FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Pontificada Universidad Católica

MAT2805

Sistemas Dinámicos

Autor:
Sebastián Lepe V.

2 de julio de 2025

Índice

1. Sistemas dinámicos

1.1. Definición y Ejemplos

Trabajaremos con espacios métricos compactos X llamado **espacio de fase** y con funciones continuas $T : X \to X$ (o casi continuas) llamada **la dinámica**. A veces T será invertible (a veces homemorfismo). Al par (X, T) le diremos sistema dinámico topológico o simplemente sistema dinámico.

Definicion 1.1 (Órbita): *Definimos la órbita positiva de un punto $x \in X$ sobre una transformación T por:*

$$\mathcal{O}_T^+(x) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Si además T es invertible, definimos la órbita completa de un punto $x \in X$ por:

$$\mathcal{O}_T(x) := \{T^n x : n \in \mathbb{Z}\}$$

Nota 1.2: La expresión $T^n x$ es simplemente $T^n(x)$ pero de forma reducida.

Nota 1.3: Es claro que la órbita completa está bien definida por la invertibilidad de T.

Ejemplo/Teorema 1.4: *Sea X espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ una contraccción, es decir, para todo $x, y, \in X$ se cumple que $d(Tx, Ty) < \lambda d(x, y)$ donde $0 < \lambda < 1$. Entonces, existe un único punto fijo x_* donde para todo $y \in X$ se cumple que:*

$$T^n y \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_*$$

Dem: Vamos a probar que existe un punto fijo, y luego probaremos que es único. Consideremos la sucesión $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, probemos que es de Cauchy. Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}x, T^n x) &< \lambda d(T^n x, T^{n-1}x) \\ &< \lambda^2 d(T^{n-1}x, T^{n-2}x) \\ &\vdots \\ &< \lambda^n d(Tx, x) \end{aligned}$$

Ahora consideremos $n, m \in \mathbb{N}$ de tal forma que $n \geq m$, luego,

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^m x) &< d(T^n x, T^{m+1}x) + d(T^{m+1}x, T^m x) \\ &\vdots \\ &< \sum_{k=m}^{n-1} d(T^{k+1}x, T^k x) \\ &< \sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k d(Tx, x) \end{aligned}$$

Obteniendo una suma, ahora notemos que,

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^m x) &< d(Tx, x) \sum_{k=m}^{n-1} \lambda^k \\ &= d(Tx, x) \left(\frac{\lambda^n - \lambda^m}{\lambda - 1} \right) \end{aligned}$$

Notemos que la sucesión $\{\lambda^n\}$ es de Cauchy, puesto que converge a 0, por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ se obtiene que,

$$d(T^n x, T^m x) < \varepsilon$$

De forma que $\{T^n x\}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto converge, digamos que a x_*, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} T^n x = x_*$$

Se puede comporbar que x_* es punto fijo, puesto que por continuidad de T (al ser contracción), se tiene que,

$$Tx_* = T \left(\lim_{n \to \infty} T^n x \right) = \lim_{n \to \infty} T^{n+1} x = x_*$$

Probemos unicidad. Consideremos y^* otro punto fijo, luego se tiene que,

$$d(Tx_*, Ty_*) < \lambda d(x_*, y_*) = \lambda d(Tx_*, Ty_*)$$

Pero entonces $\lambda > 1$ siendo una contradicción. Siendo x_* es único punto fijo. ■

Definición 1.5: *Sea X un espacio de fase y T una dinámica. Sea $x \in X$ punto cualquier. Diremos que es periódico si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = x$ y al menor entero que cumple la periócidad se le dirá orden del punto periódico.*

Ejemplo 1.6: Consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0, 1]\}$$

El cual es un espacio métrico compacto, (es cerrado acotado en $\mathbb{C}$ Hausdorff, entonces es compacto). Consideremos la siguiente dinámica:

$$\begin{aligned} T_\alpha &: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \\ T_\alpha(z) &= e^{2\pi i\alpha} z \end{aligned}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es el ángulo. También se puede pensar en que T_α toma el z y lo mueve un ángulo α, o bien, de forma reducida $\theta \mapsto \theta + \alpha \mod 1$. Por lo que T_α es un mapa que traslada un ángulo α al punto z en la dirección del signo de α.

Distinguimos dos casos:

- **Caso 1:** Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$. Vemos que la n-iteración es de la forma:

$$T_\alpha^n z = e^{2\pi i\alpha n} z$$

Si $\alpha = p/q$ (irreducible), entonces si $n = q$ obtenemos que,

$$T_\alpha^q z = e^{2\pi i p} z = z$$

Es decir, todo punto es periódico de orden q, ($T^q = id$).

- **Caso 2:** Sea $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Entonces no hay periocidad y en efecto, supongamos que z tiene periocidad n, luego,

$$T_\alpha^n z = e^{2\pi i n\alpha} z = z$$

Pero entonces $n\alpha \in \mathbb{Z}$ siendo una contradicción.

Observación 1.7: La órbita positiva de cualquier punto es denso (α irracional). Para esto, notemos que $\mathbb{S}^1$ es compacto, entonces para $\varepsilon > 0$ exsiten $n, m \in \mathbb{N}$ tales que,

$$d(T_\alpha^n x, T_\alpha^m x) < \varepsilon$$

Además, T_α es isometría, por lo que,

$$d(T_\alpha x, T_\alpha y) = d(x, y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{S}^1$. Luego si consideramos $n \geq m$, tenemos que,

$$d(T_\alpha^{n-m} x, x) = d(T_\alpha^n x, T_\alpha^m x) < \varepsilon$$

Es decir, existe un $k \in \mathbb{N}$ de tal forma que existe un $T_\alpha^k \in \mathcal{O}_{T_\alpha}^+(x)$ que está menor a ε de distancia de x. Por otro lado, tomando $n - m = k$ podemos concluir que la colección $(x, T_\alpha^k x, T_\alpha^{2k} x, T_\alpha^{3k} x, \dots)$ tiene puntos consecutivos a una distancia menor a ε. En algún punto de la colección, esta está a una distancia menor a ε de y, ya que al no ser periódico ningún punto, entonces $T^n x$ no repite puntos anteriores (o sino hay periocidad), de forma que hay un k de forma que está cerca de y a una distancia menor a ε. Probando la densidad.

Nota 1.8: La observación 1.7 es equivalente a decir,

$$\inf_{\alpha \notin \mathbb{Q}} \|\theta - n\alpha\| = 0; \quad \|x\| := \min\{x, 1 - x\}$$

Ejemplo 1.9: En el espacio de fase $\mathbb{S}^1$ definimos la dinámica:

$$\begin{aligned} M_n : \mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto z^n = e^{2\pi i\theta n} \end{aligned}$$

donde $z = e^{2\pi i\theta}$. Si $n = 2$ vemos que es simplemente duplicar el ángulo de z. Notemos que z tiene dos preimagenes, la primera es ω con ángulo $\theta/2$ y la otra es $-\omega$ con ángulo $\pi + \theta$. Se puede ver que,

$$z = M_2(-\omega) = M_2(\omega)$$

En general, para M_n con n arbitrario, todo punto tiene n preimagenes (sin contar el 0), sea ω_n la n-ésima raíz de la unidad ($\omega_n = e^{2\pi i/n}$) y sea $y \in \mathbb{S}^1$ no nulo, entonces $M_n(y) = x$, luego,

$$M_n^{-1}(x) = \bigcup_{k=0,\dots,n-1} \{y\omega_n^k\}$$

Nota 1.10: El **ejemplo 1.6** se le conoce como movimiento rígido (isometría) y, el **ejemplo 1.9** se le conoce como un sistema dinámico caótico.

Ejemplo 1.11 (Dinámica Simbólica): Definamos el **full shift en n símbolos**. Se define por:

$$\Sigma := \{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbb{Z}} = \{x = (\dots, x_{-1}, x_{0,1}, \dots) : x_k \in \{1, \dots, n-1\}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Y el **full shift en n símbolos positvo/alternativo** se define por:

$$\Sigma^+ := \{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbb{N}_0} = \{x = (x_0, x_1, x_2, \dots) : x_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, k \in \mathbb{N}_0\}$$

Consideremos las transformaciones **shift**:

$$\sigma : \Sigma \to \Sigma,$$
$$\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$$

ambas dada por $(\sigma(x))_k = x_{k+1}$, es decir, que corre todos los términos a la izquierda. Notemos que el primer shift es invertible, (basta mover todos los términos a la derecha), mientras que el shift sobre un full shift positivo no es invertible.

Veremos que (Σ, σ) o (Σ^+, σ) son sistemas dinámicos. En particular, estudiaremos que ocurre con un full shift de dos símbolos positivo.

Ejemplo 1.12: $\Sigma^+ = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$. Los puntos:

$$(0, 0, 0, \dots)$$
$$(1, 1, 1, \dots)$$

Son puntos fijos, es más, son los únicos puntos fijos de shift. La secuencia $x = (0, 1, 0, 1, \dots)$ es periódico de orden 2 ($\sigma^2(x) = x$), notemos que existen dos de orden 2. En general, los puntos periódicos de orden n son de la forma:

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0, x_1, \dots)$$

Entonces las cantindad depende de las combinaciones de los primeros índices, por lo que hay 2^n puntos periódico de orden n.

Observación 1.13: Σ es un espacio compacto Hausdorff con la topología producto ($\{1,\ldots,n\}$ con la topología discreta). Una base de la topología son los cilindros que se definen por:

$$[a_1,\ldots,a_k]_m := \{x \in \Sigma : x_m = a_1, x_{m+1} = a_2, \ldots, x_{m+k-1} = a_k\}$$

ya que son el producto de finitos conjuntos que no son $\{0,1,\ldots,n-1\}$. Además, $\{0,1,\ldots,n-1\}$ con la topología discreta, es claro que es compacto de forma que el producto numerable de estos conjuntos compactos, es un compacto. También se tiene que la dinámica shift $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ es continua y por tanto σ es un homeomofrismo y Σ es metrizable con métrica,

$$d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|x_k - y_k|}{2^{|k|}}$$

que es finita para todo $x,y \in \Sigma$. Por último, la métrica d es compatible con la topología Σ, por lo que tenemos una construcción ideal. Por lo tanto, (Σ,σ) es un sistema dinámico topológico, de forma análoga se puede verificar que (Σ^+,σ) es un sistema dinámico topológico.

Definición 1.14: *Decimos que $(X,T),(Y,S)$ son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo $h : Y \to X$ que conjuga las dinámicas, es decir, se cumple que:*

$$h \circ S = T \circ h$$

Observación 1.15: Si X, Y son topologícamente conjugadas respecto a h, entonces se cumple que:

$$h \circ S \circ h^{-1} = T$$
$$h^{-1} \circ T \circ h = S$$

Esto nos dice que el comportamiento de la dináimca T es equivalente a la dinámica S.

Definición 1.16: *Decimos que $(X,T),(Y,S)$ son semiconjugadas si existe una función $h : Y \to X$ continua, sobreyectiva y tal que,*

$$h \circ S = T \circ h$$

Si h manda Y a X, decimos que (Y,S) es una extensión de (X,T) y que (X,T) es un factor de (Y,S).

Proposición 1.17: *Sean $(X,T),(Y,S)$ sistemas dinámicos topológicos. Supongamos que son semiconjugadas con una transformación $h : Y \to X$, entonces*

$$h(\mathcal{O}_S^+(x)) = \mathcal{O}_T^+(h(x))$$

de forma ordenada.

Dem: Sea una semiconjugada $h : Y \to X$. Sea $x \in Y$, entonces se cumple que $h(Sx) = T(hx)$ por definición, luego,

$$h(S^2x) = h(S(Sx)) = T(h(Sx)) = T^2(hx)$$

En general, $h(S^n x) = T^n(hx)$. Ahora consideremos la colección ordenada de elementos de la órbita positiva,

$$(x, Sx, S^2x, \dots) \in Y$$

al aplicar h a la cadena, obtenemos,

$$(h(x), h(Sx), h(S^2x), \dots) = (h(x), T(hx), T^2(hx), \dots) \in X$$

Dicho de otra forma:

$$h\left(\mathcal{O}_S^+(x)\right) = \mathcal{O}_T^+(h(x))$$

de forma ordenada. ■

Ejemplo 1.18: Consideremos los sistemas dinámicos $M_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, M_n(z) = z^n$ y el full shift en n símbolos positivo con la dinámioca shift. Entonces $(\mathbb{S}^1, M_n), (\Sigma_n^+, \sigma)$ son semiconjugadas. Probemos este hecho.

- **Caso $n = 2$:** Notemos que $M_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es equivalente a la transformación:

$$\begin{aligned} \widetilde{M_2} &: \frac{[0,1]}{0 \sim 1} \to \frac{[0,1]}{0 \sim 1} \left(= \mathbb{S}^1\right) \\ \widetilde{M_2}(y) &= 2y \pmod 1 \end{aligned}$$

(estamos tomando el intervalo $[0, 1]$ e identificamos 0 con 1). Debemos encontrar una función continua, sobreyectiva y que satisfaga la semiconjugación. Como candidata consideramos la transformación $h : \Sigma^+ \to [0, 1]/0 \sim 1$ definida por:

$$h(x = (x_0, x_1, \dots)) := \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \frac{x_2}{2^3} + \dots$$

Notemos que,

$$h(\sigma(x)) = h(x_1, x_2, \dots) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots$$

Y por otro lado,

$$\widetilde{M_2}(h(x)) = \widetilde{M_2}\left(\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2^2} + \dots\right) = x_0 + \frac{x_1}{2} + \dots = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots \pmod 1$$

Es decir, $h(\sigma(x)) = \widetilde{M_2}(h(x))$.

Para la sobreyectividad, notemos que debemos expresar un número de $\frac{[0,1]}{0\sim 1}$ en base 2, y esto se puede hacer para todo número real en base 10, por tanto h es sobreyectiva.

Nos faltaría probar la continuidad. se tiene que Σ_2^+ es segundo numerable luego es primero numerable, por lo que si toda sucesión $\{x_n\} \subseteq \Sigma_2^+$ que converge a x, implica que $\{h(x_n)\}$

converge a $h(x)$, entonces h es continua. Consideremos la sucesión $\{x^n\}_n$ una sucesión en Σ_2^+ que converge a x^∞, entonces cada elemento de la sucesión, es de la forma:

$$\begin{aligned} x^1 &= (x_0^1, x_1^1, \dots) \\ x^2 &= (x_0^2, x_1^2, \dots) \\ &\vdots \\ x^\infty &= (x_0^\infty, x_1^\infty, \dots) \end{aligned}$$

Entonces podemos pensar que x_i^n converge a x_i^∞ para $n \to \infty$, o dicho de otra forma, dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_i^k = x_i^\infty$ para todo $i = 0, 1 \dots, m$ para todo $k \geq n$. Luego,

$$|h(x^k) - h(x^\infty)| \leq \frac{2}{2^{m+2}} + \dots \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

cuando $n \to \infty$, (usamos la métrica usual, debido a que podemos usar eso en $\frac{[0,1]}{0\sim 1}$). Por lo tanto h es continua, demostrando que h es una semiconjugación de $(\mathbb{S}^1, M_2), (\Sigma_2^+, \sigma)$.

- **Caso general:** No demostraremos el caso general, sin embargo, no es tan complicado, ya que solo hay que cambiar algunas cosas, por ejemplo, $M_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es equivalente a la transformación:

$$\begin{aligned} \widetilde{M_2} &: \frac{[0,1]}{0\sim 1} \to \frac{[0,1]}{0\sim 1} \\ \widetilde{M_2}(y) &= ny \pmod 1 \end{aligned}$$

Y al función que nos da la semiconjugación es,

$$h(x = (x_0, x_1, \dots)) = \frac{x_0}{n} + \frac{x_1}{n^2} + \frac{x_2}{n^3} + \dots$$

donde $x_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. A h lo podemos pensar como un cambio de base. De forma que $(\mathbb{S}^1, M_n), (\Sigma_n^+, \sigma)$ son semiconjugadas.

Podemos dibujar $\widetilde{M_2}$ y considerar la transformación:

$$\widetilde{\widetilde{M}}_2(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1/2] \\ 2x - 1, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Luego este mapa con (Σ^+, σ) son semiconjugadas, en particular, existe $h : \Sigma^+ \to [0, 1]$.

1.2. Dinámica en una dimensión

Vamos a trabajar en $\mathbb{R}$ o en $[a, b]$ espacios métricos compactos, con funciones continuas de la forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y funciones acotadas $f : [a, b] \to [a, b]$, en particular, trabajamos con $f : [0, 1] \to [0, 1]$.

Definición 1.19: *Sea (X, T) un sistema dinámico. Decimos que $p \in X$ es un punto fijo atractor si es punto fijo y existe una vecindad U de p tal que,*

- *En la vecindad U, todos los puntos al iterar se acercan a p cada vez más, es decir,*

$$f\left(\overline{U}\right) \subset U$$

- *El único punto común entre las iteraciones de U es p, es decir,*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(U) = \{p\}$$

Decimos que p es un punto fijo repulsor si es punto fijo y existe vecindad U de p tal que,

- *En la vecindad U todos los puntos al iterar se alejan de p, es decir,*

$$\overline{U} \subset f(U)$$

- *El único punto común entre las iteraciones preimagenes de U es p,*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} f^{-n}(U) = \{p\}$$

Observación 1.20: De la primera condición de un punto fijo atractor, podemos deducir la siguiente cadena ordenada:

$$U \supset f\left(\overline{U}\right) \supset f^2\left(\overline{U}\right) \supset \dots$$

Observación 1.21: Podemos definir los puntos en U que nunca escapa de U como:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} f^{-n}(U)$$

Notemos que está bien definido, ya que si no fuera vacío, entonces se tiene que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} f^{-n}(U)$ satisface que $f^n(x) \in U$ para todo U, es decir, x nunca sale de U.

Lema 1.22: *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ de clase C^1 y sea p un punto fijo. Si $|f'(p)| < 1$, entonces p es atractor. Por otro lado, si $|f'(p)| > 1$, entonces p es repulsor.*

Dem: Debemos probar el caso de un punto fijo atractor y después el punto fijo repulsor.

- **Atractor:** Si $|f'(p)| < 1$, entonces existe un intervalo I tal que contiene a p y $|f'(x)| \leq A < 1$ para todo $x \in I$, entonces por el teorema del valor medio, para todo $x \in I$ se tiene que,

$$|f(x) - f(p)| \leq A|x - p|$$

es más,

$$|f^n(x) - f^n(p) = p| \leq A^n|x - p|$$

Por tanto,

$$\underset{\text{Exponencialmente}}{f^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p}$$

Esto implica que,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} f^n(U) = \{p\}$$

Para la otra condición notemos que siempre existe un $\widetilde{I}$ cerrado contenido en I, ahora como,

$$|f(x) - p| \leq A|x - p|$$

para todo $x \in \widetilde{I}$, se tiene que $f(\widetilde{I}) \subset \widetilde{I}$. Probando que p es un punto fijo atractor.

- **Repulsor:** De forma análoga podemos deducir que existe I intervalo tal que para todo $x \in I$ se tiene que,

  $$A|x - p| \leq |f(x) - f(p)|$$

  donde $A < 1$. Esto implica que todo punto que no es p, escapa de I, es decir,

  $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} f^{-1}(I) = \{p\}$$

  Para concluir la otra condición basta considerar $\widetilde{I}$ cerrado contenido en I, y entonces se tiene que $f(\widetilde{I}) \subset \widetilde{I}$. Probando que p es un punto fijo repulsor.

Probando el lema. ■

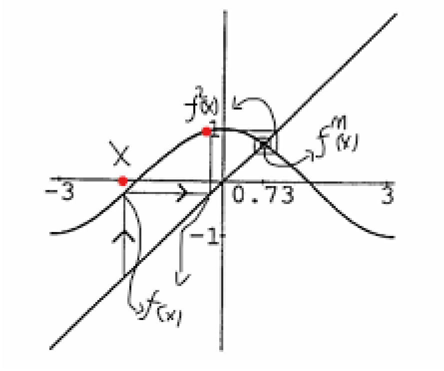
Definición 1.23: *Sea $([0,1], F)$ o $(\mathbb{R}, F)$ sistemas dinámicos donde F es C^1. Sea p un punto fijo, entonces decimos que es un punto hiperbólico si $|F'(p)| \neq 1$. En particular, decimos que es hiperbólico atractor si $|F'(p)| < 1$ y decimos que es un punto hiperbólico repulsor si $|F'(p)| > 1$.*

Nos puede surgir una duda cuando trabajamos con puntos fijos, ¿se podrá visualizar de alguna forma? Y la respuesta es claramente sí, es más, veremos como estudiar un punto fijo, en el sentido que nos podemos acercar visualemte a este punto fijo.

Ejemplo 1.24: Consideremos la función raiz cuadrada $\cos : [0,1] \to [0,1]$. Claramente es de C^1, es más, es una contracción, puesto que,

$$|\cos(x) - \cos(y)| < |x - y|$$

donde trabajamos en $[0,1]$. Entonces existe un punto fijo el cual es atractor, debido a que $|\operatorname{sen}(p)| < 1$. Consideremos el gráfico de la función anterior y la de $y = x$. Sabemos que para todo $x \in [0,1]$, entonces $\cos^n(x)$ converge al punto fijo cuando $n \to \infty$, por lo que tomamos $x \in [0,1]$, luego vamos a $f(x) = \cos(x)$, ahora podemos tomar la recta cuando $y = f(x)$ y el punto que toca a la recta $y = x$, lo hace en el punto $(f(x), f(x))$, ahora tomando la recta $x = f(x)$ podemos



llegar a otro punto de la gráfica de coseno, siendo el punto $(f(x), f^2(x))$ y así sucesivamente como muestra la figura siguiente. De esta forma podemos ver como $f^n(x) = \cos^n(x)$ se va acercando al punto fijo.

Observación 1.25: En una función de una dimensión, podemos determinar visualmente los puntos fijos, que son aquellos puntos donde la gráfica de la función se intersecta con la recta $y = x$.

1.3. La Familia Cuadrática

Vamos a estudiar una familia de funciones. Definimos la familia cuadrática por las funciones de la forma:

$$F_\mu : [0,1] \to [0,1]$$
$$F_\mu(x) := \mu x(1-x)$$

donde $\mu \in [1,4]$. Si expandimos la expresión, vemos que $F_\mu(x) = -\mu x^2 + \mu x$, por lo que F_μ es una parábola invertida. Notemos que definimos F_μ en un intervalo $[0,1]$, puesto que fuera de este, su comportamiento no es "bueno", el siguiente resultado nos muestra el porque.

Lema 1.26: *Sea $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\mu \geq 1$. Si $x \notin [0,1]$, entonces,*

$$F_\mu^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Observación 1.27: Usando el ejemplo anterior, se puede ver claramente que F_μ^n se va a $-\infty$ cuando $n \to \infty$.

