0$ talque $B(x_i, r_i) \subseteq A_i$ dado que A_i es abierto, luego tomando $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ se tiene que

$$B(x, r) \subseteq \times A_i$$

En efecto, si $y = (y_1, \dots, y_n) \in B(x, r)$, entonces

$$|y_i - x_i| \leq d(x, y) < r \leq r_i$$

Luego $y_i \in B(x_i, r_i)$, entonces $y_i \in A_i$. Por tanto $y \in \times A_i$. Probando que el producto cartesiano de conjuntos abiertos, es abierto. ■

Recordemos el corolario 1, que dice que podemos construir conjunto abierto y que todo conjunto abierto es una unión de bolas. Podemos pasar esto a la recta real, dados los conjuntos abierto, podemos unir estos conjuntos y generar un conjunto abierto. Ya sea una unión finita o infinita. Lo verdaderamente particular es que todo conjunto abierto en \mathbb{R} es la unión disjunta de conjuntos abierto. Podemos ponerlo como teorema.

Teorema 1. *Todo conjunto abierto en \mathbb{R} es la unión disjunta de conjuntos abierto.*

Así, un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto, existen conjuntos $A_i := (a_i, b_i)$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces

$$A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$$

Nota. No se demostrará el teorema por su complicidad.

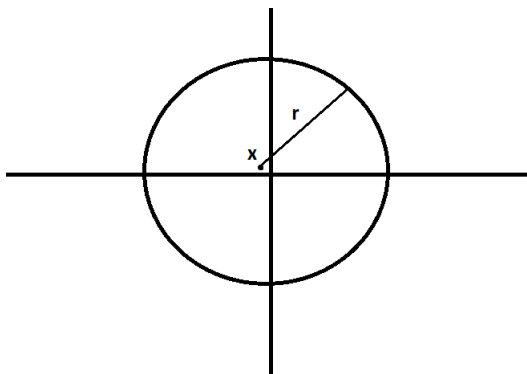
Observación. No todos los conjuntos son abiertos, en efecto, si se considera el conjunto $C = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ se puede verificar que no es abierto. Este hecho para ser irrelevante pero da caviada a definir conjuntos no abiertos que más adelante mostraremos.

Revisemos un conjunto no abierto más interesante. Consideré la siguiente figura

Sea el conjunto de los puntos de la bola y el del borde por $B = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) \leq r\}$. Tenemos que B no es abierto, para comprobarlo basta considerar $y \in \mathbb{R}^2$ talque $d(x, y) = r$, luego para cualquier $r_y > 0$ se tiene que $B(y, r_y) \not\subseteq B$. En efecto, podemos tomar $z \in B(y, r_y)$ talque $z \notin B$. Ahora notemos que $B(x, r) \subseteq B$ es el mayor conjunto abierto que está contenido en B , con esta idea podemos definir el interior de un conjunto.

Definición 4. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos el interior de A por $\overset{o}{A}$ como el subconjunto de A más grande, talque es abierto.

Una forma equivalente de verlo es que $\overset{o}{A}$ verifica que

Figura 3: Circunferencia de centro x y radio r .

- $\overset{o}{A} \subseteq A$ y $\overset{o}{A}$ es abierto
- Si $B \subseteq A$ y B es abierto, entonces $B \subseteq \overset{o}{A}$

Observación. Si A es abierto entonces $\overset{o}{A} = A$

Ejemplo. En la figura 4 se aprecia una circunferencia de centro x y radio r definida por el conjunto B . Entonces se verifica que $\overset{o}{B} = \emptyset$

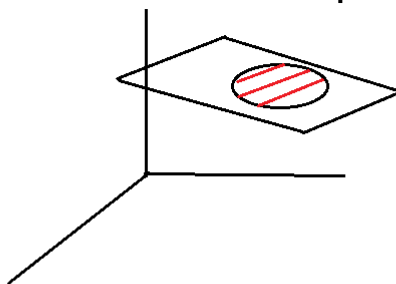


Figura 4: Bola de dos dimensiones en un espacio tridimensional

Para probar este hecho supongamos que $\overset{o}{B} \neq \emptyset$, luego sea $x \in \overset{o}{B}$, entonces dado que el interior de B es abierto, existe un $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subseteq \overset{o}{B} \subseteq B$. Podemos tomar un elemento y de $B(x, r_x)$ tal que $y \notin B$, llegando a una contradicción. Por tanto $\overset{o}{B} = \emptyset$. Este hecho se puede generalizar para un k -plano sobre un espacio de dimensión n .

Una forma más directa de verlo es que en B° tiene por subconjuntos bolas, luego tomando cualquier bolar veremos que hay una parte de la bola que no toca a B , entonces la bola debe ser prácticamente nada, osea el conjunto vacío. Si se estudia en dimensiones 3 o 2, basta trabajar con boals y luego argumentar.

Afirmación. Si P =plano de dimensión k , talque $P \subseteq \mathbb{R}^n (k < n)$ y $A \subseteq P$. Entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$

La demostración de la afirmación en análoga al ejemplo, basta tomar un punto del interior de A y por definición se puede tomar un y dentro de la bola formada por x y un radio r . De modo que y no pertenece a A llegando a la contradicción.

Nota. Una alternativa para probar la afirmación es observar que A no puede ser un conjunto abierto con elementos. Dejando como única opción al vacío como subconjunto de A . Luego $A^\circ = \emptyset$.

Proposición 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in A$. Entonces $x \in \overset{\circ}{A}$ si y sólo si existe un $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq A$

Dem. \Rightarrow) Dado $x \in \overset{\circ}{A}$ existe un $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq \overset{\circ}{A} \subseteq A$ como el interior de un conjunto es abierto. Entonces $B(x, r) \subseteq A$.

\Leftarrow) Sea $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq A$, como toda bola abierta es un conjunto abierto, tenemos que $B(x, r) \subseteq \overset{\circ}{A}$, luego si $d(x, x) = 0 < r$ entonces $x \in \overset{\circ}{A}$ ■

Ejemplo. Si $A = \mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Y esto tiene sentido ya que si tomamos un punto de A es imposible construir una bola de forma eficiente, en el sentido de que puedo crear una circunferencia sin ningun cabo suelto.

Probemos la afirmación, sea $x \in \overset{\circ}{A}$, entonces existe un $r > 0$ talque $B(x, r) \subseteq A$, entonces podemos tomar un $y \in B(x, r)$ talque $y \notin \mathbb{Q}^2$ y $d(x, y) < r$, de forma que $B(x, r) \not\subseteq A$. Llegando a una contradicción.

En general se puede probar que si $A = \mathbb{Q}^n$ en el espacio métrico (\mathbb{R}^n, d) , entonces $A^\circ = \emptyset$. Y la demostración es análoga a la de dos dimensiones, notamos si $x \in A^\circ$, entonces la bola $B(x, r) \subseteq \mathbb{Q}^n$ pero la bola $B(x, r)$ está definida en \mathbb{R}^n , luego hay elementos que no están en \mathbb{Q}^n , por tanto $A^\circ = \emptyset$.

Definición 5. Decimos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si $\mathbb{R}^n \setminus C$ es abierto.

Recordemos el ejemplo de la figura 3. Tenemos que $B = \{y \in \mathbb{R}^2, d(x, y) \leq r\}$ es cerrado

puesto que $\mathbb{R}^2 \setminus B$ es abierto. Entonces lo que nos interesa es que la parte exterior del círculo sea abierto, verifiquémoslo. Sea $z \in \mathbb{R}^2 \setminus B$ y sea $r_z := d - r$ con $d = d(x, z)$, veamos que $B(z, r_z) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus B$. Sea $w \in B(z, r_z)$, entonces $d(w, z) < r_z = d - r$, luego $r < d(x, z) - d(w, z) \leq d(x, w) + d(w, z) - d(w, z) = d(x, w)$. Por tanto $w \notin B$, lo que equivale a decir $w \in \mathbb{R}^2 \setminus B$. Probando así que B es cerrado.

Observación. Los conjuntos \mathbb{R}^n, \emptyset son cerrados. De esta forma podemos concluir que \emptyset, \mathbb{R}^n son abiertos y cerrados al mismo tiempo, siendo los únicos conjuntos que satisfacen esta propiedad.

Lema 4. Sea $(B_i)_{i \in I}$ una colección de conjuntos cerrados. Entonces

$$\bigcap_{i \in I} B_i \text{ es cerrado.}$$

Dem. Queremos probar que el complemento de la intersección es abierta, es decir, queremos probar que $(\bigcap B_i)^c$ es abierto. En efecto, notemos que

$$\left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} B_i^c$$

donde B_i^c es abierto para todo $i \in I$ y por el lema 2 podemos concluir que $(\bigcap B_i)^c$ es abierto como queríamos demostrar. ■

Nota. El lema 4 se asemeja con el lema 2 y esto se hace evidente al trabajar con el complemento del otro. El siguiente lema trabajará directamente con el lema 3.

Lema 5. Sean B_1, \dots, B_n conjuntos cerrados. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \text{ es cerrado.}$$

Dem. Queremos probar que $(\bigcup B_i)^c$ es abierto. Para ello, notemos que

$$\left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n B_i^c$$

donde B_i^c es abierto, por tanto tenemos una intersección finita de conjuntos abiertos que por el lema 3 da un conjunto abierto. Probando lo que queríamos demostrar. ■

1.3. Clausura de un Conjunto

Observación. No todo conjunto es cerrado.

Definiremos un concepto similar al interior de un conjunto, teniendo este un funcionamiento similar.

Definición 6. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la clausura de A por \overline{A} , como el menor conjunto cerrado que contiene a A .

De forma equivalente podemos decir que \overline{A} es la clausura de A si

- $A \subseteq \overline{A}$, \overline{A} es cerrado.
- Si $A \subseteq B$ y B es cerrado, entonces $\overline{A} \subseteq B$.

Observación. Algo peculiar es que hemos introducidos los conceptos de interior y la clausura de un conjunto sin saber si es posible su existencia. Para ello probaremos que existe un conjunto D, E tales que satisfacen las propiedades de interior y de clausura.

Estudiemos la existencia de interior de A . Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos

$$D = \bigcup_{\substack{B \subseteq A \\ B \text{ abierto}}} B$$

Entonces podemos decir que $D = A^\circ$. Notemos que si $B \subseteq A$, con B abierto, entonces la unión de todos los subconjuntos de A abiertos, es subconjunto de A . Es decir $D \subseteq A$. Tomemos ahora un conjunto $B' \subseteq A$ abierto, dado que D abarca a todos los conjuntos abierto, tenemos que $B' \subseteq D$. De forma que D satisface las propiedades del interior de A .

Para la clausura. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos

$$E = \bigcup_{\substack{A \subseteq C \\ C \text{ cerrado}}} C$$

Entonces $E = \overline{A}$. Notemos que si $A \subseteq C$, con C cerrado, entonces la intersección de todos los conjuntos que contienen a A , es un conjunto que contiene a A . Es decir, $A \subseteq E$. Tomemos ahora un conjunto $A \subseteq C'$ cerrado, y dado que E es la intersección de todos los conjuntos que contienen a A , tenemos que $E \subseteq C'$. De forma que E satisface las propiedades de la clausura de A .

En conclusión, en todo subconjunto de \mathbb{R}^n podemos construir y saber que existe el interior y la clausura de este. En general, si $A \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces

$$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$$

1.4. Límite y Sucesiones en \mathbb{R}^n

Recordemos algunas cosas. Una sucesión en \mathbb{R} es una función, relación, asociación que toma los números naturales y los transforma a números reales. Es decir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $i \mapsto a_i$.

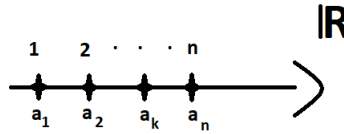


Figura 5: Recta real con una sucesión.

De esta forma tenemos una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Además, estas sucesiones tienen un comportamiento al tomar n suficientemente grande, así por ejemplo, si $x_n := \frac{1}{n}$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Lo que significa que al tomar un conjunto abierto o mejor, una bola $B(-\varepsilon, \varepsilon)$ de forma que tiene infinitos elementos de la sucesión x_n y fuera de ella tiene finita cantidad de x_n .

De manera más formal, se define al límite de una sucesión x_n a L si para todo ε , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$.

Con esta idea expandiremos una sucesión y el límite de una sucesión al espacio \mathbb{R}^n .

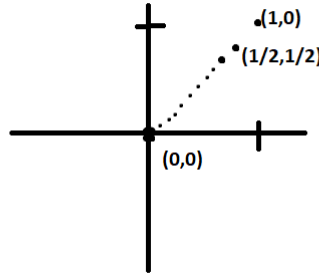
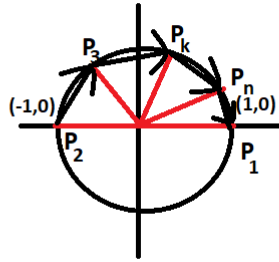
Ejemplo. Primero pensemos en \mathbb{R}^2 . Sea $P_n := (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ una sucesión en \mathbb{R}^2 . Si intentamos graficar esto en el plano real, tendríamos algo como la figura 6, de forma que P_n se acerca al punto $(0, 0)$. De esta forma podemos conjeturar que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (0, 0)$, aunque aun no hemos definido el límite como tal, así que entiéndalo como que P_n se acerca a $(0, 0)$ cuando n crece.

Ejemplo. Pensemos $P_n := (\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}))$. Representado en el plano sería

La cual nos dice que P_n se mueve en la parte superior de la circunferencia de radio 1 y lo hace hacia al punto $(1, 0)$, de forma que podemos ver que $P_n \rightarrow (1, 0)$, además de que $\cos(\frac{2\pi}{n}) \rightarrow 1$ y $\sin(\frac{2\pi}{n}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = (1, 0)$.

Definición 7. Sea $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{R}^n y $P_\infty \in \mathbb{R}^n$. Decimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_\infty$$

Figura 6: P_n en el plano real.

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} d(P_k, P_\infty) = 0$

Nota.

- Es importante notar que P_∞ es un valor finito, es decir, es ubicable en el n -espacio real.
- La definición de límite en el espacio \mathbb{R}^n podemos descomponerla a la usual definición de límite en \mathbb{R} , entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$ si y sólo si para todo ε , existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N$ entonces $d(P_k, P_\infty) < \varepsilon$. Podemos notar que $P_k \in B(P_\infty, \varepsilon)$, de esta forma P_k tiende a P_∞ cuando $k \rightarrow \infty$ si al considerar cualquier bola de centro P_∞ y radio ε , tenemos que hay una cantidad infinita dentro de la bola y una cantidad finita afuera de esta.

Ejemplo. Sea $P_n := (\cos(\frac{2\pi}{n}), \sin(\frac{2\pi}{n}), \frac{1}{n})$, puede intentar hacer el dibujo y obtener una espiral, en particular, el P_n de este ejemplo es el P_n del ejemplo anterior transformado, así que toma la semi circunferencia y la reparte en los puntos de z . Lo importante es que podemos sospechar que $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = (1, 0, 0)$ con el añadido de que $\cos(\frac{2\pi}{n}) \rightarrow 1, \sin(\frac{2\pi}{n}) \rightarrow 0, \frac{1}{n} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Aquí podemos sospechar algunas cosas, como que P_n converge si sus coordenadas convergen a algo en concreto, pero antes de enunciar algo de este estilo revisemos un último

ejemplo más directo que apoye esta idea.

Ejemplo. Sea $P_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}, \frac{3n^3+n^2}{2n^3+8n}, 1, n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)$. ¿Existirá el límite de P_n ? notemos que la primera coordenada converge a 1, la segunda a 3/2, la tercera a 1 y la última a 1. Entonces podemos sospechar que $\lim P_n = (1, 3/2, 1, 1)$.

Proposición 2. Sea $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión. Donde $P_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ (x_i^k es la coordenada i de P_k). Sea $P_\infty = (x_1^\infty, \dots, x_n^\infty)$. Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_\infty \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k = x_1^\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} x_2^k = x_2^\infty, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^k = x_n^\infty$$

Dem. \Rightarrow) Sean $i, \varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ talque si $k > N$, entonces

$$|x_i^k - x_i^\infty| \leq d(P_k, P_\infty) < \varepsilon$$

Por tanto $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i^\infty$.

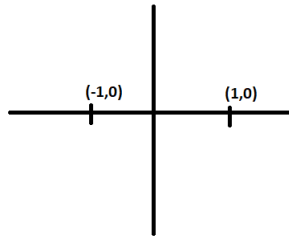
\Leftarrow) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $N_i \in \mathbb{N}$ talque $|x_i^k - x_i^\infty| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Sea $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, entonces si $k > N$

$$d(P_k, P_\infty) = \sqrt{(x_1^k - x_1^\infty)^2 + \dots + (x_n^k - x_n^\infty)^2} < \sqrt{n\varepsilon^2/n} = \varepsilon$$

Por tanto $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_\infty$. ■

Definición 8. Sea $\{P_k\}_k$ una sucesión en \mathbb{R}^n . Decimos que $P \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de la sucesión, si existe una subsucesión que converge a P .

Ejemplo. Considere la figura 7 Y sea $P_n = ((-1)^n, 0)$, de forma que P_n tiene dos puntos de



acumulación las cuales son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Es decir, existen P_{n_k}, P_{n_s} subsucesiones de P_n tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_{n_k} = (1, 0) \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} P_{n_s} = (-1, 0)$$

Recordemos algunas cosas, en \mathbb{R} podemos contruir conjuntos cerrados aplicando sucesiones, esto se extiende a \mathbb{R}^n con un teorema similar.

Teorema 2. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces B es cerrado si y solo si una sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B$ converge a $P_\infty \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $P_\infty \in B$

El teorema nos dice que si B es cerrado entonces toda sucesión convergente, converge al mismo conjunto B .

Dem. Vamos a negar el enunciado, así debemos probar que B es no cerrado si y sólo si existe una sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B$ que converge a P de modo que $P \notin B$.

Es importante observar que los términos cerrados y abiertos no son opuestas, sino complementarias, de forma que al decir que B no es cerrado, estaremos diciendo que B^c es no abierto, esto equivale a decir que existe un $x \in B^c$ talque para todo $r > 0$ $B(x, r) \not\subseteq B^c$. Y esto equivale a decir que existe una sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B$ que converge a $x \in B^c$ y esto se puede hacer ya que $B(x, r)$ tiene elementos de B , luego existe una sucesión convergente a P que no está en B . Como queríamos probar. ■

Nota. Para entender mejor la demostración anterior tengamos en cuenta que estamos trabajando con equivalencias y la equivalencia más importantes es que existe un $x \in B^c$ talque para todo $r > 0$ $B(x, r) \not\subseteq B^c$ si y sólo si existe una sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B$ que converge a $x \in B^c$. Para probar esta equivalencia basta estudiar la siguiente figura

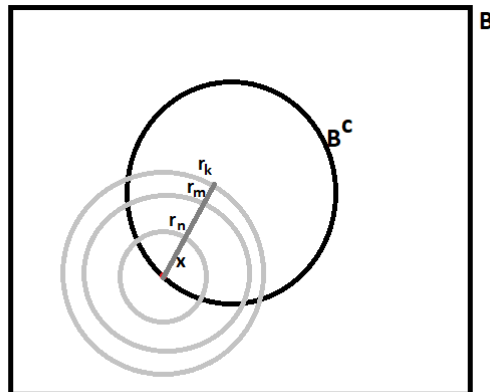


Figura 7: Bolas alrededor de x

Así definimos $P_k \in B(x, r_k)$ mientras tomamos r_k cada vez más pequeños. Así podemos construir una sucesión en B que converge a x . Para la otra implicancia basta ver que si existe una sucesión

en B que converge a x podemos tomar bolas alrededor de x e ir tomando $\varepsilon = r > 0$. Luego toda bola alrededor de x no está incluida en B^c .

Ejemplo. Sea $A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : ax + by + cz + dw = e\}$ a, b, c, d, e no todos nulos. Se tiene que A es cerrado. En efecto, sea $\{P_k\} \subseteq A$ una sucesión que converge a P_∞ , y si $P_k = (x_k, y_k, z_k, w_k) \in A$ y $P_\infty = (x_\infty, y_\infty, z_\infty, w_\infty)$, entonces

$$ax_k + by_k + cz_k + dw_k = e$$

Si aplicamos el límite y por la proposición 2 tenemos que

$$ax_\infty + by_\infty + cz_\infty + dw_\infty = e$$

Es decir, para toda sucesión $\{P_k\}$ de A convergente a P_∞ , se tiene que $P_\infty \in A$, entonces por el teorema 2 tenemos que A es cerrado.

Ejemplo. Los siguientes conjuntos son cerrados

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 = z^2\}$

Puede notar que todos son polinomios. Es más, todo conjunto de la forma $A = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = c\}$ con $P(x)$ un polinomio, es cerrado.

Recordemos que caracterizamos el interior de un conjunto A , donde un elemento está dentro del interior si y sólo si existe una bola dentro de A . Podemos hacer lo mismo con respecto a la clausura de un conjunto, aun así es más complicado de llevar.

Proposición 3. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $P \in \overline{B}$ si y solo si existe una sucesión en B talque converge a P .

Ejemplo. Sea $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, notemos que $(\mathbb{Q}^n)^o = \emptyset$ y $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$

Con respecto a la clausura para \mathbb{Q}^n se vuelve algo intuitivo que sea \mathbb{R}^n , ya que en \mathbb{Q} si juntamos

\mathbb{Q} con las sucesiones que convergen en \mathbb{R} va a ocurrir que indirectamente estamos construyendo \mathbb{R} , más precisamente, los reales se construyen en base a la sucesiones de \mathbb{Q} , esto se expande al espacio \mathbb{R}^n . Aun así, la demostración es algo complicada y se intentará detallar todo para marcar la idea de que las sucesiones sobre \mathbb{Q}^n convergentes, construyen \mathbb{R}^n .

Dem.(Proposición) Sea el conjunto

$$C = \{\text{todos los puntos } P \in \mathbb{R}^n \text{ talque existe una sucesión en } B \text{ que converge a } P\} \\ = \{P \in \mathbb{R}^n : \exists \{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B, \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P\}$$

Entendamos que C son todos los puntos pueden ser representados como límite de una sucesión, donde estos elementos de la sucesión están en B . Afirmamos lo siguiente

Afirmación. $C = \overline{B}$

Ahora, si demostramos la afirmación estaríamos diciendo que si $P \in \overline{B}$ entonces existe una sucesión en B que converge a P , por otro lado, si existe una sucesión en B que converge en P , entonces $P \in C$, luego por la afirmación tendríamos que $P \in \overline{B}$. Probando así la proposición.

Dem.(Afirmación) Queremos probar dos cosas. Que C es cerrado y que si $B \subseteq D$ con D cerrado, entonces $C \subseteq D$. Probemos lo primero, para probar que C es cerrado usaremos el teorema 2. Es decir, si tenemos una sucesión convergente en C entonces su convergencia está en C

Sea $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$ que converge a P . Entendamos geométricamente que significa que una sucesión en C converga a P , vea la figura 8

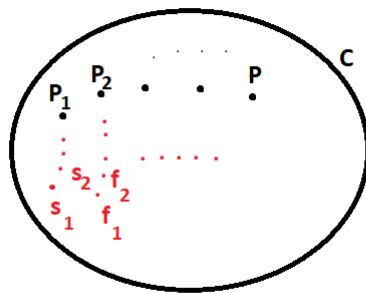


Figura 8: Conjunto C y su sucesión

Consideremos el conjunto C , notemos que $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ al ser elementos de C , existen sucesiones que converge a P_1 a P_2 y así sucesivamente, así por ejemplo, la sucesión $\{S_i\} \subseteq B$ converge a P_1 , lo mismo con $\{f_i\} \subseteq B$ que converge a P_2 . Lo que nos interesa es construir una

sucesión de B talque converga a P . Para ello vamos a considerar bolas como se aprecia en la figura 9

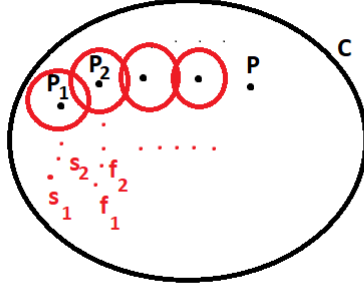


Figura 9: Bolas de los elementos de la sucesión

Podemos intuir que tomando un elemento de la bola talque ese mismo elemento pertenece a la sucesión de B que converge al centro de la bola, podemos crear una sucesión en B se se acerca a P . De forma más formal. Sea $Q_i \in B(P_i, \frac{1}{i})$ talque $Q_i \in B$, entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = P$, la razón de porque podemos tomar la bola $B(P_i, \frac{1}{i})$ es llanamente que por definición de límite, podemos tomar cualquier bola de centro P_i y de radio ε y en esa bola, van haber infinitos elementos tales que están en B . Ahora, lo que tenemos que probar el límite de Q_i .

Afirmación.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = P$$

Dem.(Afirmación) Si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ talque $i > N$ entonces $d(P_i, P) < \varepsilon$. Puesto que $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i = P$. Entonces por desigualdad triangular, para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ talque para todo $i > N$ se tiene que

$$d(Q_i, P) \leq d(Q_i, P_i) + d(P_i, P) < \frac{1}{i} + \varepsilon$$

Si tomamos i suficientemente grande tendríamos que $d(Q_i, P) < \varepsilon$. Por tanto $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i = P$, como queríamos probar. ■

Por tanto, hemos probando que C es un conjunto cerrado. La segunda parte es más rápido, primero notemos que $B \subseteq C$ debido a que si $x \in B$, entonces tomamos la sucesión $P_i = x$ para todo i , luego el límite es x y por tanto $x \in C$, es raro hablar de esta sucesión pero es necesario para la inclusión.

Sea $B \subseteq D$ un conjunto cerrado y sea $P \in C$, entonces por definición existe una sucesión $\{P_k\} \subseteq B$ talque $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P$. Notemos que $\{P_k\}$ es una sucesión en D que converge también en D porque D es cerrado, luego $C \subseteq D$. Por tanto $C \subseteq \overline{B}$, probando así que $C = \overline{B}$. Probando la primera afirmación y por tanto la proposición entera. ■

Extendamos otro concepto a \mathbb{R}^n . En \mathbb{R} sabemos que es completo por la propiedad de cauchy, es decir, toda sucesión de cauchy en \mathbb{R} es convergente en \mathbb{R} . Entonces, para \mathbb{R}^n definiremos una sucesión de cauchy y por un teorema, probaremos un análogo de complitud de \mathbb{R} , pero en \mathbb{R}^n .

Definición 9. (Sucesión de Cauchy) Decimos que $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ talque si $k, l > N$ entonces $d(Q_k, Q_l) < \varepsilon$.

Nota. Una forma también de ver la distancia Q_k, Q_l es por bolas, en particular, una sucesión es de cauchy si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque $Q_k \in B(Q_l, \varepsilon)$ para todo $k, l > N$. Evidentemente es válido decir $Q_l \in B(Q_k, \varepsilon)$ ya que estaríamos solo cambiando el orden.

La sucesión tiene todo el sentido, cuando tomamos Q_k, Q_l con k, l muy grandes, entonces estos puntos terminan por parecerse bastante, de forma que casi se anulan.

Teorema 3. *El espacio métrico (\mathbb{R}^n, d) es un espacio métrico completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy converge.*

Dem. Debemos probar que una sucesión converge si y sólo si es cauchy.

Supongamos que la sucesión $\{P_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ converge, luego sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $n > N$ entonces

$$d(P_k, P) < \varepsilon/2$$

Luego si $l, s > N$ entonces

$$d(P_s, P_l) \leq d(P_s, P) + d(P, P_l) < \varepsilon$$

Por tanto $\{P_k\}$ es de Cauchy.

Supongamos ahora que la sucesión $\{P_k\}$ es de Cauchy, para ello fijemos $P_s = P$, entonces vamos a tener que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ talque si $l > N$, entonces $d(P_l, P) < \varepsilon$ si tomamos s muy grande, veremos que P_l converge a P , luego el límite necesariamente existe. ■

Definición 11. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es compacto si para toda sucesión en A , existe una subsucesión convergente en A .

Otra forma de interpretar la definición anterior, es ver que un conjunto es compacto si dado cualquier sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$, existe una subsucesión $\{P_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a $P \in A$.

Nota. La visualización de conjuntos compactos es más complicado que las de conjunto cerrado y abierto, por el momento no se mostrarán figuras compactas. Pero aun así mostraremos que los conjuntos compactos poseen una caracterización bastante útil.

Observación.

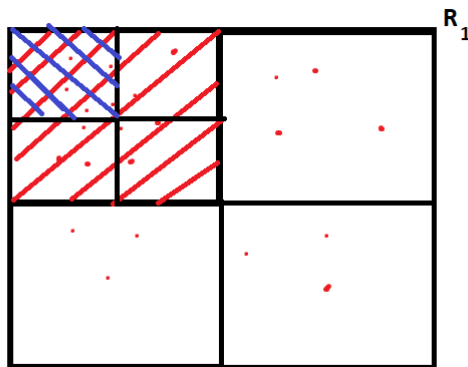
- Tenemos conjuntos cerrados, abiertos y compactos. Además los compactos son más fuerte que los cerrados ($\text{compacto} \subseteq \text{cerrado}$).
- Al decir que un conjunto es compacto estamos diciendo que cualquier sucesión que se tome, tiene al menos un punto de acumulación.

Definición 12. Una sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotada si existe un $M > 0$ tal que $P_k \in B(0, M)$ para todo k .

Lo que decimos con una sucesión acotada es que podemos generar una bola tal que todo elemento de la sucesión está dentro de esa bola.

Teorema 4. (Bolzano-Weierstrass) Sea $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en \mathbb{R}^n . Entonces existe una subsucesión convergente.

Idea Conceptual. Consideremos la siguiente figura



Tenemos un "cuadrado" de largo de $2M$, a este cuadrado grande le llamamos R_1 , donde los puntos rojos son elementos de la sucesión. Podemos crear esto debido a que la sucesión es acotada podemos agrupar todo en una figura, ahora, notemos que si generamos cuatro secciones, tendremos que en al menos una sección, hay infinitos P_k , en este caso el cuadrado achurado por líneas roja es ese cuadrado, además le llamaremos R_2 , esto podemos hacerlo recursivamente, de modo que el cuadrado achurado por líneas azules es R_3 y así sucesivamente, de forma que construimos una colección de conjuntos con infinitos elementos de P_k . Vamos a considerar la subsucesión $\{P_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $P_{k_i} \in R_i$, luego afirmamos que $\{P_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Dem. Para probar el enunciado, primero demostraremos que es cierto para $n = 1$, la idea es para poder formalizar la idea anterior y luego extenderla a n . Sea una sucesión acotada cualquiera $\{x_i\}$, entonces existe $M > 0$ talque $|x_i| \leq M$ para todo i . Entonces en el intervalo $[-M, M]$ está todo los elementos de la sucesión, vamos a dividir en $2M$ trozos el intervalo, así obtenemos $2M$ intervalos de largo 1, en almenos uno hay infinitos elementos de la sucesión, a este intervalo le diremos I_1 de largo 1, luego dividimos en dos el intervalo y en almenos uno de los dos hay infinito elementos de la sucesión, a este le diremos I_2 de largo $1/2$ y así recursivamente de forma que obtenemos intervalos I_n tales que

- $I_{n+1} \subseteq I_n$
- I_n tiene infinitos elementos de la sucesión
- I_n es de largo $\frac{1}{2^n}$

Sea $\{x_{i_k}\}$ una subsucesión de $\{x_i\}$ definida de la siguiente forma $x_{i_1} \in I_1$, $x_{i_2} \in I_2$ con $i_2 > i_1$ y así recursivamente $x_{i_j} \in I_j$ con $i_j > i_{j-1}$.

Afirmación. La sucesión $\{x_{i_k}\}$ es de Cauchy.

