FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2405

Fundamentos De La Matemática

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. Lógica Proposicional

1.1. Introducción

La lógica proposicional o también conocida como lógica de orden 0 y, Permite estudiar la veracidad de los argumentos.

Un argumento, se define como un conjunto de oraciones donde la última oración se le llama conclusión, y a las primeras se les llama premisas.

$$\left.\begin{array}{l}\text{frase 1}\\ \text{frase 2}\\ \vdots\\ \text{frase n}\end{array}\right\}\text{ Premisas}$$
$$\text{frase n+1 Conclusión}$$

También se puede interpretar como

$$\text{Argumento} = \{\underbrace{f_1, f_2, \ldots, f_n}_{\text{Premisas}},\ \underbrace{f_{n+1}}_{\text{Conclusión}}\ \}$$

Decimos que un argumento es correcto si toda vez que las premisas son verdaderas, su conclusión también lo es.

Nota 1.1. Siempre se asume que la premisa es verdadera.

Ejemplo 1.1.1

- La polera es verda o roja
  La polera no es roja
  − − − − − − − − − − − − −
  La polera es verde

  (Las lineas separa las premisas de la conclusión) Asumiendo que las premisas son verdadera, llegamos a que necesariamente la polera es verde, y esta es la conclusión como tal. Por tanto el argumento es correcto.

- S trajo una manzana, entonces como
  S trajo una manzana
  − − − − − − − − − − − − − − − − − − −
  No como

  El argumento es incorrecto ya que si S trajo una manzana, si o si como, pero la conclusión dice que no como. O dicho de otra forma, las premisas no aseguran la veracidad de la conclusión.

- Bobby tiene 4 patas
  Bobby es un mamífero
  − − − − − − − − − − − −
  Bobby es un perro

  El argumento es incorrecto ya que para que sea correcta, necesitamos que las premisas aseguren la conclusión pero, perfectamente Bobby puede ser un gato, cerdo, etc.

- − − − − − − −
  Hoy hacer calor

  Es correcto ya que 'todas vez que las premisas es verdad' lo es la conclusión.

- Todos los hombres son mortales
  Sócrates es un hombre
  − − − − − − − − − − − − − − − − −
  Sócrates es mortal

  Este argumento es algo complicado, ya que usa un concepto que como tal no estudiaremos a profundidad, la cual es el "para todo". Dejando eso de lado y procediendo de forma normal llegamos a que es correcto, ya que si Sócrate es hombre, entonces debe ser mortal dado que todo hombre es mortal.

- El sol brilla
  El sol no brilla
  − − − − − − − − − − − − − − − − −
  Ayer llovío

  Es un argumento correcto, aunque no tiene ningún sentido. Más adelante veremos que se debe a que es demostrable y por tanto una consecuencia lógica.

La lógica proposicional también sirve para estudiar argumentos formadas por proposiciones que usan solamente los símbolos

$$-, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$$

Además, podemos simplificar las premisas y argumentos por letras, así por ejemplo

$$\text{Ayer llovío} = p, \text{Dormir hoy} = q, etc.$$

De esta forma se simplifica los argumentos, con el primer ejemplo construimos el argumento:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ -p \\ --- \\ q \end{array}$$

que ya sabemos que es correcta gracias a la lógica básica que sabemos.

1.2. El lenguaje de la lógica proposicional

Lo que acabamos de hacer recién es transformar un argumento a un nuevo lenguaje libre de ambigüedades, y esto es la idea del lenguaje lógico proposicional (lógica de orden 0) y lo que estudiaremos a partir de ahora.

Definición 1.1. *El lenguaje $\mathcal{L}$ de la lógica proposicional, consiste de una sucesión de infinitos símbolos*

$$\mathcal{L} = \{-, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, (,), p_1, p_2, \dots\}$$

donde los símbolos

1. $-, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ *son los conectivos lógicos.*
2. $(,)$ *son paréntesis.*
3. $p_1, p_2, p_3, \dots$ *son letras proposicionales, las cuales son distintas a los símbolos anteriores, distintos entre ellos y además, ninguno de esto es una sucesión finita de otros (p_1 no puede ser $-p_2$).*

Más adelante a las letras proposicionales le daremos valores verdad. Por ahora vamos a tomar las cosas sin ningún sentido, solo trabajaremos con ellas.

Definición 1.2. *Una expresión del lenguaje $\mathcal{L}$ es una cadena finita de estos símbolos.*

Ejemplo 1.2.

- $p_1 \wedge p_2 \vee (-p_3 \leftrightarrow p_1)$ es una expresión.
- $((p_1 \vee ()-$ también es una expresión. (Veremos que esta expresión es sin sentido por como está compuesta).

Observación 1.1. Podemos ver que una expresión puede llegar a no tener sentido.

Definición 1.3. *Una oración de $\mathcal{L}$ es una expresión que cumple las siguientes condiciones:*

1. *Si φ es una oración, entonces $-\varphi$ también.*
2. *Si φ y ψ son oraciones, entonces*

$$(\varphi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

son oraciones.

3. *Toda letra proposicional es una oración.*
4. *Solamente las expresiones construidas por* 1, 2, 3 *son oraciones.*

Esto significa que las oraciones de $\mathcal{L}$ son construcciones finitas de letras proposicionales, con la negación y los conectivos.

Ejemplo 1.3. La siguiente expresión es una oración

$$-(-(p \wedge q) \rightarrow (r \vee q))$$

Para ver esto, podemos desarmar la oración o bien ver que si p, q, r son letras proposicionales, entonces al usar negar y usar conectores, se generará una oración.

Convenio.

- Cuando ecribimos oraciones con los símbolos $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$, siempre agregaremos los símbolos paréntesis.
- La negación no se le agrega paréntesis y la expresión

$$- - \varphi$$

en fundamentos es disinto de φ, ya que ocupa símbolos disntintos para escribirse.

Es decir, dos oraciones son iguales si tienen igual cantidad de símbolos y siguen la misma secuencia de símbolos.

1.3. Inducción Sobre Oraciones

Recordemos la inducción matemática, que es una herramienta de demostración poderosa, la cual consiste es ver que cierta propiedad cumple cierta estructura asociada a los lesles. Con la inducción podemos demostrar propiedades sobre oraciones de $\mathcal{L}$.

Teorema 1.1. *Sea P una propiedad que habla sobre las expresiones de $\mathcal{L}$. Supongamos que se cumple:*

1. *Letras proposicionales verifican P*
2. *Si una expresión α verifica P, entonces la negación $-\alpha$ también.*
3. *Si las expresiones α, β verifican P, entonces también lo hacen*

$$(\alpha \wedge \beta), \ (\alpha \vee \beta), \ (\alpha \rightarrow \beta), \ (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

Entonces, todas las oraciones de $\mathcal{L}$ verifican P.

Cuando hablamos de verifica, nos referimos que cumple la propiedad que impone P.

Como una oración es una expresión, es claro que se verifica para toda oración la propiedad P

Ejemplo 1.4.

- Sea $P =$ tener cantidad par de paréntesis. Probemos que se cumple para toda oración de $\mathcal{L}$. Por inducción sobre oraciones debemos probar las tres condiciones.
  1. Una letra proposicional tiene 0 paréntesis. Luego verifica a P.
  2. Si α verifica, entonces α tiene cantindad par de paréntesis. Luego $-\alpha$ solo añadimos el símbolo $-$, luego tiene cantidad par de paréntesis y verifica a P.
  3. Si α, β verifican a P, entonces es claro que
  $$(\alpha \star \beta)$$
  verifica a P ya que estamos sumando par con par de paréntesis. $(\star = \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow)$
- Sea $P =$ tener misma cantindad de (que de). Esta propiedad se cumple para toda oración ya que una letra proposicional lo cumple. La negación también. Y al compositar dos oraciones que lo cumple, se añaden un (y un), luego la cantindad sigue siendo la misma.
- Sea $P =$ tener signo. En el actual contexto no tiene ningún sentido, por lo que no cumple ninguna condición.
- Sea $P =$ tener 5 símbolos. Vemos que no se cumple la primera, apenas la segunda y la tercera.

Nota 1.3. Es importante tener en cuenta que la propiedad define donde trabajar, por ejemplo la propiedad $P =$ tener más de dos símbolos es cierto para toda oración, menos para las letras proposicionales, aun así se puede aplicar inducción ya que ignoramos las letras.

Dem. (Teorema) Vamos a usar inducción matemática para probar el teorema. Sea P una condición que habla sobre las expresiones de $\mathcal{L}$ que cumple las tres propiedades.

Caso Base. Sea φ una oración de la forma más simple posible, es decir, φ es una oración con 0 conectivos. Es decir, φ es una letra proposicional. Luego φ verifica P por definición.

Caso Inductivo. Sea φ es una oración con n conectivos lógicos. Supongamos que toda oración con $1 \leq k \leq n-1$ conectivos lógicos verifican P. Debemos probar que φ también verifica P. Dado que φ es una oración se tiene que o es una letra proposicional, lo cual no puede ser, o es la negación de una oración con $n-1$ conectivos lógicos o es la composición de dos oraciones de la forma $(\alpha \star \beta)$ donde suman n conectivos lógicos y $(\star = \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow)$.

Si $-\psi = \varphi$, entonces ψ al verificar P, se tiene que $-\psi = \varphi$ también.

Por otro lado, si es la unión de dos oraciones que cumplen P $(\alpha \star \beta) = \varphi$, se tiene que verifica a P ya que α tiene menos de n símbolos, lo mismo con β, luego ambos verifican P.

Probando de este modo la inducción sobre las oraciones. ■

1.4. Teorema de Lectura Única

Hasta ahora solo tenemos símbolos que no tiene ningún significado. Aun así veremos que la escritura es única, es decir, nunca habrán problemas de la forma que

$$(\varphi \vee \psi) = (p \vee q \wedge r) = (\alpha\wedge)$$

Es decir, no existen ambigüedades.

Definición 1.4. *Dada una oración $\varphi = \delta_1\delta_2\ldots\delta_n$(sucesión de n símbolos de $\mathcal{L}$). Un segmento inicial de φ, es una sucesión finita*

$$\delta_1\ldots\delta_k, \ \ \textit{con } k < n$$

Ejemplo 1.5. Sea la oración $--(p \wedge q)$ tiene por segmentos inciales:

$$\begin{aligned} &--(p \wedge q \\ &--(p \wedge \\ &\quad\vdots \\ &- \end{aligned}$$

Observación 1.2. Las letras proposicionales no tiene segmentos iniciales.

Lema 1.1. *Ningún segmento inicial de una oración es una oración.*

Dem. Usaremos el teorema de inducción sobre las oraciones. Mostraremos que todo segmento inicial es una sucesión finita de negaciones o tiene más paréntesis izq. que der. Sea la condición $P(\varphi) =$ los segmentos iniciales de φ son sucesiones finitas de negaciones o tiene más paréntesis izquierdo que derecho. Veremos que verifican las 3 propiedades de la inducción sobre oraciones ya que

1. Una letra proposicionales tiene 0 negaciones y 0 paréntesis
2. Si φ se verifica, entonces $-\varphi$ no agrega paréntesis y suma una negación, por lo que se mantiene finita. Luego se verifica P
3. Si α, β se verifican, entonces

$$(\alpha \star \beta)$$

donde α, β verifican a P. Vamos a estudiar todos los segmentos iniciales de $(\alpha\star\beta)$, notemos que los segmentos son de la forma:

$$\begin{aligned} &(\\ &(\overline{\alpha} \\ &(\alpha \\ &(\alpha\star \\ &(\alpha \star \overline{\beta} \\ &(\alpha \star \beta \end{aligned}$$

donde $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ son segmentos iniciales cualesquiera. El primer caso verifica P, el segundo se verifica ya que $\overline{\alpha}$ tiene más parténtesis izquierdos que derechos y le añadimos uno izquierdo. El tercero se cumple ya que α puede tener un paréntesis izquierdo, más que el derecho, luego es evidente que al agrear otro paréntesis izquierdo, este se diferencie más. El cuarto se cumple ya que $\star$ no afecta en nada. El quinto se cumple por las misma razón que el dos. El último se cumpla por la misma razón que 3. Verificando P

Por tanto todo segmento inicial de una oración, es una sucesión finitas de negacioens o tiene más paréntesis izquierdos que derechos. Esto implica que no puede ser oraciones ya que vimos que todas las oraciones tienen igual de (,). ■

Corolario 1.1. *Toda oración tiene la misma cantidad de (que de).*

Dem. Sea $P =$ tener misma cantidad de (que de). Notemos que las letras proposicionales cumplen P, si α verifica P, entonces $-\alpha$ tambien verifica P ya que la cantidad de los paréntesis no cambian. Para la última condición consideraremo que α, β verifican P, luego

$$(\alpha \star \beta)$$

donde $\star = \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$. También verifican P ya que se agregan la misma cantidad de paréntesis derechos y izquierdos. Por tanto, toda oración de $\mathcal{L}$ verifica P. Probando el corolario. ■

Teorema 1.2. (Teorema de Lectura Única) *Toda oración de $\mathcal{L}$ es, o bien*

1. *Letra proposicional, o bien*
2. *De la forma $-\alpha$, con α oración, o bien*
3. *Se escribe de forma única $(\alpha \star \beta)$ con α, β oraciones y $\star = \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$*

Nota 1.4. Es decir, toda oración puede ser solamente 1 o solamente 2 solamente 3.

Dem. Sea α una oración de $\mathcal{L}$, si α tiene un solo símbolo, necesariamente es una letra proposicional. Si fuera 2 o 3, ocurre que tendría más símbolo, por que α es solamente 1.

Si α es de la forma $\alpha = -\beta$ con β oración, podemos ver que es único ya que si $-\beta = -\gamma$, entonces por igualdad necesariamente deben ser iguales, si β y γ tienen distinta cantidad de símbolos, digamos que β tiene menos símbolos que γ (importante ver que β y γ comparte los símbolos, es decir $\beta_1 = \gamma_1, \ldots$ si no, no puede ser iguales) entonces β es un segmento inicial de γ, pero entonces β no es una oración. Por tanto $\beta = \gamma$. Tampoco α puede ser de la forma 3 por ya que empiezan de forma distinta.

Si φ es de la forma $\varphi = (\alpha \star \beta)$ donde α, β son oraciones, entonces como vimos, no puede ser ni 1 ni 2, nos queda probar que es único. Sean $\alpha', \beta', \triangle$ dos oraciones y un conectivo respectívamente, tales que

$$(\alpha \star \beta) = (\alpha' \triangle \beta')$$

Probemos que $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$ y $\star = \triangle$. Ambas expresiones empiezan por (, sigue α, si $\alpha \neq \alpha'$ entonces necesariamente tiene distinta cantidad de símbolo (si tuvieran la misma, necesariamente $\alpha = \alpha'$), supongamos que α tiene menos símbolos que α', luego α es un segmento inicial, por lo que no puede ser una oración, siendo una contradicción, por tanto $\alpha = \alpha'$. Para concluir el resto basta ver que $\star = \triangle$, ya que estamos en un igualdad, y $\beta = \beta'$ se concluye de misma forma de como se concluyó $\alpha = \alpha'$. Probando la unicidad.

Probando de este modo que toda oración tiene una forma específica y es única. $\blacksquare$

2. Semántica para el Lenguaje Proposicional

2.1. Introducción

Dado $\mathcal{L}$, a cada símbolo le daremos un sentido y a sus oraciones. Empezemos por la veracidad de una letra proposicional.

Definición 2.1. *Una valuación v es una función de la forma*

$$v : \{\textit{subconjunto de las letras proposicionales de } \mathcal{L}\} \to \{V, F\}$$

Puede pasar que en una valuación $v(p) = V$, mientras que en otra $v'(p) = F$, depende de la circustancia.

Convenio y Abuso de notación. En general trabajamos con extensiones de de estas valuaciones. Por convenio tomaremos el mismo v como valuación como extensión de la misma.

En virtud que las oraciones tienen una lectura única podemos extender las valuaciones a oraciones ya que sigue manteniendo el ser una función. Daremos sentido a los conectivos más una tabla de verdad.

Sean α, β oraciones, entonces se define $-\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \to \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$ por la tabla de verdad:

α	β	$-\alpha$	$(\alpha \wedge \beta)$	$(\alpha \vee \beta)$	$(\alpha \to \beta)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Cuadro 1: Tabla de Verdad

Por si la dudas $\wedge$ se lee "y", $\vee$ se lee "o", $\to$ se lee "implicancia" y $\leftrightarrow$ se lee "si y sólo si, equivalencia, equivalente".

Nota 2.1. La tabla de verdad genera todas las valuaciones posibles para una colección de letras proposicionales.

Ejemplo 2.1. Sea la valuación

$$v : \{p, q\} \to \{V, F\}$$

donde $p \mapsto F$ y $q \mapsto V$. Extendamos la vauluación a todas las oraciones posibles, digámosle $\overline{v}$, determinemos

$$\overline{v}(-(-p \to q) \vee -p)$$

Una forma de determinarlo es mediante tablas de verdad. Pero usaremos la aplicación directamente. Si $p \mapsto F$, entonces $-p \mapsto V$, luego

$$\overline{v}(-(-p \to q) \vee -p) = V$$

Si $p \mapsto V$, entonces el valor de verdad cambia completamente, en particular

$$\overline{v}(-(-p \to q) \vee -p) = \overline{v}(F \vee F) = F$$

En particular, la oración $(-(-p \to q) \vee -p)$ si q es verdadera, entonces depende solamente del valor de p, es decir, hay una equivalencia lógica detrás.

Defінción 2.2. *Una oración es cierta o tautológica si todas las posibles evaluaciones es una tautología. Por otro lado, una oración es falsa o contradicción si toda valuación es una contradicción.*

Ejemplo 2.2.

- Sea la oración $(p \to (q \vee p))$, está oración es cierta ya que toda valuación posible, es tautológico. Probemoslo mediante tablas

q	p	$q \vee p$	$(p \to (q \vee p))$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Cuadro 2: Tabla de Verdad

- La oración $(p \wedge -p)$ es falsa, ya que toda valuación es contradiccón. No es tal dificil verlo, si p toma valor verdad, entonces $(V \wedge F) = F$, lo mismo si p toma valor falso.

Definición 2.3. *Dos oraciones tiene el mismo valor de verdad para cada valuación, son lógicamente equivalentes*

Ejemplo 2.3.

1. $p, --p$ son lógicamente equivalentes, ya que si $p \mapsto F$ entonces ambos son F y si $p \mapsto V$ ambos son V.

2. $(p \leftrightarrow q), ((p \to q) \wedge (q \to p))$ son lógicamente equivalentes. Se puede verificar por tabla Si

q	p	$p \to q$	$q \to p$	$p \to q \wedge q \to p$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Cuadro 3: Tabla de Verdad

la quinta y sexta columna siguen el mismo patrón, entonces son lógicamente equivalentes.

3. $(p \to (q \vee p)), -(p \wedge -p)$ son lógicamente equivalentes. Notemos que la segunda oración es una tautología, y de el ejemplo anterior sabemos que la primera oración es una tautología.

Por tanto para toda valuación v se tiene que

$$v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = V$$

donde φ_1 representa la primera oración φ_2 la segunda. Es claro que ambas son lógicamente equivalentes.

Observación 2.1. Dos tautologías son lógicamente equivalentes y dos contradicciones son lógicamente equivalentes.

Definición 2.4. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$. Se dice satisfacible si existe una valuación v que aseugra el valor V a todas las oraciones de Σ.*

Ejemplo 2.4. Sea

$$\Sigma := \{p, (q \to p), (-p \vee -q)\}$$

podemos ver que la valuación

$$\begin{aligned} v : \{p, q\} &\to \{F, V\} \\ p &\mapsto V \\ q &\mapsto F \end{aligned}$$

satisface toda las oracioens Σ. De forma que es satisfacible.

2.2. Consecuencia Lógica

Defínción 2.5. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$ y sea φ una oración de $\mathcal{L}$. Decimos que φ es consecuencia lógica de Σ, si toda valuación que satisface Σ, satisface φ.*

Notación. Si φ es una consecuencia lógica de Σ, entonces denotaremos por

$$\Sigma \models \varphi$$

En caso de que no sea una consecuencia denotaremos por $\Sigma \not\models \varphi$.

Ejemplo 2.5. Veamos si $\varphi = ((p \wedge -q) \to r)$ es consecuencia de

$$\Sigma := \{(p \vee q), -r, (p \to (q \vee r))$$

Notemos que las únicas valuaciones que satisfacen Σ, son $v_1(p) = V, v_1(q) = V, v_1(r) = F$ o $v_2(p) = F, v_2(q) = V, v_2(r) = F$. Al extender las valuaciones y evaluar φ, obtenemos el valor V, es decir $\Sigma \models \varphi$.

Ejemplo 2.6. Recordemos los argumentos con sus premisas y conclusiones, en este contexto las premisas son elementos de Σ. Sea el siguiente argumento:

Juan irá al cine o dormirá

Juan irá el cine

− − − − − − − − − − − − −

Juan no dormirá

La primera premisa es $p \vee q$, la segunda es q y la conclusión $-q$. Podemos ver que la valuación que toma

$$\begin{aligned} p &\mapsto V \\ q &\mapsto V \end{aligned}$$

vemos que la consecuencia es falsa para esta valuación. Por tanto $\Sigma \not\models \varphi$.

Gracias a la consecuencia lógica podemos ver cuando un argumento es correcto y cuando no. Recordemos un ejemplo en letras proposicionales

$$\begin{array}{l} p \\ -p \\ ---- \\ q \end{array}$$

En término de consecuencia lógica, tendriamos que $\{p, -p\} \vDash q$ lo cual es cierto ya que si v es una valuación que satisface al conjunto, lo cual es ninguno, es claro que satisface a q, todo jugando con la idea de que no existe ninguna valuación, entonces toda valuación que satisface al conjunto, satisface a q. Por tanto es correcto el argumento.

Proposición 2.1. *Sea Σ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$. Entonces*

1. *Si $\varphi \in \Sigma$, entonces $\Sigma \models \varphi$*
2. *Si $\Sigma \models \varphi$ y $\Sigma \subseteq \Delta$, entonces $\Delta \models \varphi$*
3. *Si $\Sigma \models \varphi$ y para todo $\alpha \in \Sigma$, se tiene que $\Delta \models \alpha$. Entonces $\Delta \models \varphi$.*

Dem.

1. Sea $\overline{v}$ una valuación que satisface a Σ, dado que $\varphi \in \Sigma$ y se satisface Σ, entonces por definición $\varphi \xrightarrow{\overline{v}} V$. Es decir $\Sigma \models \varphi$.
2. Sea $\overline{v}$ una valuación que satisface a Δ, dado que $\Sigma \subseteq \Delta$, entonces $\overline{v}$ satisface a Σ, luego por hipótesis $\varphi \xrightarrow{\overline{v}} V$. Es decir $\Delta \models \varphi$.
3. Sea $\overline{v}$ una valuación que satisface a Δ, notemos que $\overline{v}(\alpha) = V$ para todo $\alpha \in \Sigma$, esto significa que $\overline{v}$ satisface a Σ, luego por hipótesis $\Delta \models \varphi$.

Probando la proposición. $\blacksquare$

Teorema 2.2. (Teorema de Deducción) *Se tiene que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \alpha$ si y sólo si la oración*

$$((((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \cdots \wedge)\varphi_n) \to \alpha$$

es una tautología.

Dem. Supongamos que α es una consecuencia lógica de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, entonces para toda valuación se tiene que $\overline{v}(\varphi_i) = V$ y $\overline{v}(\varphi) = V$. Y para que la oración de abajo sea falsa, necesariamente $((((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \cdots \wedge)\varphi_n)$ es verdadero y α sea falso bajo $\overline{v}$, llegando a una clara contradicción.

Si

$$((((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \cdots \wedge)\varphi_n) \to \alpha$$

Es una tautología. Sea v una valuación que satisface a $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, entonces

$$v(\varphi_i) = V$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Como tenemos una tautología, necesariamente α debe tener valor verdadero, si fuera falso entonces se llega a que no es tautología. Luego $v(\alpha) = V$, es decir

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \alpha$$

Probando el teorema de la deducción. ■

Lo importante del teorema de la deducción, que al conectar las oraciones por y, la oración formada debe implicar α. Este teorema nos sirve para saber cuando es una consecuencia lógica y cuando no.