Dem: Sea $x < 0$, notemos que se satisface la siguiente desigualdad:

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x) < x \iff 1 - \frac{1}{\mu} > x$$

puesto que $\mu \geq 1$ y $x < 0$. Entonces la sucesión $\{F_\mu^n(x)\}$ es estrictamente decreciente. Supongamos que converge al punto $p \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que p es un punto fijo, ya que por continuidad de F_μ se tiene que,

$$F_\mu(p) = F_\mu\left(\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} F_\mu^{n+1}(x) = p$$

Sin embargo, F_μ^n tiene un o dos puntos fijos, siendo el menor siempre el 0, siendo una contradicción. Por tanto, $F_\mu^n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$. Ahora, si $x \in (1, \infty)$ entonces $F_\mu(x) < 0$, luego tenemos el caso anterior. ■

Observación 1.28: Si decidimos estudiar $\mu \in (0, 1)$, entonces existe un $x_0 < 0$ tal que $\mu x(1 - x) > x$ para todo $x \in (x_0, 0)$, aquí ocurre que,

$$F_\mu^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Puesto que $\{F_\mu^n(x)\}$ es una sucesión creciente acotada superiormente por 0 ($\mu x(1 - x) < 0$), entonces la sucesión converge a un punto fijo pero por construcción debe ser 0. Si $x = x_0$, entonces tenemos un punto fijo, ya que $x_0 = 1 - 1/\mu < 0$ y entonces,

$$F_\mu(x_0) = \mu \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left(\frac{1}{\mu}\right) = 1 - \frac{1}{\mu} = x_0$$

Finalmente para $x < x_0$ tenemos que $\mu x(1 - x) < x$, luego usamos el argumento de la demostración anterior y vemos que,

$$F_\mu^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Lema 1.29: *Sea $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, si $\mu \in (0, 1]$ entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Dem: Notemos que $0 \leq F_\mu(x) < x$ para todo $x \in (0, 1]$. Entonces la sucesión $\{F_\mu^n(x)\}$ es estrictamente creciente acotado por arriba, entonces se tiene que la sucesión converge a un punto fijo. Por otro lado, F_μ tiene un único punto fijo, el cual es 0, por tanto,

$$F_\mu^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cuando $x = 0$ es evidente que el límite es 0. Probando el lema. ■

Observación 1.30: Observar que si consideramos $\mu > 4$, entonces hay un problema. Sabemos que $F_\mu(x)$ alcanza su máximo en $x = 1/2$, pero ocurre que hay una parte del gráfico de F_μ que se sale del cuadrado $[0, 1]^2$, en particular, alrededor de $x = 1/2$, esto significa que para todo $x \in [0, 1]$ eventualemnte sale de $[0, 1]$ y ocurre que al seguir iterando se va para $x < 0$, y como vimos, se tiene que,

$$F_\mu^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo que el estudio de sus órbitas no tiene mucho sentido. Sin embargo, podemos estudiar aquellos puntos que nunca salen del intervalo $[0, 1]$ el cual lo definimos por: Λ_μ :=todos los puntos de $[0, 1]$ que se mantienen en $[0, 1]$. En particular,

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n\geq 0} F_\mu^{-n}([0, 1])$$

Notar que,

$$F_\mu : \Lambda_\mu \to \Lambda_\mu \subseteq [0,1]$$

es un sistema dinámico topológico.

Afirmación: *Λ_μ es un espacio métrico compacto.*

Dem: Claramente es métrico al ser subconjunto de un espacio métrico. Ahora, para ver que es compacto, probaremos que Λ_μ es cerrado. Consideremos el complemento y veamos que es abierto. Sea $x \in \Lambda_\mu^c$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $F_\mu^n(x) \notin [0,1]$, por continuidad existe una vecindad U de x tal que $F_\mu^n(y) \notin [0,1]$ para todo $y \in U$ luego $U \subseteq \Lambda_\mu^c$, probando que es abierto y que Λ_μ es cerrado. Ahora, como $[0,1]$ es Hausdorff, se tiene que Λ_μ es compacto. Finalmente es un espacio métrico compacto. ■

el cual cumple propiedades interesantes.

Proposición 1.31: *Para $\mu > 4$, el conjunto Λ_μ es un conjunto de Cantor y (Λ_μ, F_μ) es topológicamente conjugado al full shift en dos símbolos positivo.*

No demostraremos la proposición por ahora, se requiere de un pequeño estudio que haremos más adelante.

Consideremos $\mu \in (1,4]$. Entonces F_μ tiene dos puntos fijos. Uno es 0 y el otro lo podemos determinar, denotémoslo por p_μ, entonces,

$$F_\mu(p_\mu) = p_\mu \iff \mu p_\mu(1 - p\mu) = p_\mu$$

Como $p_\mu \neq 0$, entonces,

$$p_\mu = 1 - \frac{1}{\mu} \in [0,1]$$

Si F_μ es al menos C^1, entonces podemos determinar que tipos de puntos fijos son 0 y p_μ. Si la derivada es $F_\mu' = \mu - 2\mu x$, luego,

$$F_\mu'(0) = \mu \in (1,4]$$

luego 0 es un punto fijo repulsor, por otro lado,

$$F_\mu'(p_\mu) = 2 - \mu$$

Si $\mu \in (1,3)$ entonces $|F_\mu'(p_\mu)| < 1$, por lo que es un punto fijo atractor, por otro lado, si $\mu \in (3,4)$, entonces $|F_\mu'(p_\mu)| > 1$, entonces es un punto fijo repulsor.

Teorema 1.32: *Sea $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, si $\mu \in (1,3)$, entonces,*

$$F_\mu^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_\mu$$

para todo $x \in (0,1)$.

Dem: Demostremos por casos.

- $1 < \mu \leq 2$: En este caso $0 < p_\mu \leq 1/2$, si estudiamos las iteraciones, podemos ver que F_μ^n se acerca al punto fijo no nulo, el cual es p_μ. Veamos los distintos casos posibles.
  - Supongamos que $0 < x \leq p_\mu$, entonces se cumple la siguientes desigualdad:

    $$x \leq F_\mu(x) \leq p_\mu$$

    Para la primera basta ver que es equivalente a $x \leq p_\mu$. Probemos la segunda,

    $$\mu x(1-x) \leq 1 - \frac{1}{\mu} \Longleftrightarrow 0 \leq \mu^2 x^2 - \mu^2 x + \mu - 1$$

    Observamos que el discriminante de la cuadrática sobre x es,

    $$\mu^4 - 4(\mu^2)(\mu - 1) = \mu^2(\mu - 1)^2$$

    Notemos que $q(x) := \mu^2 x^2 + \mu^2 x + \mu - 1$ se anula en $p_\mu, 1/\mu$ cuando $\mu \in (1, 2)$, y se puede ver que $p_\mu < 1/\mu$, por tanto $q(x) \geq 0$ si y sólo si $0 < x \leq p_\mu$, siendo verdad y por tanto,

    $$x \leq F_\mu(x) \leq p_\mu$$

    para todo $0 < x \leq p_\mu$ y para todo $\mu \in (1, 2)$. Si $\mu = 2$ entonces $p_\mu = 1/2$ pero llegamos a la misma conclusión, verificando la desigualdad inicial.

    Consideremos $\{F_\mu^n(x)\}$ una sucesión que es creciente por la desigualdad, este es acotada por arriba por lo que converge y como el único punto fijo no nulo es p_μ, se cumple que,

    $$F_\mu^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_\mu$$

  - Supongamos que $x \in (p_\mu, 1/2]$ (en el caso de que $p_\mu \neq 1/2$), entonces se cumple la siguiente desigualdad:

    $$p_\mu < F_\mu(x) \leq x$$

    Usando el mismo argumento del caso anterior, aquí ocurre que la sucesión $\{F_\mu^n(x)\}$ es decreciente acotada por abajo, por lo que converge a un punto fijo no nulo, es decir,

    $$F_\mu^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_\mu$$

  - Supongamos que $x \in (1/2, 1)$, entonces $F_\mu(x) \in (0, 1/2)$ (por simetría de la parábola), entonces,

    $$F_\mu^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p_\mu$$

    para todo $x \in (0, 1)$.

- $2 < \mu < 3$: Notemos que p_μ tiene dos preimagenes con respecto a F_μ, el primero es claramente p_μ, el otro diremos que es p_μ^*, en particular,

$$p_\mu^* = \frac{1}{\mu}$$

  Entonces se cumple la siguiente inclusión:

$$F[p_\mu^*, p_\mu] = F\left[\frac{1}{2}, p_\mu\right] = \left[p_\mu, \frac{\mu}{4}\right]$$

  Volviendo a iterar llegamos a que,

$$F^2[p_\mu^*, p_\mu] \subseteq \left[F_\mu\left(\frac{\mu}{4}\right), p_\mu\right]$$

  Podemos ver que $F_\mu(\mu/4) > 1/2$, puesto que es equivalente a estudiar la desigualda:

$$(\mu - 2)((\mu - 1)^2 - 5) < 0$$

  Lo cual es cierto, dado que $\mu - 2 > 0$ y $(\mu - 1)^2 - 5 < 0$. De esta forma, $F^2\big|_{[1/2, p_\mu]}$ es monótona decreicnete, por lo que definimos $a_1 := F^2(1/2)$ y definimos el intervalo $I_1 := [a_1, p_\mu]$, de forma recursiva definimos $a_n := F^2(a_{n-1})$ y el intervalo $I_n := [a_n, p_\mu]$. Se tiene que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y converge a un punto fijo, en particular, converge a p_μ.

  Cuando $x \in (0, p_\mu^*)$ entonces para algún $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $F_\mu^k(x) \in [p_\mu^*, p_\mu]$ y si $x \in (p_\mu, 1)$, entonces $F_\mu(x) \in (0, p_\mu)$, por tanto,

$$F_\mu^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} p_\mu$$

  para todo $x \in (0, 1)$.

Probando el teorema. ■

Estudiemos F_μ^2, por definición,

$$F_\mu^2 = \mu^2 x(1 - x)(1 - \mu x + \mu x^2)$$

Si $\mu < 3$ obtenemos lo que se aprecia en la figura 1. Podemos comprobar que hay un solo punto fijo.

Si tomamos $\mu = 3$ obtenemos lo que se aprecia en la figura 2. Que si nos fijamos, veremos que $x = y$ se comporta como una tangente en el punto fijo. por último, si consideramos $\mu > 3$, obtenemos lo que se aprecia en la figura 3. Podemos observar que hay tres puntos fijos, de los cuales 2 son nuevos y uno es el punto fijo de la función F_μ.

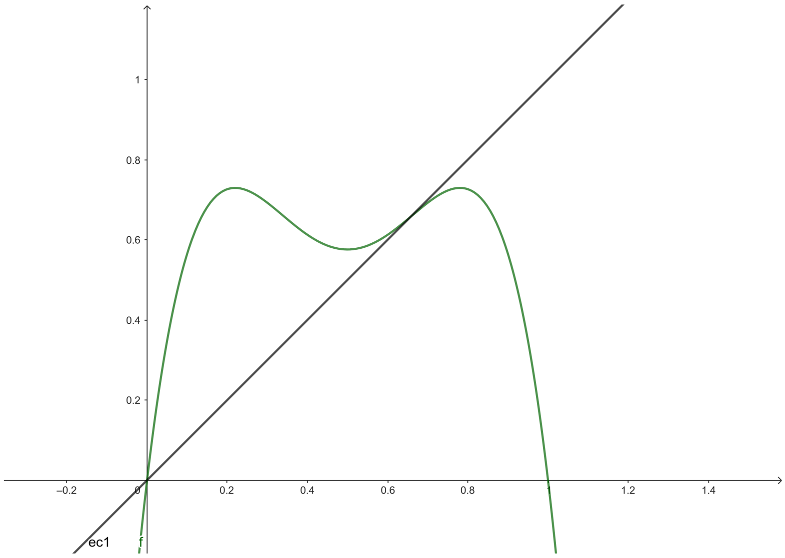


Figura 1: $\mu < 3$

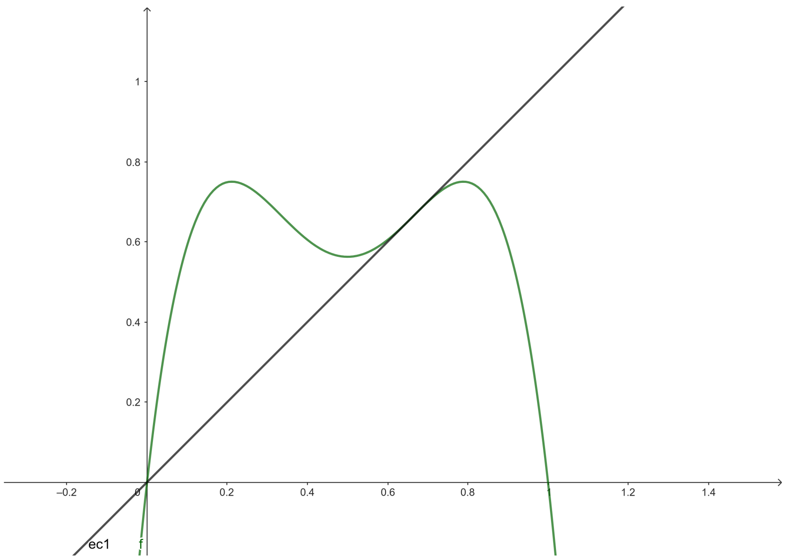


Figura 2: $\mu = 3$

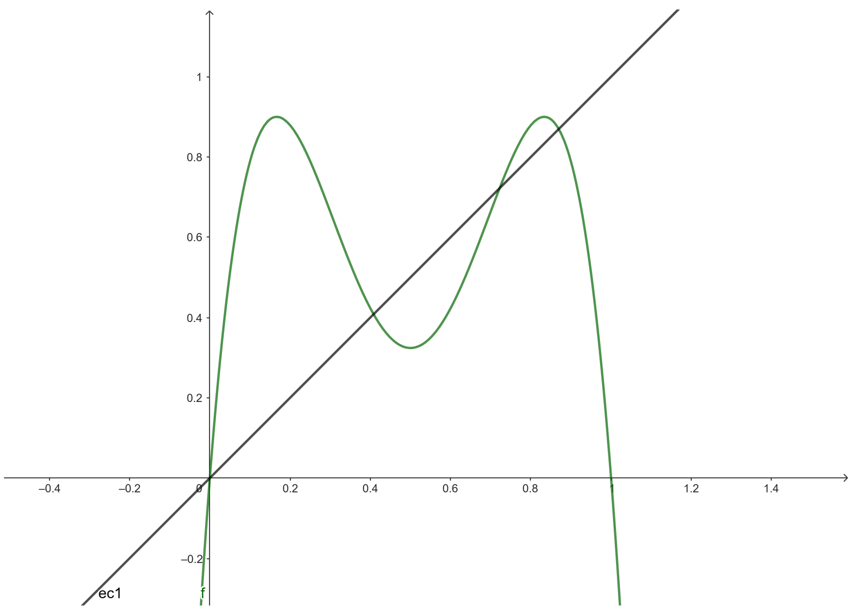


Figura 3: $\mu > 3$

Ese comportamiendo es interesante, ya que lo podemos replicar para F_μ^3 que no estudiaremos, pero se puede comprobar que a partir de un $\mu \in [1, 4]$ se tiene que hay 8 puntos fijos en total, y en general, F_μ^n para cierto μ se tiene que tiene 2^n puntos fijos. Si pensamos en F_μ^∞ podemos construir un dibujo intetesante:

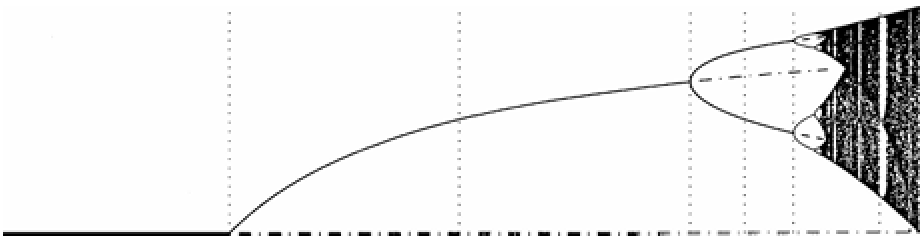


Figura 4: Comportamiento de los puntos fijos en función de μ.

Teorema 1.33: *Sea* $\mu \in (3, 1 + \sqrt{6})$ *y* $x \in (0, 1) \setminus \{p_\mu\}$*, entonces,*

$$F_\mu^{2n}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$$
$$F_\mu^{2n+1}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} q$$

Definición 1.34: *Sea* (X, T) *un sistema dinámico. Sea* $x \in X$*, definimos el conjunto* ω*-límite de* $x \in X$ *por:*

$$\omega(x) := \{z \in X : \text{existe una sucesión } \{n_j\}_{j\in\mathbb{N}} \text{ tal que } T^{n_j} \to z, \text{ cuando } j \to \infty\}$$

Claramente los puntos fijos y los puntos periódicos pertenecen a este conjunto límite.

revisar si esta correcto Teorema 1.35 (Lyubich): *Consideremos* $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ *donde* $\mu \in [1,4]$. *Entonces podemos realizar la siguiente descomposición:*

$$[1,4] = R \cup C \cup \mathcal{E}$$

Donde R *se le conoce como los puntos regulares,* C *los puntos caóticos y a* $\mathcal{E}$ *son los puntos excepcionales. Esta descomposición cumple que,*

- $\lambda(\mathcal{E}) = 0$ *(donde* λ *es la medida de lebesgue),*
- *Si* $\mu \in R$*, entonces el punto crítico* $(1/2)$ *converge a una órbita positiva atractora,*
- *Si* $\mu \in C$*, entonces existe una medida invariante absolutamente continua con respecto a Lebesgue y Lebesgue casi todo punto de* $[0,1]$*, equidistribuye a esa medida.*

Definición 1.36: *Sea* $(X, T, \mathcal{B})$ *un sistema dinámico medible donde* $\mathcal{B}$ *es el* σ*-álgebra generado por el conjunto de los abierto en* X *como topología. Decimos que una medida* μ *de un punto en* X *es invariante por* T *(o* T*-invariante) si,*

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$$

para todo $A \in \mathcal{B}$.

Definición 1.37: *Sea* $(X, \mathcal{F}, \mu, \nu)$ *un espacio de medida con* μ, ν *medidas. Decimos que* μ *es absolutamente continua con respecto a* ν *si para* $A \in \mathcal{F}$ *tal que* $\nu(A) = 0$*, se tiene que,*

$$\mu(A) = 0$$

Y se denota por $\mu \ll \nu$ *(aunque no se usará la notación).*

Observación 1.38: Si $\mu \in C$ (como coeficiente de la cuadrática), entonces existe η una medida invariante absolutamente continua con respecto a Lebesgue, es decir,

$$\eta = f d\lambda \quad \left(\text{es decir, } \eta(A) = \int_A f d\lambda \right)$$

donde f es una función integrable. Y existe $F \subseteq [0,1]$ con medida de Lebesgue total (es decir, $\lambda(F) = \lambda([0,1]) = 1$) tal que si $x \in F$, entonces,

$$\frac{1}{n}\left(\delta_x + \delta_{F_\mu(x)} + \cdots + \delta_{F_\mu^{n-1}(x)}\right) \overset{\text{topo. débil } (*)}{\longrightarrow} \eta = f d\lambda$$

donde δ_i es el delta de Dirac.

Ejemplo 1.39: Sea $\eta = f d\lambda$, si $\nu(A) = 0$, entonces por definición,

$$\eta(A) = \int_A f d\nu = 0$$

debido a que A es ν-despreciable, (propiedades de la teoría de la medida).

Teorema 1.40 (Radan-Nikodyan): *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, \nu)$ *un espacio de medida con dos medidas. Si* μ *es absolutamente continua con respecto a* ν*, entonces existe una función* $f \in L^1(\nu)$ *tal que* $\mu = f d\lambda$.

1.4. El conjunto Λ_μ

Cuando $\mu > 4$, sabemos que hay una región donde $F_\mu(x) > 1$, cosa que no nos interesa, también ocurre que hay elementos de $x \in [0,1]$ donde $F_\mu(x) \leq 1$ que al iterar por F_μ, eventualmente ocurre que $F(F^k(x)) > 1$, pero existe un conjunto donde esto no ocurre, el cual anteriormente definimos por:

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n \geq 0} F_\mu^{-n}([0,1])$$

Que además es un conjunto de Cantor. Lo que haremos ahora es estudiar Λ_μ por partes, y obtendremos propiedades interesante. Para ello vamos estudiar la iteración preimagen por partes.

- **Primera iteración:** Notemos que $F_\mu^{-1}([0,1])$ es la unión de dos intervalos disjuntos, el cual definiremos por I_0, I_1 respectivamente, donde I_0 es antes de que $F_\mu(x) > 1$ y I_1 es después. Por lo que,

$$F_\mu^{-1}([0,1]) = I_0 \cup I_1$$

- **Segunda iteración:** Ahora a cada I_i con $i = 0, 1$ lo podemos iterar con F_μ^{-1} y obtener dos intervalos disjuntos, en total tenemos cuatro intervalos disjuntos, dos de ellos están incluidos en I_0 y el otro en I_1, ahora por construcción podemos definir,

$$I_{00} := I_0 \cap F_\mu^{-1}(I_0)$$

  Para representar el conjunto que está incluido en I_0 tal que $F_\mu(I_{00}) = I_0$, de forma análoga podemos definir,

$$I_{01} := I_0 \cap F_\mu^{-1}(I_1)$$

  es decir, el conjunto que está en I_0 tal que $F_\mu(I_{01}) = I_1$. El resto se define como:

$$I_{10} := I_1 \cap F_\mu^{-1}(I_0)$$
$$I_{11} := I_1 \cap F_\mu^{-1}(I_1)$$

  Obteniendo nuestra segunda iteración.

- ***n*-ésima itertación:** Aplicando el argumento anterior, podemos construir la n-ésima iteración de las preimágenes. Obteniendo 2^n intervalos definidos de la siguiente forma:

$$I_{(i_0,\ldots,i_n)} := I_{i_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{i_1}) \cap \cdots \cap F_\mu^{-n}(I_n)$$

  donde $(i_0, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^{n+1}$. Este intervalo se caracteriza por los elementos x de $[0,1]$ tales que,

$$x \in I_{i_0},\ \ F_\mu(x) \in I_{i_1}, \ldots,\ \ F_\mu^n(x) \in I_{i_n}$$

  Por construcción se puede ver que $I_{(i_0,\ldots,i_n)}$ es un intervalo.

- **Conjunto de elementos que nunca escapan de** $[0,1]$**:** Sabemos que Λ_μ son los puntos que al iterar las veces que sean, nunca salen $[0,1]$. Además, lo podemos asociar a la iteración anterior, observemos que,

$$\begin{aligned} F_\mu^{-1}([0,1]) &= I_0 \cup I_1 \\ F_\mu^{-2}([0,1]) &= I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11} \\ &\vdots \\ F_\mu^{-n}([0,1]) &= \bigcup_{v \in \{0,1\}^n} I_v \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{v \in \{0,1\}^n} I_v$$

Encontrando otra relación para Λ_μ.

Observación 1.41: El conjunto Λ_μ no es vacío, puesto que, los puntos fijos, los cuales son dos, están en este conjunto.

Observación 1.42: La iteración anterior está relacionado con Λ_μ, puesto que si $x \in \Lambda_\mu$, entonces,

$$x \in I_0 \cup I_1, \;\; F_\mu(x) \in I_0 \cup I_1, \dots, \;\; F_\mu^n(x) \in I_0 \cup I_1$$

Es decir, existe una coordenada $(i_0, \dots, i_n) \in \{0,1\}^{n+1}$ tal que,

$$x \in I_{(i_0,\dots,i_n)}$$

Es más, por definición de Λ_μ, existe una coordenada $(i_0, i_1, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ tal que,

$$x \in I_{(i_0,i_1,\dots)}$$

y por tanto,

$$F^n(x) \in I_{i_n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. De aqui podemos considerar el mapa $S : \Lambda_\mu \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ que es un mapa codificado que manda de Λ_μ a la coordenadas $(i_0, \dots)$. El cual está bien definido ya que la codificación es única, puesto que definir por intervalos y por tanto si fuera no única, estaría en dos intervalos distintos, siendo imposible.