Dem. Sea $\varepsilon > 0$ talque $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$, con N suficientemente grande, de forma que para todo $s, l > N$

$$|x_{i_s} - x_{i_l}| \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon$$

Luego $\{x_{i_k}\}$ converge. ■

Ahora debemos probar esto en n arbitrario. Sea $\{P_k\}$ una sucesión acotada en \mathbb{R}^n , notemos que si $P_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ entonces podemos trabajar con cada coordenada de P_k por separado, notemos que P_k al ser acotada, necesariamente x_i^k es acotada, luego por lo visto con anterioridad, tenemos que existe una subsucesión $\{x_i^{k_s}\}$ que converge. Luego si consideramos $P_{k_s} = (x_1^{k_s}, \dots, x_n^{k_s})$ una subsucesión de P_k , tenemos una subsucesión que converge dado que cada coordenada converge a un punto en \mathbb{R}^n . Probando así el teorema. ■

Teorema 5.(Heine-Borel) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, A es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado.

Dem. \Leftarrow) Sea $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$, probemos que existe una subsucesión de $\{P_k\}$ que converge en A . Y en efecto, dado que A es acotado, se tiene que $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es acotado, luego por el teorema 4 sabemos que existe una subsucesión $\{P_{k_i}\}$ que converge a $P \in \mathbb{R}^n$, y como A es cerrado, entonces la subsucesión $\{P_{k_i}\}$ converge en A . Por tanto A es compacto.

\Rightarrow) **Afirmación.** A es cerrado.

Dem.(Afirmación) Sea $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ una sucesión que converge a $P \in \mathbb{R}^n$, como A es compacto, existe una subsucesión $\{P_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge en A .

Se verifica además que $\lim_{i \rightarrow \infty} P_{k_i} = P$. En efecto, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ talque $d(P_k, l) < \varepsilon$ para todo $k > N$, entonces tomando $I \in \mathbb{N}$ talque $k_I > N$ y si $i > I$, entonces $d(P_{k_i}, P) < \varepsilon$. Por tanto $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge dentro de B , lo que implica que A sea cerrado. ■

Afirmación. A es acotado.

Dem.(Afirmación) Vamos a probar por contradicción. Supongamos que A no es acotado, es decir, si $M > 0$, entonces existe un $x \in A$ talque $d(0, x) > M$. Con esto en cuenta podemos construir una sucesión talque la distancia con el y el origen, tiende al infinito, es decir, podemos tomar $\{P_k\}$ de forma que $d(P_k, 0) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. No es muy difícil, basta con tomar $P_1 \in A$ y $d(P_1, 0) = M_1$, luego se toma $P_2 \in A$ talque $d(P_2, 0) = M_2 > M_1 + 1$ y así de forma recursiva, de modo que $A \ni d(P_k, 0) = M_k > M_{k-1} + 1 > M_1 + k - 1$, como A no es acotado, notamos que si $k \rightarrow \infty$, entonces $d(P_\infty, 0) > \infty$, lo cual es una forma de expresar que $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \infty$.

Consideremos ahora una subsucesión de $\{P_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, notemos que $\lim_{i \rightarrow \infty} P_{k_i} = \infty$, y esto se aplica para cualquier subsucesión de $\{P_k\}$, entonces A no puede ser compacto debido a que no existe ninguna subsucesión convergente, siendo una contradicción. ■

De esta forma probamos que si A es compacto necesariamente es cerrado y acotado. Probando además la equivalencia. ■

Nota. Un conjunto A se define acotado si existe un $M > 0$ talque $A \subseteq B(0, M)$, es decir, existe una bola talque A está incluida en ella.

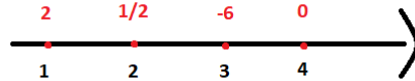
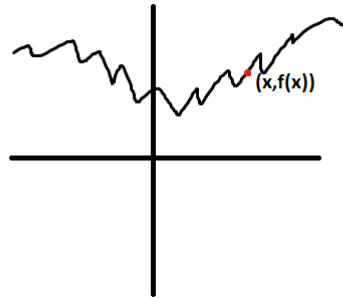
2. Funciones en Varias Variables y Otros

En la sección anterior se introdujo nociones básicas de topología en \mathbb{R}^n necesarias para poder estudiar funciones en varias variables y sus distintas características como la continuidad, la diferenciación, y la integral. Antes de ver más conceptos, revisaremos algunas funciones y sus gráficos.

Recordemos que una función es una relación, en \mathbb{R} por lo general denotamos por $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dando además una regla, como sería $f(x) = x^2$ o $f(x) = 1/x$. La idea es estudiar lo mismo pero en subconjuntos de \mathbb{R}^n , de forma que tenemos funciones del estilo $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Las funciones en \mathbb{R} pueden ser representadas de dos forma, la primera es

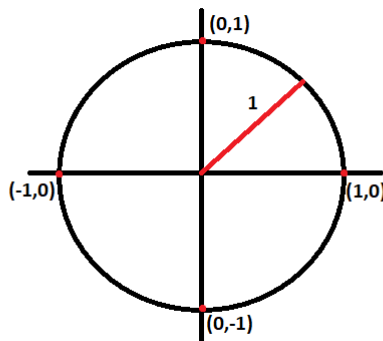
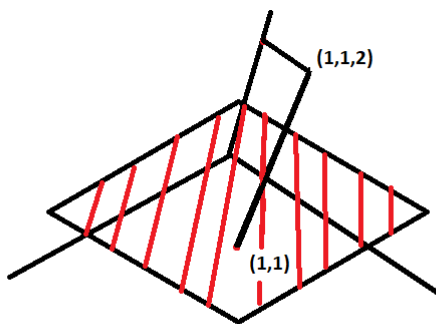
y la otra es más conocida por ser el gráfico de f

Que por definición se define el gráfico de f por el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) = y\}$. Estas ideas se expanden para dimensiones más altas de \mathbb{R} .

Figura 10: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Figura 11: Gráfico de f

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Podemos graficarlo de dos maneras, una representando la curva de nivel

Estamos tomando todos los puntos de f que valen 1. Mientras el gráfico de un punto que por definición es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z\}$ se ve de la siguiente forma

Figura 12: $f(x,y)=1$ Figura 13: El punto $(1, 1, 2)$ donde $f(1, 1) = 2$

Evidentemente podemos realizar el gráfico completo y se vería de la siguiente manera

Y así con todas las funciones.

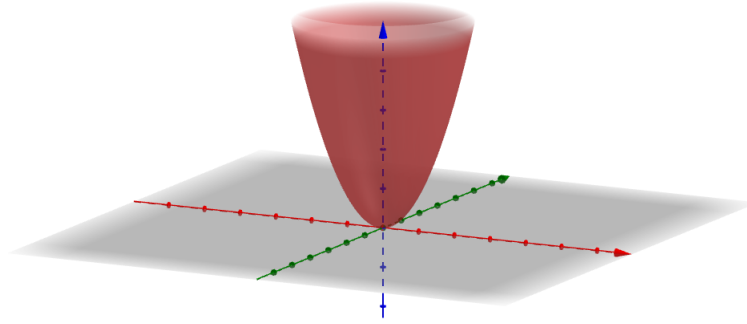
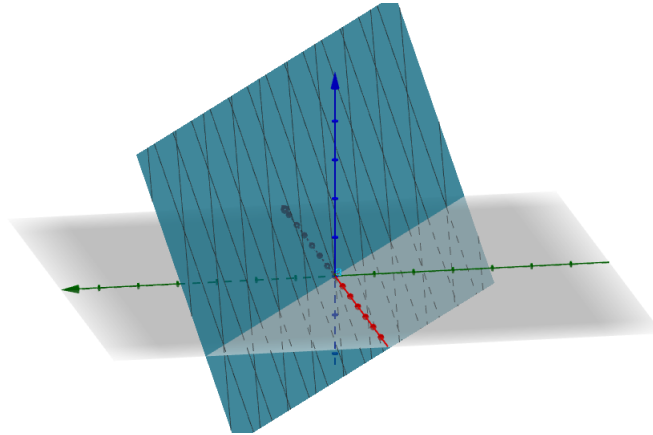
Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x, y) = 2x + 3y$. Podemos definir el conjunto

$$C_l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = l\}$$

A este conjunto se le conoce como curva de nivel l . Así $C_0 = \{(x, y) : 2x + 3y = 0\}$ y con cualquier $l \in \mathbb{R}$. Evidentemente podemos hacer el gráfico en \mathbb{R}^3 siendo un plano como se aprecia en la figura 15

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la curva de nivel $C_l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = l\}$ y el gráfico de f dado por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z\}$. Entonces

$$Gr_f \cap \{z = l\} = \{(x, y, l) : f(x, y) = l\} \approx C_l \text{ a la altura } l$$

Figura 14: $f(x, y) = z$ Figura 15: El gráfico de los puntos (x, y, z) donde $2x + 3y = l$ para todo $l \in \mathbb{R}$

Lo que intentamos decir es que el Grafo de f intersectado con los valores $z = l$, es equivalente a estudiar las curvas de nivel l pero en la altura l . Otra forma de verlo es que al grafo de f se intersecta con un plano $z = l$ y el resultado es una curva de nivel l .

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := x^2 - y^2$. Estudiemos las curvas de nivel y su grafo. Si $C_l := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = l\}$, tomemos $l = 1$, obtenemos el conjunto $\{x^2 = y^2 + 1\}$ y si lo graficamos nos queda una hipérbola

Si $l = 0$, entonces tenemos el conjunto $\{x^2 = y^2\}$, que son las rectas de pendiente 1 y -1 , y si tomamos $l = -1$, obtenemos el conjunto $\{x^2 + 1 = y^2\}$ que es una hipérbola en vertical. Todo esto junto obtendremos que

Lo curioso que estos conjuntos nunca se tocan, es decir que son disjuntos a pares. Si estudiamos $l \rightarrow 0^+$ veremos que hipérbola horizontal se va transformando a las rectas rojas, mientras que si $l \rightarrow 0^-$, la hipérbola vertical se va transformando a la rectas rojas. Si hacemos un barrido de l positivo a los negativos, tendremos que pasa de hipérbola horizontal a recta roja a hipérbola vertical que se aleja mucho de las rectas rojas. Y una razón para ir verificando esto es estudiar

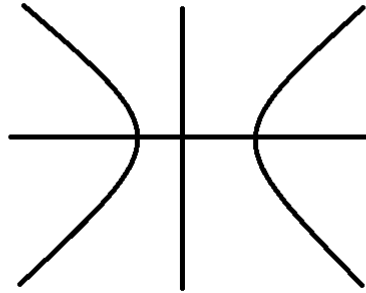


Figura 16: Hipérbola

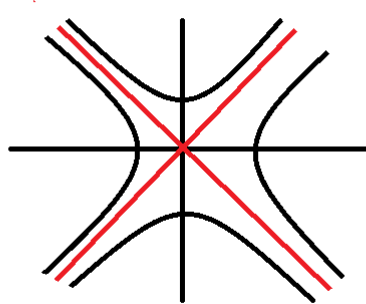


Figura 17: Hipérbolas y rectas(Mejorar)

el grafo de f en \mathbb{R}^3 .

Si aplicamos planos $z = l$ y vamos cortando a la figura, veremos que se general las curvas de nivel, si $l > 0$ obtenemos hipérbolas horizontales, si $l < 0$ obtenemos hipérbolas verticales y $l = 0$, obtenemos las rectas.

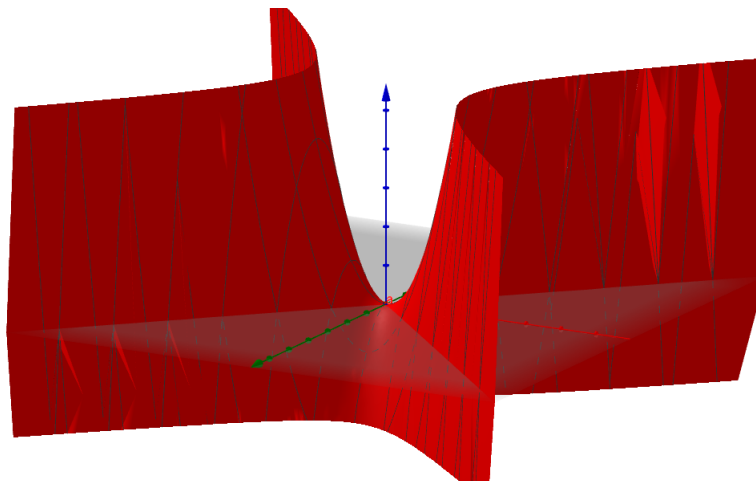
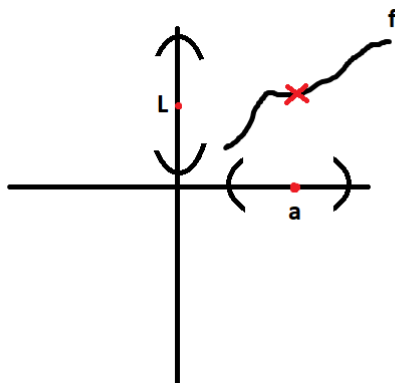
2.1. Límites y Continuidad de funciones

Luego de ver el ejemplo de interpretar curvas de nivel y grafos, introduciremos el concepto de límite en \mathbb{R}^n . En \mathbb{R} se tiene funciones del estilo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, es la forma de decir que cuando x se acerca a a , f se acerca a L .

Si tenemos una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \bar{A}$. Decimos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

\Updownarrow

Figura 18: Gráfico de f en \mathbb{R}^3 Figura 19: Interpretación gráfica de $f(x)$ cuando $x \rightarrow a$

para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque si $0 < |x - a| < \delta$ y $x \in A$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

La definición de límite nos indica que si consideramos una venciad de L , podemos encontrar una venciad de a con x bien definido ($x \in A$), tales que al trabajar con esa venciad de a tenemos que f está en la venciad de L . Esta idea que proviene de los primeros cursos de cálculo se extiende a bolas, de forma que podemos definir el límite de una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hacia un punto $a \in \overline{A}$.

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $a \in \overline{A}$. Decimos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ talque si $0 < d(x, a) < \delta$ y $x \in A$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

Observación. Otra forma de estudiar el límite es trabajar con $x \in (B(a, \delta) \cap A) \setminus \{0\}$, y verificar que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Notar además la importancia de definir $a \in \overline{A}$ puesto que nos interesa trabajar con un acercamiento con respecto al punto a . Bien puede existir una sucesión en A que converge a a , de forma que podemos trabajar con la cercanía de a si tocarla y que es una de las ideas de límite. También agrega la importancia de tomar $x \in A$ ya que nos interesa trabajar con elementos definidos de f porque perfectamente puede pasar que $d(x, a) < \delta$ pero $x \notin A$ y eso le quita sentido a $f(x)$. Y por último, en la bola intersecada con A le quitamos el 0 por la misma razón de a , no nos interesa trabajar directamente con a sino su cercanía, por lo que el 0 como tal no es necesario incluirlo, aunque en algunos casos pueden estar definidos pero es otro concepto el que se aplica en esta situación.

Nota. Como matemáticos necesitamos aplicar la definición para probar límites, pero a la vez es poco práctico ya que existen funciones muy difíciles de encontrar sus límites o de probar que ese es su límite, entonces al igual que en \mathbb{R} vamos a extender propiedades a \mathbb{R}^n que nos permiten ver y determinar límites de funciones más complejas.

Proposición 1. Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{A}$. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones

- a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$
- b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L_1L_2$
- c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = L_1/L_2$ si $L_2 \neq 0$

Dem. a) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta : \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que si $0 < d(x, a) < \delta$ y $x \in A$, entonces

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

b) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $\delta_1 > 0$ si $0 < d(x, a) < \delta_1$ y $x \in A$, entonces,

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(|L_2| + 1)} \quad \text{y} \quad |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)}$$

Luego

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &\leq |g(x)||f(x) - L_1| + |L_1||g(x) - L_2| \\ &< |g(x)|\frac{\varepsilon}{2(|L_2| + 1)} + |L_1|\frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)} \end{aligned}$$

Notemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L_2| < 1$, entonces $|g(x)| < |L_2| + 1$. Por tanto si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$|g(x)|\frac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)} + |L_1|\frac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L_1L_2$$

c) Sin pérdida de generalidad supongamos que L_2 . Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta_1 > 0$ talque si $0 < d(x, a) < \delta_1$ y $x \in A$, entonces

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2} \right| \leq \frac{1}{|g(x)L_2|} (|L_2||f(x) - L_1| + |L_1||g(x) - L_2|) < \frac{|L_2 - 1|^2}{|g(x)L_2|} \left(\frac{\varepsilon|L_2|}{2(|L_2|+1)} + \frac{\varepsilon|L_1|}{2(|L_1|+1)} \right)$$

Y además existe un $\delta_2 > 0$ talque $|L_2| - 1 \leq |g(x)|$, entonces tomando $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que si $0 < d(x, a) < \delta$ y $x \in A$, entonces

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2} \right| < \varepsilon$$

Probando la proposición ■

Definido el límite de una función en varias variables podemos definir la continuidad que en términos simples es ser capaz de dibujar una linea sin soltar el lapiz. Entonces f es continua en un punto a si, cuando x se acerca a a , f se acerca a $f(a)$ En otras palabras, a está definido en f y el límite de f cuando $x \rightarrow a$ es $f(a)$.

Definición 2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es continua en $a \in A$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ talque si $x \in B(a, \delta) \cap A$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Nota. Como dijimos en la continuidad de un punto, nos interesa que el punto a este definido, por lo que tiene sentido que trabajemos con la desigualdad $d(x, a) < \delta$, en vez de $0 < d(x, a) < \delta$.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$, entonces f es continua en $P = (x_0, y_0)$.

Sol. Queremos probar que $\lim_{x \rightarrow P} f(x) = f(P)$ y para ello tomamos un $\varepsilon > 0$ y queremos un $\delta > 0$ talque si $d(x, P) < \delta$ entonces $|f(x) - f(P)| < \varepsilon$, notemos que si $x = (x_1, x_2)$ entonces $|f(x) - f(P)| = |x_1 - x_0|$, pero además $|x_1 - x_0| \leq \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - y_0)^2} = d(x, P)$, entonces basta tomar $\varepsilon = \delta$. Luego si $d(x, P) < \delta = \varepsilon$, entonces

$$|f(x) - f(P)| = |x_1 - x_0| \leq d(x, P) < \varepsilon$$

Por tanto f es continua en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Definición 3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que f es continua, si f es continua en todo punto de A .

Ejemplo.

- La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x$ es continua.
- Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = y$. Entonces g es continua.
- Sea $\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$. Entonces π_k es continua.

Vamos a probar que π_k del ejemplo anterior, es continua.

Afirmación. La función π_k es continua en todo \mathbb{R}^n . para todo $k = 1, \dots, n$.

Dem. Sea k fijo, sea $P = (P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon > 0$, luego si $d(x, P) < \varepsilon$, entonces

$$|\pi_k(x) - \pi_k(P)| = |x_k - P_k| \leq \sqrt{(x_1 - P_1)^2 + \dots + (x_n - P_n)^2} = d(x, P) < \varepsilon$$

Luego $\lim_{x \rightarrow P} \pi_k(x) = \pi_k(P)$. Por tanto π_k es continua en \mathbb{R}^n , para todo $k = 1, \dots, n$. ■.

Nota. Es más, si trabajamos con $\pi_k|_{A \subseteq \mathbb{R}^n}$ podemos probar que también es continua, la demostración no cambia en nada, solo que tomamos $x \in A$ talque $d(x, P) < \varepsilon$ y luego se procede de la misma forma.

La necesidad de demostrar que π_k es porque podemos aplicar unas propiedades que nos sirven para probar que cualquier función polinomio es continua. Las siguiente proposición nos dice que podemos sumar, multiplicar y dividir funciones continuas y el resultados de estas, seguir siendo continuas.

Proposición 2. Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones

- a) $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua
- b) $fg : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua
- c) $f/g : B \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, donde $B = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$
- d) Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$h \circ f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{es continua}$$

Dem. a) Sea $P \in A$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow P} f(x) + \lim_{x \rightarrow P} g(x) = f(P) + g(P)$$

Luego $f + g$ es continua.

b) Sea $P \in A$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow P} f(x) \lim_{x \rightarrow P} g(x) = f(P)g(P)$$

Luego fg es continua.

c) Sea $P \in B$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow P} f(x) / \lim_{x \rightarrow P} g(x) = f(P)/g(P)$$

Luego f/g es continua

d) Sea $x_0 \in A$. Debemos probar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = h(f(x_0))$$

Notemos que para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{y \rightarrow y_0} h(y) = h(y_0)$$

por la continuidad de h . Luego escogemos $y \in Im(f)$ y $y_0 = f(x_0)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta, \gamma > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ y $x \in A$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \gamma$, donde γ depende de ε y $|y - y_0| < \gamma$ implica que $|h(y) - h(y_0)| < \varepsilon$. Entonces

$$|h(f(x)) - h(f(x_0))| < \varepsilon$$

Luego $h(f(x))$ es continua en todo A .

Probando así la proposición. ■

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$. Luego f es continua al ser la suma y producto de funciones continuas.

Por la proposición 2 y usando la función π_k , podemos probar que toda función polinomial es continua, en efecto, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0} A_{k_1 \dots k_n} x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_n}$$

luego f es suma y producto de funciones continuas, por tanto f es continua.

Ejemplo. $f(x, y, z, w) = 4x^2y^3z^5 + 2xy + z^3 + 1$ es continua.

Luego de estudiar la teoría de límites y continuidad, es importante aplicar todos estos casos en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. ¿Existirá el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$? Para ello entendamos que el límite en \mathbb{R} funciona cuando los límites laterales tienden al mismo punto, esta idea es la misma en mayores dimensiones, solo que nos importa las bolas, estudiemos este caso y luego probemos formalmente si converge a L o si no existe.

Si $x = y$, entonces $f(x,y) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$, entonces si estudiamos la recta $x = y$, tendremos que f vale $1/2$. Si $x = 0$, entonces $f(0,y) = 0$ para todo y en el dominio de f si graficamos, nos restula la siguiente figura

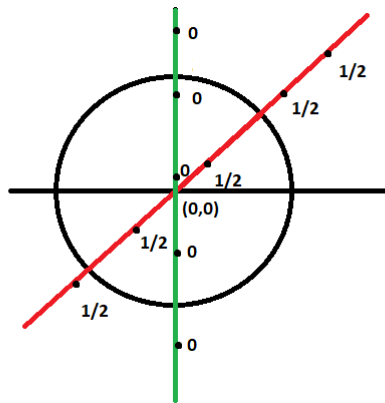


Figura 20: Gráfica

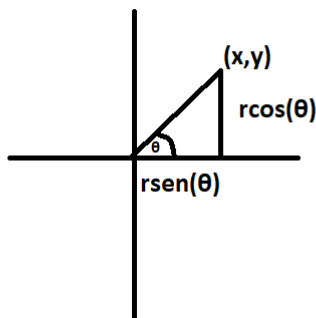
La línea roja son los valores de f que dan $1/2$, la línea verde son los valores de f que dan 0 . La figura 20 puede ser confusa por la forma en que se presenta, pero recuerde que los puntos negro son los valores de f evaluado en ese punto, si el límite de f existe, entonces no importa donde empezemos, cuando nos acercamos a $(0,0)$ los puntos negros deben ir tendiendo a algo, es decir la línea roja cuando estudiamos en una bola de centro $(0,0)$ y radio r tenemos que estos deben dar algo pequeño, si tomamos más bolas pequeñas, la línea roja debe ser aun más pequeño, pero esto no ocurre, por tanto podemos intuir que tal límite no existe. Pero esto no basta para demostrar tal afirmación, así que lo probaremos.

Debemos probar que existe un $\varepsilon > 0$ para todo $\delta > 0$, existe un $x \in B((0,0), \delta) \cap \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ talque $|f(x,y) - L| \geq \varepsilon$. Sea $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$, escogemos un punto con $x = 0$, luego $|L| \geq \varepsilon$. Por tanto concluimos que $\lim f(x,y) \neq L$, es importante ver que podemos escoger cualquier δ , y cualquiera $L \neq 0$, para probar que $L = 0$ tampoco existe, se tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $x = y$ dentro de la bola $B((0,0), \delta)$, luego $|\frac{1}{2}| \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$. Por tanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \nexists$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, ¿existirá el límite de f cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$? Para ello aplicaremos un truco sin fundamentos que más adelante se aclarará, por ahora supongamos que se puede. Vamos a usar coordenadas polares, notemos que

el punto (x, y) puede expresarse por $(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, donde r es el módulo de (x, y) y θ el ángulo entre el eje x y el segmento que genera el punto (x, y) .



Así

$$f(x, y) = \frac{r \cos(\theta)^3}{(r \sin(\theta))^2 + (r \cos(\theta))^2} = r \cos^3(\theta)$$

Por comodidad, denotaremos este cambio a coordenadas polares por la función $f(r, \theta)$, aun así recalamos que esto no es fundamental. Entonces, ahora nos interesa estudiar

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^3(\theta)$$

ya que nos interesa estudiar la cercanía al punto $(0, 0)$ y cuando esto pasa, necesariamente el radio r se va acercando 0. Entonces podemos decir que

$$(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff r \rightarrow 0$$

Por tanto, como $\cos^3(\theta)$ es acotado tenemos que $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta) = 0$. Por lo que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

”Encontrado” el límite, podemos probar por definición que el límite es efectivamente es 0, pero le comento que es tediosa y más adelante veremos como calcularlo sin usar tanto la definición.

Si aplicamos estas coordenadas para la función $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ se podrá ver que el límite no existe, de hecho $f(r, \theta) = \sin(\theta) \cos(\theta)$, luego se ve los límites alrededor de $(0, 0)$ son distintos.

Teorema 1. Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $P \in \bar{A}$. Supongamos que existe el límite de f . Entonces

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P} f(x_1, \dots, x_n) = L$$



Toda sucesión $\{P_k\}_k \subseteq A$ que converge a P , cumple que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = L$

No demostraremos el teorema por la complejidad, ya que aplica el concepto de sucesiones de funciones.

Ejemplo. Revisemos algunas funciones continuas.

- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ es continua al ser una función polinomial.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ es continua. Pero ¿por qué? no hemos demostrado que e^{algo} es continua en funciones de varias variables, pero podemos demostrarlo. Notemos que $f = h \circ q$ donde $h(x) = e^x$ y $q = (x, y, z) \mapsto x + y + z$ y recordemos la proposición 2 el indicio d) tenemos que la composición de una función de varias variables continua con una función en \mathbb{R} continua, resulta una función continua, de esta forma $h \circ q = f$ es continua.

Observación. Con el ejemplo anterior podemos expandir las funciones en varias variables continuas, de este modo en \mathbb{R} tenemos $e^t, \sin(t), \cos(t), \text{polinomios}, \log(t), \dots$ como funciones continuas en su dominio luego, al aplicar la composición, obtenemos funciones en varias variables continuas.

Cambiando de tema revisaremos que las funciones en varias variables cumplen algunas propiedades dependiendo de como es su dominio, si es cerrado, compacto, abierto, etc.

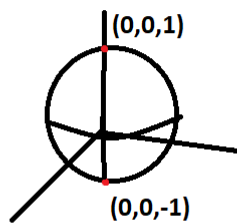
Ejemplo. Sea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, notemos que A es compacto, luego si consideramos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = z$, podemos determinar el máximo y el mínimo de la función, las cuales son $\min f = -1$ y $\max f = 1$. El gráfico de A se aprecia en la figura 21.

Si consideramos el conjunto $B = B((0, 0, 0), 1)$ tenemos que $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x, y, z) = z$ no tiene ni máximo ni mínimo.

Teorema 2. Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza el máximo y el mínimo.

Dicho de otra forma, si tenemos una función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ con K compacta, entonces

1. Existe $P_M \in K$ tal que $f(P_M) = \sup_{x \in K} f(x)$

Figura 21: Gráfica de A

2. Existe $P_m \in K$ talque $f(P_m) = \inf_{x \in K} f(x)$

Para probar este teorema, repasemos la siguiente proposición.

Proposición 3. Sean $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces f es una función acotada.

Nota. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada si existe $C > 0$ talque $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$

Dem. Vamos a probar por contradicción. Supongamos que f no es acotado, si y sólo si podemos construir una sucesión $\{P_k\}_k \subseteq A$ talque $\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = \pm\infty$. Recordemos que podemos construir tomando $M > 0$ y basta tomar $x_1 \in A$ talque $f(x_1) > M$ y así sucesivamente. Como K es compacto existe una subsucesión $\{P_{k_i}\}_i \subseteq A$ que converge a $P \in A$ luego

Afirmación. $\lim_{i \rightarrow \infty} f(P_{k_i}) = f(P)$

Dem.(Afirmación) Dado que f es continua, si

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow P} f(x_1, \dots, x_n) = f(P)$$

entonces toda sucesión $\{P_k\}$ en A que converge a P cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = f(P)$$

si $\{P_{k_i}\}$ es una sucesión que converge a $P \in A$ entonces necesariamente

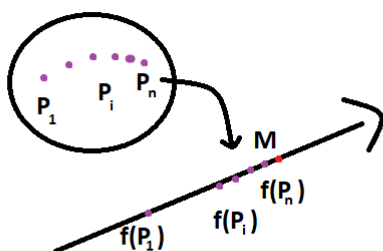
$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(P_{k_i}) = f(P)$$

Probando la afirmación. ■

Pero tenemos una contradicción debido a que $f(P) \neq \pm\infty$, por tanto f es acotado. ■

Observación. La afirmación vista en la demostración, funciona por la caracterización del límite.

Dem. (Teorema 2) Vamos a probar que existe un $Q \in K$ talque $f(Q) = \sup_{x \in K} f(x)$. Por la proposición 3 podemos afirmar que el supremo e ínfimo de f existen, digamos que $\sup_{x \in K} f(x) = M$. Podemos construir una sucesión $\{P_k\}_k \subseteq K$ talque $f(P_k) \rightarrow M$ y esto se puede tomando puntos cercanos M y ordenando los f y luego nombrar cada imagen como P_k construimos tal sucesión.



Como K es compacto, existe una subsucesión $\{P_{k_i}\}_i \subseteq K$ que converge a $P \in K$, por la caracterización de límite y dado que f es continua tenemos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(P_{k_i}) = f(P)$$

Pero como $\{P_{k_i}\}$ es una subsucesión $\{P_k\}$ entonces

$$f(P) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(P_{k_i}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = M$$

Encontrando un $Q = P \in K$ talque $f(Q) = \sup_{x \in K} f(x)$. Para probar el mínimo tenemos dos caminos, el primero es hacer lo mismo que hicimos para encontrar el punto máximo y el otro método es el que presentarmeos. Estudiemos $g = -f$, si $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces encontrando el máximo de g tenemos que

$$-\sup(g) = \inf(-g) = \inf(f)$$

y existe un $Q \in K$ talque $g(Q) = \sup_{x \in K} g(x)$, entonces $f(Q) = \inf(f)$, es decir que f alcanza su mínimo. Probando el teorema ■

Ejemplo. Resumamos la búsqueda de el punto que maximiza una función. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $\sup_{x \in K} f(x) = M \in \mathbb{R}$ entonces existe una sucesión que al aplicar f se acerca M , es decir, existe $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$ talque $\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = M$, y como K es compacto, tenemos que existe una subsucesión y aquí nos detenemos, probamos que existe una subsucesión que si converge $P \in K$ entonces ya tenemos nuestro punto que maximiza a f , pero $\{P_k\}$ puede tener más subsucesiones que convergen a otros puntos distintos a P , aquí entra en juego los puntos de acumulaciones. Sea $\mathcal{L} = \{\text{puntos de acumulación de } \{P_k\}\}$, luego si $l \in \mathcal{L}$ entonces l maximiza a f , aquí podemos ver que existen más puntos que máximizan a f y esto se prueba tomando otra subsucesión de $\{P_k\}$, suponiendo que existe, y aplicar la caracterización de límite. Esto es lo mismo para minimizar a f . En resumen, para encontrar el máximo de f debemos:

- Definir $M := \sup_{x \in K} f(x)$ y existe como K acota a f . (M arbitrario)
- Se define/construye una sucesión $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$ talque $\lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = M$
- Se encuentra cualquier subsucesión convergente de $\{P_k\}$ y verificar que el punto convergente P de la subsucesión está en K (Puede ser cualquier subsucesión, mientras converga en K)
- Finalmente evaluar $f(P)$, encontrado el valor máximo de f .

Análogamente para encontrar el valor que miniza a f y el valor mínimo de f .

