FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2335

Intro. a la Geometría Algebraica

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. Definiciones y Conceptos

1.1. Varieades Afines

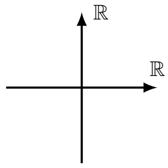
La geometría algebraica es el área de las matemáticas que une el álgebra abstraca con la geometría analítica. De antemano sabemos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo por lo que podemos construir el hiperespacio $\mathbb{R}^n$ en base a la regla de cuerpo, con esto podemos generalizar el concepto a cualquier cuerpo y generar el espacio afín de este.

Antes que nada recordemos que un anillo en una tupla $(R, +, \cdot)$ donde $(R, +)$ es un grupo abeliano, y el operador $\cdot$ satisface la asociatividad y la distributividad con el operador $+$. Si además $\cdot$ tiene inverso y conmuta decimos que es un cuerpo. En estos apuntes se asumirá que el cuerpo tiene neutro multiplicativo.

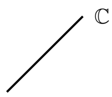
Nota 1.1. Se asumirá $\mathbb{K}$ como un cuerpo arbitrario . $\Supset$

Definición 1.1. (Espacio afín) *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. El espacio afín de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ es $\mathbb{K}^n$ y lo denotamos por $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ o $\mathbb{A}^n$. Entonces,*
(a) $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ es la recta afín.
(b) $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ es el plano afín.
Y asi sucecivamente. Los elementos de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ se llaman puntos.

Ejemplo 1.1. El espacio afín $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ es $\mathbb{R}^2$ y en dibujo tendriamos,



Y el espacio afín $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ es $\mathbb{C}$ y en dibujo tendriamos,



Aquí solamente tenemos una recta ya que estamos trabajando en una dimensión de $\mathbb{C}$. $\Supset$

1.2. Lugar de cero de Polinomios

Los espacio afines se pueden representar como raices de polinomios, por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, el plano se representa por las soluciones de $ax + by + cz = d$. Por lo que vamos a querer poder estudiar subespacios afines a partir de las raices de polinomios. Recordemos que dado $\mathbb{K}$ cuerpo, podemos definir el anillo de polimomios $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

Definición 1.2. (Lugar de ceros) *Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, un punto $p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es un cero de f si $f(p) = 0$. El lugar de ceros de f se define por,*

$$\mathbb{V}(f) := \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} : f(p) = 0\}$$

El lugar de ceros de un subconjunto $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ se define por,

$$\mathbb{V}(S) := \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} : f(p) = 0,\ \forall f \in S\}$$

Ejemplo 1.2.

- Sea la circuferencia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ de radio 2 y de centro $(0, 0)$, luego se tiene que,

$$C = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - 4)$$

  Y en efecto, por definición $\mathbb{V}(x^2 + y^2 - 4) = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} : x^2 + y^2 = 4\}$.

- Sea $S = \{x^2 - y, x - y\} \subseteq \mathbb{R}[x, y]$, luego,

$$\mathbb{V}(S) = \{(0, 0), (1, 1)\}$$

  En particular $(-1, 1)$ no es un cero de S ya que no es cero del polinomio $f(x, y) = x - y$.

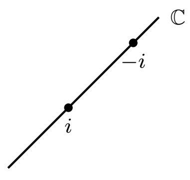
- En $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, se tiene que,

$$\mathbb{V}(c) = \begin{cases} \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}, & c = 0 \\ \emptyset, & c \neq 0 \end{cases}$$

  Si $a_i \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ fijos con $1 \leq i \leq n$, entonces, $\mathbb{V}(\{x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n\}) = \{(a_1, \ldots, a_n)\}$.

- Sea $f(x, y) = y - x^2 \in \mathbb{C}[x, y]$, el lugar de ceros de f no se puede dibujar en $\mathbb{C}^2$, pero si su parte real. **falta dibujo**.

- Sea $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$, luego el lugar de ceros de f en dibujo es,



$\Supset$

Definición 1.3. *Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Si f es no constante, entonces $\mathbb{V}(f)$ se llama hipersuperficie. Si además f es lineal, $\mathbb{V}(f)$ se llama hiperplano. Una hipersuperficie en $\mathbb{A}^2$ se llama curva plana afín.*

1.3. Conjuntos Algebraicos

Nota 1.2. Si $\mathbb{K}$ es un anillo, un ideal $I \subseteq \mathbb{K}$ es un conjunto tal que para todo $r \in \mathbb{K}, a \in I$ cumple que $ra = ar \in I$. $\Supset$

Proposición 1.1. *Sea $I \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal generado por $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(I)$.*

Dem. Si I es ideal generado por S, entonces,

$$I = \bigcap_{\substack{J \text{ ideal} \\ S \subseteq J}} J$$

Es más, $I = \{\sum_n a_n s_n : a_n \in \mathbb{K}, s_n \in S, n \in \mathbb{N}\}$. Sea $p \in \mathbb{V}(I)$, entonces $f(p) = 0$ para todo polinomio en I, como I es generado a partir de S, se tiene que $S \subseteq I$ y entonces $f(p) = 0$ para todo polinomio en S, es decir, $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{V}(S)$.

Para la otra inclusición consideremos $p \in \mathbb{V}(S)$. Sea $\overline{f} \in I$, entonces puede ser expresado de la forma,

$$f = g_1 s_1 + \cdots + g_m s_m$$

con $g_i \in \mathbb{K}, s_i \in S$ $1 \leq i \leq m$. Luego,

$$f(p) = g_1 s_1(p) + \cdots + g_m s_m(p) = 0$$

Por tanto $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(I)$. ■

Observación 1.1. De la demostración anterior concluimos que si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, entonces,

$$\mathbb{V}(B) \subseteq \mathbb{V}(A)$$

$\Supset$

Este resultado es muy bueno, ya que si $S = \{f_1, \dots, f_n\}$ es una colección finita de polinomios, entonces,

$$\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_n)$$

Donde I es ideal generado a partir de S.

Definición 1.4. (Conjunto Algebraico) *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, decimos que es un conjunto algebraico si $V = \mathbb{V}(I)$ con I ideal de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.*

Ejemplo 1.3.

- En $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ se tiene que eje $x = \mathbb{V}(y^2) = \mathbb{V}(y)$

- Sea $S = \{f_1, \ldots, f_n\}$ una colección finita de polinomios, entonces $\mathbb{V}(S)$ es algebraico, por la proposición anterior, basta tomar el ideal generado I por S, luego,

$$\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_n) = \mathbb{V}(I)$$

  Esto es S en general.

$\Supset$

Proposición 1.2. *Sean $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ideales, entonces,*

$$\mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J) = \mathbb{V}(IJ)$$

donde $IJ = \{f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n : f_i \in I, g_i \in J\}$.

Dem. Si $IJ \subseteq I, J$ entonces $\mathbb{V}(I), \mathbb{V}(J) \subseteq \mathbb{V}(IJ)$, entonces $\mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J) \subseteq \mathbb{V}(IJ)$. Para la otra inclusión, sea $p \in \mathbb{V}(IJ)$, supongamos que p no está en $\mathbb{V}(I)$ y en $\mathbb{V}(J)$, es decir, existen $f \in I, g \in J$ tales que $f(p) \neq 0 \neq g(p)$. Pero por definición $fg \in IJ$ y entonces $fg(p) \neq 0$ siendo contradicción. Por lo tanto,

$$\mathbb{V}(IJ) = \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J)$$

■

Observación 1.2. Para $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ideales, se cumple,

$$\mathbb{V}(IJ) = \mathbb{V}(I \cap J)$$

$\Supset$

Corolario 1.1. *La unión finita de conjuntos algebraicos, es un conjunto algebraico.*

Dem. Sean $\mathbb{V}(I_1), \ldots, \mathbb{V}(I_n)$ conjuntos algebraicos, entonces,

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{V}(I_i) = \mathbb{V}(I_1 \ldots I_n)$$

Si el producto $I_1 \ldots I_n$ es ideal, entonces la unión finita de algebraicos, es algebraico. ■

Proposición 1.3. *Sea $\{I_\alpha\}_\alpha$ una familia de ideales en $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces,*

$$\bigcap_\alpha \mathbb{V}(I_\alpha) = \mathbb{V}\left(\sum_\alpha I_\alpha\right)$$

Dem. Se define,

$$\sum_\alpha I_\alpha := \left\{\sum_\alpha f_\alpha : f_\alpha \in I_\alpha\right\}$$

Entonces,

$$I_\alpha \subseteq \sum_\alpha I_\alpha$$

Luego,

$$\mathbb{V}\left(\sum_\alpha I_\alpha\right) \subseteq \mathbb{V}(I_\alpha)$$

Intersectando arbitrararamente, llegamos a la inclusión $\supseteq$. Por otro lado, si $p \in \bigcap_\alpha \mathbb{V}(I_\alpha)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $f \in I_\alpha$ y para todo α, si $g = \sum_\alpha f_\alpha$, entonces $g(p) = 0$ por lo anterior, y entonces llegamos a la inclusión $\subseteq$. ■

Corolario 1.2. *La intersección arbitraria de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.*

Dem.

Dem. Sea $\{\mathbb{V}(I_\alpha)\}$ una familia de conjuntos algebraicos, luego por la proposición 1.3 se tiene que,

$$\bigcap_\alpha \mathbb{V}(I_\alpha) = \mathbb{V}\left(\sum_\alpha I_\alpha\right)$$

Ahora recordemos que si I, J son ideales, entonces $I + J$ es un ideal. Po tanto la intersección arbitraria es un conjunto algebraico. ■

1.4. Topología de Zariski

Sea $\mathcal{T}$ la colección de los conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, donde los complementos son de la forma,

$$\mathbb{V}(S) = \{p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} : f(p) = 0\, \forall f \in S\}$$

con $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. $\mathcal{T}$ es una topología de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, que está bien definido. Probemos que es una topología.

(a) Si $\mathbb{V}(0) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con $c = 0$, entonces $\mathbb{V}^c(0) = \emptyset$, luego $\emptyset \in \mathcal{T}$. Y si $\mathbb{V}(c) = \emptyset$ con $c \neq 0$, entonces $\mathbb{V}^c(c) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, luego $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \in \mathcal{T}$.

(b) Sea $\{A_\alpha = \mathbb{V}^c(S_\alpha)\}_\alpha \subseteq \mathcal{T}$. Entonces,

$$\left(\bigcup_\alpha \mathbb{V}^c(S_\alpha)\right)^c \bigcap_\alpha \mathbb{V}(S_\alpha) = \mathbb{V}\left(\sum_\alpha S_\alpha\right)$$

Luego, la unión arbitraria es elemento de $\mathcal{T}$. (Por la proposición 1.3).

(c) Sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}$ donde $A_i = \mathbb{V}^c(S_i)$, luego,

$$\left(\bigcap_{i=1}^n \mathbb{V}^c(S_i)\right)^c = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{V}(S_i) = \mathbb{V}(S_1 \ldots S_n)$$

Luego, la intersección finita es elemento de $\mathcal{T}$. (Por la propisición 1.3).

Probando que $\mathcal{T}$ es una topología. En particular, esta topología es conocida como la topología de Zariski.

Ejemplo 1.4. (Duda) En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$, la unión de los 3 ejes, es un conjunto algebraico ya que,

$$\begin{aligned}\text{ejes} &= \{(a,0,0) : a \in \mathbb{C}\} \cup \{(0,b,0) : b \in \mathbb{C}\} \cup \{(0,0,c) : c \in \mathbb{C}\} \\ &= \mathbb{V}(yz) + \mathbb{V}(xz) \cap \mathbb{V}(xy) \\ &= \mathbb{V}((xy) + (xz) + (yz)) = \mathbb{V}(xy, xz, yz)\end{aligned}$$

$\Supset$

Ejemplo 1.5. En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ el eje x es un conjunto algebraico dado que,

$$\text{eje } x = \mathbb{V}(y,z) = \mathbb{V}(y) \cap \mathbb{V}(z)$$

De forma geométrica tiene sentido ya que $\mathbb{V}(y)$ es un plano, luego la intersección de dos planos forma una recta, en este caso, el eje x. $\Supset$

Ejemplo 1.6. (Revisar) Descubramos cuanto es $\mathbb{V}(xy, xz)$. Por definición,

$$\mathbb{V}(xy, xz) = \mathbb{V}(xy) \cap \mathbb{V}(xz)$$

1.5. Teorema de la base de Hilbert

Para introducir el teorema de Hilbert definamos un anillo Noetheriano.

Definición 1.5. (Anillo Noetheriano) *Sea A un anillo, decimos que es un anillo Noetheriano si cumple una de las siguientes condiciones equivalentes,*

(a) Toda cadena ascendente de ideales de A estabiliza, es decir, dada cualquier cadena $\{I_n\}_n$ cumple que,

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_m = I_{m+1} = \ldots$$

para algún $m \in \mathbb{N}$.

(b) Todo ideal de A es finitamente generado, es decir, si I es ideal de A, entonces existe $S \subseteq A$ finito que genera a I.

(c) Todo conjunto de ideales de A tiene un elemento máximal, es decir, dado una colección de ideales $\{I_\alpha\}_\alpha$, existe un I tal que $I_\alpha \subseteq I$ para todo α.

Teorema 1.1. (De la base de Hilbert) *Sea A un anillo Noetheriano, entones $A[x]$ es Noetheriano.*

Dem. Sea $I \subseteq A[x]$ ideal, y sea $J_i \subseteq A$ el conjunto de todos los coeficientes lider de los polinomios en I de grado a lo más i.

Afirmación. *J_i es ideal para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Dem. (Afirmación) Sea $r \in A$, sea $a \in J_i$ de forma que $ax^s + \cdots \in I$. Podemos tomar un polinomio de la forma $rx^{i-s} + \cdots \in A[x]$, luego $(rx^{i-s} + \ldots)(ax^s + \ldots) = rax^i + \cdots \in I$. Luego $ra \in J_i$. Por lo que J_i es ideal. ■

Se tiene que J_i es finitamente generado al ser ideal, por lo que existen $a_{i1}, \dots, a_{in_i} \in A$ tales que,

$$J_i = (a_{i1}, \dots, a_{in_i})$$

Sea f_{ij} el polinomio en I con coeficiente lider a_{ij} de grado $\deg(f_{i_j}) = i$. Se cumple que,

$$J_1 \subseteq J_2 \subseteq \dots$$

Ya que para $a \in J_i$, existe un polinomio $f \in I$ de la forma,

$$f = ax^s + \dots$$

donde $s \leq i$. En particular $s \leq i+1$, por tanto, $a \in J_{i+1}$. Si A es Noetheriano, entonces, la cadena ascendente se estabiliriza, es decir, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $J_N = J_{N+1} = \dots$, luego J_N contiene todos los coeficientes lider de todos los polinomios en I de todos los grados.

Afirmación. $I = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{Nr_N})$.

Dem. (Afirmación) Notemos que la inclusión $\supseteq$ es evidente, ya que por definición $f_{ij} \in I$. Probemos la otra inclusión. Sea $f \in I$. Probemos por inducción sobre $\deg(f)$. Si $\deg(f) = 0$ entonces $f = a$, luego $a \in (a_{01}, \dots, a_{0n_0})$, es decir, $a = \sum a_{0j}$, reemplazando obtenemos que,

$$f = ax + b = \left(\sum a_{ij}\right) x + b$$

estamos listo, si $\deg(f) = s \geq N$ suponiendo que se cumple para todo valor menor a N, entonces,

$$f(x) = ax^s + \dots$$

con $a \in J_N$, luego,

$$a = \sum b_j a_{N_j}$$

dado que J_N es finitamente generado, entonces,

$$\deg\left(f - \sum b_j f_{N_j} x^{s-N}\right) < \deg(f)$$

Luego $f - \sum b_j f_{N_j} x^{s-N} \in (f_{11}, \dots)$, por tanto,

$$f = f - \sum b_j f_{N_j} x^{s-N} + \sum b_j f_{N_j} x^{s-N} \in (f_{11}, \dots)$$

Si $\deg(f) = s \leq N$ es similar con J_s en lugar de J_N. ■

Probando que $A[X]$ es un anillo Noetheriano. ■

Nota 1.3. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces $\mathbb{K}[x]$ es un DIP. Es decir, todo ideal de $\mathbb{K}[x]$ es representado finitamente por un elemento, es decir, $\mathbb{K}[x]$ es siempre un Noetheriano.

Corolario 1.3.

(a) Si A es Noetheriano, entonces $A[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano.

(b) Sea $\mathbb{K}$ Noetheriano, entonces todo conjunto algebraica en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es la intersección de finitos hipersuperficies.

Dem.

(a) Por construcción se tiene que $(A[x])[y] = A[x, y]$, luego si A es Noetheriano, entonces aplicando n veces el teorema de Hilbert, llegamos a que $A[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano.

(b) Sea X un conjunto algebraica, por lo que existe ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $X = \mathbb{V}(I)$, sabemos que $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano por lo que I es finitamente generado, es decir,

$$I = (f_1, \dots, f_r)$$

Luego,

$$X = \mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_r) = \mathbb{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathbb{V}(f_r)$$

■

Ejemplo 1.7. Los cerrados de Zariski de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ son el mismo, $\emptyset$ y las uniones finitas de puntos (al ser intersecciones de finitas hipersuperficies, y los hipersuperficies son $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ o uniones finitas de puntos). ⋑

Corolario 1.4. *Una base de la topología de Zariski es dada por los abiertos principales,*

$$U_f = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) \neq 0\}$$

con $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Dem. Sea U abierto, entonces,

$$\begin{aligned} U &= (\mathbb{V}(f_1, \dots, f_r))^c \\ &= (\mathbb{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathbb{V}(f_r))^c \\ &= (\mathbb{V}(f_1))^c \cap \dots \cap (\mathbb{V}((f_r))^c \\ &= U_{f_1} \cup \dots \cup U_{f_r} \end{aligned}$$

■

Definición 1.6. (Variedad algebraica afín) *Una variedad algebraica afín, o variedad algebraica afín, es un conjunto algebraica irreducible (en la topología de Zariski). Es decir, es un conjunto algebraica que no se puede escribir como unión finita de conjuntos algebraica más pequeños no vacíos.*

Ejemplo 1.8. La unión del tres ejes de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ no es variedad afín. ⋑

Ejemplo 1.9. Veamos si $\mathbb{A}^1_C$ es, o no, una variedad afín...

1.6. Ideales de definición

Queremos tener un diccionario entre la geometría y el álgebra. Ya sabemos que dado un cuerpo $\mathbb{K}$ y un subconjunto $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, podemos asociar un objeto geométrico, que sería el lugar de cero de S

Figura ayudantia

Pero ahora describir un objeto geométrico a algo más algebraico, un tipo de inversa de $\mathbb{V}(\ldots)$. Aquí entra en juego el ideal de definición, el cual a partir de puntos de una curva, construimos polinomios.

Definición 1.7. *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, el ideal de definición de X es,*

$$\mathbb{I}(X) := \{F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : F(p) = 0\, \forall p \in X\}$$

Observación 1.3. El conjunto $\mathbb{I}(X)$ es en efecto, un ideal. Ya que si tomamos $G \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y $S \in \mathbb{I}(X)$, entonces $GI(p) = G(p)I(p) = 0$ para todo $p \in X$, es decir, $GS \in \mathbb{I}(X)$.

Ejemplo 1.10. Notemos que,

$$\mathbb{I}(\emptyset) = \{F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : F(p) = 0\, \forall p \in \emptyset\} = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$$

También podemos ver que,

$$\mathbb{I}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}) = \{F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : F(p) = 0\, \forall p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}\} = (0)$$

el ideal del polinomio nulo. Como último ejemplo probemos que $\mathbb{I}(X) = (x)$ donde $X = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Sea $F(x, y) \in (x)$, entonces $F(x, y) = xG(x, y)$, luego $F(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in X$ por lo que $F \in \mathbb{I}(X)$.

Supongamos ahora que $F \in \mathbb{I}(X)$, por el algoritmo de división en $\mathbb{C}(y)[x]$ se tiene que $F(x, y) = xf(x, y) + g(y)$ donde $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ y $g(y) \in \mathbb{C}[y]$, luego,

$$0 = F(0, y) = g(y)$$

para todo $(x, y) \in X$, entonces $g(y)$ es nulo, por lo tanto $F(x, y) \in (x)$. $\Supset$

Observación 1.4. Si $A \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es algebraico, entonces $A = \overline{A}$ bajo la topología de Zariski, y en efecto, por definición existe un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $A = \mathbb{V}(I)$, luego A es cerrado y entonces $A = \overline{A}$.

Proposición 1.4.

(a) Si $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, entonces $\mathbb{I}(Y) \subseteq \mathbb{I}(X)$.

(b) Para todo $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, se tiene que $\overline{X} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$. ($\overline{X}$ es la clausura topológica en la topología de Zariski).

(c) Dado $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, se tiene que $I \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$.

Dem.

(a) Sea $F \in \mathbb{I}(Y)$, entonces $F(p) = 0$ para todo $p \in Y$, como $X \subseteq Y$, entonces $F(p) = 0$ para todo $p \in X$, y entonces $F \in \mathbb{I}(X)$, es decir, $\mathbb{I}(Y) \subseteq \mathbb{I}(X)$.

(b) Se define $\overline{X}$ como la intersección de cerrados que contienen a X. Notemos que $\mathbb{I}(X) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, luego $\mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$ es un conjunto cerrado, por lo que para probar que, $\overline{X} \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$ basta probar solamente X está contenido en $\mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$. Sea $p \in X$, por definición del ideal de definición de X, se tiene que $\mathbb{I}(X) = \{F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : F(p) = 0\, \forall p \in X\}$. Luego $f(p) = 0$ para todo $f \in \mathbb{I}(X)$, pero esto último es la definición de lugar de ceros de $\mathbb{I}(X)$, es decir, $p \in \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$. Por tanto,

$$\overline{X} \subseteq \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$$

Sea $p \in \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$, sea $\mathbb{V}(J)$ cerrado que contiene a X, luego por el puntno (a) se tiene que $\mathbb{I}(\mathbb{V}(J)) \subseteq \mathbb{I}(X)$, y por el punto (c) se tiene que $J \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(J)) \subseteq \mathbb{I}(X)$, por tanto, $\mathbb{V}(\mathbb{I}(X)) \subseteq \mathbb{V}(J)$. Luego, $\mathbb{V}(\mathbb{I}(X)) \subseteq \overline{X}$.