Proposición 1.43: *Sea $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ con $\mu > 4$. Entonces el mapa codificación $S : \Lambda_\mu \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ satisface el diagrama conmutativo de la conjugación, de los sistemas dinámicos $(\Lambda_\mu, F_\mu), (\Sigma_2^+, \sigma)$.*

Dem: Como vimos anteriormente, (Λ_μ, F_μ) es un sistema dinámico topológico. Debemos probar que se cumple,

$$(S \circ F_\mu)(x) = (\sigma \circ S)(x)$$

para todo $x \in \Lambda_\mu$. Notemos que si $x \in \Lambda_\mu$, entonces $x \in I_{(i_0,i_1,\dots)}$ siendo $(i_0,\dots)$ única, luego,

$$\sigma(S(x)) = \sigma(i_0, i_1, \dots) = (i_1, i_2, \dots)$$

Por otro lado, si $x \in I_{(i_0,i_1,\dots)}$, entonces $F_\mu(x) \in I_{(i_1,i_2,\dots)}$, es decir,

$$S(F_\mu(x)) = (i_1, i_2, \dots)$$

Por tanto, S satisface el diagrama conmutativo de la conjugación. ■

Teorema 1.44: *Si $\mu > 2 + \sqrt{5}$, entonces $S : \Lambda_\mu \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ es una conjugación topológica.*

Observación 1.45: Si $\mu > 2 + \sqrt{5}$, entonces tenemos el siguiente dibujo:

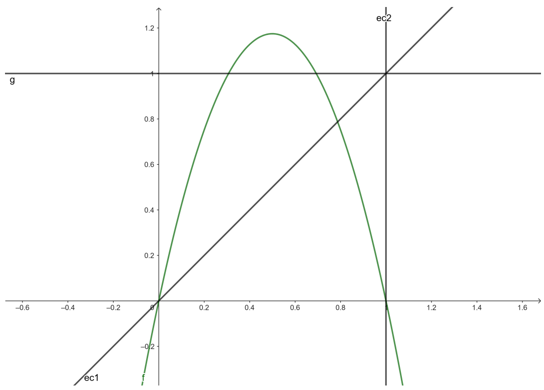


Figura 5: $\mu > 2 + \sqrt{5}$

Luego $|F'_\mu(x)| \geq \zeta$ para algún $\zeta > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1$. Para ver esto, consideremos los x tales que $F_\mu(x) = 1$, entonces,

$$\mu x(1-x) = 1 \iff x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4/\mu}}{2}$$

Es decir, $I_0 = [0, x_-], I_1 = [x_+, 1]$. Por definición de la F_μ se tiene que la derivada disminuye su valor cuando parte en $x = 0$ hasta cuando $x = x_-$, y luego aumenta su valor cuando parte en $x = x_+$ hasta $x = 1$. Por lo que si $|F'_\mu(x_\pm)| > 1$ entonces tendriamos lo pedido. Entonces,

$$1 = F'_\mu(x_\pm) = \pm\mu\sqrt{1 - \frac{4}{\mu}}$$

Encontrando los valores posibles de μ se obtiene que

$$\mu_\pm = 2 \pm \sqrt{5}$$

donde nos interesa la solución positiva la cual es $\mu = 2 + \sqrt{5}$. Esto implica que si $\mu > 2 + \sqrt{5}$, entonces $|F'_\mu(x_\pm)| > 1$, obteniendo lo pedido.

Observación 1.46: Estudiemos el comportamiento del largo de los intervalos $I_{(i_0,\dots,i_n)}$. En el caso del intervalo I_{00} se tiene que para todo $x, y \in I_{00}$ se cumple,

$$|F_\mu(x) - F_\mu(y)| = |F'_\mu(\zeta)||x - y|$$

por el teorema del valor medio, para algún ζ entre x, y. Como $I_{00} \subset I_0$, entonces,

$$|F_\mu(x) - F_\mu(y)| \geq \zeta|x - y|$$

Por tanto,

$$|I_0| \geq \zeta|I_{00}| \Longleftrightarrow |I_{00}| \leq \frac{1}{\zeta}|I_0|$$

Esto se puede hacer para todos los intervalos, de esta forma, si tenemos $(i_0, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^{n+1}$, entonces,

$$\begin{aligned}|I_{(i_0,\ldots,i_n)}| &\leq \frac{1}{\zeta}|I_{(i_0,\ldots,i_{n-1})}| \\ &\leq \frac{1}{\zeta^n}|I_{i_0}| \leq \frac{1}{\zeta^{n+1}}C\end{aligned}$$

donde C es una constante positiva. Por tanto podemos decir que,

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{\vec{w}\in\{0,1\}^n} I_{\vec{w}}\right)$$

donde $\vec{w} = (i_0, \ldots, i_n)$, ($n$ puede variar). Donde los $I_{\vec{w}}$ son disjuntos y por tanto, tenemos un conjunto de Cantor.

Dem (Teorema 1.44): De la afirmación anterior se tiene que S satisface el diagrama conmutativo. Por lo que falta probar que S es inyectivo, sobreyectivo y continua con inversa continua.

- **Inyectiva:** Sean $x \neq y \in \Lambda_\mu$ tales que $S(x) = S(y)$, entonces $F_\mu^i(x), F_\mu^i(y)$ están en los mismos intervalos $I_{\vec{w}}$ para todo i. Pero sabemos que para todo $x, y \in I_0 \cup I_1$ se tiene que $\zeta^i|x - y| \leq |F_\mu^i(x) - F_\mu^i(y)|$, es decir, que las n iteración de x, y se van separando cuando n crece y por tanto necesariamente $x = y$.
- **Sobreyectiva:** Sea $(i_0, i_n, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$. Podemos definir,

  $$\vec{w}_n := (i_0, \ldots, i_n)$$

  como los primeros $n+1$ de $(i_0, i_1, \ldots)$. Luego podemos considerar,

  $$x \in \bigcap_{n\geq 1} I_{\vec{w}_n}$$

  Que está bien definido por todo lo anterior.
- **Continua con Inversa continua:** Notemos que,

  $$S(I_{(i_0,\ldots,i_n)}) = [i_0, \ldots, i_n]$$

  donde $[i_0, \ldots, i_n]$ es un cilindro y de antemano sabemos que los abiertos de $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ son los cilindros, por otro lado $I_{(i_0,\ldots,i_n)}$ son los abiertos topológico de Λ_μ. Por tanto,

  $$S^{-1}([i_0, \ldots, i_n]) = I_{(i_0,\ldots,i_n)}$$

  es decir, S^{-1} es continua, además S^{-1} es abierto de forma que S es continua.

Por lo tanto S es un homeomorfismo y por tanto, es una conjugada topológica. $\blacksquare$

Definición 1.47: *Sea (X, T) un sistema dinámico. Diremos que es topológicamente transitivo si para todo U, V abiertos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Propocisión 1.48: *Sea (X, T) un espacio "métrico" topológico compacto. Entonces X es topológicamente transitivo si y sólo si existe un $x_0 \in X$ tal que la órbita $\mathcal{O}_T^+(x_0)$ es denso.*

Corolario 1.49: *Si $\mu > 2 + \sqrt{5}$, entonces la cantidad de puntos periódicos de orden n es 2^n. Además, $F_\mu : \Lambda_\mu \to \Lambda_\mu$ es topológicamente transitivo.*

Vamos a demostrar el corolario, pero antes necesitamos de un lema.

Lema 1.50: *El sistema dinámico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}, \sigma)$ es topológicamente transitivo.*

Dem: Vamos a demostrar usando las dos definiciones.

- **Primera definición:** Sean U, V abiertos. Consideremos $C_1 = [a_0, \dots, a_{n-1}] \subseteq U, C_2 = [b_0, \dots, b_{n-1}] \subseteq V$. Notemos que si $x \in [a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1}]$ si y sólo si $x \in U$ y $\sigma^n(x) \in V$, entonces $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y por tanto $(\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}, \sigma)$ es topológicamente transitivo.
- **Segunda definición:** Sea $\{C_1, C_2 \dots\} = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración numerable de los cilindros de $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$. Consideremos $x = (C_1, C_2, \dots)$ (abuso de notación). Claramente la órbita de x es denso puesto que pasa por todos los C_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Probando que $(\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}, \sigma)$ es topológicamente transitivo.

$\blacksquare$

Dem (Corolario 1.49): Sabemos que (Λ_μ, F_μ) es conjugada con (Σ_2^+, σ) con respecto al mapa identificación S que es un homeomorfismo para $\mu > 2 + \sqrt{5}$, esto implica que,

$$(S^{-1} \circ \sigma \circ S)(x) = F_\mu(x)$$

para todo $x \in \Lambda$. Entonces,

$$F_\mu^n = S^{-1} \circ \sigma^n \circ S$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ punto periódico de σ de orden n, luego,

$$\sigma^n(y) = y$$

Como S es sobreyectiva, existe $x \in \Lambda_\mu$ tal que $S(x) = y$, luego,

$$\sigma^n(S(x)) = S(x)$$

Aplicando S^{-1} obtenemos que,

$$F_\mu^n(x) = x$$

Es decir, x es punto periódico de orden n. Es más, x está determinado de forma única por la invertibilidad de S, es decir, si σ poseé 2^n puntos periódicos de orden n, entonces existen 2^n puntos en Λ_μ que son periódicos de orden n con respecto a F_μ. Como queriamos probar.

Nos falta probar que es topológicamente transitivo. Sea $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ con órbita densa, luego existe un $x \in \Lambda_\mu$ tal que $S(x) = y$, además, por la **proposición 1.17**, se cumple que,

$$S(\mathcal{O}^+_{F_\mu}(x)) = \mathcal{O}^+_\sigma(y)$$

Entonces,

$$\overline{S(\mathcal{O}^+_{F_\mu}(x))} = \overline{\mathcal{O}^+_\sigma(y)} = \Sigma_2^+$$

Por S homeomorfismo, podemos concluir que,

$$\overline{S(\mathcal{O}^+_{F_\mu}(x))} = S\left(\overline{\mathcal{O}_{F_\mu(x)}}\right) = \Sigma_2^+$$

Por tanto,

$$\overline{\mathcal{O}_{F_\mu(x)}} = \Lambda_\mu$$

Probando que Λ_μ es topológicamente transitivo. ■

1.5. Sarkoskii y Puntos Periódicos

Un resultado importante e interesante, es que existe un orden en $\mathbb{N}$ asociado a las periocidades de una dinámica. Este es conocido como el teorema de Sarkoskii.

Teorema 1.51 (Sarkoskii,Li-Yorte primera versión): *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $f : [0,1] \to [0,1]$ una dinámica. Si f tiene un punto periódico de orden 3, entonces tiene de cualquier oden (hay caos).*

Teorema 1.52 (Sarkoskii segunda versión): *Consideremos el siguiente orden en $\mathbb{N}$:*

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2\cdot 3 \triangleright 2\cdot 5 \triangleright 2\cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2\cdot 3 \triangleright 2^2\cdot 5 \triangleright 2^2\cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^n \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $f : [0,1] \to [0,1]$ dinámica. Si f tiene punto periódico de orden m, entonces tiene de orden k para todo $m \triangleright k$.

Observación 1.53: El orden que definimos cubre a todos los números naturales, a excepción del 1. Recordemos que un número natural puede ser escrito en primos, digamos que,

$$n = p_1^{e_1} \dots p_l^{e_l}$$

donde p_i son primos tales que $p_1 < p_2 < \ldots < p_l$, para $1 \leq i \leq l$ y e_i son las potencias de los primos. Si $p_1 \neq 2$ para todo $i = 1, \ldots, l$, se tiene que n es un número impar, luego está en la lista. Si $p_1 = 2$ entonces n es par, pero $n/p_1^{e_1}$ es impar, por lo tanto está en la lista.

Corolario 1.54: *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o $f : [0,1] \to [0,1]$ es una dinámica que tiene finitos puntos periódicos, entonces es una potencia de dos.*

Dem: Supongamos que no es una pontencia de dos, es decir, en el orden anterior el máximo valor de periódidad es o bien un impar o bien par que se puede descomponer en una parte impar que no es 1. En el primer caso es claro que tiene infinitos puntos siendo imposible y en el segundo caso también es imposible ya que por el orden contradice este hecho. Por tanto debe ser una potencia de dos. ■

Antes de demostrar el teorema de Sarkoskii, la primera versión, necesitaremos de tres lemas fundamentales.

Lema 1.55: *Sea $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces para todo intervalo $I_1 \subseteq [0,1]$ tal que $I_1 \subset G([0,1])$ existe un intervalo $Q_1 \subset [0,1]$ tal que $G(Q) = I_1$.*

Dem: Dado que G es continua en un conjunto compacto, se tiene que es acotado. Sea I_1 intervalo tal que $I_1 \subset G([0,1])$, entonces sin pérdida de generalidad supongamos que I_1 es cerrado, por construcción podemos pensar en que $I_1 = [G(a), G(b)]$ con $a, b \in [0,1]$ y aqui debemos estudiar por casos:

- $a < b$**:** En este caso vamos a definir:

$$c := \sup\{x \in [a,b] : G(x) = G(a)\}$$
$$d := \text{ínf}\{x \in [c,b] : G(x) = G(b)\}$$

  Notemos que están bien definidos puesto que son acotados tanto por abajo como por arriba, luego por axioma de supremos están bien definidos. Afirmamos que $G([c,d]) = I_1$ y en efecto, si $y \in G([c,d])$, entonces existe un $c \leq x \leq d$ tal que $G(x) = y$, además, notemos que al estar en G continua, se tiene que los supremos e ínfimos se alcanza, es decir, $G(a) \leq G(x) \leq G(b)$ y por tanto, $y \in I_1$ y por otro lado, si consideramos $y \in I_1$ se tiene que $G(a) \leq y \leq G(b)$. Por lo anterior sabemos que $G([c,d]) \subseteq I_1$ por lo que existe un $x \in [c,d]$ tal que $G(x) = y$ y esto implica que $y \in G([c,d])$. Probando la igualdad.

- $b < a$**:** Es análogo a lo anterior, solamente hay que hacer un cambio de índices.

Probando el lema. ■

Nota 1.56: El lema anterior se puede generalizar para cualquier función continua de la forma $G : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Definición 1.57: *Sea (X,T) un sistema dinámico. Diremos que $I \to J$ si $J \subset T(I)$.*

Lema 1.58: *Sea $F : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una secuencia de intervalos compactos en $[0,1]$ tales que $I_n \to I_{n+1}$ y con $I_0 \subset [0,1]$. Entonces existe una secuencia $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos compactos $Q_{n+1} \subset Q_n \subset \ldots I_0 \subset [0,1]$ tales que $F^n(Q_n) = I_n$ y que para todo $x \in Q_n$ se tiene que $F^i(x) \in I_i$ para todo $i \leq n$.*

Dem: Sin pérdida de generalidad supongamos que I_n son compactos. Vamos a demostrar por inducción.

- **Caso base:** Consideremos $I_0 \to I_1$, entonces $I_1 \subseteq F(I_0) \subseteq [0,1]$ con $I_1 \subset [0,1]$, luego por le lema anterior, existe $Q_1 \subseteq I_0$ intervalo tal que $F(Q_1) = I_1$.

- **Caso** $n = 2$**:** Consideremos el caso base y también consideremos la cadena $I_0 \to I_1 \to I_2$, entonces $I_2 \subseteq [0,1]$ y $I_2 \subseteq F(I_1) = F^2(Q_1)$, entonces por el lema anterior existe $Q_2 \subseteq Q_1$ tal que $F^2(Q_2) = I_2$ puesto que F^2 es una función continua.

- **Caso inductivo:** Supongamos que se cumple para n, entonces, para la cadena $I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_{n+1}$ se tiene que $I_{n+1} \subseteq F(I_n) = F^{n+1}(Q_n)$, donde $Q_n \subseteq Q_{n-1} \subseteq \dots I_0$ con $F^k(Q_k) = I_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. Entonces existe un $Q_{n+1} \subseteq Q_n$ tal que $F^{n+1}(Q_{n+1}) = I_{n+1}$. Probando para el caso $n + 1$.

Luego por inducción se cumple para toda secuencia $\{I_n\}$ que satisface la hipótesis del enunciado. Para concluir, para $x \in Q_n$ se tiene $x \in Q_k$ para todo $k = 1, \dots, n$. $x \in F^k(x) \in F^k(Q_k) = I_k$ para tood $k = 1, \dots, n$. Como queriamos concluir. ■

Lema 1.59: *Sea $F : J \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que hay un intervalo $I \subset J$ tal que $I \to I$, entonces existe un punto $p \in I$ tal que $F(p) = p$.*

Dem: Digamos que $I = [a, b]$. Como $I \to I$ existen $\alpha, \beta \in I$ tal que $F(\alpha) = a, F(\beta) = b$. Vamos a probar por casos:

- $\alpha < \beta$**:** Consideremos la función,

  $$x \mapsto x - F(x) =: H(x)$$

  Entonces H es continua y $H(a) > 0, H(\beta) < 0$, luego por el teorema del valor intermedio existe un punto fijo en I.

- $\alpha > \beta$**:** Este caso es análogo al anterior.

Probando el lema. **terminar** ■

Dem (Teorema Sariskii primera versión): Sea $F : [0, 1] \to [0, 1]$ continua. Sea a un punto periódico de orden 3, sea I_0 una vecindad de a, luego definimos $b := F(a), c := F^2(a)$.

Debemos estudiar distintos casos:

- $a < b < c$**:** Tenemos algo de la siguiente forma: **figura**

  Definimos I_1, I_2 como en la figura. Claramente,

  $$I_2 \subseteq [F(a), F^2(a)] \subseteq F(I_1)$$

  Entonces $I_1 \to I_2$, y por otro lado,

  $$I_1 \cup I_2 \subseteq [a, F(I_2)]$$

  Por tanto $I_1 \longleftrightarrow I_2$ y $I_2 \longleftrightarrow I_2$. Ahora queremos un punto periódico de orden k, para ello consideremos la siguiente cadena:

  $$I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_2 \to I_1$$

  Luego existe una cadena $\{Q_k\}$ tales que $Q_k \subseteq Q_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq Q_1 \subseteq I_1$ donde $F^n(Q_n) = I_n$ para todo $n = 1, \dots, k$; donde $I_n = I_2$ para $n = 2, \dots, k - 1$. Notemos que $F^k : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua, luego $Q_k \subseteq I_1$ de forma que $Q_k \subseteq F^k(Q_k)$ **blabla**. Se tiene que F^k tiene un punto fijo para todo $k \in \mathbb{N}$.

- $a < c < b$**:** El caso es análogo. **anaálog**

Probando el teorema. ■

Definición 1.60: *Sea (X,T) un sistema dinámico y sea $p \in X$ un punto periódico de orden k ($T^k p = p$). Decimos que $x \in X$ es asintótico a p si,*

$$\lim_{n\to\infty} T^{kn}x = p$$

Definimos el conjunto estable de p como:

$$W^S(p) := \{x \in X : x \text{ es asintótico a } p\}$$

Observación 1.61: Si p es un punto fijo, entonces,

$$W^S(p) = \left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} T^n x = p\right\}$$

Observación 1.62: Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ una dinámica C^1. Si p es un punto fijo hiperbólico atractor, entonces $W^S(p)$ contiene una vecindad de p (intervalo).

Definición 1.63: *Sea (X,T) sistema dinámico. Definimos el conjunto estable local de un únto $p \in X$ como:*

$$W^S_{loc}(p) := \text{El intervalo más grande alrededor de } p \text{ en } W^S(p)$$

Lema 1.64: *Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ una dinámica C^1. Si p es un punto periódico de orden k y $|(T^k)'p| > 1$, entonces existe una vecindad de de p tal que T^k contrae hacía p.*

Observación 1.65: Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ una dinámica C^1. Si p es un punto periódico de orden k hiperbólicos, se tiene que $W^S(p)$ contiene una vecindad de p. (al menos el repulsor no debiese).

Lema 1.66: *Sean p_1, p_2 puntos periódicos distintos, entonces,*

$$W^S(p_1) \cap W^S(p_2) = \emptyset$$

Dem: Sea k_i el orden de p_i. Sea $x \in \omega^s(p_1) \cap \omega^s(p_2)$, entonces se cumple que,

$$p_1 = \lim_{n\to\infty} T^{k_1 n}x = \lim_{n\to\infty} T^{k_1 k_2 n}x = \lim_{k_2\to\infty} T^{k_2 k_1}x = p_2$$

Es decir, $p_1 = p_2$ siendo una contradicción. Notar que p_1, p_2 pueden tener el mismo orden de periocidad, aun así se concluye el enunciado. ■

Definición 1.67: *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tres veces diferenciable. Definimos la derivada de Scharwz por:*

$$SF(x) := \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''(x)}{F'(x)}\right)^2$$

Ejemplo 1.68: Sea $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, entonces,

$$F'_\mu(x) = -2\mu x + \mu$$
$$F''_\mu(x) = -2\mu$$
$$F'''_\mu(x) = 0$$

Luego,

$$SF_\mu = -\frac{3}{2}\left(\frac{-2\mu}{-2\mu x + \mu}\right)^2 = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$$

Claramente no está definido en $x = 1/2$, pero sabemos que cuando $x \to 1/2$, esto se va a $-\infty$, algo no caótico, por lo que podemos definir,

$$SF(x) = \begin{cases} \frac{-6}{(1-2x)^2}, & x \neq \frac{1}{2} \\ -\infty, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Proposición 1.69: *Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P'(x)$ tiene todas las raíces reales distintas. Entonces $SP(x) < 0$.*

Dem por hacer

Proposición 1.70: *Sea $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tres veces diferenciable. Luego, se cumple que,*

$$S(F \circ G)(x) = SF(G(x))(G'(x)) + SG(x)$$

Dem: Por definición,

$$S(F \circ G) = \frac{(F \circ G)'''(x)}{\dots}$$

Corolario 1.71: *Sean F, G dinámicas tales que $SF, SG < 0$, entonces $S(F \circ G) < 0$. En particula, si $SF < 0$, entonces $SF^k < 0$ para todo $k \geq 1$.*

Lema 1.72: *Supongamos que $SF < 0$, entonces F' no tiene mínimo local positivo ni máximo local negativo.*

Dem: Supongamos que $SF < 0$, es decir,

$$\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 < 0$$

Recordemos que un mínimo local o máximo local, es un punto x del dominio de F tal que su segunda derivada se anula. Sea x_0 punto crítico de F' ($F''(x_0)$). Tenemos dos casos:

- **x_0 es un mínimo local positivo:** Luego $F'''(x_0), F'(x_0) > 0$ localemnte, pero entonces $SF(x_0) > 0$ siendo imposible.

- x_0 **es máximo local negativo:** Luego $F'''(x_0), F'(x_0) < 0$, peor entonces $SF(x_0) > 0$ siendo imposible.

Por tanto F' no tiene mínimo local positivo ni máximo local negativo. ■

Teorema 1.73: *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una dinámica. Supongamos que $SF < 0$. Si $p \in \mathbb{R}$ es un punto fijo hiperbólico atractor. Entonces $W^S(p)$ se extiende a $+\infty$ o $-\infty$ o a un intervalo finito, este último caso hay un punto crítico que converge a p. De forma equivalente. Si $W^S_{loc}(p)$ es un intervalo finito, entonces, existe un punto crítico que converge a p.*

Dem: por hacer

Corolario 1.74: *Sea $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ con $\mu \in [1,4]$. Entonces hay a lo más, un punto periódico hiperbólico atractor. Cuando lo hay, la órbita del punto crítico, converge a la órbita periódica.*

Dem: Sabemos que para $x \notin [0,1]$ se tiene que $F_\mu(x)$ se va a $-\infty$. Sea p un punto periódco hiperbólicoatractor de orden k, entonces $W^S(p)$ es un conjunto finito y por el **teorema 1.73** se tiene que es un intervalo. Luego el punto crítico $1/2$ converge a p, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} T^{kn}(1/2) = p$$

Esto significa que la órbita del punto crítico converge a a la órbita periódica. ■

Corolario 1.75: *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una dinámica con $SF < 0$ y con punto p periódico hiperbólico atractor. Entonces, si $W^S_{loc}(p)$ es un intervalo finito, hay un iterado de un punto crítico que converge a p.*

Dem: De forma análoga. Si $SF < 0$ entonces para un punto p periódico atractor se tiene que $W^S_{\text{loc}}(p)$ es un intervalo finito que además contiene un punto crítico que converge a p. ■

Teorema 1.76: *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^3 tal que $SF < 0$. Sea p un punto fijo hiperbólico atractor. Si W^S_{loc} es acotado, entonces contiene un punto crítico.*

Dem: Supongamos que $W^S_{\text{loc}}(p) = (a,b)$, es decir, a, b son puntos que no convergen a p. Observemos que,

$$F\left(W^S_{\text{loc}}(p)\right) \subseteq W^S_{\text{loc}}(p)$$

puesto que si $y \in F\left(W^S_{\text{loc}}(p)\right)$, existe $x \in W^S_{\text{loc}}(p)$ y entonces $F^n x \longrightarrow p$ para $n \to \infty$. Luego,

$$F\left(\lim_{n\to\infty} F^n x\right) = \lim_{n\to\infty} F^{n+1} x = p$$

Luego $F(x) = y \in WS(p)$. También observemos que $F(a), F(b)$ son bordes de (a,b), ya que si no lo fueran, entonces $a, b \in W^S_{\text{loc}}(p)$ siendo imposible. Debemos estudiar dos casos:

- **Caso 1:** Supongamos que $F(a) = a, F(b) = b$. Existen $c_1 \in (a,p), c_2 \in (p,b)$ tal que $F'(c_1) = F'(c_2) = 1$. Como $|F'(p)| < 1$ entonces F' no puede ser constante en (c_1, c_2), si $F'(x)$ es positivo en $[c_1, c_2]$ entonces por continuidad hay un mínimo, sin embargo contradice al lema del mínimo y máximo, por lo que en algún punto en (c_1, c_2) $F'(x)$ es negativo y esto implica que existe un $d \in (c_1, c_2)$ tal que $F'(d) = 0$, es decir, un punto crítico en $W^S_{\text{loc}}(p)$.