Ejemplo. Sea $A = B(0, 1)$, si tenemos una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z$

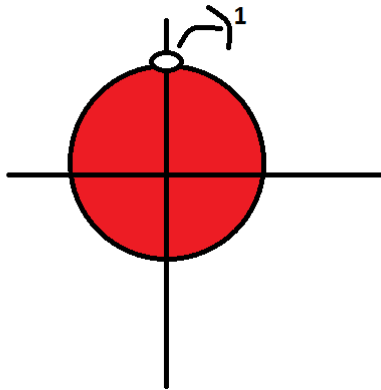


Figura 22: f representada

Tenemos que $\circ \notin A$ y nunca podremos llegar a \circ , por tanto f nunca alcanza su máximo.

Revisemos otro resultado donde tenemos una función continua con dominio abierto.

Teorema 3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea $C \in \mathbb{R}$, entonces

$$f^{-1}((-\infty, C)) := \{x \in A : f(x) < C\}$$

es abierto

Dem. Digamos que $\Omega = \{x \in A : f(x) < C\}$, queremos probar que si $P \in \Omega$ entonces existe $\delta > 0$ talque $B(P, \delta) \subseteq \Omega$. Notemos que si $P \in \Omega$, entonces $f(P) < C$, y aquí podemos generar una vecindad de $f(P)$, sea $\varepsilon > 0$ talque $f(P) + \varepsilon < C$ entonces, por la continuidad de f existe un $\delta > 0$ talque $f(B(P, \delta)) \subseteq (f(P) - \varepsilon, f(P) + \varepsilon) \subseteq (-\infty, C)$, esto implica que $B(P, \delta) \subseteq f^{-1}((-\infty, C))$. Probando que Ω es abierto. ■

Observación. Para ver que $f(B(P, \delta)) \subseteq (-\infty, C)$ implica que $B(P, \delta) \subseteq f^{-1}((-\infty, C))$ basta tomar $x \in B(P, \delta)$, luego $f(x) \in f(B(P, \delta)) \subseteq (-\infty, C)$, luego $x \in f^{-1}((-\infty, C))$. Probando la implicancia.

Podemos probar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua con A abierto, entonces $f^{-1}((C, \infty))$ es abierto. Es análogo al teorema 3 y de esta forma podemos manipular conjuntos preimagenes de f , unirlos e/o intersectarlos para crear nuevos conjuntos abierto.

Nota. En la demostración del teorema 3 nos faltó ver algo, el uso de que A es abierto **Continuar.**

Teorema 4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea $C \in \mathbb{R}$. Entonces $f^{-1}((-\infty, C])$ es cerrado

Dem. (Terminar)

Observación. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, como \mathbb{R}^n es abierto y cerrado, tenemos

- $f^{-1}(a, b)$ es abierto
- $f^{-1}([a, b])$ es cerrado / $f^{-1}(\{P\})$ es cerrado.

Ejemplo. La utilidad del teorema 3, 4 y de las observaciones, es que podemos determinar de forma directa si un conjunto es abierto o cerrado, por ejemplo:

- Sea $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + e^z = 1\}$, entonces A_1 es cerrado. Para verificar notemos que $A_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = x^2 + y^2 + e^z = 1\}$ y como f es continua, por tanto $A_1 = f^{-1}(\{1\})$ es cerrado.
- Sea $A_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2 < e^{x+y+z+w} - \sin(x+y) + \cos(w^z) < 10\}$, entonces A_2 es abierto, ya que si $f(\vec{x}) = e^{x+y+z+w} - \sin(x+y) + \cos(w^z)$ entonces $A_2 = f^{-1}(2, 10)$. Por tanto A_2 es abierto.

Antes de cambiar de tema introduciremos dos conceptos asociados con límites que como tal no nos interesa mucho su estudio, aun así se requiere tener un conocimiento de ello.

Definición 4. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que $\lim_{P \rightarrow \infty} f(P) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ talque si $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Si $L = \infty$, entonces $\lim_{P \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe un $R > 0$ talque si $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$ entonces $f(x) > M$.

El concepto de $P \rightarrow \infty$ es distinto que en \mathbb{R} ya que este último lo asociamos al orden, pero en \mathbb{R}^n es un poquito más complicado, la solución de esto es trabajar con bolas y si x no está en cierta bola entonces $f(x)$ se comporta de determinada forma.

2.2. Derivadas Parciales y Direccionales

Introduciremos los concepto asociados a las derivada de mayores dimensiones. En \mathbb{R} trabajamos la diferencia como la pendiente de un punto o la tasa de crecimiento que posea un punto. En \mathbb{R}^n es la misma idea, solo que tenemos mayor libertad de definir la tasa de crecimiento, vamos a mostrar dos definiciones, una natural que estudia la tasa de crecimiento de un punto y la otra más general, que estudia el crecimiento como vector en cualquier dirección.

Definición 4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $P = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define la derivada parcial con respecto a la variable x_i bajo P por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + he_i) - f(P)}{h}$$

Donde $e_i := (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con el uno en el término i .

Evidentemente f posee derivada parcial en x_i si tal límite existe.

Nota. Definimos sobre un conjunto abierto ya que está relacionado con bolas, y lo que nos interesa es un límite, por lo que queremos saber como se comporta f en una bola de un punto. Si hablamos de conjunto cerrado entonces deberíamos definir bordes y cosas de ese estilo pero que no son el objetivo del estudio.

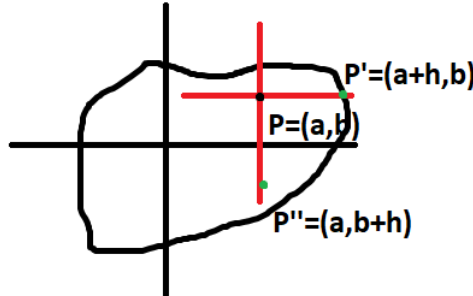
Como mención, en una dimensión $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se puede definir la derivada en los puntos a, b mediante bordes. Para que $f'(a), f'(b)$ estén bien definido basta estudiar la siguiente definición:

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad \text{y} \quad f'(b) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $P = (a, b)$. Supongamos que f satisface las condiciones para ser diferenciable por x e y , luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} \end{aligned}$$

Podemos intentar interpretar las derivadas parciales de una función, si tenemos $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ entonces la derivada parcial con respecto a x es la tasa de crecimiento de en la dirección de x , mientras que la derivada parcial con respecto a y es la tasa de crecimiento en la dirección de y .



Evidentemente en \mathbb{R}^3 tenemos en total tres tasas que estudiar.

Tradicionalmente en una dimensión para estudiar la derivada se usa el grafo de f , en este ejemplo nos interesa estudiar en \mathbb{R}^3 y ver la pendiente que se forma dependiendo de la segunda coordenada. En general estudiar la derivada parcial de una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a una variable x_i , es estudiar la pendiente del grafo de f en el espacio \mathbb{R}^{n+1} en función de x_i .

Observación.

- Si f es una función en A bien definida para ser diferenciable, se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ también es una función en A . $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}\right)$
- El cálculo de derivadas parciales es igual al cálculo de derivadas de una variable.

Ejemplo. Podemos observar que el cálculo de derivadas parciales es calcular la derivada respecto a una variable fija, mientras el resto de variables se tratan como constantes. Si tenemos una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = e^y \sin x - xy$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^y \sin(x+h) - (x+h)y - e^y \sin(x) - xy}{h} \\ &= e^y \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} + y \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - (x)}{h} \\ &= e^y \cos(x) - y \end{aligned}$$

Y la derivada con respecto y y de forma inmediata es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^y \sin(x) - x$$

Las derivadas parciales se pueden extender a vectores, es decir, podemos estudiar derivadas en función de la dirección de un vector. Para ello introducimos la siguiente definición:

Definición 5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $P \in A$. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y sea v un vector unitario. Se define la derivada direccional de f en dirección de v por:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + tv) - f(P)}{t}$$

Aunque usamos un vector v unitario, en realidad podemos usar cualquiera ya que si consideramos v no unitario, entonces $v/\|v\|$ es unitario y además nos interesa la dirección del vector. Una razón de por qué usamos el vector unitario es porque facilita la definición.

La derivada direccional también la podemos representar como la tasa de crecimiento mediante la dirección de v , en la figura 23 se aprecia la dirección de v y su variación.

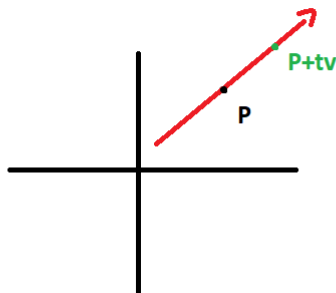


Figura 23: Vectores P y $P + tv$

Observación. Podemos observar que la definición de derivada direccional es intuitiva conociendo la idea de derivada. Ya que toma un punto P y una dirección v , luego tenemos la pendiente relativa $\frac{f(P+tv)-f(P)}{t}$ y queremos estudiar la pendiente de P , por lo que tv debe ir acercándose al vector 0, por lo que necesariamente $t \rightarrow 0$. Además puede notar y comprobar que el cálculo de la derivada direccional es más complicada que la del parcial, por lo que necesitamos y presentaremos un resultado que facilita su cálculo, pero antes hay que introducir algunas definiciones.

Definición 6. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con U abierto. Decimos que f es de clase C^1 si las derivadas parciales de f existen y son continuas.

Nota. En otras partes decimos que f es de clase $C^1(\Omega)$ para decir que $f|_{\Omega}$ es de clase C^1 , o directamente $f \in C^1(\Omega)$. De hecho se puede definir aparte $C^1(\Omega)$ como el conjunto de las funciones diferenciables en Ω tales que esas derivadas son continuas. En estos apuntes tomaremos por ahora ser de clase C^1 acorde a lo que se presenta en la definición 6.

Definición 7. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $P \in A$. Supongamos que f está bien definida para poseer derivadas parciales en todas las variables. Definimos el vector gradiente de P como el vector

$$\nabla f(P) := \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right\rangle \in \mathbb{R}^n$$

Observación. Se puede ver que el vector gradiente es un vector y en algunas ocasiones podemos tomarlo como una función $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ejemplo. Se define una función f por

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Luego las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

Por tanto, el vector gradiente de (x, y) es

$$\nabla f(x, y) = \langle 2x, 2y \rangle$$

Observación. Otra forma de ver el vector gradiente es ver que es la colección en forma de vector de las pendientes de f sobre el punto P con respecto a la tasa de las variables.

Definición 8. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con U abierto. Decimos que $P \in U$ es un punto crítico de f si todas las derivadas parciales evaluadas en P se anulan, es decir

$$\nabla f(P) = 0$$

Ahora podemos estudiar un resultado que asocia la derivada direccional con la gradiente de f .

Teorema 5. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $P \in U$. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in C^1$. Entonces

a) Si $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \nabla f(P) \cdot v$$

Es decir, la derivada direccional se puede determinar con el producto punto del vector gradiente de P y el mismo vector v .

b) *La dirección donde la función crece lo más rápido posible en P es en $\nabla f(P)/\|\nabla f(P)\|$ donde P no es un punto crítico.*

Dem. (Para ver la primera demostración del teorema revise la regla de la cadena I en el índice) Probaremos solo la segunda afirmación, ya que la primera requiere de herramientas que no se han visto.

b) Supongamos que la primera afirmación se cumple, luego por caracterización de producto punto podemos decir que $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \|\nabla f(P)\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta) = \|\nabla f(P)\| \cdot \cos(\theta)$, podemos ver que la derivada direccional sobre v evaluada en P toca su máximo cuando $\theta = 0$, entonces para todo $v \in \mathbb{R}^n$ ocurre que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) \leq \|\nabla f(P)\|$$

y se cumple la igualdad cuando $v = \nabla f(P)/\|\nabla f(P)\|$. Por tanto crece más rápido cuando se trabaja en la dirección $\nabla f(P)/\|\nabla f(P)\|$. ■

Tiene sentido que asociemos la derivada como la tasa de crecimiento de f en dirección v por su definición, así que si queremos maximizar su crecimiento, la derivada direccional debe alcanzar su máximo y eso ocurre cuando la dirección es la misma que el de la gradiente de f en P .

Observación. Podemos determinar cuando decrece más rápido y la forma de hacerlo es análoga para encontrar la dirección donde más crece, basta tomar $\theta = \pi$, luego

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) \geq \|\nabla f(P)\|$$

Y se cumple la igualdad cuando $v = -\nabla f(P)/\|\nabla f(P)\|$

Ejemplo. Sea $f(x, y, z) = e^y + z + x^2$. Sea $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ un vector unitario, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \nabla f(P) \cdot v = \frac{2x}{\sqrt{2}} + \frac{e^y}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

2.3. Curvas en \mathbb{R}^n

Introduciremos otro tipo de funciones las cuales tienen un comportamiento conveniente y permite estudiar conjuntos de manera efectiva. Hasta ahora hemos trabajado con funciones de la forma $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y durante el transcurso de los apuntes uno puede haberse preguntado si podemos trabajar con el conjunto de llegada de una dimensión superior, y la respuesta es afirmativa. En esta breve sección nos centraremos en el estudio de funciones llamadas curvas, que son de la forma $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, empecemos con ejemplos para entender mejor las curvas.

Ejemplo. Sea $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ si graficamos obtenemos la figura 24.

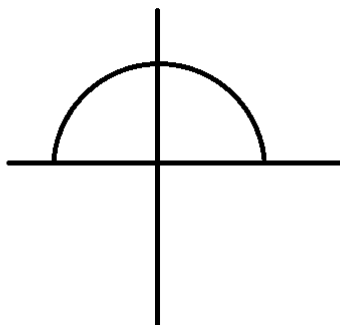


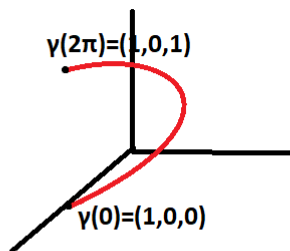
Figura 24: Función γ graficado

Ahora si consideramos la función $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ en $t \in [-1, 1]$ obtenemos la misma gráfica de la figura 24. Lo que hicimos fue manipular γ de forma que obtenemos la misma gráfica con distintos parámetros. Además permite intuir el gráfico de γ .

Ejemplo. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ obtenemos la siguiente gráfica

La función γ toma la circunferencia de radio uno y la estira en el largo 2π , así se llega a la gráfica de arriba.

Ejemplo.



- Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (at+b, ct+d)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ no todos nulos. Podemos interpretar la gráfica de γ como vector, de hecho $\gamma(t) = t(a, c) + (b, d)$ obteniendo una recta donde (b, d) es el punto base con dirección (a, c) .
- Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\gamma(t) = (a_1t + b_1, \dots, a_nt + b_n) = t(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)$. Siendo también una recta con vector posición (b_1, \dots, b_n) y vector director (a_1, \dots, a_n) .

Definamos de manera formal la curva parametrizada.

Definición 9. Una curva parametrizada es una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\gamma(t) := (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

donde $\gamma_i(t)$ se le llama función coordenada de la curva γ

Siguiendo el curso podemos intentar preguntarnos la continuidad y la diferenciabilidad y pareciera que su definición y estudio es más sencilla que las funciones en varias variables y esto es un hecho. Veremos que la continuidad y la diferenciabilidad es natural su definición tanto que las estudiaremos más como observaciones que como definiciones.

Nota. También podemos preguntarnos de forma natural la integral pero es un tópico que se tocará en secciones más adelante.

Recordemos la definición de una curva, de forma más general. Se define una curva como una función $\gamma : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por:

$$\gamma(t) := (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

Cada función coordenada de la curva, necesariamente debe estar bien definida, por lo que si $\gamma_i : U_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$, si γ está bien definida entonces U hace que cada función coordenada esté bien definida. Es decir $\gamma_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida para todo $i = 1, \dots, n$.

Si cada función coordenada es una función de una variable a una variable, entonces podemos definir la continuidad de la curva como si cada curva es continua. Es decir, γ es continua en U si y solo si cada función coordenada es continua en U . De forma más formal sería que si $P \in U$ entonces γ es continua en P si

$$\lim_{t \rightarrow P} \gamma(t) = \gamma(P) \iff \lim_{t \rightarrow P} \gamma_i(t) = \gamma_i(P), \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Nota. Cabe mencionar que las imágenes de una curvas parametrizadas son vectores de \mathbb{R}^n , y como es un espacio podemos sumar/restar coordenadas de esta forma, si:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad \text{y} \quad \zeta(t) = (\zeta_1(t), \dots, \zeta_n(t))$$

Entonces

$$(\gamma + \zeta)(t) = ((\gamma_1 + \zeta_1)(t), \dots, (\gamma_n + \zeta_n)(t))$$

La derivada de γ ocupa esta idea y la única complejidad es ver como se comporta cada función coordenada.

Definición 10. Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. Definimos la derivada de γ por

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

Observación. Por la definición anterior podemos deducir una forma alterna de la derivada de γ en t . Por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\gamma_1(t+h), \dots, \gamma_n(t+h)) - (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t+h) - \gamma_n(t))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h}, \dots, \frac{\gamma_n(t+h) - \gamma_n(t)}{h} \right) \end{aligned}$$

De aquí deducimos el siguiente corolario.

Corolario 1. Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces γ tiene derivada si y sólo si $\gamma_i : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada. Además si $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

Dem. La demostración es en realidad la observación anterior, basta ver que $\gamma(t)$ es derivable si y sólo si cada coordenada posee derivada. Y la expresión γ' también se deduce de la observación anterior. ■

Nota. Un detalle que siempre se debe tener en cuenta es que γ debe estar definido en un conjunto abierto y esto es en general para todo tipo de función.

En resumen, una curva γ satisface la continuidad si cada función coordenadas es continua, de forma análoga para la derivada, la curva γ es derivable si cada función coordenada es derivable. Siendo más específico

$$\begin{aligned}\gamma \text{ continua} &\iff \gamma_i \text{ es continua.} \\ \gamma \text{ derivable} &\iff \gamma_i \text{ es derivable.}\end{aligned}$$

Nota. Podemos decir que γ es de clase C^1 si es diferenciable y su derivada es continua.

¿Será posible una representación gráfica de la derivada de una curva?. Sí, imagine que tiene una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciable en un punto $x \in \mathbb{R}$ y su gráfica es

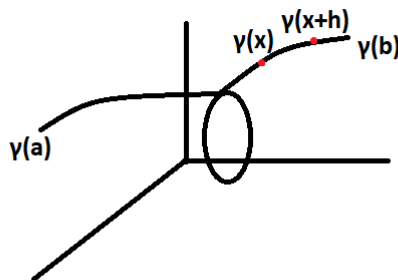


Figura 25: Gráfica de γ .

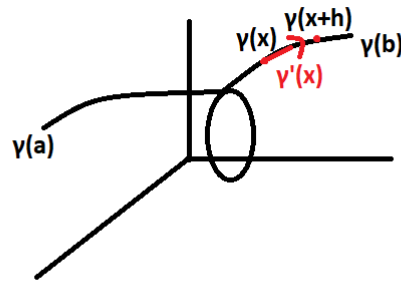
De

$$\gamma'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(x+h) - \gamma(x)}{h}$$

podemos decir que

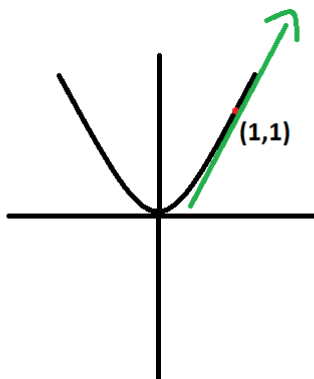
$$\gamma'(x)h \approx \gamma(x+h) - \gamma(x)$$

Luego $\gamma(x+h) \approx \gamma(x) + \gamma'(x)h$, esto nos dice que $\gamma(x+h)$ es tomar $\gamma(x)$ y sumar un múltiplo h de la dirección $\gamma'(x)$. La figura de abajo muestra mejor lo que se quiere decir



Y esto es lo mismo en \mathbb{R}^n . El objetivo de esto es que podemos construir rectas tangente a la curva usando derivadas, y para hacerlo es una forma similar en funciones de una variable a una variable.

Ejemplo. Calcule la recta tangente a la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\gamma(t) = (t, t^2)$, en el punto $(1, 1)$. Grafiquemos la curva:



Para ello necesitamos saber que punto de γ es, luego aplicamos la derivada evaluado en ese punto y construimos la recta $l(t) = (1, 1) + t\gamma'(x)$ con $\gamma(x) = (1, 1)$. Notamos que $\gamma(1) = (1, 1)$, luego

$$\gamma'(t)\Big|_{t=1} = (1, 2t)\Big|_{t=1} = (1, 2)$$

Entonces la recta tangente al punto $(1, 1)$ es $l(t) = (1, 1) + t(1, 2)$.

Nota. Una forma intuitiva de pensarlo es verlo como vectores, en el fondo $\gamma'(x)$ es un vector que define la dirección y el punto $(1, 1)$ es el vector de posición. Así es es más fácil determinar recta en mayores dimensiones.

La idea de encontrar rectas tangentes en curvas se puede aplicar para todo espacio de mayor dimensión.

Ejemplo. Calcule la recta tangente a la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (t, t^2, \cos(t))$, en el punto $(0, 0, 1)$. De forma análoga al ejemplo anterior, derivamos γ y evaluamos. Si $\gamma(0) = (0, 0, 1)$ entonces

$$\gamma'(0) = (1, 0, 1)$$

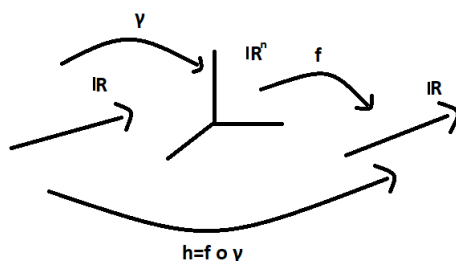
Luego la recta que buscamos es $l(t) = t(1, 0, 1) + (0, 0, 1)$.

Es importante tener en cuenta que la recta tangente a un punto no siempre es determinable o que nos falta definir algunas cosas, por ejemplo, en la figura 25 tenemos un punto que pueden generarse dos direcciones, donde la función choca consigo mismo, aquí dependiendo de donde se trabaja podemos sacar dos direcciones. Una posible solución a esto es trabajar con una variable tiempo de la forma de que si parte de a y va hacia b entonces en un t_1 del punto de la intersección podemos generar la dirección v_1 , mientras en un t_2 del mismo punto, podemos generar v_2 . Aun así se vuelve específico y esto no nos interesa ahora. Solo tengamos en cuenta esta posibilidad.

2.4. La regla de la cadena I

La regla de la cadena, aunque no lo parezca es un tópico muy importante y tiene que ver con funciones compuestas, hasta ahora hemos visto funciones en varias variable y curvas parametrizadas por lo que estudiaremos funciones compuesta por curvas y funciones en varias variables. Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(t) := f(\gamma(t))$.

Podemos ver que h está bien definida ya que $Im(\gamma) \subseteq \mathbb{R}^n = Dom(f)$. Una forma de entenderlo es ver la figura de abajo.



Queremos de alguna forma aplicar la regla de la cadena pero con respecto a γ y f , supongamos que ambas funciones son de clase C^1 . ¿Podemos calcular h' ? y ¿cómo calcularlo?. La respuesta como tal es más complicada por lo que daremos un resultado para responder si podemos y cómo calcular h' .

Teorema 6.(Regla de la cadena) Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ambos en C^1 . Sea $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. Entonces

$$h'(t) = \gamma'_1(t) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) + \dots + \gamma'_n(t) \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

La demostración de la regla de la cadena es sale de los conocimientos actuales, aun así se dejará la demostración. Para entender la demostración se recomienda estudiar la regla de la cadena II.

Dem.(Opcional) Si f, γ son de clase C^1 entonces las matrices Jacobiana están bien definidas. Luego

$$h'(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{bmatrix}$$

Luego $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. ■

Nota. Puede observar que el teorema ofrece una fórmula general de la regla de la cadena en una dimensión, si recordamos si f, g son funciones diferenciables, entonces $h(x) = g(f(x))$ tiene por derivada $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$. Es casi lo mismo para n dimensiones.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Luego si $h(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, entonces $h'(t) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_2(t)) \right\rangle \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Ejemplo. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = e^{x+y} + \cos(x^2)$ y la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$. Notemos que ambas son diferenciable y que $h(t) = f(\gamma(t)) = e^{t+t^2} + \cos(t^2)$, saquemos h' sin usar el teorema.

$$h'(t) = e^{t+t^2}(1+2t) - 2t \sin(t^2)$$

Ahora usando la regla de la cadena tenemos que

$$h'(t) = \left(e^{t+t^2} - 2t \sin(t^2), e^{t+t^2} \right) \cdot (1, 2t)$$

Si realizamos el producto punto obtenemos lo mismo que arriba. Verificando que se cumple la regla de la cadena.

Veremos algunas aplicaciones que ofrece la regla de la cadena pero antes generalizemos el concepto de clase, tanto para curvas como funcione sen varias variable.

Definición 10. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

- Decimos que f es de clase C^1 si todas las derivdas parciales son continuas.
- Decimos que f es de clase C^2 si todas las derivadas parciales posee derivadas parciales y estas son continuas
- Decimos que f es de clase C^n si f posee derivadas de orden n y esta son continuas.

Puede que el concepto de que f posea derivadas de orden n sea confuso, y la idea es que estamos considerandos funciones de A a \mathbb{R} de la forma

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{n-1}}} \right) \frac{\partial f}{\partial x_{i_n}} \right) (x_1, \dots, x_n)$$

donde hay n derivadas presente. Y esta función es continua.

Para una curva γ ser de clase C^n significa que es n veces derivable y esas derivadas son continuas.

2.4.1. Aplicaciones

Aplicación 1. Con la regla de la cadena podemos probar la primera parte del teorema 5 para ello hagamos algunas observaciones. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con U abierto y f una función de clase C^1 . Entonces dado $(v_1, \dots, v_n) = v \in \mathbb{R}^n$ la derivada direccional con respecto al punto $P = (a_1, \dots, a_n)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \nabla f(P) \cdot v$$

Ahora pensemos en la derivada direccional por la definición

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(P) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + tv) - f(P)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a_1, \dots, a_n) + t(v_1, \dots, v_n)) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

Notemos que $(a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n)$ es una curva, digamos que $h(t) = f(a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n)$, entonces $h'(t) = \nabla f(a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n) \cdot (v_1, \dots, v_n)$, además podemos observar que si $t = 0$ entonces

$$h'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(0 + s) - h(0)}{s} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P + tv) - f(P)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(P)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \nabla f(P) \cdot v$$

Concluyendo lo que queremos probar.

Aplicación 2. Con anterioridad estudiamos el como buscar rectas tangentes a curvas, en este caso vamos a encontrar planos tangentes a un punto P de una superficie de nivel definida por una función dada.

El concepto es bastante complejo por lo que trabajaremos en \mathbb{R}^3 y luego concluiremos que se puede realizar para cualquier dimensión n . Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y sea la superficie de nivel k definida por $A_k := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = k\}$

Queremos determinar, si existe, el plano que es tangente al punto P y para ello necesitamos realizarlas siguientes preguntas

- ¿Qué es el plano tangente P ?
- ¿Cómo calcular el plano tangente? en caso de existir

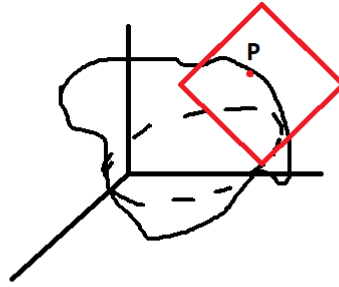


Figura 26: Superficie de nivel k y el plano tangente en el punto P

Pensemos en curvas, ya que recordemos que un plano se genera por vectores directores y un vector posición y además podemos crear vectores directores con pendientes de curvas en virtud de la derivadas de las curvas, en \mathbb{R}^3 debería basta determinar dos vectores directores o mejor dicho, debería basta encontrar dos curvas γ, ζ tales que pasan por P de forma que están bien definidas y, luego generar dos vectores directores además de incluir el vector posición P y formar el plano tangente. Más formalmente, el plano tangente a P es la unión de todas las direcciones tangentes a las curvas que pasa por P . Esto último es la definición formal que no estudiaremos como tal.

Entonces, lo que vamos hacer para estudiar de alguna forma el plano tangente a P es tomar una curva arbitraria bien definida que pase por la superficie A_k luego definimos una función compuesta y finalmente usamos la regla de la cadena. Esto en la práctica sería:

Sea $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde $\gamma(0) = P$ y $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq A_k$ de forma que tenemos una curva que se mueve por A_k y pasa por P . Luego definimos $h(t) := f(\gamma(t)) = k$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces $h'(t) = 0$ ya que $h(t)$ es una constante, y por la regla de la cadena tenemos que

$$h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

tomando $t = 0$ tenemos que

$$\nabla f(P) \cdot \gamma'(0) = 0$$

Si P no es un punto crítico tenemos entonces que el gradiente de f en P es el vector normal del plano. Ya que estamos considerando el vector director $\gamma'(0)$ y como el producto punto es 0 se tiene que son perpendiculares. Como γ es arbitrario podemos hacerlo con cualquier curva que satisfaga las condiciones, para encontrar el plano tangente a P basta usar la siguiente ecuación del plano:

$$\nabla f(P) \cdot ((x, y, z) - P) = 0$$

La observación más importante es que la condición de que el codominio de γ sea \mathbb{R}^3 en realidad no afecta en nada, es más, para \mathbb{R}^n podemos realizar el mismo procedimiento y obtener una ecuación normal general del plano para una superficie de nivel A_k .

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x, y, z) = xyz$. Calcule el plano tangente a la superficie de nivel 1 definida por $A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$ en el punto $P = (1/2, 1/2, 4)$.

Por la aplicación 2 sabemos que $\nabla f(P)$ es la norma del plano, luego

$$\nabla f(P) = (2, 2, 1/4)$$

Sea (x, y, z) un vector de plano, entonces la ecuación del plano es

$$((x, y, z) - (1/2, 1/2, 4)) \cdot (2, 2, 1/4) = 0 \iff 2x + 2y + \frac{z}{4} - 3 = 0$$

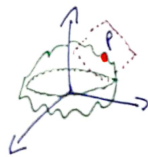
Con esto cerramos el tema introductorio de funciones en varias variables y de algunas cosas. Y antes de pasar a la nueva sección es importante realizar un breve resumen.

1. Topología en \mathbb{R}^m
 \hookrightarrow Conjuntos abiertos, cerrados, compactos.

2. Funciones $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$
 \hookrightarrow Continuidad, derivadas, máx o mín.

3. Curvas en \mathbb{R}^m $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$
 \downarrow
 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$

4. Planos Tangentes.



Escaneado con CamScanner

Hemos pasado por topología básica de \mathbb{R}^n , de como son los conjuntos abiertos, cerrados, compactos. De como caracterizar y de sucesión en \mathbb{R}^n y de límites de sucesiones.

Luego introducimos funciones en varias variables a una variable, de como se ven, algunas gráficas y de límites para luego introducir la continuidad y de como derivar estas funciones, aquí también hablamos de curvas, también la continuidad y las derivadas de estas e introducimos un poco la regla de la cadena para luego cerrar con breve concepto de planos tangentes que más adelante extenderemos para cualquier conjunto.

3. Diferenciabilidad

La diferenciabilidad es un concepto más general que la derivada, en la sección anterior hablamos de derivadas parciales, direccionales y de curvas. Pero nunca hablamos de que sean funciones diferenciables y en esta sección expandiremos e intrudicaremos el concepto de diferenciabilidad.

Recordemos que en funciones de una variable a una variable tenemos que la diferenciabilidad se expresa por lo general: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe y esto equivale a afirmar que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0$$

De aquí podemos concluir que $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + s(h) \cdot h$ con $s(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, por conveniencia diremos que $r(h) = s(h) \cdot h$, luego

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + r(h), \text{ donde } \frac{r(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

De esta forma

$$f \text{ tiene derivada en } x \iff f(x+h) = f(x) + hf'(x) + r(h), \quad \frac{r(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

A la parte derecha le decimos expansión de Taylor de orden 1. Notemos que $r(h)$ la función error, converge a 0 mucho más rápido que h . Esto podemos extenderlo a mayores dimensiones.