Observación 2.2. Notemos que

$$(p \wedge -p) \to q$$

es una tautología, por tanto

$$\{p, -p\} \vDash q$$

recalcando que todo es consecuencia lógica de algo contradicctorio.

Teorema 2.3. (Teorema de la Equivalencia) *Sean φ, ψ oraciones. Entonces son lógicamente equivalentes si y sólo si $\varphi \leftrightarrow \psi$ es una tautología.*

Dem. Si φ, ψ son lógicamente equivalentes, entonces para toda valuación, se tiene que $\overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\psi)$, es decir, tienen el mismo valor de verdad para las misma valuaciones. Luego $\overline{v}(\varphi \leftrightarrow \psi) = V$ ya que tienen el mismo valor de verdad.

Por otro lado, si toda valuación es talque $\overline{v}(\varphi \leftrightarrow \psi) = V$, entonces por definición ψ, φ deben tener el mismo valor de verdad para determinada valuación, luego $\overline{v}(\psi) = \overline{v}(\varphi)$. ■

Teorema 2.4. (Teorema de la No Satisfacibilidad) *Sea Σ un conjunto de oraciones y sea φ una oración. Entonces*

$$\Sigma \models \varphi, \text{ si y sólo si } \Sigma \cup \{-\varphi\} \text{ es no satisfacible.}$$

Dem. Supongamos que $\Sigma \cup \{-\varphi\}$ es no satisfacible. Sea v una valuación que satisface a Σ, si $v(-\varphi) = F$ por hipótesis, entonces $v(\varphi)$, luego

$$\Sigma \vDash \varphi$$

Por otro lado, si $\Sigma \vDash \varphi$, y si v satisface a $\Sigma \cup \{-\varphi\}$, entonces $v(\varphi) = v(-\varphi)$, siendo imposible. Por tanto tal v no existe y por lo tanto $\Sigma \cup \{-\varphi\}$ no es satisfacible.

Probando el teorema. ■

3. Deduciones Formales (Cálculo Proposicional)

Hasta ahora hemos definido la esctritura $\mathcal{L}$ y dimos que tiene única interpretación, además de algunos conceptos como lógicamente equivalente, consecuencia lógica y de algunos teoremas importante. Pero todo eso la base para hacer lo que realmente queremos, deducir, por lo construiremos un sistema deductivo con axiomas de deducción que nos permitirán estudiar consecuencias lógicas de manera formal.

Esto nos permitirá dar la noción de derivabilidad o de demostrabilidad. La cual es que si elegimos buenos axiomas y reglas de deducción, entonces se cumplirá que el sistema es:

1. **Sintáctica.** Que no depende del significado de las oraciones (le quitamos el sentido cotidiano).
2. **Correcta.** Si φ es demostrable por Δ ($\Delta \vdash \varphi$) entonces $\Delta \vDash \varphi$.
3. **Completa.** Si $\Delta \vDash \varphi$, entonces $\Delta \vdash \varphi$.

Primero necesitaremos unos axiomas:

Axiomas.

1. $(a \to (b \to a))$
2. $((a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$
3. $(a \to (a \vee b))$
4. $(b \to (a \vee b))$
5. $((a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c)))$
6. $((a \wedge b) \to a)$
7. $((a \wedge b) \to b)$
8. $((c \to a) \to ((c \to b) \to (c \to (a \wedge b))))$
9. $((a \to -b) \to (b \to -a))$
10. $(-(a \to a) \to b)$
11. $(a \vee -a)$

Claramente son todas tautologías. Nos falta una regla de deducción para deducir.

Modus Ponens (MP). *Si tenemos φ y $(\varphi \to \psi)$, entonces deducimos ψ*

En forma de símbolos tendriamos que $((a \vee (a \to b)) \to b)$. Y para terminar definimos ser demostrable.

Definición 3.1. *Sea $\Delta \cup \{\varphi\}$ un conjunto de oraciones de $\mathcal{L}$. Decimos que la oración φ es derivable o demostrable a partir de Δ si existe una sucesión finita $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de oraciones tales que $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

1. $\varphi_i \in \Delta$

2. φ_i *es la instancia de un axioma.*

3. Hay $j, k < i$ *tales que* φ_i *se deduce por MP a partir de* φ_j, φ_k.

En caso de que φ *es demostrable a partir de* Δ*, usamos la notación* $\Delta \vdash \varphi$.

Nota 3.1. La sucesión finita $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ no necesariamente debe ser elemento de Δ, se puede tomar cualquier oración de $\mathcal{L}$.

Ejemplo 3.1. Probemos que de p, q podemos derivar a $(p \to q)$. Para ello debemos probar que

$$\{p, q\} \vdash (p \to q)$$

Para eso debemos construir una sucesión finita, donde al final podamos concluir $(p \to q)$. Si

$$\varphi_1 = p$$
$$\varphi_2 = q$$

Con el axioma 1 podemos concluir que

$$\varphi_3 = (q \to (p \to q)), \ \text{a=}q\text{,b=}p$$

luego por modus ponens tomando $a = q, b = \varphi_3$, entonces

$$\varphi_4 = (p \to q)$$

Pronbando lo que queriamos probar.

Como habrá notado, podemos reducir el conjunto a $\{q\}$, es decir

$$\{q\} \vdash p \to q$$

para toda oración p. Todo en virtud de los axiomas.

Aunque no lo paresca, derivar o demostrar cosas resulta bastante dificil en algunos casos. Por ejemplo, para probar que $--\alpha$ se deriva de α se debe aplicar 10 lineas, aplicando axiomas y la regla de dedución.

Mostraremos el procedimiento para derivar $--\alpha$ y luego lo explicaremos.

$$\begin{array}{rll}
\varphi_1 = & \alpha & \\
\varphi_2 = & ((-\alpha \to -\alpha) \to (\alpha \to --\alpha) & \text{A9) } a = -\alpha, b = \alpha \\
\varphi_3 = & ((-\alpha \to (\alpha \to -\alpha) \to ((-\alpha \to \alpha) \to (-\alpha \to -\alpha)) & \text{A2) } a = c = -\alpha, b = \alpha \\
\varphi_4 = & (-\alpha \to (\alpha \to -\alpha)) & \text{A1) } a = -\alpha, b = \alpha \\
\varphi_5 = & (-\alpha \to \alpha) \to (-\alpha \to -\alpha) & \text{MP } \varphi_3, \varphi_4 \\
\varphi_6 = & (\alpha \to (-\alpha \to \alpha)) & \text{A1) } a = \alpha, b = -\alpha \\
\varphi_7 = & (-\alpha \to \alpha) & \text{MP } \varphi_1, \varphi_6 \\
\varphi_8 = & (-\alpha \to -\alpha) & \text{MP } \varphi_7, \varphi_5 \\
\varphi_9 = & (\alpha \to --\alpha) & \text{MP } \varphi_8, \varphi_2 \\
\varphi_{10} = & --\alpha & \text{MP } \varphi_1, \varphi_9
\end{array}$$

Derivando $--\alpha$. Para realizar estos cálculos tediosos, existen varias formas, la primera es ir probando, dado que aparece un $--\alpha$, requerimos que aplicar el axioma $9, 10, 11$, aunque también podemos aplicar la instancia axiomática y tomar $a = --\alpha$ e ir verificando. Otra forma es por el final, para derivar $--\alpha$, se debe derivar algo de la forma

$$algo \to --\alpha$$

y también se debe derivar *algo* para aplicar MP. Por lo menos en este caso el algo es bastante dificil de hallar, pero nunca está demás empezar por el final.

3.1. Teorema de Lógica

Hemos deducido que $\{a, b\} \vdash (a \to b)$. Con esto podemos tomarlo como axioma y ahorrar trabajo. El hecho de tomarlo como axioma, significa que si $\varphi_i = a$ y $\varphi_j = b$, entonces podemos agragar $\varphi_l = (a \to b)$. También podemos decir que $--\alpha \vdash \alpha$, y de esto obtenemos que si aparece $--\alpha$, entonces podemos agregar α y así es como iremos demostrando.

Teorema 3.1. Si $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ entonces $\Delta \vdash (\varphi \to \psi)$.

Esto significa que si derivamos una oración, entonces podemos derivar una implicancia. Demostrar este teorema requiere de inducción, pero llega a restultar bastante complejo, por lo que solo lo enunciaremos. Lo importante de este teorema, es que podemos deducir resultados útiles

Corolario 3.2. *Si $\alpha \vdash --\alpha$, entonces $\phi \vdash (\alpha \to --\alpha)$. Y si $--\alpha \vdash \alpha$, entonces $\phi \vdash (--\alpha \to \alpha)$. Donde ϕ es el conjunto vacío.*

Dem. Probemos solo un caso. Si $\alpha \vdash --\alpha$, entonces por el teorema 3.1 tenemos que

$$\varphi \vdash (\alpha \to --\alpha)$$

Probando el corolario. ■

Definición 3.2. *Sea φ una oración. Si $\phi \vdash \varphi$, decimos que φ es un teorema de la lógica.*

Esto signfica que un teorema de la lógica es algo que proviene de la nada, es un axioma, es más, el sistema de axiomas que definimos son teoremas de la lógica, ya que provienen de la nada.

Nota 3.1. Es importante mencionar que el que sea un teorema de la lógica, no significa que sea verdadero o falso por ahora. Por lo que no importa si se generan cosas muy extrañas.

Ejemplo 3.2. Probemos que $(\beta \to \beta)$ es un teorema de la lógica. Vamos a probar usando el teorema 3.1 y luego mediante definición de derivada. Notemos que $\{\beta\} \vdash \beta$, luego por el teorema 3.1 se tiene que

$$\phi \vdash (\beta \to \beta)$$

Siendo un teorema de la lógica.

Ahora mediante axiomas.

$$\begin{array}{ll}
\varphi_1 = (\beta \to (\beta \to \beta)) & \text{A1) } a = b = \beta \\
\varphi_2 = (\beta \to ((\beta \to \beta) \to \beta)) & \text{A2) } a = \beta, b = (\beta \to \beta) \\
\varphi_3 = ((\beta \to ((\beta \to \beta) \to \beta)) \to ((\beta \to (\beta \to \beta)) \to (\beta \to \beta))) & \text{A2) } a = c = \beta, b = (\beta \to \beta) \\
\varphi_4 = ((\beta \to (\beta \to \beta)) \to (\beta \to \beta)) & \text{MP } \varphi_2, \varphi_3 \\
\varphi_5 = (\beta \to \beta) & \text{MP } \varphi_1, \varphi_4
\end{array}$$

Luego $\phi \vdash (\beta \to \beta)$.

Por tanto podemos deducir de la nada que $(\beta \to \beta)$ para cualquier oración β.

Ejemplo 3.3. Deduciremos otra regla de deducción. El Modus Tollens (MT) o también conocido como contradicción en matemáticas. Probaremos que:

$$\{\alpha, (-\beta \to -\alpha)\} \vdash \beta$$

Sol.

$$\begin{array}{ll}
\varphi_1 = \alpha & \\
\varphi_2 = (-\beta \to -\alpha) & \\
\varphi_3 = ((-\beta \to -\alpha) \to (\alpha \to - - \beta)) & \text{A9) } a = -\beta, b = \alpha \\
\varphi_4 = (\alpha \to - - \beta) & \text{MP } \varphi_2, \varphi_3 \\
\varphi_5 = - - \beta & \text{MP } \varphi_1, \varphi_4 \\
\varphi_6 = \beta & \text{Axioma } - - \beta \vdash \beta
\end{array}$$

Luego $\{\alpha, (-\beta \to -\alpha)\} \vdash \beta$.

Además, en virtud del teormea 3.1 podemos concluir que

$$\{-\beta \to -\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$$

Ejemplo 3.4. Probemos que

$$\{-\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi)$$

Sol.

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_1 = -\varphi & \\
\varphi_2 = ((\varphi \to (--\psi \to \psi)) \to ((\varphi \to --\psi) \to (\varphi \to \psi)) & \text{A2) } a = \varphi, b = --\psi, c = \psi \\
\varphi_3 = (-\varphi \to (-\psi \to -\varphi)) & \text{A1) } a = -\varphi, b = -\psi \\
\varphi_4 = (-\psi \to -\varphi) & \text{MP } \varphi_1, \varphi_3 \\
\varphi_5 = ((-\psi \to -\varphi) \to (\varphi \to --\psi)) & \text{A9) } a = -\psi, b = \varphi \\
\varphi_6 = (\varphi \to --\psi) & \text{MP } \varphi_5, \varphi_4 \\
\varphi_7 = (--\psi \to \psi) & \text{Corolario 3.2} \\
\varphi_8 = ((--\psi \to \psi) \to (\varphi \to (--\psi \to \psi)) & \text{A1) } a = (--\psi \to \psi), b = \varphi \\
\varphi_9 = (\varphi \to (--\psi \to \psi)) & \text{MP } \varphi_7, \varphi_8 \\
\varphi_{10} = ((\varphi \to --\psi) \to (\varphi \to \psi) & \text{MP } \varphi_2, \varphi_9 \\
\varphi_{11} = (\varphi \to \psi) & \text{MP } \varphi_6, \varphi_{10}
\end{array}
$$

Concluyendo que $\{-\varphi\} \vdash (\varphi \to \psi)$. Una forma de concluir la demostración es usar el ejemplo anterior. Sabemos que

$$\{-\alpha \to -\beta\} \vdash \beta \to \alpha$$

Entonces si probamos que $\{-\varphi\} \vdash (-\alpha \to -\beta)$ probamos el enunciado.

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_1 = -\varphi & \text{Premisa} \\
\varphi_2 = -\varphi \to (-\psi \to -\varphi) & \text{A1) } a = -\varphi, b = -\beta \\
\varphi_3 = -\psi \to -\varphi & \text{MP } \varphi_1, \varphi_2
\end{array}
$$

Luego

$$\{-\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$$

Ejemplo 3.5. Probemos que

$$\{\alpha, -\alpha\} \vdash \beta$$

Sol.

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_1 = \alpha & \\
\varphi_2 = -\alpha & \\
\varphi_3 = (\alpha \to \beta) & \text{Ejemplo 3.4} \\
\varphi_4 = \beta & \text{MP } \varphi_1, \varphi_3
\end{array}
$$

Por tanto, de cualquier premisa contradicctoria, podemos derivar cualquier oración.

3.2. Completitud

Nuestro objetivo es demostrar que la consecuencia lógica es es equivalente a la derivación. Pero para ello necesitamos varios resultados.

Teorema Principal.

Sean Δ, φ un conjunto de oraciones y una oración respéctivamente, entonces $\Delta \vdash \varphi$ si y sólo si $\Delta \vDash \varphi$.

Es decir, toda consecuencia lógica es demostrable y todo demostrable es una consecuencia lógica.

Teorema 3.2. (Teorema de la Corrección) *Si $\Delta \vdash \varphi$, entonces $\Delta \vDash \varphi$.*

Dem. Si $\Delta = \emptyset$, entonces φ sería un teorema de la lógica. Se puede probar que φ es una tautología, ya que si es teorema de la lógica, entonces

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi \rangle$$

es una cadena que demuestra a φ, donde son instancias axiomáticas o MP, luego es claro que de forma inductiva φ es tautología. Como es MP de instancias axiomáticas.

Supongamos que $\Delta \neq \emptyset$, sea φ tales que $\Delta \vdash \varphi$, entonces existe una demostración

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi \rangle$$

Probaremos por inducción que

$$\Delta \vDash \varphi_i$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Es decir, toda valuación v que satisface Δ, satisface φ_i.

Si $i = 1$ es claro que $\varphi_1 \in \Delta$ o es una instacia axiomática. En el primer caso es claro que se satisface φ_1, en el segundo claramente es cierto al ser una instacia axiomática.

Supongamos que

$$\Delta \vDash \varphi_l$$

para todo $l = 1, \ldots, i-1$. Sea v una valuación que satisface a Δ, entonces

$$v(\varphi_1) = \cdots = v(\varphi_{i-1})$$

Probemos que $v(\varphi_i) = V$. Notemos que φ_i es

1. Un elemento de Δ.
2. Una instancia axiomática
3. Deducción del MP

(Puede ser más de una cosa, aunque basta considerar una) Claramente los dos primeros casos son ciertas. Si es una deducción del MP, entonces existen $k, j < i$ tales que

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= \varphi_k \\
\varphi_j &= (\varphi_k \to \varphi_i) \\
\varphi_i &= \varphi_i
\end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva φ_k, φ_j se satisfacen, luego necesariamente φ_i debe satisfacerce, si no se genera una contradicción. Probando que

$$\Delta \models \varphi_i$$

para todo i. ■

Hemos probado la primera dirección de nuestro teorema principal. Nos falta probar que si $\Delta \models \varphi$, entonces $\Delta \vdash \varphi$, y para ello requeriremos de varias definiciones y teoremas.

Definción 3.3. *Un conjunto de oraciones Δ se dice inconsistente si existe una oración φ talque*

$$\Delta \vdash \varphi, \;\; y \; \Delta \vdash -\varphi$$

Si esto no ocurre, diremos que Δ es consistente.

Esto significa que para demostrar que un conjunto de oraciones es inconsistente, basta demostrar que el conjunto demuestra cosas opuestas. Además es fácil notar probar la consistencia diréctamente es más complicado, por lo que todo se centra en demostrar inconsistencia.

Teorema 3.3. *El conjunto Δ es inconsistente si y sólo si $\Delta \vdash \varphi$ para toda oración φ.*

Dem. Si Δ demuestra toda oración, entonces es claro que dado φ se tiene que $\Delta \vdash \varphi$ y $\Delta \vdash -\varphi$. Es decir, Δ es inconsistente.

Por otro lado, si Δ es inconsistente, entonces $\Delta \vdash \beta, \Delta \vdash -\beta$, para alguna oración β. Sea φ una oración cualquiera, entonces para $\beta, -\beta$ existen demostraciones tales que

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n = \beta \rangle \\
&\langle \psi_1, \ldots, \psi_m = -\beta \rangle
\end{aligned}$$

Luego como φ_i, ψ_j son deducciones de Δ, tenemos que

$$\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, \varphi \rangle$$

es una demosteración de Δ y dado que $\{-\alpha, \alpha\} \vdash \beta$ (de una contradicción se demuestra cualquier oración) concluimos que

$$\Delta \vdash \varphi$$

Probando el teorema. ■

Teorema 3.4. *Sea Δ un conjunto y φ una oración. Tenemos que $\Delta \nvdash \varphi$ si y sólo si $\Delta \cup \{-\varphi\}$ es consistente.*

Dem. Probaremos que $\Delta \vdash \varphi$ si y sólo si $\Delta \cup \{-\varphi\}$ es inconsistente. Supongamos que $\Delta \cup \{-\varphi\}$ es inconsistente, luego podemos demostrar cualquier oración, digamos que

$$\Delta \cup \{-\varphi\} \vdash \varphi$$

Ahora por el teorema de la deducción

$$\Delta \vdash (-\varphi \to \varphi)$$

Por el axiomas 5 tenemos que

$$((-\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \varphi) \to ((-\varphi \vee \varphi) \to \varphi)))$$

Aplicando MP se llega

$$((\varphi \to \varphi) \to ((-\varphi \vee \varphi) \to \varphi))$$

Si $\varphi \vdash \varphi$, entonces $\emptyset \vdash \varphi \to \varphi$, por lo que $\varphi \to \varphi$ es un teorema de la lógica y luego se puede aplicar MP, de forma que

$$(-\varphi \vee \varphi) \to \varphi$$

Luego por el axioma 11, se aplica por última vez MP, de forma que obtenemos

$$\Delta \vdash \varphi$$

Como queriamos probar.

Por otro lado, si $\Delta \vdash \varphi$ se tiene que

$$\Delta \cup \{-\varphi\} \vdash \varphi$$

y que

$$\Delta \cup \{-\varphi\} \vdash -\varphi$$

Probando el teorema. ■

3.3. Completitud del Cálculo Proposicional

Seguiremos definiendo y probando cosas. Ahora, el conjunto de oraciones $\mathcal{L}$ es numerable, ya que toda oración tiene finitos símbolos. Una oración de un símbolo es una letra propiscional, como es numerable, es facil la asociasión, si una oración tiene dos símbolos, entonces es de la forma $-p$ con p letra proposicional, y nuevamente es facil la enumeración y así recursivamente, de forma que todo $\mathcal{L}$ se puede asociar a un valor natural. Es decir

$$|\mathcal{L}| = |\mathbb{N}|$$

Definición 3.4. *Sea Δ un conjunto de oraciones, consistente. Decimos que es consistente maximal si toda oración φ que no esté en Δ, $\Delta \cup \{\varphi\}$ es inconsistente.*

Definimos el conjunto consistente maximal, pero aun no sabemos nada de como se comporta.

Lema 3.1. *Todo conjunto consistente está incluido en un conjuntos consistente maximal.*

Dem. Sea Δ un conjunto consistente. Sea $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ una enumeración de todas las oraciones de $\mathcal{L}$, dado que son enumerables.

Definiremos una sucesión de conjuntos $\{\Delta_i\}$ de la siguiente forma

$$\Delta_0 := \Delta,\ \ \Delta_{i+1} := \begin{cases} \Delta_i \cup \{\varphi_i\},\ \text{ si } \Delta_i \cup \{\varphi_i\} \text{ es consistente} \\ \Delta_i,\ \text{ si no es consistente} \end{cases}$$

Notemos que formamos una cadena creciente de consistentes. Sea

$$\overline{\Delta} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i$$

Mostraremos que $\overline{\Delta}$ es consistente maximal que contiene a Δ.

- **Contención.** Es claro que $\Delta \subseteq \overline{\Delta}$ por definición.
- **Consistente.** Supongamos que $\overline{\Delta}$ es inconsistente, entonces existe una oración talque

  $$\overline{\Delta} \vdash \alpha \text{ y } \overline{\Delta} \vdash -\alpha$$

  es decir, existen demostraciones de $\overline{\Delta}$ tales que

  $$\langle \psi_1, \ldots, \psi_n = \alpha \rangle$$
  $$\langle \xi_1, \ldots, \xi_m = -\alpha \rangle$$

  Por definición $\overline{\Delta}$, se tiene que

  $$\{\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}\} \subseteq \Delta_k$$

  Esto implica que Δ_k demuestra a α y $-\alpha$, por lo que es inconsistente, pero llegamos a una contradicción al ser consistente por definición. Luego $\overline{\Delta}$ es consistente.
- **Maximal.** Nos falta probar que es maximal. Es decir, para cualquier oración $\beta \notin \overline{\Delta}$, entonces $\overline{\Delta} \cup \{\beta\}$ es inconsistente. Sea $\beta \notin \overline{\Delta}$ una oración, podemos asociar $\varphi_j = \beta$ por la enumeración de $\mathcal{L}$, luego $\varphi_j \notin \overline{\Delta}$, esto implica que $\Delta_j \cup \{\varphi_j\}$ es inconsistente (si fuera consistente, entonces $\varphi_j \in \overline{\Delta}$), luego $\Delta \cup \{\varphi_j\}$ es inconsistente. Probando que es maximal.

Probando el lema. ■

Este lema le da sentido ser maximal. Por lo que todo conjunto consistente, está contenido en un conjunto maximal.

Lema 3.2. *Si Δ es un conjunto consistente maximal, entonces toda oración verifica una y solo una de las siguientes afirmaciones:*

1. $\Delta \vdash \varphi$

2. $\Delta \vdash -\varphi$

Dem. Podemos concluir de forma inmediata que no puede ocurrir ambas, ya que si no Δ no sería consistente. Debemos probar que si no ocurre una, entonces ocurre la otra. Si $\Delta \vdash -\varphi$, estamos listos, supongamos que no es así, si

$$\Delta \nvdash -\varphi$$

entonces necesariamente $-\varphi \notin \Delta$, luego

$$\Delta \cup \{-\varphi\}$$

es inconsistente, pero esto implica que

$$\Delta \vdash \varphi$$

Si por otro lado $\Delta \nvdash \varphi$, entonces $\Delta \nvdash - - \varphi$ (por ser teorema de la lógica) luego argumentando de forma análoga, se llega a que

$$\Delta \vdash -\varphi$$

Probando el lema. ■

Este lema caracteriza el comportamiento del maximal, nos dice que toda oración se puede o no demostrar.