- **Caso 2:** Supongamos que $F(a) = b, F(b) = a$. Sea $G = F^2$, entonces $G(a) = a, G(b) = b$. Notemos también que,

$$W^S\text{loc}(p) = (a, b)$$

con respectoa G, además, $SG < 0$ por propiedades de la derivada Scharwziana y por el caso uno, existe un $d \in (a, b)$ tal que $G'(d) = 0$, es decir, $F'(F(d))F'(d) = 0$, entonces $F'(d) = 0$, y d está en (a, b). **Caso 3 y 4:** Falta estudiar $F(a) = F(b) = a$ y $F(a) = F(b) = b$ y estos son análogos. Probemos para el caso $F(a) = F(b) = a$.

Probando el teorema. ■

1.6. Recurerencia y Medidas Invariantes

Definición 1.77: *Sea (X, T) un sistema dinámico. Decimos que $x_0 \in X$ es recurrente si existe una sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que va al infinita tal que,*

$$T^{kn}(x_0) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$$

Teorema 1.78: (Teorema de recurrencia de Birteloff): *Sea $T : X \to X$ una dinámica con X un espacio métrico compacto. Entonces existe un punto recurrente.*

Definición 1.79: *Sea (X, T) sistema dinámico con T homeomorfismo. Es minimal si todo punto tiene órbita densa.*

Proposición 1.80: *Sea (X, T) sistema dinámico. Entonces es minimal si y sólo si no existe ningún cerrado propio tal que $T(E) = E$.*

Lema 1.81: *Si $x_1 \in X$, entonces,*

$$T\left(\overline{\mathcal{O}_T^+(x_1)}\right) = \overline{\mathcal{O}_T^+(x_1)}$$

Dem (arreglat): Digamos que $E := \overline{\mathcal{O}_T^+(x)}$. Sea $x \in T(E)$, entonces existe un $y \in E$ tal que $Ty = x$, luego existe $\{n_k\}$ tal que $T^{n_k}(x) \to y$ cuando $n_k \to \infty$ con $k \to \infty$. Luego al evaluar en T obteenmos que $T^{n_k+1}(x) \to T(y) = x$, es decir, $x \in E$.

Sea $x \in E$, luego existe $\{n_k\}$ tal que $T^{n_k}(x_1) \longrightarrow x$, entonces $T^{n_k-1}(x_1) \longrightarrow T^{-1}(x)$, entonces $x \in T(E)$. ■

Observación 1.82: Si $x_1 \in X$ y E : **terminar**.

Dem (proposición 1.80): Supongamos que es minimal y que existe E cerrado propio tal que $T(E) = E$, entonces para $x_1 \in E$, se tiene que $\mathcal{O}_T(x_1) \subseteq E$, pero luego la clausura está contenida en E, y entonces no es minimal.

Supongamos que (X, T) no es minimal. Sea $x_1 \in X$ con órbtia no densa, entonces para $E = \overline{\mathcal{O}_T^+(x_1)}$ se cumple que es cerrado propio tal que $T(E) = E$. ■

Teorema 1.82: *Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo con X métrico compacto. Entonces existe $E \subseteq X$ cerrado invariante ($T(E) = E$) tal que,*

$$T\big|_E : E \to E$$

es minimal.

Observación 1.83: Este teorema implica el teorema de recurrencia, puesto que podemos reducir (X, T) al sistema dinámico (E, T) minimal, luego una órbita es recurrente.

Dem (Teorema 1.82): Sea F la familia de conjunto compactos T-invariantes. Decimps que $A \leq B$ con $A, B \in F$ si $A \supseteq B$. Luego dada una cadena creciente $A_1 \leq A_2 \leq \dots$ existe un máximo (axioma de elección). Este máximo es,

$$E := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

que es compacto no vacío e invariante. Por tanto hay un máximo en F, que es equivalente a decir que (E, T) es minimal.

Teorema 1.84 (Recurrencia de Poincare): *Sea $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ un espacio de probabilidad y sea $T : X \to X$ medible donde μ es T-invariante. Sea $A \subseteq X$ con medida positiva, entonces existe $B \subseteq A$ con medida total tal que todo punto de B entra infinita veces en A.*

Consideremos $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ el full shift positivo 2-símbolos. Pero no trabajaremos con la dinámica shift, sino con la odometro definida por:

$$\begin{aligned} T : \Omega &\to \Omega \\ x &\mapsto x +_T (1, 0, \dots) \end{aligned}$$

donde definimos la suma $+_T$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &+_T : \Omega \times \Omega \to \Omega \\ &(x + y)_n = x_n + y_n = \varepsilon_n := \begin{cases} 0, & x_{n-1} + y_{n-1} < 2 \\ 1, & x_{n-1} + y_{n-1} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

con $x, y \in \Omega$. Vamos a aplicar el abuso de notación $+$ en vez de $+_T$. De forma más explícita,

$$\begin{aligned} T(0, 0, 0, \dots) &= (1, 0, 0, \dots) \\ T(1, 0, 0, \dots) &= (0, 1, 0, \dots) \\ T(0, 1, 0, \dots) &= (1, 1, 0, \dots) \\ T(1, 1, 0, \dots) &= (0, 0, 1, \dots) \\ T(0, 0, 1, \dots) &= (1, 0, 1, \dots) \\ T(1, 0, 1, \dots) &= (0, 1, 1, \dots) \\ T(0, 1, 1, \dots) &= (1, 1, 1, \dots) \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. De forma más general podemos considerar,

$$\Omega = \prod_{i=1}^{\infty}\{0,\dots,k_i\}$$

y la dinámica $T:\Omega\to\Omega$ definido siguiendo la siguiente regla:

$$T(k_1-1,k_2-1,\dots,k_i-1,0,0,\dots) = (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$$

con agregar 1 a la primera coordenada y si la primera coordenada se llena, pasa a ser 0 y luego se agrega 1 en la segunda coordenada y así sucesivamente.

Afirmación: *El sistema dinámico* (Ω,T) *es minimal.*

Dem: Probemos en el caso cuando $\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$. Verifiquemos que T es continua **porhacer**. Luego tenemos un sistema dinámico. Observemos que si $\overline{0}=(0,0,\dots)$, entonces $\{T^k(\overline{0})\}_{k=1}^{2^n}$ pasa por todos los cilindros de largo n (exactamente una vez). Para ver que el sistema dinámico es minimal, debemos probar que para todo U,V abiertos no vacíos, existe un $N\in\mathbb{N}$ tal que,

$$T^N(U)\cap V\neq\emptyset$$

Sea $C=[a_1,a_2,\dots,a_m]$ un abierto (cilindro), es claro que existe un $N\in\mathbb{N}$ tal que $T^N(\overline{0}) = (0,\dots,0,a_{m+1},a_{m+2},\dots)$, es decir, $T^N(x)\in C$ de forma que es minimal **revisar**. ■

Observacín 1.85: Si $T:X\to X$ es una dinámica minimal, entonces X no tiene puntos fijos periódicos, ya que si tuviera uno, entonces la órbita de ese punto no es denso.

Ejemplo 1.86: La dinámica $T:B(0,1)\to B(0,1)$ no es minimal, ya que por el teorema de brower, T tiene un punto fijo y por tanto no puede ser minimal.

Ejemplo 1.87: La rotación irracional $T_\alpha:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ es unn sistema minimal.

Ejemplo 1.88: $T:\Omega\to\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ odometro es minimal.

Sea $T:\Omega\to\Omega$ donde $\Omega=\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ y T es el odometro. Consideremos $S:\Omega\to[0,1]$ dada por:

$$S(x)=\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2^2}+\dots$$

falta calsr 7 sep

Dem (Teorema 1.84): Consideremos el siguiente conjunto:

$$A_\infty = \text{"todos los puntos de } A \text{ que nunca retornán a } A\text{"} = A\cap\left(\bigcap_{k\geq 1}T^{-k}(X(A))\right)$$

Se cumple que,

$$T^{-n}(A_\infty)\cap T^{-m}(A_\infty)=\emptyset$$

para todo $n\neq m$. Para ver esto, si $n\geq m$ consideremos $x\in T^{-n}(A_\infty)\cap T^{-m}(A_\infty)$, luego $T^n(x)=y\in A_\infty, T^n(x)=T^{n-m}(y)\in A_\infty$, es decir, y retorna a A_∞ siendo una contradicción.

Ahora, como μ es T-invariante, se tiene que,

$$\mu(A_\infty) = \mu(T^{-1}A_\infty) = \cdots = \mu(T^{-n}A_\infty)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{\mu(T^{-n}(A_\infty))\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección disjuntas e iguales, entonces la medida de estos son 0, puesto que por definición,

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(A_\infty)\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_\infty) \leq 1$$

Si el valor de la medida de A_∞ es constante k, entonces necesariamente $k = 0$.

Definimos el siguiente conjunto:

$$C := A \cap \left(\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(A_\infty)\right)$$

Entonces $\mu(C) = 0$. Por lo tanto $B = A \setminus C$ cumple lo pedido. ■

Teorema 1.89: *Sea X compacto métrico. Sea $T : X \to X$ continua. Entonces existe una medida de probabilidad que es T-invariante (de Borel).*

Obsevación 1.90: Si T tiene un punto periódico, entonces tiene medida invariante. De hecho, si $x \in X$ punto periódico ($T^n x = x$), entonces la medida:

$$\mu_x := \frac{1}{n}(\delta_x + \cdots + \delta_{T^{n-1}x})$$

es T invariante. Verifiquemos este hecho. Debemos probar que μ_x es una medida.

(a) $\mu_x(\emptyset) = 0$,

(b) Sea $A \subseteq B$ con $A, B \in \mathcal{B}(X)$, luego,

$$\mu_x(A) \leq \mu_x(B)$$

(c) Sean $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ disjuntos, entonces,

$$\delta_{T^k x}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) = \begin{cases} 0, & T^k x \notin \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \\ 1, & T^k x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m \end{cases} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \delta_{T^k x}(A_m)$$

para todo $k = 0, \ldots, n-1$. Luego,

$$\mu_x\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\mu_x(A_m)$$

Observemos también que μ_x es una medida de probabilidad, puesto que $\mu_x(X) = 1$. Veamos que es T-invariante. Sea $A \in \mathcal{B}(X)$, luego,

$$\begin{aligned} \delta_{T^k x}(T^{-1}A) &= \begin{cases} 0, & T^k x \notin T^{-1}(A) \\ 1, & T^k x \in T^{-1}(A) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & T^{k+1} x \notin A \\ 1, & T^{k+1} x \in A \end{cases} \\ &= \delta_{T^{k+1}x}(A) \end{aligned}$$

para $k = 0, \ldots, n-1$. Luego,

$$\begin{aligned} \mu_x(T^{-1}A) &= \frac{1}{n}(\delta_x + \cdots + \delta_{T^{n-1}})(T^{-1}A) \\ &= \frac{1}{n}(\delta_{Tx} + \cdots + \delta_{T^n x})(A) = \\ &= \frac{1}{n}(\delta_x + \delta_{Tx} + \cdots + \delta_{T^{n-1}x}) \\ &= \mu_x(A) \end{aligned}$$

Siendo T-invariante.

Teorema 1.91: *Si X es compacto métrico, entonces $\mathbb{P}(X)$ =medidas de probabilidad boreleanos, es compacto en la topología débil estrella.*

Definición 1.92: *Sea $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $\mathbb{P}(X)$ converge en la topología débil estrela a $\mu \in \mathbb{P}(X)$ si,*

$$\int f d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu$$

para todo $f \in C(X)$ (funciones continuas de X a $\mathbb{R}$).

Observación 1.93: La topología débil estrella es metrizable. También recordemos que $C(X)$ es seprable.

Consideremos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa de funciones en $C(X)$, la función:

$$\rho(\mu, \nu) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\int f_n d\mu - \int f_n d\nu|}{2^n \|f_n\|_0}$$

sobre medidas $\mu, \nu \in \mathbb{P}(X)$ es una métrica en $\mathbb{P}(X)$ en la topología débil estrella.

Dem (Teorema 1.): Sea $x \in X$ y sea $\mu_n = (\delta_x + \cdots + \delta_{T^{n-1}x})1/n$. Como $\mathbb{P}(X)$ es compacto métrico, existe una subsucesión que converge a μ. Sea,

$$\mu_{n_k} \to \mu$$

Afirmación: *μ es T-invariante.*

Definición 1.94: *Sea $T : X \to X$ y μ una medida en X. Definimos $T_*(\mu)$ =push foward dada por:*

$$T_*(\mu)(A) = \mu(T^{-1}A)$$

Observación 1.95: μ es T-invarianete si y sólo si $T_*\mu = \mu$.

Observación 1.96: $T_* : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ es continua en la topología débil estrella.

Afirmación: *Se cumple,*

$$\left| \int f d_{\mu_{nk}} - \int f dT_*\mu_{n_k} \right| \to \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

falta clase 12/09

Observación 1.97: Si Y es un espacio lineal, entonces el dual Y^* son las funciones liniales continuas (es decir, son acotada).

Teorema 1.98: (Banach-Alaogly¿?) *La bola unitaria de Y^* es compacta con la topología débil estrella.*

El teorema anterior se debe a que las evaluaciones son funciones continuas. Recordar que una evaluación es una función de la forma:

$$\begin{aligned} ev_x : Y^* &\to \mathbb{R} \\ l &\mapsto l(x) \end{aligned}$$

con $x \in Y, l \in Y^*$.

Definición 1.99: *Sea $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y^*$. Decimos que,*

$$\lim_{n\to\infty} l_n = l$$

Si para todo $x \in Y$ se tiene que,

$$\lim_{n\to\infty} l_n(x) = l(x)$$

Pediremos $Y = C(X) \to Y^*$ =medidas Boreleanas en X (bola unitaria de $Y^* \sim \mathbb{P}(X)$). Esto se debe al teorema de representación de riezs que más adelante veremos.

Teorema de representación de Riesz: *Sea X un espacio métrico compacto. Si $L : C(X) \to \mathbb{R}$ es una función lineal positiva ($L(f) \geq 0$ para todo $f \geq 0$) tal que $L(1) = 1$. Entonces existe una medida de probabilidad tal que,*

$$L(f) = \int f d\mu$$

Definición 1.100: *Dado $T : X \to X$ continua. Este induce un mapa push-foward dado por:*

$$\begin{aligned} T_* &: \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X) \\ (T_*\mu)(A) &= \mu(T^{-1}A) \end{aligned}$$

que es una medida. Donde además, $(\mathbb{P}(X), T_*)$ es una sistema dinámico topológico.

Afirmación: *μ es T-invariante si y sólo si $T_*\mu = \mu$.*

Dem: Sea $(X, \mathcal{B}, T, \mu)$ un espacio de probabilidad con (X, T) un sistema dinámico. Supongamos que μ es T-invariante, luego se tiene que para todo $A \in \mathcal{B}$ se cumple que,

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$$

Por definición,

$$T_*(\mu)(A) = \mu(T^{-1}A) = \mu(A)$$

Por tanto $T_*\mu = \mu$. Para la otra dirección es similar. ■

Lema 1.101: *Sea (X, T) sistema dinámico. Entonces con respecto al push-foward se cumple,*

$$\int f dT_*\mu = \int f \circ T d\mu$$

Dem: demostrar

Corolario 1.102: *μ es T-invariante si y sólo si,*

$$\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$$

para todo $f \in C(X)$.

Dem: Si μ es T-invariante, entonces $T_*\mu = \mu$, luego por el lema anterior para todo f integrable se cumple que,

$$\int f dT_*\mu = \int f d\mu = \int f \circ T d\mu$$

Por otro lado, si se cumple que,

$$\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$$

Probemos que $T_*\mu = \mu$. Sea $A \in \mathcal{B}$ un evento del conjunto borel. Luego se tiene que,

$$\begin{aligned} T_*\mu(A) &= \mu(T^{-1}A) \\ &= \int \mathbb{1}_{T^{-1}A} d\mu \\ &= \int \mathbb{1}_A \circ T d\mu \\ &= \int \mathbb{1}_A d\mu \\ &= \mu(A) \end{aligned}$$

Por tanto μ es T-invariante. ■

Proposición 1.103: *El mapa $T_* : \mathbb{P}(X) \to \mathbb{P}(X)$ es continua.*

Dem: ¿debe ser primero numerable? Probaremos por sucesiones. Sea $\{\mu_n\} \subseteq \mathbb{P}(X)$ una sucesión que converge a $\mu \in \mathbb{P}(X)$ de forma métrica. Entonces se cunmple que,

$$\int f \circ T d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \circ T d\mu$$

para todo $f \in C(X)$. Si T es continua, entonces $f \circ T$ es continua, luego se tiene que,

$$\int f dT_*\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f dT_*\mu$$

para todo $f \in C(X)$. Por tanto T_* es continua. ■

Observación 1.104: Se cumple que,

$$T_*\delta_x = \delta_{Tx}$$

Debido a que,

$$\begin{aligned} T_*\delta_x(A) = \delta_x(T^{-1}A) &= \begin{cases} 0, & x \notin T^{-1}(A) \\ 1, & x \in T^{-1}(A) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & Tx \notin A \\ 1, & T \in A \end{cases} \\ &= \delta_{Tx} \end{aligned}$$

Dem (existencia de la medida):

clae 14/09 Ejemplo 1.105: Consideremos (X, T) un sistema dinámico. Sea $x \in X$ un punto periódico de orden n ($T^n x = x$), entonces podemos definir la medida:

$$\mu_x = \frac{1}{n}(\delta_x + \cdots + \delta_{T^{n-1}x})$$

Esta medida como hemos visto es T-invariante.

Observación 1.106: Sea $(X, T, \mathcal{B}(X), \mu)$ un sistema dinámico de medida. Si $\mathbf{B}$ es una base de la topología X, entonces, para comprobar que μ es T-invariante Boreleano, basta comprobar que para todo $A \in \mathbf{B}$ se tiene que,

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$$

Ejemplo 1.107: Consideremos $(\mathbb{S}^1, T_\alpha)$ un sistema dinámico. Entonces la medida de Lebesgue es T_α-invariante. Para ver esto notemos que $\mathbb{S}^1$ se puede pensar como un intervalo, luego

$$T^{-1}[a, b] = [a - \alpha, b - \alpha]$$

y entonces,

$$\lambda([a,b]) = b - a = \lambda(T^{-1}[a,b])$$

En general se puede hacer para cualquier intervalo. Luego tomando $A \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^1)$ abierto, se concluye la invarienza. Esto para todo α irracional.

Teorema 1.108: *Lebesgue es la única medida T_α-invariante cuando α es irracional.*

Ejemplo 1.109: Sea $M_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $M_2(z) = z^2$ y sea $T_2 : [0,1] \to [0,1]$ dada por:

$$T_2(x) := \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2x - 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Observación 1.110: M_2 y T_2 son conjugadas topológicas.

Afirmación: *La medida Lebesgue es M_2-invarainte y T_2-invariante.*

Dem: Con respecto al mapa M_2 debemos notar que si $[a,b]$ es un intervalo visto en ángulos, entonces,

$$M_2^{-1}[a,b] = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2} + \pi, \frac{b}{2} + \pi\right]$$

que son disjuntos con medida $b/2 - a/2$ cada uno, por lo tanto,

$$\lambda([a,b]) = \lambda(M_2^{-1}[a,b])$$

para todo a, b. Esto implica que λ es M_2-invariante.

Probemos ahora que λ es T_2-invariante. Aquí es más evidente la invarianza, puesto que para todo intervalo $[a,b]$, la preimagen puede ser expresedado como:

$$T_2^{-1}[a,b] = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right]$$

que son disjuntos de medida $b/2 - a/2$, luego se concluye que,

$$\lambda([a,b]) = \lambda(T_2^{-1}[a,b])$$

para todo a, b como queriamos probar. Luego λ es T_2-invariante. ■

Ejemplo 1.111: Consideremos $F_4(x) = 4x(1-x)$. Consideremos el mapa carpa definido por $\widetilde{T}_2 : [0,1] \to [0,1]$ dado por:

$$\widetilde{T}_2(x) := \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Afirmación: *Existe un homeomorfismo $h : [0,1] \to [0,1]$ tal que se cumple la conmutación $h \circ \widetilde{T}_2 = F_4 \circ h$.*

Dem idea clase 14/09

Proposición 1.112: *Sean $(X,T),(Y,S)$ sistemas dinámicos. Sea $h : Y \to X$ tal que $h \circ S = T \circ h$. Sea μ una meidda S-invariante sobre los Boreleanos, entoncces $h_*\mu$ es T-invariante.*

Dem: Sabemos que $h_*\mu(A) = \mu(h^{-1}(A)$, luego por definición,

$$\begin{aligned} h_*\mu(T^{-1}(A)) &= \mu(h^{-1}(T^{-1}(A))) \\ &= \mu(S^{-1}(h^{-1}(A))) \\ &= \mu(h^{-1}(A)) \\ &= h_*\mu(A) \end{aligned}$$

Por tanto $h_*\mu$ es T-invariante. ■

Volvamos al ejemplo. Claramente λ es $\widetilde{T}_2$-invariante. Luego por la proposición se tiene que $h_*\lambda$ es F_4-invariante con h el homeomorifsmo con el que estamos trabajando.

Afirmación: *Se cumple que,*

$$dh_*\lambda = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}d\lambda$$

Dem: La notación anterior significa que,

$$h_*\lambda(A) = \int_A \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}d\lambda$$

Observación 1.113: $h_*\lambda$ es absolutamente continua con respecto a λ.