Definición 1. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función con U un conjunto abierto. Sea $P \in U$. Decimos que f es diferenciable en P si existen $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P+h) - f(P) - \sum_{i=1}^n A_i h_i}{\|h\|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(P+h) = f(P) + \sum_{i=1}^n A_i h_i + r(h)$$

donde

$$\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Donde $h = (h_1, \dots, h_n)$

Podemos interpretar que f es diferenciable en P si hay una expansión de Taylor de orden 1.

Naturalmente nos molesta esos A_i y que en una función de una variable eso es $f'(x)$, por lo que podemos intuir que pueden ser A_i , el siguiente lema nos responde de forma inmediata nuestras supociciones.

Lema 1. *Si f es diferenciable en P entonces*

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, A_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)$$

Dem. Vamos a demostrar que

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)$$

El resto de A_i es de una forma análoga. Por definición tenemos la siguiente expansión de Taylor

$$f(P + (h_1, \dots, h_n)) = f(P) + A_1 h_1 + \dots + A_n h_n + r(h_1, \dots, h_n)$$

donde

$$\frac{r(h_1, \dots, h_n)}{\|(h_1, \dots, h_n)\|} \xrightarrow{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow 0} 0$$

En la definición de derivada nos interesa que $(h_1, \dots, h_n) \rightarrow 0$ no tanto como es h , tomemos $h = (h_1, \dots, 0)$, luego tenemos que f al ser diferenciable en P obtenemos la siguiente expresión:

$$f(P + h_1 e_1) = f(P) + A_1 h_1 + r(h_1, \dots, 0)$$

donde

$$\frac{r(h_1, \dots, 0)}{|h_1|} \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} 0$$

Luego despejando A_1 y tomando $h_1 \rightarrow 0$ obtenemos que

$$\frac{f(P + h_1 e_1) - f(P)}{h_1} = A_1 + \frac{r(h_1, \dots, 0)}{h_1} \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) = A_1$$

Ya $h \rightarrow 0$ entonces $h_1 \rightarrow 0$ llegando a que

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)$$

Como queríamos probar. ■

Podemos concluir que f es diferenciable en P si y sólo si la expansión de Taylor orden 1 se expresa como

$$\begin{aligned} f(P + (h_1, \dots, h_n)) &= f(P) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)h_n + r(h_1, \dots, h_n) \\ &= \nabla f(P) \cdot (h_1, \dots, h_n) + r(h_1, \dots, h_n) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{r(h_1, \dots, h_n)}{\|(h_1, \dots, h_n)\|} \xrightarrow{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow 0} 0$$

Esta conclusión nos facilita en la búsqueda de saber si f es diferenciable en P o no. Para no verificarlo por definición se debe probar que f posea todas las derivadas parciales y que existe un $r(h)$ talque

$$\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

y que luego

$$f(P + h) = f(P) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i + r(h)$$

Es casi igual de tedioso pero en útil en algunas circunstancias. Pero existe un resultado que solo ver que f es de clase C^1 entonces f es diferenciable en todo su dominio. El teorema es el siguiente.

Teorema 1. *Si f es de clase C^1 entonces f es diferenciable.*

La demostración requiere del teorema de valor medio de lagrange que no hemos visto, pero si quiere intentar demostrarlo se sugiere ver este teorema.

Ejemplo. Sea $f(x, y) = e^{2x+y} + \cos(x + 2y)$. Notemos que f es de clase C^1 , entonces f es diferenciable. Encontremos la expansión de Taylor de orden 1 en el punto $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= 1 \end{aligned}$$

Luego

$$f(h_1, h_2) = 2 + 2h_1 + h_2 + r(h_1, h_2)$$

con

$$\frac{r(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow 0} 0$$

Teorema 2. (Teorema de Schawrz) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

Dem.(continuar...)

La importancia de la expansión de Taylor es que es una aproximación de una función y cuando decimos que es de orden 1 nos referimos a una aproximación lineal, podemos intentar mejorar la aproximación con una parte cuadrática. Es decir, si tenemos una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y estudiamos alrededor del punto $(0, 0)$, entonces queremos que

$$f(x, y) = f(0, 0) + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + r(x, y)$$

donde

$$\frac{r(x, y)}{\|(x, y)\|^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow 0} 0$$

Teniendo una parte cuadrática y lineal, incluyendo un resto que decrece más rapido que la norma de (x, y) .

En \mathbb{R}^n vamos a tener como coeficientes $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$, es decir, n^2 elementos, y esto podemos expresarlo de forma conveniente, de hecho si f tiene una expansión de Taylor de orden 2, entonces

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Porsupuesto que no probaremos este hecho ya que se aleja mucho de lo que queremos y tendríamos que hablar de doble diferenciabilidad. Solo nos quedaremos con el siguiente teorema que no demostraremos por falta de conceptos.

Teorema 3. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $P \in U$. Supongamos que f es de clase C^2 . Entonces

$$f(P + h) = f(P) + \nabla f(P) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P) + r(h)$$

donde

$$\frac{r(h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Nota. Note que $r(h)$ tiene un crecimiento distinto a Taylor de orden 1, en este caso queremos que $r(h)$ decrezca más rápido que $\|h\|^2$.

Podemos notar que si f es de clase C^2 entonces podemos expresar con el graiente de f sobre P y una matriz de coeficiente derivadas parciales de orden 2 multiplicado con otra matriz de coeficiente $h_i h_j$. Vamos a definir la matriz Hessiana de f en P .

Definición 2. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Se define la matriz Hessiana de f con respecto al punto P por

$$Hess(f)(P) = H(f)(P) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

En virtud del teorema de Schawrz, no necesitamos calcular cada derivada de segundo orden, basta con arriba de la diagonal incluyendola o abajo de esta, también incluyendo la diagonal. De esta forma si f es de clase C^2 entonces para $P \in U$ existe una expansión de Taylor de segundo orden expresado como

$$f(P+h) = f(P) + \nabla f(P) \cdot h + \underline{H} \cdot \frac{1}{2} H(f)(P) \cdot \overline{H} + r(h)$$

donde

$$\frac{r(h)}{\|h\|^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ y } \underline{H} = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_n], \quad \overline{H} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Nota. Los vectores $\underline{H}, \overline{H}$ es para simplificar, no es una notación usada, solo es para este apunte.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{2x+y} + \cos(x+2y)$. Notemos que f es una función de clase C^2 , encontremos cada derivada parcial de orden 1 y 2 con respecto al punto $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= 3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= -3 \end{aligned}$$

Entonces

$$e^{2x+y} + \cos(x+2y) = 2 + 2x + 2y + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + r(x, y)$$

donde

$$\frac{r(x, y)}{\|(x, y)\|^2} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow 0} 0$$

¿Cuál es la finalidad de Taylor de segundo orden?. La idea de usar Taylor es ver que $f(x)$ es la suma de un polinomio con un resto, es decir, $f(x) = p(x) + r(x)$ donde $p \in \mathbb{R}[x]$. Donde este polinomio es una que aproxime a f por derivadas cercanas a un punto. Pero más que eso es que nos sirve para estudiar el crecimiento de f y de los puntos que lo contienen. Por ejemplo, en cálculo 1 existe el siguiente teorema.

Teorema (Cálculo I) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 . Si $f'(x) = 0$ entonces

1. Si $f''(x) > 0$ entonces f tiene mínimo local en x .
2. Si $f''(x) < 0$ entonces f tiene un máximo en x .
3. Si $f''(x) = 0$ entonces es inconcluso.

La demostración del teorema requiere del uso de Taylor de segundo orden, revisemos un teorema que usa una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con la misma idea de puntos críticos y la matriz Hessiana.

Teorema 4. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2$ una función de clase C^2 con U abierto. Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto crítico y H la matriz Hessiana con respecto a P . Entonces

1. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$ y $\det H > 0$, entonces f tiene mínimo local en P
2. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$ y $\det H > 0$, entonces f tiene máximo local en P
3. Si $\det H < 0$, entonces f tiene un punto silla
4. Si $\det H = 0$ entonces es inconcluso.

Ejemplo Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Afirmamos que f tiene un mínimo local en $(0, 0)$ y en efecto. Notemos que

$$H = \text{Hess}(f)(P) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ y que } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

Entonces en $(0, 0)$ se alcanza el mínimo local.

Si intentamos demostrar el teorema, ocurrirá lo siguiente. Dado $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 y $P = (x_0, y_0)$ un punto crítico de f , entonces por la expansión de Taylor de segundo orden tenemos que

$$\begin{aligned} f(P + (x, y)) &= f(P) + \nabla f(P) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H(f)(P) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + r(x, y) \\ &= f(P) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H(f)(P) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + r(x, y) \end{aligned}$$

y queremos probar que $f(P)$ es máximo o mínimo o punto silla o que es inconcluso, pero no sabemos como tratar

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot H(f)(P) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Para ello vamos a introducir un concepto de álgebra lineal, que el concepto de una matriz definida positiva.

Definición 3. Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Decimos que A es definida positiva/negativa si para todo v no nulo se tiene que $v^T A v > 0 / < 0$

Lema 2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

. Supongamos que $a > 0$ y que $ac - b^2 > 0$. Entonces A es definida positiva.

Dem. Notemos que A es simétrica, luego

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^{-1}$$

Con P invertible, además $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. Entonces λ_1 y λ_2 tiene igual signo. Como $a > 0$ se tiene que ambos elementos son positivo. Por tanto A es definido positiva. ■

Volvamos al teorema 4, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ y $\det H > 0$ entonces H es definida positiva, de aquí manipulando Taylor de segundo orden concluimos para un pequeño intervalo que f tiene mínimo local en P . Y sabemos que H es definida positiva de manera manual, es facil comporbar, lo mismo para ver si es definida negativa. Pero esto funciona para f definida en subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Aun así el teorema 4 y con el concepto de definida positiva podemos extender para toda función definida en un subconjunto de \mathbb{R}^n , pero antes probemos el teorema 4.

Dem.(Teorema 4) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 y $P \in U$, luego sea $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, entonces por la expansión de Taylor de segundo orden, tenemos que:

$$f(P + h) = f(P) + \nabla f(P) \cdot h + h^T H(f)(P)h + r(h)$$

Si P es un punto crítico de f entonces

$$f(P + h) = f(P) + h^T H(f)(P)h + r(h)$$

Luego

$$f(P + h) - h^T H(f)(P)h + r(h) = f(P) + r(h)$$

Ahora basta ir comprobando caso por caso, si $\det H > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, entonces H es definida positiva por el lema 2, luego para un h suficientemente pequeños se tiene que

$$f(P + h) \geq f(P)$$

si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ y $\det H > 0$ entonces H es definida negativa por el lema 2, luego

$$f(P + h) \leq f(P)$$

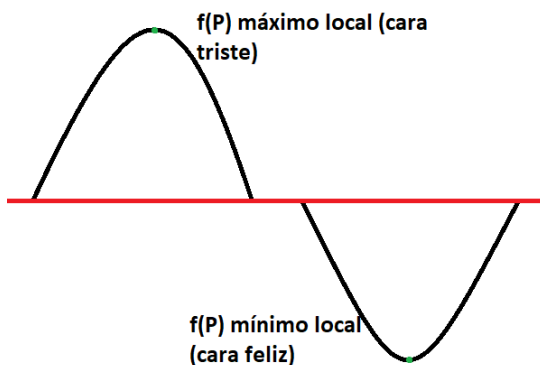
No se demostrar para el punto silla, ni para $\det H = 0$. ■

Intruducimos la generalización para funciones definida en subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Teorema 5. Sea f de clase C^2 y P un punto crítico talque $Hess(f)(P)$ es definida positiva(negativa). Entonces P es un mínimo local (máximo).

La demostración del teorema 5 es análoga al teorema 4, la única diferencia es que se asume de primeras que $H(f)(P)$ es definida positiva o negativa.

Observación. Un truco para no olvidar las implicancia es que si $H(f)(P)$ es definida positiva, la asociamos con una cara con sonrisa luego el punto de más es $f(P)$ y así $f(P)$ es mínimo local. Si $H(f)(P)$ es definida negativa pensar en una en una cara triste, el punto de más arriba es $f(P)$, luego es máximo local.



Es importante no confundir los máximos y mínimos locales con los globales, el que $f(P)$ sea máximo local no implica que f tenga máximo global.

Lema 3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y $P \in A^\circ$. Si f se maximiza o minimiza en P , entonces P es un punto crítico de f .

Dem. Supongamos que P no es punto crítico de f , entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) > 0$ para todo i o $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) < 0$ para todo i . Tomando i fijo tenemos que entonces f crece dirección x_i o decrece en dirección $-x_i$. Esto implica que f sigue creciendo un poco más en P o decrece un poco más en P , por lo que P no maximiza o miniza a f . Una contradicción. ■

Supongamos ahora que tenemos una superficie de nivel independiente de una función f y queremos maximizar o minimizar la función sobre la superficie. Si tenemos una superficie de nivel k con respecto a una función g y queremos maximizar f , podríamos estudiar la intersección

de las curvas de f y la superficie o curva de g de nivel k . Si escogemos f y g de forma adecuada necesariamente la superficie o curva de nivel l de f se tocará con la superficie que genera g . Digamos $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ y la forma de Y es como se muestra en la figura 27. Podemos ver dos cosas en la figura 27. Una que la curva de f toca a Y , y de hecho se intersectan

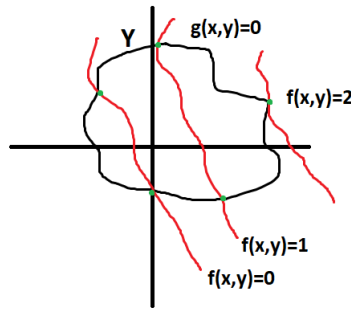
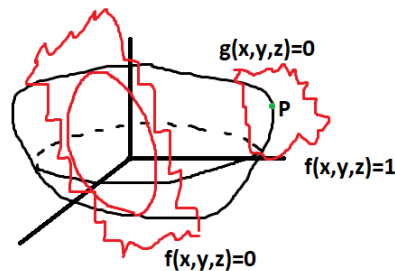


Figura 27: Y y las curvas de nivel de f

en dos puntos como impusimos y que cada vez se mueve hacia la derecha la curva f aumenta de valor y esto claro no ocurre en todos los casos. Lo que queremos ver es que en algún momento la curva de nivel de f toca solamente en un punto de Y , ya que si toca dos puntos entonces podemos tomar otra curva que esté más a la derecha que esta, por lo que en algún momento debe tocar un punto. En este caso f se maximiza en P y $f(P) = 2$. Maximizando la función f sobre Y .

Aun así lo que vimos es un caso particular, revisemos en \mathbb{R}^3 , considere la superficie de nivel 0 de g y una función f a maximizar. Si la figura resultante de la superficie de nivel 0 de g y las superficies de nivel 0 y 1 de f es



Donde además la superficie de f de nivel 1 toca a la superficie de nivel 0 de g , podemos decir que P maximiza a f . Una cosa importante a destacar es que tanto este ejemplo como el anterior, ocurre que la curva y superficie de f son casi tangentes a g en el punto P y de hecho, si P maximiza a f o lo minimiza, entonces $\nabla f(P)$ y $\nabla g(P)$ se hacen paralelos y esto es en realidad un teorema importante ya que de él podemos construir un algoritmo que permite encontrar máximos y mínimos sobre una superficie. El teorema en cuestión es:

Teorema 6. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 . Sea $Y = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \dots, x_n) = 0\}$. Si P es un máximo o mínimo de f en Y y P es un punto suave de Y (Es decir, $\nabla g(P) \neq 0$) entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ talque

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

Supongamos que tenemos funciones $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y Y la superficie de nivel 0 de g . Si existe λ talque

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

Entonces tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(P) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(P) \end{aligned}$$

Por lo que todo se reduce a estudiar el sistema, si λ es complejo entonces f no se puede maximizar o minimizar en Y . Si de alguna se puede determinar $P = (p_1, \dots, p_n)$ entonces dependiendo de la cantidad podemos ver si es máximo o mínimo. Hay que saber estudiar bien el conjunto Y y del comportamiento de f . Y un añadido que sirve bastante, si Y es compacto entonces f alcanza esos máximos o mínimos ya que puede ocurrir que existen esos P pero puede que f no los alcance o que P no sea punto suave. En cualquier caso ir con cuidado al resolver estos tipos de problemas.

Ejemplo. Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Tenemos que $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, luego Y es el borde de una circunferencia y es compacto. Sea $f(x, y) = x^2 + xy$, nos interesa maximizar o minimizar f en Y . Sea $P = (x, y)$ luego, supongamos que existe tal $\lambda \in \mathbb{R}$, de este modo

$$(2x + y, x) = \lambda(2x, 2y)$$

Luego tenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= \lambda 2x \\ x &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Concluimos que

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Obteniendo 4 puntos posibles y necesariamente está el que maximiza o minimiza a f en Y . Ya que Y al ser compacto es acotado luego f debe alcanzar esos puntos. Este método se le conoce como método de Lagrange.

El método de Lagrange no es único método para determinar puntos P , podemos usar curvas para determinar tales puntos.

Sea $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, y sea $h(t) = f(\gamma(t))$. Lo que nos dice γ es que estamos considerando el alrededor de la curva de nivel de g en 0. Si derivamos h obtenemos que

$$h'(t) = \cos(2t) - \sin(2t)$$

y como queremos maximizar o minimizar f , tendremos que tales puntos t son críticos en h , es decir, $h'(t) = 0$, luego

$$\tan(2t) = 1$$

Dejando como únicas opciones $t = \pi/8, 5\pi/8, 9\pi/8, 13\pi/8$. Siendo los puntos que buscábamos, solo basta estudiar h'' y verificar que f se maximiza o minimiza en Y .

¿Por qué funciona el método de curvas? Notemos que γ del ejemplo anterior de alguna forma reemplaza a g ya que Y es la circunferencia de radio 1 centra en el origen, lo mismo con la gráfica de γ . Lo que estamos haciendo es pensar de otra forma, este método funciona ya que γ reemplaza a Y además al compositarla con f generamos una función h perfectamente graficable en \mathbb{R}^2 y luego cuando f se maximiza en t_0 entonces h toca su máximo luego la derivada necesariamente es nula y aquí podemos deducir los puntos. Aun así los puntos t que encontremos al ponerlo en $\gamma(t)$ generan los puntos P y esos maximiza o minimiza a f sobre Y . La única desventaja es que no siempre podemos o es complejo determinar la curva γ .

4. Funciones de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n

Todas las secciones anteriores hablamos de funciones en varias variables y de curvas pero lo relevante son funciones más generales, como funciones de la forma $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, funciones a las cuales les llamamos funciones de varias variables a varias variables. Introducimos ahora el concepto ya que son algo complejas y es más fácil empezar por parte más que todo completo. Por lo que volveremos a revisar la continuidad, la diferenciabilidad y la regla de la cadena. Pero gracias a lo que vimos en las secciones anteriores será más sencillo entender cada concepto.

Revisemos algunos ejemplos para ver como se comportan estas funciones.

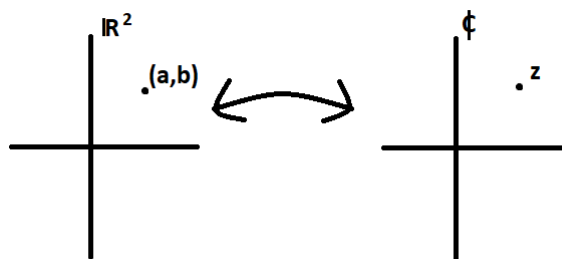
Ejemplo. Revisemos algunas formas posibles de F

- Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (a, b)$ con a, b fijo. Tenemos que F es una función constante. No es tan peculiar pero es un paso obligatorio para entender mejor las funciones de la forma de F .

- Existen funciones F que son lineales como $F(x, y) = (2x + y, \sqrt{2}x - ey)$ o $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Recordemos que una función $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es lineal si

- $F(v + w) = F(v) + F(w)$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^m$.
 - $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^m$,
- También existen funciones no lineales como $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ y una importancia de estas funciones es que podemos trabajar con una función equivalente. Pensemos en $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = z^2$. De una forma gráfica



Notamos que $g \equiv F$, así para entender F basta con entender g .

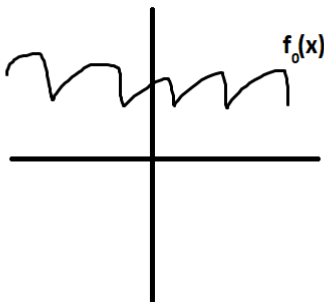
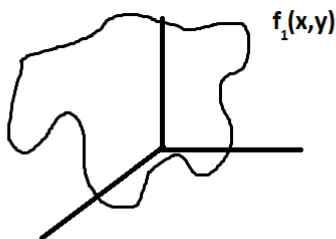
- Otro tipo de funciones son las funciones en varias variables a \mathbb{R} . Es decir, funciones de la forma $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y curvas parametrizadas, funciones de la forma $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que hemos estudiado a profundidad.

Cada función mostrada abre un amplio estudio, como las funciones lineales que son objeto de estudio para todo el curso de álgebra lineal y que tienen cierta dificultad, ahora vamos a estudiar funciones más generales, funciones no lineales por lo que son más complicadas de ver y que en su momento se tomará con lentitud.

Un problema natural es ver la gráfica de una función en varias variables a varias variables. Intentemos ilustrar la gráfica de una de estas funciones

Ejemplo.

- El gráfico de la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se define por $G_f := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}\}$. Si tenemos la función $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $G_{f_0} \subseteq \mathbb{R}^2$ y sería algo como la figura 28 aunque depende de cómo está definida f_0
- El gráfico de la función $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un poco más elaborada, hay que notar que $G_{f_1} \subseteq \mathbb{R}^3$ y sería algo como la figura 29.

Figura 28: Gráfica de f_0 Figura 29: Gráfica de f_1

Un truco sería ver que la gráfica de f_1 es tomar (x, y) luego evaluar y levantar este punto a la altura $f(x, y)$, con anterioridad vimos esta técnica, pero ahora vamos a generalizarlo para mayores dimensiones.

- Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera y $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$$

La imagen de F es la gráfica de f . Es una función que más adelante usaremos con mucha frecuencia.

Observación. Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, podemos expresar F de la siguiente forma:

$$F(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$$

donde f_i es la función coordenada definida como $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Para simplificar podemos decir que $F = (f_1 \dots, f_n)$.

4.1. Continuidad y Diferenciabilidad

Al igual que las funciones en varias variables y en las curvas estudiaremos la continuidad y diferenciabilidad de funciones $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Observación. El límite de una función $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es similar al límite de una función en varias variables solo que la imagen de F debemos tratarlo con distancia. Dado $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ bien definido, sea $P \in \overline{A}$, definimos el límite de F cuando Q tiende a P por:

$$\lim_{Q \rightarrow P} F(Q) = L \in \mathbb{R}^n$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque si $0 < d(Q, P) < \delta$ y $Q \in A$ entonces $d(F(Q), L) < \varepsilon$.

Entonces la continuidad se define por:

Definición 1. Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Decimos que F es continua en el punto $P \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque si $d(P, Q) < \delta$ entonces $d(F(P), F(Q)) < \varepsilon$.

Nota. Es evidente que F es continua en P si $F(P)$ está bien definida y que

$$\lim_{Q \rightarrow P} F(Q) = F(P)$$

Aun así, no usaremos la definición de continuidad ya que entorpece los cálculo por lo que trabajaremos con un resultado que muestra que las funciones $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene un cierto parecido a las curvas.

Proposición 1. Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. F es continua
2. $\lim_{Q \rightarrow P} F(Q) = F(P)$
3. $F(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ f_i son continuas.

Dem. Las afirmaciones 1. y 2. son equivalentes, por lo que solo demostraremos que la equivalencia 2. y 3.

\Leftarrow) Si $f_i(P)$ está bien definido entonces $F(P) = (f_1(P), \dots, f_n(P))$ está bien definido. Probemos que $\lim_{Q \rightarrow P} F(Q) = F(P)$. Sea $\varepsilon > 0$, luego para todo $i = 1, \dots, n$, existe $\delta_i > 0$ talque si $d(Q, P) < \delta_i$ y $Q \in A$ entonces

$$|f_i(Q) - f_i(P)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Luego si $d(Q, P) < \delta := \min_{i=1, \dots, n} \{\delta_i\}$ entonces

$$\sqrt{(f_1(Q) - f_1(P))^2 + \dots + (f_n(Q) - f_n(P))^2} < \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$$

Por tanto $\lim_{Q \rightarrow P} F(Q) = F(P)$.

\Rightarrow) Sea i fijo. Luego sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ talque si $d(Q, P) < \delta$ y $Q \in A$ entonces

$$\sqrt{(f_1(Q) - f_1(P))^2 + \dots + (f_n(Q) - f_n(P))^2} < \varepsilon$$

Si

$$|f_i(Q) - f_i(P)| \leq \sqrt{(f_1(Q) - f_1(P))^2 + \dots + (f_n(Q) - f_n(P))^2}$$

Entonces

$$|f_i(Q) - f_i(P)| < \varepsilon$$

Por tanto $\lim_{Q \rightarrow P} f_i(Q) = f_i(P)$ para todo i . Probando la proposición. ■

Pasemos a la diferenciabilidad. ¿Qué significa que F sea diferenciable?, recordemos que definimos para una función en varias variable, es diferenciable si existe una expansión de Taylor por lo que las funciones $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ siguran la misma idea.

Sea $F = (f_1, \dots, f_n) : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y supongamos que f_i es C^1 , sea $P \in A$, si $h = (h_1, \dots, h_n)$ entonces la expansión de Taylor de orden 1 para f_i es:

$$f_i(P + h) = f_i(P) + \nabla f_i(P) \cdot h + r_i(h), \quad \frac{r_i(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

con $r_i(h)$ el error. Volvamos a F , podemos intentar descomponerlo. Entonces

$$\begin{aligned} F(P + h) &= (f_1(P + h), \dots, f_n(P + h)) \\ &= (f_1(P) + \nabla f_1(P) \cdot h + r_1(h), \dots, f_n(P) + \nabla f_n(P) \cdot h + r_n(h)) \\ &= F(P) + (\nabla f_1(P) \cdot h, \dots, \nabla f_n(P) \cdot h) + r(h) \end{aligned}$$

Donde $F(P) = (f_1(P), \dots, f_n(P))$ y $r = (r_1, \dots, r_n)$. Nuestro problema son los gradientes de f_i con respecto al punto P por lo que necesitamos definir un concepto que nos ayude.

Definición 2. Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)$ donde $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f_i posee todas las derivadas parciales. Se define la matriz Jacobiana por

$$J(F)P = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(P) \end{bmatrix}$$

Vemos que $J(F)(P)$ es una matriz de $n \times m$.

Nota. Notemos que estamos hablando de solo diferenciabilidad y no de derivadas de F , de hecho las derivadas son más algo constructivo para trabajar con la regla de la cadena.

Definición 3. Decimos que $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^1 si cada f_i es de clase C^1 .

De esta forma ya podemos hablar de expansión de Taylor de orden 1 sobre funciones $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Teorema 1. Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, y sea $P \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que F es de clase C^1 , entonces

$$F(P + h) = F(P) + J(F)(P) \cdot h + r(h)$$

donde

$$\frac{r(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} (0, \dots, 0)$$

Dem. Como vimos, si F es de clase C^1 entonces cada función coordenada es de clase C^1 , sea $P \in \mathbb{R}^m$ entonces

$$F(P + h) = F(P) + J(F)(P) \cdot h + r(h)$$

debemos probar que $r(h)/\|h\|$ tiende a $(0, \dots, 0)$ cuando h tiende a 0. Por la observación hecha tenemos que $r(h) := (r_1(h), \dots, r_n(h))$ donde

$$\frac{r_i(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{r_1(h)}{\|h\|}, \dots, \frac{r_n(h)}{\|h\|} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{\|h\|}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_n(h)}{\|h\|} \right) = (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Probando lo que queríamos. ■

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (e^x + e^y, x + y)$. Sea $P = (0, 0)$ entonces para encontrar Taylor de orden 1 tenemos dos formas, la primera es usar Taylor en cada coordenada y la otra es usar el teorema uno aunque ambos métodos son equivalentes.

- **Método por coordenada.** Notemos que $e^x = 1 + x + r(x)$, luego

$$F(x, y) = (e^x + e^y, x + y) = (1 + x + r_1(x) + 1 + y + r_2(y), x + y) = (2, 0) + (x + y, x + y) + r(x, y)$$

Vemos que $(x + y)$ es un polinomio, luego Taylor es el mismo por lo que no hacemos nada, entonces la expansión de Taylor de orden 1 centrada en $(0, 0)$ es:

$$F(x, y) = (2, 0) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + r(x, y), \text{ donde } \frac{r(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} (0, 0)$$

Aquí podemos intuir la forma de la matriz Jacobiana. En el otro método verificaremos que es efectivamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Método por el Teorema 1.** Encontremos la matriz jacobiana de F con respecto al punto P

$$J(F)(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$F(x, y) = (2, 0) + J(F)(P) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + r(x, y)$$

Que es lo mismo por el método por coordenadas.

El método por coordenada es lo que presentamos para deducir Taylor de orden 1 y el teorema 1 es solo una fórmula directa. La única diferencia es que el método por coordenada requiere de saber expansión de Taylor de orden 1 de la coordenada, mientras que el teorema no se requiere.

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ entonces la matriz jacobiana de F es

$$J(F)(P) = I$$

Y efectivamente, sea P arbitrario, luego

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Entonces rellenando $J(F)(P)$, llegamos a la identidad.

Si usamos el método por coordenada tenemos lo siguiente:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) + I \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{r(x_1, \dots, x_n)}_{=0}$$

Ejemplo. Pensemos en una función lineal. Sea $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal, es decir $F(x_1, \dots, x_n) = (f_1, \dots, f_n)$ con coordenadas lineales, se tiene que existe una matriz $A \in M_{n \times m}$ talque $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ y lo más útil es que podemos probar que $J(F)(P) = A$.

Por ejemplo, sea $F(x, y) = (x + 2y, 3x - 4y)$ luego

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Y la matriz $J(F)(P)$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Que es exactamente A .

Esto facilita muchos calculos, por ejemplo, si $F(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ entonces vemos que F es lineal por coordenada, luego

$$J(F)(P) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

4.2. Regla de la Cadena II

En la regla de la cadena I estudiamos funciones compuesta por una función en varias variables y una curva. En este caso tenemos como derivada la matriz Jacobiana, que es tomar las derivadas parciales de cada función coordenada y nuestra composición van a hacer funciones de la forma $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para hacer esto vamos a empezar de funciones definida en dimensiones baja y luego generalizamos. Revisemos el primer teorema.

Teorema 2. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funciones de clase C^1 donde $G(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$. Definimos $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(x, y) = (f \circ G)(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y))$. Entonces

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(G(x, y)) + \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(G(x, y))$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(G(x, y)) + \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(G(x, y))$$

Dem. Por la regla de la cadena general se tiene que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_f}(G(x, y)) & \frac{\partial f}{\partial y_f}(G(x, y)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

Haciendo el producto se obtiene lo que queremos concluir. ■

Nota. Notemos que estamos usando una función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en vez de $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y nuestro objetivo es llegar a funciones $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Revisemos un ejemplo.

Nota. La expresión $\frac{f}{\partial x}(G(x, y))$ puede resultar en algunas veces confusas, la mejor forma de entender es que el x debajo de f se refiere a la primera variable de f y no x en general. Es decir, si $f(u, v)$ y $G(x, y) = algo$ entonces lo que hacemos es estudiar $\frac{\partial f}{\partial u}(G(x, y))$, primero derivar f y luego evaluar en $G(x, y)$. Porsupuesto lo más conveniente es tener explícitamente $f(G(x, y))$ y luego derivar normalmente.

Ejemplo. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $h(x, y) = f(x^2 + y^2, x^3 + y^3)$. Entonces

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^2, x^3 + y^3) + 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + y^2, x^3 + y^3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^2, x^3 + y^3) + 3y^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + y^2, x^3 + y^3)$$

Pensemos con f con un dominio de mayor dimensión.