(c) Sea $f \in I$ y $p \in \mathbb{V}(I)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{V}(I)$ y por definición se tiene que $f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$.

■

Observación 1.5. Todod conjunto $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ cerrado es un conjunto algebracio, ya que por la proposición anterior, tenemos que $X = \overline{X} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$. Aunque esto lo hemos concluido de forma implicita anteriormente, ya que para cualquier conjunto $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ se tiene que $\mathbb{V}(S) = \mathbb{V}(I)$ donde I es el generado por S, donde $\mathbb{V}(S)$ es un conjunto cerrado en la topología de Zariski.

Ejemplo 1.11. Cuando I es un ideal, no necesariamente $I = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$, ya que si pensamos en $I = (x^2) \subseteq \mathbb{K}[x]$, entonces $\mathbb{V}(I) = \{0\}$ y luego $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = (x)$, entonces claramente $(x^2) \subseteq (x)$, pero $x \notin (x^2)$, por tanto, $(x^2) \subset (x)$.

Ejemplo 1.12. Sea $J = (y, y - x^2)$. Estudiemos $\mathbb{I}(\mathbb{V}(J))$. Notemos que $(y, y - x^2) = (y, x^2)$ por propieades de ideales finitos. Luego,

$$\mathbb{V}(J) = \mathbb{V}(y) \cap \mathbb{V}(x^2) = \{\text{eje}\, x\} \cap \{\text{eje}\, y\} = \{(0,0)\}$$

Determinemos $I(0,0)$. Por definición,

$$\mathbb{I}(0,0) = \{f \in \mathbb{K}[x,y] : f(0,0) = 0\}$$

Podemos pensar f de la siguente forma,

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x,y)x^i$$

Tomando $(0,0)$, nos queda que $g_0(x,y) = 0$ y luego f es de la siguiente forma,

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x,y)x^i$$

Es decir, f es suma de x, y y por tanto,

$$\mathbb{I}(0,0) = (y, x)$$

Pero se tiene que $(y, x) \neq (y, x^2)$ ya que $x \notin (y, x^2)$. Por lo que $(y, x^2) \subsetneq (y, x)$ ⋑

Sabemos que si $A \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es cerrado, entonces $A = \mathbb{V}(\mathbb{I}(A))$, esto lo podemos pensar como correspondenica, es decir, una función que toma subconjuntos de puntos a ideales de definición y otra función que toma ideales a subconjuntos de puntos.

Antes de ver estas correspondencias, revisemos unas definiciones.

Definición 1.8. (Ideal Primo y Maximal) *Sea A un anillo.*

(a) Sea $P \subsetneq A$ un ideal. Diremos que es primo si para todo $a, b \in A$ tal que $ab \in P$, entonces o bien $a \in P$ o bien $b \in P$.

(b) Sea $M \subset A$ un ideal. Diremos que es maximal si para todo ideal $M \subseteq I \subseteq A$ se tiene que $M = I$ o bien $I = A$.

Nota 1.4. Sea A un anillo, entonces $P \subsetneq A$ es primo si y sólo si A/P es un dominio de integrdiad. Y $M \subset A$ es maximal si y sólo si A/M es un cuerpo.

Consideremos la siguiente correspondencia.

$$\left\{\begin{matrix}\text{ideales primos de}\\ \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Variedades afines de}\\ \mathbb{A}^n \text{ (conj. algebraicos irreducibles}\end{matrix}\right\}$$

$$P \longmapsto \mathbb{V}(P)$$

$$\mathbb{I}(X) \longleftarrow\!\shortmid X$$

Esta correspondencia no parece tener sentido, ya que no sabemos si está bien definido, si un primo genera una variedad o si una variedad genera un primo. Pero vamos a ir probando que esta correspodencia no solo está bien definida, sino que también es una biyección. Haciendo un paralelismo importante entre primos y vartiedades. Es más, consideremos la siguiente correspondencia,

$$\{\text{ideales de } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\} \longleftrightarrow \{\text{Conjuntos algebraicos de } \mathbb{A}^n\}$$

$$I \mapsto \mathbb{V}(I)$$

$$\mathbb{I}(A) \leftarrow A$$

Que está bien definida, ya que $\mathbb{V}(I)$ es la definición de conjunto algebraico y $\mathbb{I}(A)$ es ideal. Esta correspondencia es una generalización de lo que vamos a estudiar, en particular, esta correspondencia no es biyección.

1.7. Descomposición en Variedades Afines

Vamos a sumir que toda colección no vacía de conjuntos algebracios en $\mathbb{A}^n$, tiene un elemento minimal con respecto a la inclusión ($\subseteq$). (Esta afirmación es equivalente al axioma de elección).

Proposición 1.5. *Sea V un conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n$. Entonces existen únicos conjuntos algebraicos irreducibles $V_1, \dots, V_n$ tales que,*

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$$

donde $V_i \not\subseteq V_j$ para todo $i \neq j$.

Dem.

- **Existencia.** Vamos a construir un conjunto y probaremos usando axioma de elección, que tal conjunto es vacío. Definimos,

  $$B := \{\text{Conjuntos algebraicos } X \subseteq V : \ X \text{ no es unión finita de variedades afines}\}$$

  Si $B = \emptyset$, entonces podemos pensar en $V \subseteq V$ y entonces V es la unión finita de variedades y podemos tomar estos de forma que ninguno está contenido en el tro.

  Supongamos que $B \neq \emptyset$, luego por el axioma de elección existe un conjunto minimal V_0. Entonces $V_0 \subseteq X$ es algebraico y no es unión finita de variedades afines, luego V_0 no puede ser irreducible, ya que entonces es unión de variedades (unión de un mismo conjunto), por lo que es reducible es decir, existen W_1, W_2 variedades afines tal que $V_0 = W_1 \cup W_2$ donde $W_1, W_2 \subset V_0$, como V_0 es minimal y si $W_1, W_2 \notin B$, luego es unión finita de varieades afines, siendo contradicción. Por tanto tal V_0 no existe, por tanto $B = \emptyset$.

- **Unicidad.** sea $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n = W_1 \cup \cdots \cup W_m$ donde $m \geq n$ y V_i, W_j son variedades afines como en el enunciado. Vamos a probar por inducción sobre n que $n = m$ y que $V_1 = W_{\sigma(1)}$, donde σ es una permutación de $\{1, \dots, n\}$ hacía si mismo.

  Si $n = 1$ entonces $V_1 = W_1 \cup \cdots \cup W_m$, como V_1 es variedad, entonces $m = 1$ y luego $V_1 = W_1$.

  Supongamos que se cumple para n luego $V_1 \cup \cdots \cup V_{n+1} = W_1 \cup \cdots \cup W_m$ donde $m \geq n+1$. Notemos que, existe una función $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ tal que $v_i = W_{\sigma(i)}$ para $1 \leq i \leq n$, entonces,

  $$V_{n+1} = W_{s_1} \cup \cdots \cup W_{s_{m-n}}$$

  Terminar...

Por lo tanto, todo conjunto algebraico puede ser expresado por una única unión de variedades.

1.8. Álgebras

Definición 1.9. (Álgebra) *Sea A un anillo conmutativo unitario. Una A-álgebra, es un anillo B con un homomorfimso $i_B : A \to B$*

Nota 1.5. Un homormorfismo de anillo, es una función $\varphi : A \to B$ tal que,

$$\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2)$$
$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$$

Definición 1.10. (Homomorfismo de A-álgebras) *Sean A un anillo. Un homomorfismo de A-álgebras, B, C es una función $\varphi : B \to C$ tal que $\varphi(i_B(a)) = i_C(a)$ para todo $a \in A$.*

Observación 1.5. Podemos representar al homomorfismo de A-álgebras como un driagrama que conmuta, **Arreglar**

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\varphi"] & & C \\
& A \arrow[ul, "i_B"] \arrow[ur, "i_C"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.13. Sea A anillo, entonces podemos contruir el A-álgebra $A[x_1, \ldots, x_n]$ con homomorfismo,

$$\begin{aligned} i_{A[x_1,\ldots,x_n]} : A &\to A[x_1, \ldots, x_n] \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

1.9. Teorema de los ceros de Hilbert (Nullstellensatz)

Desde ahora vamos asumir que $\mathbb{K}$ es un cuerpo no numerable y algebraicamente cerrado. Con esto nos ahorramos los siguientes resultados: Teorema de normalización de Noether y el lema de Zariski.

Para construir una correspondencia entre ideales y conjuntos algebraicos, necesitamos los teoremas Nullstellensatz, los cuales hay el débil, el intermedio y el fuerte.

Teorema 1.2. (Nullstellenstaz Débil) *Todo ideal maximal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es de la forma $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ con $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.*

Dem. Sean las funciones,

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} &\to \{\phi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K} : \phi \text{ morfismo de } \mathbb{K}\text{-álgebras}\} \\ a &\mapsto ev_a : f \to f(a) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \beta : \{\phi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K} : \phi \text{ morfismo de } \mathbb{K}\text{-álgebras}\} &\to \{M \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : M \text{ ideal maximal}\} \\ \phi &\mapsto \ker\, \phi \end{aligned}$$

Probemos que ambas están bien definidas. Con respecto a α, tenemos que ev_a es un morfismo de $\mathbb{K}$-álgebra, ya que podemos tomar homomorfismo que van de $\mathbb{K}$ a $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y a $\mathbb{K}$. Luego α está bien definido.

Ahora con respecto a β, tenemos que ker ϕ es un ideal, falta probar que es maximal, recordemos el siguiente resultado.

Proposición. *Sea A anillo, entonces $M \subset A$ es maximal si y sólo si A/M es cuerpo.*

Recordemos que A/M es el anillo cuociente dado por $A/M = \{a + M : a \in A\}$. Por lo que debemos probar que $A/(\ker\ \phi)$ es cuerpo. Notemos que podemos considerar los morfismos $i_1 : \mathbb{K} \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], i_2 = d : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, luego, para todo $k \in \mathbb{K}$ existe $p := i_1(k)$ tal que $\phi(p) = \phi(i_1(k)) = k$, por lo que ϕ es sobreyectivo y por tanto $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(\ker\ \phi) \cong \mathbb{K}$, es decir, ker ϕ es ideal maximal.

Por tanto α, β están bien definidos. Lo que vamos hacer es probar que α, β son biyecciones.

- α **biyectiva.** Sea la función,

$$\begin{aligned} \tau : \{\phi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K} : \phi \text{ morfismo de } \mathbb{K}\text{-álgebras}\} &\to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \\ \gamma &\mapsto (\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_n)) \end{aligned}$$

  Esta función está bien definida y es la inversa de α, ya que para $a \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, se tiene que $\alpha(a) = ev_a$, luego, $\tau(ev_a) = (ev_a(x_1), \ldots, ev_a(x_n)) = (a_1, \ldots, a_n) = a$. Por otro lado, sea ϕ un homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras, entonces $\tau(\phi) = (\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n))$, luego queremos ver que $ev_{\tau(\phi)} = \phi$. Sea f polinomio, entonces $ev_{\tau(\phi)}(f) = f(\tau(\phi)) = f(\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n)) =$

- β **inyectiva.** Sea ϕ morfimo de $\mathbb{K}$-álgebras, por el primer teorema de isomorfismo, existe un único $\overline{\phi} : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/(\ker\ \phi) \to Im(\phi)$. Como esta función es isomorfismo, tenemos que **COmpletar**

- β **sobreyectiva.** Probemos que β es sobreyectiva. Sea $M \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal maximal, consideremos el cuerpo $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/M \cong F$. Sabemos que F es extensión de $\mathbb{K}$. Si $F = K$ entonces consideremos $\pi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/M = \mathbb{K}$ y esto cumple ker $\pi = M$ (π es homormorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras).

  Si $F \neq K$, consideremos $T \in F$ fuera de $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, entonces T es transcendente sobre $\mathbb{K}$. Los elementos $\frac{1}{T-\lambda}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ son $\mathbb{K}$-linealmente independientes. Luego $\dim_{\mathbb{K}}(F)$ es no numerable. Por otro lado $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$ es numerable (hay numerables monomios), así que F tiene dimensión numerable, siendo contradicción. Por tanto $F = \mathbb{K}$ y luego β es sobreyectiva.

Ahora como β es inyectiva, podemos considerar,

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] &\to \mathbb{K} \\ x_1 &\mapsto a_1 \\ &\vdots \\ x_n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

Entonces $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subseteq \ker\ \phi$, pero $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ es maximal, entonces $\ker\ \phi = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$. Por tanto α, β son biyecciones, además, sabemos que los ideales de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ son de la forma $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ ■

Obtenemos la siguiente correspondencia biyectiva,

$$\left\{\begin{smallmatrix}\text{ideales maximales}\\ \text{de } \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]\end{smallmatrix}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{smallmatrix}\text{puntos de}\\ \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}\end{smallmatrix}\right\}$$
$$(x_1,\ldots,x_n-a_n) \longleftrightarrow (a_1,\ldots,a_n)$$
$$M \longmapsto \mathbb{V}(M)$$
$$\mathbb{I}(P) \longleftarrow\!\shortmid P$$

En esta correspondencia, $\mathbb{I}, \mathbb{V}$ son inversas,

Corolario 1.5. (Nullstellansatz Intermedio) *Sea $J \subseteq \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ ideal donde $J \neq (1)$, entonces $\mathbb{V}(J) \neq \emptyset$.*

Dem. Sea $J \neq (1)$ propio, es decir, existe M maximal tal que $J \subseteq M$. Del teorema anterior se tiene que,

$$M = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

con $a_i \in \mathbb{K}$. Si $\mathbb{V}(M) = \{(a_1,\ldots,a_n)\} \subseteq \mathbb{V}(J)$, por tanto $\mathbb{V}(J) \neq \emptyset$. ∎

Definición 1.11. (Radical) *Sea A un anillo y $I \subseteq A$ un ideal. Definimos el radical de I por,*

$$\sqrt{I} := \{f \in A : f^n \in I \text{ para algún } n\}$$

También decimos que I es radical si $f^n \in I$ para algún n, entonces $f \in I$.

Observación 1.6. Se verifica que $\sqrt{I}$ es ideal y radical. Probemos ambas cosas.

- **Ideal.** Sea $a \in A$ y $f \in \sqrt{I}$, entonces $f^N \in I$ y entonces $f^N a^N = (af)^N \in I$, entonces $af \in \sqrt{I}$. Siendo ideal.
- **Radical.** Supongamos que $f^N \in \sqrt{I}$, entonces $f^{NM} \in I$, pero $f^{NM} = (f)^{NM}$, entonces $f \in \sqrt{I}$ ya que existe NM donde $f^{NM} \in I$. Siendo radical.

Proposición 1.6. *Un ideal I es radical si y sólo si $\sqrt{I}$.*

Dem. Supongamos que I es radical, entonces si $f \in \sqrt{I}$ entonces $f^N \in I$, luego $f \in I$. Y si $f \in I$ entonces $f^N \in I$, luego $f \in \sqrt{I}$, por lo que $I = \sqrt{I}$.

Ahora si se cumple $I = \sqrt{I}$, entonces I es claramente radical. ∎

Teorema 1.3. (Nullstellansatz Fuerte) *Para todo ideal $J \subseteq \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ se tiene que $\mathbb{I}(\mathbb{V}(J)) = \sqrt{J}$.*

Dem.

- **$\supseteq$).** Sea J ideal, sea $f \in \sqrt{J}$, entonces existe N tal que $f^N \in J$. Como $J \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$, luego $f^N \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(J))$, es decir, $f^N(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{V}(J)$. Como $\mathbb{I}$ es radical, se tiene que $f(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{V}(J)$, entonces $f \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(J))$. es decir, $\sqrt{J} \subseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(J))$.

- $\subseteq$). (Truco de Rabinowitsch) Sea $J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ideal. Tenemos que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es Noetheriano, por lo que $J = (f_1, \ldots, f_m)$ donde $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Sea $G \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(J)) = \mathbb{I}(\mathbb{V}(f_1, \ldots, f_m))$. Tenemos que G se anula en p donde $f_i(p) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Consideremos el ideal $I := (f_1, \ldots, f_m, x_{n+1}G - 1) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Notemos que $x_{n+1}G - 1$ no se anula en los p tal que $f_i(p) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Por lo que $\mathbb{V}(I) = \emptyset$, es decir, $1 \in I$. Existen g_j con $o \leq m$ tal que,

$$1 = g_0(x_{n+1}G - 1) + \sum_{i=1}^{m} g_i f_i$$

con $g_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$. Sea el cambio de variable $Y = 1/x_{n+1}$, multiplicando por Y^N, donde N es la mayor potencia de x_{n+1} es la igualdad de arriba, obtenemos que,

$$Y^N = \overline{g}_0(G - Y) + \sum_{i=1}^{m} \overline{g}_i f_i$$

En $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, Y]$. Finalmente tomamos Y por G, entonces,

$$G^N = \sum_{i=1}^{m} \overline{g}_i f_i \in J$$

Por tanto $G \in \sqrt{J}$. Probando así que $\sqrt{J} = \mathbb{I}(\mathbb{V}(J))$.

■

Con el teorema anterior, obtenemos la siguiente correspondencia biyectiva,

$$\left\{\begin{matrix}\text{ideales radicales}\\ \text{de } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]\end{matrix}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\text{conjuntos algebraicos}\\ \text{de } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}\end{matrix}\right\}$$
$$I \longmapsto \mathbb{V}(I)$$
$$\mathbb{I}(X) \longleftarrow\!\shortmid X$$

Y en efecto, para $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ideal radical, se tiene,

$$\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I} = I$$

dado que I es radical. Sea X un conjunto algebraico, entonces es cerrado en la topología de Zariski, luego,

$$X = \overline{X} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$$

Probando la biyección. Veamos que pasa con las variedades afines. **Proposición 1.7.** *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ conjunto algebraico. Es variedad si y sólo si el ideal $\mathbb{V}(V)$ es primo.*

Dem. Si $V = \emptyset$ ...

Supongamos que no es vacío y que existen $f, g \notin \mathbb{I}(V)$ tal que $fg \in \mathbb{I}(V)$. Definimos,

$$I_1 := (\mathbb{I}(V), f), \quad I_2 := (\mathbb{I}(V), g)$$

Como f no se anula en todo V, entonces $\mathbb{V}(I_1) \subset V$, similarmente con I_2. Entonces $\mathbb{V}(I_1) \cup \mathbb{V}(I_2) \subseteq V$. Probemos la otra inclusión para ver que V no es variedad. Sea $\alpha = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n \in I_1 I_2$ con $f_i \in I_1, g_i \in I_2$. Se tiene que $f_i g_i \in \mathbb{I}(V)$, entinces $\alpha \in \mathbb{I}(V)$. Luego,

$$I_1 I_2 \subseteq \mathbb{I}(V)$$

Y entonces $\mathbb{V}(\mathbb{I}) = V \subseteq \mathbb{V}(I_1 I_2) = \mathbb{V}(I_1) \cup \mathbb{V}(I_2)$. Po tanto V no es variedad. ■

Supongamos ahora que $\mathbb{V}(V)$ es primo ... **tarea**■

Obtenemos otra correspondencia biyectiva,

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ideales primo} \\ \text{de } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} \text{variedad afín} \\ \text{de } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \end{matrix} \right\}$$
$$I \longmapsto \mathbb{V}(I)$$
$$\mathbb{I}(V) \longleftarrow\!\shortmid V$$

Probemos la biyección. Sea I ideal primo, entonces $\mathbb{V}(I)$ es variedad por la proposición, ahora queremos probar que $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = I$ y esto ocurre si y sólo si I es radical, y en efecto, si $f^n \in I$ por la condición de ser primo, se concluye que $f \in I$. Ahora si V es una variedad, entonces $\mathbb{I}(V)$ es primo radical, luego $\mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = V$ ya que V al ser algebraico, es cerrado. Probando la biyección.

Proposición 1.8. *Los ideales primos son radicales.*

Dem. Sea A un anillo, sea $I \subseteq A$ un ideal primo, entonces para todo $a, b \in A$ tal que $ab \in I$, se tiene que $a \in I$ o $b \in I$. Sea $f^N \in I$, si $f^N = f \cdot f^{N-1}$, entonces $f \in I$ o f^{N-1}, si se cumple el primer caso, estamos listo y si se cumple el segundo caso volvemos aplicar que I es primo, así de forma finita concluimos que $f \in I$, es decir, I es radical. ■

En forma resumida tenemos las siguientes correspondencias importantes,

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Ideales de} \\ \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Conjunto algebraico} \\ \text{de } \mathbb{K} \end{matrix} \right\}$$
$$\left\{ \begin{matrix} \text{Ideal maximal} \\ \text{de } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{\text{bi}} \left\{ \begin{matrix} \text{Puntos afín} \\ \text{de } \mathbb{K} \end{matrix} \right\}$$
$$\left\{ \begin{matrix} \text{Ideal primo} \\ \text{de } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{\text{bi}} \left\{ \begin{matrix} \text{Variedad afín} \\ \text{de } \mathbb{K} \end{matrix} \right\}$$
$$\left\{ \begin{matrix} \text{Ideal radical} \\ \text{de } \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{\text{bi}} \left\{ \begin{matrix} \text{Conjuntos algebracio} \\ \text{de } \mathbb{K} \end{matrix} \right\}$$

Con esto ya tenemos herramientas para estudiar los ideales y los conjuntos algetaicos.