Para ver esto debemos probar que para todo Boreleano A tal que $\lambda(A) = 0$ se cumple que $h_*\lambda(A) = \lambda(h^{-1}(A))$. Sea $\varepsilon > 0$, existen intervalos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que,

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

tal que,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varphi$$

Luego aplicando h^{-1} obtenemos,

$$h^{-1}(A) \subseteq h^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} h^{-1}(I_k)$$

Como h es homeomorfismo, este preserva la estructura de intervalo, por lo que,

$$|h^{-1}(I_k)| \leq \underbrace{\|h^{-1}\|_{C^1}}_{=:M} |I_k|$$

¿por qué la norma está bien definida?. Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |h^{-1}(I_k)| \leq M\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Por el teorema de Radon-Nikodyn existe $f \in L^1(\lambda)$ no negativa tal que,

$$h_*\lambda(A) = \int_A f d\lambda$$

Ahora vamos a determinar que

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

Observemos que se cumple que para un $\varepsilon > 0$ se tiene que,

$$\frac{h_*\lambda([x, x+\varepsilon])}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} f(x)d\lambda(x)$$

Esto se es un promedio de forma que,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_x^{x+\varepsilon} f(x)d\lambda(x) \approx f(x)$$

Ahora ocupemos el comportamiento homeomorfismo de h, de forma que existen a, a_ε tales que,

$$h(a) = x, \quad h(a_\varepsilon) = x+\varepsilon$$

Entonces,

$$\lambda(h^{-1}[x, x+\varepsilon]) = \lambda[a, a_\varepsilon] = a_\varepsilon - a$$

Observación 1.114: Usando Taylor vemos que,

$$h(a+\eta) = h(a) + \eta h'(a) + \mathcal{O}(\eta) \approx h(a) + \eta h'(a), \quad \frac{\mathcal{O}(\eta)}{\eta} \xrightarrow{\eta\to 0} 0$$

donde $\eta = a_\varepsilon - a$ cumple que $\eta h'(a) = \varepsilon$, entonces, $\eta = \varepsilon/h'(a)$. Por lo que,

$$a_\varepsilon - a \approx \frac{\varepsilon}{h'(a)}, \; h(a) = x$$

Recordando que $h(x) = \operatorname{sen}^2(\pi x/2)$, entonces,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ &= \pi \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{aligned}$$

De forma que,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}a\right) = x, \quad h'(a) = \pi \operatorname{sen}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}a\right)}_{=\sqrt{x}}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)}_{=\sqrt{1-x}}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h_*\lambda([x,x+\varepsilon])}{\varepsilon} = \frac{1}{h'(a)} = \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1-x)}$$

determinando la densidad f. ■

Definición 1.115: *Sea $T : X \to X$ una dinámica. Decimos que $x \in X$ es no errante si para toda vecindad U de x y $N > 0$ existe un $n \geq N$ tal que,*

$$T^n(U) \cap U \neq \emptyset$$

Por otro lado, decimos que $x \in X$ es errante si existe una vecindad U de x y existe $N > 0$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que,

$$T^n(U) \cap U = \emptyset$$

Definimos el conjuntos de los puntos no errantes por Ω.

Proposición 1.116: *Si μ es una medida de probabilidad T-invariante, entonces $\mu(\Omega) = 1$.*

Observación 1.117: El conjunto Ω cerrado, para ver esto, estudiemos Ω^c. Sea $x \in \Omega^c$, entonces x es errante, por lo que existe una vecindad U y $N > 0$ tal que para todo $n \geq N$ $T^n(U)\cap U = \emptyset$, observemos que todo punto de U es errante, puesto que el mismo U es una vecindad y para el mismo N cumple todo lo anterior, de forma que $U \subseteq \Omega^c$. Luego Ω es cerrado.

Definición 1.118: *Sea μ una medida de Borel, definimos el soporte como el conjunto de puntos tal que, para cualquier vecindad tiene medida positiva y se denota por supp(μ).*

Observación 1.119: Sea $x \notin \operatorname{supp}(\mu)$, entonces existe una vecindad U de x con medida no positiva, es decir, $\mu(U) = 0$.

Observación 1.120: El soporte de μ es un conjunto cerrado. Para ver esto, si $x \in \operatorname{supp}(\mu)^c$, entonces existe U tal que $\mu(U)$, ahora, todo punto de U no está en el soporte, luego $U \subseteq \operatorname{supp}(\mu)^c$, luego el soporte de μ es cerrado.

Dem (Proposición 1.): Demostremos que $\mu(X \setminus \Omega) = 0$. Para $x \in X \setminus \Omega$ existe vecindad U de x tal que $T^n(U) \cap U = \emptyset$ para todo $n \geq N$.

Afirmación: $\mu(U) = 0$.

Dem: Si $\mu(U) > 0$ entonces por el teorema de recurrencia de Poincare se tiene que los puntos de U vuelven infinitamente, siendo una contradicción. ■

terminar

Definición 1.21: *Sea (X, T) sistema dinámico. Definimos $\mathcal{M}_T(\mu)$ como la colección de medidas de probabilidad que son T-invariantes.*

Ejemplo 1.22: Sea $T : X \to X$ métrico compacto con T contracción.

Afirmación: *El conjunto de medidas T-invariantes es $\mathcal{M}_T(X) = \{\delta_p\}$ donde p es el punto fijo de T.*

Dem: Por el teorema del punto fijo de Banach, es claro que existe un único punto fijo. Sea μ medida T-invariante tal que $\text{supp}(\mu) \neq \{p\}$. Sea $q \in \text{supp}(\mu)$, entonces para cualquier vecindad de q que no contiene a p, tiene medida positiva, luego por el teorema de recurrencia de Poincare hay infinutos puntos de U que recurren a U, pero esto es imposible, ya que por el teorema del punto fijo de Banach, toda iteración converge a p, finalmente,

$$\text{supp}(\mu) = \{p\}$$

Ahora observemos que,

$$\text{supp}(\mu) \subseteq \Omega$$

Y esto implica que,

$$\mathcal{M}_T(X) \subseteq \text{Combinaciones lineales de medida dadas por } \Omega$$

Si $\Omega = \{p\}$, entonces necesariamente $\mu = \delta_p$.■

Ejemplo 1.123: Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $T(x) = x^3$, determinemos $\mathcal{M}_T(\mathbb{R})$. Notemos que $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ puesto que son puntos fijos, entonces,

$$\mathcal{M}_T(\mathbb{R}) \subseteq \{a\delta_0 + b\delta_1 + c\delta_{-1} : a + b + c = 1, a, b, c \geq 0\}$$

por la proposición anterior. Notemos también que,

$$T_*(a\delta_0 + b\delta_1 + c\delta_{-1}) = a\delta_0 + b\delta_1 + c\delta_{-1}$$

Finalmente se tiene la igualdad **argumental**.

Ejemplo 1.124: Sea $T(x) = -x^3$ $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces $-1, 1$ son puntos periódicos de orden 2, luego $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, sin embargo,

$$\mathcal{M}_T(\mathbb{R}) = \{a(\delta_{-1} + \delta_1) + b\delta_0 : 2a + b = 1, a, b \geq 0\}$$

Para ver esto, se tiene que,

$$\mu(\Omega) = 1 \iff \mu(\{0\}) + \mu(\{1\}) + \mu(\{-1\}) = 1$$

Pero como μ es T-invariante, se tiene que,

$$\mu(T^{-1}\{1\}) = \mu(\{-1\}) = \mu\{1\})$$

Luego,

$$\mu(\{0\}) + 2\mu(\{1\}) = 1$$

Concluyendo el conjunto $\mathcal{M}_T(\mathbb{R})$. **terminar clase 21**

Observación 1.125: El sistema dinámico (Σ, σ) tiene infinitos puntos periódicos de cualquier orden, donde los de orden n son en total $2^m n$. Por lo que cada punto periódicos nos da una medida σ-invariante, formando el simplex de Poulsey.

2. Entropía Topológica

Sea (X, T) un sistema dinámico. La entropía topológica es una transformación definida de la siguiente forma:

$$(X, T) \mapsto h_{\text{top}}(X, T) \in [0, \infty]$$

Es decir, es una mapa que mide el comportamiento de un sistema dinámico, aunque no sabemos cómo y de qué forma. Existen más de una definición que son equivalentes.

Observación 2.1: Se puede definir una entropía sobre una medida de probabilidad invariante μ, como un mapa de la siguiente forma $h_\mu(T) \in [0, \infty]$.

2.1. Entropía de un Cubrimiento

Nota 2.2: Asumiremos X espacio métrico compacto a menos que se pida lo contrario.

Definición 2.3: *Consideremos (X, T) un sistema dinámico.*

(a) Sea α un cubrimiento abierto de X, es decir, α es una colección de abiertos que cubren a X. Definimos el mapa,

$$N(\alpha) := \text{ La menor cantidad de cubrimientos abiertos que cubren a } X$$

De forma que $N(\alpha) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. También definimos la transformación,

$$\begin{aligned} H : \mathbb{N} \cup \{\infty\} &\to [0, \infty] \\ N(\alpha) &\mapsto H(\alpha) := \log(N(\alpha)) \end{aligned}$$

(b) Sean α, β cubrimientos abiertos de X. Definimos,

$$\alpha \vee \beta := \text{ Cubrimiento con elementos de la forma } A \cap B, A \in \alpha, B \in \beta$$

(c) Decimos que α es refinamiento de β denotado por $\beta < \alpha$ si todo elemento de α es subconjunto de un elemento de β.

(d) Sea α cubrimiento abierto de X, definimos el cubrimiento abierto,

$$\begin{aligned} \alpha_n :&= \alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-(n-1)}\alpha \\ &= \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha \end{aligned}$$

para tood $N \in \mathbb{N}$.

Observación 2.4: El índice (b) de la **definición 2.3** está bien definida. Puesto que si $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}, \beta = \{B_j\}_{j \in J}$,son cubrimientos, entonces, para todo $x \in X$ existen $i \in I, j \in J$ tales que $x \in A_i, x \in B_j$, de forma que $x \in A_i \cap B_j$. Luego $\alpha \vee \beta$ es un cubrimiento abierto de X.

Observación 2.5: $\alpha \vee \beta$ es el refinamiento más pequeño que refina a α y β, y en efecto, si γ es un refinamiento de α y de β, entonces para todo $U \in \gamma$ existen $A_i \in \alpha, B_j \in \beta$ tales que $U \subseteq A_i \cap B_j \in \alpha \vee \beta$, luego $\gamma > \alpha \vee \beta$.

Observación 2.6: La conidición (d) de la **definición 2.3** está bien definida puesto que si $\alpha = \{A_i\}_{i\in I}$ es cubrimiento, entonces,

$$X = T^{-1}(X) \subseteq \bigcup_{i\in I} T^{-1}(A_i)$$

Es decir, $T^{-1}\alpha = \{T^{-1}(A_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto de X (esto se cumple dado que T es continua, si fuera no continua, entonces $T^{-1}\alpha$ es un cubrimiento no necesariamente abierto). También observemos que si $\widetilde{A} \in \alpha_n$, entonces por definición de refinamiento,

$$\widetilde{A} = A_1 \cap T^{-1}A_2 \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}A_n$$

donde $A_1, \ldots, A_n \in \alpha$, y por tanto, para $x \in \widetilde{A}$ se tiene que,

$$x \in A_1, \;\; Tx \in A_2, \;\; \ldots \;\; T^{n-1}x \in A_n$$

Proposición 2.7: *Sea (X, T) un sistema dinámico y sea α un cubrimiento. Entonces el siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha_n)}{n}$$

converge. En particular, converge en el intervalo $[-\infty, \infty)$.

Antes de probar la proposición, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 2.8 (De Fekete): *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales sub-aditivos ($a_{n+m} \leq a_n + a_m$). Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

Existe (puede ser $-\infty$) y además,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}$$

Dem (Proposición 2.7): Se cumple la siguiente desiguladad:

$$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta) \Longleftrightarrow N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta)$$

Esto se debe a que los cubrimientos óptimos $\{A_i\}_{i\in I}, \{B_j\}_{j\in J}$ de α y β respectivamente. Luego $\{A_i \cap B_j\}_{i\in I, j\in J}$ está el cubrimiento óptimo, (no necesariamente es el más óptimo, pero lo contiene).

Afirmación: $H(\alpha_{n+m}) \leq H(\alpha_n) + H(\alpha_m)$.

Dem: De la degisualdad anterior se cumple que,

$$\begin{aligned}
H(\alpha_{n+m}) &= H\left(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} T^{-i}\alpha\right) \\
&= H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha \vee T^{-n}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha\right)\right) \\
&\leq H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) + H\left(T^{-n}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha\right)\right)
\end{aligned}$$

Probemos que,

$$H\left(T^{-n}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha\right)\right) \leq H\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\alpha\right)$$

Sea β un cubrimiento, sabemos que tiene definido $N(\alpha)$, por otro lado $T^{-1}\beta$ es otro cubrimiento, en particular, $T^{-1}\beta$ tiene a lo más una cantindad $N(\alpha)$ de conjuntos que cubren a X, esto demuestre la desigualdad anterior. Por tanto,

$$H(\alpha_{n+m}) \leq H(\alpha_n) + H(\alpha_m)$$

Por lo que H es subaditiva. ■

Por tanto, por lema de Fekete se tiene que el límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha_n)}{n} \in [-\infty, \infty)$$

Probando la propisición. ■

Definición 2.9: *Sea (X, T) un sistema dinámico. Definimos la entropía topológica con respecto a los cubrimiento por:*

$$(X, T) \mapsto h_{cub}(X, T) := \sup_{\alpha \text{ cub.}} h(T, \alpha)$$

Donde,

$$h(T, \alpha) := \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha_n)}{n}$$

Observación 2.10: Si $\alpha = \{X\}$ es un cubrimiento de X, entonces se puede ver que $H(\alpha) \geq 0$, por tanto, $h(T, \alpha) = 1$, esto implica que,

$$h_{\text{cub}}(X, T) \in [0, \infty]$$

Como impusimos al inicio de la sección.

Observación 2.11: Sean $\alpha < \beta$. Entonces $h(T,\alpha) \leq h(T,\beta)$. Basta probar que $H(\alpha_n) \leq H(\beta_n)$ y para esto debemos probar que $\alpha_n < \beta_n$. Sea $\widetilde{B} \in \beta_n$, entonces,

$$\widetilde{B} = B_1 \cap \cdots \cap B_n$$

donde $B_i \in T^{-(i-1)}\beta$ para $i = 1, \ldots, n$. Luego $T^{i-1}B_i \in \beta$, si $\alpha < \beta$ entonces existe un $A_i \in \alpha$ tal que,

$$T^{i-1}B_i \subseteq A_i \iff B_i \subseteq T^{-(i-1)}(A_i)$$

De forma que,

$$\widetilde{B} \subseteq A_1 \cap T^{-1}A_2 \cap \cdots \cap T^{-(n-1)}A_n \in \alpha_n$$

Por lo tanto $\alpha_n < \beta_n$. Ahora observemos que $H(\alpha_n) \leq H(\beta_n)$ puesto que un cubrimiento óptimo de β_n forma un cubrimiento de α_n que no necesariamente es óptimo. Finalmente se concluye que,

$$h(T,\alpha) \leq h(T,\beta)$$

Proposición 2.12: *Sean $(X,T),(Y,S)$ sistemas dinámicos. Sea $\phi : Y \to X$ continua y sobreyectiva tal que conmuta (es una semiconjugación). Entonces se cumple que,*

$$h_{cub}(Y,S) \geq h_{cub}(X,T)$$

Si además, ϕ es homeomorfismo, entonces,

$$h_{cub}(Y,S) = h_{cub}(X,T)$$

Observación 2.13: Si ϕ es sobreyectivo, entonces,

$$H(\alpha) = H(\phi^{-1}\alpha)$$

Claramente $H(\phi^{-1}\alpha) \leq H(\alpha)$. Para la otra desiguladad notemos que si $\{\phi^{-1}A_i\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto óptimo, es decir,

$$X = \bigcup_{i\in I} \phi^{-1}A_i$$

Entonces por la sobreyectividad de ϕ se tiene que,

$$\phi(X) = X = \bigcup_{i\in I} A_i$$

es decir, $H(\alpha) \leq H(\phi^{-1}\alpha)$, verificando la igualdad.

Dem (Proposición 2.12): Sea $\phi : Y \to X$ una semiconjugación que conmuta. Observemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(T^{-k}\alpha) &= (T^k \circ \phi)^{-1}\alpha \\ &= (T^{k-1} \circ (\phi \circ S)^{-1})\alpha \\ &\vdots \\ &= (\phi \circ S^k)^{-1}\alpha \\ &= S^{-k}(\phi^{-1}\alpha)\end{aligned}$$

Por lo que $\phi^{-1}\alpha$ es un cubrimiento abierto de Y. Entonces,

$$\begin{aligned}h(T,\alpha) &= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\alpha_n)}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{H(\phi^{-1}\alpha_n)}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{H((\phi^{-1}\alpha)_n)}{n} \\ &= h(S,\phi^{-1}\alpha)\end{aligned}$$

Luego por definición de supremo se tiene que,

$$h(T,\alpha) \leq h_{\text{cub}}(Y,S)$$

Esto se cumple para todo cubrimiento α de X. Entonces,

$$h_{\text{cub}}(X,T) \leq h_{\text{cub}}(Y,S)$$

Si además, ϕ es homeomorfismo, podemos cambiar los roles y obtenemos la igualdad,

$$h_{\text{cub}}(X,T) = h_{\text{cub}}(Y,S)$$

Como queriamos probar. ■

Observación 2.14: Podemos decir que en una semiconjugación, hay una pérdida de entropía.

Teorema 2.15: *Sea $T : X \to X$ homeomorfismo con X compacto, entonces,*

$$h_{cub}(T) = h_{cub}(T^{-1})$$

Dem: Vamos a probar por definición que,

$$h(T,\alpha) = h(T^{-1},\alpha)$$

para todo cubrimiento α. Sabemos que si T es homeomorfismo, entonces,

$$H(T\alpha) = H(\alpha)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} H(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-(n-1)}\alpha) &= H(T^{n-1}(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-(n-1)}\alpha)) \\ &= H(\alpha \vee T\alpha \vee \cdots \vee T^{n-1}\alpha) \end{aligned}$$

Esto implica que $h(T,\alpha) = h(T^{-1},\alpha)$ y por tanto tomando el supremo concluimos que,

$$h_{\text{cub}}(T) = h_{\text{cub}}(T^{-1})$$

■

2.2. Entropía de Bower

Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Definimos la siguiente métrica,

$$d_n(x,y) := \max_{k=0,\dots,n} d(T^k x, T^k y)$$

Observación 2.16: La métrica d_n está bien definida. Para ver esto basta comprobar los tres axiomas de métrica.

(a) Si $x = y$ entonces $d_n(x,y) = 0$. Y si $d_n(x,y) = 0$ entonces,

$$d(T^k x, T^k y) = 0$$

para todo $k = 0,\dots,n$. Tomando $k = 0$ es claro que $x = y$.

(b) Observemos que es simétrica puesto que d lo es.

(c) Probemos la desigualdad, sabemos que para todo $k = 0,\dots,n$ se cumple que,

$$d(T^k x, T^k y) \leq d(T^k x, T^k z) + d(T^k y, T^k z)$$

Luego,

$$d(T^k x, T^k y) - d(T^k x, T^k z) \leq d(T^k y, T^k z) \leq d_n(y,z)$$

Por otro lado,

$$d(T^k x, T^k y) - d_n(y,z) \leq d(T^k x, T^k z) \leq d_n(x,z)$$

Ahora se cumple que para todo $k = 0,\dots,n$ se tiene que,

$$d(T^k x, T^k y) \leq d_n(x,y) + d_n(x,z)$$

Es decir,

$$d_n(x,y) \leq d_n(x,z) + d_n(y,z)$$

Por lo que d_n está bien definido.

Ahora vamos a definir de otra forma la entropía mediante la métrica de X.

Notación: $B_n(x, \varepsilon)$ es la bola de centro x de radio ε sobre la métrica d_n.

Definición 2.16: *Decimos que $A \subseteq X$ es (n, ε)-generador, si,*

$$X = \bigcup_{x \in A} \overline{B_n(x, \varepsilon)}$$

(unión disjunta).

Definición 2.17: *Decimos que $A \subseteq X$ es (n, ε)-separador si $d_n(x, y) > \varepsilon$ para todo $x, y \in A$ con $x \neq y$.*

Definición 2.18: *Definimos,*

$$S_n(\varepsilon) := \textit{cardinalidad máxima de los conjuntos } (n, \varepsilon)\textit{-separador.}$$
$$R_n(\varepsilon) := \textit{cardinalidad mínima de los conjuntos } (n, \varepsilon)\textit{-generador.}$$

Lema 2.19: *Se cumple la siguiente desigualdad $R_n(\varepsilon) \leq S_n(\varepsilon) \leq R_n(\varepsilon/2)$.*

Dem: Vamos a probar por casos.

- $R_n(\varepsilon) \leq S_n(\varepsilon)$**:** Probaremos que si A es (n, ε)-separador, entonces es (n, ε)-generador.(revisar) Supongamos que A no es (n, ε)-generador, entonces existe un $y \in X$ tal que $d_n(x, y) > \varepsilon$ para todo $x \in A$ por lo que no puede ser (n, ε)-separdor.
- $S_n(\varepsilon) \leq R_n(\varepsilon/2)$**:** Sea E un conjunto (n, ε)-generador y sea F un conjunto $(n, \varepsilon/2)$-separador. Sea $y \in F$, como E es generador, existe un único x tal que $y \in \overline{B_n(x, \varepsilon)}$ y entonces $d_n(x, y) \leq \varepsilon$ (X al ser unión disjunta de bolas cerradas).

  Definimos la función $\phi : E \to F$, entonces ϕ es inyectiva. Sean $x, y \in E$ distintos. Si $\phi(x) = \phi(y)$ entonces,

  $$d_n(x, y) \leq d_n(x, \phi(x)) + d_n(y, \phi(y)) \leq \varepsilon$$

  con $x, y \in E$, pero esto implica que tienen que ser iguales, siendo una contradicción, de forma que se cumple inyectividad. Por tanto por cardinalidad de funciones inyectiva se cumple que $|E| \leq |F|$ que implica la desigualdad que queriamos probar.

Por tanto para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que,

$$R_n(\varepsilon) \leq S_n(\varepsilon) \leq R_n(\varepsilon/2)$$

Como queriamos probar. ■

Definición 2.20: *Definimos,*

$$S(\varepsilon) := \limsup_{n \to \infty} \frac{\log S_n(\varepsilon)}{n}$$
$$R(\varepsilon) := \limsup_{n \to \infty} \frac{\log R_n(\varepsilon)}{n}$$

Definición 2.21: *Definimos la entropía métrica por:*

$$h_d(T) := \lim_{\varepsilon\to 0} S(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} R(\varepsilon)$$

Observación 2.22: La entropía métrica está bien definida como límite, puesto qe S, R son crecientes, es decir, si $a \leq b$, entonces $S(a) \leq S(b)$ y $R(a) \leq R(b)$, esto nos dice que converge en $[0,\infty]$. Para ver que está bien definido la entropía, debemos ver que los límites,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S(\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} R(\varepsilon)$$

coinciden. Por el **lema 2.19** se tiene que,

$$R_n(\varepsilon) \leq S_n(\varepsilon) \leq R_n(\varepsilon/2)$$

Y esto implica que,

$$\begin{aligned} R(\varepsilon) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log R_n(\varepsilon)}{n} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log S_n(\varepsilon)}{n} \\ &= S(\varepsilon) \end{aligned}$$

De forma análoga se conluye que $S(\varepsilon) \leq R(\varepsilon/2)$. Por tanto se obtiene que,

$$R(\varepsilon) \leq S(\varepsilon) \leq R(\varepsilon/2)$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ se concluye que,

$$\lim_{n\to\infty} S(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} R(\varepsilon)$$

Lema 2.23: *Sea X una topológia metrizable y compacto. Sean d, d' métricas en X, entonces,*

$$h_d(T) = h_{d'}(T)$$

Dem: Sean d, d' métricas en X. Entonces la función identidad,

$$id : (X, d) \to (X, d')$$

es una función continua. Entonces para $\varepsilon_1 > 0$ podemos considerar un $\varepsilon_2 > 0$ tal que si

$$d'(x, y) < \varepsilon_2$$

Entonces,

$$d(x, y) < \varepsilon_1$$

Esto implica que,

$$R_n(\varepsilon_2, d') \leq R_n(\varepsilon_1, d)$$

Ya que si consideramos $|A| = R_n(\varepsilon_2, d')$ con A un (n, ε_2)-generador. Se tiene que para todo $x, y \in A$ se cumple $d'_n(x, y) < \varepsilon_2$, por lo anterior se cumple que $d_n(x, y) < \varepsilon_1$ para todo $x, y, \in A$, es decir, A es también un (n, ε_1)-generador, esto implica la desigualdad.