Ejemplo. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ donde $h(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2, e^{x+y+z}, \sin(x) + \sin(y) + \sin(z))$, la derivada de h se procede de la misma manera que en dos dimensiones, la única diferencia es que debemos estudiar para x, y, z . Mostraremos la derivadas parciales con respecto a y y de z .

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 2y \frac{\partial f}{\partial x}(\sim) + e^{x+y+z} \frac{\partial f}{\partial y}(\sim) + \cos(y) \frac{\partial f}{\partial z}(\sim)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 2z \frac{\partial f}{\partial x}(\sim) + e^{x+y+z} \frac{\partial f}{\partial y}(\sim) + \cos(z) \frac{\partial f}{\partial z}(\sim)$$

Donde \sim es para simplificar el argumento de f .

Lo que acabamos de hacer usar el teorema 2 para una función en \mathbb{R}^3 y no hubo ningún inconveniente, este teorema lo podemos generalizar para funciones definidas en \mathbb{R}^m .

Teorema 3. (Teorema 2 Generalizado) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G(x_1, \dots, x_m) = (g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$. Ambas funciones son de clase C^1 . Definimos $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ donde $h(x_1, \dots, x_m) = f(G(x_1, \dots, x_m)) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$. Sea $x = (x_1, \dots, x_m)$, entonces

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_1}(G(x)) + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_m}(G(x)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(G(x))$$

Para todo $i = 1, \dots, m$

De esta forma obtenemos una forma general para determinar $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Poco a poco nos vamos acercando a funciones $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Recordar la fórmula resulta tedioso pero más adelante veremos una forma de concluir el resultado sin que recordad específicamente este teorema. Por el momento basta ver que es parecido a una regla de la cadena de una variable, si tenemos $h = f \circ h$, h, f, g funciones de una variable entonces si h es derivable se tiene que

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{df}{dg(t)} \cdot \frac{dg(t)}{dt}$$

Solo que ahora al tener más variable debemos asociar g_i con x_i como se aprecia en la suma del teorema.

Nota. Si $n < m$ entonces $g_l = 0$ para $n < l \leq m$ luego

$$\frac{h}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(G(x))$$

Da lo mismo si h tiene m variables.

Si $n > m$ entonces la fórmula no cambia, solo que se puede estudiar hasta derivada con respecto a x_m .

Ejemplo.

- ($n < m$). Sea $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de forma que $h(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2, \sin(xyz)) = f(G(x, y, z))$, luego la derivada parcial de h con respecto a z se expresa como

$$\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 2z \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2, \sin(xyz)) + xy \cos(xyz) \frac{\partial f}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2, \sin(xyz))$$

Notemos que no existe la derivada parcial de f con respecto a z por como está definida G , así que llega hasta donde está definida el codominio de G . Esto ocurre para toda derivada parcial de h con respecto a x, y , y a z

- $(n > m)$. Sea $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de forma que $h(x, y) = f(x^2 + y^2, e^x + e^y, \sin(xy))$, luego la derivada parcial de h con respecto a y se expresa como

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 2y \frac{\partial f}{\partial x}(G(x, y)) + e^y \frac{\partial f}{\partial y}(G(x, y)) + x \cos(xy) \frac{\partial f}{\partial z}(G(x, y))$$

Generalizemos para funciones $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, Sean $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ funciones. Sea $H = G \circ F$, tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n \xrightarrow{G} \mathbb{R}^k \\ & & H(x) = G(F(x)) \end{array}$$

Si F, G son de clase C^1 ¿cuál será la derivada de H ?. Recordemos que en este tipo de funciones no hablamos de derivadas en particular, sino de matrices Jacobianas y eso es lo que queremos, vamos a ver que para un punto P podemos determinar la matriz Jacobiana de H en base a la Jacobiana de G evaluado en $F(P)$ multiplicado por la Jacobiana de F evaluado en P . El siguiente teorema nos muestra esta relación que queremos tener.

Teorema 4. Sean, $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ de clase C^1 . Sea $H = G \circ F$, entonces dado $P \in \mathbb{R}^m$

$$J(H)(P) = J(G)(F(P)) \cdot J(F)(P)$$

Dem...

Llegando a la fórmula general de la regla de la cadena, aunque no lo parezca podemos deducir el teorema 2,3 a partir de esta fórmula además de funciones de una variable. Revisemos un ejemplo de como se ve en la práctica esta regla de la cadena.

Ejemplo. Sean $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ funciones de clase C^1 definida por $F(x, y, z) = (x + y, z^2)$ y $G(x, y) = (e^x, e^y, x + y, x^2 + y^2)$, se define $H := G \circ F$ luego $H(x, y, z) = (e^{x+y}, e^{z^2}, x + y + z^2, (x + y)^2 + z^4)$ entonces la matriz Jacobiana de H sobre P es una matriz de 4×3 que se obtiene multiplicando por las matrices

$$J(F)(P) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

Y

$$J(G)(F(P)) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & e^{z^2} \\ 1 & 1 \\ 2x + 2y & 2z^2 \end{bmatrix}$$

Luego

$$J(G)(F(P)) \cdot J(F)(P) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} & 0 \\ 0 & 0 & 2zez^2 \\ 1 & 1 & 2z \\ 2x+2y & 2x+2y & 4z^3 \end{bmatrix}$$

Si sacamos directamente $J(H)(P)$ veremos que es lo mismo el producto de matrices que hicimos.

Nota. Como recomendación puede usar esta regla de cadena para casos específico como ya dijimos, así si tiene $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h = f \circ g$ puede estar la regla de la cadena para determinar las derivadas parciales y para ello basta ver que la Jacobianda de h tiene por coeficiente las derivadas parciales, solo requiere de mucho orden y paciencia.

4.3. Función Inversa

Un tópico que no hemos tocado es la función inversa por lo que es el momento de introducir el estudio de funciones inversa. Recordemos que una función $\psi : A \rightarrow B$ tiene inversa si es biyectiva o si es invertible (ya que ambas proposiciones son equivalentes).

Decimos que:

- **ψ es biyectiva.** Si la función es inyectiva y sobreyectiva.
- **ψ es invertible** Si existe una función $\varphi : B \rightarrow A$ talque

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(b) &= b \quad \text{para todo } b \in B \\ (\varphi \circ \psi)(a) &= a \quad \text{para todo } a \in A \end{aligned}$$

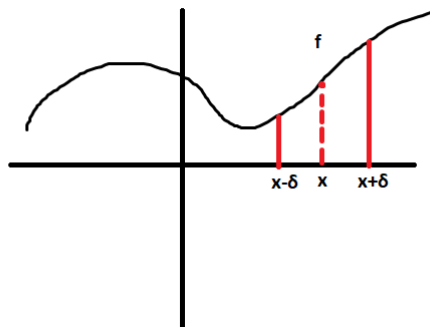
Y lo más importante. ψ es biyectiva si y sólo si ψ es invertible.

Por tanto podemos definir funciones biyectiva o invertible en funciones de la forma $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ pero ¿con qué finalidad? es importante ver que la inversa solo nos dice el comportamiento de una función pero la condición de ser invertible no es suficiente sobre lo que queremos estudiar de hecho es más una consecuencia más que una condición inicial.

Primero pensemos en una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, digamos que f es de clase C^1 y existe un $x \in \mathbb{R}$ talque $f'(x) \neq 0$, entonces en una vecindad $(x - \delta, x + \delta)$ de x con $\delta > 0$, f va a ser creciente o decreciente. El punto verdaderamente fuerte es que f en $(x - \delta, x + \delta)$ es inyectiva y en virtud de que f es de clase C^1 se tiene que f es continua en $(x - \delta, x + \delta)$, si f está bien definido en $x - \delta$ y en $x + \delta$ entonces f es sobreyectiva en $(x - \delta, x + \delta)$. Por tanto f tiene un comportamiento biyectivo en $(x - \delta, x + \delta)$.

Vamos a trasladar esta idea para funciones de varias variables a varias variables. Para ello necesitamos algunos requisitos que necesariamente debe cumplir una función F .

Definición 4. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^m$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Y sea $F : A \rightarrow B$ una función bien definida. Decimos que F es un homeomorfismo si



- a) F es continua.
- b) F es biyección.
- c) $F^{-1} : B \rightarrow A$ es continua.

Intentemos comprender que significa ser un homeomorfismo.

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x, y)$, notemos que F es homeomorfismo ya que es continua dado que cada función coordenada lo es. Además tiene una inversa $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $G(x, y) = (x, y)$ y se verifica que $G \circ F = F \circ G = Id_{\mathbb{R}^2}$. Y G es continua al ser lo mismo que F , luego F es homeomorfismo.

Tenemos que F es la función identidad que en realidad toma \mathbb{R}^2 y lo deja tal cual.

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (0, 0)$, F es una función constante, luego no es inyectiva por lo que F no puede ser homeomorfismo.

Podemos ver que toma todo \mathbb{R}^2 y lo transforma en un solo punto $(0, 0)$ y una idea de lo que son los homeomorfismo es que manipulamos un conjunto y mantenemos sus propiedades, evidentemente un punto no tiene las mismas propiedades que \mathbb{R}^2 .

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x + 1, y + 1)$, podemos ver que F es una traslación, si consideramos los (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 1$ entonces al evaluar esto en F ocurre que la circunferencia se traslada $(1, 1)$, más específicamente, el centro de la circunferencia se ubica en $(1, 1)$

Verifiquemos que F es homeomorfismo.

- F es continua, ya que las funciones coordenadas son continuas.
- Si tomamos $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $G(x, y) = (x - 1, y - 1)$, vemos que $G \circ F = F \circ G = Id_{\mathbb{R}^2}$
- Y G es continua por la misma razón de que F lo es.

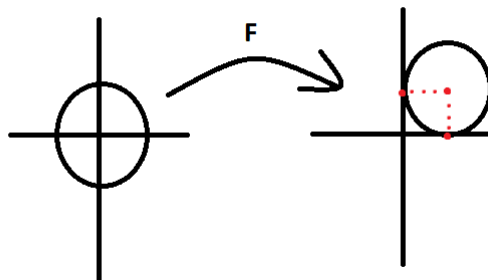


Figura 30: Transformación de una circunferencia

Luego F es homomorfismo, en este caso podemos ver algo del comportamiento de los homomorfismos, y es que la figura mantiene ciertas propiedades, en este caso la circunferencia sigue siendo una circunferencia de radio 1.

Observación. Hasta ahora lo más complejo es determinar la inversa, pensemos en \mathbb{R} . Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x + x$, nuestro problema es saber si es biyectiva f y en efecto, sabemos que es diferenciable en todo \mathbb{R} y $f'(x) = e^x > 0$ para todo x , luego f es creciente en todo \mathbb{R} , por tanto es inyectiva, además si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

y f es continua, entonces f es sobreyectiva. Por tanto posee inversa y no la buscaremos pero se puede ver que no es tan directo como otras.

Pensemos en funciones lineales.

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $F(x, y) = (x - y, x + y)$. Entonces

- F es continua
- Sea $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, y - x)$, entonces G es la inversa de F
- Y G es continua

Luego F es homomorfismo. Lo que nos interesa ver en este ejemplo es que F es lineal, de hecho

$$F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Recordemos que una función lineal es invertible si y sólo si la matriz es invertible y la inversa es tomar la matriz inversa, en este caso la matriz es invertible ya que el determinante no es 0

y inversa es

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$G \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Que es efectivamente la función G que presentamos.

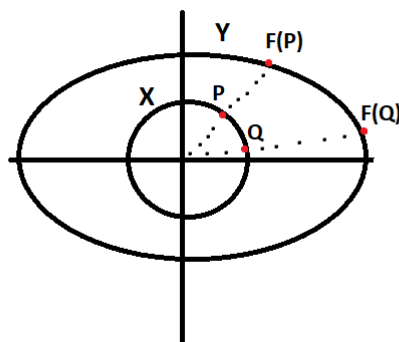
Rec. Sea M una matriz $n \times n$, si $\det M \neq 0$ entonces

$$M^{-1} = \frac{\text{adj}(M)}{\det M}$$

.

Consideremos los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ en \mathbb{R}^2 , estos puntos forma un triangulo, si aplicamos F ocurre que se generan los puntos $F(0, 1) = (-1, 1)$, $F(1, 0) = (1, 1)$ que podemos ver que forma también un triangulo del mismo área y las misma relaciones. El argumento es que F es homomorfismo.

Pensemos en un caso más complicado donde F sea de algún modo homomorfismo y que al manipular una circunferencia $\{x^2 + y^2 = 1\}$, este genere una elipse $\{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\}$, como se aprecia en la figura de abajo



¿Cómo será F ?, queremos $F : X \rightarrow Y$ homeomorfismo. Si la intersección de la elipse con el eje y da dos puntos, donde el más arriba es $(0, 2)$ y lo mismo con el eje x con el de la derecha es $(3, 0)$, podemos intuir F , supongamos que $F(x, y) = (3x, 2y)$, probemos que $F(x, y)$ está en Y que es la elipse, es decir, queremos que $x^2/9 + y^2/4 = 1$, si $x^2 + y^2 = 1$, entonces $(3x)^2/9 + (2y)^2/4 = x^2 + y^2 = 1$ ya que $3x$ es el x de F y $2y$ es el y de F , luego F está en Y y F es homeomorfismo ya que es lineal con matriz invertible. Encontrando F .

El caso anterior nos dice otras cosas como que los homeomorfismos no solo mantienen de igual forma una superficie de nivel, sino que también puede manipular la forma y también mantener ciertas propiedades.

El hecho de que una función F sea homeomorfismo nos dice que F es continua, por lo si tomamos un disco este no se rompe al aplicar F , al ser biyectiva permite mantener punto a punto el conjunto de partida con el de llegada, y el que F^{-1} sea continua nos dice que lo que el disco de partida, es efectivamente algo no roto. Este concepto de tomar algo y de agrandarlo, estirarlo y no romperlo manteniendo sus propiedades es lo que se estudia en topología por lo que estamos sentando las ideas de topología.

Definición 5. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^m$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que A es homeomorfo a B si existe una función $F : A \rightarrow B$ que es homeomorfismo.

Observación. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^m$ y $W \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos homeomorfos. Entonces por un teorema de Brouwer se dice que $n = m$. Es decir, la dimensión de U es la misma que w . Esto nos dice que no podemos ir de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^n con $n \neq m$ sin esperar que algo se rompa.

Pero recordemos que queremos hablar de diferenciabilidad por lo que introduciremos otro tipo de funciones que son homeomorfismos.

Definición 6. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que F es un difeomorfismo si F es diferenciable, F es biyección y $F^{-1} : W \rightarrow U$ es diferenciable.

Nota. De forma análoga definimos conjuntos difeomorfos, solo si existe una función difeomorfismo.

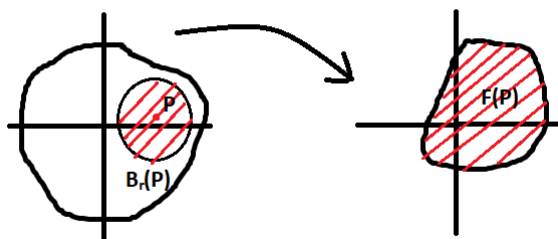
Por lo que, para ver que una función es difeomorfismo deber ver que es diferenciable y esto es así si cada coordenada es diferenciable, luego ver que F es invertible y por último ver que F^{-1} es diferenciable.

Observación. Si F es difeomorfismo entonces F es homomorfismo. De forma análoga, si U, W son difeomorfos entonces son homeomorfos.

Ya tenemos todas las herramientas para formular el teorema de las funciones inversas que es a lo que queríamos llegar de un principio.

Teorema 5. (Teorema de la función inversa) Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con U abierto, F de clase C^1 y $P \in U$. Supongamos que $J(F)(P)$ es invertible ($\det J(F)(P) \neq 0$). Entonces existe una bola $B_r(P)$ (bola centrada en P de radio $r > 0$) tal que $F|_{B_r(P)} : B_r(P) \rightarrow F(B_r(P))$ es difeomorfismo de clase C^1 .

Observación. Las condiciones del teorema no son tan suficientes, solo basta hablar de un punto $P \in U$ diferenciable y de $J(F)(P)$ invertible. Si F es de clase C^1 entonces cada función coordenada es de clase C^1 por lo que $J(F)(P)$ está bien definida y que $J(F)(P)$ sea invertible nos dice que en una bola F es inyectiva y además al deducir la continuidad deducimos la sobreyectividad y luego F es difeomorfismo en esta bola. Esto es similar cuando estudiamos al crecimiento de una función de \mathbb{R} a \mathbb{R} , si $f'(x) > 0$ en un punto x , entonces podemos tomar una vecindad V de x y ver que en $f(V)$ forma una función restringida biyectiva. ($V \rightarrow f(V)$).



Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $F(x, y) = (e^x + e^y - 2, 2x + 3y)$, podemos ver que F es de clase C^1 . Si $P = (0, 0)$ entonces $F(P) = (0, 0)$, la matriz Jacobiana de F con respecto a

P es

$$J(F)(P) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Una matriz invertible, por tanto F es difeomorfismo restringida en una bola centrada en $P = (0, 0)$.

Observación. Si F del ejemplo anterior es invertible en una bola, podemos intentar encontrar la matriz jacobiana de la inversa, si G es la inversa de F entonces

$$F \circ G = Id$$

Y si $G(P) = (0, 0)$ entonces

$$J(F)(0, 0) \cdot J(G)(0, 0) = I$$

Si

$$J(F)(P) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$J(G)(P) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Lo que acabamos de hacer es determinar la matriz Jacobiana de G en P sin determinar G . Esta es una utilidad que nos otorga el teorema de la función inversa.

Observación. Podemos estudiar para la otra dirección del teorema, la siguiente afirmación nos aclara este punto:

Afirmación. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$ difeomorfismo. Entonces $J(F)(P)$ es invertible.

Dem.(Afirmación) Sea $G : W \rightarrow U$ la inversa de F , y debemos notar que G es de clase C^1 . Entonces

$$G \circ F = F \circ G = Id$$

Al ser la inversa, y aquí podemos aplicar regla de la cadena, luego

$$J(G)(F(P)) \cdot J(F)(P) = J(Id)(P) = I$$

Luego si $J(F)(P)$ es una matriz cuadrada, entonces la inversa es $J(G)(F(P))$, de forma que la matriz $J(F)(P)$ es invertible. ■

4.4. Función Implícita

Otro tópico muy importante en cálculo de varias variables es estudiar funciones escondida en una superficie. Por ejemplo, si tenemos una función $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, \dots, x_n, y) = z$$

si consideramos la superficie de nivel 0 f tenemos el conjunto $Z = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$, puede ocurrir que y pueda despejarse en términos de x_1, \dots, x_n obteniendo una función implícita dada por $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x_1, \dots, x_n) = y$ y esto es lo que nos interesa pero debemos ver cuando es posible y como deben lucir g, f para que se cumpla. Por ello empezaremos con un ejemplo bastante simple.

Ejemplo. Pensemos en la circunferencia dada por el conjunto $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Pensemos en un punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in Z$, podemos intentar graficar Z usando funciones donde P esté en ella, de hecho la parte superior es la gráfica de la función $y = \sqrt{1-x}$, pero solo esa parte de la circunferencia. Lo mismo con la parte inferior, podemos tomar un punto y trabajar localmente con una función.

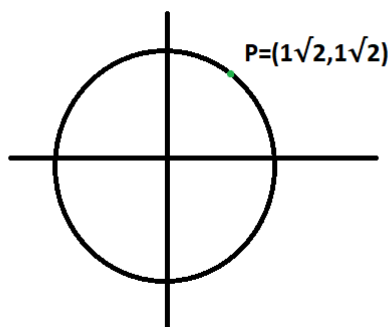


Figura 31: Gráfica de Z con un punto P

Pero no todos los puntos son buenos, si tomamos $(-1, 0)$ o $(1, 0)$ no podemos tomar una venciad útil, es decir, la venciad de $(-1, 0) = Q$ no puede ser representado por $y = f(x)$.

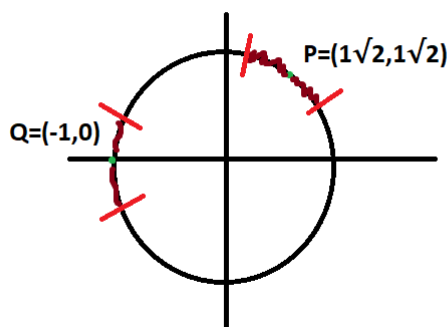


Figura 32: Puntos P y Q

Si tomamos una supuesta función bien definida en Q ocurrirá que tal función no es función ya que la imagen de $Q - (\varepsilon_1, 0)$ tiene dos imagenes y eso no puede ser.

Para solucionar este problema podemos pensar de otra forma en $x = g(y)$, es decir, trabajar con el eje y como dominio y el eje x como codominio, y ahí si podemos trabajar con una venciad de $(-1, 0)$ y representarlo en una función.

Ejemplo. Sea $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ representado por la figura de abajo.

Dibujo

Podemos tomar un punto P y en una vecindad de P de forma que se puede representar por $y = g(x)$. Mientras el punto Q no se puede representar en una función $y = h(x)$

Teorema 6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ talque $f(a, b) = 0$. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y $g : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(a) = b$ tales que $f(x, g(x)) = 0$.

Ejemplo. Sean $f(x, y) = e^{x^2+y^2} + x + y - 1$ y $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$

Tenemos la ecuación $e^{x^2+y^2} + x + y - 1 = 0$, el punto $P = (0, 0)$ satisface la ecuación, verifiquemos que la derivada parcial de f sobre y es distinto de 0 y en efecto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2ye^{x^2+y^2} + 1 = 1 \neq 0$$

Luego existe una función $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(0) = 0$ talque $f(x, g(x)) = 0$ en $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Entendamos el teorema, nosotros queremos estudiar una curva dada y ver si un punto puede ser expresado localmente por una función, necesariamente si estamos trabajando en x la función debe estar bien definida, si la derivada de la segunda variable es no nula en el punto que estamos trabajando, entonces esta función existe. Eso también podemos hacerlo tomando como referencia y .

Teorema 6.(Alternativo) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ talque $f(a, b) = 0$. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$. Entonces existe $\delta > 0$ y $h : (b - \delta, b + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ con $h(b) = a$ tales que $f(h(y), y) = 0$.

5. Integrales Múltiples

Tocaremos el último tópico relacionado a cálculo de una variable que son las integrales. Recordemos que en una dimensión, la integral se puede interpretar como el área debajo de una curva. Esta interpretación la extenderemos para volúmenes y para hiper-volumenes. Empezaremos por una integral doble, luego por una triple y por último generalizaremos, también veremos el cambio de variable que es una de las mayores herramientas del cálculo, con un poco de curvas.

5.1. Motivación

Queremos determinar el área de un círculo de radio 1. Para ello podemos usar el concepto de integral que sirve para determinar el área bajo la curva que forma una función pero, notemos que el borde del círculo no puede ser expresado por una función. Por ello solo nos centraremos en la parte superior.

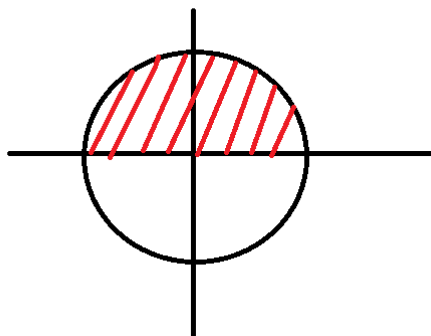


Figura 33: Círculo de radio 1

Vemos que un punto en el borde en la parte roja se puede representar por $\sqrt{1-x^2}$ donde x es algún valor en $[-1, 1]$. De esta forma el área de la parte roja es

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

La cual se puede determinar usando sustitución y el área del círculo es el doble del valor de la integral dada. La cosa para determinar el área del círculo, usamos la integral ¿qué pasa con el área de una elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$?. La idea es la misma, definimos una función que tome solo la parte superior de la elipse que es $f(x) = \sqrt{9(1 - \frac{x^2}{4})}$, luego el área de la elipse es:

$$2 \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{9\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} dx$$

¿Qué sucede con una esfera de radio 1?, estamos complicando la situación, si una esfera se define por los (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ entonces podemos hacer lo mismo con el

círculo, que es considera solo el volumen que se genera por el borde superior de la esfera que tiene por fórmula $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, que es una función en varias variables. Es mucho más difícil determinar el volumen, una forma sería tomar un disco $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ con z fijo y luego sumar, podemos ver que hay una doble suma escondido y como la integral son sumas finas podemos expresar el volumen superior por una doble integral que se denota por

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$$

Donde D es un disco. Por el momento lo dejaremos hasta aquí con el cálculo del volumen de la esfera. Intentaremos ver paso a paso y a la vez daremos sentido a la notación. En pocas palabras queremos ser capaz de entender y calcular:

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Para ello vamos a recordad la integral de Riemann de una función de una variable.

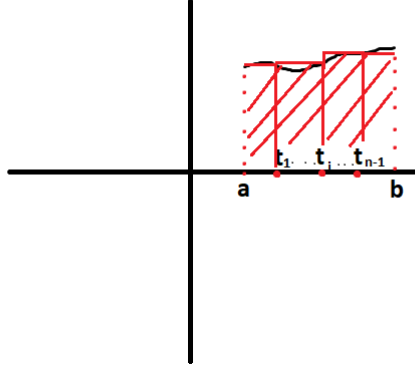
Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función bien definida, y digamos que f es R-integrable, la integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

nos da el área bajo la curva que forma f en el conjunto $[a, b]$. Para llegar a esta idea empecemos por lo básico, queremos determinar el área bajo la curva que forma f , y para ello tomaremos puntos t_0, t_1, \dots, t_n de forma que particionan a la recta $[a, b]$ y luego cada largo $[t_{i-1}, t_i]$ forma una base y multiplicado con $f(e_i)$ donde $e_i \in (t_{i-1}, t_i)$, formando un rectángulo para luego sumarlo y obtener una área parecida al área bajo la curva pero imprecisa.

$$\text{Área}(A) \approx \sum_{i=1}^n f(e_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

Donde A es la figura que se forma bajo la curva.



Jean Gaston Darboux presentó una idea similar a la que estamos describiendo, solo que se centró en tomar ínfimo y supremos de f dentro de un intervalo de la partición. Propuso que para una partición $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ que es un subconjunto finito de $[a, b]$, si tomamos f acotado tenemos que el conjunto $\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$ posee supremo e ínfimo, digamos que

$$M_i := \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

Luego $M_i(t_i - t_{i-1})$ es un rectángulo, de forma análoga con m_i . Definió la suma superior de Riemann por:

$$\overline{S}(\mathcal{P}, f) := \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

Y la suma inferior de Riemann por:

$$\underline{S}(\mathcal{P}, f) := \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

Nota. Es importante tomar funciones acotadas ya que existen funciones donde un punto se extiende al infinito y esto complica mucho la idea de tomar rectángulos con área finita.

Observación. Si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ donde ambas son particiones, entonces decimos que \mathcal{Q} es más fina que \mathcal{P} y además

$$\underline{S}(\mathcal{P}, f) \leq \underline{S}(\mathcal{Q}, f) \leq \overline{S}(\mathcal{Q}, f) \leq \overline{S}(\mathcal{P}, f)$$

Esta observación nos dice que podemos efectivamente refinar la partición de forma que la suma inferior y superior se aproxima más al área bajo la curva. Es más, podemos ver que los conjuntos

$$\{\overline{S}(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \text{ partición}\}, \text{ y } \{\underline{S}(\mathcal{P}, f) : \mathcal{P} \text{ partición}\}$$

son acotados, luego cada conjunto tiene supremo e ínfimo y de aquí se definen las integrales inferiores y superiores:

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\mathcal{P}} \{ \underline{S}(\mathcal{P}, f) \} \quad \text{Integral inferior de } f$$

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \inf_{\mathcal{P}} \{ \overline{S}(\mathcal{P}, f) \} \quad \text{Integral superior de } f$$

Donde \mathcal{P} son todas las particiones de $[a, b]$. De esta forma podemos definir una función Riemann-integrable (R-integrable).

Definición 1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función bien definida. Decimos que f es R-integrable si

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \underline{\int_a^b f(x)dx}$$

Y lo denotamos por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Tenemos que hay funciones que son muy buenas candidatas para ser R-integrables como las funciones continuas, que lo reservamos para un teorema.

Teorema 1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f es R-integrable.

Idea dem. La demostración no es tan complicado. Basta estudiar la siguiente afirmación

Afirmación. Si f es continua en un conjunto compacto, entonces f es uniformemente continua.

Luego se puede probar que la diferencia entre las integrales superiores y las inferiores es un $\varepsilon > 0$, y esto se puede ver para todo $\varepsilon > 0$. De forma que ambas son iguales y por tanto f es R-integrable.

Observación. Si f es discontinua entonces no es necesariamente integrable.

Podemos ver que hay funciones discontinua que puede ser R-integrable, lo mejor es que hay un resultado que caracteriza las funciones R-integrable con las discontinuidades.

Teorema 2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función bien definida. Entonces f tiene una colección finita de discontinuidad si y sólo si f es R-integrable.

Cuando se estudia alrededor de una discontinuidad se puede ver que basta estudiar alrededor de ella sin incluir la discontinuidad y esta no afecta la integral. Es más, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es

discontinua en x_0 se puede probar que si x_0 es una discontinuidad reparable, entonces dado

$$g : \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \setminus \{x_0\} \\ f_0 & x = x_0 \end{cases}$$

se cumple que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)$$

Es decir, las discontinuidades no afectan a la integral.

Otra propiedad es que la integral es una operación lineal y monotonía.

Proposición 1. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones R -integrable y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple las siguientes afirmaciones

1. **Linealidad:**

$$\int_a^b (\alpha f(x) + g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. **Monotonía:** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Y por último, el resultado más fundamental del cálculo.

Teorema 3. (Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Entonces

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Observación. La parte $\int f'(x)dx$ se puede entender como una variación infinitesimal de f , para luego suma las variaciones de f y $f(b) - f(a)$ es la variación total.

Ejemplo. Determine

$$\int_a^b (x + \sin(x))dx$$

Sol. Debemos encontrar $G(x)$ talque $G'(x) = x + \sin(x)$ (y a G se le llama primitiva de $x + \sin(x)$), de hecho, $G(x) = \frac{x^2}{2} - \cos(x)$ es la primitiva de $x + \sin(x)$, luego por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b G'(x)dx = \int_a^b (x + \sin(x))dx = \frac{b^2 - a^2}{2} - (\cos(b) - \cos(a))$$

Resumiendo lo más importante de integrales. Veremos que las mayores dimensiones no son tan complicada de entender, como adelanto veremos que las integrables dobles, triples o de n -dimensiones, son integrales de una variable escondidas.

5.2. El paso a mayores dimensiones

¿Cómo pasar la idea de Riemann y de Darboux a varias dimensiones?. En una variable trabajamos con un conjunto cerrado $[a, b]$ como referencia, en dos dimensiones vamos a tomar un rectángulo. Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo y sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función bien definida. Lo que queremos es determinar el volumen bajo la curva de la función f , para ello debemos considerar la gráfica de f .

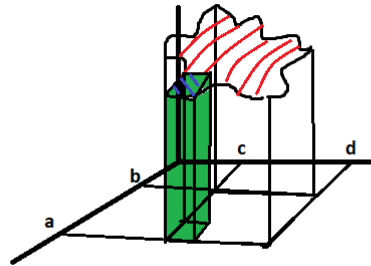
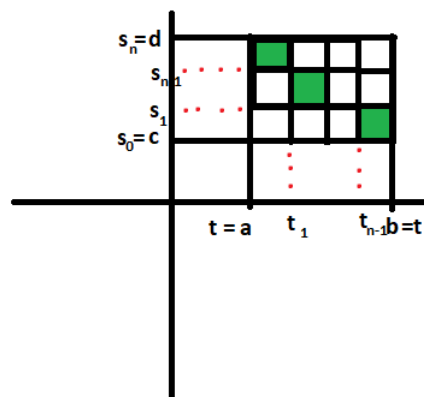


Figura 34: Gráfica de f en \mathbb{R}^3

Entonces queremos considerar paralelepípedos pequeños, para ello necesitamos un pequeño rectángulo con una altura $f(x, y)$. Consideremos R de forma independiente de la gráfica, a este rectángulo podemos tomar pequeños rectángulo de forma que particionan a R y obtenemos lo que se aprecia en la figura de abajo



Generando conjuntos de la forma $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ donde $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, n$. Sea \mathcal{P} el conjunto de todos los rectángulos de la forma $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$, además notemos que \mathcal{P} está bien definido ya que es finito y podemos refinar al igual que en una variable. Para generar

un paralelepípedo vamos a considerar el supremo o el ínfimo de $f(x, y)$ en un rectángulo y luego sumar todos los paralelepípedos generados, de esta forma podemos definir la suma inferior y superior de Riemann.