Ejemplo 1.14. Los conjuntos algebraicos de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ son tales que son generados a partir de radicales, es más, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ =uniones finitas de conuntos $+\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} + \emptyset$.

Las variedades afines de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ son aquellas son generadas de primos. En particular, los ideales primos de $\mathbb{C}[x]$ son $(0), (1), (x-a)$, entonces $\mathbb{V}(0) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}, \mathbb{V}(1) = \emptyset, \mathbb{V}(x-a) = \{a\}$ son las variedades de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. $\Supset$

Ejemplo 1.15. Estudiemos las variedades afines de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Tenemos que los ideales primos de $\mathbb{C}[x, y]$ algunos triviales son $(0), (1)$, vemos que $(x-a, y-b)$ es máximal como vimos y veamos que si f es irreducible, entonces (f) es maximal. Sea $I \subseteq \mathbb{C}[x, y]$ tal que $(f) \subseteq I \subset \mathbb{C}[x, y]$, como $\mathbb{C}[x, y]$ es DIP, entonces $I = (f_1, \ldots, f_r)$ con $f_i \in \mathbb{C}[x, y]$ para $1 \leq i \leq r$. Como $f \in I$ entonces $f = g_1 f_1 + \cdots + g_r f_r$...

2. Funciones entre Conjuntos Alg./Var. Afines

Recordemos que $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, es decir, es algebraicamente cerrado.

2.1. Funciones hacía $\mathbb{A}^1$

Ya hemos estudiado los conjuntos algebraioc de forma seprara, ahora vamos a estudiar funciones definidas en conjuntos algebracios.

Definición 2.1. (Función Polinomial) *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un conjunto algebraico. Definimos una función polinomial $\mathbb{K} = \mathbb{A}^n$ como una función,*

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{A} = \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto F(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

con $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, es decir, f es la restricción a V de la funcion $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$.

Nota 2.1. Lo más importante de una función polinomial, es que F sea polinomio. Si no lo fuera, entonces f no está bien definido.

Ejemplo 2.1. Sea $V = \mathbb{V}(y) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ y sea la función,

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{A}^1 \\ (x, y) &\mapsto x + y^2 + xy \end{aligned}$$

Notemos que es función polinomial, con polinomio $F(x, y) = x + y^2 + xy$, es más, si $(x, y) \in V$, entonces $y = 0$, por tanto $f(x, y) = F(x, y) = F(x, 0) = x$. Por otro lado, la función polinomia,

$$\begin{aligned} g : V &\to \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

Donde $G(x, y) = x$. Podemos ver que $g(x, y) = f(x, y)$ para todo $(x, y) \in V$ pero que $F \neq G$. $\Supset$

Para arreglar este problema, tomamos cuocientes.

Definición 2.2. (Anillo de Coordenadas) *El anillo de coorenadas (o Funciones regulares) de un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es,*

$$\mathbb{K}[V] := \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\mathbb{I}(V)} \cong \{\textit{funciones polinomiales}\, V \to \mathbb{K}\}$$

(Otras notaciones son $\Gamma(V), A(V), \mathcal{O}(V)$)

Nota 2.2. Recordemos que los conjuntos algebraicos están en biyección con los radicales, entonces $\mathbb{I}(V)$ es dado únicamente por V, esto significa que no hay situaciones como $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[W]$ con $V \neq W$. $\Supset$

Nota 2.3. En el ejemplo anterior, el problema se arreglar, ya que ahora $f, g \in \mathbb{K}[V]$ y $y^2+xy, 0 \in \mathbb{I}(V) = (y)$.

Ejemplo 2.2. Sea $P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Luego,

$$\mathbb{K}[P] = \frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)} \cong \mathbb{K}$$

$\Supset$

Ejemplo 2.3. Sea $V = \mathbb{V}(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, se tiene que,

$$\mathbb{K}[V] = \frac{\mathbb{K}[x, y]}{(y - x^2)} \cong \mathbb{K}[x]$$

Para probar que $\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[x]$, podemos sospechar que es un morfismo donde $x \mapsto x, y \mapsto x^2$. Claramente es sobreyectivo y que $\ker = (y - x^2)$, ya que si $f \in (y - x^2)$, entonces $f = p(y - x^2)$, evaluando en el morfismo, se ve que se anula y por otro lado, si $f \in \ker$, entonces,

$$\sum_{i=1, j=1}^{n,m} a_{i,j} x^i x^{2j}$$

...

2.2. Funciones Polinomiales hacía $\mathbb{A}^n$

Podemos definir una función de un conjunto algebraico V al espacio afín $\mathbb{A}^n$.

Definición 2.3. (Función polinomial de una Variable a V. Variables) *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ conjunto algebraico. Una función polinomial $f : V \to \mathbb{A}^n$ es,*

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{A}^n \\ p = (a_1, \ldots, a_n) &\mapsto (F_1(p), \ldots, F_n(p)) \end{aligned}$$

con $F_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Nota 2.3. Al igual que una función polinomial de V a $\mathbb{A}^1$, es importante que los polinomios $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sea polinomios para que esté bien definido.

2.3. Funciones Polinomiales entre Conjuntos Algebraicos

Ahora vamos a genera

Definicion 2.4. (Función polinomial de V. Variables a V. Variables) *Dado $V \subseteq \mathbb{A}^n, W \subseteq \mathbb{A}^m$ conjuntos algebraicos. Una función polinomial $V \to W$ es una función,*

$$f : V \to W$$
$$p = (a_1, \dots, a_n) \mapsto (F_1(p), \dots, F_m(p))$$

con $F_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y tales que $(F_1(p), \dots, F_m(p))$ cumpla las ecuaciones que definen W para todo $p \in V$. Las funciones polinomiales de la forma $V \to W$ también se llama morfismos o funciones regulares.

Ejemplo 2.4. Sean $V = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}, W = \mathbb{V}(x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Luego la función,

$$f : V \to W$$
$$(x, y) \mapsto (ax, by)$$

es un morfismo. Y en efecto, $f(x, y) = (ax, by)$ si $x^2+y^2 = 1$, entonces $(ax)^2/a^2+(by)^2/b^2-1 = 0$, es decir, f está bien definido. $\Supset$

Ejemplo 2.5. Sean $V = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}, W = \mathbb{V}(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ y sea la función,

$$f : V \to W$$
$$x \mapsto (x, x^2)$$

Claramente es un morfismo ya que si $x \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$, entonces $x^2 - x^2 = 0$. $\Supset$

Definición 2.5. *Sean dos conjuntos algebraicos $V \subseteq \mathbb{A}^n, W \subseteq \mathbb{A}^m$. Decimos que son isomorfos o biregulares, si hay un isomorfismo entre ellos. Un isomorfismo es un morfismo,*

$$f : V \to W$$

tal que existe $g : W \to V$ morfismo tales que,

$$f \circ g = Id_W \quad g \circ f = Id_V$$

Ejemplo 2.6. La función del ejemplo anterior es biregular, basta tomar $g : W \to V$ con $g(x, y) = x$. $\Supset$

Ejemplo 2.7. Sea el morfismo,

$$f : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{V}(y^2 - x^3)$$
$$x \mapsto (x^2, x^3)$$

Si fuera isomorfismo, entonces necesitamos un polinomio y/x, pero claramente no es polinomio. Por lo tanto no puede ser isomorfismo. $\Supset$

Ejemplo 2.8. Se puede mostrar que $V = \mathbb{V}(xy-1)$ no es isomorfismo a $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. Supongamos que existe un morfismo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to V \\ x &\mapsto (F_1(x), F_2(x)) \end{aligned}$$

Entonces $F_1(x)F_2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{C}$. Escribiendo $F_1(x) = 1/F_2(x)$. Vemos que F_2 es polinomio que no se anula, entonces es constante, pero entonces F_1 es constante y luego no hay inversa para f. Por tanto $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \ncong V$

Teorema 2.1. *Sean $V \subseteq \mathbb{A}^n, W \subseteq \mathbb{A}^m$ conjuntos algebraicos. Un morfismo $f : V \to W$ induce un homomorfismo de anillos ($\mathbb{K}$-álgebra),*

$$\begin{aligned} f^* : \mathbb{K}[W] &\to \mathbb{K}[V] \\ u &\mapsto u \circ f \end{aligned}$$

El homomorfismo f^* es llamado el pullback de f.

El pullback de f puede ser expresado por el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "u \circ f"'] & W \arrow[d, "u"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Dem. Terminar

A partir de la demostración se obtiene,

$$\begin{aligned} \{\text{Morfismo de } V \to W\} &\to \{\text{Homomorfismo de } \mathbb{K}\text{-álgebra } \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V] \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

Es decir, una función que toma un morfismo y lo manda al pullback de este. Ahora queremos un proceso inverso, es decir, dado un homomorfismos de $\mathbb{K}$-álgebras,

$$\phi : \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V]$$

Determinar una función que tenga por pullbakc ϕ.

Dado $\varphi : \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V]$ homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebra, queremos un morfismo $V \to W$ de la siguiente forma, **Diagrama**

Dado punto $p \in V$, definimos $\varphi_p : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{K}$, de este existe $\overline{\phi}_p \circ \varphi : W \to \mathbb{K}$ que nos da un punto en W. Obteniendo la inversa que toma φ homorfismo de $\mathbb{K}$-álgebra que va desde $\mathbb{K}[W]$ a $\mathbb{K}[V]$ y lo manda a **terminar**

Con esto podemos trabajar con variedades.

Proposición 2.1. *Sean $f : V \to W, g : W \to S$ funciones polinomiales con V, W, S variedades. Entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Dem. Argumento geométricos,

Por tanto $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. ■

Corolario 2.1. *Un morfismo $f : V \to W$ es isomorfismo si y sólo si $f^* : \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V]$es isomorfismo.*

Dem. Supongamos que f posee una inversa $g : W \to V$. De la proposición anterior, se tiene que,

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = Id_V^* = Id_{\mathbb{K}[V]}$$

De forma análoga con $g^* \circ f^*$. Entonces el pullback de f es isomorfismo. Si f^* es isomorfismo, entonces existe $g^* : \mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}[W]$ inversa, luego,

$$(g \circ f)^* = id_{\mathbb{K}[V]}$$

Entonces $g \circ f$ **Terminar** ■

Corolario 2.2. *Dos variedades V, W son isomorfismos si y sólo si sus anillos de coordenadas son isomorfos.*

Ejemplo 2.9. ¿Serán $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ y $\mathbb{V}(y^2 - x^3) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ isomorfos? Supongamos que si, notemos que,

$$\mathbb{K}[\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1] = \frac{\mathbb{C}[x]}{(0)} \cong \mathbb{C}[x]$$

Y por otro lado,

$$\mathbb{K}[\mathbb{V}(y^2 - x^3)] = \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(y^2 - x^3)}$$

Como $(y^2 - x^3)$ es primo, entonces el cuociente es un dominio de integridad, el problema es que $\mathbb{C}[x]$ también es un dominio de integridad, por lo que no sabemos si son o no, isomorfos, pero notemos que $\mathbb{C}[x]$ es un DIP (domino de integridad principal), probemos que $\mathbb{K}[\mathbb{V}(y^2 - x^3)]$ no lo es. Supongamos que $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{f})$, elementos del anillo de coordenadas, entonces se tiene que,

$$x = pf + a(y^2 - x^3), \;\; y = qf + b(y^2 - x^3)$$

donde p, q, b, a son polinomios. Notemos que f es un polinomio $\mathbb{C}[x, y]$ y por construcción **terminar**. Por tanto,

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \ncong \mathbb{V}(y^2 - x^3)$$

$\Supset$

2.4. Funciones Racionales entre Variedades

Estudiaremos una noción más débil que los morfismos (f reguar). Sea V una variedad afín en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Sabemos que el anillo $\mathbb{K}[V]$ es un dominio entero. Así que vamos a construir su cuerpo cuociente.

$$\mathbb{K}(V) := \mathrm{Quot}(\mathbb{K}[V]) := \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{K}[V], g \neq 0 \right\}$$

(g como representante no puede ser nulo). Los elementos de $\mathbb{K}(V)$ se llaman funciones racionales y $\mathbb{K}(V)$ es llamado el cuerpo de funciones (racionales) de V.

Cuando $\mathbb{K}[V]$ es DFU, la representacion de una función racional (con f, g sin factor común) de manera irreducible, es único (salvo unidades).

Ejemplo 2.10. Sea $V = \mathbb{V}(xy - wz) \subseteq \mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$. La función racional $x/w \in \mathbb{K}(V)$ está bien definida, ya que $w \notin (xy - wz)$, también se puede escribir $x/w = z/y$, por tanto $\mathbb{K}[V]$ no es DFU.

Definición 2.6. (Regular en un Punto) *Sean $f \in \mathbb{K}(V)$ y $p \in V$. Decimos que f es regular en p o p está en el dominio de f, si existe unarepresentación $f = g/h$ con $g, h \in \mathbb{K}[V]$ y $h(p) \neq 0$.*

Definición 2.7. (Dominio de Definición) *El dominio de definición de $f \in \mathbb{K}(V)$ es,*

$$dom(f) := \{p \in V : f \text{ regular en } p\}$$

Ejemplo 2.11. Sea la función racional $f = x/w$ en $\mathbb{V}(xy - wz)$. Tenemos que el dominio es,

$$dom(f) = \mathbb{A}^4 \setminus \{w = y = 0\}$$

Definición 2.8. (Función Racional) *Una función racional $f : V \dashrightarrow \mathbb{A}^m$ es de la forma,*

$$f(p) = (f_1(p), \ldots, f_m(p))$$

con $f_i \in \mathbb{K}(V)$ para todo $p \in \bigcap_i dom(f_i)$. Una función racional $f : V \dashrightarrow W \subseteq \mathbb{A}^m$ es una función racional $\overline{f} : V \dashrightarrow \mathbb{A}^m$ tal que $f(dom(\overline{f})) \subseteq W$.

Definición 2.9. (Biracional) *Una función biracional, es una función $f : V \dashrightarrow W$ tal que existe una inversa $g : W \dashrightarrow V$ que es racional.*

Ejemplo 2.12. $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{V}(y^2 - x^3)$ ¿serán biracional? Sea,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} &\to V \\ x &\mapsto (x^2, x^3) \end{aligned}$$

un morfismo y sea,

$$g : V \dashrightarrow \mathbb{A}^1$$
$$(x, y) \mapsto \frac{y}{x}$$

Vemos que g no está definido en $(0,0)$. Si $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ con $q(0,0) \neq 0$, tendriamos que $yq = xp$, llegando a una contradicción, pues $yq(0,0)$ mno aparece en la derecha, entonces,

$$dom(g) = V \setminus \{(0,0)\}$$

Por tanto V y $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ no son birracionales. ⋑

De la misma manera que definimos el pullback de morfismos, podemos definir el pullback de funciones racionales que cumplen los mismos tipos de propiedades. En particular, tenemos,

Corolario 2.3. *Dos variedades afines V, W son birracionales si y sólo si,*

$$\mathbb{K}(V) \cong \mathbb{K}(W)$$

Del corolario anterior podemos concluir que,

$$V \cong K \iff \mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}[W] \iff \mathbb{K}(V) \cong \mathbb{K}(W)$$

2.5. El Espacio Proyectivo

Vamos a considerar $\mathbb{K}$ simplemente un cuerpo, es decir, no pediremos que sea algebraicamente cerrado.

Definición 2.10. (Espacio Poryectivo) *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, en $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$ consideramos la siguiente relación de equivalencia,*

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$$

Si y sólo si,

$$(x_0, \ldots, x_n) = (\lambda y_0, \ldots, \lambda y_n)$$

donde $\lambda \in \mathbb{K}^X$. El espacio proyecctivo sobre $\mathbb{K}$ es el conjunto,

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = \left(\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\right) \Big/ \sim$$

Es decir, $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ son las clases de equivalencia sin considerar la clase de equivalencia del 0.

Recordemos que el conjunto $\mathbb{K}^X$ es el conjunto de los elementos de $\mathbb{K}$ que no son nulos y que tienen inversa.

El espacio proyectivo es esencialmente el conjuntos de las rectas que pasan por el origen de $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}}$. Esto se puede ver visualmente en $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

Definición 2.11. (Clases de Equivalencia) *Sea $p \in \mathbb{P}^n$ una clase de equivalencia de un punto $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$. Escribiremos p de la siguiente forma:*

$$p = [x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$$

Observación 2.1. Notemos que $p \neq [0 : \cdots : 0]$ ya que entonces la clase de equivalencia de 0 está en $\mathbb{P}^n$, por lo que $x_0, \ldots, x_n$ nunca son nulos al mismo tiempo. $\Supset$

Ejemplo 2.13. Se tiene que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} = (\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \setminus \{(0,0)\}\}\Big/ \sim$ es la recta proyectiva. Sea $p \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, entonces es de la forma $p = [x_0 : x_1]$, si $x_0 \neq 0$, entonces,

$$p = \left[1 : \frac{x_1}{x_0}\right]$$

donde $\frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{K}$, obteniendo la biyección,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} &\to \{\text{puntos en } \mathbb{P}^1 \text{ con primera coordenada no nula}\} =: U_0 \\ a &\mapsto [1 : a] \end{aligned}$$

Ya que podemos tomar la inversa,

$$\begin{aligned} U_0 &\to \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} \\ [a, b] &\mapsto b/a \end{aligned}$$

Luego se tiene que,

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \setminus U_0 = \{[0 : 1]\}$$

En general, si $U_i := \{[x_0, x_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} : x_i \neq 0\}$, hay una biyección entre U_i y $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ igual que antes. En particular, **Figura.**

Podemos llamar U_i los abiertos afines de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ que más adelante explicaremos porque son abiertos. Podemos considerar $U_0 \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, vemos que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ es la cmpactización de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}} = U_0$ agrando el punto infinito $[0 : 1]$, por lo que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ es la esfera de Riemann (aunque se vea como una circuferencia). $\Supset$

Ejemplo 2.14. Sea $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ el plano proyectivo. Aquí podemos realizar un proceso similar al ejemplo anterior. Sea,

$$U_i := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_i \neq 0\}$$

que están en biyección con $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ dado por la siguiente mapa:

$$\begin{aligned} U_0 &\to \mathbb{A}^2 \\ [1 : x_0 : x_1] &\mapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

Es decir, el plano afín $\mathbb{A}^2$ se puede relacionar de forma biyectiva con una esfera partida a la mitad en $\mathbb{A}^3$. Por otro lado notemos que,

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus \{U_i\} := \{[x_0 : x_1 : x_2] : x_i = 0\} \underset{i=0}{=} \{[0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2\}$$

Es decir, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus \{U_0\}$ es una circuferencia por lo que se puede biyectar con la recta proyectiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, en particular, el mapa es, Existe la biyección,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus U_0 &\to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ [0 : x_1 : x_2] &\mapsto [x_1 : x_2] \end{aligned}$$

Podemos ver $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus U_0$ como la recta al infinita. Pegando U_0, U_1, U_2 obtenemos $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$.

2.6. Conjuntos Algebracios Proyectivos

Ya definico los conjuntos proyectivos, vamos a replicar todo lo visto anteriormente, pero en vez de conjuntos afines, será con conjuntos proyectivos. Lo primero son los conjunto algebraicos, y para estudiarlo necesitamos una noción de polinomio en conjuntos proyectivos. En particular, si $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es un polinomio, queremos que f se anule en toda una clase de equivalencia $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$, para ello ncesitamos una condición importante.

Ejemplo 2.15. Sea $f(x, y) = -x^3 + 3y + x^2$ se anula en $(1, 0)$, pero no se anula en $(3, 0)$ donde claramente $(1, 0) \sim (3, 0)$. $\Supset$

Ejemplo 2.16. Sea $f = x^3 + xy^2 + 2x^2y$ un polinomio homogeneo, si f se anula en (a, b), entonces para todo $\lambda \in \mathbb{K}^X$ se tiene que,

$$f(\lambda a, \lambda b) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 xy^2 + 2\lambda x^2 y = \lambda^3 f(a, b) = 0$$

$\Supset$

Definición 2.12. (Polinomio Homogéneo) *Un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es homogeneo de grado d si $f(\lambda p) = \lambda^d f(p)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}^X$ y para todo $p \in \mathbb{A}^{n+1}$.*

Por tanto podemos definir un lugar de cero con un polinomio homogéneo. Sea $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ homogéneo. Se define el lugar de cero de f sobre el conjunto proyectivo $\mathbb{P}^n$ por,

$$\mathbb{V}(f) := \{p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : f(p) = 0\}$$

Siempre pensando en p como un representante d ela clase de equivalencia.

Corolario 2.4. *Si $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es homogeneo, entonces,*

$$\mathbb{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} : f(p) = 0\}$$

está bien definido.

Dem. Sea $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ polinomio homogéneo. Entonces si $p \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ es tal que $f(p) = 0$, se tiene que para todo $\lambda \in \mathbb{K}^X$ se cumple que $f(\lambda p) = \lambda^d f(p) = 0$, es decir, que para cualquier representante de p, se anula en f. Por lo que $\mathbb{V}(f)$ está bien definido. ■

Para poder definir un conjunto algebraico proyectivo, necesitamos la noción de ideal de polinomios homogéneos. Pero antes de eso notemos que todo polinomio $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ sin constante puede ser descrito como una suma de polinomios homogéneos. Por ejemplo $f(x, y, z) = x^3 + 2xy + xyz + z + 5$, luego $f = F_3 + F_2 + F_1$ donde $F_3 = x^3 + xyz$ es homogéneo de grado 3, $F_2 = 2xy$ es homogéneo de grado 2 y $F_1 = z$ es homogéneo de grado 1.