Ahora, con respecto a $\varepsilon_2 > 0$ podemos considerar un $\varepsilon_3 > 0$ tal que si,

$$d(x, y) < \varepsilon_3$$

Entonces,

$$d'(x, y) < \varepsilon_2$$

Por lo que se cumple que,

$$R_n(\varepsilon_3, d) \leq R_n(\varepsilon_2, d')$$

De esta forma,

$$R_n(\varepsilon_3, d) \leq R_n(\varepsilon_2, d') \leq R_n(\varepsilon_1, d)$$

Lo que es equivalente a la siguiente desigualdad:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log R_n(\varepsilon_3, d)}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log R_n(\varepsilon_2, d')}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log R_n(\varepsilon_1, d)}{n}$$

Observamos que ε_3 depende de ε_2 y este depende de ε_1, en particular podemos tomar $\varepsilon_1 \to 0$ de forma que $\varepsilon_2 \to 0, \varepsilon_3 \to 0$ y por tanto,

$$h_d(T) = h_{d'}(T)$$

■

Teorema 2.24: *Sea X un espacio métrico compacto y sea T una dinámica. Entonces se cumple que,*

$$h_{cub}(T) = h_d(T)$$

Dem: Se ha demostrado en la ayudantía 6. ■

Nota 2.25: Ahora que sabemos podemos definir de dos forma la entropía, entonces cuando denotemos h_{top} se puede tomar cualquiera de las dos entropías anteriores.

Ejemplo 2.26: Consideremos $\mathbb{S}^1$ y la rotación $T_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Determinemos la entropía.

Afirmación: $h_{top}(T) = 0$.

Dem: Se tiene que T_α es isometría bajo la métrica euclidiana, es fácil de verificar.

Observación 2.27: Como T_α es isometría entonces $d_n(x,y) = d(x,y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego si A es (n,ε)-separador si y sólo si A es (ε)-separador.

Observemos que $|A| \leq 2\pi/\varepsilon$ con A un (n,ε)-separador, entonces,

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(\varepsilon) \leq \frac{2\pi}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

Por tanto $h_{\text{top}}(T_\alpha) = 0$. ■

Observación 2.28: En general si T es una dinámica isométrica, entonces $h_{\text{top}}(T) = 0$.

Ejemplo 2.29: Consideremos $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ y la dinámica shift. Definimos la métrica,

$$d((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)) = \frac{1}{2^k}$$

donde $k \in \mathbb{N}_0$ es el primer índice donde x, y difieren con la condición de que si $x = y$ si y sólo si $d(x,y) = 0$. Observemos que está bien definida ya que $x = y$ si y sólo si $d(x,y) = 0$, es claramente simétrica y para la desigualdad triangular hay que notar que si $z = (z_0, \dots)$ coincide con x hasta el término s, entonces si $s \leq k$ claramente se cumple la desigualdad, si $s > k$ entonces z difiere en el término k con respecto a y, de forma que se sigue cumpliendo la desigualdad. Este proceso también se puede hacer respecto a y, de forma que d es una métrica.

Se puede probar que además, la métrica d es compatible con la topología del full-shift dos símbolos.

Determinemos la entropía de σ bajo la métrica d. Sabemos que,

$$d_n((x_0, x_1, \dots), (y_0, y_1, \dots)) = \max_{i=0,\dots,n-1} d((x_i, x_{i+1} \dots), (y_i, y_{i+1}, \dots))$$

Veamos el comportamiento de d_n. Si x, y difieren en $k \geq n$, entonces,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \frac{1}{2^k} \\ d(\sigma x, \sigma y) &= \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\vdots \\ d(\sigma^{n-1}x, \sigma^{n-1}y) &= \frac{1}{2^{k-(n-1)}} \end{aligned}$$

Donde claramente el máximo es cuando $i = n-1$. Ahora si $k = 0, \dots, n-1$. Se tiene que,

$$d(\sigma^k x, \sigma^k y) = 1$$

Por lo tanto,

$$d_n(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-(n-1)}}, & k \geq n \\ 1, & k = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

donde x, y difiere en $k \in \mathbb{N}_0$.

Observación 2.30: Sean $x, y \in \Sigma$, que comparten la primera coordenada, entonces,

$$d(x,y) = \frac{1}{2} d(\sigma x, \sigma y)$$

Estudiemos la bola con respecto a d_n.

$$B_n(x,\varepsilon) = \{y \in \Sigma : d_n(x,y) < \varepsilon\}$$

Para entender mejor la bola podemos tomar $\varepsilon = 1/2^N$. Sea k el menor natural donde x, y difieren. De aquí concluimos de forma inmediata que $k \geq n$ puesto que por lo que vimos, si $k = 0, \ldots, n-1$, entonces $d_n(x,y) = 1$ y eso no puede ser. Ahora al mover x, y n lugares, no necesariamente es menor a $1/2^N$, para que esto ocurre se necesitan en que la coordenada N de $\sigma^{n-1}x, \sigma^{n-1}y$ coincidan y difieran para mayor a N, esto implica que necesariamente x, y coinciden en los primeros $n + N$ coordenadas. Es decir,

$$B_n(x,\varepsilon) = C_{N+n}(x)$$

donde $C_{N+n}(x)$ es un cilindro con respecto a x de largo $N + n$. Ahora notemos lo siguiente, x se puede construir de 2^{N+n} formas distintas y por tanto necesitamos mínimo 2^{N+n} cilindros para cubrir a Σ. Esto implica que,

$$R_n\left(\frac{1}{2^N}\right) = 2^{N+n}$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log 2^{N+n}}{n} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{N+n}{n}\right) \log 2 = \log 2$$

Finalmente concluimos que,

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \lim_{N\to\infty} \log 2 = \log 2$$

Proposición 2.31: *Sea el sistema dinámico con espacio de fase* $\Sigma = \{0, 1, \ldots, n-1\}^{\mathbb{N}_0}$ *y dinámica* σ. *Entonces* $h_{top}(T) = \log n$.

Dem: No haremos una demostración detallada ya que el argumento es similar al ejemplo anterior. Para Σ definimos la métrica,

$$d(x,y) = \frac{1}{n^k}$$

Esto se define una métrica en Σ. Se puede concluir que,

$$d_m(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n^{k-(m-1)}}, & k \geq m \\ 1, & k = 0, \ldots, m-1 \end{cases}$$

Luego se comprueba que,

$$B_m\left(x, \frac{1}{n^N}\right) = C_{N+m}(x)$$

Además, para que las bolas $B_m(x, \frac{1}{n^N})$ cubran todo X, se necesitan n^{N+m} bolas, luego,

$$R_m\left(\frac{1}{n^N}\right) = n^{N+m}$$

Tomando el límite superior y tomando $N \to \infty$ se concluye que,

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \log n$$

Como queriamos probar. ■

Ejemplo 2.32: Vamos a construir un nuevo tipo de full shift a partir de un grafo. Para ello primero consideremos los siguientes dos grafos:

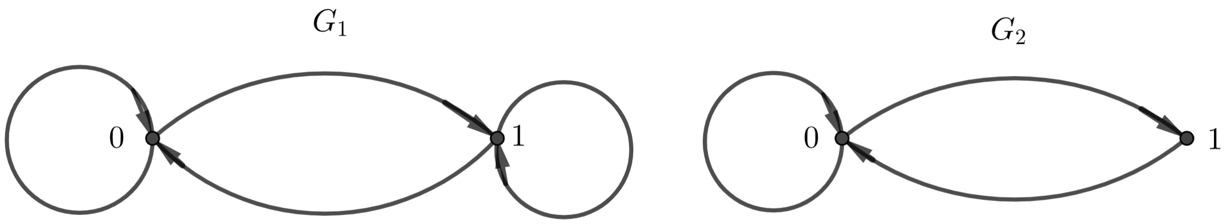


Figura 6: Grafos G_1, G_2

Observación 2.33: Un paso en un grafo G es simplemente avanzar de un vértice a otro vértice siguiendo una flecha.

Entonces en el grafo G_2 podemos ver tres pasos, pero no un paso de 1 a 1.

Observación 2.34: Un camino es una secuencia de pasos permitidos de $0'$s y $1'$s.

Por ejemplo, en G_2 se puede construir el camino $0 \to 1 \to 0$, pero no el camino $1 \to 1$. Ahora esto lo podemos relacionar con una secuencia en $\{0,1\}^n$, para $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Por ejemplo $0 \to 1 \to 0$ es simplemente la secuencia finita $(0,1,0)$. Observemos que el grafo G_1 construye todas las secuencias $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, sin embargo con G_2 no ocurre.

Sea $\Sigma \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ las secuencias infinitas dadas por el grado G_2. En particular,

$$\Sigma = \{\text{secuencias infinitas con pasos } 0 \to 1, 0 \to 0, 1 \to 0\}$$

Esto lo podemos pensar como una matriz,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donde M_{ij} con $i = 0, 1, j = 0, 1$ toma valor si existe un camino directo de i a j y toma valor 0 si no existe tal camino directo. Por lo que $M_{ij} = 0$ cuando $i = 1, j = 1$. De esta forma podemos volver a reescribir Σ, obteniendo,

$$\Sigma = \{(x_0, x_1, \dots) : M_{x_i, x_{i+1}=1}\}$$

Observación 2.35: Un camino admisible en G_2 de largo n es simplemente un cilindro no vacío en Σ de largo n.

Observación 2.36: Entendamos M^n. Observemos que,

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora si consideramos los caminos de largo 2 se tiene que para llegar de 0 a 0 hay dos formas posible, para llegar de 0 a 1 hay una sola forma posible, para llegar de 1 a 0 hay una sola forma y para llegar de 1 a 1 hay una sola forma. Esto se puede generalizar para M^n, de esta forma,

$$\begin{aligned} (M^n)_{ij} &= \text{caminos posibles de largo } n \text{ que parte en } i \text{ y termina en } j. \\ &= \text{Cilindros no vacíos de } i \text{ a } j \text{ de largo } n. \end{aligned}$$

Rambién se cumple que la cantindad de cilindros es,

$$\sum_{i,j} M^n_{i,j} = \text{suma de entrada de } M^n$$

Para determinar la entropía de Σ con respecto a σ necesitamos hacer otros análisis, pero veremos más adelante que la entropía es $\log \lambda$ donde λ es el mayor valor propio de la matriz M.

Proposición 2.37: *Sea (X, T) un sistema dinámico. Entonces se cumple que,*

$$h_{top}(T^n) = n h_{top}(T)$$

Dem: Se demostró en la ayudantía 6. ■

Proposición 2.38: *Sea (X_i, T_i) un sistema dinámico para $i = 1, 2$. Definimos la dinámica $T_1 \times T_2$ en $X_1 \times X_2$ por:*

$$\begin{aligned} T_1 \times T_2 : X_1 \times X_2 &\to X_1 \times X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (T_1(x_1), T_2(x_2)) \end{aligned}$$

Entonces,

$$h_{top}(T_1 \times T_2) = h_{top}(T_1) + h_{top}(T_2)$$

Dem: Se demostró en la ayudantía 7. ■

Definición 2.39: *Sea $M = (M_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ una matriz de $n \times n$ de entradas $\{0, 1\}$. Sea,*

$$\Sigma = \{(x_0, x_1, \dots) \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}_0} : M_{x_i,x_{i+1}} = 1\}$$

Entonces (Σ, σ) se le conoce como sub shift de tipo finito.

Observación 2.40: Del análisis anterior podemos deducir algunas cosas. La matriz M se puede pensar como un grafo dirigio con n vértices, donde el camino de un movimiento $i \to j$ existe si y sólo si $M_{ij} = 1$. También se cumple que (Σ, σ) es un subsitema cerrado compacto.

Observación 2.41: En el full shift, un cilindro de largo n es simplemente un subconjunto del full shft de la forma $[x_1, \dots, x_n]$, tal que los primeros n elementos del conjuntos, son $x_1, \dots, x_n$ siguiente el orden natural. Por lo que un cilindro de largo n en un sub shift sigue la misma idea, por lo que un cilindro de largo n se puede pensar como un camino de largo n.

Observación 2.42: M^n_{ij} es simplemente el número de caminos de largo n que parte en i y termina en j.

Ahora, el problema es que queremos determinar la entropía de un sub shift, y como fue mencionado, se requiere de determinar valores propios. Pero antes necesitamos un teorema importante de álgebra lineal.

Teorema 2.43 (Perron-Frobenius): *Sea A una matriz con entradas no negativas tal que $A^n > 0$ para algún n. Entonces,*

(a) Existe un valor propio $\lambda_A > 0$ tal que si r es otro valor propio, entonces $|r| < \lambda_A$.

(b) λ_A es un valor propio simple.

(c) existe un vector propio v_A asociado a λ_A con todas las coordenadas positivas.

(d) $A^n \setminus \lambda^n_A$ converge a la matriz de la proyección al subespacio $\langle v_A\rangle$.

Observación 2.44: El teorema de Perron-Frobenius nos asegura la existencia de un valor propio máximal simple con un vector propio positiva.

Lema 2.45: *El sub shift (Σ, σ) es transitivo si y sólo si el grafo es convexo como grafo dirigido, es decir, para todo i, j existe un camino de i a j.*

Dem: Supongamos que el sub shift es transitivo, es decir, existe una órbita densa. Digamos que $x = (x_0, x_1, \dots)$ tiene órbita densa. Esto implica que entra $[i], [j]$ de forma infinita, luego podemos determinar un camino de i a j.

Supongamos ahora que para todo i, j existe un camino de i a j. Observemos que hay numerables cilindros, por lo que todo se puede concatenar todos estos para construir una órbita densa. ■

Definición 2.46: *Decimos que (X, T) es topológicamente mixing (mezclante) si para todo U, V abiertos, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.*

Podemos observar que se topológicamente mixing es más fuerte que ser solamente topológicamente transitivo.

Lema 2.47: *El sub shift (Σ, σ) es topológicamente mixing si y sólo si $M^n > 0$ para algún n.*

Teorema 2.48: *Si* (Σ, σ) *es topológicamente mixing, entonces* $h_{top}(\sigma) = \log \lambda$.

Ejemplo 2.49: Del **ejemplo 2.32** G_2 tiene matris M de la forma,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como sabemos. M^2 es simplemente,

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, $M^2 > 0$, por lo que poseé un valor propio máximal. Sea λ valor propio, entonces se cumple que,

$$\det(M - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Por lo que el valor propio máximal es,

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

De forma que $h_{\text{top}}(\sigma) = \log((1 + \sqrt{5})/2)$

El crecimineto exponencial de la suma de los caminos de M^n, es decir, la suma,

$$\sum_{i,j} M^n_{i,j}$$

es de forma $\log \lambda$. En particular,

$$\sum_{i,j} M^n_{i,j} \sim \lambda^n$$

Ejemplo 2.50: Consideremos el siguiente grafo de la figura 7. Entonces se forma el conjunto,

$$\Sigma = \{\overline{10}, \overline{01}\}$$

Con una matriz,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Por lo que no necesariamente tiene un valor propio real maximal, y en efecto,

$$\det(M - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0$$

Luego λ es un complejo no real. De forma que no podemos hablar de entropía por este camino.

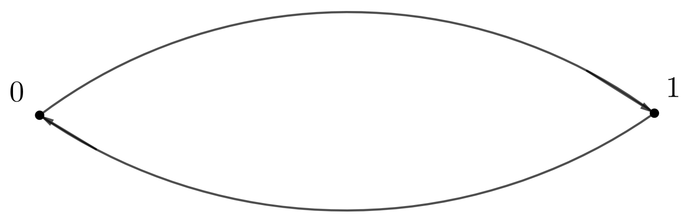


Figura 7: Grafo

Ejemplo 2.51: Consideremos el grado de la figura 8. Se tiene que la matriz asociada es,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si estudiamo cuidadosamente, se puede observar que M^n siempre tiene coeficientes 0. Sin embargo, todos los puntos están conectados mediante un camino, esto nos dice dos cosas, que Σ es transitivo pero no mixing, de forma que no necesariamente la entropia es ¨fácil¨ de determinar.

Observación 2.52: Consideremos el full shift unilateral $\Sigma^+ = \{(x_0, \dots) \in \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}_0}\}$. Si $X \subset \Sigma^+$ es σ invariante, entonces a X le podemos decir que es un sub shift.

Volvamos un poco atrás. En un sistema dinámico (X, T) se tiene un punto periódico $x \in X$ de orden n, entonces hay una medida invariante asociada al punto dada por,

$$\mu_x = \frac{1}{n}(\delta_x + \cdots + \delta_{T^{n-1}x})$$

Teorema 2.53 (Equidistribución de puntos periódicos): *Sea (Σ, σ) un sub shift mixing. Sea P_n la colección de puntos periódicos de orden n, entonces,*

$$\frac{1}{|P_n|}\sum_{x \in P_n} \mu_x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_{\text{máx}}$$

donde $\mu_{\text{máx}}$ es la única medida de máxima entropia de (Σ, σ).

Observación 2.54: A cada medida μ de probabilidad que es σ-invariante, se le puede asignar una entropía. La medida de máxima entroía es la que tiene mayor entropía. Su entropía es igual a la entropía topológica de sistema.

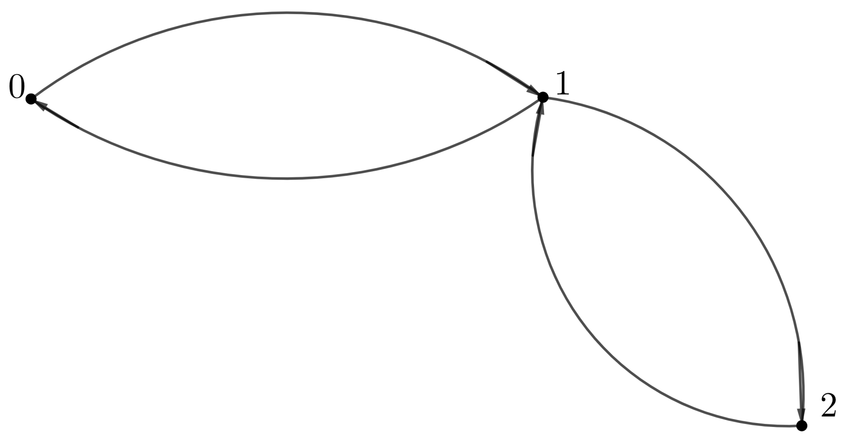


Figura 8: Grafo

Definición de la medida $\mu_{\text{máx}}$. Este medida se le conoce como medida de Parry con respecto a un sub shift (Σ, σ). La medida $\mu_{\text{máx}}$ mide cilindros.

Idea: Sea M la matriz asociada al sub shift mixing. Sea λ el mayor valor propio, entonces existe vector propio v no nulo tal que $Mv = \lambda v$. Ahora, M^T también es una matriz asociada a un sub shift, en particular λ también es valor propio maximal de M^T, por lo que existe otro vector propio no nulo w tal que $M^T w = \lambda w$.

Digamos que $v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n)$. Entonces la medida de Parry se define por,

$$\mu_{\text{máx}}([i, a_1, \ldots, a_k, j]) = \frac{w_i \cdot v_j}{\lambda^k}, \quad \mu_{\text{máx}}[i] = \frac{w_i \cdot v_i}{\langle v, w \rangle}$$

La idea de por qué esto es una medida de probabilidad es que primero,

$$\sum_{i,j} \mu_{\text{máx}}([i]) = 1$$

Lo otro es que está bien definido usando el teorema de extensión de Kolmogorov.

Todo lo anterior, constituye la medida de máximal entropía $\mu_{\text{máx}}$.

Observación 2.55: Sea $e_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $e_2(x) = 2x$ módulo 1.

Afirmación: *La entropía de e_2 es $\log 2$.*

Dem: Cabe recordar que $(\mathbb{S}^1, e_2)$ es semiconjugada el full shift positiva de dos símbolos. Por lo que como hemos estudiado, necesariamente,

$$\log 2 = h_{\text{top}}(\sigma) \geq h_{\text{top}}(e_2)$$

Sabemos que es no conjugada puesto que no existe un homeomorfismo. Sin embargo, si consideramos la transformación continua sobreyectiva que usamos en su momentos para verifica la semiconjugación, se puede apreciar que no es inyectiva en un conjunto numerable, sin embargo, es tan ¨buena¨ que incluso preserva la entropía en este contexto.

Teorema 2.56: *Si π es una semiconjugación de dos sistemas dinámicos muy ¨bueno¨, entonces preserva la entropía.*

2.3. Automorfismos Lineales del Toro

Consideremos la siguiente matriz:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Notemos que $\det(L) = 1$, por lo que es invertible, además, si λ_1, λ_2 son valores propios, entonces,

$$\begin{aligned} \det(L - I\lambda_i) = 0 &\iff (2-\lambda_i)(1-\lambda_i) - 1 = 0 \\ &\iff \lambda_i^2 - 3\lambda_i + 1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \in (1, \infty) \\ \lambda_2 &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in (0, 1) \end{aligned}$$

Por otro lado, se cumple que $L(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$. Sea $\Pi^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro, de forma que si $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ son tales que $(x, y) = (x', y') \in \Pi^2$, entonces,

$$(x, y) = (x', y') + (n, m)$$

donde $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. De esta forma, al aplicar la matriz L se observa que,

$$L(x, y) = L(x', y') + L(n, m)$$

donde $L(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ como vimos anteriormente, esto significa que de alguna forma $L(x, y)$ se asemeja a $L(x', y')$ de alguna forma pensando en el toro plano Π^2. A partir de esto podemos contruir otro operador en función de L, este se define de la siguiente manera,

$$(x, y) \mapsto L(x, y) \pmod 1$$

Ahora, si el determinante de L es 1 y es invertible, entonces la adjunta de L tiene coeficiente enteros y por tanto $L^1 = (\operatorname{adj}(A))^T/\det(A)$ tiene coeficientes enteros, por tanto $L(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. También podemos definir $F_{L^{-1}}$ como se ha definido para L.

Sean v_1, v_2 los vectores propios de los valores propios λ_1, λ_2 respectivamente y sean los espacios $L_1 := \langle v_1 \rangle, L_2 := \langle v_2 \rangle$, luego se cumple que,

$$F_L(\mu v_1) = \mu \lambda_1 v_1 \in L_1$$

análogamente con L_2, por lo que L_1, L_2 son F_L invariantes.

Proposición 2.48: *Sea $F_L : \Pi^2 \to \Pi^2$, entonces,*

(a) Los puntos períodicos son densos.

(b) La dinámica es topológicamente transitiva.

(c) $P_n(F_L) = |\lambda_1^n + \lambda_2^n - 2|$

Dem:

(a) Demostraremos que (x, y) es periódico si y sólo si $(x, y) \in Q^2$. Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ de la forma $x = s/q, y = t/q$, entonces,

$$F_L\left(\frac{s}{q}, \frac{t}{q}\right) = \left(\frac{2s+t}{q}, \frac{s+t}{q}\right) \pmod{q}$$

Como existen a lo más q^2 puntos de la forma $(s'/q, t'/q) \in [0,1]^2$, entonces existe n tal que,

$$F_L^m\left(\frac{s}{q}, \frac{t}{q}\right) = F_L^n\left(\frac{s}{q}, \frac{t}{q}\right)$$

con $n > m$, luego,

$$F_L^{n-m}\left(\frac{s}{q}, \frac{t}{=}\left(\frac{s}{q}, \frac{t}{q}\right) q\right)$$

Es decir, $(s/q, t/q)$ es periódico.

Consideremos ahora que $(x, y) \in \Pi^2$ tal que $F_L^n(x, y) = (x, y)$, luego,

$$L^n(x, y) = (x, y) + (n, m)$$

donde $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Luego,

$$(L^n - I)(x, y) = (n, m) \Longleftarrow (x, y) = (L^n - I)^{-1}(n, m)$$

Entonces $L^n - I \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, por lo que,

$$(L^n - I)^{-1} \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$$

Y por tanto $(Ln - I)^{-1}(n, m) \in \mathbb{Q}^2$.