Definición 2. La suma de Riemann inferior con respecto a una partición \mathcal{P} , se define por:

$$\underline{S}(\mathcal{P}, f) := \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \inf_{\substack{x \in [t_{i-1}, t_i] \\ y \in [s_{j-1}, s_j]}} \{f(x, y)\} (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1})$$

De forma análoga se define la suma de Riemann superior con respecto a una partición \mathcal{P} por:

$$\overline{S}(\mathcal{P}, f) := \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \sup_{\substack{x \in [t_{i-1}, t_i] \\ y \in [s_{j-1}, s_j]}} \{f(x, y)\} (t_i - t_{i-1})(s_j - s_{j-1})$$

Observación Las suma de Riemann está bien definida ya que estamos construyendo un paralelepípedo, por lo que es natural tomar el largo de $[t_{i-1}, t_i]$ y de $[s_{j-1}, s_j]$, multiplicarlo y luego tomar una altura $f(x, y)$ que por conveniencia tomamos el ínfimo y el supremo de f es un rectángulo.

De aquí podemos definir integrales inferiores y superiores, pero lo que nos interesa son funciones que sean R-integrales por lo que pasaremos directamente a la definición de ser R-integrable.

Definición 3. Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función bien definida. Decimos que f es Riemann integrable (R-integrable) si y sólo si

$$\sup_{\mathcal{P} \text{ partición}} \{\underline{S}(\mathcal{P}, f)\} = \inf_{\mathcal{P} \text{ partición}} \{\overline{S}(\mathcal{P}, f)\}$$

Si f es R-integrable, definimos y denotamos por

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy := \sup_{\mathcal{P} \text{ partición}} \{\underline{S}(\mathcal{P}, f)\} = \inf_{\mathcal{P} \text{ partición}} \{\overline{S}(\mathcal{P}, f)\}$$

Como la doble integral de f sobre los diferenciales x e y .

Nota. La doble integral tiene comportamineto similar a la integral de una variable, incluyendo de que si f es continua en un conjunto $R = [a, b] \times [c, d]$ entonces f es R-integrable, además de la linealidad y la monotonía y así con una gran cantidad de propiedades se conservan en mayores dimensiones.

Nota. Podemos generalizar la integral para una función en varias variables $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, con $R \subseteq \mathbb{R}^n$, para ello debemos tomar el hiper-paralelepípedo $R = [a_1, b_1] \times (\dots) \times [a_n, b_n]$ y luego construimos la integral. Si tenemos una función $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ donde R es un hiper-paralelepípedo, entonces la integral n se denota por

$$\int \cdots \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Lema 1. Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es R -integrable.

Dem. Para demostrar el teorema debemos ver que si una función es continua en un conjunto compacto, entonces f es uniformemente continua y la uniformidad implica ser R -integrable
Continuar.

Proposición 2. Sean $f, g : \underbrace{[a, b] \times [c, d]}_{=R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones R -integrable. Entonces se cumple:

1. **Linealidad:**

$$\iint_R (\alpha f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_R f(x, y) dx dy + \iint_R g(x, y) dx dy$$

2. **Monotonía:** Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$

$$\iint_R f(x, y) dx dy \leq \iint_R g(x, y) dx dy$$

Observación. Para demostrar la linealidad se requiere redefinir el concepto de integral y usar un resultado que no hemos visto, mientras que la monotonía es consecuencia de la linealidad y de que si $f \geq 0$ entonces $\iint f(x, y) \geq 0$. Luego tomando $g - f \geq 0$ se concluye la monotonía.

Determinar la doble integral por definición es muy complicado, Guido Fubini dio un resultado que asocia las dobles integrales con las integrales de una variable.

Teorema 3.(Fubini) Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\iint_{\substack{R \\ = [a, b] \times [c, d]}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Intentemos comprender porqué podemos relacionar las integrales dobles con integrales de una variable. Primero entendamos por qué pedimos que f sea continua. Necesitamos que f sea continua por un tema de evitar puntos discontinuos y porque para definir correctamente las integrales, requerimos de que sea continua. Segundo, en el rectángulo tomemos una diferencia de y muy pequeña, tanto que parece un punto fijo, digamos que $y = k$, podemos ver que x con $f(x, y)$ tomando $y = k$ fijo, pareciera que estamos tomando el área debajo de una curva.

$$\int_a^b f(x, k) dx$$

Recordemos que estamos tomando una diferencia de y muy pequeña, de forma que esta integral es en realidad un volumen muy pequeño que depende de y , ahora podemos realizar todo esto con $y \in [c, d]$, de forma que estamos sumando pequeños volúmenes que dan el volumen total y si la integral es una suma infinitesimal, podemos ver que el volumen es en efecto

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

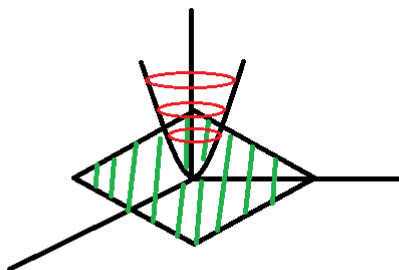
Tampoco es coincidencia que esto funcione, podemos definir $g(y) : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$g(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

Y ver que g es continua y por tanto integrable. Esta idea es bastante útil cuando trabajemos con dominios más caóticos y no es solo eso, también podemos pensarlo para mayores dimensiones, aunque es más engorroso que en dos dimensiones. Para ver la otra igualda basta tomar $x = l$ fijo y hacer el mismo ejercicio mental.

Observación. El teorema de Fubini se puede extender a n dimensiones, de forma que calcular integrales múltiples resulta integrar de una variables varias veces y eso lo podemos hacer.

Ejemplo. Calcule el volumen entre los planos $x = -1, 1, y = -1, 1, z = 0$ bajo $z = x^2 + y^2$.



Notamos que la función $f(x, y) = z$ está definido en un dominio rectangular $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ y queremos determinar el volumen bajo la función por lo que calcularemos

$$\iint_{[-1,1] \times [-1,1]} (x^2 + y^2) dx dy$$

Notemos además que f es una función continua, luego por el teorema de Fubini tenemos que calcular por partes la integral. Digamos que

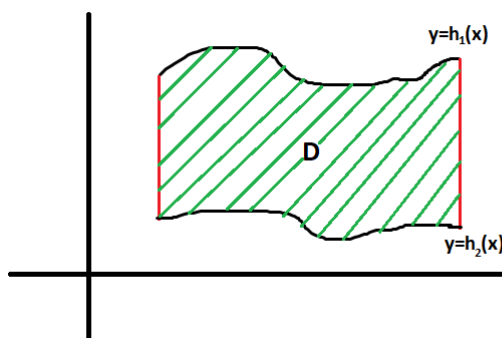
$$I = \iint_{[-1,1] \times [-1,1]} (x^2 + y^2) dx dy$$

entonces

$$I = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2 + y^2 dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{3} + 2x^2 \right) dx = \frac{8}{3}.$$

Nota. Un inconveniente al calcular la doble integral es confundir la variable que se está usando, tengamos en cuenta que si tenemos $\int (\int f(x, y) dy) dx$ la integral de f con respecto a dy toma a la variable x como constante, y luego al obtener una función $g(x) := \int f(x, y) dy$ determinamos la integral como siempre se ha determinado.

Hasta el momento hemos tratado con dominios rectangulares, ya que son bastante sencillos al momento de pensar al integral, y ¿qué pasa si tomamos un dominio más general? por ejemplo: sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, h_2(x) \leq y \leq h_1(x)\}$ un conjunto que genera una área en específico, si intentamos determinar gráficamente D en el plano real, sería algo del estilo de la figura de abajo



¿Cómo determinar la integral de $f(x, y)$ definida en D ? Pensemos en la idea de Fubini, queremos fijar un punto x , generar un filamento y luego el pequeño volumen que genera tal filamento que es lo mismo que determinar el área bajo la curva con respecto a la variable y entre $h_1(x)$ y $h_2(x)$ de forma que el pequeño volumen del filamento que genera x se determina por

$$\int_{h_2(x)}^{h_1(x)} f(x, y) dy$$

Luego ir sumando cada volumen, nuevamente pensando en suma pequeñas que es lo mismo habla de la integral de entre $[a, b]$. De esta forma el volumen que genera D con la función f es

$$\int_a^b \left(\int_{h_2(x)}^{h_1(x)} f(x, y) dy \right) dx = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Observación. Recordemos que Fubini mostró que para dominios rectangulares el orden de los

diferenciales no importa mucho. Pero en estos dominios el orden es muy importante, ya que donde se mueve y , que es en el intervalo $[h_2(x), h_1(x)]$ depende del valor de $x \in [a, b]$. Por lo que no tiene sentido integrar primero sobre x y luego sobre y . En resumidas cuentas, el orden de integración es muy importante y hay que tener cuidado en que dominio se integra.

Teorema 4. Sean $h_1, h_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas. Donde $h_2(x) \leq h_1(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Sea $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, h_2(x) \leq y \leq h_1(x)\}$, y sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{h_2(x)}^{h_1(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Nota. Con este resultado volvemos a ver que las integrales dobles son en realidad integrales de una variable.

Observación. Importante ver que todo debe ser continuo, tanto los extremos de donde se mueve y como la función f .

Ejemplo. Sea $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x + 1\}$. Y sea la función $f(x, y) = x + y^2$. Determinemos la integral de f sobre D . Notemos antes que $h_1(x) = x + 1$, $h_2(x) = x^2$ están bien definidas, son continuas y $h_1(x) \geq h_2(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, y f es continua por lo que podemos aplicar el teorema 4 sin ningún problema. Entonces

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x+1} (x + y^2) dy \right) dx = \frac{25}{14}$$

Observación. El teorema 4 puede aplicarse en la otra dirección, solo hay que definir bien el conjunto D , digamos que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g_2(y) \leq x \leq g_1(y)\}$$

Con g_1, g_2 continua y bien definidas, sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bien definida, luego el volumen que se genera en D con la función f es

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{g_2(y)}^{g_1(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Nota. En general se van a mostrar integrales sobre dominios donde el borde es mayormente suave, es decir, donde f es de clase C^1 , excepto en finitos puntos. Es lo mismo que hablar de discontinuidad en una variable.

Recordemos en una variable, una función $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ puede determinar la integral

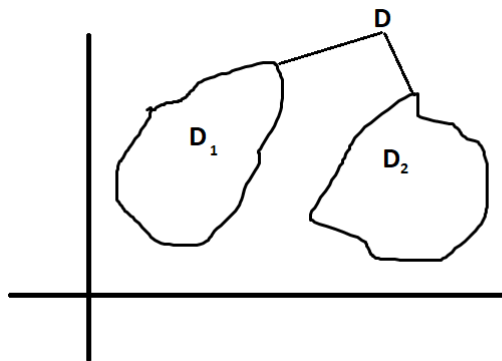
$$\int_a^b f(x)dx$$

sumando dos integrales con límites a, c y c, b respectivamente, de esta forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Y por supuesto esto ocurre en dos variables, pensemos en un dominio D donde f se puede integrar y digamos que existen dos dominios D_1, D_2 donde f se puede integrar tales que son disjuntos y

$$D = D_1 \cup D_2$$



Podemos afirmar que

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

Esto nos permite facilitar el cálculo de algunas integrales.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f : \begin{cases} 1 & y \leq 1 \\ y & y > 1 \end{cases}$$

Determinemos la integral de f sobre $D = D_1 \cup D_2$ donde $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1\}$ y $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$, entonces tanto D_1, D_2 son disjuntos y buenos dominios a integrar, luego

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \underbrace{\iint_{D_1} f(x, y) dx dy}_{=1} + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

Solo hay que determinar

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

Nota. En estos apuntes siempre se trabajaran con dominios compacto incluyendo borde.

Observación. Sea D un dominio bueno y pensemos en $f(x, y) = 1$, luego

$$\iint_D 1 \, dx dy = Area(D) \cdot \underbrace{\text{altura}}_{=1}$$

Y tiene mucho sentido ya que el volumen en figuras más estable es tomar el área y estirarlo por una altura, así en general si $f(x, y) = k$ para todo (x, y) con $k \in \mathbb{R}$. Se tiene que el volumen que genera D con f es

$$\iint_D k \, dx dy = Area(D) \cdot k$$

¿Cómo será la integral en mayores dimensiones?, podemos ver que la integral de dos variables podemos definirla con rectángulos, o mejor dicho con un producto cartesiano de conjunto cerrados de una dimensión. Esto es lo que pensaremos en integrales de mayores dimensiones.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función bien definida y consideremos $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. Luego podemos hacer toda la construcción de integral de Riemann, que recordemos, lo denotamos por

$$\int \dots \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Esta construcción es tomar una base (x_1, \dots, x_n) y estudiar la figura que genera con el punto $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$, esto se hace con particiones, luego se toma la suma de Riemann y luego tomamos funciones donde el supremo de la sumas inferiores sea igual al ínfimo de las sumas superiores. De esta forma llegamos a las integrales de mayores dimensiones. Pero nuevamente nos encontramos con un problema, es demasiado complicado determinar integrales encontrando ínfimos o supremos, por lo que tomaremos la idea de Fubini y la extenderemos a mayores dimensiones.

Teorema 5. (Fubini en n dimensiones) Sea $f : R = \times_{i=1}^n [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\int \dots \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \dots \right) dx_{n-1} \right) dx_n$$

Una recomendación para construir esta relación es tomar fijos x_n, \dots, x_2 y luego ir variando x_1 , notar que x_1 se mueve entre una recta ya que estamos tomando hiperplanos y los estamos intersectando de forma que tenemos un objeto de dimensión $n - (n - 1) = 1$. De forma que x_1 , efectivamente se mueve en una recta. De aquí tenemos

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$$

Aquí obtenemos el hiper-volumen de un filamento, ahora vamos sumando estos pequeños filamentos con una diferencia muy pequeña de x_2 , de forma que lo relacionamos con una integral, luego obtenemos

$$\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) dx_2$$

Obteniendo un 2-filamento que da otro volumen. Y seguimos inductivamente hasta construir todo el hiper-volumen. Llegando al resultado de Fubini.

Una forma alternativa de concluir esto es ir desarmando el volumen y que esto es realmente útil. En algunas ocasiones podemos concluir lo siguiente: Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función bien definida, continua y R-integrable donde $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Podemos probar que

$$\iiint_R f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_A f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \right) dx_3$$

donde $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Y esto nos dice que una tripe integral es como estudiar la suma del volumen en un pequeño diferencial dx_3 . Si $f(x_1, x_2, x_3) = 1$, entonces la tripe integral es igual a la integral del área de A .

$$\iiint_R dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{a_3}^{b_3} (\text{Área}(A)) dx_3$$

Revisemos algunos ejemplos del teorema de Fubini en mayores dimensiones.

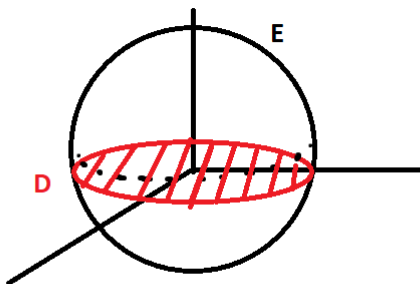
Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada por $f(x, y, z) = x^3 + x^2y + xyz$. Sea $R = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$, determine la integral sobre R .

Por el teorema de Fubini tenemos que

$$\iiint_R = \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 x^3 + x^2y + xyz dx \right) dy \right) dz$$

Y esto si lo podemos calcular pero no lo haremos ya que se puede ver que es muy aplicativo.

¿Qué pasa con los entornos más caótico?, volvamos a la misma cuestión abarcada en dos dimensiones. Puede pasar que algunas variables dependan de otras o mejor dicho, si tenemos un entorno más caótico, generalmente en esos casos las variables dependen de otras. Por ejemplo una bola cerrada $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, intentemos integrar sobre esta bola cerrada con respecto a una función continua.



Vamos a pensar de afuera hacia adentro, es decir, vamos ir desarmando la integral desde lo lejos y vamos construyendo lo de adentro. Si tenemos

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$$

Entonces podemos tomar un disco $D(k) = \{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 - k^2\}$, donde k es un valor tal que $|k|$ es el radio del disco. La cosa es que podemos sumar discos con volumen muy pequeño y construir toda la integral sobre la esfera. Entonces, si $k \in [-1, 1]$ por como está descrito la figura tenemos que

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 \left(\iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Ahora solo debemos determinar la doble integral de $f(x, y, z)$ sobre el disco $D(z)$. Para ello volvemos a doble integrales, se puede ver que se determina por

$$\iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy = \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} f(x, y, z) dy \right) dx$$

Si se siente incómodo con esto tome primero $z = 0$ y luego vaya tomando z como constante. Encontrando así una fórmula para calcular la integral sobre la esfera. Por supuesto podemos ir haciendo fijando x o fijando y .

Otra forma sería usar la idea de Fubini, tomamos fijos x, y , variamos z , vemos que z se mueve en el intervalo $[-\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}]$ teniendo un volumen

$$\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz$$

Luego a este volumen lo variamos en $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ y por último variamos en $x \in [-1, 1]$. Podemos usar una calculadora y ver que el resultado es el mismo si tomamos $f(x, y, z) = 1$.

Nota. Tener mucho cuidado con el último método ya que y se hace independiente de z y x se hace independiente de y ya que estamos haciendo una dependencia. z depende de y e de x y y depende de solo x .

Observación. Si tenemos

$$\int \cdots \int_{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n} 1 dx_1 \dots dx_n$$

Entonces el valor es el volumen de Ω en n dimensiones denotado por

$$\text{Vol}_n(\Omega)$$

Como comentario final, las triples integrales son bastante complicadas pero si nos piden integrar un volumen que conocemos digamos un cubo y tenemos $f(x, y, z) = \text{algo}$, para saber si vamos por buen camino, necesariamente

$$\iiint_C dx dy dz = \text{Vol}(C)$$

Entonces para saber si vamos en buen camino, la fórmula debe coincidir con la triple integral.

5.3. Cambio de Variable

5.3.1. Pequeña motivación

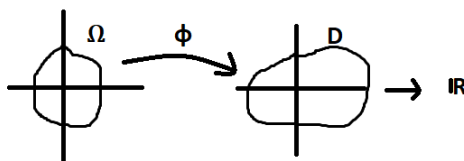
Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función bien definida y integrable. Digamos que $U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ y que $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, la doble integral de f es

$$\iint_U \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

El problema es que determinar la integral es muy tedioso donde hay una raíz y cosas al cuadrado y lo otro es que tenemos un dominio muy incomodo como una elipse. Son cosas que toman tiempo de calcular y matemáticamente hablando, calcular cosas es lo que menos queremos. Por ello requerimos de herramientas que faciliten este cálculo. Uno podría ver que $x^2 + y^2$ es como trabajar con una circunferencia y como vimos muy atras, una circunferencia se puede manipular de tal forma que sea una elipse. Con esta dos cosas en mentes nos vendrian bien hacer un cambio y eso es justo lo que veremos en esta parte.

5.3.2. Cambio de Variable

Una herramienta poderosa de cálculo es el cambio de variable para calcular integrales. Nosotros sabemos hacer cambio de variable para funciones de una variable pero para mayores dimensiones esto se complica. La idea central del cambio de variable es integrar sobre otra región, si tenemos originalmente la región D , de alguna forma queremos cambio la región por Ω e integrar desde ahí. Intentemos deducir el cambio de variable.



Para ello requerimos de una función definida por $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n$ de forma que la compuesta $f(\varphi)$ esté bien definida y podamos trabajar sin ningún problema entre Ω y D y además necesitamos que φ sea de clase C^1 para que la figura no se rompa y difeomorfismo, ya que veremos que la diferenciabilidad de φ es importante en el cambio de variable.

Teorema 6.(Cambio de variable) Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio bueno. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una

función continua. Consideremos un difeomorfismo $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow D$ de clase C^1 . Entonces

$$\int_D \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Omega} \cdots \int f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det J(\varphi)(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n$$

No demostraremos el teorema, ya que se requiere de herramientas de análisis que como tal no hemos visto. Lo que si es importante pensar, son algunas preguntas sobre el cambio de variable como:

- ¿Por qué tomar φ difeomorfismo?
- ¿Por qué tomar el determinante de la matriz Jacobiana?

Intentaremos responder de forma paulativa y que tenga sentido. Con respecto a la primera pregunta, queremos tomar una función difeomorfa para que la matriz jacobiana funcione y en la región no cambie sus características, ya que queremos cada punto de llegada de φ esté asociado a un único punto de partida.

Y con respecto a la segunda pregunta, la matriz Jacobiana es más complicado de explicar, antes que nada pensemos en una función lineal T

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow T(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Como T es lineal, podemos encontrar una matriz bien definida A talque

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(Esto se puede hacer para toda transformación lineal).

Si tomamos $e_i = \underbrace{(0, \dots, 1, \dots, 0)}_{\text{el 1 está en la columna } i}$ vamos a ver que

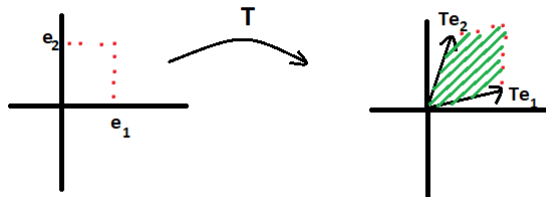
$$Te_i = Ae_i = A_i$$

donde A_i es la columna i de A . Si hacemos esto para todo i podemos deducir que:

$$A = [T(e_1) \quad T(e_2) \quad \dots \quad T(e_n)]$$

Luego $\det A$ es calcular el volumen que genera T sobre la base canónica. Una forma de visualizarlo es pensar en la figura de abajo

Tenemos una función lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y el determinante de A resulta ser el área que genera los vectores Te_1, Te_2 . Esto es para n -dimensiones. El valor $|\det A|$ es el volumen n -dimensional de la figura que genera la imagen de T . Revisemos algunos ejemplos.

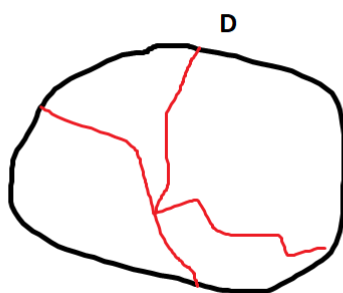


Ejemplo. Sea $T = Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se tiene que $\det A = 1$, es decir, el volumen que genera T es 1.

Volviendo al tema anterior. En el cambio de variable la matriz Jacobiana es la matriz asociada a una función lineal, con esta idea sacaremos la Jacobiana que aparece en el cambio de variable.

Tomemos la región D , podemos tomar subconjunto B_i de D de forma que particionan a D , es decir

$$D = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$$



Y cada partición podemos tomar el volumen generado por el ínfimo de f multiplicado por el volumen que tiene B_i , de esta forma

$$\int_D \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \approx \sum_{i=1}^n \inf f|_{B_i} \cdot \text{Vol}(B_i)$$

Si φ es un difeomorfismo entonces

$$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$$

donde $C_i = \varphi^{-1}(B_i)$, es decir, Ω también puede ser particionada en función de φ . Lo realmente importante es que $B_i = \varphi(C_i)$, podemos intentar aproximar φ por la matriz Jacobiana y esto se puede hacer truqueando un poco ya que φ no es lineal. De forma que

$$\text{Vol}(B_i) \approx |\det J(\varphi)(x_1, \dots, x_n)| \cdot \text{Vol}(C_i)$$

Luego reemplazando en la suma tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \inf_{B_i} f \cdot \text{Vol}(B_i) \approx \sum_{i=1}^n \inf_{C_i} f|_{\varphi(C_i)} \cdot |\det J(\varphi)(x_1, \dots, x_n)| \cdot \text{Vol}(C_i)$$

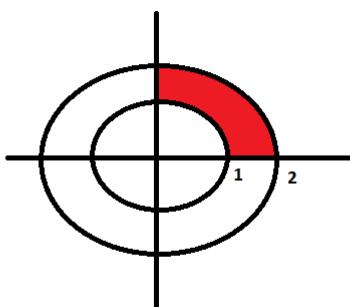
Y la segunda suma es aproximadamente

$$\int_{\Omega} \dots \int f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det(\varphi)(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n$$

Luego podemos ver ambas integrales son relativamente iguales.

Lo que acabamos de ver es casi la idea central de la demostración del cambio de variable.

Ejemplo. Consideremos la parte roja de la siguiente figura



Queremos integrar la función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(x, y) = xy$. Donde R es la parte roja del anillo representado en la figura de arriba. Vamos a probar de forma formal que puede usarse el cambio de variable y luego calcularemos.

Notemos que f es el producto de x y de y , luego f es continua. Sea $\varphi : [1, 2] \times [0, \pi/2]$ y está dada por $\varphi(r, \theta) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Revisemos si φ es difeomorfismo y es de clase C^1 .

- **Diferenciable** Notemos que $r \cos(\theta)$ y $r \sin(\theta)$ son diferenciable y además tiene derivadas parciales continuas, luego φ es de clase C^1 y es diferenciable.
- **Biyectiva.** Sean $(r, \theta), (r', \theta')$ tales que

$$\begin{aligned} r \cos(\theta) &= r' \cos(\theta') \\ r \sin(\theta) &= r' \sin(\theta') \end{aligned}$$

Dividiendo de arriba hacia abajo, llegamos a que

$$\tan(\theta) = \tan(\theta')$$

Y si \tan es inyectiva en $[0, \pi/2]$ podemos ver que $\theta = \theta'$, luego en donde no se anule la ecuación llegamos a que

$$r = r'$$

Luego φ es inyectiva.

Para la sobreyectividad tomamos un punto con ángulo θ y un radio r , luego basta tomar r, θ de forma conveniente y así φ es biyectiva.

- **Inversa diferenciable.** Sean $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, luego $\tan^{-1}(x/y) = \theta$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. se puede ver que ambas son diferenciables. Se requiere algo de mano pero no lo probaremos como tal.

Luego φ es difeomorfismo de clase C^1 . Por tanto podemos aplicar el cambio de variable. Vemos que la matriz Jacobiana de φ es

$$J(\varphi)(r, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Luego el determinante es $|\det J(\varphi)(r, \theta)| = r$. Entonces, nos queda la siguiente integral.

$$\iint_R xy dx dy = \iint_{[1,2] \times [0,\pi/2]} r^3 \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta$$

Que es evidentemente continua y podemos aplicar Fubini. Calculando la integral tendríamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \iint_{[1,2] \times [0,\pi/2]} r^3 \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \left(\int_1^2 r^3 dr \right) d\theta \\ &= \frac{15}{8} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta = \frac{15}{8} \end{aligned}$$

Nota. Notemos que φ tiene por dominio un rectángulo y esta es una de la magia de cambio de

variable. De dominios complicados como un anillo los podemos transformar a un rectángulo y calcular con normalidad. Más adelante veremos que existen 2 cambio usuales, las coordenadas esféricas que es la que usamos en el ejemplo anterior y las coordenadas cilíndricas.

Ejemplo. Consideremos $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ y la función $f(x, y) = 1$, queremos determinar el volumen bajo f sobre D . Para ello tomaremos la región $\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$ y el difeomorfismo $\varphi(u, v) := (au, bv)$ podemos ver que φ es lineal luego

$$J(\varphi)(u, v) = A$$

donde A es la matriz asociada a φ , luego

$$\iint_D dx dy = \iint_{\Omega} 1 |J(\varphi)(u, v)| du dv = |ab| \pi^2$$

Lo que acabamos de hacer es calcular el área de la elipse pero de otra forma. Eso es otra cosa que da las integrales múltiples, permite calcular cosas que en una variable son muy difíciles.

Ejemplo. Consideremos el cuadrilátero formado por los $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1)$, digamos D es esta región. Y queremos integrar bajo la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, para ello vamos a cambiar la región por una rectangular formada por los puntos $(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)$ denotada por R para hacer este cambio tomemos el difeomorfismo $\varphi(u, v) = (u + v, v)$ luego aplicando cambio de variable tenemos que

$$\iint_D x^2 + y^2 dx dy = \iint_R (u + v)^2 + (v)^2 du dv$$

Como la compuesta es una función continua podemos usar Fubini y determinar de forma tradicional la integral.

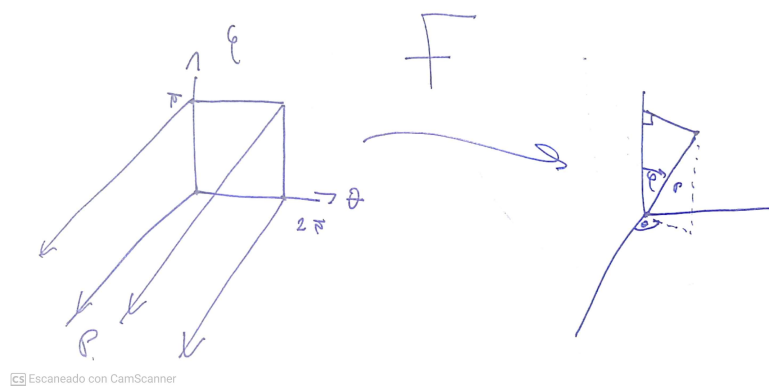
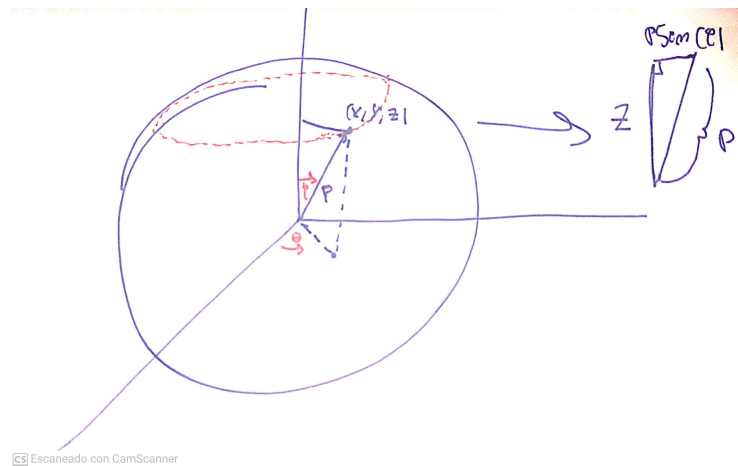
5.3.3. Coordenadas esféricas

Todo punto de una esfera puede ser representado de una forma muy útil. Podemos también asociarlo a una función difeomorfismo de clase C^1 siendo útil en cambios de variables.

Sea $(x, y, z) \in E$ un punto de la esfera podemos tomar θ, φ ángulos y el largo p para describir (x, y, z) . Digamos que θ es el ángulo entre el eje x y la proyección del punto en el plano $x - y$ y φ es el ángulo entre el eje z y el punto. De esta forma

$$\begin{aligned} x &= p \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y &= p \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z &= p \cos(\varphi) \end{aligned}$$

donde $p \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, \pi]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$. Podemos tomar un paralelepípedo que va al infinito y podemos definir F de forma conveniente para obtener la esfera



Así podemos integrar dominios esféricos.