Lema 3.3. *Si Δ es consistente maximal. Entonces para todo φ se verifica una y solo una de las siguientes afirmaciones:*

1. $\varphi \in \Delta$

2. $-\varphi \in \Delta$

Dem. Podemos ver que no se puede cumplir ambas afirmaciones, ya que sino Δ sería inconsistente. Vamos a probar que no puede no cumplirse ambas, de forma que o una se cumple o se cumpla la otra. Supongamos que

$$\varphi \notin \Delta \text{ y } -\varphi \notin \Delta$$

Como Δ es maximal, se tiene que

$$\Delta \cup \{\varphi\} \text{ y } \Delta \cup \{-\varphi\}$$

son inconsistentes. Claramente si $\Delta \cup \{-\varphi\}$ es inconsistente, entocnes $\Delta \vdash \varphi$, probemos que $\Delta \cup \{\varphi\}$ inconsistente implica que $\Delta \vdash -\varphi$. Sea β talque

$$\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \beta \text{ y } \Delta \cup \{\varphi\} \vdash -\beta$$

Luego

$$\Delta \vdash \varphi \to \beta \text{ y } \Delta \vdash \varphi \to -\beta$$

Si $\{\alpha \to \zeta\} \to -\zeta \to -\alpha$, entonces

$$\Delta \vdash -\beta \to -\varphi \text{ y } \Delta - -\beta \to -\varphi$$

Y si $\{\alpha \to \zeta, -\alpha \to \zeta\} \vdash \zeta$, entonces

$$\Delta \vdash -\varphi$$

Llegando a una clara contradicción. Por tanto al menos pertenece a Δ. ■

Esto nos dice que toda oración pertence o no pertenece al maximal.

Lema 3.4. *Si Δ es consistente maximal, entonces si tiene que*

$$\Delta \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Delta$$

Dem. Supongamos que $\varphi \in \Delta$, entonces es evidente que Δ demuestra a φ.

Por otro lado, si Δ demuestra a φ, entonces por el lema 3.3. necesariamente $\varphi \in \Delta$, ya que si no fuera así, entonces $-\varphi \in \Delta$ y luego se llega a que Δ es inconsistente. Por tanto

$$\varphi \in \Delta$$

■

Caracterizando los elementos del conjunto maximal, de forma que solo es demostrable si, esta pertence al maximal y viceversa.

Convenio. Por convenio diremos que $\Delta \vdash (\alpha \leftrightarrow \beta)$ si y sólo si

$$\Delta \vdash (\alpha \to \beta) \text{ y } \Delta \vdash (\beta \to \alpha)$$

Lema 3.5. *Todo conjunto consistente es satisfacible.*

Dem. Sea Δ consistente y $\overline{\Delta}$ consistente maximal que lo contiene. Sea la valuación

$$v(p) = V \Leftrightarrow p \in \overline{\Delta}$$

con p una letra proposicional. Sea la propiedad:

$$P(\varphi) := \text{"}\varphi \text{ es una oración que verifica que } v(\varphi) = V \Leftrightarrow \varphi \in \overline{\Delta}\text{"}$$

Probaremos por inducción que se verifica para toda oración.

1. Si p es una letra, entonces por definición de valuación se verifca la propiedad.
2. Sea β una oración que verifica la propiedad, entonces

$$\begin{aligned} v(-\beta) = V \Leftrightarrow v(\beta) &= F \\ \beta &\notin \overline{\Delta} \\ -\beta &\in \overline{\Delta} \end{aligned}$$

   Luego $-\beta$ verifica la propiedad.

3. Esta es la parte dificil de la demsotración, debemos probar que para todo par de oraciones que verifican la propiedad, también verifican con los conectivos $(\vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow)$

   - $\wedge$) Sean α, β oraciones que verifican la propiedad, entonces

$$\begin{aligned} v(\alpha \wedge \beta) = V &\Leftrightarrow v(\alpha) = V \wedge v(\beta) = V \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \overline{\Delta} \wedge \beta \in \overline{\Delta} \\ &\Leftrightarrow \overline{\Delta} \vdash \alpha \wedge \overline{\Delta} \vdash \beta \\ &\Leftrightarrow \overline{\Delta} \vdash \alpha \wedge \beta \ (\star) \\ &\Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \in \overline{\Delta} \end{aligned}$$

     Por tanto $\alpha \wedge \beta$ verifica la propiedad. Para ver que se verifca $\star$ suponiendo que $\overline{\Delta} \vdash \alpha \wedge \overline{\Delta} \vdash \beta$, hay que hacer uso de los axiomas. Notemos que por el axioma 8 tenemos que

$$((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$$

     Por el axioma 1 sabemos que

$$\begin{gathered} (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \\ (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \end{gathered}$$

     Luego es solo aplicar MP, de forma que se concluye $(\alpha \wedge \beta)$ a partir de $\overline{\Delta}$. Para la otra dirección es solamente tomar los axiomas

$$\begin{gathered} (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \\ (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta \end{gathered}$$

   - $\rightarrow$) Sean α, β oraciones que verifican la propiedad, entonces

$$\begin{aligned} v(\alpha \rightarrow \beta) = F &\Leftrightarrow v(\alpha) = V \wedge v(\beta) = F \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \overline{\Delta} \wedge -\beta \in \overline{\Delta} \\ &\Leftrightarrow \overline{\Delta} \vdash \alpha \wedge \overline{\Delta} \vdash -\beta \end{aligned}$$

     Supongamos que $\alpha \rightarrow \beta \in \overline{\Delta}$, entonces por lo anterior $\overline{\Delta} \vdash \beta$, es decir

$$\overline{\Delta} \vdash \beta \text{ y } \overline{\Delta} \vdash -\beta$$

     llegando a que $\overline{\Delta}$ es inconsistente, algo imposible, luego $(\alpha \rightarrow \beta) \notin \overline{\Delta}$.

     Ahora si $(\alpha \rightarrow \beta) \notin \overline{\Delta}$ entonces

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = F$$

     ya que si fuera verdadero, entonces

$$\overline{\Delta} \vdash -\alpha \vee \overline{\Delta} \vdash \beta$$

     Si $\overline{\Delta} \vdash \beta$ por axioma 1 tenemos que $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ llegado a una contradicción.

     Si $\overline{\Delta} \vdash -\alpha$ entonces $\overline{\Delta} \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$, llegando a otra contradicción. Luego $(\alpha \rightarrow \beta)$ verifica la propiedad

- $\leftrightarrow$) **Terminar**

Teorema 3.5. (Teorema de Completitud) *Si* $\Delta \vDash \varphi$*, entonces* $\Delta \vdash \varphi$*.*

Dem. Si $\Delta \nvdash \varphi$, entonces $\Delta \cup \{-\varphi\}$ es consistente, por el lema 3.5, $\Delta \cup \{-\varphi\}$ es satisfacible. Luego existe una valuación v que satisface a Δ y a $-\varphi$, entonces $\Delta \nvDash \varphi$. Probando el teorema. ■

Hemos completado el objetivo de esta sección que es probar el teorema de completitud, por tanto podemos decir que

$$\Delta \vdash \varphi \Leftrightarrow \Delta \vDash \varphi$$

es decir, un conjunto de oraciones demeustra una oración si y sólo si es consecuencia lógica de este mismo. El teorema de completitud nos sirve mucho para estudiar las demostraciones, ahora podemos reducir mucho trabajo. Por ejemplo, queremos probar que

$$\{\alpha, -\alpha\} \vdash \beta$$

para todo β, para ello basta estudiar

$$\{\alpha, -\alpha\} \vDash \beta$$

que aunque no lo paresca, esto se cumple ya que toda las valuaciones que satisface a $\{\alpha, -\alpha\}$ (que es ninguna), satisface a β. Otro ejmeplo, probemos que

$$\{-\beta \to -\varphi, - - \beta \to -\varphi\} \vdash -\varphi$$

Para ello consideremos la siguiente tabla

$-\beta$	$-\varphi$	$-\beta \to -\varphi$	$- - \beta \to -\varphi$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	F

Claramente

$$\{-\beta \to -\varphi, - - \beta \to -\varphi\} \models -\varphi$$

y luego por el teorema 3.5, se concluye el resultado.

4. Lógica De Predicados (Lógica de primer orden)

En la primera sección hemos estudiado el siguiente argumento

Todos los hombres son mortales
Socrates es hombre
$- - - - - - - - - - - - - - - -$
Socrates es mortal

Que sabemos que es correcta, pero no podiamos probarlo con la lógica de orden 0, pero con la lógica de primer orden sí.

4.1. Lenguaje de primer orden

Defineción 4.1. *Un lenguaje de primer orden, es un conjunto $\mathcal{L}$ de símbolos que consisten en dos partes.*

- ***Primera parte.*** *Común para cada lenguaje, que consiste de*
  - *Las variables $v_0, v_1, \dots$ son una cantindad númerable de símbolos. Escribimos*

    $$\mathcal{V} := \{v_0, v_1, \dots\}$$

  - *Conectivos lógicos:* $-, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$
  - *Paréntesis:* $(,)$
  - *Cuantificadores:* $\exists, \forall$
- ***Segunda parte.*** *Varía en cada lenguaje y consiste de varios tipos de conjuntos y disjuntos de la primera parte.*
  - $\mathcal{C} := \{C_1, C_2, \dots\}$ *conjunto de símbolos constantes.*
  - $\mathcal{F}_n$*, conjunto de símbolos de funciones n-arias para cada n (entradas)*

- *$\mathcal{R}_n$, conjunto de símbolos de relaciones n-arias para cada n.*

En resumen

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} \cup \{(,), -, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall\} \cup \mathcal{C} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n$$

Notación. Cuando escribimos en lenguaje de primer orden, lo hacemos solamente tomando su segunda parte.

Ejemplo 4.1.

$$\mathcal{L}_{\text{ring}} = \{0, 1, +, \cdot, =\}$$

donde $0, 1$ son constantes, $+, \cdot$ son funciones binarias y $=$ es una relación binaria.

Nota 4.1. En algunas ocasiones representaremos el producot por $\times$ en vez de $\cdot$ para facilitar el entendimiento.

Defınción 4.2. *Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$. Una expresión es una cadena finita de elementos de $\mathcal{L}$.*

Defınción 4.3. *Dado $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. un término es una expresión de la siguiente forma:*

1. *Elemento de $\mathcal{V}$.*
2. *Elemento de $\mathcal{C}$*
3. *Si $f \in \mathcal{F}_n$ y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $ft_1 \ldots t_n$ también son términos.*

El conjunto de todos los términos, se denota por $T(\mathcal{L})$.

Ejemplo 4.2.

$$0, +v_0 1, \times v_0 v_1 \in T(\mathcal{L}_{\text{ring}})$$

Defınción 4.4. *Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, una fórmula atómica es de la forma:*

$$Rt_1 t_2 \ldots t_n$$

con $t_1, \ldots, t_n$ términos y $R \in \mathcal{R}_n$.

Ejemplo 4.3.

- $= 01$ es una fórmula atómica de $\mathcal{L}_{\text{ring}}$
- $= +v_0 v_1 1$ es una fórmula atómica ya que $+v_0 v_1$ es un término por defınción y 1 es una constate y por tanto, un término. De forma que tenemos $Rt_1 t_2$. (Es decir $+v_0 v_1$ conforma un solo término)
- $= +v_0 v_1 +10$ es una fórmula atómica ya que $+v_0 v_1$ es un término y $+10$ también.

Definición 4.5. *Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$. Las fórmulas son expresiones de los siguientes tipos:*

1. *Fórmula atómica.*
2. *Si φ es una fórmula, entonces $-\varphi$ también.*
3. *Si φ, ψ son fórmulas, entonces*
$$\varphi \star \psi$$
también, donde $\star = \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$.
4. *Si φ es una fórmula, $v \in \mathcal{C}$ y Q es un cuantificador, entonces*
$$Qv\varphi$$
es una fórmula.

Al conjunto de las fórmulas se denota por $F(\mathcal{L})$ y solamente son de los tipos anteriores.

Ejemplo 4.4.
$$\exists v = 01 \in F(\mathcal{L}_{\text{ring}})$$

Ya que $= 01$ es una fórmula atómica, luego se tiene un cuantificador y v una variable, luego claramente es una fórmula.

Abusos de Notación.

- Agregar o quitar paréntesis (mientras no cambie el sentido)
- Para una relación binaria expresar yRv en vez de Ryv.
- $\not R\, t_1 \dots t_n$, en vez de $-Rt_1 \dots t_n$.

Observación 4.1. Al igual que la lógica proposicional, tenemos teorema de lectura única y arbol de lectura.

Recordatorio. El teorema de la lectura única dice que, una fórmula tiene tres formas posibles, o es una fórmula atómica, o bien es de la forma $-\varphi$ o bien es de la forma $(\alpha \star \beta)$ o bien es de la forma $Qv\varphi$, con Q cuantificado y v variable.

Ejemplo 4.5.

- $\forall v(= uv \rightarrow \times v_1))$ no es una fórmula ya que $\times v_1$ no es fórmula.
- $\exists x \forall y(x+y = 1)$ es fórmula (estamos usando un abuso de notación). Sin abuso de notación tendriamos
$$\exists x \forall y(= +xy1)$$
- $\exists v(- = \times vw1 \wedge - = vw)$ es fórmula.

Definición 4.6. *Sea $\varphi \in F(\mathcal{L})$ con $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, y sea $v \in \mathcal{V}$, entonces*

- *Las ocurrencia de v en φ, son las copias de v en φ que no son de la forma $\exists v, \forall v$.*
- *Cada ocurrencia de v en φ, está bajo el rango del cuantificador Q, en la siguiente forma $Qv\varphi$.*
- *Una ocurrencia de v en φ, está acotada por el cuantificador Q si hay algo de la forma $Qv\varphi$.*
- *Una ocurrencia de v es libre si no está acotado.*

Definición 4.7. *Si φ no tiene variable, es una oración.*

Ejemplo 4.6.

- $\exists v(- = \times vv1 \wedge = vw)$
- $\exists v(- = \times vv1 \wedge - = vw)$

No son oraciones ya que tiene variables. Notemos que w es libre ya que no está acotada, v tiene 3 ocurrencia y una libre en la oración.

Ejemplo 4.7.

$$\forall y(\exists v(v \times v = y) \vee \exists v(v \times vy + y = 0))$$

Notemos que los dos últimos v en la fórmula, están bajo el rango del cuantificado $\exists$, también hay 4 ocurrencia de v.

¿Cómo interpretar los símbolos de $\mathcal{L}$?

- Las constantes representan objetos determinados como algo con nombres propios.
- Las variables representan objetos determinados, algo así como los lugares que uno rellena en el formulario.
- Símbolos de función representan funciones, por ejemplo: fuv representa evaluar (u, v) en f.
- Símbolos de relación representan propiedades de los objetos sobre los que hablamos. Por ejemplo $\square v$ es un cuadrado, $\subseteq uv$ es que u está contenido en v.

4.2. Semántica en lógica de predicados

Definición 4.8. *Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$-estructura (modelo del lenguaje $\mathcal{L}$) es un par*

$$\mathcal{M} := (M, \Sigma)$$

donde M es un conjunto no vacío y

$$\Sigma = \{R_1^m, R_2^m, \dots, f_1^m, f_2^m, \dots, C_1^m, C_2^m, \dots\}$$

donde

- *$R_i \in \mathcal{R}_n \longrightarrow R_i^m \subseteq M^n$ es decir es una relación n-aría.*
- *$f_i \in \mathcal{F}_n \longrightarrow f_i^m : M^n \to M$ es deicr, una función n-aria.*
- *$C_i \in \mathcal{C} \longrightarrow C_i^m \in M$ es elemento de M.*

A M se le llama conjunto base y a Σ signatura de la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$.

Es importante notar que Σ puede tener más de una función/relación n-aria, puede ser que $= \in \Sigma$ y que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in \Sigma$. Todo depende de como se define y a veces del contexto.

Lo importante es que una $\mathcal{L}$-estructura es una reinterpretación del lenguaje $\mathcal{L}$ dado, con esto queremos decir que tenemos una colección de constantes, funciones, relaciones que están determinado por un conjunto M, que le entrega interpretación a cada constante, función y relación. Por ejemplo, si $\Sigma = \{f\}$ con f una función binaria, si $M = \mathbb{R}$, podemos interpretar la función binaria como la suma, y la denotamos por $f^{\mathbb{R}}$, entonces

$$f^{\mathbb{R}} = +$$

Si $M = \mathbb{C}$, podemos interpretar la función binaria f, como sumar la parte real y restar la parte imanginaria, es decir

$$f^{\mathbb{C}}(a + bi, c + di) = a + c + (b - c)i$$

Ejemplo 4.8. Para $\mathcal{L}_{\text{ring}} = \{0, 1, +, \times, =\}$, una $\mathcal{L}_{\text{ring}}$-estructura sería

$$(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times, =)$$

Donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto base y $\{0, 1, +, \times, =\}$ es un conjunto de constantes, relaciones binarias y funciones binarias. Vemos que estamos restringiendo el estudio a $\mathbb{Z}$ bajo funciones/relaciones en $\mathcal{L}_{\text{ring}}$.

Ejemplo 4.9. Sea

$$\mathcal{L}_{\text{group}} = \{\underset{\in\mathcal{C}}{e}, \underset{\in\mathcal{F}_1}{inv}, \underset{\in\mathcal{F}_2}{\circ}, =\}$$

Luego un $\mathcal{L}_{\text{group}}$-estructura $\mathcal{M}$ es

$$(D_6, id, inv, \circ, =)$$

donde $e = id$ es la identidad. Como vemos, estamos estudiando el diedral 6 con una consante identidad, una funcion 1-aría que va de D_6 a D_6, la compisición 2-aría que va de D_6^2 a D_6 y por último, una relación 2-aría.

4.3. $\mathcal{M}$-asignaciones

Sabemos que hay oraciones de primer orden que no son siempre ciertas, depende de la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M} = (M, \Sigma)$ que se considere.

Ejemplo 4.10.

$$\exists v((v + v = 0) \wedge (v \neq 0))$$

es verdadera en $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times, =)$, ya que tomando $v = 2 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, se llega a que $v+v = 2v = 0$ y $2 \neq 0$, al menos en el sentido habitual. Pero no en $(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times, =)$ ya que el necesariamente $v = 0$.

Así que los valores de verdad depende de la $\mathcal{L}$-estructura que se considere.

Definición 4.9. *Una $\mathcal{M}$-asignación es una función parcial*

$$i : X \subseteq \mathcal{V} \to M$$

Ejemplo 4.11. Si $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, \Sigma)$ y $X = \{v_1, v_2, v_3\}$, las funciones

$$\begin{aligned} f_1 : X &\to \mathbb{Z} \\ v_1 &\mapsto 1 \\ v_2 &\mapsto 2 \\ v_3 &\mapsto 3 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_2 : X &\to \mathbb{Z} \\ v_1 &\mapsto 2 \\ v_2 &\mapsto 5 \\ v_3 &\mapsto -1 \end{aligned}$$

son $\mathcal{M}$-asignaciones.

4.3.1. Satisfación

Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$, y definido una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y un i, una $\mathcal{M}$-asignación. Definiremos $(\mathcal{M}, i)$ satisface φ (o modela un φ), para φ una $\mathcal{L}$-fórmula cuyas variables libres pertenecen a X.

Notación. $(\mathcal{M}, i) \vDash \varphi$

La definición de satisfación será por etapas

4.3.2. Términos

Dado $t \in T(\mathcal{L})$, definimos el elemento $t^{(\mathcal{M},i)} \in M$ de la manera "obvia" siempre que las variables t estén en X.

Ejemplo 4.12. En $\mathcal{L}_{\text{ring}}$ sea la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times, =)$ y la $\mathcal{M}$-asignación:

$$\begin{aligned} i : \{v, w\} &\to \mathbb{Z} \\ v &\mapsto 3 \\ w &\mapsto 5 \end{aligned}$$

tenemos $(\times + v1w)^{(\mathcal{M},i)}$ es $(3+1)\cdot 5 = 20 \in \mathbb{Z} = M$. Notemos que las variables del término $(\times + v1w)$ están en el conjunto de partida i. Por lo que se puede aplicar de manera " obvia ".

Desde ahora podemos definir

$$(\mathcal{M}, i) \vDash \varphi$$

En el ejemplo anterior

$$(\mathcal{M}, i) \vDash (\times + v1w)$$

4.3.3. Fórmula Atómica

Por otro lado, sea φ una fórmula atómica (es decir, es de la forma $\varphi = Rt_1 \dots t_n$ con $t_i \in T(\mathcal{L})$), definimos $(\mathcal{M}, i) \vDash \varphi$ si y sólo si

$$(t_1^{(\mathcal{M},i)}, \dots, t_n^{(\mathcal{M},i)}) \in R^{\mathcal{M}}$$

es decir, los términos que conforman a φ son elemento de la relación n-aria.

Ejemplo 4.13. En $\mathcal{L}_{\text{ring}} = \{0, 1, +, \times, =\}$ donde

$$\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times, =)$$

con $\mathcal{M}$-asignación

$$\begin{aligned} i : \{v, w\} &\to \mathbb{Z} \\ v &\mapsto 3 \\ w &\mapsto 2 \end{aligned}$$

entonces

$$(\mathcal{M}, i) \vDash (= v + w1)$$

Entonces notemos que $(= v+w1)$ es una fórmula atómica, ya que $t_1 = v, t_2 = +w1$ son términos y $=$ es una relación, todo bien definido ya que todas las funciones, relaciones y constantes están en $\mathcal{M}$, ahora por definición debemos probar que

$$(v^{(\mathcal{M},i)}, (+w1)^{(\mathcal{M},i)}) \in =_2$$

Luego de forma obvia se ve que

$$v^{(\mathcal{M},i)}$$

es 3. Mientras que

$$(+w1)^{(\mathcal{M},i)}$$

es $2+1=3$, luego son iguales y por tango son elementos de la relación $=_2$.

Por otro lado

$$(\mathcal{M}, i) \nvDash = vw$$

Ya que por el mimso argumento tendriamos que

$$(t_1^{(\mathcal{M},i)}, t_2^{(\mathcal{M},i)}) \in =_2$$

donde el primero es 3 y el segundo es 2, siendo totalmente faslo y luego no se satisface la fórmula atómica $= vw$.

4.3.4. Fórmulas con conectivos lógicos

Dada las fórmulas φ, ψ, sin cuantificadores, podemos tomar la negación, o combinarla con un conectivo $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, y cuando usamos la consecuencia lógica, su uso es de forma " evidente ", por ejemplo:

$$(\mathcal{M}, i) \vDash (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, i) \vDash \varphi \text{ y } (\mathcal{M}, i) \vDash \psi$$

Luego se aplica de forma recursiva hasta tener fórmulas atómicas. El resto de conectores es igual.

4.3.5. Cuantificadores

Dada una fórmula φ y $z \in \mathcal{V}$, veamos que ocurre con $\exists z\varphi$ (para el caso $\forall$ es lo mismo). Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura e $i : X \subseteq V \rightarrow M$ una $\mathcal{M}$-asignación. Supongamos que

$$Free(\exists z\varphi) \subseteq X$$

(el conjunto de las variables libres).