(b) Sea n el periódo común entre p y q, ¿qué ocurre con la linea $L_1 = \{v_1\mu + p\}$ cuando iteramos por F_L^n?

FIGURA cata 26/10

Sea $v_1\mu + p \in L_1$, entonces,

$$\begin{aligned} F_L^n(v_1\mu + p) &= F_L^n(v_1\mu) + F_L^n(p) \\ \lambda_1^n \mu v_1 &+ p \in L_1 \end{aligned}$$

Análogamente con L_2, de forma que L_1, L_2 son F_L^n son invariante.

Si $r \in L_1 \cap L_2$, entonces $F_L^n(r) \in L_1 \cap L_2$ por la invarianza de L_1, L_2. Estudiemos $F_L^{kn}(r)$ cuando $k \to \infty$. Como $r \in L_2$ se tiene que,

$$F_L^{kn}(r) = \mu\lambda_2^{kn} v_2 + q \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} q$$

Por otro lado, como $r \in L_1$ se tiene que,

$$F_L^{kn}(r) = \mu\lambda_1^{-kn} v_1 + p \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} p$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ existe k tal que,

$$\begin{aligned} d(F^{-kn}(r), p) &< \varepsilon \\ d(F^{kn}(r), q) &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto $F^{2kn}(U) \cap V \neq \emptyset$. Probando que F_L es topológicamente transitiva.

(c) Sea (x, y) un punto periódico de orden n, por lo que $F_L^n(x, y) = (x, y)$, por definición,

$$L^n(x, y) = (x, y) + (n, m)$$

con $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Definimos $G := L^n - I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Afirmación: $G([0,1]^2)$ *es un paralelogramo con vértice en* $\mathbb{Z}^2$*, por lo que el área* $G([0,1]^2) = |G([0,1]^2 \cap \mathbb{Z}^2)|$.

Dem: El teorema de Pick nos dice que,

$$\begin{aligned} \text{Área}(G([0,1]^2)) &= |\det(G)| \\ &= |(\lambda_1^n - 1)(\lambda_2^n - 1)| \\ &= |\lambda_1^n - \lambda_1^n\lambda_2^n - 1| \\ &= |\lambda_1^n + \lambda_2^n - 2| \end{aligned}$$

Probando la proposición. ■

3. Dinámica Hiperbólica

Estudiemos un ejemplo.

Ejemplo 3.1: Consideremos la siguiente matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Como gemos visto es claro que se cumple que $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Ahora mediante la simple transformación canónica,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$

que toma el plano real y lo manda al toro plano. Logramos determinar $\widetilde{A} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, como ya hemos visto. Lo interesante es que el comportamiento de $\widetilde{A}$ no es trivial, de hecho cumple propiedades interesantes.

Afirmación: *El operador $\widetilde{A}$ es un difeomorfismo Anosov (uniformemente hiperbólico).*

Definamos una función Anosov.

Definicion 3.2: *Sea M una variedad topológica suave y sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1. Decimos que f es Anosov o hiperbólico si,*

(a) Para todo $x \in M$ se tiene que $T_xM = E^u(x) \oplus E^s(x)$. Donde $E^u(x), E^s(x)$ son f-invariante y además,

$$df(E^k(x)) = E^k(f(x))$$

con $k = u, s$.

(b) Existen $C > 0$ y $\lambda \in (0, 1)$ tales que,

i) Si $v \in E^s(x) \setminus \{0\}$, entonces,

$$\|df^n(x)(v)\| \leq C\lambda^n$$

para todo $n \geq 0$

ii) Si $v \in E^u(x) \setminus \{0\}$, entonces,

$$\|df^{-n}(x)(v)\| \leq C\lambda^n$$

para todo $n \geq 0$.

Nota 3.3: El conjunto T_xM se le conoce como espacio tangente con respecto a x, que se define simplemente por $T_xM = \{\alpha'(0) : \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \alpha(0) = x\}$.

Teorema 3.4: *Sea M una vairedad suave y sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^1 hiperbólico. Entonces,*

(a) ***No se sabe si está bien*** *Para todo $x \in M$ existen $W^u_{loc}(x)$ una variedad inestable local en x y $W^s_{loc}(x)$ una variedad estable local en x tales que,*

i) *Si $y \in W^s_{loc}(x)$, entonces,*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq C\lambda^n$$

para todo $n > 0$.

ii) *Si $y \in W^u_{loc}(x)$, entonces,*

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq C\lambda^n$$

para todo $n > 0$.

(b) *Estos conjuntos son invariantes.*

$$f(W^s_{loc}(x)) = W^s_{loc}(f(x))$$
$$f(W^u_{loc}(x)) = W^u_{loc}(f(x))$$

Ejemplo 3.5 (Herradur de Smale): Consideremos la siguiente figura.

figura terminae

Afirmación: *$R \cap f^{-1}(R_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{-n}(R_{i_n})$ es un rectángulo vertical y hay una estructura de Cantor.*

Afirmación: *$R \cap f^{1}(R_{i_1}) \cap \cdots \cap f^{n}(R_{i_n})$ es un rectángulo horizontal y hay una estructura de Cantor.*

Afirmación: *Λ es un conjunto de Cantor con estructura de porducto (intersección de rectángulos verticales/horizontales).*

Afirmación: *$f : \Lambda \to \Lambda$ es hiperbólico (dirección horizontal expande y dirección vertical contrae).*

Definición 3.6: *Decimos que $\Lambda \subseteq M$ es un conjunto hiperbólico si para todo $x \in \Lambda$ se tiene que $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$ donde E^s contrae y E^u expande.*

Definición 3.7: *Diremos que $\Lambda \subseteq M$ es atractor hiperbólico si existe $U \supseteq \Lambda$ vecindad tal que,*

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U)$$

En general, los difeomorfismos hiperbólicos cumplen muchas cosas.

- La entropía es siempre positiva.
- Son estables estructuralmente, es decir, si se pertuba, la entropía no cambia.

Definición 3.8: *Decimos que $f : M \to M$ difeomorfismo C^1 es estructuralmente estable si $d(f, g)_{C^1} \ll 1$ entonces g es topológicmanete conjugada a f donde g es difeomorfismo C^1.*

Teorema 3.9 (Maño): *Sea M una varidad compacta suave y sea $f : M \to M$ difeomorfismo C^1. Entonces f es estructuralmente estable si y sólo si f es uniformemente hiperbólico.*

Proposición 3.10: *$f : \Lambda \to \Lambda$ es topológicmanete conjugado al full-shift en dos símbolos (bilateral).*

Observación 3.11: En general, los sistemas hiperbólicos son caóticos, tienen muchos puntos periódicos con entropía positiva, tiene sensibilidad en el punto inicial y son estable bajo pertubaciones.

Ejemplo 3.12: El mapa dado por:

$$f(x) := \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - 2x, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

es una función hiperbólica.

4. Tópicos

En esta sección veremos algunos tópicos que se aleja del programa del curso, pero que son interesantes en el estudio.

4.1. Homeomorfismos y Difeomorfismos de los Círculo

Definimos los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1) &:= \{f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : f \text{ es un homeomorfismo que preserva la orientación}\}\\ \mathrm{Dif}_1^+(\mathbb{S}^1) &:= \{f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : f \text{ es un difeomorfismo que preserva la orientación}\}\end{aligned}$$

El significado de que se preserva la orientación, se refiere al comportamiento natural del movimiento de un punto en $\mathbb{S}^1$. Por ejemplo $f(z) = z^2$ no es homeomorfismo, pero claramente preserva la orientación.

Observación 4.1: Podemos definir $\mathrm{Dif}_n^+(\mathbb{S}^1)$ como difeomorfismos de orden n que preservan la orientación y, por otro lado, se cumple la siguiente cadena:

$$\text{Rotación} \subseteq \mathrm{Dif}_\infty^+(\mathbb{S}^1) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Dif}_n^+(\mathbb{S}^1) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Dif}_1^+(\mathbb{S}^1) \subseteq \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$$

Observaicón 4.2: Existe una mapa del movimiento $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dado por $e^{2\pi i x}$. Este mapa claramente no es inyectivo, pero si continuo y sobreyectivo, además, tiene la peculiaridad de que preserva la formas de los intervalos en el sentido de que si consideramos una vecindad $V(z) \subseteq \mathbb{S}^1$, entonces $\pi^{-1}(V(z))$ es unión de intervalos Z_n con $n \in \mathbb{Z}$ donde $\pi(Z_n) = V(z)$. También se cumple que π es una isometría y es contractil ($\mathbb{S}^1$ no lo es). A todo $\mathbb{R}$ se le llama el cubrimiento universal de $\mathbb{S}^1$.

Definición 4.3: *Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Decimos que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de f si se cumple que $\pi \circ F = f \circ \pi$.*

Lema 4.4: *Dado $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ continua, entonces existe un levantamiento a $\mathbb{R}$.*

No demostraremos este teorema sino uno más general.

Lema 4.5: *Sea M una variedad y sea $f : M \to M$ una función continua. Entonces existe un levantamiento al cubrimiento universal $\widetilde{M}$.*

Dem Idea: terminar

Observación 4.5: Dado $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ continua y F un levantamiento de f. Entonces podemos conocer todos los levantamientos ya que cualquier levantamiento es un traslado de F, es decir, si $\widetilde{F}$ es otro levantamiento, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\widetilde{F}(x) = F(x) + k$. (Notar que $\pi \circ \widetilde{F} = \pi(F + k) = \pi \circ F + f \circ \pi$).

Definición 4.6: *Dado $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ continua y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un levantamiento. Definimos el grado de f por la constante $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x+1) = F(x) + k$ y se denota por $\deg(f) = k$.*

Observación 4.7: La k de la definición anterior siempre existe. Observemos que,

$$(\pi \circ F)(x+1) = (f \circ \pi)()$$

terminar

En particular k es la cantidad de vueltas que da el mapa.

Observación 4.8: Si $f \in \mathrm{Hom}^+(\mathbb{S}^1)$ entonces $F(x+1) = F(x) + 1$, por lo que $\deg(f) = 1$.

Ejemplo 4.9: Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es dada por $f(z) = z^n$, entonces $\deg(f) = n$.

Definición 4.10 (Número de rotación de Poincare): *Definimos la transformación τ : $Hom^+(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dado por,*

$$\tau(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

donde x es cualquier punto y F es cualquier levantamiento,

Observación 4.10: La rotación de Poincaré está bien definido, más adelante probaremos este hecho. Pero antes notemos que el límite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

existe y es independiente de x. Y $F^n(x)/n$ depende del levantamiento pero difiere un número entero.

Observación 4.11: Si $\tau(f)$ está bien definido, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x)}{n}$$

Por razones obvias.

Proposición 4.12: *Si $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es homeomorfismo que preserva la orientación y $f \in Hom^+(\mathbb{S}^1)$, entonces,*

$$\tau(h^{-1}fh) = \tau(f)$$

Es decir, τ es invariante de forma dinámica.

Observación 4.13: De la proposición anterior, no necesariamente h, f son conjugado topológico.

Proposición 4.13: *Si $f \in Hom^1(\mathbb{S}^1)$ entonces el número de rotación es racional si y sólo si f tiene puntos periódicos.*

Teorema 4.14 (Dejoy): *Si $f \in Dif_2^+(\mathbb{S}^1)$ y $\tau(f)$ es diofantino, entonces f es topológicamente conjugado a la rotación con ángulo $\tau(f)$.*

Proposición 4.16: *Sean $f, g \in Hom^+(\mathbb{S}^1)$, entonces $\tau(g \circ f \circ g^{-1}) = \tau(f)$.*

Dem: Sean F y G levantamientos a $\mathbb{R}$ de f y g respectivamente. Luego el levantamiento de $g \circ f \circ g^{-1}$ es $G \circ F \circ G^{-1}$, luego,

$$\begin{aligned} 1\tau(g \circ f \circ g^{-1}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(G \circ F \circ G^{-1})^n(y)}{n} \\ &== \lim_{n\to\infty} \frac{(G \circ F^n \circ G^{-1})(y)}{n} \end{aligned}$$

Tomando $y = G(x)$, podemos compararlo con $\tau(f)$,

$$\begin{aligned}\tau(g \circ f \circ g^{-1}) - \tau(f) &= \lim_{n\to\infty} \frac{G(F^n(x)) - F^n(x)}{n} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{C}{n} = 0\end{aligned}$$

por lo que $\tau(g \circ f \circ g^{-1}) - \tau(f)$. ■

Observación 4.17: Si $f$es conjugada topológica a una rotación, entonces existe g tal que $g \circ f \circ g^{-1} = R\theta$, luego,

$$\theta = \tau(R_\theta) = \tau(gfg^{-1}) = \tau(f)$$

Entoncees $\tau(f) = \theta$.

Proposición 4.18: *Si $\tau(f) \notin \mathbb{Q}$. Entonces $\omega(x)$ (el límite de x) es independiente de $x \in \mathbb{S}^1$ y $E = \omega(x)$ para algún $x \in \mathbb{S}^1$.*

Proposición 4.19: $\tau(f) \notin \mathbb{Q}$. *Entonces E es $\mathbb{S}^1$ o es un conjunto de Cantor.*

Recordemos que el teorema de Poincaré $\tau(f) \notin \mathbb{Q}$.

(a) f es transitivo si y sólo si $E = \mathbb{S}^1$. Por lo que f es conjugado topológicamente a la rotación $R_{\tau(f)}$.

(b) Si f es no transitivo (E conjunto de Cantor), entonces f tiene como factor a la rotación $R_{\tau(f)}$. La conjugación colapsa los intervalos $\mathbb{S}^1 \setminus E$.

5. Teoría Ergódica

Definición 5.1: *Decimos que μ es ergódica si todo conjunto totalmente invariante tiene medida 0 o 1, es decir, si $A = T^{-1}A$, entonces $\mu(A) = 0$ o 1.*

Teorema 5.2: *Sea T un sistema dinámico medible y μ una medida de probabilidad T-invariante que es ergódica. Sea $A \subseteq X$. Luego, existe $Y \subseteq X$ de medida total tal que si $x \in Y$, entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : T^k x \in A\}}{n} = \mu(A)$$

Aplicación a números normales en $[0, 1]$: Sea $T(x) = 10x$ módulo 10. Se cumple que $([0, 1], T)$ es semiconjugada con respecto a $(\sum_{10}, \sigma)$.

Definición 5.3: *Sea $x = 0, a_1a_2a_3\dots$ es normal en base en 10 si,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k \in \{0, \dots, n-1\} : a_k = m\}}{n} = \frac{1}{10}$$

para todo $m =, \dots, 9$; y si,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k\{0, \dots, n-1\} : a_{k+1}\dots a_{k+l} = m_1m_2\dots m_l}{n} = \frac{1}{10^l}$$

para todo $m_1, \dots, m_l \in \{0, \dots, 9\}$.

Teorema 5.4: *Los números normales en $[0, 1]$ son Lebesgue 1 casi en toda partes en base 10.*

6. Ayudantías

Ayudantía 1

P1: Decimos que un sistema dinámico topológico $f : X \to X$ es **topológicamente transitivo** si existe $x \in X$ tal que su órbita es densa. Decimos que es **minimal** si la órbita de todo $x \in X$ es densa. Sea G un grupo topológico y para $g \in G$ definimos:

$$\begin{aligned} L_g : G &\to G \\ h &\mapsto hg \end{aligned}$$

Sea $g_0 \in G$, si la traslación L_{g_0} es topológicamente transitiva, entonces es minimal.

Sol: Definamos un grupo topológico.

Definición: *Sea $(G, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Diremos que es un grupo topológico si $(G, \cdot)$ es un grupo, la función $G \times G \to G$ dada por $(x, y) \mapsto x \cdot y$ es continua y la función $G \to G$ dada por $x \to x^{-1}$ es continua.*

Por tanto, (G, L_g) es un sistema dinámico (pensando en G métrico compacto). Sean $g, g' \in G$, denotaremos A, A' la clausura de sus órbitas respectivamente. Se cumple que,

$$g^n \circ g' = g^n \circ g \circ (g^{-1} \circ g')$$

Esto implica que,

$$\overline{\mathcal{O}^+_{L_{g_0}}(g)} = \overline{\mathcal{O}^+_{L_{g_0}}(g')}g^{-1}g'$$

Si g es tal punto donde la clausura de su órbita es X, se tiene que,

$$G\overline{\mathcal{O}^+_{L_{g_0}}(g)} = \overline{\mathcal{O}^+_{L_{g_0}}(g')}g^{-1}g'$$

Esto implicar que,

$$G = \overline{\mathcal{O}^+_{L_{g_0}}(g')}$$

Por lo que podemos considerar g' arbitrario, probando que toda órbita es densa es decir, L_{g_0} es minimal.

P2: Sea X un espacio métrico separable localmente compacto X. Demuestre que si $f : X \to X$ es topológicamente transitivo si y sólo si para cualquier conjuntos abiertos $U, V \subset X$ existe un entero $N = N(U, V)$ tal que $f^N(U) \cap V$ es no vacío.

Sol: Recordemos algunas cosas. Ser separable significa que existe un subconjunto E denso numerable y ser localmente compacto significa que para todo $x \in X$ existe una vecindad donde su clausura es compacta.

Supongamos que (X, f) es topológicamente transitivo. Sean $U, V \neq \emptyset$ conjuntos abiertos. Notemos que existe un $x \in X$ tal que $\mathcal{O}^+_f(x)$ es denso en X, esto implica que existen $n, m \in \mathbb{Z}$ tal que,

$$f^n(x) \in U, \quad f^m(x) \in V$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $n \geq m$, entonces,

$$x \in f^n(U)$$

y esto implica que,

$$f^m(x) \in f^{n-m}(U)$$

Pero claramente $f^m(x) \in V$, por tanto,

$$f^{n-m}(U) \cap V \neq \emptyset$$

Como queriamos probar.

Supongamos ahora que para cualquier conjuntos U, V abiertos no vacíos, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$. Notemos que al ser separable X, este es segundo numerable, sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de X, ahora al ser localmenre compacto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\overline{U_n}$ es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Para los abiertos U_1, U_2 existe un entero m_1 tal que,

$$f^{m_1}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$$

Consideremos V_1 abierto tal que $\overline{V_1} \subset U_1 \cap f^{-m_1}(U_2)$, entonces existe n_2 entero tal que,

$$f^{m_2}(V_1) \cap U_3 \neq \emptyset$$

Tomamos V_2 abierto tal que $\overline{V_2} \subset V_1 \cap f^{-m_2}(U_3)$, de forma sucesiva tomamos un avierto V_n tal que,

$$\overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap f^{-m_{n+1}}(U_{n+2})$$

Considerando,

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{V_n}$$

Se tiene que $V \neq \emptyset$. Además, si $x \in V$ entonces $f^{m_{n+1}}(x) \in U_{n+2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Verfiquemos que $\mathcal{O}_f^+(x)$ es denso. Sea $y \in X$, para ver que está en la clausura de la órbita de x, debemos probar que para toda vecindad $U_{n_k} \in \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de y donde se tiene que,

$$U_{n_k} \cap \mathcal{O}_f^+(x) \neq \emptyset$$

Pero por lo anterior sabemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x) \in U_{n_k}$ y esto implica la densidad de la órbita.

P3: Definimos el **tent map** $T : [0,1] \to [0,1]$ como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Verifique que $|\mathrm{Per}_n(T)| = 2^n$ (periocidad, no el minimal),

(b) Demuestre que $([0,1],T)$ es topológicamente transitivo,

(c) Demuestre que T es topológicamente conjugado a la función $\lambda_4 : [0,1] \to [0,1]$ dada por $\lambda_4(x) = 4x(1-x)$

Sol:

(a) Sea $n = 1$, determinemos los puntos fijos. Claramente 0 es uno, el otro es $2/3$, por lo que claramente $2^1 = 2$. Veamos la periocidad de orden n, para ello vamos a pensar esto mediante el full shift. Sabemos que todo número puede ser decompuesto en base 2, por ejemplo,

$$\frac{2}{3} = [\overline{10}] = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

Consideremos $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ con $x_n \in \{0,1\}$, luego $T(X)$ se reescribe de la siguiente forma:

$$T(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n}, & x_1 = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x_{n+1}}{2^n}, & x_1 = 1 \end{cases}$$

Con esto vamos a ver el comportamiento de los puntos periódicos. Nuevamente con $n = 1$ vemos que si $x_1 = 0$ y x es punto fijo, entonces,

$$T(x) = x \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

Es decir, $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$, si $x_1 = 0$ entonces $x = 0$. Si $x_1 = 1$ entonces,

$$T(x) = x \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - x_{n+1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

Es decir, $x_1 = 1 - x_2, x_2 = 1 - x_3, \dots$ si $x_1 = 1$, entonces $x_2 = 0$ y luego $x_3 = 1$ y así sucesivamente, observando que $x = [\overline{10}] = 2/3$ como vimos inicialmente. Lo siguiente que vamos a hacer, es estudiar T^2 y luego generalizaremos para T^n implicitamente. Por construcción,

$$\begin{aligned} T^2(x) = T(T(x)) &= \begin{cases} T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n}\right), & x_1 = 0, \\ T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x_{n+1}}{2^n}\right), & x_1 = 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+2}}{2^n}, & x_1 = 0, x_2 = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x_{n+2}}{2^n}, & x_1 = 0, x_2 = 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x_{n+2}}{2^n}, & x_1 = 1, x_2 = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+2}}{2^n}, & x_1 = 1, x_2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Los puntos fijos de T^2 son: $\{0, [\overline{0110}], [\overline{1001}], [\overline{1100}]\}$, a partir de este punto podemos ver una tendencia, que $T^n(x)$ tiene 2^n puntos periódicos distitnos, ya que depende de las primeras n combinaciones posibles que son 2^n. Probando lo enunciado.

(b) Notemos que $[0,1]$ es un espacio topológico separable y localmente compacto, por lo que podemos usar el problema 2. Sean $I_1 = (a,b), I_2 = (c,d)$ intebalos abiertos. Digamos que,

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \ \ b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}, \ \ c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2^n}, \ \ d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ para todo $n \geq N$. Podemos construir $x_1, \ldots, x_N$ tal que los primeros N-términos de $T^N x$ sean $c_1, \ldots, c_N$ con,

$$x = \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_N}{2^N} + \frac{x_1}{2^{N+1}} + \cdots + \frac{x_N}{2^{2N}}$$

Tomando x el número de periódo $2N$ tal que sus primero $2N$ términos sean $a_1, \ldots, a_N, x_1, \ldots, x_N$, entonces $x \in I_1$ y $T^N x \in I_2$ y por tanto,

$$T^N(I_1) \cap I_2 \neq \emptyset$$

Probando que es topológicamente transitivo.

(c) Queremos encontrar una gunción h homeomorfa conjugada. Notemos que si existiera tal h, entonces se cumple que para $x \in (0, 1/2)$ por la propiedad de conjugación, se tiene que,

$$h(2x) = 4h(x)(1 - h(x))$$

Esto se parece a algo y este algo es la siguiente identidad:

$$\operatorname{sen}^2(2cx) = 4 \operatorname{sen}^2(cx)(1 - \operatorname{sen}^2(cx))$$

Por construcción queremos que c sea tal que $2cx$ recorrar el intervalo $[0, \pi/2]$ para que sen^2 recorra el intervalo $[0,1]$. Claramente $c = \pm\pi/2$ pero por comodidad tomamos $c = \pi/2$, de esta forma cuando $x \in (0, 1/2)$ entonces,

$$h(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Que es claramente homeomorfismo. Cuando $x \in (1/2, 1]$ podemos tomar el mismo h ya que cumple lo anterior, finalmente se toma el homeomorfismo $h : [0,1] \to [0,1]$ dado por:

$$h(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Para ver que tiene inversa continua, notemos que h es creciente continua en un intervalo $[0,1]$, luego la inversa es creciente continua.

P4: Sea $F(x) = x^3 - \lambda x$.