Definición 2.13. (Ideal Homogéneo) *Un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es homogéneo si para todo $f = \sum_{i=0}^n F_i \in I$ con F_i homogéneo de grado i, se tiene que $F_i \in I$, es decir, es generado por polinomios homogéneos.*

Notar que no pedimos que un polinomio del ideal I sea homogéneo, sino que pedimos que sea la suma de polinomios homogéneos, ya que de igual forma $\mathbb{V}(I)$ estará bien definido, ya que $f(\lambda p) = \sum_{i=0}^n F_i(\lambda p) = \sum_{i=0}^n \lambda^i F(p) = 0$.

Proposición 2.2. *Un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es homogéneo si y sólo si es generado por un conjunto finito de polinomios homogéneos.*

Dem. Supongamos que I es generado por la colección finita de polinomios homogéneos $\{f_1, \ldots, f_n\}$, es decir,

$$I = \left\{ \sum k_i f_i : k_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Es decir, todo polinomio de I es suma finita de funciones homogéneas, por lo que I es homogéneo.

Supongamos que I es homogéneo, entonces para f **Termina Fulton**

Proposición 2.3. *La suma, producto, intersección, radical de ideales homogéneos es homogéneo.*

Dem. Sean $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ ideales homogénenos.

- **Suma.** Sean $f \sum_i F_i \in I, g = \sum_j G_j \in J$, entonces,

$$f + g = \sum_s Q_s$$

  donde Q_s es homogéneo, ya que es de la forma $F_i + G_i, F_i, G_i$, que son claramente homogéneo. Luego Q_s es homogéneo, por lo que $I + J$ es ideal homogéneo.

- **Producto.** Sean $f \in I, g \in J$, usando un argumento similar usado en la suma, se tiene que $fg \in IJ$ es la suma de polinomoos homogéneos, luego IJ es ideal homogéneo.

- Claramente si $f \in I \cap J$, luego f se descompone es suma de polinomios homogéneos, luego $I \cap J$ es homogéneo.

- Sea $f \in \sqrt{I}$, entonces $f^n \in I$, luego,

$$f^n = ...$$

■

Definición 2.14. (Nulo en un Punto) *Sea $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, decimos que f se anula en $p = [a_0, \ldots, a_n] \in \mathbb{P}^n$ si $f(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}^x$.*

Proposición 2.4. *Sea $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, donde $f = \sum F_i$ con F_i homogénea de grado i. Entonces $f(p) = 0$ si y sólo si $F_i(p) = 0$ para todo i.*

Dem. Si $F_i(p) = 0$, entonces $f(p) = 0$. Si por otro lado, $f(p) = 0$, entonces para i fijo se tiene,

$$F_i(p) = -\sum_{j \neq i} F_j(p)$$

Pero entonces

Definición 2.15. (Lugar de Ceros) *Dado un conjuntos de ideales homogéneos S, podemos definir su lugar de ceros proyectivo:*

$$\mathbb{V}(S) = \{p \in \mathbb{P}^n : f(p) = 0 \, \forall f \in S\}$$

dado un idea homogéneo $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, definimos $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(T)$ con T el conjunto fintio de generadores homogéneos de I. Por otro lado, podemos definir ideales de definición proyectivos: Dado $X \subseteq \mathbb{P}^n$,

$$\mathbb{I}(X) := \{f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] : f \text{ homogéneo y } f(p) = 0 \, \forall p \in X\}$$

Podemos ver que $\mathbb{I}(X)$ es homogéneo y radical.

Si consideramos los conjuntos $\mathbb{V}(I)$ como cerrados, obtenemos una topología, la topología de Zariski proyectiva. Para esto basra verificar las propiedades de básicas de $\mathbb{I}, \mathbb{V}$, es decir, se cumple,

$$\mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(J) = \mathbb{V}(IJ)$$
$$\mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J) = \mathbb{V}(I + J)$$

también se cumple que si X es conjunto algebraico proyectivo (cerrado), entonces $X = \mathbb{V}(\mathbb{I}(X))$. Que si I es ideal homogéneo, entonces $\sqrt{I} = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$, entre otros.

2.7. Las Variedades Algebraicas Proyectivas

Al igual que el caso afín, las variedades proyectivas son conjuntos algebraicos irreducibles.

Ejemplo 2.17. Sea $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ polinomio homogéneo. Su lugar de ceros se ve en $\mathbb{A}^{n+1}$

Figura clase camila

En $\mathbb{P}^n$ se toma un representate por cada recta dentro del lugar de ceros afín.

El lugar de ceros en $\mathbb{A}^{n+1}$ se llama el cono afín de f. Esto ocurre ya que trabajando visulamente, se genera un cono.

Ejemplo 2.18. En general, gracias al teorema de la base de Hilbert, todo conjunto algebraico en $\mathbb{P}^n$ es un conjunto de representantes de una intersección finita de conos afines. $\Supset$

Ejemplo 2.19. Consideremos en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ el conjunto algebraico $V = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - z^2)$. Vemos que,

$$V = (V \cap U_x) \cup (V \cap U_y) \cup (V \cap U_z)$$

2.8. Ideales Irrelevantes

Veamos el ideal $(x_0, \ldots, x_n) \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$. En $\mathbb{A}^{n+1}$ su kugar de ceros es $(0, \ldots, 0)$. Pero en $\mathbb{P}^n$ es el conjunto vacío. Por lo que un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ es tal que en $\mathbb{P}^n$ es vacío, le diremos ideal irrelevante.

Proposición 2.5. *Sea $J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ ideal homogéneo. Se tiene $\mathbb{V}(J) = \emptyset$ si y sólo si rad$(J) \supseteq (x_0, \ldots, x_n)$.*

Dem. Si $\sqrt{J} \supseteq (x_0, \ldots, x_n)$, entonces en $\mathbb{A}^{n+1}$ vemos que $\mathbb{V}(J) \subseteq \{(0, \ldots, 0)\}$, luego en $\mathbb{P}^n$ se tiene que $\mathbb{V}(J) = \emptyset$.

Por otro lado, si $\mathbb{V}(J) = \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$, entonces en $\mathbb{A}^{n+1}$ tenemos que $\mathbb{V}(J)$ contiene a lo menos $(0, \ldots, 0)$, luego $\sqrt{J} \supseteq (x_0, \ldots, x_n)$. ■

2.9. Nullstellensatz Proyectivo

Definición 2.16. *Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ conjunto algebraico. Se define el cono sobre X por,*

$$C(X) := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1} : [x_0, \ldots, x_n] \in X \text{ o } (x_0, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)\}$$

Notación. Vamos a diferenciar por el momento el lugar y el ideal, sobre un espacio afín y un espacio proyectivo. $\mathbb{V}_a(I), \mathbb{I}(X)$ es el lugar de ceros y el ideal con respecto a un espacio afín y $\mathbb{V}_p(I), \mathbb{I}_p(X)$ el lugar de ceros y ideal con respecto al espacio proyectivo.

Lema 2.1. *Dado un ideal $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ homogéneo con $\mathbb{V}_p(I) \neq \emptyset$, se tiene que,*

$$\mathbb{V}_a(I) = C(\mathbb{V}_p(I))$$

en $\mathbb{A}^{n+1}$.

Dem. Sea $p \in \mathbb{V}_a(I)$, entonces $f(p) = 0$ para todo $f \in I$ con I homogéneo. Supongamos que $p \neq 0$, sea p^* el representante donde $p \in p^*$, entonces por homogenoidad de I se tiene que $f(p^*) = 0$ para todo $f \in I$, por lo que $p^* \in \mathbb{V}_p(I)$, luego $p \in C(\mathbb{V}_p(I))$ por ser un representante de la clase p^*. Probando la inclusión $\subseteq$. Para la otra basta hacer un procedimiento análogo. ■

Lema 2.2. *Dado un conjunto algebraico no vacío $X \subseteq \mathbb{P}^n$, se tiene que $\mathbb{I}_a(C(X)) = \mathbb{I}_p(X)$.*

Dem. Sea $f \in \mathbb{I}_p(X)$, entonces $f = \sum F_i$ donde F_i son homogéneos. Si $f(p) = 0$ para todo $p \in X$, entonces $f(p) = 0$, esto implica que $F_i(p) = 0$ para todo i y para todo $p \in X$. Como F_i es homogéneo, se tiene que F_i se anulan en todos los puntos de $C(X)$ y por tanto $f \in \mathbb{I}_a(C(X))$.

Sea $g \in \mathbb{I}_a(C(X))$, entonces $g(p) = 0$ para todo $p \in C(X) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Como $C(X)$ es cono, se tiene que dado $(a_0, \dots, a_n) \in C(X) \setminus \{0\}$ se tiene lo siguiente,

$$g(\lambda a_0, \dots, \lambda a_n) = 0$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}^X$. Como esto ocurre para todo punto no nulo de $C(X)$, obtenemos $g(p) = 0$ para todo $p \in X$. Es decir, $g \in \mathbb{I}_p(X)$ ■

Teorema 2.2. (Nullstellensatz) *Sea $\mathbb{V}_p(J) \neq \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$, con $J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo. Entonces $\mathbb{I}_p(\mathbb{V}_p(J)) = rad(J)$. Es más,*

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{Ideal homogéneo} \\ \textit{radical } J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \\ \textit{con } J \not\supset (x_0, \dots, x_n) \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{conjunto algebraico} \\ \textit{en } \mathbb{P}^n \end{array}\right\}$$

Es una biyección.

Dem. Vamos a usar los lemas anteriores. Sea J ideal homogéneo radical que no contiene al punto $(x_0, \dots, x_n)$. Entonces,

$$\mathbb{I}_p(\mathbb{V}_p(J)) = \mathbb{I}_a(C(\mathbb{V}_p(J))) = \mathbb{I}_a(\mathbb{V}_a(J)) = \sqrt{J} = \text{rad}(J)$$

Por otra parte,

$$C(\mathbb{V}_p(\mathbb{I}_p(X)) = \mathbb{V}_a(\mathbb{I}_p(X)) = \mathbb{V}_a(\mathbb{I}_a(C(X))) = C(X)$$

Luegp, $\mathbb{V}_p(\mathbb{I}_p(X)) = X$. Probando la biyección. ■

De forma similar al caso afín, podemos ver una biyección entre los ideales primos homogéneos con variedades proyectivos.

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Ideal homogéneo} \\ \text{primo } J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \\ \text{con } J \not\supset (x_0, \dots, x_n) \end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{variedad proyectivo} \\ \text{en } \mathbb{P}^n \end{array}\right\}$$

Ya que

2.10. Clausura Proyectiva

Podemos identificar $\mathbb{A}^n$ con el abierto afín $U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ por medio de la función,

$$\phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n$$
$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto [1 : a_1 : \dots : a_n]$$

Definición 2.17. *Dado un conjunto algebraico $X \subseteq \mathbb{A}^n$, su clausura proyectiva $\overline{X}$ es la clausura de $\phi(X)$ utilizando la topología de Zariski.*

Veamos como construir de manera sencilla una función que homogeniza un polinomio.

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] &\to \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] \\ f &\mapsto x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \end{aligned}$$

con $d = \deg(f)$. En particular, no es homomorfismo de anillo.

Ejemplo 2.20. Sea $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2x_3 + 3$, este polinomio no es homogéneo. Pero aplicando el mapa β, obtenemos,

$$\beta(f) = x_0^3\left(\frac{x_1^3}{x_0^3} + \frac{x_2x_3}{x_0^2} + 3\right) = x_1^3 + x_0x_2x_3 + 3x_0^3$$

que es homogéneo.

Otro mapa que definiremos es,

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n] &\to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \\ f(x_0, \ldots, x_n) &\mapsto f(1, x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

El cual manda un polinomio $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ a un polinomio $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Que si es homomorfismo de anillos.

Se tiene que $\alpha(\beta(f)) = f$ para todo polinomio f, pero $\beta(\alpha(x_0)) = \beta(1) = 1$, por lo que no tienen comportamiento de inversa.

Proposición 2.6. *Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ conjunto algebraico con $J = \mathbb{I}_a(X)$. Se tiene,*

(a) $\overline{X} = \mathbb{V}_p(\beta(J))$.

(b) $\overline{X} \cap U_0 = \phi(X)$.

Dem. Recordemos que $\overline{X} = \overline{\phi}(X)$.

(a) Notemos que $\mathbb{V}_p(\beta(J))$ es cerrado. Sea $p \in \phi(X)$, entonces existe un $p^* \in \mathbb{A}^n$ tal que $\phi(p^*) = p$, en particular, si $X = \mathbb{V}_a(J)$ entonces $f(p^*) = 0$ para todo $f \in J$, aplicando β, obtenemos que $\beta(f)(p) = 0$ y esto es para todo $f \in \beta(J)$ entonces $\phi(X) \subseteq \mathbb{V}_p(\beta(J))$ y luego por clausura, $\overline{X} \subseteq \mathbb{V}_p(\beta(J))$.

Para la otra inclusión. Sea W algebraico proyectivo tal que $\phi(X) \subseteq W$. Sea $f \in \mathbb{I}_p(W) \subseteq \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$, escribrimos $f = \sum F_i$ con F_i homogéneo y $F_i \in \mathbb{I}_p(W)$. Dado $(b_1, \ldots, b_n) \in X$, el punto $[1 : b_1 : \cdots : b_n] \in \phi(X) \subseteq W$. Luego $F_i(1, b_1, \ldots, b_n) = 0$. Así que $\alpha(F_i)(b_1, \ldots, b_n) = 0$, obteenmos que $\alpha(F_i) \in \mathbb{I}_a(X) = J$. Aplicando β, se tiene $\beta(\alpha(F_i)) \in \beta(J) \subseteq \mathbb{I}_p(Y)$. Como F_i es homogéneo, se tiene $x_0^r\beta(\alpha(F_i)) = F_i \in \mathbb{I}_p(Y)$. Por tanto $f \in \mathbb{I}_p(Y)$, por tanto $\mathbb{I}_p(W) \subseteq \mathbb{I}_p(Y)$ y entonces $Y \subseteq W$.

(b) Notemos que $\phi(X) \subseteq U_0, \overline{X}$, por lo que $\phi(X) \subseteq U_0 \cap \overline{X}$, para la otra inclusión, notemos que ϕ es sobreyectiva, por lo que dado $p \in U_0$, este se puede expresar como $p = [1 : a_1 : \cdots : a_n]$, tomando $p^* = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$, se tiene que $\phi(p^*) = p$, luego $U_0 \subseteq \phi(X)$, luego $\phi(X) = U_0 \cap \overline{X}$.

■

2.11. Dualidad

En $\mathbb{P}^2$ una recta es dada por una ecuación de la forma,

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$$

con a, b, c no todos ceros. Podemos identificar la recta con $(a, b, c) \in \mathbb{A}^3$. Más aún,

$$\lambda ax_0 + \lambda bx_1 + \lambda cx_2 = 0$$

donde $\lambda \in \mathbb{K}^x$. Obtenemos la misma recta. Podemos identificar la recta con $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ siendo los coeficientes del polinomio y esto nos da una relación biyectiva. Es decir, $[a : b : c]$ se puede pensar como una recta.

Este nuevo $\mathbb{P}^2$ generado es el dual del $\mathbb{P}^2$ y se denota por $\mathbb{P}^{2*}$. Se tiene $\mathbb{P}^{2**}$ es el $\mathbb{P}^2$ "original" (aunque no son iguales en su totalidad).

Proposición 2.7. *Dado tres rectas en $\mathbb{P}^2$, si estas concurren, entonces sus duales son coliniales.*

Dem. Sean $L_i : a_1x + b_iy + c_iz = 0$ las rectas. Si concurren, entonces existe un punto $p^* = [p : q : r] \in \mathbb{P}^2$ tal que,

$$a_ip + b_iq + c_ir = 0$$

para todo $i = 1, 2, 3$. Los puntos duales de las rectas son,

$$p_i = [a_i : b_i : c_i]$$

Si conmutamos obtenemos,

$$pa_i + qb_i + rc_i = 0$$

es decir, existe una recta asociada al dual p^*, que pasa por los puntos p_i, dicho de otra forma, los duales son coliniales. ■

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ al tomar tres rectas distintas que se tocan en un mismo punto, podemos tomar un punto en cada recta, de forma que son coliniales. En genereal este resultado se puede generalizar para $\mathbb{P}^n$ con $n + 1$ rectas.

2.12. La cónica por cinco puntos

Una cónica en $\mathbb{P}^2$ está dada por una ecuación de la forma,

$$a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 = 0$$

con al menos un $a_i \neq 0$. Al igual que la rectas podemos identificar cónicas con puntos $[a_0 : \cdots : a_5] \in \mathbb{P}^5$. La cónica descrita pasa por $p_i = [u : v : w]$ si y sólo si,

$$a_0u^2 + a_1uv + a_2uw + a_3v^2 + a_4vw + a_5w^2 = 0$$

que es equivalente a decir: Si el punto $[a_0 : \cdots : a_5] \in \mathbb{P}^5$ está en el hiperplano,

$$H_{p_i} : X_0u^2 + X_1uv + X_2uw + X_3v^2 + X_4vw + X_5w^2$$

Es decir, al reemplazar $[a_0 : \cdots : a_5]$ en los X_i, se anula el polinomio. Dados cinco puntos $p_1, \ldots, p_5$ hay cinco hiperplanos y queremos ver cuántos puntos $[a_0 : \cdots : a_5] \in \mathbb{P}^5$ están en todas ellas.

Teorema 2.3. *Sean cinco puntos en $\mathbb{P}^2$, tales que no hay tres de ellos en la misma recta. Entonces hay una única cónica que pasa por ellos.*

Lema 2.3. *Dados cinco hiperplanos en $\mathbb{A}^6$ que pasan por el origen. Estas se intersectan en al menos una recta (que pasa por el origen).*

Dem. Sean los hiperplanos $H_i : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i6}x_6$ que pasan por el origen paea $i = 1, \ldots, 5$. Si lo pensamos como un sistema lineal, obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{51} & \ldots & a_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{bmatrix} = 0$$

Notemos que es una matriz de 5×6 y esto implica que vamos a obtener una variable libre, donde el resto de variable dependen de estar. Por lo que los cinco hiperplanos coinciden en una recta que pasa por el origen. ■

Lema 2.4. *Sea $C = \mathbb{V}(Q(x_0, x_1, x_2)) \subseteq \mathbb{P}^2$ una cónica y sea $L = \mathbb{V}(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) \subseteq \mathbb{P}^2$ recta. Si C y L se intersectan al menos tres puntos, entonces,*

$$(a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2) | Q(x_0, x_1, x_2)$$

Dem. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a_0 \neq 0$, la ecuación L se puede escribir como,

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{a_1}{a_0}x_1 - \frac{a_2}{a_0}x_2 \\ &= \overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2 \end{aligned}$$

Si un punto $[x_0 : x_1 : x_2]$ está en $L \cap C$, entonces,

$$Q(\overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2, x_1, x_2) = 0$$

que es un polinomio cuadrático homogéneo en dos variables ($\mathbb{K}[x_1, x_2]$) o bien Q es nulo.

Si Q no es nulo, entonces $Q = (a_1x_1 + a_2x_2)(b_1x_1 + b_2x_2)$. Así que tiene dos soluciones $[x_1 : x_2]$ y concluimos que Q y L se intersectan en a lo más 2 puntos.

Si C, L se intersectan tres puntos, entonces,

$$Q(\overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2, x_1, x_2) = 0$$

Viendo que $Q \in Q(\mathbb{K}[x_1, x_2])[x_0]$, del teorema del factor, obtenemos que,

$$x_0 - (\overline{a_1}x_1 + \overline{a_2}x_2)|Q$$

es decir, $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2|Q$. ■

Dem. (Teorema 2.4.) Sean $p_1, \ldots, p_5 \in \mathbb{P}^5$. Por el lema 2.. dice que los H_{p_i} se intersectan en al menos un punto, es decir, al menos una cónica pasa por los cinco puntos.

Supongamos que hay dos cónicas que pasan por estos cincos puntos de ecuación,

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad G(x_0, x_1, x_2) = 0$$

para cualquier $[s : t] \in \mathbb{P}^1$, tenemos,

$$sF + tG = 0$$

es cónica que pasa por los cinco puntos.

Sea $Q \in \mathbb{P}^2$ colineal con p_1, p_2. Existe $[s_0 : t_0] \in \mathbb{P}^1$ tal que $Q \in \{s_0F + t - 0G = 0\} = C_{s_0,t_0}$ (ajustando s, t pues se cumple $sF(Q) + tG(Q) = 0$).

Sea $L = \mathbb{V}(l(x_0, x_1, x_2))$ la recta por p_1, p_2, Q y vemos que $L \cap C_{s_0,t_0}$ al menos tiene tres puntos. Aplicando el lema anterior, la ecuación C_{s_0,t_0} es divisible por $l(x_0, x_1, x_2)$.

El otro factor lineal nos da una recta que debe pasar por p_3, p_4, p_5 puesto están en C_{s_0,t_0}, siendo contradición. ■

Ejemplo 2.21. Dada una parábola $V = \mathbb{V}(x_1^2 - x_2) \subseteq \mathbb{A}^2$, la podemos ver en $\mathbb{P}^2$ restrigiendo al abierto $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ como el conjunto:

$$\phi(V) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0 = 1, x_1^2 - x_2 = 0\}$$

Determinemos la clausura proyectiva. Sabemos que $\overline{X} = \mathbb{V}(\beta(f)) \subseteq \mathbb{P}^2$, si $\beta(f) = x_0^2\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} - \frac{x_2}{x_0}\right) = x_1^2 - x_2x_0$, entonces,

$$\overline{\phi(V)} = \mathbb{V}(x_1^2 - x_2x_0) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_1^2 - x_2x_0 = 0\} = \phi(X) \cup \{[0 : 0 : 1]\}$$

2.13. Anillos de Coordenadas

Definición 2.18. *Dada una variedad proyectiva $V \subseteq \mathbb{P}^n$, el anillo de coordenadas homogéneo de V es,*

$$\frac{\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]}{\mathbb{I}(V)} = \Gamma(V) = \mathcal{O}_{\mathbb{K}}(V) = \mathbb{K}[V]$$

En este caso no existe relación entre $\Gamma(V)$ y las funciones polinomiales $f : V \to \mathbb{K}$. Una función f de este tipo debería por lo menos estar bien definida, es decir $f(\lambda p) = f(p)$ para todo $p \in \mathbb{P}^n$, así que f sería constante (homogénea de grado 0).