- **Caso 1.** Sea z una variable no libre en φ, entonces

  $$Free(\varphi) = Free(\exists z\varphi) \subseteq X$$

  En este caso definimos $(\mathcal{M}, i) \vDash \exists z\varphi$ si y sólo si $(\mathcal{M}, i) \vDash \varphi$

  Ejemplo 4.14. Sea $\mathcal{L}$ y $\mathfrak{m} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, \times, =)$ y la $\mathcal{M}$-asignación

  $$\begin{aligned} i : \{w\} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ w &\mapsto 2 \end{aligned}$$

  Sea la expresión $\varphi_1 : (w = 0)$ que es una fórmula atómica, notemos de manera obvia

  $$(w = 0)^{\mathcal{M},i} \leftrightarrow 2 = 0$$

  que no es cierto, luego $(\mathcal{M}, i) \nvDash \varphi_1$, como z no es libre en φ_1 (ya que no está z), entonces

  $$Free(\exists z\varphi_1) = Free(\varphi_1) = \{w\} \subseteq X$$

  Entonces

  $$(\mathcal{M}, i) \nvDash \exists z\varphi_1 \Leftrightarrow (\mathcal{M}, i) \nvDash \varphi_1$$

  Tomemos otra fórmula, digamos que $\varphi_2 : \forall z(z \times w = 0)$ donde claramente z no es libre al estar acotado por un cuantificador. Luego esto no se cumple ya que los términos $z \times w$ y 0 no necesariamente se igualan, por tanto

  $$(\mathcal{M}, i) \nvDash \varphi_2$$

  Y entonces

  $$(\mathcal{M}, i) \nvDash \exists z\varphi_2$$

  (Estamos asumiendo que φ_2 es no satisfacible de manera obvia, ya que no todo z hace que $z \times 2 = 0$)

- **Caso 2.** Queremos estudiar el caso donde z es libre en φ, para ello debemos definir algunas cosas. Sean

$$\mathcal{L}' := \mathcal{L} \cup \{\hat{z}\} \quad \mathcal{C}' := \mathcal{C} \cup \{\hat{z}\}$$

Donde $\hat{z}$ es una constante. Para cada $b \in M$, podemos definir la $\mathcal{L}'$-estructura $\mathcal{M}'_b$ que cumple $\hat{z}^{\mathcal{M}'_b} = b$, y fuera de eso, es igual a $\mathcal{M}$. Luego definimos $\varphi(\hat{z}|z)$ como la $\mathcal{L}'$-fórmula donde las ocurrencias libres de z en φ se reemplazan por $\hat{z}$. Por último, definimos $(\mathcal{M}, i) \vDash \exists z\varphi$ si y sólo si existe $b \in M$ talque $(\mathcal{M}'_b, i) \vDash \varphi(\hat{z}|z)$

Si $Q = \forall$, todo igual es igual, salvo $(\mathcal{M}, i) \vDash \forall zQ$ si y sólo si para todo $b \in M$, se tiene $(\mathcal{M}'_b, i) \vDash \varphi(\hat{z}|z)$.

Ejemplo 4.15. Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, +, =\}$. Sea $\mathfrak{m} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, =)$ y la asignación

$$\begin{aligned} i : \{w\} &\to \mathbb{Z} \\ w &\mapsto 5 \end{aligned}$$

Luego $\varphi : (v + w) = 0$ con v, w libres. Estudiemos $\exists v\varphi$, notemos que v es libre y que

$$Free(\exists v\varphi) = \{w\} \subseteq X$$

Definimos $\mathcal{L}' = \{0, 1, +, =\} \cup \{\hat{v}\}$, a la estructura $\mathcal{M}'_b$ reemplazamos $\hat{v}$ por $b \in M = \mathbb{Z}$, definimos $\varphi(\hat{v}|v) : \hat{v} + w = 0$. Sabemos que

$$(\mathcal{M}, i) \vDash \exists v\varphi \Leftrightarrow (\mathcal{M}'_b, i) \vDash \varphi(\hat{v}|v)$$

Para $b = -5$, vemos que $(-5) + 5 = 0$. Por tanto

$$(\mathcal{M}, i) \vDash \exists v(v + w = 0)$$

Notación.

- Si $i : \{x_1, \ldots, x_n\} \to M$ es una correspondencia finita, al elemento $a \in M^n$, diremos que

$$\mathcal{M} \vDash \varphi[a]$$

en vez de $(\mathcal{M}, i) \vDash \varphi$.

- Si i es la asignación vacía y φ no tiene varaibles libes, se denota

$$\mathcal{M} \vDash \varphi$$

en vez de $(\mathcal{M}, \emptyset) \vDash \varphi$

4.4. Conjuntos definibles, realización

Dado un $\mathcal{L}$-fórmula y un $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, uno puede buscar $\mathcal{M}$-asignaciones para que haya satisfacibilidad.

Definición 4.10. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden, $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Un conjunto $S \subseteq M^n$ es definible si existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ con $Free(\varphi) \subseteq \{v_1, \dots, v_n\}$ talque*

$$S = \{a \in M^n : \mathcal{M} \vDash \varphi[a]\}$$

En tal caso decimos que S es la realización de $\varphi(v_1, \dots, v_n)$ y se denota por:

$$S = \varphi(v_1, \dots, v_n)^m$$

Ejemplo 4.16. Dado $\mathcal{L} = \{0, +, =\}$ y $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, 0, +, =)$, el conjunto S de los números pares es definible. Ya que la $\mathcal{L}$-fórmula

$$\varphi(u) : \exists v(v + v = u)$$

satisface todo los pares. No intentarelos probar que S es definible de forma directa, sino notar que $\exists v(v + v = u)$ es una fórmula donde $u \in 2\mathbb{Z}$ hace que

$$(\mathcal{M}, i) \vDash \exists v(v + v = u) \Leftrightarrow (\mathcal{M}, i) \vDash (v + v = u)$$

Y en particular, para toda asignación para v se cumple, entonces se satisface de manera " obvia ".

Ejemplo 4.17. Dado $\mathcal{L} = \{=, <\}$, sea $\mathcal{M} = \{\mathbb{N}_{\geq 0}, =, <\}$, luego el conjunto $C = \{0\}$ es definible. Ya que la $\mathcal{L}$-fórmula

$$\begin{aligned} \varphi(u) &: \forall v(u < v \vee u = v) \\ \varphi'(u) &: -(\exists v(v < u)) \end{aligned}$$

y está obligado que $u \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ sea 0. En general, el conjunto $Q = \{n\}$ es definible por la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula

$$\begin{aligned} \varphi(x) :&\exists x_0 \exists x_1 \dots \exists x_{n-1}((x_0 < x_1) \wedge (x_1 < x_2) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} < x)) \wedge \\ &\forall y(y < x \to ((y = x_0) \vee \dots \vee (y = x_{n-1})) \end{aligned}$$

para ver esto, si tomamos $m > n$, entonces lo segundo falla ya que $m \neq n_i$ para todo $1 \leq i \leq n - 1$, y si $m < n$, entonces $m < m$, siendo imposible. Por tanto la única opción es $m = n$.

Ejemplo 4.18. Dado $\mathcal{L}_{\text{ring}} = \{0, 1, +, \times, =\}$, consideremos la $\mathcal{L}$-estructura

$$(\mathbb{R}, 0, 1, +, \times, =)$$

y sea P el conjunto de los no negativos, notemos que es definible ya que la $\mathcal{L}_{\text{ring}}$-fórmula

$$\varphi(u) : \exists v(v \times v = u)$$

genera los números no negativo. Si tomamos la $\mathcal{L}$-estructura $(\mathbb{Z}, 0, +, \times, =)$ la fórmula anterior no sirve, debemos generar otra, en particular, por el teorema de Langrage todo número entero posivito puede ser escrito como la suma de 4 cuadrados, es decir

$$\psi(v) : \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \exists v_4(v = v_1 \times v_1 + v_2 \times v_2 + v_3 \times v_3 + v_4 \times v_4)$$

4.5. Consecuencia lógica en lógica de primer orden

Defnción 4.11. *Una $\mathcal{L}$-oración (es decir, una $\mathcal{L}$-fórmula sin variables libres) φ es universalmente válido si todas las $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ cumple $\mathcal{M} \vDash \varphi$.*

Notación. Dado Ω el conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones. Decimos que $\mathcal{M} \vDash \Omega$ si $\mathcal{M} \vDash \varphi$ para todo $\varphi \in \Omega$.

Definición 4.12. *Sea Ω un conjunto de $\mathcal{L}$-oraciones y φ una $\mathcal{L}$-oración. Decimos que φ es consecuencia lógica de Ω si cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ con $\mathcal{M} \vDash \Omega$, cumple que $\mathcal{M} \vDash \varphi$. En ese caso se denota $\Omega \vDash \varphi$.*

Definición 4.13. *Sean φ, ψ oraciones. Decimos que son lógicamente equivalentes si*

$$\psi \vDash \varphi \ \ y \ \ \varphi \vDash \psi$$

Se puede ver que φ es universalmente válido si y sólo si

$$\emptyset \vDash \varphi$$

También sirve la notación $\vDash \varphi$.

Ejemplo 4.19. φ, ψ son lógicamente equivalentes si y sólo si $\emptyset \vDash (\psi \leftrightarrow \varphi)$

Si ψ, φ son lógicamente equivalentes, entonces si $\mathcal{M} \vDash \psi$, entonces $\mathcal{M} \vDash \varphi$ y viceversa, claramente se cumple de manera obvia que

$$\vDash \varphi \to \psi \ \text{ y } \ \vDash \psi \to \varphi$$

Ya que para todo $\mathcal{L}$-estructura que satisface a φ, satisface a ψ y viceversa, luego se concluye la equivalencia. Luego por definición para toda $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-estructura, satisface a ψ, φ siendo lógicamente equivalentes.

Ejemplo 4.20. En $\mathcal{L}_{\text{ring}} = \{0, 1, +, \times, =\}$, la oración

$$\varphi : \exists v(v + v = 0 \wedge -(v = 0))$$

no es universalmente válido ya que en la $\mathcal{L}$-estructura que contiene a $\mathbb{Z}$, no se cumple. Las oraciones

$$\psi : \exists v(v = 0)$$
$$\beta : \forall v(v = v)$$

no son universalmente válidos, ya que no necesariamente el $=$ es el igual que conocemos. Pero si fuera el igual que conocemos, la primera $\mathcal{L}$-oración no es universalmente válido ya que tomando 0 neutro, en $\mathbb{Z}^+$ no tiene al 0. Mientras que el segundo si es universalmente válido ya que para cualquier $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$-estructura, todo es igual consigo mismo.

Proposición 4.1. *Toda $\mathcal{L}$-oración es lógicamente equivalente a una oración en froma prenexa:*

$$Q_1 v_1 Q_2 v_2 \dots Q_n v_n \varphi$$

con Q_i cuantificadores y φ sin cuantificadores.

La demostración es por inducción, pero es bastante largo y no es el objetivo de los apuntes. Quedémosno con la idea de que toda $\mathcal{L}$- oración se puede caracterizar a una oración con solo cuantificadores y una oración que no tiene cuantificadores.

Ejemplo 4.21. $-\forall x\varphi$ es lógicmanete equivalente con $\exists x(-\varphi)$. Para probarlo hay que estudiar si x es libre o no en φ, si fuera

Ejemplo 4.22. $\forall x\varphi \wedge \psi$ es lógicamente equivalente con $\forall x(\varphi \wedge \psi)$.

4.6. Teoría

Definición 4.14. *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Una $\mathcal{L}$-teoría es un conjunto τ de $\mathcal{L}$-oraciones.*

Definición 4.15. *Un modelo de una $\mathcal{L}$-teoría τ es una $\mathcal{L}$-estrucutra $\mathcal{M}$ talque $\mathcal{M} \vDash \tau$. Una $\mathcal{L}$-teoría es satisfacible (o coherente) si tiene al menos un modelo que lo satisface.*

Ejemplo 4.23. Sea $\mathcal{L} = \{c, \star, =\}$ donde c es una constante, $\star$ es una función binaria y $=$ por convenio la tomaremos como la igualdad. Sea G_R el conjunto de oraciones:

$$\begin{aligned}
&\forall x(= \star xcx \wedge = \star cxx)\\
&\forall x\exists y(= \star xyc \wedge - \star yxc)\\
&\forall x\forall y\forall z(= \star x \star yz \star \star xyz)
\end{aligned}$$

Notemos que es una $\mathcal{L}$-teoría que se satisface ya que podemos considerar $\mathcal{M} = (\{c\}, \mathcal{L})$, donde $\{c\}$ es el grupo trivial con c constante, luego $\mathcal{M} \vDash G_R$. Luego $\mathcal{M}$ es un modelo, en particular, estamos describiendo la conmutatividad, el inverso y la asociatividad en un conjunto.

Ejemplo 4.24. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Sea

$$Th(\mathcal{M}) := \{\varphi \text{ oración} : \mathcal{M} \vDash \varphi\}$$

esta teoría es trivialmente satisfacible, ya que $\mathcal{M} \vdash Th(\mathcal{M})$.

4.7. Axiomas para la lógica de primer orden

Desarrollaremos un sistema de axiomas y reglas de deducción que nos permita estudiar la consecuencias lógicas. Sabemos que el primer sistema de axiomas, proviene de la lógica de orden 0, la lógica proposicional.

Por lo que dada una oración $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ de la lógica proposicional, donde $p_1, \ldots, p_n$ son las letras proposicionales que aparence en α, y dadas $\mathcal{L}$-fórmula de orden 1, $\varphi_1(\overline{x}), \ldots, \varphi_n(\overline{x})$, donde $\overline{x}$ son las variables en $\mathcal{V}$. Se define $\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ como la $\mathcal{L}$-fórmula obtenidad al reemplazar en α la letra p_i por φ_i. Esta fórmula tiene variables libres en $\overline{x}$.

Ejemplo 4.25. Pensemos en $\alpha(p, q) = (p \leftrightarrow q)$, si

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : v_1 = v_2\\
&\varphi_2 : \exists u(u = v_1 + v_2 \wedge v_1 = 0)
\end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) : ((v_1 = v_2) \leftrightarrow \exists u(u = v_1 + v_2 \wedge v_1 = 0))$$

Ejemeplo 4.26. Dado $\mathcal{L} = \{+, =, c\}$, $\alpha = ((p \wedge q) \vee r)$, si

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : \forall v(c + v = c)\\
&\varphi_2 : \exists u(u = c \to c + v = u + v)\\
&\varphi_3 : c = c + c
\end{aligned}$$

Si consiremos la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}, +, =, 1)$, queremos ver que

$$\mathcal{M} \vDash \alpha(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)[a]$$

pero

$$\mathcal{M} \nvDash \varphi_1[a],\ \ \mathcal{M} \nvDash \varphi_3[a]$$

Luego no es consecuencia lógica. Si tomamos la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{N} = (\mathbb{Z}, +, =, 0)$, si ocurre que $\mathcal{N} \vDash \alpha(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)[a]$. Ya que

$$\mathcal{N} \vDash \varphi_3[a]$$

Definición 4.16. *Una $\mathcal{L}$-tautología, es una $\mathcal{L}$-fórmula de la forma $\alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ obtenida de una tautología α de la lógica proposicional.*

Ejemplo 4.27. Si β es una $\mathcal{L}$-fórmula, entonces $\beta \vee -\beta/$ es una $\mathcal{L}$-tautología como $\alpha(p) := p \vee -p$ es tautología. Por otro lado, $\alpha(p, q) := p \to (q \to p)$ es una tautología, tomando $\gamma, \forall x\varphi$ $\mathcal{L}$-fórmulas, entonces $\gamma \to (\forall x\varphi \to \gamma)$ es una $\mathcal{L}$-tautologia.

Proposición 4.2. *Las $\mathcal{L}$-tautología son universalmente válidas.*

Dem. tarea

Elegimos las $\mathcal{L}$-tautologías, como axiomas.

Definición 4.17. *Los axiomas de igualdad son:*

1. $\forall x(x \doteq x)$
2. $\forall x \forall y(x \doteq y \to y \doteq x)$
3. $\forall \vec{x} \forall \vec{y}(\vec{x} \doteq \vec{y} \to \dot{f}(\vec{x}) \doteq \dot{f}(\vec{y}))$ *para todo* $\dot{f}$ *función n-aria.*
4. $\forall \vec{x} \forall \vec{y}((\vec{x} \doteq \vec{y} \wedge \dot{R}(\vec{x}) \to \dot{R}(\vec{y}))$ *para todo* $\dot{R}$ *relación n-aria.*

Lema 4.1. *Si $\doteq$ se interpreta siempre como la igualdad usual, los axiomas son universlamente válidos.*

Dem.

Definición 4.18 *Los axiomas para el cuantificador existencial son:*

1. *($\exists x\varphi \leftrightarrow \exists x - -\varphi$) con φ, una $\mathcal{L}$-fórmula.*
2. *($\varphi(t, x_1, \ldots, x_n) \to \exists x_1\varphi$) con $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula y $t(x_1, \ldots, x_n)$ talque $t, x_1, \ldots, x_n$ son compactibles con φ.*

Lema 4.2. *Los axiomas para el cuanticador existencial, son universalmente válidas.*

Ejemplo 4.28. Sea

$$\psi(x, y, z) : \exists y - (x = y)$$

Si $t(x, y, z) : z$, luego $\exists y - (z = y)$ es compatible. Si $t(x, y, z) : y$, entonces $\exists y - (y = y)$ no es compatible.

Dem. (Lema 4.2) Si $\mathfrak{m} \vDash \psi(t, x_2, \ldots, x_n)[\vec{a}]$ para una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{m}$ y $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in M^n$, entonces $\mathfrak{m} \vDash \varphi[t^m(\vec{a}), a_2, \ldots, a_n]$ (es decir $(\mathfrak{m}_b, \vec{a}) \vDash \varphi(\hat{x}_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $b = t^{\mathfrak{m}}(a) \in M$). Por lo tanto se tiene $\mathfrak{m} \vDash (\exists x_1\psi)[\vec{a}]$. ■

Al igual que la lógica de orden 0, necesitamos reglas de deducción, el cual usaremos el Modus Ponens y la Deducción por Generalización.

Definición 4.19. (Deducción por Generalización) *Si tenemos $\varphi \to \psi$ y la variable x no es libre en φ, entonces deducimos ($\varphi \to \forall x\psi$).*

Teorema 4.1. (Correción) *Si φ demuestra a partir de Σ, entonces $\Sigma \vDash \varphi$.*

Dem. Sea $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$ una demostración. Si $n = 1$ es evidente que se cumple. Supongamos que es cierto para $j < i$. Si φ_i es axioma estamos listos, si $\varphi_i \in \Sigma$, estamos listos y si φ_i se deduce por MP también lo estamos. Supongamos que φ_i se deduce por Generalización, entonces $\varphi_i : (\alpha \to \forall x\beta)$, con α, β $\mathcal{L}$-fórmulas. Si x no es libre en α y $(\alpha \to \beta) = \varphi_r$ para algún $r < i$.

Si para una $\mathcal{L}$-estructura, $\mathfrak{m}$ se tiene $\mathfrak{m} \vDash (\alpha \to \beta)$, entonces se tiene $\mathfrak{m} \vDash \forall x(\alpha \to \beta)$. Como x no es libre en α, obtenemos $\mathfrak{m} \vDash (\alpha \to \forall x\beta)$. Por lo tanto

$$(\alpha \to \beta) \vDash (\alpha \to \forall x\beta)$$

y como $\Sigma \vDash (\alpha \to \beta)$, obtenemos $\Sigma \vDash (\alpha \to \forall x\beta)$. ■

Teorema 4.2. (Completitud de Gödel, 1930) *Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden numerable y Ω una $\mathcal{L}$-teoría. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Ω es coherente (no hay φ talque $\Omega \vdash \varphi$ y $\Omega \vdash -\varphi$)

(b) Exite un modelo para Ω.

Corolario 4.1. *Si $\Sigma \vDash \varphi$, entonces $\Sigma \vdash \varphi$.*

Dem. Si $\Sigma \nvdash \varphi$, entonces $\Sigma \cup \{-\varphi\}$ es coherente. Por el teorema de completitud de Gödel, $\Sigma \cup \{-\varphi\}$ es satisfacible, es decir, existe un modelo. En este modelo las oraciones de Σ son válidas y φno, de esta forma $\Sigma \nvDash \varphi$. ■

5. Teoría de Conjuntos

5.1. Introducción

Definiremos la teoría de conjunto como un lenguaje de primer orden, usando los axiomas de Zermelo-Frakenlin.

Definicion 5.1. *El lenguaje de la teoría de conjuntos está formada por los siguientes símbolos:*

- ***Variables.*** $x, y, z, X, Y, Z, \ldots$ *que representa conjuntos.*
- ***Constantes.*** $a, b, c, A, B, \ldots$ *que se interpretan como conjuntos.*
- ***Conectívos, Paréntesis y Cuantificadores.*** $-, \vee, \wedge, \leftrightarrow, (,), \exists, \forall$.
- *El* $=$ *se interpreta como la igualdad usual.*
- $\in$ *se interpreta como al pertenencia.*

La idea es encontrar una teoría axiomática que permita modelas las intuiciones sobre los conjuntos y ojalá permita deducir todas las propiedades que se quieren modelar (Aunque esto no se puede hacer).

Teorema 5.1. (Teorema de Incompletitud de Gödel, Versión abreviada) *Si* Σ *es una teoría de conjunto consitente, entonces existen oraciones tales que*

$$\Sigma \nvdash \varphi \text{ y } \Sigma \nvdash -\varphi$$

5.2. Teoría de Zermelo-Fraenkel

En el intento de axiomatización que usaremos, no se sabe si es consistente. La teoría de Zermelo-Fraenkel consiste de todas las $\mathcal{L}$-oraciones que se demuestran de los siguientes axiomas:

(A1). *Axioma de Extensionalidad:*

$$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \to X = Y)$$

En palabras usuales se dice que todo todo conjunto X, Y si tiene los mismos elementos, entonces son iguales los conjuntos. Este axioma nos entrega unicidad de conjuntos.

Notación.

- Denotaremos $X \notin Y$ en vez de $-(X \in Y)$.
- $X \subseteq Y$ en vez de $\forall x (x \in X \to x \in Y)$

Luego el axioma de extensionalidad, queda de la siguiente forma:

$$\forall X \forall Y ((X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X) \to X = Y)$$

(A2.) *Axioma del Conjunto Vacío:*

$$\exists X \forall Y (Y \notin X)$$

Este axioma nos garantiza dos cosas, que existe al menos un conjunto y que hay un conjunto que no contiene ningún elemento.

Proposición 5.1. *Existe un único conjuntos que no contiene ningún elemento.*

Dem. Sean X_1, X_2 conjuntos que no tienen ningún elemento, que existen por el segundo axioma, notemos que para todo y

$$y \notin X_1 \leftrightarrow y \notin X_2$$

Luego por el axioma de extensionalidad $X_1 = X_2$. ■

Definición 5.2. *El conjunto sin elementos, se llamará conjunto vacío y se denotrará por $\emptyset$.*

(A3). *Axioma de Separación: Dada una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$, entonces*

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \leftrightarrow ((z \in X) \wedge \varphi(z)))$$

Dicho de otra forma, dado un conjunto X, podemos tomar una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ y ver que existe un $Y \subseteq X$ definido a partir de $\varphi(x)$. (Recordemos que una $\mathcal{L}$-fórmula es la construcción de fórmulas atómicas compuesta por los conectivos lógicos, y cuantificadores.)

Al igual que el vacío se puede probar que un conjunto Y que se generar a partir de una $\mathcal{L}$-fórmula es único.

Proposición 5.2. *Sea $\mathcal{L}$-fórmula. Entonces existe un único $Y \subseteq X$ talque*

$$x \in Y \leftrightarrow \varphi(x)$$

Dem. Sean X_1, X_2 dos oraciones generadas a parir de la misma $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ bajo el mismo conjunto X, sea $X_1 \in X_1$, entonces $x_1 \in X \wedge \varepsilon(x_1)$, por el axioma de separación, luego, nuevamebte por axioma de separación se tiene que $x_1 \in X_2$, por tanto

$$\forall x (x \in X_1 \leftrightarrow x \in X_2)$$

y por el axioma de extensionalidad, se tiene que $X_1 = X_2$. ■

Notación. El conjunto obtenido se denota por:

$$Y := \{x \in X : \varphi(x)\}$$

Es importante especificar que el conjunto generado sea subconjunto de X, ya que si no se hace esto se generan problemas, en particular, en la antigua teoría de conjuntos existian conjuntos de la forma

$$\{x : \varphi(x)\}$$

y causaban problemas como la paradoja de Rusell el cual consta de un conjunto

$$R := \{X : X \notin X\}$$

Notemos que si $R \in R$, entonces $R \notin R$, y si suponemos que $R \notin R$, entonces R es un elemento que no se autopertenece, luego $R \in R$. Generando una paradoja (problema sin solucion)

(A4.) *Axioma de pares:*

$$\forall X \forall Y \exists Z (\forall x (x \in Z \leftrightarrow (x = X \vee x = Y)))$$

Es decir, dado dos conjuntos X, Y existe un conjunto Z que tiene por elementos X, Y.