Por ejemplo, si tenemos $f(x, y, z) = 1$ y integramos con respecto a $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ entonces

$$\iiint_E 1 dx dy dz = \iiint_B |\det F(p, \theta, \varphi)| dp d\theta d\varphi$$

Donde $F : [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(p, \theta, \varphi) = (p \sin(\varphi) \cos(\theta), p \sin(\varphi) \sin(\theta), p \cos(\varphi))$$

Y lo mejor es que el determinante es facil de encontrar, es de hecho

$$|\det F| = p^2 |\sin(\varphi)|$$

Y esto es continuo y por Fubini podemos determinar la triple integral.

$$\int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 p^2 \sin(\varphi) dp \right) d\theta \right) d\varphi = \frac{4\pi}{3}$$

Observación. Podemos desarrollar una técnica. Supongamos que tenemos una esfera definida

por $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq k^2\}$. ¿Cuál será la integral de $f(x, y, z) = 1$ sobre E ? En otras palabras queremos determinar

$$\iiint_E dx dy dz$$

Podríamos usar coordenadas esféricas y calcularlo pero mejor pensemos matemáticamente. Sabemos que esto es cambio de variable por lo que de forma inmediata podemos ver que

$$\iiint_E dx dy dz = \iiint_R r^2 |\sin(\varphi)| dr d\varphi d\theta$$

Notemos que los ángulos φ y θ no se ven afectados, el único que se ve afectado es r que en vez de moverse en $[0, 1]$, se mueve en $[0, k]$ y esto es la clave. Podemos probar que

$$\iiint_R r^2 |\sin(\varphi)| dr d\varphi d\theta = k^3 \text{Vol}(E) = \frac{4\pi}{3} k^3$$

Para ver esto notemos que

$$\int_0^k r^2 dr = \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^k = \frac{k^3}{3} = k^3 \int_0^1 dr$$

Y como k es independiente de todo tenemos que

$$\iiint_R r^2 |\sin(\varphi)| dr d\varphi d\theta = k^3 \iiint_{R'} r^2 |\sin(\varphi)| dr d\varphi d\theta = k^3 \text{Vol}(R')$$

Donde R' tiene un factor de la forma $[0, 1]$. Esta idea se puede extender a muchas cosas, por ejemplo, si tenemos una figura base, podemos usarla para calcular la misma figura pero de mayor tamaño pensando de forma n dimensional, o sea, si estamos en dos dimensiones el crecimiento debe ser r^2 , si en 3 dimensiones debe ser r^3 y así para n dimensiones.

Ejemplo. Pensemos otra región. Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$, notemos que podemos usar coordenadas esféricas para determinar la triple integral de f sobre D , basta usar el paralelepípedo y hacer cambio de variable con cuidado.

5.3.4. Coordenadas cilíndricas

Otro cambio de variable usual, son usando coordenadas cilíndricas. Sea $(x, y, z) \in C$ donde C es un cilindro, podemos describir el punto (x, y, z) en base a un ángulo y a un largo. Sea θ el ángulo entre el eje x y la proyección del punto sobre el plano $x - y$, sea r el largo luego

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

Si $\varphi(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ por convenio digamos que es difeomorfismo y de clase C^1 ya que no sabemos el conjunto de llegada. Lo que si podemos saber es la matriz Jacobiana.

$$J(\varphi)(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el determinante es $\det J(\varphi) = r$, muy conveniente. Entonces si tenemos una función $f(x, y, z)$ continua, podemos ver que

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\varphi(r, \theta, z)) r dr d\theta dz$$

Podemos ver que las coordenadas cilíndricas son más sencillas que las esféricas pero no menos útil. Revisemos un ejemplo.

Ejemplo. Sea D el sólido acotado por el plano $z = 4$ y el cilindro $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Determinemos

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$$

Imagen de la figura

Usemos coordenadas cilíndricas podemos ver que

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \iiint_R \sqrt{r^2 + z^2} r dr d\theta dz$$

donde $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq z, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4\}$. Para ver esto hay que estudiar con cuidado φ . Luego como r depende de z , necesariamente debe estar después de dz , por otro lado z, θ no importa donde esten, son independiente así que no importa el orden de como se pongan. Entonces

$$\iiint_R \sqrt{r^2 + z^2} r dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_0^z r \sqrt{r^2 + z^2} dr \right) dz \right) d\theta$$

Sea $s(r) = r^2 + z^2$ entonces $ds = 2r dr$ entonces la integral interior es

$$\int_0^z r \sqrt{r^2 + z^2} dr = \frac{1}{2} \int_{z^2}^{2z^2} \sqrt{s} ds = z^3 \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$$

Por tanto la triple integral es

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3} \cdot 2\pi \cdot 4^3 = \frac{128\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

En resumen, existen difeomorfismos muy útiles cuando se quiere cambia de variable, y dos que deben ser conocidos son las coordenadas esféricas y las coordenadas cilíndricas.

5.4. Curvas en \mathbb{R}^n II

Recordemos las curvas. Una curva es una función definida como

$$\gamma : \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma(t) := (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{cases}$$

Hagamos una interpretación física. La curva es como el movimiento de una partícula en \mathbb{R}^n . Entonces la curva es la trayectoria de la partícula.

Si derivamos, estaríamos obteniendo la velocidad de la partícula

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

Y el módulo de esta es la rapidez de la partícula.

$$\|\gamma'(t)\|$$

Añadir también la aceleración de la partícula como

$$\gamma''(t) = (\gamma''_1(t), \dots, \gamma''_n(t))$$

Pero nos falta algo importante y es estudiar la trayectoria, por ejemplo, si tenemos la siguiente curva

$$\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \end{cases}$$

que forma la circunferencia de radio 1 y queremos determinar su perímetro, de antemano sabemos que el perímetro es 2π pero queremos tener una fórmula que permita determinar el largo de la curva. En general queremos obtener el largo de cualquier curva. Para ello vamos a usar una idea similar en las integrales, que sería tomar particiones e ir tomando un largo inexacto pero a medida que refinamos la partición, este largo va mejorando.

Definición 3. Sea $\mathcal{P} = \{t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n\}$ una partición de $[a, b]$. Definimos el largo de la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre \mathcal{P} por:

$$l(\gamma, \mathcal{P}) := \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \dots + \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\| = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Esta definición tiene todo el sentido ya que estamos tomando puntos y la norma de la diferencia es un largo, no es preciso pero la idea es aproximar el largo de toda la curva. Pero puede ocurrir que el largo de la curva tienda a infinito en un intervalo dado, por ello no siempre podemos encontrar una curva con respecto a una partición. Entonces nos centraremos en aquellas que no pasa esto, es decir, tomaremos largos sobre particiones acotados superiormente y aquí definimos las curvas rectificables.

Definición 4. Decimos que una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es rectificable si y sólo si

$$\sup_{\substack{\mathcal{P} \\ \text{partición}}} \{l(\gamma, \mathcal{P})\} \text{ es finito}$$

Nota. Una forma alternativa de decir que una curva es rectificable, es decir que es el largo es definible, no con partición.

Nota. Podemos probar que si tenemos una partición \mathcal{P}_2 más fina que \mathcal{P}_1 ($\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$), entonces

$$l(\gamma, \mathcal{P}_1) \leq l(\gamma, \mathcal{P}_2)$$

Y esto tiene mucho sentido, estamos tomando puntos fijo $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots$ y entre medio de dos puntos tomamos un punto $t_{i-1} < c < t_i$ y por la desigualdad triangular necesariamente el largo sobre \mathcal{P}_2 es mayor.

Definición 5. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva rectificable. Entonces definimos el largo de γ por:

$$l(\gamma) := \sup_{\mathcal{P}} \{l(\gamma, \mathcal{P})\}$$

El problema de esta definición es que el largo como tal no es exacto, es solo una aproximación, puede que la curva tenga puntos discontinuos o cambios muy bruscos. Para arreglar esto tomamos una curva continua y que se comporte bien localmente, para ello requerimos que γ sea de clase C^1 , con esto podemos calcular con exactitud el largo de una curva.

Teorema 7. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función C^1 . Entonces el largo de γ se calcula por:

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Revisemos una idea de porque es así. Tomemos una partición $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_n\}$, con esto podemos generar un largo sobre \mathcal{P} dada por

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Sabemos que γ es de clase C^1 por lo que podemos expandir por Taylor

$$\gamma(t_i) = \gamma(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})\gamma'(t_{i-1}) + r(t_i - t_{i-1})$$

Podemos despejar $\gamma'(t_{i-1})$ y el resto se anula cuando trabajamos con mayores particiones, esto no lo veremos. Luego

$$l(\gamma) \approx \sum_{i=1}^n \|(t_i - t_{i-1})\gamma'(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \|\gamma'(t_{i-1})\|$$

Ahora, dado que γ' es continua, podemos probar que $\|\gamma'(t)\|$ es una función continua, luego por la integral de Riemann tenemos que

$$l(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \{l(\gamma, \mathcal{P})\} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Evidentemente debemos probar que el supremo de los largo sobre una partición es lo mismo que la integral sobre la normal de la derivada de γ .

Ejemplo. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$. Notemos que γ es una curva de clase C^1 y por tanto podemos determinar el largo de la curva. Por definición tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \|(-\sin(t), \cos(t))\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

En general si la curva describe una circunferencia de radio r se puede ver que

$$\int_0^{2\pi} \|r \sin(t), r \cos(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

5.4.1. Parametrización de curvas

Podemos reparametrizar una curva, es de cierto modo un cambio de variable, es decir, dado una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 podemos tomar una función $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ de forma que podemos cambiar la región de integración del largo de la curva γ .

Pensemos en que dada una curva podemos trazar una curva en \mathbb{R}^n , y podemos tomar otra curva que trace la misma curva pero con otro comportamiento. Un ejemplo sería tomar la curva

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &:= (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

Que genera una semicircunferencia de radio 1 y si tomamos la curva dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [0, \sqrt{\pi}] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tilde{\gamma}(t) &:= (\cos(t^2), \sin(t^2)) \end{aligned}$$

que también genera una semicircunferencia de radio 1. La cuestión es en que se diferencia ambas curvas, y la respuesta es evidente que se diferencian en el t^2 . De hecho si $\varphi : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow [0, \pi]$,

$\varphi(t) = t^2$ tenemos que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. ¿Cómo debe comportarse φ ?, como queremos hacer algo como un cambio de variable tenemos que φ debe ser biyectiva y además de clase C^1 , aquí podemos definir una reparametrización.

Definición 6. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva, decimos que $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ si existe $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ biyectiva y de clase C^1 talque

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$$

Lo mejor es que largo no cambia al tomar una reparametrización, o mejor dicho, el largo es independiente de la reparametrización y tiene bastante sentido ya que solo estamos cambiando el dominio de integración y no la trayectoria de la curva. Para probarlo supongamos que γ es de clase C^1 , usaremos cambio de variable, sabemos que el largo de γ es

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Mientras el largo de $\tilde{\gamma}$ es

$$\int_c^d \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt$$

Por la regla de la cadena sabemos que

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Entonces

$$\|\tilde{\gamma}'(t)\| = |\varphi'(t)| \cdot \|\gamma'(\varphi(t))\|$$

Tenemos que $\varphi'(t) \neq 0$ ya que si fuera 0 entonces en un pequeño entorno de t , φ se vuelve no inyectiva. Supongamos que φ es creciente en todo su dominio, luego sea $\varphi(t) = s$, entonces $ds = \varphi'(t)dt$, luego

$$\int_c^d \|\tilde{\gamma}'(t)\| dt = \int_c^d \|\gamma'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(c)=a}^{\varphi(d)=b} \|\gamma'(s)\| ds$$

Que es el largo de γ . Probando que el largo es independiente a las parametrizaciones.

Ejemplo. Sea $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$ y $\tilde{\gamma} : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\tilde{\gamma}(t) := (\cos(t^2), \sin(t^2))$. Verifiquemos que $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ y determinemos el largo.

Notemos que $\varphi : [0, \sqrt{\pi}] \rightarrow [0, \pi]$ definida por $\varphi(x) := x^2$ es una función de clase C^1 , además

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$$

Y el largo de la reparametrización es

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \|(-2t \sin(t^2), 2t \sin(t^2))\| dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2t dt = \pi$$

Por otro lado, el largo de la curva original es π ya que es media circunferencia y como se puede ver ambos largos coinciden.

6. Campos Vectoriales, Integrales de Línea y de Superficie

6.1. Campos vectoriales

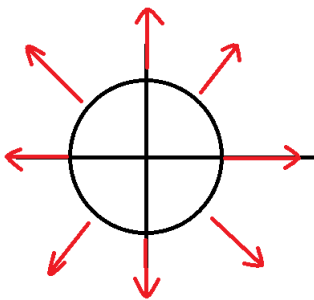
Un campo vectorial es una colección de vectores asociados a una función y una región, los ejemplos más conocidos es el campo vectorial de la gravedad, el campo magnético, eléctrico etc. Aunque el nombre suene más a estructuras, la verdad es que el campo vectorial es solo una interpretación del conjunto de llegada de una función, es más, se define el campo como una función de varias variables a varias variables. Lo que más importa es como se ven estos campos en base a la función dada.

Definición 1. Una función $F : \underset{\text{abierto}}{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial.

Nota. Trabajaremos sobre conjuntos abiertos ya que veremos muchos conceptos asociados ser de clase C^1 y nos interesa que F tenga un buen comportamiento. Por convenio a partir de ahora U es un conjunto abierto en caso de no especificar.

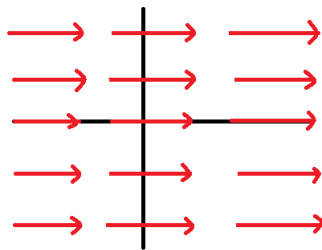
Entender el concepto de campo vectorial es más complicado de lo que parece, empecemos dando algunos ejemplos entender mejor los campos.

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial dado por $F(x, y) = (x, y)$, entonces podemos interpretarlo de la siguiente forma



estamos tomando la circunferencia unitaria y las flechas rojas es el vector de origen en la circunferencia con dirección $F(x, y)$, si somos más detallista si consideramos varias circunferencia y al mapearlos por F obtendremos flechas más largas o más cortas dependiendo de la pre-imagen tomada. Si tomamos $(1, 1)$ entonces se genera la flecha $(1, 1)$, si tomamos $(4, 4)$ la imagen es $(4, 4)$ que tiene mayor largo que la flecha $(1, 1)$ con la misma dirección.

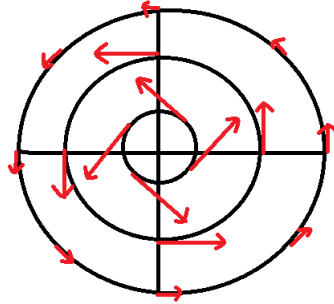
Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial dada por $F(x, y) = (1, 0)$, podemos ver las flechas de la siguiente forma



Obtenemos flechas en dirección $(1, 0)$ en todo \mathbb{R}^2 .

Tomemos un último ejemplo más caótico.

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dada por $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, si estudiamos el campo vectorial tendremos algo peculiar



Mientras más lejos del origen, más pequeñas las flechas, mientras más cerca del origen, mayores son las flechas. Además notar que los vectores son perpendiculares con su pre-imagen, y esto se nota calculando el producto punto de (x, y) con el de $F(x, y)$.

6.2. Integrales de Línea y propiedades de campos

Pensemos en un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ de clase C^1



Consideremos una función $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. En la integral usual trabajamos en un dominio de la forma $[a, b]$ compacto, en integrales múltiples trabajamos de dominios buenos que varían con funciones de $f : K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, pero ¿qué pasa con las funciones de la forma $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$? una solución podría ser aplicar integrales múltiples de alguna forma, pero F tiene codominio \mathbb{R}^n . Entonces consideremos un producto punto de $F(t)$ con algo para llegar a \mathbb{R} para ello se toma la curva γ y se estudia F en esos puntos, podemos realizar una suma de productos puntos entre el vector $\gamma(x) - \gamma(y)$ y el vector $F(\gamma(x))$ formando un valor numérico. De esta forma construimos una suma, tomemos una partición de $[a, b]$ $\mathcal{P} = \{t_0 < \dots < t_n\}$ y obtendremos lo siguientes

$$\sum_{i=0}^n F(\gamma(t_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

Evidentemente si $n \rightarrow \infty$ vamos a llegar a la derivada de γ producto y algo de la siguiente forma

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Y esto es la integral de línea de F sobre una curva γ .

Definición 2. Sea F un campo y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1 , de forma que $F \circ \gamma$ está bien definido. Entonces, definimos la integral de línea por

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Donde \cdot representa el producto punto usual y lo denotamos por

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$$

Es importante que $\gamma([a, b]) \subseteq U$ donde U es el dominio de F .

Ejemplo. Sea $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Sea $F(x, y) = (x + y, xy)$ un campo. Notemos que γ es de clase C^1 , luego la integral de F sobre la curva γ es

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F d\gamma &:= \int_0^{\pi} (\cos(t) + \sin(t), \cos(t) \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi} -\cos(t) \sin(t) - \sin^2(t) + \cos^2(t) \sin(t) dt \end{aligned}$$

Siendo al última integral, calculable.

Podemos agregarle la interpretación física a las curvas y a la integral. Si γ es el movimiento de una partícula y el campo F representa la fuerza del campo entonces

$$\int_{\gamma} F d\gamma$$

Se puede tomar como el trabajo de F sobre γ . Ya que recordemos que el trabajo se define por tomar el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento de un objeto. Porsupuesto la integral habla de manera infinitesimal.

Un sentido más matemático sería pensarlo como $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = |F(\gamma(t))| |\gamma'(t)| \cos(\theta)$, donde θ es en ángulo que se forma por los vectores $\gamma(t)$ con su imagen en F . La parte

$$|F(\gamma(t))| \cos(\theta)$$

representa la proyección de F sobre $\gamma'(t)$ y al multiplicar $|\gamma'(t)|$ estaríamos aumentando o disminuyendo el valor. Obteniendo una acción tangencial.

La integral de línea presenta propiedades muy interesante.

Lema 1. *La integral de línea de un campo vectorial F es independiente de la parametrización.*

Esto nos dice que si tenemos una curva γ dada, podemos tomar cualquier reparametrización y la integral de línea no cambia su valor. Podemos entonces tomar cualquier curva que describa la trayectoria.

Dem. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1 y sea $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una función de clase C^1 biyectiva. De forma que $\bar{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Calculemos la integral de línea sobre $\bar{\gamma}$.

$$\int_{\bar{\gamma}} F d\bar{\gamma} = \int_c^d F(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t) dt$$

Notemos que $\bar{\gamma}'(t) = \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)$. Luego

$$\int_c^d F(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t) dt = \int_c^d F(\gamma(\varphi(t))) \cdot \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Luego tenemos que

$$F(\gamma(\varphi(t))) \cdot \gamma'(\varphi(t))\varphi'(t) = \|F(\gamma(\varphi(t)))\| \|\gamma'(\varphi(t))\| |\varphi'(t)| \cos(\theta)$$

Necesitamos que $\varphi'(t) \neq 0$, sin pérdida de generalidad supongamos que es positiva. Luego si tomamos $s = \varphi(t)$ vamos a tener que $ds = \varphi'(t)dt$, entonces

$$\int_c^d F(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t) dt = \int_a^b F(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s) ds$$

Llegando a la integral de línea sobre γ . Probando que la reparametrización no afecta a la integral de línea. ■

Definición 3. Decimos que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es buena si es C^1 a trazos (finitos).

Si tenemos una curva que es C^1 a trazos podemos ver que la integral de línea de un campo es tomar los trazos, aplicar la integral y sumar. Por lo general veremos curvas muy buenas, que sean de un solo trazo y que son de clase C^1 .

Proposición 1. *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva buena. Sean los campos $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces la integral de línea tiene un comportamiento lineal, es decir*

$$\int_{\gamma} (\alpha F + G) d\gamma = \alpha \int_{\gamma} F d\gamma + \int_{\gamma} G d\gamma$$

Dem. Vamos a probar por definición.

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} (\alpha F + G) d\gamma &= \int_a^b (\alpha F + G)(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b \alpha F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) + G(\gamma(t)) dt \\
 &= \alpha \int_a^b F(\gamma(t)) \gamma'(t) dt + \int_a^b G(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\
 \alpha \int_{\gamma} F d\gamma + \int_{\gamma} G d\gamma
 \end{aligned}$$

Probando la propisición. ■

Tambien podemos sumar dos integrales de lineas en distinas curvas con una condición esencial. Tomemos $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, se genera una curva unidar por las curvas γ_1, γ_2 . Digamos que $\gamma_3 = \gamma_1 \star \gamma_2$, donde \star se define por

$$\gamma_3(t) : \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

Afirmación. Se tiene que la integral lineal de F sobre γ_3 es la suma de las integrales de lineas de F sobre γ_1 y γ_2 . Es decir

$$\int_{\gamma_3} F d\gamma_3 = \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} F d\gamma_2$$

Dem. Continuar.

Revisemos otra propiedad. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva, tenemos que la curva γ se mueve en una dirección como se aprecia en la figura de abajo

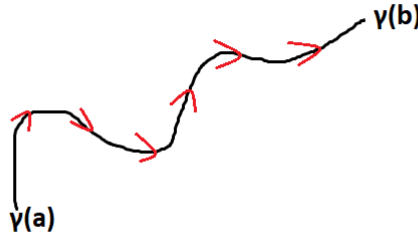
¿Qué sucede si tomamos la misma curva pero en otra dirección, qué ocurre con la integral de linea?, la respuesta es intuitiva, podemos intuir que se hace negativo la integral. Para ver eso debemos definir la otra dirección de una curva dada.

Sea $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva dada por $\bar{\gamma}(t) := \gamma(a + b - t)$. Podemos ver que $\bar{\gamma}$ es lo mismo que γ con dirección opuesta. Si γ es de clase C^1 entonces

$$\bar{\gamma}'(t) = -\gamma'(a + b - t)$$

Afirmación. Se cumple lo siguiente

$$\int_{\bar{\gamma}} F d\bar{\gamma} = - \int_{\gamma} F d\gamma$$



Dem. Sea un campo $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Tomemos $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$, luego

$$\int_{\bar{\gamma}} F d\bar{\gamma} = \int_a^b F(\bar{\gamma}(t)) \cdot \bar{\gamma}'(t) dt = \int_a^b F(\gamma(a + b - t)) \cdot (-\gamma'(a + b - t)) dt$$

tomando $g = a + b - t$ se tiene que $dg = -1$, luego

$$\int_b^a F(\gamma(g)) \cdot \gamma'(g) dg = - \int_{\gamma} F d\gamma$$

Por tanto

$$\int_{\bar{\gamma}} F d\bar{\gamma} = - \int_{\gamma} F d\gamma$$

Como queríamos probar. ■

Relacionemos un campo con una función de varias variables a una variable.

Definición 4. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con U abierto. Y un campo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x_1, \dots, x_n) := \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

En este caso decimos que

- F se llama campo gradiente de f
- f es la función potencial de F .

Observación. El campo gradiente está bien definido ya que las derivadas parciales son funciones de U a \mathbb{R} , luego al junta todos en una tupla, se forma una función de U a \mathbb{R}^n .

Definición 5. Decimos que F es un campo gradiente o es exacta si existe una función f talque $F = \nabla f$.

Teorema 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea el campo gradiente $F = \nabla f$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva buena. Entonces

$$\int_{\gamma} F d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Observación. Notemos que el teorema es muy similar al teorema fundamente del cálculo y de hecho, no es coincidencia, la demostración requiere del teorema fundamental. Revisemos algunos corolarios antes de probar el teorema.

Corolario 1. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea el campo gradiente $F = \nabla f$. Entonces no importa que curva buena tomemos, este no afecta a la integral. Si $\Gamma := \{\text{curvas buenas bien definida en } [a, b], \text{ donde el inicio de la curva es lo mismo que el final de la curva}\}$ entonces dado $\gamma \in \Gamma$ fijo se tiene que

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_{\bar{\gamma}} F d\bar{\gamma}$$

Para todo $\bar{\gamma} \in \Gamma$.

Dem. La demostración es trivial, basta tomar $\gamma \in \Gamma$ fijo para tener una referencia, luego si tomamos otra curva $\bar{\gamma} \in \Gamma$, esta curva va a ser buena y necesariamente en inicio de la curva debe ser el final de la curva, es decir $\bar{\gamma}(a) = \gamma(a)$ y $\bar{\gamma}(b) = \gamma(b)$. Luego es solo reemplazar. ■

Si graficamos la curva veremos que tiene todo el sentido. Por el teorema 1 solo nos interesa el punto final y el punto de partida.

Definición 6. Sea una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 . Decimos que es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Corolario 2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea el campo gradiente $F = \nabla f$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva cerrada de clase C^1 . Entonces

$$\int_{\gamma} F d\gamma = 0$$

Observación. Pedimos que la curva sea muy buena, ya que si fuera buena, es decir, C^1 en trazos, entonces tendríamos varios problemas, por lo que γ no tiene saltos.

Dem. Basta usar el teorema 1, si γ es de clase C^1 entonces es muy buena y dado que F es un campo gradiente, tenemos entonces

$$\int_{\gamma} F d\gamma = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))$$

Si γ es cerrada entonces $\gamma(a) = \gamma(b)$. Luego

$$\int_{\gamma} F d\gamma = f(\gamma(a)) - f(\gamma(a)) = 0$$

Probando el corolario. ■

Dem. (Teorema 1) Vamos descomponiendo

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Sea $g(t) = f(\gamma(t))$ una función de una variable, como γ y f son de clase C^1 , se tiene que g es diferenciable con derivada $g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Entonces

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Como queríamos probar. ■

Lo mejor del teorema 1 es que entrega una herramienta para determinar integrales de línea de manera muy efectivas. Revisemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva buena definida por $\gamma(t) := (t, te^{\sin(t\pi)})$ y sea un campo $F(x, y) = (x, y)$. Determinemos la integral de línea sobre γ .

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_0^1 (t, te^{\sin(t\pi)}) \cdot (1, e^{\sin(t\pi)} + t \cos(t\pi) e^{\sin(t\pi)} \pi) dt$$

Llegando a una expresión poco agradable, por lo que vamos a ver que existe un $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$ y en efecto existe. Si

$$(x, y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

Entonces podemos intuir que $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + C$ con C una constante real. Luego F es un campo gradiente además que f y γ son de clase C^1 , entonces por el teorema 1 tenemos que la integral sobre γ es tomar $f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$, luego

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \underbrace{1 + C}_{f(\gamma(1))} - \underbrace{C}_{f(\gamma(0))} = 1$$

Determinando la integral de una manera más efectiva.

Entonces, si nos piden determinar la integral de línea sobre una curva podemos intentar verificar que F el campo dado sea un campo gradiente y que el potencial f de F sea de clase C^1 , además queremos que la curva no tenga salto, así que revisamos si es de clase C^1 . Luego de eso podemos aplicar el teorema.

Ejemplo. Sea el campo $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^3 + y^3) \in \mathbb{R}^2$, ¿existirá un $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$? Supongamos que sí luego

$$(x^2 + y^2, x^3 + y^3) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$$

Además notamos que f es de clase superior de C^1 , por lo que podemos volver a derivar parcialmente, en particular

$$\frac{\partial x^2 + y^2}{\partial y} \neq \frac{\partial x^3 + y^3}{\partial x} \iff 2y \neq 3x^2$$

Recordemos el teorema de Schwarz que dice que las derivadas parciales conmutan, luego ambas derivadas parciales deberían ser las mismas. Pero llegamos a que $2y \neq 3x^2$ una contradicción, por lo tanto F no puede ser gradiente.

Observación. Sea $F = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Si F es gradiente, entonces existe una función g tal que $F = \nabla g$ y con esto podemos deducir algunas cosas, si

$$\langle f_1, \dots, f_n \rangle = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right\rangle$$

Entonces por Schwarz tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right)$$

para todo i, j .

Definición 6. Sea $F = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Si

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Decimos que F es un campo cerrado.

Notación. Para simplificar la derivada parcial de una función coordenada denotaremos por $\partial_i f_j$ donde f_j es la función j de F y ∂_i es la derivada parcial con respecto a la variable x_i

Observación. Si F es un campo gradiente y además es de clase C^1 entonces se puede ver que F es cerrado. Entonces, sea f la potencia de F luego

$$F = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$$

donde $f_i = \partial_i f$, notemos que F al ser de clase C^1 implica que $\partial_i f$ sea de clase C^1 o mejor dicho. Podemos decir que f es de clase C^2 , por lo que podemos derivar dos veces a f . Sean $i, j \in \{1, \dots, n\}$ luego

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Por tanto F es un campo cerrado.

Nota. Podemos de esta forma observar que los campos cerrados son más generales que los campos gradientes. Mucho más, existen campos que son cerrados pero no gradientes, el siguiente ejemplo ilustra un caso.

Ejemplo. Sea $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$$

¿Será F cerrado?, en este caso es simple verifica ya que solo se debe ver que la derivada parcial de f_1 sobre y con la derivada parcial de f_2 sobre x .

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y} \right)$$

Luego F es efectivamente cerrado.

Consideremos la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, que es una curva buena ya que es de clase C^1 y lo mejor es que no tiene roturas. Luego

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Notemos que γ es una curva cerrada y si F fuera gradiente tendríamos por el corolario 2 que

$$\int_{\gamma} F d\gamma = 0$$

Pero esto no ocurre por lo que F no puede ser un campo gradiente. Esto nos muestra que existen funciones cerradas y no gradiente.

Sabemos que un campo gradiente integrado tiene un comportamiento particular bajo curvas buenas y se anulan siempre y cuando la curva sea cerrada además de ser buena, la integral de línea se anula. ¿Se podría definir de alguna forma un campo donde sin importa que curva cerrada se tome, la integral se anule?, no confundir con el campo gradiente, sabemos que si un campo es gradiente entonces toda integral de línea bajo una curva cerrada se anula, me refiero a tomar un campo aleatorio con esta característica. Y de hecho tal campo existe. El campo del que hablamos cumple la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *Para toda curva γ cerrada se tiene que*

$$\int_{\gamma} F d\gamma = 0$$

2. *Sean γ_1, γ_2 dos curvas, entonces*

$$\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = \int_{\gamma_2} F d\gamma_2$$

Cuando el punto inicial de γ_1 es igual al punto inicial de γ_2 y el punto final de γ_1 es igual al punto final de γ_2

Idea dem. Para concluir de 1. a 2. debemos tomar puntos iniciales y finales fijos, digamos que los puntos iniciales y finales son $\bar{\gamma}(a)$ y $\bar{\gamma}(c)$ respectivamente. Luego basta considerar Γ por la colección de las curvas cerradas de clase C^1 definida en $[a, b]$ donde existe un punto $c \in [a, b]$ talque $\gamma(c) = \bar{\gamma}(c)$, es esta forma podemos generar dos curvas de clase C^1 , la primera que parte de $\bar{\gamma}(a)$ y termina en $\bar{\gamma}(c)$ y la otra que parte en $\bar{\gamma}(c)$ y termina en $\bar{\gamma}(b)$. Digamos que $\gamma \in \Gamma$ luego al ser cerrada se tiene que

$$\int_{\gamma} F d\gamma = 0$$

Y como vimos, podemos separar γ en dos curvas, digamos que γ_1, γ_2 luego

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 + \int_{\gamma_2} F d\gamma_2 = 0 \iff \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = - \int_{\gamma_2} F d\gamma_2$$

Y para concluir el resultado notemos que γ_2 está al reves y para ello consideramos $\hat{\gamma}_2(t) := (b + c - t)$ de forma que satisface las condiciones de 2, de la proposición, de esta forma

$$\int_{\gamma_1} F d\gamma_1 = \int_{\hat{\gamma}_2} F d\hat{\gamma}_2$$

Donde $\gamma_1, \hat{\gamma}_2$ tienen igual punto de partida y de llegada.

Para probar de 2. a 1. basta pensar de la misma forma, se fijan puntos iniciales y finales, luego tomamos curvas de clase C^1 y a una le cambiamos la dirección, de forma que al sumarla con la otra curva de referencia, están forman una curva cerrada y al sumar ambas integrales de líneas el resultado es nulo.

Es demasiado similar que estudiar campo gradiente, pero más adelante veremos la explicación de esa similitud. Notemos que para estos campos no nos interesa el camino, sino que el punto inicial y final sean los mismos para curvas distintas. Es por así decirlo, una conservación, de esta forma introducimos los campos conservativos.

Definición 7. Decimos que un campo F es conservativo si cumple la primera o segunda condición de la proposición 2.

Nota. También podemos entender que un campo es conservativo si la integral de línea es independiente de la camino como mencionamos. (solo importa el inicio y el final)

Hemos mencionado que existe una similitud entre los campos gradientes y los campos conservativos y de hecho son la misma cosas, son casi una equivalencia. Es decir, si un campo es conservativo o toda integral de línea depende del fin con el inicio con curvas C^1 entonces tal campo tiene un potencia f . La relación aun así es complicada, es fácil ver que un campo gradiente es conservativo ya que toda curva cerrada anula la integral, pero la otra relación es más complicada. Para ello se requiere de ver un nuevo mini tópico.