Más adelante veremos la utilidad de anillos de coordenadas homogéneos.

2.14. Variedad Cuasiproyectivas

Definicion 2.19. *Una variedad cuasiproyectiva es un subconjunto abierto (usando la topología de Zariski) de un conjunto algebraico proyectivo. Es decir, la intersección de un conjunto algebraico de $\mathbb{P}^n$ con un abierto de $\mathbb{P}^n$*

Por lo que:

- Variedades proyectivas son cuasiproyectivas.
- Variedades afines son cuasiproyectivas (usando la identificación dada por ϕ).
- Hay variedades cuasiproyectivas que no son afines ni proyectivas.

Ejemplo 2.22. Se cumple que,

$$\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\} = \mathbb{P}^2 \cap (U_0 \cap \{[1:0:0]\}^C)$$

Por lo que $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es una variedad cuasiproyectiva que no es variedad proyectiva, ni variedad afín inducida.

2.15. Morfismos de Variedades Cuasiproyectivas

Definición 2.20. *Un morfismos de variedades cuasiproyectivas $f : X \to Y$ con $X \subseteq \mathbb{P}^n, Y \subseteq \mathbb{P}^m$ es una función tal que $f(X) \subseteq Y$ y tal que para todo $p \in X$ hay polinomios homogéneos del mismo grado $F_0, \ldots, F_m \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ tales que la "función" (no necesaraimente definida sobre todo X)*

$$\begin{aligned} X &\to \mathbb{P}^m \\ Q &\mapsto [F_0(Q) : \cdots : F_m(Q)] \end{aligned}$$

está bien definida en p (es decir $F_i(p) \neq 0$ para algún i) y coincide con f en un abierto que contine a p.

Dicho de otra forma, $f : X \to Y$ es morfismo si cada punto de p existe una relación bien definida que coincide con f en un abierto que contiene el punto p.

Ejemplo 2.23. Sea $V := \mathbb{V}(x_2 - x_1^2)$. Sea la función de variedades afines,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to V \\ x &\mapsto (x, x^2) \end{aligned}$$

Para estuidar el morfismo de variedades cuasiproyectivas, debemos pasar a la proyección. Notemos que $\phi(\mathbb{A}^1) = \overline{A^1} \cup U_0$ que es variedad cuasiproyectiva, y $\phi(V) = \overline{V} \cap U_0 = \mathbb{V}(x_2x_0 - x_1^2) \subseteq \mathbb{P}^2$ que también es variedad cuasiproyectiva. Luego podemos sospechar que,

$$\begin{aligned} \overline{f}^* : \overline{A^1} \cap U_0 &\to \overline{V} \cap U_0 \\ [1 : x] &\mapsto [1 : x : x^2] \end{aligned}$$

es nuestro morfismo. Sea $p = [1 : x] \in \overline{A^1} \cap U_0$, consideremos la función,

$$\begin{aligned} \overline{f} : \overline{\mathbb{A}^1} \cap U_0 &\to \mathbb{P}^2 \\ [x_0 : x_1] &\mapsto [x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2] \end{aligned}$$

Bien definido ya que x_0^2, x_0x_1, x_1^2 son polinomios homogéneos de mismo orden que no se anulan en todas las coordenadas. Notemos que evaluando en p obtenemos $\overline{f}(p) = [1 : x : x^2]$, es decir, f^* es un morfismo de variedad cuasiproyectivas.

Ejemplo 2.24. Dado $V = \mathbb{V}(y^2 - xz) \subseteq \mathbb{P}^2$, consideramos

$$\begin{aligned} f_x : V \cap U_x &\to \mathbb{P}^1 \\ [x : y : z] &\mapsto [x : y] \\ f_z : V \cap U_z &\to \mathbb{P}^1 \\ [x : y : z] &\mapsto [y : z] \end{aligned}$$

Vemos que $(V \cap U_x) \cup (V \cap U_z) = V$ pues, si $y = 0$, entonces $x = 0$ o $z = 0$. Por otro lado, en $V \cap U_x \cap U_z$ se tiene,

$$[x : y] = [xy : y^2] = [xy : xz] = [y : z]$$

Así podemos definir el morfismo

$$\begin{aligned} f : V &\to \mathbb{P}^1 \\ [x : y : z] &\mapsto \begin{cases} [x : y] & z \neq 0 \\ [y : z] & z \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.25. El embedding de Veronese es el siguiente morfismo:

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{P}^2 &\to \mathbb{P}^5 \\ [x : y : z] &\mapsto [x^2 : y^2 : z^2 : xy : xz : yz] \end{aligned}$$

La variedad $\nu(\mathbb{P}^2)$ es la superficie de Veronese. Se pueden definir otros embeddings de Veronese, cambiando cantidad de variables o grado de monomios.

Definición 2.21. *Un isomorfismo de variedades cuasiproyectivas es morfismo $f : X \to Y$ tal que su inversa $g : Y \to X$ es también un morfismo.*

Ejemplo 2.26. Todo hiperplano en $\mathbb{P}^n$ es isomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}$. Primero veamos que $\mathbb{P}^{n-1} \cong \mathbb{V}(x_0) \subseteq \mathbb{P}^n$. Sea,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(x_0) &\to \mathbb{P}^{n-1} \\ [x_0 : \cdots : x_n] &\mapsto [x_1 : \cdots : x_n] \end{aligned}$$

Un morfismos de variedad cuasiproyectivas. Notemos que el morfismo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{n-1} &\to \mathbb{V}(x_0) \\ [x_0 : \cdots : x_{n-1}] &\mapsto [0 : x_0 : \cdots : x_n] \end{aligned}$$

es la inversa. Así que $\mathbb{V}(x_0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Veamos que los hiperplano son isomorfos a $\mathbb{V}(x_0)$ (solo demostraremos para el caso $n = 2$). Sea $H = \mathbb{V}(ax_0 + bx_1 + cx_2) \subseteq \mathbb{P}^2$. Sea el morfismo,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(ax_0 + bx_1 + cx_2) &\to \mathbb{V}(x_0) \\ [x_0 : x_1 : x_2] &\mapsto [ax_0 + bx_1 : x_1 : x_2] \end{aligned}$$

como estamos trabajando en un hiperplano, se tiene que a, b, c no son todos nulos. La inversa es,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(x_0) &\to \mathbb{V}(ax_0 + bx_1 + cx_2) \\ [(-bx_1 - cx_2)/a : x_1 : x_2] &\mapsto [0 : x_1 : x_2] \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \neq 0$. Vemos que son inversas, luego $H \cong \mathbb{V}(x_0)$. Por tanto $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$. $\Supset$

2.16. Anillos de Coordenadas y Equivalencia Proyectiva

Que dos variedades proyectivas sean isomorfos no nos da isomorfismos de anillos de coordenadas homogéneas.

Ejemplo 2.27. Morfismo de Veronese el cual está dado por,

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{P}^1 &\to \mathbb{P}^2 \\ [x : y] &\mapsto [x^2 : xy : y^2] \end{aligned}$$

Vemos que,

$$W = Im(\nu) = \{[x^2 : xy : y^2] \in \mathbb{P}^2 : [x : y] \in \mathbb{P}^1\} \subseteq \mathbb{V}(xz - y^2) =: V$$

Los puntos con alguna coordenadas igual a cero en V son $[0:0:1],[1:0:0]$ y están en W. Sea $[x:y:z]\in V$ con $x,y,z\neq 0$. Luego,

$$[x:y:z]=[x^{\cdot}xy:xz]=[x^2:xy:y^2]\in W$$

por tanto $W=V$.

Debemos mostrar que $\mathbb{P}^1\cong V\subseteq\mathbb{P}^2$. Definimos,

$$\begin{aligned} g: V &\to \mathbb{P}^1 \\ [x:y:z] &\mapsto [x:y] \text{ en } U_x \\ [x:y:z] &\mapsto [y:z] \text{ en } U_z \end{aligned}$$

En $U_x\cap U_z$ tenemos,

$$[x:y]=[xy:y^2]=[xy:xz]=[y:z]$$

Por tanto g es morfismo.

Se puede verificar que g y ν son inversas. Luego $V\cong\mathbb{P}^1$. Los anillos de coordenadas homogéneos son,

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbb{P}^1) &= \frac{\mathbb{K}[x,y]}{(0)}\cong\mathbb{K}[x,y] \\ \Gamma(\nu) &= \frac{\mathbb{K}[x,y,z]}{(xz-y^2)} \end{aligned}$$

Este último es un D.F.U. Por tanto,

$$\Gamma(\mathbb{P}^1)\ncong\Gamma(\nu)$$

Figurgas

Necesitamos una noción más fuerte que isomorfismos de variedades proyectivas.

Definición 2.22. *Dos variedades proyectivas son proyectivamente equivalentes si existe un cambio de coordenadas (lineal) en $\mathbb{P}^1$ que define un isomorfismo entre ellos.*

2.17. Funciones Racionales

Definición 2.23. *Una función racional en una variedad proyectiva V es una función (parcialmente definuida) $f: V \dashrightarrow \mathbb{K}$ dada por $f(p)=\frac{g(p)}{h(p)}$ con $g,h\in\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ homogéneo del mismo grado, con $h\neq 0$. Vemos que cuando $h(p)\neq 0$ se tiene,*

$$\begin{aligned} f(\lambda p) &= \frac{g(\lambda p)}{h(\lambda p)} \\ &= \frac{\lambda^d g(p)}{\lambda^d h(p)} = f(p) \end{aligned}$$

para todo $\lambda\in\mathbb{K}^X$

Definición 2.24. *El cuerpo de funciones racionales de V es:*

$$\mathbb{K}(V) = \left\{ \frac{g}{h} : g, h \in \mathbb{K} \in [x_0, \dots, x_n] \text{ homogénea del mismo grado, } h \in (V) \right\} / \sim$$

donde $\frac{g}{h} \sim \frac{\overline{g}}{\overline{h}}$ *si y sólo si* $g\overline{h} - \overline{g}h \in \mathbb{I}(V)$.

Definición 2.25. *Decimos que* $f \in \mathbb{K}(V)$ *es regular en* $p \in V$ *si existe una representación* $\frac{g}{h}$ *de* f *con* g, h *homogéneos del mismo grado y* $h(p) \neq 0$. *El dominio de* $f \in \mathbb{K}(V)$ *es,*

$$Dom(f) = \{p \in V : f \text{ regular en } p\}$$

Se define el anillo local de V en p por,

$$\mathcal{O}_{V,p} = \{f \in \mathbb{K}(V) : f \text{ regular en } p\}$$

Diremos que es de verdad local, si su único ideal maximal es,

$$m_{V,p} := \{f \in \mathcal{O}_{V,p} : f = \frac{g}{h}, g(p) = 0, h(p) \neq 0\}$$

2.18. Funciones Racionales y Morfismos de Variedades Proyectivas

Definición 2.26. *Una función racional de variedades proyectivas* $V \subseteq \mathbb{P}^n, W \subseteq \mathcal{P}^m$ *es,*

$$\begin{aligned} f : V &\dashrightarrow W \\ p &\mapsto [f_0(p) : \dots : f_n(p)] \end{aligned}$$

con $f_i \in \mathbb{K}(V)$ *y* $f(V) \subseteq W$. *Notamos que si* $\neq g \in \mathbb{K}(V)$, *entonces* $gf_0, \dots, gf_m$ *define la misma función racional, salvo cambiar dominio.*

Definición 2.27. *Una fucnción racional* $f : V \to W$ *es regular en* $p \in V$ *si existe una representación* $[f_0 : \dots : f_m]$ *de* f *tal que,*

(a) Cada f_i *es regular en* p.

(b) $f_i(p) \neq 0$ *para al menos un* i.

Notar que si f *es regular en* p, *entonces es regular en una vecindad (de Zariski) de* P. *Esto viene del hecho que* (i) *y* (ii) *son condiciones abiertas.*

Definición 2.28. *Sea* $V \subseteq \mathcal{P}^n$ *vairedad (proyectiva) y* $U \subseteq V$ *un abierto de* V. *Un morfismo* $f : U \to W$, *con (*W *otra variedad proyectiva) es una función racional* $f : U \dashrightarrow W$ *tal que* $U \subseteq Dom(f)$, *donde* $Dom(f)$ *se define de la manera usual. En otras palabras, es función racional regular en todo* U.

Ejemplo 2..

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^n &\to \mathbb{P}^n \\ p &\mapsto p \end{aligned}$$

es morfismo.

Ejemplo 2.. La transformacion de Cremona

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^2 &\to \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto [xy : x : yz] \end{aligned}$$

Transformación de Cremona

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^2 &\to \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto [xy : xz : yz] \end{aligned}$$

Se puede puede ver que,

$$\mathbb{P}^2 \setminus \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$$

Supongamos que f es regular en $[0 : 0 : 1] = Q$, entonces es regular en una vecindad de Q (en la topología de Zariski). Consideremos la recta $L_y := \{y = 0\}$, notemos que,

$$f(L_y \setminus \{Q, [1 : 0 : 0]\}) = [0 : 1 : 0]$$

Por tanto $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{P}^2 \setminus \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$ y f no es morfismo.

2.19. Funciones Domintantes y Birracionalidades

Dada una función racional $F : V \dashrightarrow W$ donde V, W son variedades proyectivas (o afines), entonces $\mathrm{Dom}(f)$ es un abierto de Zarisli (es decir, grande). Para hablar de composiciones (e inversa) necesitamos la siguiente noción:

> **Definición 2..** *Una función racional $f : V \dashrightarrow W$. Decimos que es dominante si su imagen contiene un abierto no vacío de W.*

Ejemplo 2.. Sea la función,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to \mathbb{A}^1 \\ t &\mapsto 0 \end{aligned}$$

El cual no es dominante, y sea otra función,

$$g : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{V}(xy - 1)$$

Podemos ver que $g \circ f$ no está bien definido, en particular, nunca lo está, por tanto $g \circ f$ no es racional.

Para poder trabajar con composiciones de funciones racionales $g \circ f$ y que sea racional,basta pedir que f sea dominante o que g sea morfismo. A partir de esto podemos definir funciones birracionales.

Definición 2.. *Una función racional $f : V \to W$ sobre variedades afines o proyectivas es birracional si es dominante y hay otra función racional $g : W \dashrightarrow V$ tal que $g \circ f = Id_V, f \circ g = Id_W$ (identidad como funciones racionales, definidas en abiertos).*

Definición 2.. *Dos variedades V, W (afines proyectivas) son birracionales si existe $f : V \dashrightarrow W$ birracional.*

Proposición 2.. *Dos variedades V, W (afines, proyectivas) son birracionales si y solo si hay abiertos $V_0 \subseteq V, W_0 \subseteq W$ tales que $f\big|_{V_0} : V_0 \to W_0$ es isomorfismo (con $f : V \dashrightarrow W$ birracional).*

Dem. Po probar

Ejemplo 2.. Retomemos la transformación de Cremona definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^2 &\to \mathbb{P}^2 \\ [x : y : z] &\mapsto [xy : xz : yz] \end{aligned}$$

En caso de que x, y, z no sean nulos, entonces,

$$[x, y, z] \mapsto \left[\frac{1}{z} : \frac{1}{y} : \frac{1}{x}\right]$$

Podemos ver que f es birraconal y que además es su propia inversa.

2.20. Espacios Multiproyectivos y Gráficos

Se puede pensar en que $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m = \mathbb{A}^{n+m}$ olvidando la topología. A ese producto le damos la topología de Zariski $\mathbb{A}^{n+m}$ que no es la topología producto, por lo que no resulta tan complicado de estudiar, en cambio $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ requiere de más cuidado.

Ejemplo 2.. Por definición,

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \{([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) : [x_0 : x_1], [y_0 : y_1] \in \mathbb{P}^1\}$$

Para construir su topología vamos hacer lo siguiente: Consideramos los cerrados (conjuntos algebraicos) definidos como lugares de cero de polinomios bihomogéneos de bigrado (a,b).

Ejemplo 2.. Podemos estudiar la diagonal definido por $\Delta \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,

$$\Delta = \{([x : y], [u : v]) : [x : y] = [u : v]\}$$

Podemos comprobar que $\Delta = \mathbb{V}(xv - yu)$

Los espacios multiproyectivos en general son de la forma:

$$\mathbb{A}^r \times \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$$

Pero viendo que $\mathbb{A}^r$ es abierto (bien entendiado de $\mathbb{P}^r$), nos enfocamos en $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_s}$. Aquí trabajamos con polinomios multihomogéneso con multigrado $(d_1, \ldots, d_s)$. Se pueden definir morfismos de variedades multiproyectivas de manera natural.

Ejemplo 2.. Consideremos el siguiente mofirsmo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1 \mathbb{P}^1 \\ [x : y] \mapsto [G(x, y) : H(x, y)] \end{aligned}$$

con $G, H \in \mathbb{K}[x, y]$ homogéneos coprimos de grado d. Podemos estudiar el gráfico de f-grado,

$$\Gamma_f := \{([x : y], [u : v]) : [u : v = [G(x, y).H(x, y)]\} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

Tenemos que Γ_f es un conjunto cerrado determinado por:

$$\Gamma_f = \mathbb{V}(uH(x, y) - vG(x, y))$$

y ese polinomio es de bigrado $(d, 1)$.

Podemos definir morfismos (de variedades multiproyectivas),

$$\begin{aligned} \pi : \Gamma_f &\to \mathbb{P}^1 \\ (P, Q) &\mapsto P \\ F : \mathbb{P}^1 &\to \Gamma_f \\ P &\mapsto (P, f(P)) \end{aligned}$$

Vemos que $\pi \circ F = Id_{\mathbb{P}^1}, F \circ \pi = Id_{\Gamma_f}$, obteniendo que $\mathbb{P}^1 \cong \Gamma_f$ (como variedades multiproyectivas).

3. Incrustación (Inmersión) de Segre

Definimos la funcion,

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s &\to \mathbb{P}^N \\ ([x_0 : \cdots : x_r], [y_0 : \cdots : y_s]) &\mapsto [x_0 y_0 : x_0 y_1 \ldots x_i y_j : \cdots : x_r y_s] \end{aligned}$$

donde $N = (r + s)(s + 1) - 1$. Podemos pensarlo como una matriz,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & \ldots & y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 y_0 & \ldots & x_0 y_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r y_0 & \ldots & x_r y_s \end{pmatrix}$$

Escribimos $S_{r,s} = \sigma(\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s)$.

Nos restringiremos al caso $r = 2, s = 1$. Se tiene que $S_{2,1} \subseteq V := \mathbb{V}(u_0u_3 - u_1u_2, u_0u_5 - u_1u_4, u_2u_5 - u_3u_4) \subseteq \mathbb{P}^5$. Más aún, dado $Q \in V$, de las coordenadas $u_0, \ldots, u_4$ podemos determinar una preimagen. Por tanto $S_{2,1}$ es conjunto algebracios en $\mathbb{P}^5$. Con el morfismo:

$$\begin{aligned} S_{2,1} &\to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \\ [u_0 : \cdots : u_5] &\mapsto ([u_0 : u_2 : u_4], [u_0 : u_1]) \end{aligned}$$

Obtenemos que σ es isomorfismo (restringir codominio a $S_{2,1}$). Luego $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ es isomorfo a una variedad de $\mathbb{P}^5$.

Nota 2.. Se puede estudiar en general para $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$.

Ejemplo 2.. Con respecto a $S_{1,1}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\mapsto \mathbb{P}^3 \\ ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) &\mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1] \end{aligned}$$

Y $S_{1,1} = \mathbb{V}(u_0u_4 - u_2y_3)$ es llamado la cuádrica de Segre.

Sabemos que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es una (hipersuperficie) cuádrica en $\mathbb{P}^3$. Por ahora no podemos demostrar nada, pero veremos que son birracionales, pero no isomorfos.

3.1. Blow-Ups

El Blow-ups es una forma de construir funciones birracionales, es más, es la forma más sencilla de hacerlo. Obtendremos una función que es isomorfismo salvo en un punto particular.

Estudiemos $\mathbb{A}^2$ en $P = (0, 0)$. Consideremos el abierto $U_z = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : x \neq 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$ y el morfismo:

$$\begin{aligned} f : U_x &\to \mathbb{A}^1 = \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Que nos da las "pendientes no verticales.$^{\text{en}}$ $\mathbb{A}^2$. Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^3$, el gráfico de f,

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in A^3 : zx = y, x \neq 0\}$$

Por otra parte consideremos,

$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3 : y = zx\} = \mathbb{V}(y - zx)$$

que es una variedad afín (isomorfa a $\mathbb{A}^2$). Tenemos el siguiente morfismo:

$$\begin{aligned} \pi : B &\to \mathbb{A}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

Notemos que $\pi(B) = U_x \cup \{P\}$. Si nos restringimos a $\pi^{-1}(U_x)$ se tiene,

$$\begin{aligned} \pi : \pi^{-1}(U_x) &\to U_x \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y) \\ \left(x, y, \frac{y}{x}\right) &\leftarrow |(x, y) \end{aligned}$$

es isomorfismo. Por otro lado $\pi^{-1}(P) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{K}\} \subseteq B$ es una recta que llamamos divisor excepcional. El morfismo $\pi : B \to A^2$ es el blow-up de $\mathbb{A}^2$ en $(0, 0)$.