Por el axioma de extensionalidad se tiene que el conjunto dado a partir del axiomas de pares, es único, por lo que tiene una única representación. Se denotará por $\{X, Y\}$. El conjunto $\{X, X\}$ se denotará por $\{X\}$ y se llama singleton X.

Otra interpretación es que podemos generar conjuntos de conjuntos, o crear otros tipos de conjuntos distintos a partir de otros conjuntos.

(A5.) *Axiomas de Uniones:*

$$\forall X \exists Y (\forall z (z \in Y \leftrightarrow \exists u (z \in u \wedge u \in X)))$$

Se interpreta como, dado un conjunto X, existe un conjunto donde los elementos son los elementos de los elementos de X y se denota por $\cup X$.

Ejemplo 5.1. Sean X, Y conjuntos, la unión $X \cup Y$ es $\cup\{X, Y\}$. Tenemos que

$$z \in \cup\{X, Y\} \leftrightarrow \exists u (z \in u \wedge \{u = X \vee u = Y)) \leftrightarrow (z \in X \vee z \in Y)$$

Con esto podemos interpreta la unión de forma habitual. Además el conjunto que satisface el axioma de unión también es único.

Definición 5.3. *Dado un conjunto X, definimos la intersección de x como:*

$$\cap X = \{x \in \cup X : \forall y (y \in X \rightarrow x \in y)\}$$

Escribimos $X \cap Y$ en vez de $\cap\{X, Y\}$ (intersección usual) y decimos que X, Y son disjuntos si $X \cap Y = \emptyset$.

Observación 5.1. Para un conjunto X, por el axioma de uniones existe el conjunto $\cup X$, y notemos que

$$\varphi(y) : \forall y (y \in X \rightarrow x \in y)$$

Es una $\mathcal{L}$-fórmula ya que $\in yX, \in xy$ son fórmulas atómicas, luego por construción, $\varphi(y)$ es $\mathcal{L}$-fórmula, luego por el axioma de sepración, existe el conjunto

$$Y := \{x \in \cup X : \varphi(x)\}$$

Que es el como definimos la intersección. Estando bien definida la intersección.

(A6.) *Axioma del Conjunto Potencia:*

$$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \leftrightarrow z \subseteq X)$$

Este conjunto Y que proviene del axioma se denota $\mathcal{P}(X)$ o $\mathcal{P}X$

El axioma del conjunto potencia asegura la existencia de un conjunto de subconjuntos de un conjunto X dado. En particular, el conjunto potencia es único.

(A7.)*Axioma de Regularidad:*

$$\forall X (X \neq \emptyset \rightarrow \exists Y (Y \in X \wedge Y \cap X = \emptyset))$$

Este conjunto impide la existencia de conjuntos autoreferentes como el conjunto de la paradoja de Russell. En otras palabras, $\in$ nos permite ordenar conjuntos

Proposición 5.3. $\forall X (X \notin X)$

Dem. Sea X un conjunto cualquiera, por el axioma de regularidad, tomando $A = \{X, X\} = \{X\} \neq \emptyset$, entonces existe un conjunto Y talque

$$Y \in A \wedge Y \cap A = \emptyset$$

Tomando $Y = X$ se cumple (es el único conjunto tomable), entonces $X \cap \{X\} = \emptyset$ y luego $X \notin X$. (Si $X \in X$ entonces $X \cap \{X\} \neq \emptyset$) ■

(A8.) *Axioma del Conjunto Infinito:*

$$\exists X (\emptyset \in X \wedge \forall Y (Y \in X \rightarrow Y \cup \{Y\} \in X))$$

Es decir, existe al menos un conjunto infinito, un ejemplo directo es

$$\{\emptyset, \emptyset \cup \{\emptyset\}, \emptyset \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}, \dots\} = X$$

Aun así X puede tener más elementos que los conformados por el vacío.

Definición 5.4. *Sea una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x, y)$, es una función proposicional si ocurre lo siguiente: si para todo conjunto A, existe un único conjunto B talque $\varphi(A, B)$ se verifica.*

Observación 5.2. Tiene sentido decirle función proposicional, ya que todo conjunto de partida, tiene una única imagen.

Ejemplo 5.2.

$$\varphi_1(x, y) : y = \cup x$$
$$\varphi_2(x, y) : y = x \cap C$$

La $\mathcal{L}$-fórmula φ_1 es una función, ya que sabemos que $\cup x$ es único por el axioma de extensionalidad, y la $\mathcal{L}$-fórmula φ_2 también es función ya que $X \cap C = \{X, C\}$ tiene una única representación.

(A9.) *Axioma de Reemplazo: Sea $\varphi(x,y)$ una función proposicional, entonces*

$$\forall X \exists Y \forall y (y \in Y \leftrightarrow \exists x (x \in X \wedge \varphi(x,y)))$$

Es decir, dado un conjunto X y una función proposicional φ, podemos encontrar un conjunto Y de los elementos b que verifican $\varphi(a,b)$ para algún $a \in X$. Otra forma de pensarlo, es que a partir de un conjunto X, podemos generar un conjunto Y que satisfaga $\varphi(x,y)$. Notemos que el conjunto generado a paritr del axioma de reemplazo es único.

Existe un axioma más, que sería el axioma de elección, siendo muy importante ya que si se asume tal axioma, entonces se general toda la matemática conocida. Por el momento no la enunciaremos sino hasta más adelante.

5.3. Pares Ordenados, Porducto Cartesiano

5.3.1. Pares Ordenados

En virtud de los axiomas de Zermele-Fraenkel, podemos definir conjuntos que ya conocemos.

Definición 5.5. *Dados 2 conjuntos a, b, el par ordenado a, b se define por:*

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Observación 5.3. Se puede probar que existe el par ordenado, ya que usando axioma de pares, existen $\{a\}$ y $\{a, b\}$, y usando una vez más, se tiene que el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ existe.

Teorema 5.2. *Si*

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$$

Entonces $a = c, b = d$.

Dem. Supongamos que $a = b$, entonces

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$$

Si $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$, entonces

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

Por lo que $\{a\} = \{c\}$ y $\{a\} = \{c, d\}$, por el axioma de extensionalidad, luego aplicando nuevamente el axioma de extensionalidad se tiene que $a = c = d$, concluyendo que $a = c$ y $b = d$.

Supongamos que $a \neq b$, entonces si

$$\{c\} \in \langle c, d \rangle = \langle a, b \rangle$$

Se tiene que $\{c\} = \{a\}$ o $\{c\} = \{a, b\}$, si se cumple el segundo caso, se llega que por el axioma de extensionalidad que $c = a = b$, siendo imposible, entonces $c = a$, luego $\{c, d\} = \{a, b\}$, usando el mismo argumento anterior, como $a = c$, entones $b = c = a$ o $b = d$, como el primer caso es imposible, se llega a que $b = d$ y por tanto $a = c$ y $b = d$. ■

Definición 5.6. *Definimos tuplas ordenadas de la siguiente manera:*

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle, a_n \rangle$$

5.3.2. Producto Cartesiano

Observación 5.4. Claramente bien definido, solo hay que usar el axioma de pares de forma recursiva.

Definición 5.7. *Dados 2 conjuntos a, b, el producto cartesiano de a, b se define por:*

$$a \times b := \{z \in \mathcal{P}\mathcal{P}(a \cup b) : \exists x \exists y((x \in a \wedge y \in b) \wedge z = \langle x, y \rangle))$$

Veamos si el producto cartesiano está bien definido, con respecto al conjunto referencial, $a \cup b$ existe y aplicando dos veces el axioma del conjunto potencia, se tiene que $\mathcal{P}\mathcal{P}(a \cup b)$ existe, por otro lado, sea la expresión bajo un lenguaje de primer orden

$$\varphi(z) : \exists x \exists y((x \in a \wedge y \in b) \wedge z = \langle x, y \rangle))$$

Que es claramente una $\mathcal{L}$-fórmula, luego por el axioma de separación, el conjunto

$$Y := \{z \in \mathcal{P}\mathcal{P}(a \cup b) : \varphi(z)\}$$

existe. Por lo tanto $a \times b$ está bien defindo.

Por comodidad usaremos la notación usual $a \times b = \{\langle x, y \rangle : x \in a, y \in b\}$. Por lo que, el producto cartesiano se interpreta de manera obvia.

Ejemplo 5.3.

$$\begin{aligned}
a \times \{b, c\} &= \{\langle x, y \rangle : x \in a, y \in \{b, c\}\} = \{\langle x, y \rangle : x \in a \wedge (y = b \vee y = c)\} \\
a \times (b \cup c) &= \{\langle x, y \rangle : x \in a, y \in b \cup c\} \\
&= \{\langle x, y \rangle : x \in a, (y \in b \vee y \in c)\} \\
&= \{\langle x, y \rangle : (x \in a \wedge y \in b) \vee (x \in a \wedge y \in c)\} \\
&= \{\langle x, y \rangle : x \in a \wedge y \in b\} \cup \{\langle x, y \rangle : x \in a \wedge y \in c\} \\
&= (a \times b) \cup (a \times c)
\end{aligned}$$

5.4. Relaciones y Funciones

5.4.1. Relaciones

Definición 5.8. *Un conjunto R es una relación binaria si todos sus elementos son pares ordenados. El dominio de R se define por:*

$$Dom(R) := \{x \in \cup \cup R : \exists y(\langle x, y \rangle \in R)\}$$

El recorrido de R se define por:

$$Rec(R) := \{y \in \cup \cup R : \exists x(\langle x, y \rangle \in R)\}$$

Y el campo de R se define por:

$$Cam(R) := Dom(R) \cup Rec(R)$$

Observación 5.5. El dominio, el recorrido y el campo, están bien definidos bajo los axiomas de Zermelo-Fraenkel.

Nota 5.1. Por definición de relación, R es subconjunto de un producto cartesiano $a \times b$. Cuando $a = b$, entonces se dice que R es relación sobre el conjunto a ($R \subseteq a \times a$).

Definición 5.9. *Dadas las relaciones R, S, definimos la composición de R y S por:*

$$S \circ R := \{\langle x, y \rangle : \exists z((\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\}$$

Y la relación inversa de R como

$$R^{-1} := \{\langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in R\}$$

Definición 5.10. *Si R es una relación binaria y a es un conjunto, la imagen de a por R se define por:*

$$R^{\star}a = \{y \in Rec(R) : \exists x(x \in a \wedge \langle x, y \rangle \in R)\}$$

Ejemplo 5.4. Dado un conjunto a y R, S relaciones, entonces

$$(S \circ R)^{\star}a = S^{\star}(R^{\star}a)$$

Sol. Tenemos que

$$(S \circ R)^{\star}a = \{\varphi \in Rec(S \circ R) : \exists x(x \in a \wedge \langle x, y \rangle \in S \circ R)\}$$

y

$$S^{\star}(R^{\star}a) = \{y \in Rec(S) : \exists x(x \in R^{\star}a \wedge \langle x, y \rangle \in S)\}$$

Probemos la inclusión $\supseteq$. Sea $w \in S\star(R^{\star}a)$, entonces

$$\to \exists x(x \in R^{\star}a \wedge \langle x, w \rangle \in S$$

Y entonces

$$\to \exists x(\exists z(z \in a \wedge \langle z, x \rangle \in R) \wedge \langle x, w \rangle \in S)$$

Como $\langle z, x\rangle \in R$, $\langle x, w\rangle \in S$. Vemos que $\langle z, w\rangle \in S \circ R$ y como $z \in a$. Concluimos que $w \in (S \circ R)^\star a$.

Probemos la inclusión $\subseteq$. Sea $y \in (S \circ R)^\star a$, entonces

$$\exists x(x \in a \wedge \langle x, y\rangle \in S \circ R)$$

Y entonces

$$\exists x(x \in a \wedge \exists t(\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, w\rangle \in S))$$

Como $x \in a$ y $\langle x, t\rangle \in R$, vemos que $t \in R^\star a$. Y como $t \in R^\star a$ y $\langle t, y\rangle \in S$, se concluye que $y \in S^\star(R^\star a)$.

Probando que

$$(S \circ R)^\star a = S^\star(R^\star a)$$

5.4.2. Funciones

Definición 5.11. *Una relación F es una función si:*

$$\forall x \forall y \forall z((\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x, z\rangle \in F) \to y = z)$$

Es decir, la imagen de un elemento es siempre único. Con esto para todo a, se tiene

- o bien $F^\star\{a\} = \emptyset$
- o bien $F^\star\{a\}$ es singleton, denotado $F(a)$.

Proposición 5.4. *Dadas 2 funciones F, G, se tiene que $F = G$ si y sólo si $Dom(F) = Dom(G)$ y $\forall x(F(x) = G(x))$.*

Dem. Si $F = G$ es evidente que tienen igual dominio y que $F(x) = G(x)$ para todo x.

Supongamos que F, G tiene el mismo dominio y que $F(X) = G(X)$ para todo x. Sea $\langle x, y\rangle \in F$, entonces $x \in Dom(F)$ y $y \in Rec(F)$ por definición, luego $x \in Dom(G)$ y si $F(x) = G(x)$, entonces

$$F(x) = F^\star\{x\} = \{y \in Rec(F) : \exists a(a \in x \wedge \langle a, y\rangle \in R)\} = \{y\}$$

Y entonces $y \in Rec(G)$ y entonces $\langle x, y\rangle \in G$. Lo mismo para el otro lado, luego $F = G$ ■

Definición 5.12. *Dado F una función con $Dom(F) = a, Rec(F) = b$. Decimos que F es función de a en b, denotado por:*

$$\begin{aligned} F : a &\to b \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

F será inyectivo si

$$\forall x \forall y(F(x) = F(y) \to x = y)$$

F será sobreyectivo si

$$\forall y(y \in b \to \exists x(x \in a \wedge F(x) = y))$$

Proposición 5.5. *Sea F función, F es inyectivo si y sólo si F^{-1} es función.*

Dem. Recordemos que F es una relación, por lo que

$$F^{-1} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in F\}$$

Supongamos que F^{-1} es función, entonces

$$\forall x \forall y \forall z((\langle x, y\rangle \in F^{-1} \wedge \langle x, z\rangle \in F) \to y = z)$$

Luego

$$\forall x \forall y \forall z((\langle y, x\rangle \in F \wedge \langle z, x\rangle \in F) \to y = z)$$

Es decir, $F(y) = x = F(z)$, entonces $y = z$ y por tanto F es inyectivo.

Supongamos que F es inyectivo, sean $\langle y, x_1\rangle, \langle y, x_2\rangle \in F^{-1}$, entonces $\langle x_1, y\rangle, \langle x_2, y\rangle \in F$, luego por inyectividad $x_1 = x_2$, por lo que F^{-1} es una función. ■

5.4.3. Tipos de Relaciones

Definición 5.13. *Sea R una relación binaria que satisface:*

- ***Reflexividad.***

$$\forall x(x \in Dom(R) \to \langle x, x\rangle \in R)$$

- ***Simetría.***

$$\forall x \forall y(\langle x, y\rangle \in Dom(R) \to \langle y, x\rangle \in R)$$

- ***Transitividad.***

$$\forall x \forall y \forall z((\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R) \to \langle x, z\rangle \in R)$$

Entonces decimos que R es una relación de equivalencia.

Definición 5.14. *Sea R una relación binaria que satisface:*

- ***Antisimetría.***

$$\forall x \forall y((\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R) \to x = y)$$

- ***Conexidad.***

$$\forall x \forall y(\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R \vee x = y)$$

Decimos que R es orden parcial si es relfexiva, antisimétrica y transitiva. Y decimos que es de orden total si es orden parcial y conexa.

Notación. Si R es de orden total denotaremos en general $x \preceq y$, en vez de $\langle x, y\rangle \in R$

5.5. Números Naturales y Sistema de Peano

5.5.1. Números Naturales

Definiremos los números naturales de una forma asociada a conjuntos y no de forma habitual, aun así mostraremos que existe una relación entre estos números naturales, con los natulares que ya conocemos $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Definición 5.15. *Dado un conjunto a, su sucesor se define $a^+ := a \cup \{a\}$. Un conjunto A es inductivo si $\emptyset \in A$ y es cerrado por sucesión. Es decir:*

$$\forall a(a \in A \to a^+ \in A)$$

El sucesor de un conjunto existe gracias al axioma de los pares y por el axioma de uniones. Tomemos el conjunto X generado a partir del axioma del infinito, donde

$$\emptyset \in X \land \forall Y(Y \in X \to Y \cup \{Y\} \in X)$$

Claramente es inductivo ya que contiene al vacío y todo elemento $a \in X$, está su sucesor.

Observación 5.5. Notemos la siguiente secuencia de sucesores

$$a, a \cup \{a\}, a \cup \{a\} \cup \{a \cup \{a\}\}, a \cup \{a\} \cup \{a \cup \{a\}\} \cup \{a \cup \{a\} \cup \{a \cup \{a\}\}\}, \dots$$

y así sucesivamente.

Definición 5.16. *Un número natural es un conjunto que pertenece a todo conjunto inductivo.*

La definición es lejana al número natural que conocemos, pero tomará bastante sentido, notemos que el vacío es un número natural, ya que por definición de conjunto inductivo, necesariamente contiene al vacío. Además, por su propiedad ser cerrado bajo la inclusión del sucesor, es fácil ver que la secuencia

$$\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \emptyset^{+++}, \dots$$

genera números naturales.

Teorema 5.3. *Hay un conjunto cuyos elementos son exáctamente los números naturales.*

Dem. Sea B un conjunto inductivo por lo que contiente todo los números naturles, que existe por el axioma del conjunto infinto. Consideremos la $\mathcal{L}$-fórmula

$$\varphi(x) = \forall A(\forall a(a \in A \to a^+ \in A) \to x \in A)$$

Se obtiene el conjunto

$$\omega := \{x \in B : \varphi(x)\}$$

de los números naturales. ■

Corolario 5.1. *El conjunto ω es $\{\emptyset, \emptyset^+, \dots\}$.*

Dem. Como $\{\emptyset, \emptyset^+, \dots\}$ es inductivo, contiene a ω. Dado $\emptyset^{+\cdots+}$, sabemos que está en todo conjunto indúctivo por definición, por lo que claramente

$$\{\emptyset, \emptyset^+, \dots\} \subseteq \omega$$

Por lo tanto $\omega = \{\emptyset, \emptyset^+, \dots\}$. ■

Notación. Hemos caracterizado los números naturales, y ahora podemos asociarlos a los números naturales de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&0 := \emptyset \\
&1 := \emptyset^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\} \\
&2 := \emptyset^{++} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \emptyset \cup \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} \\
&\vdots \\
&n := \{0, 1, \dots, n-1\}
\end{aligned}$$

Entonces, podemos representar el conjunto ω por

$$\omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Aun así, no hemos o no sabemos si existe una forma de describir un patrón, por lo que puede tener números naturales que no está en ω o que no conocemos. Lo que si sabemos que es ω es el conjunto más pequeño que contiene a $1, 2, 3, \dots$. Con esto construyamos una estructura.

Definición 5.17. *Definimos la relacion $\leq$ en ω por:*

$$m \leq n \textit{ si y solo si } m \in n \textit{ o } m = n$$

Entonces

$$\leq = \{\langle m, n\rangle : m \in n \vee m = n\}$$

Definimos $<$ por $m < n$ si y solo si $m \in n$.

Probemos que $\leq$ es una relación de orden total y que $<$ es solo transitiva y conexa. Primero con $\leq$:

- **Reflexiva.** Sea $n \in \omega$, entonces es claro que $n = n$, y entonces

  $$\langle n, n\rangle \in \leq$$

  Siendo reflexiva.

- **Antisimétrica.** Sean $\langle n, m\rangle, \langle m, n\rangle \in \leq$, entonces $n \in m$ o $n = m$ y $m \in n$ o $m = n$. Si $n \in m$, y $m \in n$, se llega a que $n \in n$, siendo imposible, si $n \in m$ y $m = n$, entonces $m \in m$, siendo también imposible. Por lo tanto, la única opción, es que $m = n$. Por lo que $\leq$ es antisimétrica.

- **Transitiva.** Sean $\langle n, m\rangle, \langle m, p\rangle \in\leq$. Supongamos que $n \in m$, entonces $m \in p$ o $m = p$, en ambos casos se tiene que $n \in p$ ya que $p = \{0, 1, \dots, n, \dots, m, \dots, p-1\}$. Si $n = m$, es claro que $n \in p$. Entonces $\leq$ es transitiva.
- **Conexa.** Si $\langle n, m\rangle \in\leq$ estamos listo, supongamos que no, entonces $n \notin m$ y $n \neq m$, pero definición de números naturales necesariamente $m \in n$ (si no no tendría sentido los números naturales), luego $\langle m, n\rangle \in\leq$. Se sigue el resto de casos.

Por lo tanto $\leq$ es de orden total.

Ahora sobre $<$ es fácil ver que es transitiva. Para ver que es conexa, notemos que $\langle n, n\rangle \notin<$, para todo $n \in \omega$, entonces o $n < m$ o $m < n$, aun así se cumple la conexidad.

5.5.2. Sistema de Peano y Arimética

Definición 5.17. *Un sistema de Peano es una tripleta $\langle N, S, e\rangle$ con N un conjunto, (generalmente los naturales). Una función*

$$S : N \to N$$

y $e \in N$ un elemento inicial. Donde se cumple

(a) $e \notin Ran(S)$

(b) S es biyectiva de N a $N \setminus \{e\}$

(c) Para todo $A \subseteq N$ que contiene a e y cerrado bajo S, es igual a N.

Ejemplo 5.5. Digamos que el sistema Peano $\langle N, S, e\rangle$ dado por $N = \omega, S = + : \omega \to \omega, e = 0$.

Teorema 5.4. *Sea $\langle N, S, e\rangle$ un sistema Peano. Entonces existe una función biyectiva $h : \omega \to \omega$ talque $h(n^+) = S(h(n))$ y $h(0) = e$.*

Ejemplo 5.6. Sean $N = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$, $S(n) = 2n, e = 1$. Probemos que $\langle N, S, e\rangle$ es un sistema de Peano. Notemos que 1 es nuestro elemento inicial y $1 \notin Ran(S) = \{2, 4, \dots\}$, es claramente biyectiva de $\{1, 2, 4, \dots\}$ a $\{2, 4, 8, \dots\}$ y si $A \subseteq N$ es talque $1 \in A$ y cerrado bajo S, entonces

$$\begin{gathered} S(1) = 2 \in A \\ S(2) = 4 \in A \\ \vdots \\ S(2^n) = 2^{n+1} \in A \end{gathered}$$

Claramente $A = N$. Siendo $\langle N, S, e\rangle$ un sistema de Peano. La función $h : \omega \to \omega$ del teorema es

$$\begin{aligned} &h(0) = 1 \\ &h(1) = h(0^+) = S(h(0)) = S(1) = 2 \\ &h(2) = h(1^+) = \cdots = S(2) = 4 \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(n) = 2^n$. Una función claramente biyectiva.

Ejemplo 5.7. Si $N = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$, con $S(n) = n + 3, e = 3$. Veamos que $\langle N, S, e\rangle$ es un sistema de Peano. Claramente $3 \in N$, y

$$Ran(S) = \{6, 9, 12, 15, \dots\}$$

Donde $e \notin Ran(S)$, claramente es biyectiva de N a $N \setminus \{3\}$ y por último, si $A \subseteq N$ talque $3 \in A$ y es cerrado bajo S, entonces

$$\begin{aligned} S(3) &= 6 \in A \\ S(6) &= 9 \in A \\ &\vdots \\ S(n+3) &= n + 6 \in A \end{aligned}$$

Entonces $A = N$. Siendo sistema de Peano. Para h queremos que

$$\begin{aligned} h(0) &= 3 \\ h(1) &= S(h(0)) = S(3) = 6 \\ h(2) &= S(h(1)) = S(6) = 9 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por tanto $h : \omega \to \omega$ talque $h(n) = 3n + 3$, claramente biyectiva.