F es un campo conservativo si y sólo si F es un campo gradiente.

6.2.1. Conjuntos arco-conexos y simplemente conexos

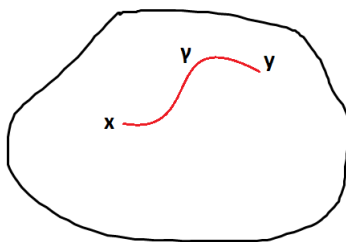
Antes de continuar con campos conservativos, cerrados, gradiente. Es importante de hablar de conceptos topológicos asociados a la conexividad. Ambas definiciones vamos a mostrarla de manera superficial y lo entenderemos de forma intuitiva, ya que para poder estudiarlos en su totalidad, requieren herramientas que aun no se han visto y que corresponde a topología.

Definición 8. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Decimos que U es arco-conexo si para todo $x, y \in U$ existe una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ tal que $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$.

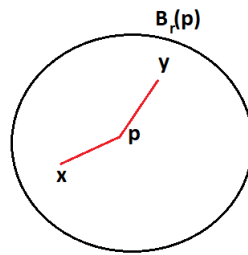
Entendamos que un conjunto sea arco-conexo. Queremos que al tomar un conjunto abierto U y al tomar dos puntos x, y cualesquiera, podemos tomar una curva continua que parte en x y termina en y . Queremos que la curva sea continua ya que nos interesa que la curva no tenga saltos. La figura de abajo muestra una curva donde $\gamma(a) = x$ y $\gamma(b) = y$.

Revisemos algunos ejemplos de conjuntos arco-conexos

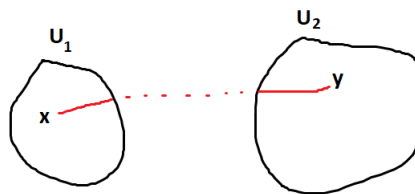
Ejemplo.



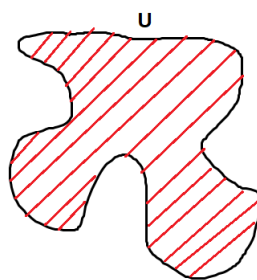
- La bola de radio r y de centro P es un conjunto arco-conexo, para verlo de forma intuitiva basta tomar cualquier punto x, y en la bola y tomar una línea recta de x a P y luego P a y , de forma que tenemos una curva continua.



- Tomemos U_1, U_2 disjuntos, podemos ver que $U = \bigsqcup U_i$ es no arco-conexo. Para ver esto basta tomar un punto $x \in U_1$ y un punto $y \in U_2$ luego es imposible tomar una curva continua que esté en U que vaya de x a y .

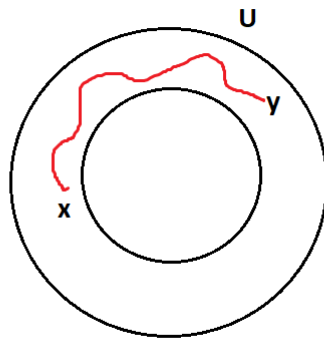


- Pensemos U como la figura de abajo En términos topológicos es lo mismo que una bola



abierta, por así decirnos es un homeomorfismo y con esto se puede probar que si la bola es arco-conexo entonces U también. Este truco sirve para determinar si un conjunto más complicado es arco-conexo.

- Como último ejemplo pensemos en un anillo de dos dimensiones como se apreciaba en la figura de abajo.



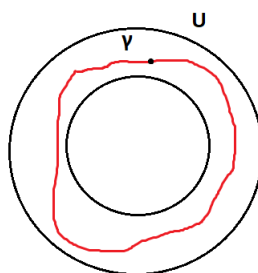
Podemos ver que es arco-conexo.

Observación. Los arco-conexos más comunes son \mathbb{R}^n , Bolas, Bolas deformadas, Cajas.

Con respecto al último ejemplo que todo cambia cuando consideremos curvas cerradas e intentamos deformar la curva. La siguiente definición explica lo que queremos hacer.

Definición 9. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Decimos que U es simplemente conexo. Si toda curva continua cerrada en U se puede deformar continuamente a un punto de U .

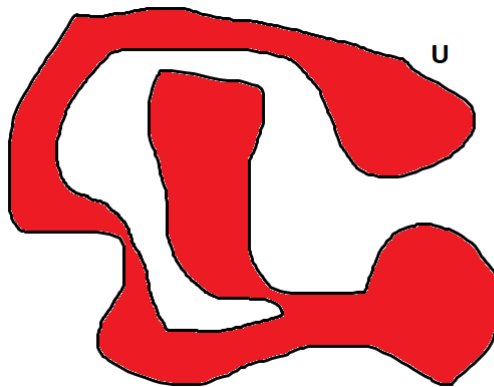
Esto quiere decir que un conjunto es simplemente conexo si al tomar cualquier curva continua cerrada y la intentamos contrar a un punto, esta no se rompe. Pensemos en el anillo de abajo



Si U es simplemente conexo, entonces se puede tomar γ y contraerla sin romperla (sin cortar la cuerda roja) a un punto de U , digamos al punto negro, pero ocurre que si intentamos deformar la curva necesariamente debe romperse para poder contraerse al punto negro. De forma que U no es simplemente conexo.

Ejemplo.

- Volvamos a tomar una bola de radio r y de centro P $B_r(P)$, podemos afirmar que la bola es simplemente conexa ya que podemos tomar cualquier curva cerrada podemos aplicar deformaciones hasta que la curva se convierte en un punto. Podemos contraerlo al punto P y esto es para toda curva cerrada.
- Si tomamos una bola de dos dimensiones y adentro tiene n bolas, es facilmente verificable que no puede ser simplemente conexo. ya que estariamos replicando el ejemplo de no simplemente conexo mostrado anteriormente. Lo más interesante es que si tomamos una bola de tres dimensiones con una pequeña bola, también de tres dimensiones, podemos verificar que esta bola es simplemente conexo. No es tan difícil intuirlo. Esto nos dice que la curva cambia su comportamiento en distintas dimensiones, es más, si tomamos una curva en una línea continua en \mathbb{R} , este conjunto es siempre simplemente conexo.
- Volvamos a pensar en un ejemplo más caótico. Tomemos el conjunto U de abajo La



pregunta es ¿ U simplemente conexo? y aunque parezca muy raro, la respuesta es, sí. No es tan claro verlo pero U es prácticamente tomar una bola y deformarla y como hemos dicho, las propiedades deben mantenerse. Luego si la bola es simplemente conexo se tiene que U también lo es.

Nota. Si un conjunto es simplemente conexo, entonces es arco-conexo. Esto se puede ver ya que si es simplemente conexo podemos tomar cualquier curva y podemos particionar esa curva, como es continua, entonces tenemos una curva de x a y continua, de forma que es arco-conexo.

Con esto cerramos los conjuntos arco-conexos y simplemente conexos. Volvamos a los campos. Hemos mostrado de forma superficial que un campo es gradiente si y sólo si es conservativo. Una implicancia es directa pero la otra no. El siguiente teorema caracteriza los campos gradientes y los campos conservativos.

Teorema 3. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un arco-conexo. Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo. Si F es un campo conservativo entonces F es un campo gradiente.

Idea dem. Sea $x_0 \in U$ un punto fijo. Para todo $x \in U$ existe una curva continua de clase C^1 . Digamos que $\gamma_x : [a, b] \rightarrow U$ es nuestra curva que va de x_0 a x . Definimos

$$f(x) = \int_{\gamma_x} F d\gamma_x$$

Afirmación. $F = \nabla f$.

Dem.

En resumen tenemos que

Campos $U \supseteq$ Campos cerrados en $U \supseteq$ Campos gradientes en U

En otras palabras, los campos U son más generales que los campos cerrados en U y, estas mismas son más generales que los campos gradientes en U .

Teorema 4. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ simplemente conexo. Entonces todo campo cerrado en U es un campo gradiente en U

Observación. La función $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) := \left\langle \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\rangle$$

es un campo cerrado pero no gradiente. Una forma de ver que no es gradiente es tomar un curva cerrada, digamos $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$. Luego la integral de línea sobre F es

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = 2\pi$$

Si fuera gradiente entonces

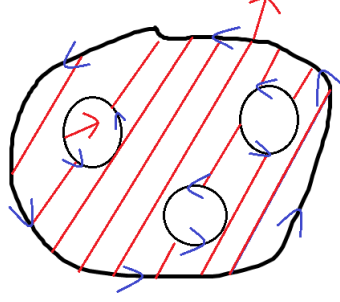
$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = 0$$

Pero no ocurre.

6.3. Teorema de Green

Definición 10. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto con agujeros como se ve en la figura de abajo.

Podemos ver que podemos orientar el borde Ω . En este caso decimos que hay una orientación positiva en $\partial\Omega_+$. Donde $\partial\Omega_+$ es el borde de Ω .



Notemos que el borde de Ω se puede relacionar con curvas, tanto el borde de afuera como los de adentro con dirección por la orientación positiva de $\partial\Omega_+$. La idea de esto es que podemos usar integrales de líneas como hay curvas, el problema es que son muchas curvas o incluso la curva en si es muy caótica, por ello George Green entrega un resultado que sirve para determinar no de forma directa pero si de forma relacionada las integrales de líneas de las curvas en el borde de Ω . Es más, el resultado relaciona las integrales de líneas con las integrables dobles.

Teorema 5. (Green) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo dado por $F(x, y) = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$ de clase C^1 . Sean $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ las curvas asociadas al borde con dirección orientación positiva de $\partial\Omega_+$. Entonces

$$\int_{\partial\Omega_+} F d\partial\Omega_+ = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

donde

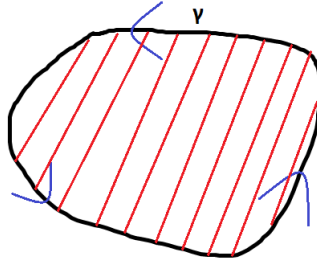
$$\int_{\partial\Omega_+} F d\partial\Omega_+ = \int_{\gamma_1} F d\gamma_1 + \dots + \int_{\gamma_n} F d\gamma_n$$

Nota. Tener cuidado con el cálculo de la dirección de algunas curvas, ya que las curva que rodea por afuera a Ω sigue una dirección opuesta a una curva del borde de adentro.

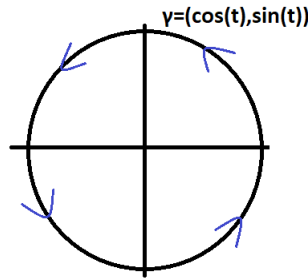
Teorema 6. (Green particular) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto sin agujeros adentro. Sea el campo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $F = \langle P, Q \rangle$ de clase C^1 . Entonces si γ es la curva que rodea a Ω podemos determinar la integral sobre γ por:

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

Para tener dejar todo en claro, cuando hablamos de tener un conjunto abierto sin agujeros nos referimos a la figura de abajo, donde γ es la curva que rodea a Ω .

Figura 35: Ω con la curva γ

Ejemplo. Sea $F(x, y) = \langle y^3, -x^3 \rangle$ un campo definido en un disco D de radio 1.



Podemos ver que la única curva es la que rodea al disco y como podemos tomar cualquier curva ya que esta no afecta la integral de línea. Pero no nos centraremos en determinar la curva, si no que usaremos Green. Tenemos que

$$\int_{\gamma} F d\gamma = \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dx dy = -3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Usando el cambio de variable $\varphi(\theta, r) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ llegamos a que

$$\int_{\gamma} F d\gamma = -3 \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} r^3 d\theta \right) dr = -\frac{3\pi}{2}$$

Luego la integral sobre la curva que rodea al disco vale $-\frac{3\pi}{2}$.

Ejemplo. Sea $F(x, y) = \langle -x^2 + 2y, 7x + y^2 \rangle$, consideremos el anillo formado por tomar un círculo de radio 2 y quitarle un círculo de radio 1. Podemos ver que existen dos curvas con orientación positiva o mejor dicho, dos curvas con dirección opuesta. Por el teorema de Green podemos determinar la suma de las integrales de líneas sobre las curvas del borde. Para simplificar digamos que $\partial\Omega_+ = C$

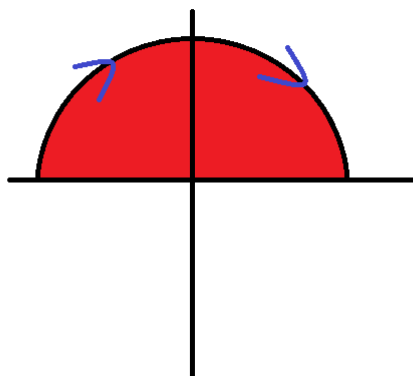
$$\int_C F dC = \iint_A 5 dx dy = 5 \text{Vol}(A)$$

Podemos ver que la integral sobre C es tomar 5 veces el área del anillo que es 3π , luego

$$\int_C F dC = 15\pi$$

Podemos hacer algunos trucos para determinar curvas que no necesariamente rodeen al dominio de un campo.

Ejemplo. Sea el campo $F(x, y) = \langle -2y + x, e^{y^2} + y \sin(y) + x \rangle$. Definimos sobre la semicircunferencia de radio 1.



Con una curva γ con dirección de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$. Queremos determinar

$$\int_{\gamma} F d\gamma$$

Para encontrar la integral de lineal pensemos en la curva con dirección orientación positiva. Digamosle $\mu + \xi$ donde μ va de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$ por arriba y ξ va de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ por abajo, de forma que podemos usar el teorema de Green. Tenemos entonces que

$$\int_{\mu+\xi} F = \int_{\mu} F d\mu + \int_{\xi} F d\xi = \iint_{\Omega} 3 dx dy = 3 \frac{\pi}{2}$$

Si además tomamos $\xi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi(t) := (t, 0)$ entonces

$$\int_{\xi} F d\xi = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

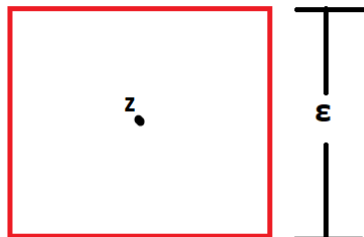
Entonces

$$\int_{\mu} F \mu = 3\frac{\pi}{2}$$

Pero μ es la curva en dirección opuesta γ . Por tanto

$$\int_{\gamma} F d\gamma = -\frac{3\pi}{2}$$

Idea dem. (Teorema de Green) Por convenio pensemos en un conjunto abierto sin agujeros. Sea $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos un cuadrado rojo alrededor de z de largo ε



Tomemos la curva que forma el borde del cuadrado con orientación antihoraria, digámosle γ_ε .

Afirmación.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\gamma_\varepsilon} F d\gamma_\varepsilon = \frac{\partial Q}{\partial x}(x) - \frac{\partial P}{\partial y}(z)$$

Para entender la afirmación, si tenemos un campo $F = \langle P, Q \rangle$, la integral de línea es tomar

Continuar

Definición 11. Se define la rotación de un campo F de clase C^1 sobre z por:

$$\text{rot} F(z) := \frac{\partial Q}{\partial x}(z) - \frac{\partial P}{\partial y}(z)$$

Observación. Si para todo z dentro del dominio de F es tal que la rotación se anula se tiene que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x) = \frac{\partial P}{\partial y}(z)$$

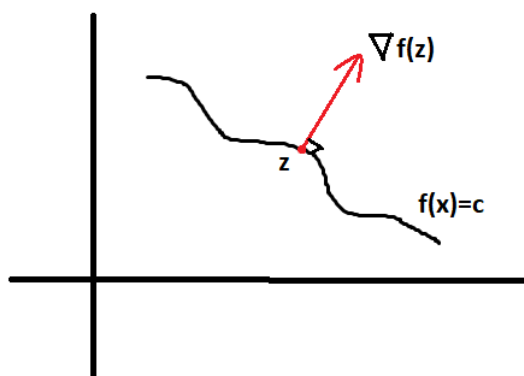
Luego F es un campo cerrado.

Una pregunta natural que debería surgir al introducir campo vectoriales es ¿cómo describir un campo?, en el sentido de visualizarlo. Para ello vamos suponer que F es un campo gradiente, es decir, existe una función f bien definida, de clase C^1 tal que $F = \nabla f$, tomemos z elemento del dominio de F , tenemos un vector $\nabla f(z)$ y que podemos proyectarlo desde z como se puede apreciar en la figura de abajo, con la curva de nivel c de f . Podemos ver que $\nabla f(z)$ es perpendicular a la curva de nivel y esto se relaciona el producto punto y la norma. Si

$\gamma : [a, b] \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ es una curva talque $\gamma(s) = z$ entonces $f(\gamma(t)) = c$, además $f(\gamma(t))$ es una función constante de una variable a una variable, si derivamos concluimos que

$$\nabla f(\gamma(t))\gamma'(t) = 0$$

donde $\gamma'(t)$ es el vector tangencial a la curva, observando que efectivamente $\nabla f(z)$ es perpendicular a la curva.



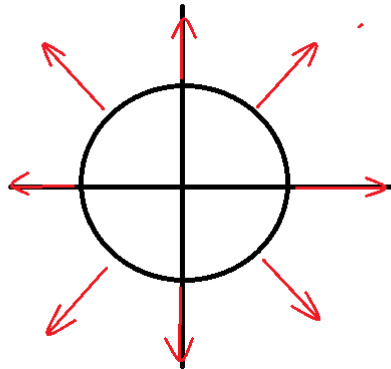
Con esta idea podemos construir de mejor forma los campos gradiente. En resumida cuentas

1. Tomamos F un campo gradiente
2. Encontramos f de alguna forma y tomamos una curva de nivel de f
3. Luego consideramos un vector perpendicular a la curva de nivel verificando al dirección
4. Y finalmente detallamos.

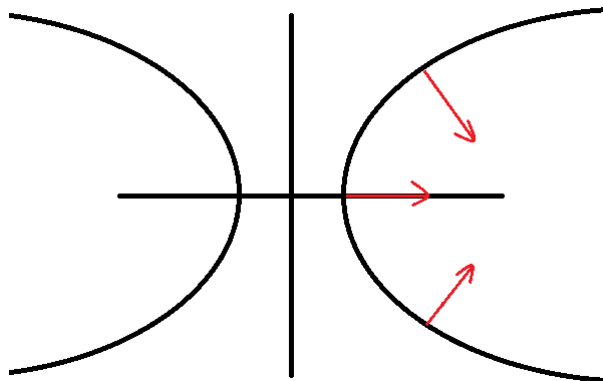
Revisemos un ejemplo para dejar en claro esta idea.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ y consideremos el campo gradiente $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = \langle 2x, 2y \rangle$. Intentemos describir el campo F . En este ejemplo ya tenemos el potencia de F que es f , así que solo consideremoa una curva, digamos que queremos la curva de nivel 1. Es decir, los (x, y) tales que $f(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Si graficamos obtendremos una circunferencia de radio 1, luego tenemos dos opciones, el vector es perpendicular a la circunferencia y esta puede apuntar hacia adentro o hacia afuera, esto se ve facilmente estudiando $\nabla f(x, y)$, si $x = 1, y = 0$ entonces $\nabla f(x, y) = (2, 2)$ luego apunta hacia afuera. Construyendo algo la figura de abajo

Lo mejor es que podemos hacer esto con cada curva de f y construimos de forma simple el campo vectorial. Evidentemente si el radio de la circunferencia es mas pequeños, entonces el vector gradiente es más pequeño y por tanto los vectores se van achicando, cosa constraria cuando el radio crece.



Ejemplo. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2$, y sea el campo $F(x, y) = \langle 2x, -2y \rangle$. Podemos ver que F es gradiente, por lo que podemos hacer todo el truco para describir F . Consideremos la curva de f de nivel 1 dada por la colección de (x, y) tales que $x^2 = y^2 + 1$, podemos ver que se forma una hipérbola. Ya sabemos que un punto F es perpendicular a la hipérbola, nuestro único problema es saber donde apunte el vector y basta ver que si $x = y = 1$ entonces $F(x, y) = \nabla f(x, y) = (2, -2)$ y esto muestra que apunta hacia adentro.



Pero recordemos que la curva cambia drásticamente cuando tomamos valores positivos, negativos y nulos, por lo que si intentamos describir F obtendremos algo de dificultad. Pero aun así el saber el comportamiento del campo gradiente facilita mucho la descripción del campo.

La siguiente definición sirve más como un convenio para entender mejor las integrales de línea.

Definición 12. Sea una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 dado por $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se define

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f dx &:= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma_1'(t) dt \\ \int_{\gamma} f dy &:= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma_2'(t) dt\end{aligned}$$

Nota. Los componentes $f(\gamma(t)) \gamma_i'(t)$ son valores reales, por lo que la integral de línea una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es prácticamente una integral de una variable.

Observación. Sea $F = \langle P, Q \rangle$ y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 . Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F d\gamma &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (P(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + Q(\gamma(t)) \gamma_2'(t)) dt \\ &= \int_a^b P dx + Q dy\end{aligned}$$

Esta última parte es más una notación. Esto se puede ver forma inversa, si tenemos

$$\int_a^b P dx + Q dy$$

podemos reconstruir F y llegar a algo de la forma

$$\int_{\gamma} F d\gamma$$

Ejemplo. Calcule

$$\int_{\gamma} x^2 dx - y^2 dy$$

Donde γ es una circunferencia de radio 1. Sea $F(x, y) = \langle x^2, -y^2 \rangle$. Notemos que F es cerrado y si está definida en \mathbb{R}^2 , un conjunto arco-conexo tenemos que F es gradiente. Y si además γ es una curva cerrada, se tiene que

$$\int_{\gamma} F d\gamma = 0$$

Recordemos algunas cosas, si tenemos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$: una curva suficientemente de clase C^1 , podemos determinar el largo de la curva que recordemos se determina por

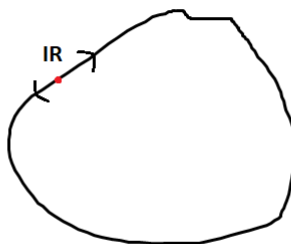
$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Definición 13.

Falta una clase

¿Qué es una superficie?, de forma intuitiva una superficie sería lo que rodea a una esfera, lo que rodea cilindro y lo que no sería una superficie sería una pelota, celular, radio, etc.

En un objeto de dos dimensiones si tomamos un punto, podemos tomar un intervalo que parece una recta de una dimensión.

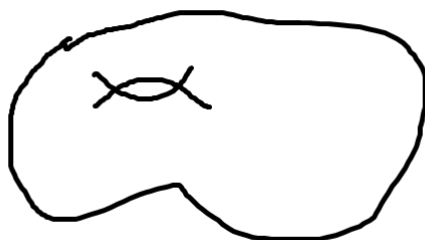
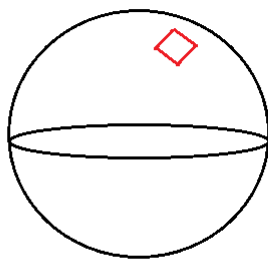


Lo mismo podemos hacer con una superficie. Podemos ver que localmente en una esfera es un plano. Lo mismo con otras superficies.

Ejemplo.

- Una esfera
- Un objeto sin borde con generos (hoyos). Pueden existir objetos con infinitos generos.

Teorema. Toda superficie compacta sin bordes orientable tiene forma a los ejemplos mostrados.



Pensemos en superficies con bordes

Ejemplo.

- Un objeto con borde
- Un pantalon

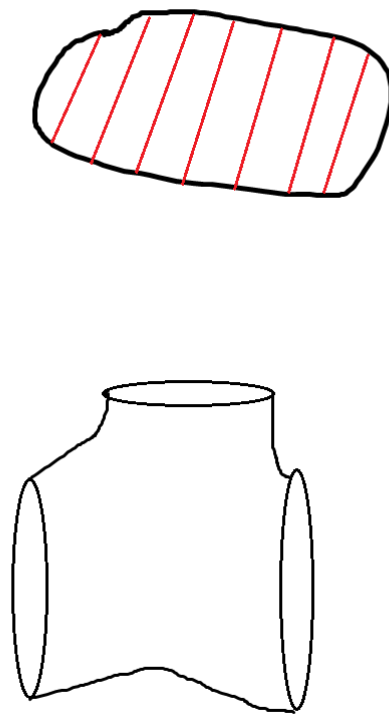


Figura 36: Caption

Podemos generar superficies usando una idea muy común en topología. Pensemos en un rectángulo, luego podemos intentar cerrar uniendo las flechas con las flechas formando un cilindro o una cinta.

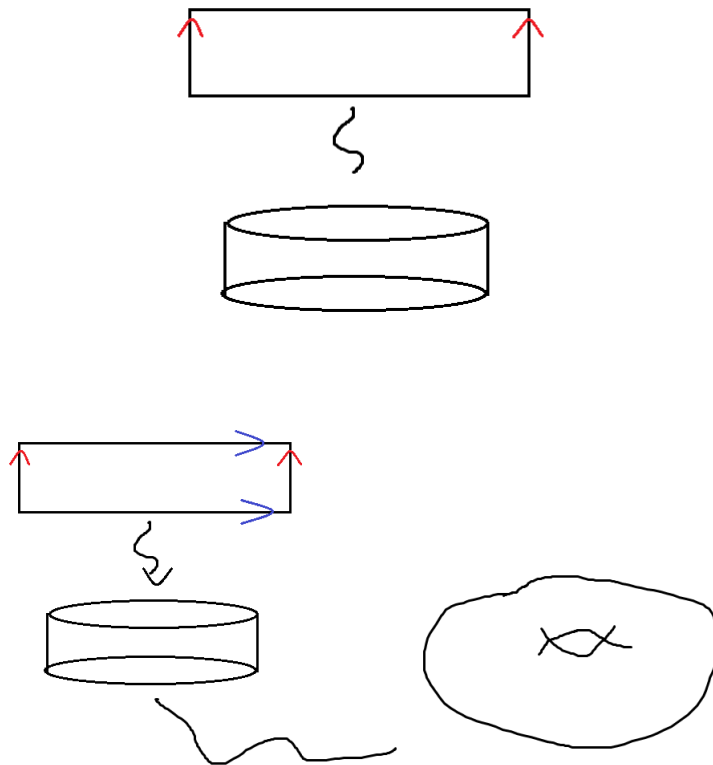
Un objeto curioso es cuando una de las dos flechas la invertimos y intentamos unirlas y se va a generar una cinta con propiedades particulares. A esta cinta se le conoce como cinta de moebius.

Imagénese una cinta de moebius

Lo interesante es que la cinta de moebius no es orientable.

¿Será posible de un rectángulo crear un toro?, es raro pero pensemos en el mismo rectángulo del cilindro y consideremos las flechas en los lados restantes con la misma dirección, procediendo de la misma forma para generar el cilindro llegamos al toro como se aprecia en la figura de abajo. Podemos también generar un bitoro, aunque intuir la figura de dos dimensiones que genera el bitoro es más complicado.

Si hacemos lo mismo que hicimos en la cinta de moebius, en el sentido de tomar flechas opuestas podemos generar otro objeto peculiar, la botella de klein. Para ello debemos tener dos flechas opuestas de misma dirección, y las otras dos flechas de dirección opuesta, formando convenientemente.



temente una botella.

Botela de klein.

Definición. Sea un conjunto cerrado (incluyendo el borde) $S \subseteq \mathbb{R}^3$. S es una superficie si es un espacio donde alrededor de cada $x \in S$ hay una vecindad que es homeomorfo a un disco abierto o un semidisco de un borde.

Estudiamos espacios tangentes a superficies. Sea el paraboloide dado por $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$. Hemos estudiado el plano tangente de un punto con el vector gradiente que es la normal del plano y resolviendo una ecuación normal.

Tomemos $F(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ una función definida en un disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ tal que genera el paraboloide anterior. Es decir, una parametrización. Consideremos el punto del disco $(1, 1)$ con imagen $F(1, 1) = (1, 1, 2)$, queremos calcular el plano tangente del punto $(1, 1, 2)$ a partir de la función F .

Si

$$F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

y es de clase C^1 podemos determinar el Jacobiano y interpretarlo como función

$$DF(1, 1) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

...

Pensemos en el paraboloide formado por $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 1$. Podemos ver que $F : D \rightarrow P$ es una parametrización del paraboloide P con D un disco de radio 1. Vamos a intentar encontrar un plano tangente al punto $(1, 1, 2)$. Notemos que $F(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ y $(1, 1)$ generar $(1, 1, 2)$, sea $\gamma_x : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva en D donde $\gamma_x(t) := (1 + t, 1)$. Con esto se genera una curva en P la cual se describe por

$$\eta_x = F \circ \gamma_x : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Podemos sacar un vector directo con esta curva, para ello derivamos η_x con respecto a 0

$$\eta'_x(0) = DF(\gamma_x(0))\gamma'_x(0) = DF(\gamma_x(0))(1, 0) = DF(\gamma_x(0))_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Donde DF es la matriz Jacobiano. Podemos hacer lo mismo con una curva $\gamma_y : [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que se mueve solo en el eje y y construir otro vector dirección de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

De esta forma podemos construir la dirección normal del plano, la cual es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Definición. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 inyectiva dado por $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$. Sea $S = F(U)$. Decimos que S es una superficie suave si $F_u \times F_v \neq 0$

Nota. Se define $F_u = (\partial_u f_1, \partial_u f_2, \partial_u f_3)$.

Teorema. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $S = F(U)$ una superficie suave. Entonces

$$\text{Área}(S) = \iint_U \|F_u \times F_v\| du dv$$

Falta clases continuar estudio en cuaderno

Definición. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^1 y sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Definimos la integral de línea respecto al arco parámetro por

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

Nota. Notemos que para calcular la integral de línea usamos campos. Muy distinto a integrar con respecto al arco parámetro, que se usa una función de la forma $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + 2y$ y sea la curva que forma una recta que pasa por $(-2, -1)$ y $(1, 5)$. Para determinar la integral sobre el arco-parámetro debemos determinar la curva y usar la definición. Podemos ver que la curva es $\gamma(t) := (t, 2t + 3)$, luego

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{-2}^1 (5t + 6) \cdot \sqrt{5} dt = \dots$$

Observación.

- La integral bajo el arco parámetro es independiente de la parametrización.
- La integral bajo un arco parámetro varía su signo cuando se cambia la dirección de la curva.

Si tenemos una superficie S ¿cómo encontramos una parametrización?, es decir, queremos encontrar una función que parametriza a S . Lo que hacemos es usar distintas técnicas para determinar la función $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Una de tomar \mathbb{R}^3 e intentar proyectarlo en el plano real y luego usar trucos. Por ejemplo, si tenemos una semiesfera, podemos ver que al tomar D un disco, basta hacer

$$F(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$$

Luego calcular el área de la superficie.

Teorema. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva de clase C^1 y $S_o = F(U)$ una superficie suave. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces.

$$\iint_{S_o} f dS := \iint_U f(F(u, v)) \|F_u \times F_v\| du dv$$

A la parte izquierda se le conoce como la integral de superficie definida sobre S_o

Observación. Estamos haciendo algo similar que la integral de línea, solo que en este caso

tomamos al campo como una curva con derivadas parciales y un producto cruz, luego se toma la norma y se multiplica por $f(F(u, v))$.

Ejemplo. Sea S_o una superficie con parametrización $F(u, v) := (u, v, u^2 + v^2)$ definida en un disco U . Sea $f(x, y, z) = z$. Notemos que F es inyectivo, S_o es suave y f es continua. Luego podemos determinar la integral de superficie.

$$\iint_{S_o} f dS = \iiint_U 3(u^2 + v^2) du dv$$

Luego es calculable.

Definición. Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectivo de clase C^1 talque $F(U) = S_o$ es suave. Sea $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo. Entonces

$$\iint_{S_o} G dS := \iiint_U G(F(u, v)) \cdot (F_u \times F_v) du dv$$

La parte izquierda se le conoce como integral de campo sobre S_o . Es diferente a la integral anterior ya que tomamos un campo en vez de una función de varias variables a una variable. ...