Consideremos el nodo $C := \mathbb{V}(y^2 - x^3 - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2$ y notamos que se corta a ella misma $(0, 0)$. Veamos que ocurre si .ªplicamos”blow-up en $(0, 0)$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(C) &= \pi^{-1}(\{(0, 0)\}) \cup \{(x, y, z) : \pi(x, y, z) \in C, y = xz, (x, y) \neq (0, 0)\} \\ &= \pi^{-1}(\{(0, 0)\}) \cup \{(x, y, z) : y^2 - x^3 - x^2, y = xz, (x, y) \neq (0, 0)\} \\ &= \pi^{-1}(\{(0, 0)\}) \cup \{(x, y, z) : z^2 = x + y1, y = xz, x \neq 0\} \end{aligned}$$

La transformada estrica de C es:

$$\overline{C} = \mathbb{V}(z^2 - x - 1, y - xz) \subseteq \mathbb{A}^3$$

Continuamos con blow-up de $\mathbb{A}^n$ en $(0, 0, 0)$. Sea,

$$B = \{(x, l) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : x \in l\} \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n+1}$$

Este es el conjunto de pares x, l con $x \in \mathbb{A}^n$ y l la recta que pasa por el origen y por x. Por lo que el blow-up de $\mathbb{A}^n$ en el origen, es:

$$\begin{aligned} B &\to \mathbb{A}^n \\ (x, l) &\mapsto x \end{aligned}$$

Dado $x \in \mathbb{A}^n$ no nulo, se tiene $\pi^{-1}(x) = (x, l))$, con l la única recta de $\mathbb{A}^n$ por 0 y x. Es un punto en $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, y por otra parte, $\pi^{-1}(0, \ldots, 0) \cong \mathbb{P}^{n-1}$.

Definición 2.. *Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín y $P \in V$ punto. El blow-up de $\mathbb{A}^n$ en P nos da la transformada estricta de V, que es la clausura de Zariski de $\pi^{-1}(V \setminus P)$* (con π adaptado a P.)

Ejemplo 2.. El cono $\mathbb{V}(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$. Veamos su transformada estrica (o información sobre ella) usando blow-up de $\mathbb{A}^3$ en $(0, 0, 0)$.

$$\begin{aligned} B = \{(\vec{x}, l) \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 : \vec{x} \in l\} &\to \mathbb{A}^3 \\ (\vec{x}, l) &\mapsto \vec{x} \end{aligned}$$

Luego,

$$\pi^{-1}(V \setminus (0, 0, 0)) = \{((x, y, z), l) \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 : (x, y, z) \in l, x^2 + y^2 = z^2, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

Escribiendo l como la recta que pasa por $(0,0,0)$ y $(u,v,w) \neq (0,0,0)$. Se tiene $(x,y,z) \in l$ si y sólo si $vx = uy, wx = uz, wy = vz$.

$$= \{((x,y,z),[u:v:w]) : vx = uy, wx = uz, wy = vz, x^2 + y^2 = z^2, (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$$

Una cúbica en $\mathbb{P}^2$ es una curva dada por ecuaicones de grado 3.

Teoream 2.. (Cayley-Bacharach) *Dadas*2 *cúbicas* C_1, C_2 *en* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *que se intersectan en* 9 *puntos, se tiene que cualquier cúbica de* $\mathbb{P}^2$ *que pasa por* 8 *de esos puntos, pasa potr el noveno.*

Uno puede hacer explosiones en los 9 y e obtiene una superficie birracional a $\mathbb{P}^2$. Esta superficie es una superficie elíptica.

3.2. Suavidad

Dada una variedad afín, queremos estudiar el espacio tangente a ella en un punto. Asumimos que el punto P elegido es el orgien.

Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$, y sea $Q = (a_1, \ldots, a_n)$ distinto al origen. Sea L recta por el orgien y por Q, entonces,

$$L = \{(ta_1, \ldots, ta_n) : t \in \mathbb{C}\}$$

¿Cuándo es L tangente a V en el origen?

Si $\mathbb{I}(V) = (F_1, \ldots, F_r)$, con $F_i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, la intersección entre L y V se calcula resolviendo,

$$\begin{cases} F_1(ta_1, \ldots, ta_n) & = 0 \\ & \vdots \\ F_r(ta_1, \ldots, ta_n) & = 0 \end{cases}$$

para t. Sabemos que $t = 0$ es solución. Debemos estudiar si t es solución "múltiple". En este caso, la multiplicidad es la mayor potencia de t que divide todos los $F_i(ta_1, \ldots, ta_n)$.

Definición 2.. *Dado* $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *variedad afín, el espacio tangente a* V *en* P*, denotado* T_pV*, es la unión de todos los puntos que pertenecen a una recta tangente a* V *en* P*.*

Veremos que los espacios tangentes son espacios vetoriales. Si P es un punto aislado de V, T_pV es el espacio vectorial P, de dimensión 0.

Ejemplo 2.. Sea $V = \mathbb{V}(y - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2$. Sea una recta que pasa por $(0,0)$ y $(a,b) \in V$, con $(a,b) \neq (0,0)$ es,

$$L_{(a,b)} = \{(ta, tb) : t \in \mathbb{C}\}$$

El sistema obtenido es,

$$tb - (ta)^2 = 0$$

Entonces $t(b-ta^2)=0$, peor cuando $b=0$ se tiene $t^2a^2=0$ y entonces $T_pV=\{y=0\}=\mathbb{V}(y)$.

Ejemplo 2.. Sea $V=\mathbb{V}(y^2-x^2-x^3)\subseteq\mathbb{A}^3$. Entonces la intersección entre V y $L_{(a,b)}$ es,

$$t^2b^2-t^2a^2-t^3a^3=0$$

Luego $t^2(b^2-a^2-ta^3)=0$, por tanto $T_pV=\mathbb{A}^2$.

Ejemplo 2.. Sea $V=\mathbb{V}(y^2-x^3)\subseteq\mathbb{A}^2$, luego,

$$t^2b^2-t^3a^3=0$$

Luego $t^2(b^2-ta^3)=0$ y entonces $T_pV=\mathbb{A}^2$.

Los puntos donde nos da $T_pV=\mathbb{A}^2$ son extraños, tangencia para cada recta que pasa por P no es común (es condición cerrada en la topología de Zarisli), es algo singular.

Defnción 2.. *Dada variedad con más de 1 punto $V\subseteq\mathbb{A}^n$, si es un abierto de Zariski $U\neq\emptyset$ las dimensiones $\dim(T_pV)$ son iguales a un número d, diremos que $\dim(V)=d$. Un punto $Q\in V$ es suave si $\dim(T_pV)=\dim(V)$, si no es suave se llamará singular.*

Uno puede estudiar puntos singualres con derivadas, pues estamos trabajando con espacios tangentes.

Definición 2.. *El diferencial $dF\big|_P$ de un polinomio $F\in C[x_1,\ldots,x_n$ es un punto $P=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{C}^n$ es la parte lineal de la expansión de Taylor de F en P,*

$$dF\big|_P(x-p)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}(P)(x_j-p_j)$$

Ejemplo 2.. Sea $F(x,y)=y^2-x^2-x^3$, entonces,

$$dF\big|_{(0,0)}((x,y)-(0,0))=(2\cdot 0-3\cdot 0^2)(x-0)+(2\cdot 0)(y-0)=0$$

Ejemplo 2.. Sea $F(x,y)=y-x^2$, entonces,

$$dF\big|_{(0,0)}(0,0)=(2\cdot 0)+1(y-0)=y$$

Teorema 2.. *Sea V una variedad afín en $\mathbb{A}^n$ con $\mathbb{I}(V)=(F_1,\ldots,F_r)$. Sea P punto en V. Entonces el espacio tangente a V en P es la variedad (lineal):*

$$T_pV=\mathbb{V}(dF_1\big|_P(x-P),\ldots,dF_r\big|_P(x-P))\subseteq\mathbb{A}^n$$

y es independiente de los generadores F_i.

Dem pablo

3.3. Técnica para encontrar puntos singulares

Teorema 2.. *El conjunto de los puntos singualres de una variedad cuasiproyectiva V es el siguiente:*

- *Si $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es variedad afín de dimensión d, con $\mathbb{I}(V) = (F_1, \ldots, F_r)$, entonces el conjunto de puntos singulares de V es el lugar de ceros común de los polinomios obtenidos como los determinantes de las submatrices de tamaño $(n-d) \times (n-d)$ de la matriz Jacobiana,*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- *Si V es proyectivo o cuasiproyectivo, se cubre V con abiertos afines y se trabaja en ellos.*

Dem idea pablo

Ejemplo 2.. Aseguramos que el nodo $\mathbb{V}(y^2 - x^3 - x^2)$ es singular solamente en el origen. Calculamos,

$$D(y^2 - x^3 - x^2) = (-3x^2 - 2x\ 2y)$$

Estudiaremos subdeterminantes de tamaño $(2-1)\times(2-1)$. Amvos se anulan en $(0,0)$ y $(-\frac{2}{3}, 0)$ pero $(-\frac{2}{3}, 0) \notin V$ así que solo hay singularidad en $(0,0)$.

Ejemplo 2.. La cúbia twisteada o torcida. Está es dada por:

$$\mathbb{V}(xz - y^2, yw - z^2, xw - yz) \subseteq \mathbb{P}^3$$

Estudiramos este ejemplo en el abierto U_w, los otros abiertos necesitan un trabajo similar.

$$\mathbb{V}(xz - y^2, y - z^2, x - yz) \subseteq \mathbb{A}^3 \begin{pmatrix} z & -2y & x \\ 0 & 1 & -2z \\ 1 & -z & -y \end{pmatrix}$$

Consideremos subdeterminantes de tamaño $(3-1)\times(3-1)$. Notemos que,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -z \end{pmatrix}$$

es submatriz de la anterior y esta tiene determinante -1 para todo punto de la vatiedad. Luego es suave en todo U_w.

3.4. Dimensión

Definición 2.. *Dado un espacio topológico X, la dimensión de X es el supremo de todos los enteros n tales que existe una cadena de cerrados irreducibles no vacíos,*

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$$

de X.

Ejemplo 2.. Los irreducibles de $X = \mathbb{A}^1$ (topología de Zariski) son los puntos y X. Luego $\dim(X) = 1$.

Definición 2.. *Dado un anillo A, la altura de un ideal primo P de A es el supremo de los n tales que hay cadena de ideales primos,*

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P$$

La dimensiín de Krull de A es el supremo de las alturas de los ideales primos de A.

Ejemplo 2.. $\dim \mathbb{C}[x] = 1$.

Ejemplo 2.. $\dim \mathbb{K} = 0$ si $\mathbb{K}$ es un cuerpo.

Ejemplo 2.. La dimesión de un D.I.P que no es cuero, es 1.

Teorema 2.. *Dado un anillo Noetheriano A, se tiene,*

$$\dim A[x] = 1 + \dim A$$

Corolario 2.. *Dado un cuerpo $\mathbb{K} = \overline{K}$, tenemos que $\dim \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = n$.*

Dem pablo

Corolario 2.. *Dado un cuerpo $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, tenemos $\dim \P^n_{\mathbb{K}} = n$.*

Dem pablo

Definición 2.. *La dimensión de una variedad cuasiproyectivas es su dimensión como espacio topológico (topología subespacio).*

Ejemplo $V = \mathbb{V}(x + y + z) \subseteq \mathbb{A}^3$. Calculemos la dimensión de V. Tenemos la siguiente cadena de cerrados irreducibles:

$$\mathbb{V}(x, y, z) = \mathbb{V}(x + y + z, x, y) \subset \mathbb{V}(x + y + z, x) \subset \mathbb{V}(x + y + z) = V$$

Luego $\dim V \geq 2$. Si $\dim V > 2$ tendríamos la cadena,

$$Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset V \subset \mathbb{A}^3$$

y $\dim \mathbb{A}^3 > 3$, siendo contradicción.

Ejemplo 2.. La cubica twisteada $V = \mathbb{V}(xz - y^2, yw - z^2, xw - yz) \subseteq \mathbb{P}^3$. Calculemos la dimensión de V. Tenemos que,

$$\text{punto} \subset V \subset \mathbb{V}(xz - y^2) \subset \mathbb{P}^3$$

Si $\dim V \geq 2$, entonces tendríamos $\dim \mathbb{P}^3 \geq 4$. Siendo contradicción. Por tanto $\dim V < 2$, también la cadena anterior nos dice que $\dim V \geq 1$, por lo tanto $\dim V = 1$.

Definición 2.. *Dada variedad afín* $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *o proyectiva* $V \subseteq \P^n$, *la codimensión de* V *es* $n - \dim V$. *La variedad* V *es intersección completa si* $\mathbb{I}(V)$ *puede ser generado por codim* V *elementos.*

Hay otra noción de dimensión más algebracias.

Definición 2.. *Sea* $V \subseteq \mathbb{P}^n$ *una variedad cuasiproyectiva. La dimensión de* V *es el grado de trascendencia de* $\mathbb{K}(V)$

Veamos una equivalencia de las definiciones en el caso afín.

Lema 2.. *Sea* $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *una variedad, la dimensión de* V *es la dimensión de Krull de* $\mathbb{K}[V]$.

Dem ...pablo

Proposición 2.. *Sea* $V \subseteq \mathbb{A}^n$ *una variedad, entonces su dimensión es trdeg*$K(V)$

Dem pablo.

Corolario 2.. *La dimensión es invariante birracional.*

3.5. Curvas Planas Proyectivas y Teorema de Bezout

Definición 2.. *Una curva plana proyectiva es un conjunto algebraica proyectivo de dimensión* 1 *en* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. *Toda curva en* $\mathbb{P}^2$ *se puede ver como* $\mathbb{V}(f)$, *con* $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$ *homogéneo.*

Recuerdo: Dos rectas distintas en $\mathbb{P}^2$ se intersectan en exactamente 1 punto.

Ejemplo 2.. Estudiemos la intersección entre $\mathbb{V}(x^2 + y^2 - 2z^2)$ y $\mathbb{V}(x + y + z)$. Si $z = 0$ notemos intersección, digamos que $z \neq 0$ (por lo que podemos pensar en $z = 0$), entonces que la intersección es,

$$\left[-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} : -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} : 1\right]$$

QUe son dos puntos.

Ejemplo 2.. Estudiemos la intersección entre $\mathbb{V}(x^2 + y^2 - 2z^2)$ y $\mathbb{V}(x + y - 2z)$. Cuando $z = 0$ no hay interseccion. Si $z = 1$, entonces $2(y - 1)^2 = 0$, por lo que el único punto de intersección es $[1 : 1 : 1]$, contada 2 veces.

Teorema 2.. *Sea* L *una recta en* $\mathbb{P}^2$ *y* $C\mathbb{V}(G_d) \subseteq \mathbb{P}^2$ *curva con* G_d *polinomio homogéneo de grado d. Si* $L \not\subseteq C$, *entonces* $\#(L \cap C) \leq d$.

Dem...

Teorema 2.. *Sea* C *cónica en* $\mathbb{P}^2$ *y* $D = \mathbb{V}(G_d) \subseteq \mathbb{P}^2$ *curva, cin* G_d *un polinomio de grado d, homogéneo. Si* $C \not\subseteq D$, *entonces* $\#(C \cap D) \leq 2d$.

Dem plabo

Definición 2.. *Dada una curva $C \subseteq \mathbb{P}^n$, el grado de C es el máximo número de puntos de intersección de C con un hiperplano que no contiene ninguna componente de C. En $\mathbb{P}^2$, el grado de una curva se relaciona con grado de f, si $C = \mathbb{V}(f)$.*

Proposición 2.. (definición) *Dada $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{P}^2$, sin componenetes irreducibles en común, se puede definir para cada punto $P \in \mathbb{P}^2$ el índice de intersección, $I(C_1 \cap C_2, P)$ que cumplirá las siguientes propiedades:*

i) Si $P \notin C_1 \cap C_2$ entonces $I(C_1 \cap C_2, P) = 0$.

ii) Si $P \in C_1 \cap C_2$ con C_1, C_2 suaves en P e intersecten transversalmente en P, entonces $I(C_1 \cap C_2, P) = 1$.

iii) En otro caso $I(C_1 \cap C_2, P) \geq 2$.

Teorema 2.. (Bezout) *Sean $C_1, C_2 \subseteq P^2$ curvas planas proyectivas, sin componenetes en común. Entonces,*

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} I(C_1 \cap C_2, p) = \deg(C_1) \cdot \deg(C_2)$$

Corolario 2.. *Sean C_1, C_2 como antes, entonces $\# C_1 \cap C_2 \leq \deg(C_1) \cdot \deg(C_2)$.*

Corolario 2.. *Sean C_1, C_2 como antes, solo se intersectan transversalmente, entonces $\# C_1 \cap C_2 = \deg(C_1) \cdot \cdot \deg(C_2)$.*

Corolario 2.. *Sean C_1, C_2 cónicas planas irreducibles. Si C_1, C_2 tienen 5 puntos en común (distitnos), entonces $C_1 = C_2$.*

Definición 2.. *Sea A un dominio entero, y sea $P \subseteq A$ un ideal primo, la localización de A por P, es la que usa el conjunto multiplicativo $A \setminus P$, es decir,*

$$A_P = \left\{ \frac{a}{s} : a \in A, s \in A \setminus P \right\} / \sim$$

Ejemplo 2.. Consideremos $A = \mathbb{Z}$, entonces $A_{(0)} = \mathrm{Quot}(A)$ y $A_{(2)} = \{\frac{a}{b}, b \text{ impar } \}$.

El anillo A_p es local y su único ideal maximal es,

$$m_P = \left\{ \frac{a}{b} \in A_p : a \in P \right\}$$

Ejemplo 2.. Dada $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una vairedad y $\mathbb{I}(V) = (f_1 \ldots, f_r)$, luego,

$$\mathbb{K}(V) = \mathbb{K}[V]_{O_{\mathbb{K}[V]}} = \left(\frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{(f_1, \ldots, f_r)} \right)_{\overline{(f_1, \ldots, f_r)}}$$

Sea $p \in V$, luego a p le podemos asociar un ideal maximal,

$$m_p = \{f \in \mathbb{K}[V] : f(p) = 0\}$$

Se puede comprobar usando el mapa evaluar:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{K}[V]}{m_p} &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

Definimos el anillo local en p como $\mathbb{K}[V]_{m_p} = \mathcal{O}_{V,p}$ y su ideal maximal es,

$$M_p = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{K}[V]_{m_p} : f \in m_o \right\} = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathbb{K}[V]_{m_p} : f(p) = 0 \right\}$$

Definición 2.. *Sean $C, D \subseteq \mathbb{A}^2$ curvas irreducibles definidas por polinomios irreducibles $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ respectivamente. Supongamos que $C \neq D$ (por lo que f no divide a g y viceversa). El índice de intersección local en $P = (0, 0)$ se define:*

$$i_p(C, D) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathbb{C}[x, y]}{(f, g)} \right)_{(\overline{x}, \overline{y})} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]_{(x,y)}}{(f, g)_{(x,y)}}$$

Ejemplo 2.. Calculemos $i_p(C, D)$ donde $C = \mathbb{V}(x), \mathbb{V}(y), P = (0, 0)$. Por definición,

$$i_p(C, D) = \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathbb{C}[x, y]}{(x, y)} \right)_{(\overline{x}, \overline{y})} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{(0)} = 1$$

Ejemplo 2.. Calculemos $i_p(C, D)$ con $P = (0, 0), C = \mathbb{V}(y), D = \mathbb{V}(y - x^2)$, entonces,

$$\begin{aligned} i_p(C, D) &= \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathbb{C}[x, y]}{(y, y - x^2)} \right)_{(\overline{x}, \overline{y})} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathbb{C}[x]}{(x^2)} \right)_{(\overline{x})} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{a\overline{x} + b}{c\overline{x} + d} : d \neq 0 \right\} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(x)) = 2 \end{aligned}$$

4. Ayudantías

4.1. Ayudantía 1

P1. Supongamos que C es una curva afín, es decir, $C = \mathbb{V}(F)$ con $F \in \mathbb{K}[x, y]$ un polinomio de grado n y $L = \mathbb{V}(G)$ con $G \in \mathbb{K}[x, y]$ de grado 1, una linea en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, $L \not\subseteq C$. Muestre que $L \cap C$ es un conjunto finito de no más de n puntos.

Sol. Tenemos que $L \cap C$ es donde coinciden los polinomios y se anulan. Por propiedades de conjuntos algebraicos, se tiene que,

$$L \cap C = \mathbb{V}(G) \cap \mathbb{V}(F) = \mathbb{V}(G, F)$$

Sea $p \in \mathbb{V}(G, F)$ y supongamos que $G(x, y) = ax + by + c$ con coeficientes no todos nulos. Sin pérdida de generalidad supongamos que $b \neq 0$, luego se tiene que $G(p) = ap_1+bp_2+c = 0$, existen $m, n \in \mathbb{K}$ tales que $p_2 = mp_1 + n$. Como $p \in \mathbb{V}(G, F)$, entonces $F(p) = F(p_1, mp_1 + n) = 0$. Aquí podemos definir el polinomio $f(p_1) \in \mathbb{K}[p_1]$ dado por $f(p_1) := F(p_1, mp_1 + n)$, que es un polinomio de grado n, por lo tanto a lo más puede tener n soluciones o ser nulo. Si $f = 0$ entonces $L = \mathbb{V}(G) \subseteq \mathbb{V}(F) = G$ siendo imposible. Por tanto $|L \cap C| \leq n$. (Tener encuenta que el polinomio G induce a que cada p_1 tenga solamente asociado a un p_2, por lo que la cantidad está determinada por la cantindad de p_1 posibles).

P2. Identifique cuales de los siguientes conjuntos son algebraicos.

(a) $A = \{(\text{sen}(u), \cos(u), v) : (u, v) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})\} \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

(b) $B = \{(t\cos(t), t\,\text{sen}(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.