Ahora, definiremos $+$, para ello primero definimos la función " sumar m "para M fijo. Sea el sistema de Peano $\langle \omega, \cdot^+, m\rangle$. Por el teorema 5.4, exite una función biyectiva h, digámosles A_m, entonces

$$\begin{aligned} A_m : \omega &\to \{m, \dots\} \\ 0 &\mapsto m \\ 1 &\mapsto A_m(0)^+ = m^+ \\ 2 &\mapsto m^{++} \\ &\vdots \\ n &\mapsto m^{\underbrace{+\cdots+}_{n\text{-veces}}} := m + n \end{aligned}$$

Definición 5.18. *La suma $+$, es la operación binaria en ω talque para todo $n, m \in \omega$ se tiene*

$$m + n = A_m(n)$$

Entonces

$$+ = \{\langle\langle m, n\rangle, p\rangle : m \in \omega \wedge n \in \omega \wedge p = A_m(n)\} \subseteq (\omega \times \omega) \times \omega$$

Definiendo al suma respecto a un $m \in \omega$ fijo. Para la multiplicación, se puede tomar el sistema $\langle \omega, A_m, 0\rangle$, luego

$$\begin{aligned} M_m : \omega &\to \omega \\ 0 &\mapsto 0 \\ 1 &\mapsto M_m(0^+) = A_m(M_m(0)) = A_m(0) = m \\ 2 &\mapsto m + m \\ &\vdots \\ n &\mapsto \underbrace{m + \cdots + m}_{n \text{ veces}} = n \cdot m \end{aligned}$$

Definición 5.19. *La multiplicación $\cdot$ con m fijo, es definida por:*

$$m \cdot n := M_m(n)$$

Teorema 5.5. *Sean $m, n \in \omega$, entonces*

(a) $m + 0 = m$

(b) $m + n^+ = (m + n)^+$

(c) $m \cdot 1 = m$

(d) $m \cdot n^+ = (m \cdot n) + m$

Este teorema es bastante trivial, pero la importantie es que nos permite hacer los cálculos que ya sabemos hacer.

Dem. Sean los sistemas Peano $\langle \omega, \cdot^+, m\rangle$,$\langle \omega, A_m, 0\rangle$, luego para $n, m \in \omega$ se tiene que

(a) $m + o = A_m(0) = m$

(b) $m + n^+ = A_m(n^+) = (A_m(n))^+ = (m + n)^+$

(c) $m \cdot 1 = M_m(1) = A_m(M_n(0)) = A_m(0) = m$

(d) $m \cdot n^+ = M_n(n^+) = A_m(M_n(n)) = A_m(m \cdot n) = m \cdot n + m$

Ejemplo 5.8. $2 \cdot 2 = 4$. En efecto

$$2 \cdot 2 = M_2(2) = A_2(M_2(1)) = A_2(A_2(M_2(0))) = A_2(A_2(0)) = A_2(2^+) = 2^{++} = 3^+ = 4$$

5.6. Ordinales

5.6.1. Definición y Propiedades

Definición 5.18. *Sea X un conjunto, R una relación binaria en X. Decimos que R es un buen orden de X (o X es bien ordenado por R) si*

- *R es orden total estricto de X, es decir, es antisimétrica, transitiva, conexa y $\forall z - zRz$*

- *Todo subconjunto no vacío de X, tiene menor elemento (con respecto a R)*

Observación 5.1. El conjunto $\{1, 2, \dots\}$ es bien ordenado por $\in$. Ya que ..., es transitiva y conexa y que $a \in a$ no puede ocurrir. Por otro lado, si $A \subseteq \{1, \dots\}$ no vacío, entonces A tiene un menor elemento, ya que si no lo tuviera, entonces $\{1, \dots\}$ tampoco.

Definición 5.19. *Sea X un conjunto. Decimos que X es transitivo si todo elemento de un conjunto que pertenece a X, también pertenece a X.*

Es decir, $\cup X \subseteq X$ o

$$\forall x \forall y((x \in X \wedge y \in x) \to y \in X)$$

o

$$\forall x(x \in X \to x \subseteq X)$$

Definición 5.20. *Sea X un conjunto. Decimos que X es ordinal si:*

1. *X es transitivo, y*
2. *$\in$ es un buen orden de X*

Proposición 5.6. *Si X es ordinal, entonces todos sus elementos son ordinales.*

Dem. Sea $a \in X$, demostraremos que es ordinal. Como X es transitivo, se tiene que $a \subseteq X$, como la relación $\in$ de a es la restricción de X, es decir

$$\in |_{a \times a} \subseteq a \times a \subseteq X \times X$$

Es una relación que hereda la antireflexiva, la transitividad, la conexidad y la asimetría. Además, si $A \subseteq a$ no vacío, entonces $A \subseteq X$, luego A tiene elemento minimal y entonces A tiene mínimo sobre a. Por lo tanto $\in$ es buen orden de a.

Veamos que a es transitivo, sea $y \in a$ y sea $z \in y$, como X es un conjunto transitivo, obtenemos que $y \in a \subseteq X$, luego $z \in a$, de forma que $y \subseteq a$ y por lo tanto, es transitiva. Probando que a es ordinal. ■

Por lo tanto, para probar que un conjunto es ordinal, basta con probar que es elemento de un conjunto ordinal.

Proposición 5.7. *Sea X ordinal. Entonces $X^+ = X \cup \{X\}$ es ordinal.*

Dem. Veamos que $\in$ es un buen orden de X^+. Claramente es antireflexiva, antisimétrica.

- **Transitiva.** Si $x \in y, y \in z$ en $X^+ = X \cup \{X\}$, entonces, si $z = X$, como X es transitiva, se obtiene $x \in z = X$. Si $z \neq X$, entonces $z \in X$, se tiene $x \in y \in z$, como $\in$ es transitiva en X, se obtiene $x \in z$.
- **Conexa.** Sean $x, y \in X^+$, estudiemos todos los casos. Si $x = y = X$ estamos listo, si $x = X, y \in X$ entonces $y \in x$. Si $x \in X, y = X$ entonces $x \in y$. Si $x \in X, y \in Y$, como X es ordinal se tiene que $x = y$ o $x \in y$ o $y \in x$.

- **Buen orden.** Notemos que $\in$ es de orden total. Sea $\emptyset \neq Y \subseteq X^+$, si $Y = \{X\}$, X es el menor elemento. Si $Y \neq \{X\}$, entonces Y tiene elementos de X (posiblemente a X también) como $\in$ es de buen orden de X, hay un menor elemento en Y.
- X^+ **Conjunto transitivo.** Si $a \in b, b \in X^+$, si $b = X$ entonces $a \in X \subseteq X^+$. Si $b \in X$ entonces $a \in b \in X$, como X es transitiva se tiene que $a \in X \subseteq X^+$

Probando que X^+ es ordinal. ■

Corolario 5.1. *Todo $n \in \omega$ es ordinal.*

Dem. Por inducción.

Por lo tanto, todo número $0, 1, 2 \dots$ son ordinales.

5.6.2. Otros Ordinales

Definición 5.21. *Un ordinal límite, es un ordinal $\alpha \neq \emptyset$ talque no existe un ordinal β con $\alpha = \beta^+$.*

Por así decirlo, α es ordinal límite si es el " menor " ordinal.

Lema 5.1. *Se cumple las siguientes afirmaciones:*

(a) Para todo $n \in \omega$ se tiene $n = 0$ o $n \neq 0$

(b) Para todo $n \in \omega$ se tiene $n = 0$ o existe $k \in \omega$ talque $k^+ = n$.

(c) Para todo $n \in \omega$, si $k \in n$, entonces $k^+ \in n$ o bien $k^+ = n$.

Dem. Inducción. ■

Si lo pensamos tiene mucho sentido, ya que un número natural de ω, o bien es 0 o no lo es. Si no es 0, entonces debe ser el sucesor de algún natural $k \in \omega$ y por último, si $k \in n$ ($k \leq n$), entonces o bien es $k^+ = n$ o $k^+ \in n$. De forma que caracteriza el comportamiento de los naturales.

Teorema 5.21. *La relació $\in$ en ω es de orden total estricto.*

Dem. Para probar que $\in$ es de orden total escricto en ω, hay que probar que es antisimétrica, transitiva, conexa y asimétrica. Notemos que es antisimétrica ya que no hay ningún elemento talque $n \in m$ y $m \in n$, además con esto se concluye que $\in$ es también antireflexiva.

- **Transitiva.** Por inducción, sea la $\mathcal{L}$-fórmula

  $$\varphi(z) = \forall x \forall y ((x \in y \wedge y \in z) \to x \in z)$$

  Claramente $\varphi(0)$ se verifica.

  Si $\varphi(z)$ es cierto, sean $a \in b, b \in z^+$, luego si $b = z$ entonces $a \in z \subseteq z^+$. Si $b \in z$, como $\varphi(z)$ es cierto, obtenemos $a \in z \subseteq z^+$.
- **Conexa.** Sean $x, y, \in \omega$. Supongamos que $x \neq y, x \notin y, y \notin x$. Consideremos

  $$A := \{z \in w : z \in x \vee x \in z \vee z = x\}$$

Sabemos que $0 \in A$ por el lema anterior. Dado $z \in A$, veamos que $z^+ \in A$. Si $z \in A$ entonces $z = x$ o $z \in x$ o $x \in z$. Si $x \in z$, entonces $x \in z^+$, si $x = z$ entonces $x \in z^+$ y si $z \in x$, entonces $z^+ \in x$ o $z^+ = x$. Por lo tanto $\omega \subseteq A$, por lo que $\omega = A$, viendo que $y \in \omega$ y $y \notin A$, siendo una contradicción. De esta forma $\in$ es conexa

Por lo tanto $\in$ es de orden estricto en ω. ■

Teorema 5.22. *ω es bien ordenado por $\in$.*

Dem. Sabemos que $\in$ que es de orden total estricto. Sea $A \subseteq \omega$ sin menor elemento, demostraremos que $A = \emptyset$. Para esto mostraremos que el siguiente conjunto es inductivo:

$$B := \{m \in \omega : \text{ningún elemento} < m \text{ está en } A\}$$

Se tiene $0 \in B$, sea $n \in B$, veamos que $n^+ \in B$. Sea $k \in n^+$, tenemos $k = n$ o $k \in n$. Si $k \in n$ entonces $k \notin A$. Si $k = n$, entonces $k \notin A$, por que si $k \in A$ entonces A tendría menor elemento. Por tanto $n^+ \in B$, por lo que B es inductivo y $B = \omega$. Ahora, sea $l \in A$, se tiene que $l^+ \in \omega = B$, luego $l \in l^+$ es elemento de A, una contradicción, por lo tanto $A = \emptyset$. De esta forma A necesariamente tiene menor elemento. ■

Teorema 5.23. *El conjunto ω es ordinal.*

Dem. Sabemos que ω es bien ordenado por $\in$. Debemos mostrar que es un conjunto transitivo. Demostraremos por inducción usando

$$\varphi(n) = n \subseteq \omega$$

Claramente $\varphi(0)$ se cumple, sea $m \in \omega$ con $\varphi(m)$ cierto. Tenemos $m^+ = m \cup \{m\}$, si $m \in \omega$ y $m \subseteq \omega$, así que $\varphi(m^+)$ es cierto y por tanto ω es un conjunto transitivo. ■

Hemos probar, lo que parecia por así decirlo evidente, que ω es un ordinal. Pero no solo es eso, es un ordinal límite, el siguiente resultado lo enuncia y demuestra.

Teorema 5.24. *El conjunto ω es ordinal límite.*

Dem. Sabemos que ω es ordinal. Si $\omega = \beta^+$, con β ordinal, se tiene $\beta \in \omega$. Como ω es conjunto inductivo, obtenemos $\beta^+ \in \omega$, es decir, $\omega \in \omega$, pero esto es imposible, Entonces ω es ordinal límite. ■

Por lo tanto ω es el menor ordinal de su tipo, que además es un ordinal con infinitos elementos. También conocemos desde ahora $\omega^+, \omega^{++}, \ldots$. Se puede encontrar otros ordinales límites, con operación suma, producto, exp de ordinales, entre otros.

5.6.3. Teorema Fundamental de Ordinales

Definición 5.22. *Dado un conjunto bien ordenado $(X, \preceq)$, dado $b \in X$, el segmento inicial S_b de X es*

$$S_b := \{a \in X : a \preceq b \wedge a \neq b\}$$

Lema 5.2. *Sea $(X, \preceq)$ conjunto bien ordenado. Si para todo $a \in X$ el segmento S_a de X tiene una biyeccion que preserva el orden con un ordinal, entonces hay una biyección que preserva el orden entre X y el ordinal.*

$$f : A \xrightarrow{\sim} B$$
$$x \preceq y \longmapsto f(x) \lhd f(y)$$

Dem. Se omite ■

Teorema 5.25. *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal (isomorfismo biyección que respeta el orden).*

Dem. Sea $(X, \preceq)$ un conjunto bien ordenado. Debemos mostrar que para todo $a \in X$, S_a es isomorfismo a un ordinal. Sea

$$E := \{a \in X : S_a \text{ no es isomorfo a un ordinal}\}$$

Supongamos que $E \neq \emptyset$, sea $b \in E$, su menor elemento, dado que $c \preceq b$, sabemos que $c \notin E$, entonces S_c es isomorfo a un ordinal. Notando que $S_c = (S_b)_c$, se concluye que todo segmento inicial de b es isomorfo a ordinal. Por tanto S_b es isomorfo a ordinal, siendo contradicción. Por tanto $E = \emptyset$.

Para la unicidad se debe demostrar que dados $C \neq D$ ordianle, se tiene A S.I de C o C es S.I de D, y además que un ordinal no es isomorfo a sus segmentos iniciales. ■

5.6.4. Axioma de la Elección

Axioma. *Dado un conjunto X con $\emptyset \notin X$, existe una función de elección*

$$f : X \to Conjuntos$$

talque para todo $A \in X$, $f(A) \in A$, es decir

$$\forall X(\emptyset \notin X \to (\exists f : X \to \cup X, \forall A \in X, f(A) \in A))$$

Por ejemplo, si $X = \{A, B, C\}$, entonces existe una función talque $a \in A, b \in B, c \in C$.

Teorema de Zermelo. *Bajo los axiomas de Zermelo-Fraenkel y el axioma de elección. Todo conjunto admite buen orden.*

Corolario 5.1. *Todo conjunto es isomorfo a un ordinal.*

Versiones Equivalentes del Axioma de Elección.

- Dado dos conjuntos, hay una sobreyección de uno al otro.
- Todo conjunto infinito A tiene biyección hacía $A \times A$.
- Lema de Zorn.

5.7. Cardinales

5.7.1. Definición y Propiedades

Definicion 5.22. *Sean X, Y conjuntos. Se dicen equipotentes si existe una biyección de X a Y.*

Definición 5.23. *Un ordinal que no es equipotente a un ordinal estríctamente menor, es un cardinal.*

Dicho de otra fomra, un cardinal es un ordinal que no puede ser asociado con sus propios elementos de forma biyectiva.

Ejemplo 5.9. El conjunto ω es un cardinal, ya que si no lo fuera, entonces existe un $\omega' \in \omega$ (ambos son ordinales) tales que existe una biyección

$$\omega' \xrightarrow{\sim} \omega$$

Pero ω' debe ser finito, mientras que ω es infinito, siendo imposible. Por lo tanto, ω es un cardinal.

Ejemplo 5.10. ω^+ no es cardinal. Tenemos $\omega \in \omega^+$ y es ordinal. Podemos construir la biyección:

$$\begin{aligned} \omega \cup \{\omega\} = \omega^+ &\to \omega \\ \omega &\mapsto 0 \\ 0 &\mapsto 1 \\ \vdots &\mapsto \vdots \\ n &\mapsto n^+ \end{aligned}$$

Similarmente $\omega^{++}, \omega^{+++}, \ldots,$ no son cardinales.

Ejemplo 5.11. Los ordinales dentro de ω son cardinales.

Para probarlo, necesitamos el siguiente lema

Lema 5.3. *Dado $n \in \omega$ y $f : n \to n$, si f es inyectiva, entonces es sobreyectiva.*

Dem. Por inducción, si tomamos $\emptyset$, es claro que se cumple. Supongamos que el lema es cierto para n, consideremos $f : n^+ \to n^+$ y demostremos que es biyectiva. Sea la biyección $h : n^+ \to n^+$, con

$$h(i) = \begin{cases} n, & \text{si } i = n \\ m, & \text{si } i = f(m) \text{ para } \ m \in n \\ i, & \text{si } i \neq f(m) \text{ para todo } m \in n \end{cases}$$

Definimos $g := h \circ f : n^+ \to n^+$ donde $n \mapsto n$ y $n \ni k \mapsto k(f(k)) = k$. Notemos que g es biyección $n^+ \to n^+$. Como $f = h^{-1} \circ g$ y g, h^{-1} son biyecciones, entonces f es una biyección. ■

Volviendo al ejemplo 5.11, sea $m \in \omega$, mostraremos que es cardinal. Si $m = \emptyset$ estamos listo, si $m \neq \emptyset$, consideramos $n \in m$ y veremos que no hay biyección $m \to n$. Si $f : m \to n$ es inyectivo, entonces $f|_n : n \to n$ es inyectiva, y por el lema anterior, es biyectiva.

Dado $b \in m$, con $b \notin n$, obtenemos $f(b) \in n$, siendo una contradicción. Por lo tanto, no hay función inyectiva (biyectia) talque $m \to n$.

Veamos que tipos de ordinales puedes ser cardinales.

Proposición 5.8. *Sea α cardinal con $\alpha \notin \omega$. Entonces α es ordinal límite.*

Por lo tanto, un cardinal, es el menor ordinal de su tipo. Antes de probar la proposición, veamos el siguiente lema.

Lema 5.4. *Dados α, β ordinales, se tiene sólo unas de estas*

- *o bien $\alpha \in \beta$.*
- *o bien $\alpha = \beta$.*
- *o bien $\beta \in \alpha$.*

Dem. Si $\alpha \notin \beta$ y $\beta \notin \alpha$ por la ayudantia (revisar) Tenemos $\alpha \subseteq \beta$ y $\beta \subseteq \alpha$, así que $\alpha = \beta$. En la introducción de teoría de conjuntos, vimos que a lo más se cumple. ■

Dem. (Proposición) Sea α cardinal con $\alpha \notin \omega$. Entonces, o bien $\alpha = \omega$ o bien $\omega \in \alpha$.

- Si $\alpha = \omega$ estamos listo. Pues ω es ordinal límite.
- Si $\omega \in \alpha$, suponemos $\alpha = \beta^+$ con β ordinal. Definimos

$$\begin{aligned} f : \alpha &\to \beta \\ \beta &\to 0 \\ \gamma &\mapsto \gamma^+, \ \text{si } \gamma \in \omega \\ \gamma &\mapsto \gamma, \ \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

  De forma que 0 va a 1, 1 va a 2 y así sucesivamente, hasta que ω va ω y β a 0, notemos que β no está en el recorrido. Por lo que α es equipotente con β, como $\beta \in \alpha$, y α no es ordinal, se llega a una contradicción.

Probando la proposición. ■

Definición 5.24. *Sea X un conjunto. El cardinal de X, denotado por $|X|$, es el menor ordinal equipotente con X (Si es que existe).*

Proposición 5.9. *Sea X conjunto y supongamos que $|X|$ existe, entonces $|X|$ es cardinal.*

Dem. Supongamos que $|X|$ no es cardinal, entonces existe un ordinal $\beta \in |X|$ estricto talque $\beta \xrightarrow{\sim} |X|$, si existe la biyección $|X| \xrightarrow{\sim} X$ al ser equipontente, se tiene entonces que

$$\beta \xrightarrow{\sim} X$$

Es decir, β es el menor ordinal equipotente de X. Siendo imposible. Por lo tanto, $|X|$ es cardinal.

Proposición 5.10. (Test de Cardinalidad) *Sea X conjunto y α cardinal. Si existe una biyección $X \xrightarrow{\sim} \alpha$, entonces $|X| = \alpha$.*

Dem. Si X es equipotente con α y $|X| \neq \alpha$, existe ordinal $\beta \in \alpha$ con β equipotente con X. Luego β es equipotente con α y $\beta \in \alpha$, siendo una contradicción. Puesto que α es cardinal. ■

Ejemplo 5.12. El conjunto $\{a, b, c\}$ tiene cardinalidad 3 ya que existe una biyección f talque

$$\begin{aligned} a &\overset{f}{\mapsto} \emptyset \\ b &\overset{f}{\mapsto} \{\emptyset\} \\ c &\overset{f}{\mapsto} \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \end{aligned}$$

Luego $f : \{a, b, c\} \to \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$. Esto caracteriza la cardinalidad, recordemos que todos los ordinales de ω son cardinales, por lo que todo conjunto que tiene cardinalidad, se puede asociar con un número natural. Por ejemplo, para probar que X tiene cardinalidad n, basta probar que

$$f : X \xrightarrow{\sim} \{0, 1, \ldots, n-1\} = n$$

Ya que $\{0, \ldots, n-1\}$ es un cardinal y entonces $|X| = \{0, 1, \ldots, n-1\} = n$

Ejemplo 5.13. $|\omega^+| = \omega$. En efecto, si ω es un cardinal, basta considerar la biyección

$$\begin{aligned} \omega^+ &\to \omega \\ \omega &\mapsto 0 \\ 0 &\mapsto 1 \\ &\vdots \\ n &\mapsto n^+ \end{aligned}$$

Es decir, la cardinalidad del sucesor de ω, es la misma cardinalidad de ω.

Ejemplo 5.14. $|\omega \times \omega| = \omega$.

Para probar esto basta recordar

$$\omega \times \omega = \{\langle a, b\rangle : a \in \omega \wedge b \in \omega\}$$

y se toma la biyección

$$\begin{aligned} \pi : \omega \times \omega &\to \omega \\ \langle m, n\rangle &\mapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + n \end{aligned}$$

5.7.2. Cardinales más grandes

Teorema de Cantor. *Sea A un conjunto cualquier, entonces no existe una biyección $A \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(A)$*

Dem. Sea A un conjunto, y sea $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Consideremos

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\} \subseteq A$$

Si f es sobreyectiva, existe $b \in \mathcal{P}(A)$ talque $f(b) = B$, si $b \in B$, entonces $b \notin f(b) = B$, siendo imposible, y si $b \notin B$, entonces $b \in f(b) = B$, siendo también imposible. Por lo tanto f no es sobreyectiva. ■

El teorema de Cantor nos dice que no se puede relacionar un conjunto con su potencia. Es más, se puede probar que existe un crecimiento, donde la cardinalidad de A es menor a la de $\mathcal{P}(A)$. (Es caso de exitir)

Corolario 5.2. *Si $\mathcal{P}(\omega)$ tiene cardinalidad, será un cardinal mayor que ω.*

Encontraremos aquí un cardinal mayor que ω y un ordinal límite más grande que los que conocemos (salvo saber si ($\mathcal{P}(\omega)$ existe)

Con los axiomas de Zermelo-Fraenkel no sabemos si todo conjunto tiene cardinal. Si añadimos el axioma de elección entonces si.

También recordemos que todo conjunto que admite un buen orden es equipotente con un ordinal. Bajo el axioma de elección, todo conjunto admite buen orden.

Teorema 5.26. *Todo conjunto tiene cardinal (si incluimos el axioma de elección)*

Dem. Sea X un conjunto, y sea α ordinal con $X \xrightarrow{\sim} \alpha$. Definimos

$$C_x = \{\beta \in \alpha^+ : \beta \text{ equipotente con } X\} \neq \emptyset$$

(no es vacío ya que $\alpha \in C_X$). Vemos también que $C_x \subseteq \alpha^+$, que es bien ordenado por ser subconjunto de un ordinal. Por principio de buen orden, C_x tiene menor elemento β_0. Luego

$$\beta_0 = |X|$$

■

5.7.3. Conjuntos Infinitos No Numerables

Definición 5.25. (Finito Numerable) *Dado X conjunto, decimos que X es finito si $|X| \in \omega$, decimos X es numerable si $|X| = \omega$.*

Vemos que $\mathcal{P}(\omega)$ es infinito no numerable. Estudiemos como es su cardinalidad.

Definición 5.26. (Exponensiación) *Dados a, b conjuntos, la exponenciación de a por b, denotado a^b, será el conjunto de funciones de b hacía a (existe por ZF)*

Ejemplo 5.15. Dado X, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ es equipotente con 2^X.

Proposición 5.5. *Dado un conjunto X, el conjunto $\mathcal{P}(X)$ es equipotente con el conjunto*

$$2^X = \{\textit{funciones de } X \textit{ a } 2\}$$

Dem. Dado $A \subseteq X$, construimos

$$\mathcal{X}_A : X \to 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \{\emptyset\}, & \text{si } x \in A \\ \emptyset, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Queremos probar que $F : \mathcal{P}(X) \to 2^X$ dada por $A \mapsto \mathcal{X}_A$ es biyección. Notemos que F es sobreyectiva, pues, dado $f : X \to 2$, el conjunto $B = \{x \in X : f(x) = 1\}$ es talque $f = \mathcal{X}_B$, y F es inyectiva, si $A, B \subseteq X$ son tales que $F(A) = F(B)$, entonces $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$, luego $A = B$. ■

Definición 5.27. *Definimos $|\omega|$ como $\aleph_0$. Definimos $|2^\omega|$ como $2^{\aleph_0}$. También existe $\aleph_i$ como el i-ésimo cardinal infinito.*

Probaremos que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Teorema Cantor-Bernstein. *Sean A, B conjunto con $f : A \to B$ inyectiva, y $g : B \to A$ inyectiva. Entonces A es equipotente con B.*

Dem. Como $f : A \to B$ es inyectivo, se tiene que $|B| \leq |A|$, por lo tanto $|A| = |B|$. ■

Corolario Cantor-Bernstein. *Sean A, B conjuntos, si $f : A \to B$ es inyectiva y $g : A \to B$ es sobreyectiva, entonces hay una biyección de A a B.*

Dem. Definimos

$$h : B \to A$$
$$b \mapsto a$$

donde $g(a) = b$. Si h no fuese inyectivo, g no sería función, por lo tanto $h : B \to A$ es inyectivo y luego $|A| = |B|$. ■

Proposición 5.11. $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Dem. Sea

$$f : 2^\omega \to [0, 1]$$
$$(A_\omega \to 2) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}_A(n)}{2^{n+1}}$$

La función es sobreyectiva, por lo que alcanzamos toda expansión binaria. Por otro lado, sea

$$g : 2^\omega \to [0, 1]$$
$$(A_\omega \to 2) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{X}_A(n)}{3^{n+1}}$$

g es inyectiva, pues todas las representaciones no puede ser de la forma 0, **(algo)**. Por el corolaio

C-B, $|2^\omega| = |[0,1]|$, también se cumple $|[0,1]| = |(0,1)|$ tomando

$$\begin{aligned} h : [0,1] &\to (0,1) \\ 0 &\mapsto 1/2 \\ \frac{1}{n} &\mapsto \frac{1}{n+1} \\ x &\mapsto x, \text{ en otro caso.} \end{aligned}$$

También se puede ver que $|(-1,1)| = |(0,1)|$ tomando

$$\begin{aligned} r : (0,1) &\to (-1,1) \\ t &\mapsto 2t-1 \end{aligned}$$

Finalmente se concluye $|(-1,1)| = |\mathbb{R}|$ con

$$\begin{aligned} v : (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{t}{1-t^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$. ■

Una hipótesis muy famosas en matemáticas, es la hipótesis de Cantor. Es una hipótesis que choca en la matemática actual. Sabemos que $\omega < |\mathcal{P}(\omega)| = |2^\omega| = |\mathbb{R}|$, es decir, $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Esto motiva la siguiente conjetura:

Hipótesis del Continuo. *No existe cardinal entre $\aleph_0$ y $2^{\aleph_0}$. Es decir $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.*

Un resuldado con respecto a la hipótesis, es que no funciona en la matemática usual.

Teorema de Godel y Cohen. *Si juntamos los axiomas de Zermelo-Fraenke con el axioma de elección, la conjetura no se puede demostrar ni refutar.*

6. Ejercicios

P.(Revisar) *¿Puede un argumento incorrecto tener una conclusión verdadera?*

Sol. Si. Pensemos en el argumento

El verde es rojo
− − − − − − − − −
El verde es verde

con premisa falsa con un argumento incorrecto ya que la premisa no concluye y con conclusión verdadera.

P. *¿Puede un argumento correcto tener conclusión falsa?*

Sol. Si, pensemos en

Ayer es hoy
Hoy es mañana
− − − − − − − − −
Ayer es mañana

Tenemos un argumento correcto ya que la premisas si son verdaderas, la conclusión es verdadera, pero es falso que el ayer es mañana.

P. *Suponga que la conclusión de un argumento es una tautología. Entonces el argumento es correcto.*

Sol. Toda vez que la premisa es verdadera, la conclusión siempre es verdadera, luego es correcto al argumento para cualquier premisa.

P. *Si entre las premisas de un argumento hay una contradicción (es decir una oración y su negación, e.g. "Llueve" y "no llueve"), entonces el argumento es correcto.*

Sol. Es cierto, ya que nunca va a ser cierto las premisas en conjunto, luego toda vez que las premisas son cierta, lo son la conclusión.

P. *Traduzca el siguiente argumento al lenguaje $\mathcal{L}$: Rita Eugenia considera al licenciado Obregón demasiado viejo. Si Rita Eugenia es consecuente con sus ideas y piensa que el licenciado Obregón es demasiado viejo, no se casaría con él. Pero como bien sabemos, Rita Eugenia se casó con el licenciado. Luego Rita Eugenia no es tan consecuente con sus ideas.*

Sol. Sean

$p =$ Rita Eugenia considera a Obregón demasiado viejo.

$q =$ Rita Eugenia es consecuente de sus ideas.

$r =$ Rita Eugenia se casará con él.

Ahora es solo reemplazar, tenemos entonces que

$$\begin{array}{l} p \\ (q \wedge p) \rightarrow -r \\ r \\ \hline -q \end{array}$$

Revisemos la corrictud del argumento. Necesariamente $v(p) = v(r) = V$, luego $v(q) = F$. Por tanto $v(-q) = V$, es decir, el argumento es correcto.

P. *Verifique que* $-((p \vee -q) \rightarrow - - (q \wedge p))$ *es una oración.*

Sol. Por definición p, q son oraciones al ser letras proposicionales, luego $-q, (p \vee -q), (q \wedge p)$ son oraciones al ser compuestas por la negación y conectivo lógico, el resto se determina de igual forma, por lo que toda la expresión es una oración.

P. *Verifique que las oraciones* $-p$ *y* $(p \rightarrow (q \wedge -q))$ *son lógicamente equivalentes.*

Sol. Debemos estudiar todas las evaluaciones posibles y ver que coincidan en valor de verdad. Notemos que $q \wedge -q$ es una contradicción. Si $v(p) = V$, entonces $v(-p) = F$ y $v(p \rightarrow F) = F$. Si $v(p) = F$, entonces $v(-p) = V$ y $v(p \rightarrow F) = V$. Vemos que son lógicamente equivalentes. Es más

$$(-p \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge -q)))$$

es una tautología.

P. *Muestre que las oraciones* $-p$ *y* $(p \rightarrow (q \wedge -q))$ *no son iguales.*

Sol. Notemos que ambas son oraciones, para que sean iguales deben cumplir dos cosas, la cantindad de símbolos y que siguan el mismo orden de símbolos, y es evidente que una empieza por $-$ y la otra por (, por lo que claramente son distintas.

P. *Verifique que*

$$A := \{(-p \vee q), (q \rightarrow (-r \wedge -p)), (p \vee r)\}$$

es un conjunto satisfacible.

Sol. Usaremos el teorema de la no satisfacibilidad. Es decir

$$\{(-p \vee q), (q \rightarrow (-r \wedge -p)), (p \vee r)\}$$

es satisfacible si y sólo si

$$\{(q \rightarrow (-r \wedge -p)), (p \vee r)\} \not\models p \wedge -q$$

Pero si $v(p) = V, v(q) = F$, entonces se satisface el conjunto

$$\{(q \rightarrow (-r \wedge -p)), (p \vee r)\}$$

Por tanto A no puede ser satisfacible.

P. Dada la valuación $v : \{p, q, r\} \to \{V, F\}$ con $v(p) = F, v(q) = v(r) = V$, evalúe v en las oraciones

$$-(-p \to (q \wedge -r)) \text{ y } ((-p \vee -q) \to (p \vee -r))$$

Sol. Notemos que $v(-p) = V$ y $v(q \wedge -r) = F$, luego

$$v(-(-p \to (q \wedge -r))) = V$$

Con respecto al otro, si $v(p \vee -r) = F, v(-p \vee -q) = V$, luego

$$v((-p \vee -q) \to (p \vee -r)) = F$$

P. *En la interrogación del proximo martes se termina la tinta de tu lápiz. La profesora tiene tres lápices en su mesa, de los cuales uno tiene tinta y dos están vacíos. Cada uno de estos lápices tiene un mensaje:*

1. *"Este lápiz está vacío"*
2. *"Este lápiz está vacío"*
3. *"El lápiz que tiene tinta es el lápiz 2"*

Si solamente uno de los mensajes es cierto, y la profesora permite elegir solo uno de esos lápices. ¿Cuál lápiz deberías elegir? Construya una tabla de verdad que le permita resolver este problema.

Sol. Sean las letras proposicionales

$$p_1 = \text{Lapiz uno está vacío}$$
$$p_2 = \text{Lapiz dos está vacío}$$

Luego tenemos la siguiente tabla Si solamente uno es cierto, entonces p_1, p_2, p_3 debe seguir la

p_1	p_2	$-p_2$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	F

cadena V, F, F en cualquier orden, notemos que la única que cumple es la fila 3, es decir el lapiz uno está lleno y lapiz dos está vacío. Por tanto el único lapiz fiable a tomar es el primero. Con respecto al tercer lapiz, lo ignoramos ya que puede estar vacío o lleno.

P. *Dado* $\Sigma = \{(-p \vee q), (q \to -(r \wedge -p)), (p \vee r)\}$, *muestre que* $\Sigma \models r$ *y* $\Sigma \not\models (q \wedge r)$.

Sol. Si $v(q) = F$ entonces $v(p) = F$ y $v(r) = V$, luego se satisface r, si $v(q) = V$ necesariamente $v(r \wedge -p) = F$, si $v(r) = F$....

Si v satisface a Σ y a $(q \wedge r)$, entonces $v(q) = v(r) = V$, pero entonces ... **Preguntar**

P. *Dado* $\Sigma = \{(p \wedge q), (-p \vee -q)\}$, *muestre que* $\Sigma \vDash q$ *y* $\Sigma \vDash -q$

Sol. Notemos que Σ no es satisfacible, luego

$$\Sigma \cup \{q\} \text{ y } \Sigma \cup \{-q\}$$

no son satisfacible. Por tanto, por el teorema de la no satisfacibilidad

$$\Sigma \vDash q \text{ y } \Sigma \vDash -q$$

P. *Muestre que si* $(\varphi \to \psi)$ *es una contradicción, entonces* φ *y* ψ *no son lógicamente equivalentes*

Sol. Si $(\varphi \to \psi)$ es una contradicción, entonces para toda valuación v ocurre que $v(\varphi) = V, v(\psi) = F$, por definición es claro que no son lógicamente equivalentes ya que para la misma valuación, toman valores distintos de verdad.

P. *Para una expresión* ε *definimos* $d(\varepsilon)$ *como la cantidad de paréntesis derechos que aparecen en* ε *y definimos* $c(\varepsilon)$ *como la cantindad de conectivos lógicos que aparecen en* ε*. Muestre que toda oración* ϕ *satisface* $d(\phi) \leq 2c(\phi)$*.*

Sol. Sea $P(\varphi) =$ la cantindad de paréntesis derecho de φ es menor o igual al doble de conectivos de φ. Probemos por inducción sobre oraciones.

1. Si φ es una letra proposicional se tiene que

$$d(\varphi) = 0 \leq 2 = 2c(\varphi)$$

2. Si φ verifica a P, y si $d(-\varphi) = d(\varphi)$ ya que solo estamos añadiendo el símbolo $-$, y $c(-\varphi) = 1 + c(\varphi)$ puesto que estamos añadiendo un símbolo más. Entonces

$$d(-\varphi) = d(\varphi) \leq 2c(\varphi) \leq 2c(\varphi) + 2 = 2c(-\varphi)$$

Luego $-\varphi$ verific a P.

3. Sean α, β oraciones que verifican a P, sea $\star = \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$, entonces

$$d((\alpha \star \beta)) = d(\alpha) + d(\beta) + 1$$
$$c((\alpha \star \beta)) = c(\alpha) + c(\beta) + 3$$

Luego

$$d((\alpha \star \beta)) = d(\alpha) + d(\beta) + 1 \leq 2c(\alpha) + 2c(\beta) + 6 = 2c((\alpha \star \beta))$$

Por tanto $(\alpha \star \beta)$ verifica a P

Luego toda oración de $\mathcal{L}$ verifica a P.

Debemos probar las tres condiciones de inducción y luego aplicar la inducción misma.

P. *Muestre que el conjunto* $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ *es satisfacible y* α *es una tautología, entonces* $\overline{\Sigma} = \{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$ *no es satisfacible.*

Sol. Usaremos el teorema de la no satisfacibilidad, que recordemos dice:

$$\Sigma \vDash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{-\varphi\}$$

es no satisfacible. Luego $\overline{\Sigma}$ es no satisfacible si y sólo si

$$\{-\beta, -\gamma\} \vDash \alpha$$

Pero si α es una tautología, entonces siempre se cumple la consecuencia lógica. Luego $\overline{\Sigma}$ es no satisfacible.

P. *Demuestre que si* $\Delta \vdash (\varphi \to \psi)$*, entonces* $\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Sol. Notemos que existe una demostración de Δ para $(\varphi \to \psi)$, es decir, existe la cadena finita

$$\langle \tau_1, \ldots, \tau_m = \varphi \to \psi \rangle$$

Notemos que $\Delta \cup \{\varphi\}$ genera la misma cada y además φ está incluida la demostración, es decir, exite la cadena incompleta

$$\langle \tau_1', \ldots, \tau_l' = \varphi, \tau_{l+1}' = \varphi \to \psi \rangle$$

ppor modus ponesn se deduce que $\tau_{l+2}' = \psi$. Por tanto existe una cadena finita de $\Delta \cup \{\varphi\}$ que demuestra a ψ, es decir

$$\Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

P. *Muestre que* $\emptyset \vDash \psi$ *si y sólo si* ψ *es tautología.*

Sol. Supongamos que ψ es una tautología, luego toda valuación tiene que $v(\psi)$, es decir

$$\emptyset \vDash \psi$$

Por otro lado, si $\emptyset \vDash \psi$ entonces toda valuación hace verdadera a ψ, luego es una tautología.

P. *Muestre que si* φ *es un teorema de la lógica, entonces es una tautología.*

Sol. Si φ es una teorema de la lógica, entonces

$$\emptyset \vdash \varphi$$

Luego por el teorema de la corrección se tiene que $\emptyset \vDash \varphi$, es decir, φ es tautología. **P.** *Muestre que* $\{\alpha \wedge \beta\} \vdash (\beta \wedge \alpha)$.

Sol. Debemos cambiar el orden. Lo haremos por axiomas.

$\varphi_1 = \alpha \wedge \beta$	Premisa
$\varphi_2 = (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$	A6) $a = \alpha, b = \beta$
$\varphi_3 = (\alpha \wedge \beta) \to \beta$	A7) $a = \alpha, b = \beta$
$\varphi_4 = (((\alpha \wedge \beta) \to \beta) \to (((\alpha \wedge \beta) \to \alpha) \to ((\alpha \wedge \beta) \to (\beta \wedge \alpha))))$	A8) $a = \beta, b = \alpha, c = (\alpha \wedge \beta)$
$\varphi_5 = \beta \wedge \alpha$	MP de forma recursiva

Luego $\{\alpha \wedge \beta\} \vdash (\beta \wedge \alpha)$

P. *¿Es el conjunto vacío satisfacible?*

Sol. Si, notemos que si no fuera satisfacible, entonces existe una valuación que la hace falsa, pero esto nunca ocurre. Por tanto debe ser satisfacible.

P. *Demuestre que un conjunto no vacío Δ de oraciones de $\mathcal{L}$ (de orden 0) es consistente si y sólo si es satisfacible.*

Sol. Supongamos que Δ es satisfacible, supongamos que es inconsistente, luego existe β talque

$$\Delta \vdash \beta \text{ y } \Delta \vdash -\beta$$

Por el teorema de completitud

$$\Delta \models \beta \text{ y } \Delta \models -\beta$$

Pero entonces se llega a que $v(\beta) = v(-\beta)$, siendo una clara contradicción. Por lo tanto Δ es consistente.

Si Δ es consistente, entonces es satisfacible, por contraposición supongamos que Δ no es satisfacible, entonces podemos concluir que toda oración φ es consecuencia lógica de Δ, es decir

$$\Delta \models \varphi$$

Luego por el teorema de completitud

$$\Delta \vdash \varphi$$

Luego basta ver que

$$\Delta \vdash \varphi \text{ y } \Delta \vdash -\varphi$$

Es decir, Δ es inconsistente. Por lo tanto Δ es consistente si y sólo si es satisfacible.

P. *Muestre que si $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ es un conjunto consistente de oraciones, entonces existe una valuación talque*

$$v(\alpha_1) = \cdots = v(\alpha_n) = V$$

Sol. Si Δ es consistente, entonces es satisfacible y por lo tanto, existe una valuación talque

$$v(\alpha_1) = \cdots = v(\alpha_n) = V$$

P. *Muestre que*

$$(((p \wedge q) \vee (p \wedge -q)) \vee ((-p \wedge q) \vee (-p \wedge -q)))$$

es un teorema de la lógica.

Sol. Por definición debemos probar que

$$\emptyset \vdash \varphi$$

donde φ es la oración del enunciado. Recordemos que esto se cumple si y sólo si $\emptyset \vDash \varphi$ si y sólo si φ es tautología, por lo tanto solo hay que probar que es tautología.

Si p, q toman valor verdadero, entonces

$$((p \wedge q) \vee (p \wedge -q))$$

toma valor verdad, y es suficiente para que la oración sea verdad.

Si p es verdadero y q es falso, entonces

$$((p \wedge q) \vee (p \wedge -q))$$

es verdadero, y es suficiente para que la oración sea verdad.

Si p es falso y q es verdadero, entonces

$$((-p \wedge q) \vee (-p \wedge -q))$$

es verdadero, y es suficiente para que la oración sea verdad.

Si p, q son falsos, entonces

$$((-p \wedge q) \vee (-p \wedge -q)$$

es verdadero, y es suficiente para que la oración sea verdad.

Por lo tanto es tautología y luego φ es un teorema de la lógica.

P. *Sea Δ conjunto consistente maximal. Muestre que $(\alpha \to \beta) \in \Delta$ si y sólo si $\alpha \in \Delta$ implica $\beta \in \Delta$.*

Sol. Supongamos que $(\alpha \to \beta) \in \Delta$, entonces al ser maximal

$$\Delta \vdash (\alpha \to \beta)$$

si $\alpha \in \Delta$ entonces $\Delta \vdash \alpha$, lo importante es que por MP se puede deducir β y luego $\Delta \vdash \beta$, o mejor dicho $\beta \in \Delta$.

Supongamos que si $\alpha \in \Delta$, entonces $\beta \in \Delta$. Supongamos que $(\alpha \to \beta) \notin \Delta$, luego

$$\Delta \nvdash (\alpha \to \beta)$$

Entonces

$$\Delta \vdash -(\alpha \to \beta)$$

Luego por el teorema de la corrección

$$\Delta \vDash -(\alpha \to \beta)$$

Notemos que

$$-(\alpha \to \beta), \quad (\alpha \wedge -\beta)$$

Son lógicamente equivalente. Luego

$$\Delta \vDash (\alpha \wedge -\beta)$$

Luego por el teorema de completitud

$$\Delta \vdash (\alpha \wedge -\beta)$$

Entonces

$$\Delta \vdash \alpha \text{ y} \Delta \vdash -\beta$$

Por hipótesis

$$\Delta \vdash \beta \ \ \Delta \vdash -\beta$$

es decir Δ es inconsistente, siendo una contradicción. Por lo tanto $(\alpha \to \beta) \in \Delta$.

P. *Sea Σ un conjunto consistente de oraciones talque para cualquier conjunto Π de oraciones se tiene o bien $\Sigma \cup \Pi$ es inconsistente, o bien $\{\alpha : \Sigma \vdash \alpha\} \supseteq \{\alpha : \Pi \vdash \alpha\}$. Muestre que Σ es un conjunto consistente maximal.*

P. *Sean p, q, r letras proposicionales. Encuentre una oración α que cumpla las siguientes tres condiciones (al mismo tiempo):*

- $\{\alpha\} \vdash ((p \to q) \to r)$
- $\{\alpha\} \vdash ((p \leftrightarrow q) \vee -r)$
- $\{\alpha\} \vdash (p \vee -q)$

Sol. Usaremos el teorema de la corrección, sea α talque

- $\{\alpha\} \vDash ((p \to q) \to r) =: \varphi_1$
- $\{\alpha\} \vDash ((p \leftrightarrow q) \vee -r) =: \varphi_2$
- $\{\alpha\} \vDash (p \vee -q) =: \varphi_3$

Consideremos la siguiente tabla

p	q	r	φ_1	φ_2	φ_3
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V

Notemos que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ se cumplen las tres en la primer, cuarta y séptima fila. Ahora debemos construir α en base a la table. Sea α la oración compuesta por p, q, r, entonces necesariamente

p	q	r	φ_1	φ_2	φ_3	α
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

Consideremos

$$\alpha = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge -q \wedge -r) \vee (-p \wedge -q \wedge r)$$

Claramente satisface las condiciones, es decir, cuando α es verdadero, entonces $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ es verdadero. Luego por el teorema de la completitud, se tiene lo que se pedía. Encontrado la oración.

P. *Sea $\mathcal{P} = \{c, g, f, r\}$ un lenguaje de primer orden, donde $c \in \mathcal{C}, f \in \mathcal{F}_1, g \in \mathcal{F}_2, r \in \mathcal{R}_2$. Considere las siguientes expresiones:*

(a) $rgcvc$

(b) gcv

(c) $(\exists v - rfvc \wedge rgcvc)$

(d) $\exists(-rfvc \wedge rgcvc)$

¿Cuáles son oraciones, términos, $\mathcal{P}$-fórmulas, $\mathcal{P}$-fórmulas atómicas?

Sol.

(a) Notemos que v es una variable libre, por lo que no es oración, notemos que gcv es un término como g es una función binaria, y entonces $rgcvc$ es una fórmula atómica, como se tiene una relación r y dos términos gvc y c. Luego no es término y si es fórmula en general.

(b) Notemos que v es libre, luego no es oración, si g es función binaria con c constante y v variable, entonces gcv es un término, como c, v son términos. Si no tiene relación, entonces no puede ser fórmula atómica y menos fórmula.

(c) Notemos que v no es libre ya que está acotado por $\exists$, luego no tiene variables libres, es decir, puede ser oración, debemos ver que $-rfvc \wedge rgcvc$ es fórmula, y efectívamente es fórmula, luego es oración. No es término, ni fórmulta atómica.

(d) ¿?

P. *Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura donde $a_1, \ldots, a_n \in M$ son las interpretaciones de los símbolos $c_1, \ldots, c_n$ del lenguaje $\mathcal{L}$-fórmula con $x_1, \ldots, x_n$ sus variables libres*

P. (9)

Sol. Recordemos que

$$\exists x \forall y - ryx$$

es lógicamente equivalente con

$$-\forall x \exists y ryx$$

Luego debemos probar que

$$\mathcal{M} \not\models \forall x \exists y ryx$$

y efectívamente, ya que tomando $x = d$, no existe ningún y talque ryd. Luego

$$\mathcal{M} \models \varphi$$

Con respecto a ψ debemos ir viendo, notemos que $c = x = y$ satisface a la $\mathcal{L}$-oración. Luego $\mathcal{M} \models \psi$.