(c) $C = \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$.

(d) $D = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}$

Sol.

(a) Notemos que el conjunto A describe un cilindro en el espacio. Por lo que para ver si es conjunto algebraico, debemos describir el cilindro como polinomio. En particular $x^2+y^2 = 1$ describe tal polinomio, luego afirmamos que,

$$A = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1)$$

Si $(\text{sen}(u), \cos(u), v) \in A$ entonces $\text{sen}^2(u) + \cos^2(u) = 1$, luego están en $\mathbb{V}(x^2 + +y^2 - 1)$. Si tomamos $(x, y, z) \in \mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1)$ se tiene que $x^2 + y^2 = 1$ y z es cualquier valor, luego existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}(\gamma) = x$, de aquí se construye $(\text{sen}(\gamma), \cos(\gamma), z) \in A$. Por lo que A es conjunto algebraico.

(b) Notemos que el conjunto B describe una curva que va creciendo. Supongamos que B es un conjunto algebraico, es decir, existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[x, y]$ tales que $B = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_n)$, luego,

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{V}(f_i)$$

Consideremos $L = \mathbb{V}(y)$ el eje x. Vamos aplicar el resultado del primer problema. Notemos que,

$$B \cap L = \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{V}(f_i) \cap \mathbb{V}(y) = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{V}(f_i) \cap \mathbb{V}(y))$$

Si f_i es de grado n_i e y es de grado 1 entonces $(\mathbb{V}(f_i) \cap \mathbb{V}(y))$ es finito de a lo más n_i elementos o $L \subseteq \mathbb{V}(f_i)$. Si es a lo más de n_i elementos, entonces $B \cap L$ es finito, pero esto es imposible ya que la curva toca infitamente el eje x. Si $L \subseteq \mathbb{V}(f_i)$ entonces todo el eje x es elemento de B, lo que es claramente imposible. Por tanto B no es conjunto algebraico.

(c) Queremos ver si C es algebraico, para ello notemos lo siguiente, si $x = t, y = t^2, t^3$ entonces $x^2 - y = x^3 - z = 0$. Por lo que podemos sospechar que $C = \mathbb{V}(x^3 - z, x^2 - y)$. Notemos que la inclusión $C \subseteq \mathbb{V}(x^3 - z, x^2 - y)$ es evidente. Si $p \in \mathbb{V}(x^3 - z, x^2 - y)$, entonces $p_1^2 = p_2, p_1^3 = p_3$, entonces $p = (p_1, p_1^2, p_1^3)$ y por tanto $p \in C$. Probando que C es algebraico.

(d) Supongamos que fuera algebraico. Sin pérdida de generalidad supongamos que $D = \mathbb{V}(f)$ donde $f \in \mathbb{Q}[x]$. La cosa es que $\mathbb{Q}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ con $\mathbb{C}[x]$ un DFU, luego f es de la siguiente forma,

$$f(x) = (x - r_1)^{e_1}(\dots)(x - r_m)^{e_m}$$

Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. La cosa es que si el lugar de ceros de f genera a D, entonces f se anula en todo $1/p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$, pero entonces f tendría más soluciones que su grado, siendo imposible. Por tanto D no puede ser algebraico. Es más, un conjunto algebraico, con esto se puede concluir que todo cuerpo $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ tiene lugares ceros o bien $\emptyset$, finitos o $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$ por el argumento de los polinomios con soluciones menores o iguales a su grado.

P3. Sea $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio no constante, $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado. Muestre que $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{V}(F)$ es infinito $n \geq 1$ y $\mathbb{V}(F)$ es infinito si $n \geq 2$. Concluya que el complemento de cualquier conjunto algebraico propio es infinito.

Sol. Vamos a probar que $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus V$ es infinito para todo $n \geq 1$ y V conjunto algebraico. Supongamos que $V = \mathbb{V}(F)$ con $F \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Si $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ entonces $\mathbb{K}$ es infinito (ya que posee las soluciones de todos los polinomios y son infinitos polinomios) $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es irreducible. Supongamos que $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{V}(F)$ es finito, por lo que existen $\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ tal que,

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{V}(F) = \{p_1, \dots, p_m\}$$

Notemos que todo conjunto finito es algebraico (si $\{l_1, \dots, l_s\} \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es finito, para ver que es algebraico, basta tomar el polinomio $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - l_{11})(x_1 - l_{12})(\dots)(x_n - l_{sn}) \in \mathbb{K}[x_1 \dots, x_n]$). Por tanto,

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{V}(F) \cup \{p_1, \dots, p_m\} = \mathbb{V}(F) \cup \mathbb{V}(I)$$

es decir, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es reducible, siendo contradicción. Ahora, si $V = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_r)$ entonces,

$$V = \bigcap_{i=1}^{r} \mathbb{V}(f_i) \subseteq \mathbb{V}(f_1)$$

Luego $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus \mathbb{V}(f_1) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \setminus V$, como lo primero es infinito, se tiene que lo segundo es infinito.

Probemos ahora que $\mathbb{V}(F)$ es infinito paa todo $n \geq 2$. Notemos que $F = \sum_i F_i x_n^i$, donde $F_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ no necesariamente constante. Si F_i fuera constante para todo i, entonces $F \in \mathbb{K}[x_n]$. Como $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado, se tiene que F posee una solución, esto implica que podemos tomar $x_1, \ldots, x_{n-1}$ como queramos de forma que sea solución de F, es decir, son variables libres, luego $|\mathbb{V}(F)| = \infty$.

Supongamos ahora que no todas los coeficientes polinomiales F_i son constantes. Definimos,

$$B := \mathbb{A}^{n-1}_{\mathbb{K}} \setminus \bigcap_{F \text{ no constante}} \mathbb{V}(F_i)$$

Se tiene que B es infinito por la primera parte. Sea $\varphi : B \hookrightarrow \mathbb{V}(F)$ una función inyectica dada por,

$$\varphi(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \text{alguna raíz de } F(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n)$$

Entonces $\infty = |B| \leq |\mathbb{V}(F)|$. Por tanto $\mathbb{V}(F)$ es infinito para todo $n \geq 2$.

P4. Considere $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ y n polinomios $\varphi_i(t) = a_i t + b_i \in \mathbb{K}[t]$, no todos constantes.

(a) Muestre que el conjunto,

$$L = \{(\varphi_1(t) \ldots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} : t \in \mathbb{K}\}$$

es algebraico.

(b) Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un conjunto algebraico cualquiera. Muestre que los puntos $p \in V \cap L$ se corresponden con puntos de un conjunto algeraico $W \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$.

(c) Pruebe que $L \cap V$ es finito, o $L \subseteq V$.

Sol.

(a) Supongamos que $\varphi_1(t) = a_1 t + b_1$ no es constante, es decir, $a_1 \neq 0$. Sea $(x_1, \ldots, x_n) = (a_1 t + b_1, \ldots, a_n t + b_n)$. Notemos que,

$$\begin{aligned} a_i x_1 - a_1 x_i &= a_i a_1 t + b_1 a_i - a_1 a_i t - a_1 b_i \\ &= b1 a_i - a_i b_i \end{aligned}$$

Sea el polinomio $F_i := a_i x_1 - a_1 x_i - a_1 b_1 + a_1 b_i$ para $2 \leq i \leq m$. Por construcción,

$$L \subseteq \mathbb{V}(F_i)$$

para todo i. Luego,

$$L \subseteq \bigcap_{i=2}^{n} \mathbb{V}(F_i)$$

Probemos la otra inclusión. Sea $p = (y_1, \ldots, y_n) \in \bigcap_{i=2}^{n} \mathbb{V}(F_i)$, queremos encontrar un t tal que $(y_1, \ldots, y_n) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Sea $t = \frac{y_1 - b_1}{a_1}$, entonces,

$$a_i y_1 - a_1 y_i - a_i b_1 + a_1 b_i = 0$$

Luego,

$$y_i = \frac{a_i y_1 - a_i b_1}{a_1} + b_i = a_i \left(\frac{y_1 - b_1}{a_1} \right) + b_i = \varphi_i \left(\frac{y_1 - b_1}{a_1} \right) + b_i$$

Por tanto $L = \mathbb{V}(F_2, \ldots, F_n)$.

P5. De un ejemplo de una colección contable de conjuntos algebraicos, tal que su unión no es algebraica.

Sol. Sea el conjunto,

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{1}$$

como en el problema 2. Sabemos que no es algebraico pero que,

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

Donde $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ es finito y luego algebracio. Po tanto la unión numerable de algebraicos no implica un conjunto algebraico.

P6. Sea $\mathbb{K}$ un campo infinito. Muestre que $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n}$ es una variedad.

Sol. Sea $\mathbb{K}$ cuerpo infinito. Debemos probar que $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n}$ es irreducible. De antemano sabemos que $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n} = \mathbb{V}(0)$. Supongamos que es reducible, es decir,

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n} = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_n) \cup \mathbb{V}(G_1, \ldots, G_m)$$

Si $F_i = 0$ para todo i, entonces $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n} = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_n)$, análogamente ocurre si G_j son todos nulos. Supongamos que $F_i \neq 0, G_j \neq 0$ para algún i, j. Luego,

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \mathbb{V}(F_1, \ldots, F_n) \cup \mathbb{V}(G_1, \ldots, G_m) = \mathbb{V}((F_i G_j)_{ij})$$

Esto significa que $F_i G_j = 0$ para todo $p \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n}$. Afirmamos que $F_i G_j = 0$ en $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Proposición. *Si $\mathbb{K}$ es infinito, si $H \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ con $H(p) = 0$ para todo p, entonces $H = 0$.*

Dem. Porbaremos por inducción sobre n. Si $n = 1$ es sabido.

Supongamos que se cumple para $m \geq 2$. Tenemos que $H = \sum_i H_i x_m^i$ con $H_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$. Si $H_i = 0$ para todo i estamos listo. Supongamos que $H_j \neq 9$, entonces hay un $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ tal que $H_j(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0$. Luego el polinomio $H(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) \in \mathbb{K}[x_n]$ tiene finitas raices, siendo imposible. Por tanto $H_i = 0$ para todo i y luego $H = 0$. ∎

Con esto se tiene que $F_i G_i = 0$ y dado que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es un dominio, se tiene que $F_i = 0$ o $G_i = 0$, en cualquier caso es imposible que suceda. Luego $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ es irreducible.

P7. Sean $V \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}, W \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^m$ conjuntos algebraicos. Muestere que,

$$V \times W := \{(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) : (a_1, \ldots, a_n) \in V, (b_1, \ldots, b_m) \in W\}$$

Es un conjunto algebraico en $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{n+m}$. Se llama el producto de V y W.

Sol. Si V, W son conjuntos algebraicos, entonces $V = \mathbb{V}(f_1, \ldots, f_a)$ con $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y $W = \mathbb{V}(g_{a+1}, \ldots, g_{a+b})$ con $g_i \in \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$. Vamos a considerar la función,

$$h_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_n), & 1 \leq i \leq a \\ g_i(y_1, \ldots, y_m), & a+1 \leq i \leq a+b \end{cases}$$

Definido en $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$. Afirmamos que $V \times W = \mathbb{V}(h_i)$. Si $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) \in V \times W$ con $(a_1, \ldots, a_n) \in V, (b_1, \ldots, b_m) \in W$. Luego,

$$h_i(a_1, \ldots, b_m) = 0$$

para todo $i = 1, \ldots, a+b$. De forma que se cumple $V \times W \subseteq \mathbb{V}((h_i)_i)$.

Si ahora tomamos $p = (c_1, \ldots, c_{n+m}) \in \mathbb{V}(h_i)$, entonces,

$$f_i(c_1, \ldots, c_n) = 0, \ \forall\, 1 \leq i \leq a$$

Luego $(c_1, \ldots, c_n) \in V$,

$$g_i(c_{n+1}, \ldots, c_{n+m}) = 0, \ \forall a+1 \leq i \leq a+b$$

Entonces $(c_{n+1}, \ldots, c_{n+m}) \in W$. Por lo tanto $V \times W = \mathbb{V}((h_i)_i)$, siendo $V \times W$ algebraico.

4.2. Ayudantía 2

P1. Muestre que $\mathbb{V}(\mathbb{I}(Y)) = \overline{Y}$ para todo $Y \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$

Sol. Resolver

P2. Sean $V, W \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ algebraicos. Muestere que $V = W$ si y sólo si $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(W)$.

Sol. Si $V = W$ es claro la igualdad, también se puede ver como $V \subseteq W$ entonces $\mathbb{I}(W) \subseteq \mathbb{I}(V)$, y de forma análoga lo otro.

Supongamos que $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(W)$. Como V, W son algebraicos, entonces $V = \overline{V}, W = \overline{W}$. Luego,

$$V = \overline{V} = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V)) = \mathbb{V}(\mathbb{I}(W)) = \overline{W} = W$$

Por tanto $V = W$.

P3. Sea $X := \{(0, y) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} : y \in \mathbb{C}\}$. Calcule $\mathbb{I}(X)$.

P4. Muestre que existe $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ para algpun n tal que $I \neq \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$.

P5.

(a) Un ideal $I \subseteq A$ se dice radical si cada vez que $f^n \in I$, entonces $f \in I$. Muestre que $\mathbb{I}(X)$ es radical para todo $X \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.

(b) Muestre que $(x^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[x]$ es un ideal radical, pero que $(x^2 + 1)$ no es ideal de definición de ningún subconjunto $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$.

Sol.

(a) Sea $f^n \in \mathbb{I}(X)$, entonces $f^n(x) = 0$ para todo $x \in X$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. De forma que $\mathbb{I}(X)$ es radical.

(b) Notemos que $x^2 + 1$ es irreducible y que $\mathbb{R}[x]$ es DFU. Probemos que es primo. Sean $f, g \in \mathbb{R}[x]$ tales que $fg \in (x^2 + 1)$. Luego se tiene que $x^2 + 1 | (fg)$. Como $\mathbb{R}[x]$ es DFU, entonces f, g se pueden descomponer en factores irreducibles únicos por lo que o bien $x^2 + 1 | f$ o $x^2 + 1 | g$. Si ocurre el primer caso, tendriamos que $f \in (x^2 + 1)$, si no ocurre entonces necesariamente $g \in (x^2 + 1)$. De forma que $(x^2 + 1)$ es primo y por tanto radical.

P6.

(a) Sea V un conjunto algebraico en $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ y $p \notin V$. Muestre que existe un polinomio $F \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $F \in \mathbb{I}(V)$ y $F(P) = 1$.

(b) Sean $P_1, \ldots, P_r \notin V$. Muestre que existen polinomios $F_1, \ldots, F_r \in \mathbb{I}(V)$ tal que $F_i(P_j) = 0$ si $i \neq j$ y $F_i(P_i) = 0$.

(c) Con los $P_1, \ldots, P_r$ y V como antes, considere $a_{ij} \in \mathbb{K}$, muestre que existen $G_i \in \mathbb{I}(V)$ tal que $G_i(P_j) = a_{ij}$ para todo i, j.

Sol.

4.3. Ayudantía 3.

P1. Decida si los siguientes conjuntos son variedades.

(a) $\{(t,t^2,t^3) : t \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$.

(b) $\mathbb{V}(xy, xz, yz) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}$

(c) $\mathbb{V}(y^p - x^p) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ con p, q primos.

Sol. Recordemos que un conjunto es variedad si y sólo es generado por un ideal. Otra forma de verlo, es que su ideal de definición sea primo.

(a) Recordemos que $\{(t,t^2,t^3 : t \in \mathbb{K}\} = \mathbb{V}(x^3 - z, x^2 - y)$, sabemos que si $I \subseteq \mathbb{K}[x,y,z]$ es ideal, entonces,

$$\sqrt{I} = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$$

Por tanto, probaremos que, I es radical y es primo. Es más, si probamos que I es primo, entonces es radical, y usaremos este hecho. Estudiemos el cuociente,

$$\frac{\mathbb{K}[x,y,z]}{(x^2 - y, x^3 - z)}$$

Para ello vamos a considerar el morfismo,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[x,y,z] &\to \mathbb{K}[x] \\ x &\mapsto x \\ y &\mapsto x^2 \\ z &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

Notemos que para $f \in \mathbb{K}[x]$, se tiene que $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, luego se puede tomar un polinomio en $\mathbb{K}[x,y,z]$ que genere f, es decir, tenemos un morfismo sobreyectivo. Luego por el primer teorema de isomorfismo, se tiene que,

$$\frac{\mathbb{K}[x,y,z]}{\ker \varphi} \cong \mathbb{K}[x]$$

Probemos que $\ker \varphi = I$. Notemos que si $\varphi(x^3 - z) = 0, \varphi(x^2 - y) = 0$, entonces $I \subseteq \ker \varphi$. Parala otra inclusión vamos a usar inducción sobre $\deg(f)$.

Si $\deg(f) = 0$, entonces $f = 0$ al estar en el kernel. Es claro que $f \in I$ ya que todo ideal contiene al 0.

Supongamos que $\deg(f) \geq 1$. Notemos que $(x^2 - y, x^3 - z, x) = (x,y,z)$. Luego $f = f_1(x^2 - y) + f_2(x^3 - z) + f_3 x$ para algunas funciones. Lo importanto es que el grado de f_1, f_2, f_3 son menores o iguales al grado de f, sin pérdida de generalidad supongamos que $\deg(f_3) < \deg(f)$. Entonces,

$$0 = \varphi(f) = \varphi(f_3)x$$

Entonces $\varphi(f_3) = 0$ y por tanto $f_3 \in I$. Esto implica que $f \in I$. Probando po inducción.

Ahora por el primer teorema de isomorfismo podemos ver que el cuociente $\mathbb{K}[x, y, z]/I$ es un dominio de integridad, y por tanto I es primo y radical. Probando así que,

$$I = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$$

Lo que significa que el conjunto en cuestión, es variedad.

(b) Notemos que,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(xy, yz, xz) &= \mathbb{V}(xy) \cap \mathbb{V}(yz) \cap \mathbb{V}(xz) \\ & \mathbb{V}(x, y) \cup \mathbb{V}(x, z) \cup \mathbb{V}(y, z) \end{aligned}$$

Es decir, el conjunto no es variedad. Probemos de otra forma que no es variedada. Si fuera variedad, entonces $I = (xy, yz, xz)$ sería primo, pero de primera instancia no lo es, ya que $x, y \notin I$. Probemos que es radical. Sea $f^n \in I$, notemos que f puede ser escrito de la siguiente forma,

$$f = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) + g + c$$

donde $g \in I, f_1 \in x\mathbb{K}[x], f_2 \in y\mathbb{K}[y], f_3 \in z\mathbb{K}[z]$ y una constante $c \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$f^n = (f_1 + c)^n + (f_2 + c)^n + (f_3 + c)^n + gH - 2c^n$$

Por tanto,

$$(f_1 + c)^n + (f_2 + c)^n + (f_3 + c)^n - 2c^n \in)$$

Pero esto es absurdo, puesto que no tiene términos cruzado, por tanto f no puede ser escrito de esa forma, es decir, debe tener un término cruzado, es decir, $f \in I$. Probando así que,

$$I = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$$

Pero que no es variedad.

(c) Sea $I = (y^p - x^p)$, probemos que es priimo. Consideremos el siguiente morfismo,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[x, y] &\to \mathbb{K}[t] \\ x &\mapsto t^p \\ y &\mapsto t^q \end{aligned}$$

Notemos $I \subseteq \ker \varphi$. Sabemos que $\ker \varphi$ es ideal primo y por la clasificación de variedades en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, sabemos que los ideales primos de $\mathbb{K}[x, y]$ son $(0), (f)$ con f irreducible y $(x-a, y-b)$ para algunos $a, b \in \mathbb{K}$. Claramente el kernel del morfismo no es (0) ni $(x-a, y-b)$, entonces $\ker \varphi = (f)$ para algún f irreducible (el kernel es principal). Si $I \subseteq \ker \varphi$, entonces $f | y^p - x^p$, es decir, $\deg(f) < \deg(y^p - x^q)$, pero esto es imposible, ya que $f(t^p, t^q) = 0$ donde p, q son primos, luego $mcm(p, q) = pq$. Por tanto $(y^p - x^q) = \ker \varphi$, por tanto $(y^p - x^q)$ es primo. Luego $\mathbb{V}(y^p - x^q)$ es variedad.

P2. Sea R un DFU. Muestre que un polinomio mónico de grado 2 o 3, es irreducible en $R[x]$ si y sólo si no tiene raices en R. En particular, el polinomio $x^2 - a \in R[x]$ es irreducible si y sólo si a no es cuadrado en R. Concluya que $\mathbb{V}(y^2 - x(x-1)(x-\lambda)) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ es variedad.

Sol.

P3.

(a) Muestre que todo ideal primo es radical.

(b) Muestre que $\sqrt{I}$ es radical para todo ideal I.

(c) Muestre que un ideal $I \subseteq R$ es radical si y sólo si R/I no tiene nilpotentes no nulos.

(d) De un ejemplo de un ideal radical que no sea primo.

(e) Muestre que $\sqrt{\bigcap_{i=1}^n I_i} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{I_i}$

Sol.

(a) Sea I ideal primo. Sea $f^n \in I$, entonces $f^{n-1} \in I$ o $f \in I$, si $f \notin I$ no ocurre, entonces $f^{n-1} \in I$, aplicando de nuevo el hecho de que I es primo, podemos a algo similar. Aplicando este proceso recursivamente, se concluye que $f \in I$.

(b) Sea $f^n \in \sqrt{I}$, luego existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $(f^n)^m \in I$, pero luego $(f)^{nm} \in I$, entonces $f \in \sqrt{I}$.

(c) Recordemos que un elemento de R/I es nilpotente si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $(r+I)^m = I$.