Supongamos que

$$(\mathcal{M}, i) \models \forall y - ryx$$

entonces

$$(\mathcal{M}, i) \models -\exists y ryx \Leftrightarrow (\mathcal{M}, i) \not\models \exists y ryx$$

si $y = a$, entonces $x = c, d$, si $y = b$,entonces $x = b, d$, si $y = c$, entonces $x = a, b, d$ y si $y = d$, entonces $x = a, b, c, d$. Por lo que si

$$x \overset{i}{\mapsto} d$$

se tiene que

$$(\mathcal{M}, i) \not\models \exists yryx$$

Es decir

$$(\mathcal{M}, i) \models \forall y - ryx$$

Ahora, si $i\{x\} \to M$ talque $i(x) = d$, es evidente que se satisface.

P. (10)

Sol. Debemos encontrar una $\mathcal{L}$-estructura, talque

$$\mathcal{M} \models \forall x \exists x Pxy$$

pero

$$\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Pxy$$

Para ello debemos encontrar un conjunto conveniente, notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Pxy &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models -\exists x \forall y Pxy \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \forall x \exists y - Pxy \end{aligned}$$

Es decir, para todo $a \in M$, existe un $b \in M$ talque $(a, b) \notin P$, digamos que $P^{\mathcal{M}} = \{(a, a), (b, b)\} \subseteq M^2 = \{a, b\}^2$. Notemos que

$$\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Pxy$$

pero

$$\mathcal{M} \models \forall y \exists x Pxy$$

ya que para todo $y \in \{a, b\}$, existe $x \in \{a, b\}$ de forna que se relacionan. De forma que

$$\forall x \exists x Pxy \not\models Pxy$$

P. (11)

Sol. Probemos que

$$\forall x \forall y ((x = y) \to ((rxy \wedge rxy) \to x = y))$$

es universalmente válidad, notemos que dado una oración de orden 0

$$\alpha(p, q) := (p \to (q \to p))$$

al reemplazar $p = x = y$ y $q = rxy \wedge rxy$, obtenemos lo de adentro, si α es tautología, entonces $\alpha(x = y, (rxy \wedge rxy))$ es un $\mathcal{L}$-tautología y luego es U.V, si agregamos los para todo, se ve que también es U.V. Por otor l

P. (12)

Sol. Supongamos que $\mathcal{M} \vDash \forall x Bx$, entonces

$$\mathcal{M} \vDash Bx \text{ para todo } x \in M$$

luego basta considerar x fijo, de forma que

$$\mathcal{M} \vDash By \text{ para algún } y \in M \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \exists By$$

Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructural, luego si $M \vDash \forall x Bx$, entonces $\mathcal{M} \vDash \exists y By$ como hemos probado, pero esto es equivalente a decir que

$$\mathcal{M} \vDash \forall x Bx \to \exists y By$$

Si $\mathcal{M}$ no satisface a $\forall x Bx$, peude ser que satisfaga a $\exists y By$ o no, en cualquier caso se sigue satisfaciendo $\forall x Bx \to \exists y By$, por la interpretación de lógica de orden 0 de $\to$. Por lo que es universalmente válido.

P. (13)

Sol. Notemos que Σ está bien definida ya que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ son $\mathcal{L}$-oraciones, ahora, para probar que es satisfacible, hay que encontrar un modelo $\mathcal{M}$ que lo satisfaga.

Podemos tomar de forma conveniente, digamos que

$$\mathcal{M} = (\mathbb{N}_{\geq 0}, c^{\mathcal{M}}, r^{\mathcal{M}}, f^{\mathbb{M}}, +)$$

donde $c^{\mathbb{M}} = 0$, $r^{\mathcal{M}}(x, y)$ la relación x, y son naturales o 0, donde $r = \mathbb{N}^2_{\geq 0}$ y $f^{\mathcal{M}}$ la función identidad, luego es evidente que

$$\mathcal{M} \vDash \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$

P.

Sol. Intentemos intuir la $\mathcal{L}$-fórmula, el conjunto $X = \{0\}$ se puede definir mediante

$$\varphi(a) : \forall b(a + b = b)$$

Notemos que si $a \neq 0$, entonces $a + b > b$ pensando de forma habitual, por lo que $a = 0$ es el único que se cumple, es decir

$$\{a \in \mathbb{N}_{\geq 0} : \mathcal{M} \vDash \varphi[a]\} = \{0\}$$

En general, $\{n\}$ es definible por

$$\varphi(a) : \forall b(a + b = n + b)$$

Ahora para definir $\{n, m\}$, basta pensar en el conector $\vee$, luego

$$\varphi(a) : \forall b((a + b = n + b) \vee (a + b = m + b))$$

si $a = n$, se cumple $a + b = n + b$ y no $a + b = m + b$, lo mismo con $a = m$, entonces, si

$$X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{N}_0$$

es un subconjunto definible por la $\mathcal{L}$-fórmula

$$\varphi(a) : \forall b((a + b = x_1 + b) \vee \cdots \vee (a + b = x_n + +b))$$

define a X. Para la extensión al infinito podemos pensar en

$$\varphi(a) : \forall b \bigvee_{x \in X} (a + b = x + b)$$

P. (15) Antes de resolver el problema, recordemos el teorema de fermat nos dice que

$$a^{p-1}$$

P. (18) *Muestre que no existen A, B tales que $A \in B$ y $B \in A$*

Sean A, B conjuntos tales que $A \in B, B \in A$, luego tomando la unión $A \cup B$, se tiene que $A \cup B \in A \cup B$, siendo algo imposible ya que los conjuntos en ZF no son autoreferentes, luego no existen tales A, B.

P. (19) *Muestre utilizando ZF que dados conjuntos X, Y, Z existe el conjunt $\{X, Y, Z\}$.*

Sol. Si X, Y son conjuntos, entonces por el axioma 4 podemos generar el conjunto $\{X, Y\}$, por otro lado, podemos tomar dos veces Z y aplicar el axioma 4, de forma qe $\{Z\}$ existe, luego aplicando nuevamente axioma 4 se llega a que $\{\{X, Y\}, \{Z\}\}$ existe y está bien definido, por último, por el axioma de unión, existe

$$\cup\{\{X, Y\}, \{Z\}\} = \{X, Y\} \cup \{Z\}$$

que en particular es $\{X, Y, Z\}$ por el primer axioma. (Doble inclusión), entonces el conjunto $\{X, Y, Z\}$ existe.

P. (20) *Demuestre que para todo conjunto A se tiene que $A \neq \mathcal{P}A$*

Sol. Supongamos que $A = \mathcal{P}A$, por el axioma del conjunto potencia, $A \in \mathcal{P}A = A$, luego $A \in A$, siendo imposible. Luego $A \neq \mathcal{P}A$.

P. (21)*Sea A un conjunto. Determine si existe un conjunto B talque*

$$\forall x(x \in B \leftrightarrow \exists y \exists z((y \in A \wedge z \subseteq y) \wedge x \in z))$$

P. (22) *Sean A, B conjuntos. Muestre que $(A \times B)^{-1} = B \times A$.*

Sol.

P. (23) *Sea $F : X \to Y$ una función. Muestre que existe una función biyectiva entre X y F.*

Sol. Si F es una relación donde la primera cordenada tiene una única imagen, podemos definir

$$\begin{aligned} G : X &\to F \\ x &\mapsto \langle x, F(x)\rangle \end{aligned}$$

bien definido ya que por convenio x es mandado a $F(x)$ único. Probemos que es función, inyectiva y sobreyectiva. Si para x dado se tiene

$$\langle x, F(x)\rangle \wedge \langle x, y\rangle$$

como son elementos de F, necesariamente $y = F(x)$, luego G es función. Sean x_1, x_2 tales que

$$\langle x_1, F(x_1)\rangle = \langle x_2, F(x_2)\rangle$$

Luego por propiedades de pares ordenados, $x_1 = x_2$. Ahora la sobreyectividad es evidente, F se define en base a x, luego para $\langle y, F(y)\rangle$, escogemos $y \in Y$ y estamos listos.

Por lo tanto G es biyectiva.

P. (26)

Sol.

P. *Calcular* $\bigcap 4$ *y* $\bigcup 4$.

Sol. Por definición

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

Entonces

$$\bigcap 4 = 0 \cap 1 \cap 2 \cap 3$$

Si $0 = \emptyset$, entonces es claro que

$$\bigcap 4 = \emptyset = 0$$

Por otro lado $a \cup a^+ = a \cup a \cup \{a\} = a \cup \{a\} = a^+$, entonces

$$\bigcup 4 = 0 \cup 1 \cup 2 \cup 3 = 1 \cup 2 \cup 3 = 2 \cup 3 = 3$$

P. *Demuestr que si* $A \subseteq \omega$ *con* $\bigcup A = A$*, entonces* $A = \omega$.

Sol. Debemos probar que A es un conjunto inductivo y que $\emptyset \in A$. Digamos que

$$A = \{n_1, n_2, \dots\} \subseteq \omega$$

Por definición sabemos que $n_i = \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$, luego

$$A = \bigcup A = \{0, 1, \dots, n_1 - 1\} \cup \dots$$

Entonces es claro que $0 = \emptyset \in A$. Probemos que satisface la sucesión de los sucesores. Sea $k \in A$ fijo, como

$$A = n_1 \cup n_2 \cup \dots$$

Entonces $k \in n_j = \{0, 1, \dots, n_j - 1\}$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Entonces o bien $k^+ \in n_j$ o $k^+ = n_j$, en cualquier caso $k^+ \in A$, Por lo tanto, A es inductivo y luego

$$\omega \subseteq A$$

Probando asi que $A = \omega$.

P. *Encuentre conjuntso $A \neq B$ talque $\bigcup A = \bigcup B$.*

Sol. Digamos que $A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ y que $B = \{\{a\}, \{b\}\}$, entonces

$$\bigcup A = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$$
$$\bigcup B = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$$

P. *Demuestre que no existe un conjunto A y una función $f : \omega \to A$ tal que para todo $n \in \omega$, se tiene $f(n^+) \in f(n)$.*

Sol.

P. *Dada una relación antisimétrica $R \neq \emptyset$, muestre que $R \cap R^{-1}$ es una función.*

Sol. Probemos que

$$\forall x(\forall y \forall z(\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1} \wedge \langle x, z\rangle \in R \cap R^{-1}) \to y = z)$$

Sean $\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$, entonces $\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle \in R$, luego por antisimetría, $x = y$, entonces, si tomamos $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in R \cap R^{-1}$, entonces $y = x = z$, por lo tanto $R \cap R^1$ es función.

P. *Sea A un conjunto y sea $F = \{\langle x, \langle x, x\rangle\rangle : x \in A\}$. Muestre que F es función biyectiva entre A e $I_A = \{\langle y, y\rangle : y \in A\}$.*

Sol. Probemos que es una función, sean $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in F$, entonces por definición de F

$$y = \langle x, x\rangle = z$$

Luego F es una función. Es más, se puede interpretar como

$$F : A \to I_A$$

bien definido, ya que $F(x) = \langle x, x\rangle$. Probemos que es biyección, sean $x, y \in A$ tales que $F(x) = F(y)$, entonces por propiedades de pares ordenados $x = y$. Siendo inyectiva. Para la sobreyectividad basta ver que para $\langle y, y\rangle \in I_A$, basta escoger $y \in A$, luego

$$F(y) = \langle y, y\rangle$$

Siendo biyectiva.

P. *Sea....*

P. *Muestre que una relación binaria R es simétrica si y sólo si $R^{-1} \subseteq R$.*

Sol. Debemos probar que

$$\forall x \forall y(\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R)$$

si y sólo si $R^{-1} \subseteq R$. Supongamos que R es simétrica, luego para $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$, entonces $\langle y, x\rangle \in R$, como R es simétrica, $\langle x, y\rangle$. Entonces $R^{-1} \subseteq R$.

Por otro lado, supongamos que $R^{-1} \subseteq R$. Sea $\langle x, y\rangle \in R$, entonces $\langle y, x\rangle \in R^{-1} \subseteq R$, luego $\langle y, x\rangle \in R$ y entonces R es simétrica.

P. *Sean $F : a \to b$ y $G : c \to d$ funciones Se define el conjunto:*

$$F \star G := \{\langle\langle x, y\rangle, \langle F(x), F(y)\rangle\rangle : \langle x, y\rangle \in a \times c\}$$

Muestre que $F \star G$ es una función de $a \times c$ en $b \times d$, y que si F, G son sobreyectiva entonces $F \star G$ es sobreyectiva.

Sol. Por construcción la primera coordenada de la relación $F \star G$ es elemento de $a \times c$, mientras que la segunda coordenada es elemento de $b \times d$, ya que $F(x) \in b, F(y) \in d$. Probemos que es función, sean $\langle\langle x, y\rangle, z_1\rangle, \langle\langle x, y\rangle, z_2\rangle \in F \star G$, entonces

$$z_1 = \langle F(x), F(y)\rangle = z_2$$

Por lo tango $F \star G$ es función. Supongamos que F, G son sobreyectivas, sea $\langle z_1, z_2\rangle \in b \times d$, entonces $z_1 \in b, z_2 \in d$, como F, G son sobreyectivas, entonces existen $x_1 \in a, x_2 \in c$ tales que $F(x_1) = z_1, F(x_2) = z_2$, luego

$$F \star G(\langle x_1, x_2\rangle) = \langle F(x_1), F(x_2)\rangle = \langle z_1, z_2\rangle$$

Por lo tanto, $F \star G$ es sobreyectiva.

P. *Sea $F : a \to b$ función. Probar que existe una función biyectiva entre F y a. Sea R una relación sobre A. Mostrar que R es relación de orden si y sólo si $R \cap R^{-1} = I_A$ y $R \circ R = R$.*

P. *Muestre que dados $a, c \in \omega$ talque $a \in c$, entonces existe $b \in c$ talque $a + b = c$.*

Sol. Notemos que para constuir a y c basta usar un proceso finito, con esto en cuenta, tenemos que si $c \in \omega$ y $c \neq 0$, entonces existe un $k \in \omega$ talque $k^+ = c$, si $k = a$ estamos listo, si no, $k \in a$ y basta tomar $k' \in \omega$ talque $k'^+ = k$, si $k' = a$ estamos listo, y así sucesivamente, de forma que $a^+ = k_m$, donde $k_m^+ = k_{m-1}$, luego

$$a^{+\cdots+} = c$$

Por definción de suma

$$a^{+\cdots+} = (a + 1)^{+\cdots+} = a + m = c$$

Con $m \in \omega$. Probando que existe tal natural.

P. *Sea R buen orden sobre A, y sea $B \subseteq A$ cumpliendo $\forall x(\forall y(Ryx \to y \in B) \to x \in B)$. Demuestre que $A = B$.*

Sol. Sea $a \in A$ y sea $b \in B$, como R es de buen orden, entonces o bien aRb o bien bRa o bien $a = b$. Supongamos que bRa, si $b \in B$, entonces $a \in B$, luego $A = B$.

P. *Demuestre que si $\in$ es relación conexa en X, entonces $\in$ es relación conexa en X^+.*

Sol. Recordemos que $X^+ = X \cup \{X\}$, veamos que $\in$ es conexa. Sean $x, y \in X^+$, si $x = y$ estamos listo, supongamos que $x \neq y$, si $x, y \in X^+$, entonces o $x, y \in X$ o $x, y \in \{X\}$, si ambos están en X, se concluye que $x \in y$ o $y \in x$, si ambos están en $\{X\}$, entonces $x = y = X$, siendo imposible, si $x \in X$ y $y \in \{X\}$, entonces $y = X$ y luego $x \in y$. Por tanto $\in$ es conexa en X^+.

P. *Demuestre que si $\in$ es relación antisimétrica en X, entonces $\in$ es relación antisimétrica en X^+.*

Sol. Sean $x, y \in X^+$ tales que $x \in y$ y $y \in x$. Al igual que problema anterior, $x, y \in X$ o $x, y \in \{X\}$, si ambos están en X, entonces $x = y$ como X es antisimétrica, si ambos están en $\{X\}$, entonces $x = y = X$ por definición y si $x \in X$ y $y = \{X\}$, entonces $y = X$, pero luego $X \in x \in X$, entonces $X \in X$ siendo imposible. Por lo tanto X^+ es antisimétrica.

P. *Muestre que si consideramos el orden $0, 1, 2 \ldots, -1, -2, -3, \ldots,$ entonces $\mathbb{Z}$ es bien ordenado.*

Sol. Recordemos que un conjunto $\mathbb{Z}$ es bien ordenado bajo una relación si la relación es de orden total estricto, es decir, la relación es antisimétrica, transitiva, conexa y antireflexiva. Además, para todo $A \subseteq \mathbb{Z}$, A tiene un elemento minimal.

Supongamos $(\mathbb{Z}, \preceq)$ con $\preceq$ la relación que ordena como en el enunciado.

- **Antisimétrica.** Supongamos que $x \preceq y$ y $y \preceq x$, si x, y son positivos es evidente que son iguales, si ambos son negativos, de igual forma, si uno es positivo y el otro negativo, se llega a algo imposible. Por tanto $x = y$.
- **Transitiva.** Si $x \preceq y$ e $y \preceq z$, entonces z está más a la derecha que x, entonces $x \preceq z$.
- **Conexa.** Sea $x, y \in \mathbb{Z}$, si $x = y$ estamos listo, si $x \neq y$, entonces ambos deben estar en parte distintas, eso implica orden distinto y entonces $x \preceq y$ o $y \preceq x$.
- **Antireflexiva.** Notemos que si $x \preceq x$, entonces x está a la derecha de x, pero cada número aparece una sola vez, siendo imposible, por tanto $\preceq$ no puede ser reflexiva.

Por tanto $\preceq$ es de orden total estricto.

Sea $A \subseteq \mathbb{Z}$, entonces necesariamente $A = \{n_1, n_2, \ldots\}$, donde se sigue el orden $n_1, n_2, \ldots,$ notemos que n_1 es el menor elemento, ya que $n_1 \preceq n$ para todo $n \in A$.

Probando que $\mathbb{Z}$ está bien ordenado bajo la relación $\preceq$.

P. *Sea X un conjunto transitivos de ordinales tal que para todos $x \neq y$, se tiene que $x \in y$ o $y \in x$. Demeustre que X es ordinal.*

Sol. Recrodemos que un conjunto es ordinal si está bien ordenado para una relación y es transitivo. Ya sabemos que es transtivo, falta probar que es de buen orden. Claramente estamos trabajando con pertenencia, entonces

- **Antisimétrico.** Sean $x, y \in X$ tales que $x \in y$ y $y \in x$, como x, y son ordinales, entonces son transitivo, es decir, $x \subseteq y$ y $y \subseteq x$, por lo que $x = y$.
- **Transitivo.** Sean $x \in y$ e $y \in z$, como z es ordinal, se tiene que $y \subseteq z$, luego $x \in z$.
- **Conexa.** Si $x = y$ estamos listo, si $x \neq y$, entonces $x \in y$ $y \in x$. Siendo conexa.
- **Antirelfexiva.** Si $x \in x$ se llega a una paradoja, por lo que no puede ocurrir.

Luego $\in$ es de orden estricto. Sea $A \subseteq X$, supongamos que A no tiene menor elemento, pero entonces si $x \in A$ entonces $y \subseteq x$ no tendría menor elemento, siendo imposible ya que x es ordinal, de forma que A si tiene menor elemento.

Por lo tanto X es ordinal.

P. *Sean A, B conjuntos y $<_A, <_B$ órdenes en A, B respectívamente. Demuestre si $f : A \to B$ una biyección que preserva el orden, entonces A es bien ordenado si y sólo si B es bien ordenado.*

Sol. Probemos una dirección, Supongamos que A bien ordenado, debemos probar que B lo es. Si $x <_A y$, entonces $f(x) <_B f(y)$, entonces

- **Antisimétrica.** Si $a, b \in B$ tales que $a <_B b$ y $b <_B a$, entocnes existen x, y tales que $f(x) = a, f(y) = b$, luego $x <_A y$ y $y <_A x$, y entonces $x = y$ y luego $a = b$.
- **Transitiva.** Si $a, b, c \in B$ tales que $a <_B b, b <_B c$, entonces existen $x, y, z \in A$ tales que $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$, luego $x <_A y$ e $y <_A z$, luego $x <_A z$ y entonces $a <_B c$.
- **Conexa.** Si $a = b$ estamos listo, si $a \neq b$, entonces $f(x) \neq f(y)$, luego $x \neq y$, luego $x <_A y$ o $y <_A x$, y entonces $a <_B b$ o $b <_B a$,
- **Antireflexiva.** Supongamos que $a <_B a$, entonces $x <_A x$, siendo imposible.

Sea $B' \subseteq B$, podemos tomar $f^{-1}(B') := A' \subseteq A$ entonces A' tiene menor elemento, por tanto B' tiene menor elemento al preservar el orden.

Por tanto $<_B$ ordena bien a B.

P. *Sean A, B conjuntos y $<_A, <_B$ órdenes en A y B respectívamente. Demuestre que si A, B son bien ordenados, entonces existe una única función biyectiva $f : A \to B$ que preserva el orden.*

Sol.

P.*Demuestre que si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.*

Sol. Supongamos que $|A|, |B|$ existen. Sea la función inclusión dada por:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Claramente bien definido ya que $A \subseteq B$. f es inyectivo, entonces $|A| \leq |B|$.

P. *Muestre que para todo $n \in \omega$ se tiene que $n = 0$ o bien existe $k \in \omega$ talque $|k^+| = |n|$.*

Sol. Si $n = 0$ estamos listo, supongamos que $n \neq 0$, entonces $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, notemos que $n - 1 \in \omega$ y $|n - 1^+| = |n|$, para ver esto, basta tomar la función

$$\begin{aligned} n - 1^+ &\to n \\ 0 &\mapsto 0 \\ 1 &\mapsto 1 \\ &\vdots \\ n &\mapsto n \end{aligned}$$

De forma que $n - 1^+$ y n son equipotentes, luego si $|n| = n$ y $|n - 1|^+ = n$, claramente $|n - 1^+| = |n|$.

P. *Demuestre que si X e Y son conjuntos finitos, entonces $X \times Y$ es un conjunto finito.*

Sol. Recordemos que un conjunto es finito si $|X| = n$ para algún $n \in \omega$. Y

$$X \times Y = \{\langle x, y \rangle : x \in X \land y \in Y\}$$

Supongamos que $|X| = n, |Y| = m$, probemos que $|X \times Y| = n \cdot m$, sea la función

$$\begin{aligned} f : X \times Y &\to mn \\ \langle x, y \rangle &\mapsto \ \text{(si } x \neq x_0) \\ \langle x_0, y \rangle &\mapsto y \end{aligned}$$

Es una función biyectiva, ya que si $xy = x'y'$-....

P. *Si X_1, X_2 son equipontentes, e y_1, Y_2 son equipotentes con $X_1 \cap Y_1 = X_2 \cap Y_2 = \emptyset$, entonces $X_1 \cup Y_1$ es equipontente con $X_2 \cup Y_2$.*

Sol. Tenemos que $X_1 \xrightarrow{f_1 : \sim} X_2$ y $Y_1 \xrightarrow{f_2 : \sim} Y_2$, sea

$$\begin{aligned} f : X_1 \cup Y_1 &\to X_2 \cup Y_2 \\ x_1 &\mapsto f_1(x_1) \\ y_1 &\mapsto f_2(y_1) \end{aligned}$$

Probemos que f es biyectiva. Sean $z, z' \in X_1 \cup Y_1$ tales que $f(z) = f(z')$, si $X_1 \cap Y_1 = \emptyset$, entonces $z \in X_1$ o $z \in Y_1$, lo mismo con z'. Si ambos está en X_1 entonces por inyectividad de f_1, $z = z'$, lo mismo si ambos está en Y_1. Si $z \in X_1$ y $z' \in Y_1$ tales que $f_1(z) = f_2(z')$, pero entonces $z \in Y_1$ ya que $f_1(z) \in Y_2$, siendo imposible. Por tanto tal caso no se puede dar. De forma que f es inyectiva.

Sea $z \in X_2 \cup Y_2$, entonces o $z \in X_2$ o $z \in Y_2$. Para cualquier caso existe un $x \in X_1 \cup Y_1$ talque $f(x) = z$. Por lo tanto $X_1 \cup Y_1$ es equipotente con $X_2 \cup Y_2$.