Supongamos que $I \subseteq R$ es radical, supongamos que $(r+I)$ es nilpotente, entonces $(r+I)^m = r^m + I = I$, entonces $r^m \in I$ y luego $r \in I$, es decir, r es un elemento nulo, siendo contradicción.

Supongamos ahora que R/I no tiene nilpotente nulo. Sea $f^n \in I$, luego $I = f^n + I = (f+I)^n$, es decir $f + I$ es nilpotente, por lo que debe ser nulo, es decir $f \in I$.

(d) Sabemos que los $\mathbb{I}(V)$ son radicales y los $\mathbb{I}(V)$ son primos si V es variedad, luego podemos pensar en $\mathbb{I}(V)$ para V no variedad. Por ejemplo $(x(x-1))$ es no primo ya que $x, x-1 \notin (x(x-1))$. Probemos que es radical. Notemos que,

$$\frac{\mathbb{K}[x]}{(x(x-1))} \cong \{ax + b : a, b \in \mathbb{K}\}$$

Si probamos que los polinomios de grado 1 o menores, conforman un grupo no nilpotente, entonces $(x(x-1))$ sería radical. Supongamos que $(ax+b)^n = 0$ para algunos a, b. Pero entonces,

$$(ax+b)^n = \sum_{i=1}^n a^i b^{n-i} x^i = cx + b^n = 0$$

Luego $c, b^n = 0$, entonces $ax + b = 0$ y por tanto sería nulo. Por lo que los polinomios de grado 1 o menores, es no nilpotente y por tanto $(x(x-1))$ es radical no primo.

(e) Sea $f \in \bigcap_{i=1}^n \sqrt{I_i}$, entonces $f \in \sqrt{I_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Luego existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^{N_i} \in I_i$, sea $N := N_1 \dots N_n$. Luego $f^N \in I_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, luego $f^N \in \bigcap_{i=1}^n I_i$ y entonces $f \in \sqrt{\bigcap_{i=1}^n I_i}$.

Sea $f \in \sqrt{\bigcap_{i=1}^n I_i}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N \in \bigcap_{i=1}^n I_i$, entonces $f^N \in I_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Entonces $f \in \sqrt{I_i}$ para todo $i = 1, \dots, n$; y por tanto $f \in \bigcap_{i=1}^n \sqrt{I_i}$.

P4. Encuentre explicitamente $\mathbb{I}((0,0),(0,1)) \subseteq \mathbb{C}[x,y]$ y $\mathbb{I}((0,0),(0,1),(1,1)) \subseteq \mathbb{C}[x,y]$.

P5.

(a) Muestre que hay una correspondencia entre,

$$\{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \text{ irreducible}/\mathbb{K}^\times \leftrightarrow \{\text{Hipersuperficies irreducibles en } \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$$

(b) Sea $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dot{,} x_n]$ ideal. Pruebe que $\mathbb{V}(I)$ es un conjunto finito de puntos si y sólo si $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si pasa esto, entonces,

$$|\mathbb{V}(I)| \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I)$$

4.4. Ayudantia 4

P1. Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ una vecindad. Demuestre que las siguientes son equivalentes:

(a) V es un punto.

(b) $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}$.

(c) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V]) < \infty$

Sol.

- **(a) implca (b).** Supongamos que V es un punto, es decir,

$$\mathbb{I}(V) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$$

Luego por definición,

$$\mathbb{K}[V] = \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I(V))}$$

Dado que V es una variedad, entonces su ideal de definición es un maximal y por tanto, $\mathbb{K}[V] \cong \mathbb{K}$. Por convenio se dice $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}$.

- **(b) implica (c).** Supongamos que $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}$, entonces un elemento de $\mathbb{K}$ genera todo $\mathbb{K}[V]$, es decir, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V]) = 1 < \infty$.

- **(c) implica (a).** Supongamos que $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V]) < \infty$. Sean $p_1, \dots, p_r \in V$, consideremos $F_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tales que,

$$F_i(p_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Si,

$$\lambda_1 \overline{F}_1 + \cdots + \lambda_r \overline{F}_r = 0$$

en $\mathbb{K}[V]$, entonces $\sum \lambda_i F_i \in I(V)$, luego se tiene que,

$$0 = \sum \lambda_i F_i(p_j) = \lambda_j$$

Por tanto $\lambda_j = 0$ para todo j, es decir, $\overline{F}_i$ son linealmente independientes en $\mathbb{K}[V]$, luego,

$$r \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[V]) < \infty$$

Por tanto V es un conjunto finito y como es variedad, entonces V es un punto.

P2. Muestre que toda $\mathbb{K}$-álgebra finitamnete generada que es dominio integral, es el anillo de coordenadas de algunas variedad.

Sol. Sea R una $\mathbb{K}$-álgebra que está generada por $f_1, \ldots, f_n$, entonces,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] &\to R \\ x_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

es un morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras sobreyectivo, entonces por el primer teorema de isomorfimo, se tiene que,

$$\frac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{\ker \varphi} \to R$$

es un isomorfismo. Como R es dominio, entonces $\ker \varphi$ es ideal primo. Entonces $V := \mathbb{V}(\ker \varphi)$ es una variedad y luego R es el anillo de coordenadas de V.

P3. Muestre que los morfismos de variedades son funciones continuas. Demuestre que si f, g son funciones regulares en una variedad X tal que $f = g$ en un abierto $U \subseteq X$, entonces $f = g$ en todo X.

Sol. Sea $f.V \to W$ morfismo de variedades y sea $A = \mathbb{V}(I) \subseteq W$, queremos mostrar que $f^{-1}(A) = \mathbb{V}(J)$ para algún J. Afirmamos que $J = \pi^{-1}(f^* I)$ donde f^* es el pullback de f, vemos que I dentro de $\mathbb{K}[W]$ (esto se puede puesto que los ideales d e$\mathbb{K}[W]$ son precisamente los ideales de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ que contiene a $\mathbb{I}(W)$), y π^{-1} es la proyección que toma $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ y lo manda a $\mathbb{K}[V]$. **Por terminar.**

P4. Sea $f \in \mathbb{K}[V]$ una función polinomial con V vairedad afin. Defina,

$$G(f) = \{(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1} : (a_1, \ldots, a_n) \in V, a_{n+1} = f(a_1, \ldots, a_n)\}$$

Como el gráfico de f. Muestre que $G(f)$ es una variedad afín y la función $(a_1, \ldots, f(a_1, \ldots, a_n))$ define un isomorfismo de V con $G(f)$.

Sol. ...

P5.

(a) Sea T una isometría del espacio vectorial $\mathbb{K}^n$, es decir, T es de la forma multiplicación por una matriz invertible mas sumar un vector. Pruebe que $T : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ es un isomorfismo de variedades y que si $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es una variedad afín, entonces $T\big|_V$ induce un isomorfismo de V con $T(V)$-

(b) Pruebe que si $V = \mathbb{V}(F)$ con $\deg(F) = 2$ es una variedad en $\mathbb{A}^2$, entonces es isomorfa a $X = \mathbb{V}(x^2 - y)$ o $Y = \mathbb{V}(xy - 1)$.

P6. Sean V, W variedades afines y $\varphi : V \to W$ un morfismo, sea $X \subseteq W$ conjunto algebraico, asuma que $\varphi^{-1}(X)$ es irreducible y X está contenido en la imagen de φ. Pruebe que X es irreducible. Use esto para probar que $\mathbb{V}(xy - y^2, yz - x^3, z^2 - x^2y) \subseteq \mathbb{A}^3$ es variedad.

Sol. Supongamos que$X$ es reducible, luego $X = V_1 \cup V_2$ con V_1, V_2 algebraicos, luego se cumple que,

$$\varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(V_1) \cup \varphi^{-1}(V_2)$$

5. Guías

5.1. Guía 1

P1. Muestre que la hipérbola $\mathbb{V}(xy-1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ es una variedad afín aunque al graficar se separe en dos partes.

Sol. Recordemos que $\sqrt{I} = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$ donde $I = (xy-1)$, si probamos que es I es primo, entonces es radical y luego $V(I)$ es variedad. Antes que nada verifiquemos que $xy-1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x,y]$, supogamos que es reducible, luego $xy-1 = fg$ con $f, g \in \mathbb{R}[x,y]$ donde f, g tienen grado menor a 2 (si uno fuera de grado 2, entonces el otro se constante y luego es unidad), es decir, f, g son de la forma,

$$\begin{aligned} f &= ax + by + c \\ g &= dx + ey + f \end{aligned}$$

Luego tenemos el siguiente sistemas de ecuaciones,

$$\begin{aligned} ad &= 0 \\ be &= 0 \\ af + dc &= 0 \\ bf + ec &= 0 \\ ae + db &= 1 \\ cf &= 1 \end{aligned}$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a = 0$, luego $d \neq 0$ peor luego $c = 0$ y tendriamos que $cf = 0 = 1$, siendo imposible. Por lo tanto $xy-1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x,y]$. Por lo tanto $(xy-1)$ es ideal primo, puesto que, dado $fg \in (xy-1)$, entonces $xy-1|fg$, pero como $xy-1$ es irreducible, entonces $xy-1|f$ o bien $xy-1|g$, es decir, $f \in (xy-1)$ o bien $g \in (xy-1)$. Por lo tanto $\mathbb{V}(xy-1)$ es una variedad.

P2.

(a) Dados dos ideales $I, J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ con $\mathbb{K}$ cuerpo. Demuestre que,

$$\mathbb{V}(IJ) = \mathbb{V}(I \cap J)$$

(b) Determine $\mathbb{V}(I)$, donde $I = (x^2 + y^2, x^2 - y^2) \subseteq \mathbb{C}[x.y]$.

Sol.

(a) Sea $x \in \mathbb{V}(I \cap J)$, entonces $f(x) = 0$ para todo $f \in I \cap J$, por definición,

$$IJ = \{f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n : f_i \in I, g_i \in J\}$$

Sea $g \in IJ$, entonces $g = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n$, notemos que $f_i g_i \in I \cap J$ dado que I, J son ideales, entonces, $g(x) = 0$, por lo que $x \in \mathbb{V}(IJ)$.

Sea $x \in \mathbb{V}(IJ)$, entonces $f(x) = 0$ para todo $f \in IJ$. Sea $g \in I \cap J$, **terminar.**

(b) Notemos que $I = (x^2 + y^2, x^2 - y^2) = (x^2, y^2)$, luego,

$$\mathbb{V}(x^2, y^2) = \mathbb{V}((x^2) \cap (y^2)) = \mathbb{V}(x^2) \cup \mathbb{V}(y^2)$$

Por definición,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(x^2) &= \{p \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} : p_1^2 = 0\} = \{(p_1, 0) : p_1 \in \mathbb{C}\} = \text{eje } x \\ \mathbb{V}(y^2) &= \{p \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} : p_2^2 = 0\} = \{(0, p_2) : p_2 \in \mathbb{C}\} = \text{eje } y \end{aligned}$$

Por tanto $\mathbb{V}(I)$ es la unión de los ejes x e y en los complejos.

P3. Mostrar que existen dos polinomios irreducibles $f, g \in \mathbb{C}[x.y]$ tales que,

$$\mathbb{V}(f, g) = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

Sol. Sea,

$$D := \{(-1, 0), (0, 1), (1, 0)\}$$

Debemos encontrar f, g polinomios tales que $\mathbb{V}(f, g) = D$. Notemos que estos puntos están en el lugar de cero del polinomio x^2+y^1-1, si pensamos en el plano $\mathbb{R}^2$, tenemos que una parabola toca la circuferencia en 3 puntos que son exactamente D. Esta parábola tiene polinomio de la forma $a(x-1)(x+1)+by$, estudiano los puntos D, obtenemos que $a = 1, b = -1$, luego el polinomio es $x^2 - 1 + y$. Verifquemos. Si $x^2 = 1 - y^2$, entonces $1 - y^2 - 1 + y = 0$, entonces $y = 0, 1$, si $y = 0$ entonces $x = -1, 1$, si $y = 1$, entonces $x = 0$. Obteniendo que,

$$\mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1, x^2 - 1 + y) = D$$

P4.

(a) Dado un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, definimos $\operatorname{rad}(f) = f_1 f_2 \ldots f_r$ donde $f_1, \ldots, f_r$ son los factores irreducibles distitnos de f. Demostrar que dado el ideal $J = (f)$, se tiene que $\sqrt{J} = (\operatorname{rad}(f))$.

(b) Dar un ejemplo de un ideal $J = (g_1, g_2) \subseteq \mathbb{K}[x, y]$ con $\sqrt{J} \neq (\operatorname{rad}(g_1), \operatorname{rad}(g_2))$.

Sol.

(a) Notemos que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ es un DFU dado que es un DIP donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo, luego DIP implica DFU.

Sea $g \in \sqrt{J}$, entonces existe un n tal que $g^n \in (f)$, entonces $g^n = pf$ para algún $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, en particular, $f = f_1^{e_1} \ldots f_r^{e_r}$ con $e_i \geq 1$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Entonces $f_i | g^n$ y como f_i es irreducible, entonces $f_i | g$ para todo $i = 1, \ldots, r$, por tanto $g = q f_1 \ldots f_r$ para algún polinomio q, y entonces $g \in (\operatorname{rad}(f))$.

Si tomamos $g \in (\operatorname{rad}(f))$, tenemos que $g = p f_1 \ldots f_r$, sea $N := \text{máx}\{e_1, \ldots, e_r\}$, luego $g^N = p^N f_1^N \ldots f_r^N = qf$ para algún polinomio q, luego $g^N \in J$ y entonces $g \in \sqrt{J}$. Probando la igualdad.

(b)

P5. Responda las siguientes preguntas, justidicando su razonamiento:

(a) ¿Está el ideal $(x^4 - yz - 1, x^3y - z^2 + 1) \subseteq \mathbb{C}[x, y, z]$ contenido en el ideal maximal $(x - 2, y - 3, z - 5)$?

(b) ¿Dado $I = (x^2 + y^2 - 1, z^2 - x^2 - y^2)$, es $\mathbb{C}[x, y, z]/I$ un dominio entero?

(c) ¿Es el ideal $(x^2 + 2y^2 - xy - 8, x + 3y - 8)$ primo?

Sol.

(a) Sea A el primer ideal y B el maximal, queremos ver si $A \subseteq B$, pero si ocurre eso, entonces $\mathbb{V}(B) \subseteq \mathbb{V}(A)$, el tema es que $\mathbb{V}(B) = \{(2, 3, 5)\}$ y entonces tal punto debiese estar en $\mathbb{V}(A)$, pero courre que $2^4 - 3 \cdot 5 - 1 = -8$, por tanto $A \not\subseteq B$.

(b) Este resultado lo vamos a pensar geométricamente. Notemos que,

$$I = (x^2 + y^2 - 1, z^2 - x^2 - y^2) = (x^2 + y^2 - 1, z^2 - 1)$$

Luego,

$$\mathbb{V}(I) = (x^2 + y^2 - 1) \cap \mathbb{V}(z^2 - 1)$$

Es decir, es tomar un cilindro infinito de centro 0 y radio 1 y intersectarlo con los planos $z = 1, -1$, obteniendo dos circuferencias. Es decir,

$$\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1, z - 1) \cup \mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1, z + 1)$$

Dicho de otra forma $\mathbb{V}(I)$ no es variedad y por tanto I no puede ser primo.

(c) Estudiemos el lugar de cero, se tiene que $\mathbb{V}(I) = \{(2, 2)\}$, es decir, un punto afín, entonces I necesariamente es un maximal y luego es primo.

P6. Sea $J \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal. Demostrar que los conjuntos algebraicos contenido en $\mathbb{V}(J)$ están en biyección con los ideales radicales de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/J$.

Sol. Recordemos que todo conjuntos algebraico está en biyección conun ideal radical, en particular,

$$\{\text{conjunto algebraico } S \subseteq \mathbb{V}(J)\} \longleftrightarrow \{\text{radical } I \text{ tal que } \sqrt{J} \subseteq I\}$$

Y esto se debe a que $\mathbb{I}(S)$ es radical tal que $\mathbb{I}(S) \supseteq \mathbb{I}(\mathbb{V}(J)) = \sqrt{J}$, y si $I \supseteq \sqrt{J}$ radical, entonces $\mathbb{V}(I) \subseteq \mathbb{V}(\sqrt{J}) = \mathbb{V}(\mathbb{I}(\mathbb{V}(J))) = \mathbb{V}(J)$. Estando bien definida y es biyección. Ahora definimos la siguiente función,

$$\{\text{radical } I \text{ tal que } \sqrt{J} \subseteq I\} \longrightarrow \{\text{radical de } \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/J\}$$
$$I \mapsto \pi(I) := I/J$$

como la proyección canónica. Notemos que esta función está bien definida ya que $\pi(I)$ es radical, ya que para $f^n \in I/J$ se tiene que $f^n = p + J$ con $p \in I$, si $f \neq q + J$ para todo polinomio

q, entonces $f^n \neq q^n + J$, es decir, la hipótesis no se cumple, siendo imposible, luego existe un polinomio q tal que$f = q + J \in I/J$. Ahora podemos tomar la inversa por la preimage $\pi^{-1}(M)$, si M es radical de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/J$, entonces para $f^n \in \pi^{-1}(M)$ se tiene que $\pi(f^n) = f^n + J \in M$, luego $f^n + J = (f + J)^n$ y como M es radical, se tiene que $f + J \in M$, es decir, $f \in \pi^{-1}(M)$. Además, para $\sqrt{J}/J$ es le menor radical contenido en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/J$, luego se cumple que $\sqrt{J} \subseteq \pi^{-1}(M)$ para todo M radical en $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/J$.

Probemos que es biyección, es claro que es inyectiva, ya que para $I, I' \supseteq \sqrt{J}$ tales que $I/J = I'/J$, se tiene que para $f \in I$, es de la forma $f = p + J = p' + J$ con $p \in I, p' \in I$, luego $f \in I'$. La otra inclusión es análoga. Ahora si M es un radical de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/J$ se tiene que $\pi^{-1}(M)$ es un radical que contiene a $\sqrt{J}$, luego π es una biyección.

P7. Demostrar que un morfismo $f : X \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ con X variedad algebraica afín es un isomorfismo de X con una variedad afin $f(X) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ si y sólo si la aplicación inducida en anillos de coordenadas $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n] \to \mathbb{K}[X]$ es sobreyectiva.

P8. Encontrar todos los isomorfismo $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$.

Sol Sea el morfismo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^1 &\to \mathbb{A}^1 \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

Con F un polinomio $\mathbb{K}[x]$. Queremos encontrar todos los isomorfismos posibles. Si F tiene grado nulo, entonces $F = c \in \mathbb{K}$ constante, pero esto no tiene inversa al ser no inyectiva. Si F tiene grado 1, entonces $F = ax + b$, y este si tiene inversa, el cual es $G = (x - b)/a$ bien definido donde $a \neq 0$. Si F tuviera grado 2, vemos algunos problemas ya que la inversa G debería de alguna forma reducir el grado, es decir,

$$id(x) := (G \circ F)(x) = x$$

donde id es un polinomio de grado 1, pero si G tiene grado $n \geq 1$, entonces se genera un polinomio de grado $2n$, luego el coeficiente lider de G que es a_n debe ser nulo, y entonces G es de grado $n - 1$, pero aplicando el mismo argumento se llega a que G es de grado 0 que es una constante, siendo imposible que sea inversa de F, por lo tanto los isomorfimos de $\mathbb{A}^1$ a $\mathbb{A}^1$ son solamente los polinomios de grado 1.

P9. Dado $f(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$, demuestre que $\mathbb{V}(z - f(x, y)) \subseteq \mathbb{A}^3$ es isomorfo a $\mathbb{A}^2$.

P10. Encuentre el pullback f^* dado el morfismo,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^3 &\to \mathbb{A}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x^2 y, x - z) \end{aligned}$$

P11. Sean V, W variedades algebraicas. Si $f : V \to W$ y $g : V \to W$ son morfismo cumpliendo $f^* = g^*$, entonces $f = g$.

P12. Dado el homomorfismo de $\mathbb{K}$-álgebras,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[x,y,z] &\to \mathbb{K}[u,v]/(u-v^3) \\ x &\mapsto u \\ y &\mapsto 2u \\ z &\mapsto 3u \end{aligned}$$

encuentre el morfismo $f : \mathbb{V}(u-v^3) \to \mathbb{A}^3$ tal que $f^* = \varphi$.

P13. Dado un morfismo $f : V \to W$ de variedades afines, considere $X \subseteq W$ un conjunto algebraico. Demuestre que $f^{-1}(X)$ es conjunto algebraico.

P14. Dado el cono $V = \mathbb{V}(x^2+y^2-z^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, calcule $\mathbb{K}[V]$.

P15. Demuestre que $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{V}(xy-1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ no son isomorfos, pero con birracionales.

P16. Demuestre que si una función racional $f : V \dashrightarrow W$ vale cero en un abierto (de Zariski) $U \subseteq V$, entonces f vale cero en todas partes.

P17. Un *hiperplano* en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ es una hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo de grado uno. Responda las siguientes preguntas:

(a) Sean $H_1, \ldots, H_m$ hiperplanos en $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, con $m \leq n$. Demuestre que $H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_m \neq \emptyset$.

(b) Demuestre que dos rectas distintas en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ intersectan en **exactamente** un punto.

P18.

(a) Sea $\mathbb{F}_p$ el cuerpo con p elementos, p primo. ¿Cuántos puntos tiene $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_p}$?

(b) ¿Cuántas rectas hay en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_2}$?

(c) Dibuje todos los puntos y rectas de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_2}$.

P19. Demuestre que la función racional $f = x/y$ está definida en todo $\mathbb{V}(x-y^2) \subseteq \mathbb{A}^2$.

P20. Demuestre que si $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, entonces las funciones racionales regulares en todo punto son las funciones regulares. ¿Es esto cierto para cuerpos no algebraicamente cerrados?