(a) Encuentre todos sus puntos periódicos y clasifíquelos cuando $0 < \lambda < 1$,

(b) Demuestre que si $|x|$ es suficientemente grande, entonces $|F^n(x)| \to \infty$.

Sol:

(a) Usaremos el teorema de Sirkoskii. Probaremos que F^2 no tiene punto fijos, por lo que necesariamente F no tiene punto periódico de orden m con $m \neq 1$, por lo tanto, solo tiene punto fijos....

Luego F solo tiene puntos fijos. Determinemos los puntos fijos, sea x tal que $F(x) = x$, luego,

$$x^3 - \lambda x = x$$

Claramente $x = 0$ es punto fijo, si $x \neq 0$ entonces $x = \pm\sqrt{1-\lambda}$, siendo bien definido cuando $0 < \lambda < 1$. Si derivamos vemos que,

$$F'(x) = 3x^2 - \lambda$$

Entonces $|F'(0)| < 1$ siendo 0 un punto fijo atractor. $|F'(\sqrt{1-\lambda})| = |3(1-\lambda) - \lambda| = |3 - 4\lambda|$, de forma que $\pm\sqrt{1-\lambda}$ puede ser atractor o repulsor, dependiendo del valor de λ.

(b) Supongamos que para $|x|$ suficientemente grande se tiene que $|F^n(x)| \to L$ para $L \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = p$$

Esto implica que p es un punto fijo, por lo tanto $p = 0, \pm\sqrt{1-\lambda}$, pero estamos trabajando con $|x|$ muy grande, por lo que es imposible que sea punto fijo, de forma que,

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(x)| = \infty$$

Ayudantía 2

P1: Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $T : X \to X$ una función. Demuestre que T preserva la medida si y sólo si,

$$\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$$

para toda función $f : X \to \mathbb{R}$ integrable ($f \in L^1(X)$.)

Sol: Supongamos que para toda función $f : X \to \mathbb{R}$ integrable se tiene que,

$$\int_X f d\mu = \int_X f \circ T d\mu$$

Recordemos que T preserva la medida si para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que,

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$$

Por lo que eso vamos a probar. Notemos que para todo $A \in \mathcal{F}$ se tiene que,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_X \mathbb{1}_A d\mu \\ &= \int_X \mathbb{1}_A \circ T d\mu \end{aligned}$$

donde la indicatriz es integrable si y sólo si A es medible, cosa que lo es. Ahora observemos que,

$$\begin{aligned} (\mathbb{1}_A \circ T)(x) = \begin{cases} 0, & T(x) \notin A \\ 1, & T(x) \in A \end{cases} &= \begin{cases} 0, & x \notin T^{-1}(A) \\ 1, & x \in T^{-1}(A) \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(x) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\mu(A) = \int_X \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} d\mu = \int_{T^{-1}(A)} d\mu = \mu(T^{-1}A)$$

Probando que T preserva la medida.

Supongamos ahora que T preserva la medida μ, notemos que para una función indicatriz $\mathbb{1}_A$ donde A es medible, se tiene que,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A) = \mu(T^{-1}A) = \int_X \mathbb{1}_A \circ T d\mu$$

Sea f una función simple no negativa, es decir,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

donde $a_i \geq 0$ y A_i son medibles. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(A_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \mu(T^{-1}A) \\
&= \sum_{i=0}^{n} a_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} \circ T d\mu \\
&= \int_X \sum_{i=0}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \circ T d\mu \\
&= \int_X f \circ T d\mu
\end{aligned}$$

Consideremos $f \geq 0$ medible, entonces existe una sucesión de funciones simples no negativas, tales que $f_n \uparrow f$, luego,

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_n \circ T d\mu \\
&= \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \circ T d\mu \\
&= \int_X f \circ T d\mu
\end{aligned}$$

Para concluir el resultado basta ver que toda función f integrable puede ser expresado como $f = f^+ - f^-$ donde f^+, f^- son funciones integrable no negativa. Aplicando lo anterior concluimos el resultado.

P2: Sea $Q_c(x) = x^2 + c$. Demuestre que para $c < 1/4$, existe una única constante $\mu > 1$ tal que Q_c es topológicamente conjugada a $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ vía una función del tipo $h(x) = \alpha x + \beta$.

Sol: Sea $c < 1/4$. Por hipótesis existe una función $h(x) = \alpha x + \beta$ que es conjugación entre Q_c y F_μ. Luego se cumple que.

$$(h \circ F_\mu)(x) = (Q_C \circ h)(x) \iff \alpha\mu x(1-x) + \beta = (\alpha x + \beta)^2 + c$$

Tomando $x = 0, x = 1$ obtenemos un sistema de ecuación conveniente:

$$\begin{aligned}
\beta &= \beta^2 + c \\
\beta &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + c
\end{aligned}$$

De aquí podemos concluir que $\alpha = -2\beta$ y que $c = \beta - \beta^2$, es decir, los coeficientes α, c están determinados por β, como $c < 1/4$ entonces β está bien definido como solución real. Ahora tomando $x = 1/2$ se observa que,

$$\mu = -2\beta - \frac{2c}{\beta}$$

Siendo único para $\mu > 1$.

P3: Un punto p es llamado **non-wandering** para la función f, si para cualquier intervalo abierto J que contiene a p, existe $x \in J$ y $n > 0$ tal que $f^n(x) \in J$. Denotaremos $\Omega(f)$ por el conjunto de puntos non-wandering para f.

(a) Demuestre que $\Omega(f)$ es cerrado,

(b) Si $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ es el mapa cuadrático con $\mu > 2 + \sqrt{5}$, demuestre que $\Omega(F_\mu) = \Lambda_\mu$.

Sol:

(a) Probemos que el conjunto $\Omega(f)^c$ es abierto. Sea $x \in \Omega(f)^c$, entonces existe un intervalo abierto J que contiene a p tal que para todo $x \in J$ y para todo $n > 0$ se tiene que $f^n(x) \notin J$. Observemos que J mismo es tal que $J \subseteq \Omega(f)^c$ es un abierto, entonces $\Omega(f)^c$ es abierto y por tanto $\Omega(f)$ es cerrado.

(b) Recordemos que Λ_μ es el conjunto de no espace del conjunto $[0,1]$, es decir,

$$\Lambda_\mu = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_\mu^{-n}([0,1])$$

Afirmación: $\Lambda_\mu \subseteq \Omega(F_\mu)$.

Dem: Sea $x \in \Lambda_\mu$, sea S el mapa codificador de Λ_μ, de forma que,

$$S(x) = (s_1, s_2, \dots)$$

Sea I una vecindad de x, entonces existe una codificación finita $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ tal que $I_S \subseteq I$. Podemos tomar $I_{S'} \subseteq I_S$ con $S' = (s_1, \dots, s_n, s_1, \dots, s_n)$, para $y \in I_{S'}$ se tiene que,

$$F^{n-1}(y) \in I_S$$

De forma que retorna a I_S intervalo abierto. Luego $x \in \Omega(f)$. ■

Probemos la otra inclusión. Consideremos $p \notin \Lambda_\mu$, entonces, p al iteral, eventualmente escapa de $[0,1]$, es decir, existe $S \subset \{0,1\}^n$ la n-palabra más grande que contiene a p ($p \in I_S$). Consideremos $J_1 = I_{s_0}, J_2 = I_{s_1}$. Sea J el intervalo que está entre J_1 y J_2, veamos que $F_\mu^n(J) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ para ver que todo punto de J nunca retorna. Por definición,

$$F_\mu(J_1) = F_\mu(I_{s_0}) = I_{(s_2,\dots,s_n,0)}$$
$$F_\mu(J_2) = F_\mu(I_{s_1}) = I_{(s_2,\dots,s_n,1)}$$

$F_\mu(I_S)$ es biyección. Entonces $F_\mu(J) = F_\mu(I_S) \setminus (F_\mu(J_1) \cup F_\mu(J_2))$, luego $F_\mu(J) \subset J$ no puede pasar, en particular, $F_\mu(J)$ no contiene el intervalo I_w con $w = (w_1, \dots, w_n) \in \{0,1\}^n$, de forma que $F_\mu^2(J)$ no cointiene a I_w y así de forma recursiva, por tanto es vacío para todo $n \in \mathbb{N}$ y finalmente $p \notin \Omega(F_\mu)$. Esto demuestra que,

$$\Lambda_\mu = \Omega(F_\mu)$$

P4: Sea $F_\mu : I_0 \cup I_1 \to [0,1] = I$ la función cuadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ y $\mu > 2+\sqrt{5}$. Notemos que $F_\mu\big|_{I_0} : I_0 \to I$ y $F_\mu\big|_{I_1} \to I$ son difeomorfismos. Denotemos por $F_0 : I \to I_0$ y $F_1 : I \to I_1$ sus respectivas inversas. Sea $\phi : I_0 \cup I_1 \to [0,1]$ una función Lipschitz continua, para cada $k \in \mathbb{N}$ denotaremos por:

$$S_k\phi(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \phi(F_\mu^j(x))$$

(a) Demuestre que existe un número b tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $(i_1, \dots, i_k) \in \{0,1\}^k$ tenemos,

$$|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| \leq b$$

Siempre y cuando $x, y \in I_{i_1,\dots,i_k}$.

(b) De forma más general, para todo $q \geq k$ y todo $(i_1, \dots, i_q) \in \{0,1\}^q$, tenemos,

$$|S_k\phi(x) - S_k\phi(y)| \leq b|I_{i_{k+1},\dots,i_q}|$$

siempre y cuando $x, y \in I_{i_1,\dots,i_q}$

Sol:

(a) Notemos que existen $c_1, c_2 \in (0,1)$ tales que para todo $x, y \in I_0 \cup I_1$ se tiene que,

$$c_1|x-y| \leq |F_i(x)| - F_i(y)| \leq c_2|x-y|$$

Se tiene que $|F_\mu'| > 1$ y $c_2^{-1} > |F_\mu| > c_1^{-1} > 1$, iterando k veces, llegamos a que,

$$|I_{i_1,\dots,i_k}| = |F_{i_k}^k| \leq c_2^k$$

para todo $(i_1, \dots, i_k) \in \{0,1\}^k$. Si $x, y \in I_{i_1,\dots,i_k}$, entonces,

$$F_\mu^j x, F_\mu^j y \in I_{i_1,\dots,i_k}$$

para $j = 0, \dots, k-1$. Usando que ϕ es Lipshitz, se tiene que,

$$\begin{aligned} |\phi(F^j x)| - \phi(F^j y)| &\leq a|F^j x - F^j y| \\ &\leq a|I_{i_{j+1},\dots,i_k}| \leq ac_2^{k-j} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|S_k(\phi(x)) - S_k(\phi(y))| &\leq \sum_{j=0}^{k-1} |\phi(F^j x) - \phi(F^j y)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} a c_2^{k-j} \leq \frac{a c_2}{1 - c_2} =: b
\end{aligned}$$

(b) **....**

Ayudantía 3

En esta ayudantía vamos a demostrar la versión general del teorema de Sarkosvkii. Sea $f : I \to I$ una función continua donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto.

P1: Sean $c, d \in I$ tales que $f(d) \leq c < c \leq f(c)$, demuestre que f tiene un punto de periódico de periódo minimal 2.

Sol: Sea $I = [a, b]$. Definimos,

$$w := \text{mín}\{c \leq x \leq d : f(x) = x\}$$

Observemos que w está bien definido, puesto que si consideramos $H(x) := f(x) - x$, entonces $H(d) = f(d) - d < 0, H(c) = f(c) - c > 0$, luego por el TVI existe $x \in [c, d]$ tal que $f(x) = x$. Sea $v \in [c, w]$ tal que $f(v) = d$. Entonces $f^2(v) = f(d) \leq c \leq v$. Si f no tiene punto fijos en $[a, c]$, entonces no fija puntos de $[a, v]$. Si $f^2(a) \geq a$ (dado que a es el extremo del intervalo). Observemos que si consideramos el mapa $G(x) := f^2(x) - x$, se tiene que $G(v) < 0, G(a) > 0$, entonces en el intervalo $[a, v]$ existe un punto fijo de f^2, es decir, existe un punto periódico de orden 2 minimal.

Supongamos que f tiene un punto fijo en $[a, c]$. Sea,

$$t := \text{máx}\{a \leq x < c : f(x) = x\}$$

Que está bien definido al existir un punto fijo en $[a, c]$. Luego en el intervalo $(t, v]$ f no tiene punto fijo. Sea u un punto en $[t, c]$ tal que $f(u) = c$. Luego $f^2(u) = f(c) > u$ y $f^2(v) \leq v$, entonces en el intervalo $[u, v]$ existe un y tal que $f^2(y) = y$, pero por construcción y no puede ser punto fijo, de forma que y es periódico de orden 2 minimal.

P2: Supongamos que f tiene un punto de periódo minimal $m > 2$, demuestre que f tiene un punto periódico de periódo minimal 2.

Sol: Sea $P := \{x_1 < x_2 < \ldots < x_m\}$ una órbital de un periódo de orden m. Observemos que $x_1 < f(x_1)$ y que $f(x_m) = x_1 < x_m$, existe un entero $1 \leq s \leq m - 1$ tal que,

$$x_s = \text{máx}\{x \in P : x < f(x)\}$$

Entonces $f(x_{s+1}) \leq x_s < x_{s+1} \leq f(x_s)$, luego por el problema anterior, f tiene un punto periódico de orden 2 minimal.

P3: Tomemos f tal que tiene un punto de periódo minimal m, para $M \geq 3$ e impar. Demuestre que f tiene puntos de periódo minimal $2k$ para todo $k \geq 1$. Más aún, f tiene puntos x de periódo minimal n para todo $n \geq m + 1$.

Sol:

P4: Definamos el siguiente el orden en $\mathbb{N}$, conocido como el orden de Sarkosvkii:

$$3 \preceq 5 \preceq 7 \preceq \cdots \preceq 2 \cdot 3 \preceq 2 \cdot 5 \preceq 2 \cdot 7 \preceq \cdots \preceq 2^2 \cdot 3 \preceq 2^2 \cdot 5 \preceq 2^2 \cdot 7 \preceq \cdots \preceq 2^3 \preceq 2^2 \preceq 1$$

Suponga que f tiene un punto de periódo m. Demuestre que f también tiene un punto de periódo minimal n siemrpe y cuando $m \preceq n$ en el orden de Sarkosvkii

Ayudantía 4

P1: Supongamos que f tiene finitos puntos críticos y $Sf < 0$. Demuestre que f tiene finitos puntos periódicos deperíodo m para cualquier entero m.

Sol: Definimos $g := f^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que g tiene infinitos puntos críticos. Por el teorema del valor medio existen infinitos x tales que $g'(x) = 1$, como $Sf < 0$ se tiene que $Sg < 0$, luego por el lema del mín-máx se cumple que, $g'(x) < 0$ para infinitos x, es decir, g' poseé infinits puntos críticos. Pero esto contradice la hipótesi, finalmente f^n tiene finitos puntos periódicos. Probando el problema

P2: Sea $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, p un punto fijo con $|f'(p)| = 1$ y $Sf < 0$. Demuestre que $W(p)$ contiene un punto crítico.

Sol: Supongamos que $f'(p) = 1$ (en caso contrarior podemos considerar f^2). Como f tiene finitos puntos críticos, entonces f tiene finitos puntos fijos por el problema anterior. Por lo tanto, existe un intervalo alrededor de p tal que f tiene solamnete un punto fijo. Supongamos que p repele, es decir, para $x < p$ suficientemente cerca, se tiene que $f(x) < x$ y para $y > p$ suficientmente cerca, se tiene que $f(y) > y$. Luego f' tiene un mínimo local que debe ser¡?, pero contradice el lema del mín-máx. Por lo tanto ocurre justo lo opuesto que p repele, es decir, en un intervalo $[a, b]$ suficientemente cerca de p, se tiene que $f(x) \geq x$ para $x \in [a, b]$ o bien $f(y) \leq y$ para $y \in [a, b]$, es decir, se atrae por un lado.

P3: Sea $T : M \to M$ una transformación invertible y suponga que μ es una medida invariante no necesariamente finita. Sea $B \subset M$ un conjunto de medida finita. Demuestee que dado cualquier conjunto medible $E \subset M$ de medida positiva, μ-casi todo punto $x \in E$ vuelve una cantidad infinita de veces a E, o tiene sólo una cantidad finita de iterados en B.

Sol: Consideramos las siguientes colecciones:

$$\begin{aligned} F &:= \{x \in E : T^n x \in B \text{ para finitos } n\} \\ E_0 &:= \{x \in E \setminus F : T^n x \notin B\} \end{aligned}$$

La colección de conjuntos $\{T^n E_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ es disjunto a pares, puesto que **terminar**.

Ahora notemos que,

$$\mu(E_0 \cap T^{-n}B) = \mu(T^n E_0 \cap B) < \infty$$

Como $T^n E_0 \cap B \subset B$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\begin{aligned} \infty > \mu(B) &\geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T^n E_0 \cap B) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_0 \cap T^{-n}B) \end{aligned}$$

Por Borel-Cantelli tenemos que,

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} T^{-k}B \cap E_0\right) = 0 = \mu(E_0)$$

Por la propiedad de ser T-invariante, los puntos que retornan finitas veces a E, tienen medida 0, esto demuestra lo pedido. **P4:** Sea (X, B, μ) un espacio de medida y $T : X \to T$ una transformación que preserva la medida. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función que es creciente a lo largo de las órbitas, es decir, para todo $x \in X$ y para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(T^{n+1}x) \geq f(T^n x)$$

Demuestre que μ-casi seguramente f es constante a lo largo de las órbitas, es decir, $f(T^n x) = f(x)$ para todo $n \geq 1$.

Sol falta:

P5: Sea X un espacio métrico completo y T es una contracción, es decir, existe $\lambda \in [0, 1)$ de modo que $d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Determine el espacio de medidas de probabilidad T-invariantes $\mathcal{M}(X, T)$.

Sol: Por el teorema del punto fijo de Banach, se tiene que existe un único punto fijo. Demostraremos que $\mathcal{M}(X, T) = \{\delta_x\}$. Para cada $r > 0$ definimos:

$$A_r := \{y \in X : d(x, y) > r\}$$

Si $\mu(A_r) > 0$ para algún $r > 0$, entonces,

$$d(x, T^n y) \leq \lambda^n d(x, y)$$

Existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\lambda^n < \frac{r}{d(x, y)}$$

para todo $n \geq N$. Así los puntos de A_r no retornan infinitas veces a A_r, pero esto contradice el teorema de recurrencia de Poincare. Por tanto $\mu(A_r) = 0$ para todo $r > 0$ y si además,

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{\frac{1}{n}}$$

Entonces,

$$\mu(X \setminus \{x\}) = 0$$

Como estamos en una medida de probabilidad se tiene que,

$$\mu(\{x\}) = 1$$

Es decir,

$$\mu = \delta_x$$

Ayudantía 5

P1: Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología de $\mathbb{R}$. Sea $\theta : X \to \mathbb{Z}$ una biyección. Demuestre que la función $T : X \to X$ dada por $Tx = \theta^{-1}(\theta(x) + 1)$ es medible con respecto a la σ-álgebra de Borel sobre X, pero no tiene medidas de probabilidad T-invariantes.

Sol: Probemos que T es medible. Observemos q **rtermia**

Observemos que X es compacto métrico heredado por $\mathbb{R}$. También notemos que,

$$\begin{aligned} T^2(x) &= \theta^{-1}(\theta(T(x)) + 1) \\ &= \theta^{-1}(\theta(x) + 2) \end{aligned}$$

De forma inductiva podemos concluir que,

$$T^n(x) = \theta^{-1}(\theta(x) + n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. También notemos que T es invertible ya que por definición,

$$y = \theta^{-1}(\theta(x) + 1) \iff \theta^{-1}(\theta(y) - 1) = x$$

Y de forma análoga podemos concluir que,

$$T^n(x) = \theta^{-1}(\theta(x) + n)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que,

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^{-1}(x)$$

Determinemos $\mathcal{M}(X, T)$. Supongamos que existe una medida de probabilidad T-invatiante. Entonces,

$$\begin{aligned} 1 = \mu(X) &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^{-1}(x)\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{x\}) \end{aligned}$$

Entonces, necesariamente $\mu(\{x\}) = 0$ pero esto implica que $1 = 0$ siendo imposible. Finalmente $\mathcal{M}(X, T) = \emptyset$.

Observación: Sabemos por un teorema que si tenemos (X, T) un sistema dinámico, entonces existe una medida invariante, por lo que necesariamente θ es no continua luego (x, θ) no es un sistema dinámico.

P2: Suponga que X es un espacio métrico compacto y $T_1, \ldots, T_q : X \to X$ es una familia finita de transformaciones continuas que conmutan, es decir, $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ para todo $1 \leq i < j \leq q$. Demuestre que existe una medida de probabilidad μ que es T_i-invariante para todo $1 \leq i \leq q$. Concluya que la afirmación sigue siendo válida para una familia numerable de $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de transformaciones continuas sobre X que conmutan.

Sol: Si (X, T) es un sistema dinámico, entonces existe $\mu \in \mathcal{M}(X, T_1)$, observemos que para todo T_i se tiene que,

$$T_i^*(\mu) \in \mathcal{M}(X, T_1)$$

Ya que por definición,

$$\begin{aligned} T_i^*(\mu)(T_1^{-1}A) &= \mu(T_i^{-1}(T_1^{-1}(A))) \\ &= \mu(T_1^{-1}(T_i^{-1}(A))) \\ &= \mu(T_i^{-1}A \\ &= T_i^*(\mu)(A) \end{aligned}$$

Definimos la medida,

$$\mu_n^{(-1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T_2^i)^*\mu$$

En particulár, es una medida de probabilidad T_2 invariante, como $\mathbb{P}(X)$ es compacto métrico, entonces existe una subsucesión que converge, digamos μ_2 a un punto de acumulación de esta sucesión. Entonces $\mu_2 \in \mathcal{M}(X, T_2) \cap \mathcal{M}(X, T_1)$. De forma inductiva podemos definir $\mu_n^{(2)}$ y ver que existe μ_3 que está en $\mathcal{M}(X, T_i)$ con $i = 1, 2, 3$.

Consideremos,

$$\mathcal{M}_n := \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{M}(X, T_i)$$

claramente no vacío por lo que hemos visto, además, es compacto al ser intersección de compactos. Finalmente tenemos la cadena decreciente,

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots$$

de compacto, por tanto,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(X, T_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n$$

es no vacío.

Observación: Si $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ y definimos,

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T^i)^*\mu$$

entonces existe un punto de acumulación $\nu \in \mathcal{M}(X, T)$.

P3: Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el círculo de radio 1 centrado en $(0,1) \in \mathbb{R}^2$. Conideremos $n = (0,2)$ y $s = (0,0)$, ambos en X. Dada la proyección estereográfica $\varphi : X \setminus \{n\} \to \mathbb{R} \times \{0\}$ que envía $X \setminus \{n\}$ al eje x. Definamos $T : X \to X$ como,

$$T(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\frac{1}{2}\varphi(x)), & x \in X \setminus \{n\} \\ n, & x = n \end{cases}$$

Notemos que $\varphi(x) = \frac{2x_1}{2-x_2}$ para $(x_1, x_2) = x \in X \setminus \{n\}$.

(a) Sea $z \in X \setminus \{n\}$. Determine $\lim_{n\to\infty} T^n(z)$,

(b) Encuentre todas las medidas de probabilidad T-invariante.

Sol: Sea z un punto que no está en el norte. Entonces $T(z)$ es un punto que no está en norte, luego $T(X \setminus \{n\}) \subset X \setminus X \setminus \{n\}$. Luego,

$$\begin{aligned} T^2(x) &= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}\varphi(x)\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{4}\varphi(x)\right) \end{aligned}$$

De forma inductiva concluimos que,

$$T^n(x) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2^n}\varphi(x)\right)$$

Ahora, como φ es un homeomorfismo, se tiene que al tomar $n \to \infty$ se cumple que,

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \varphi^{-1}(0) = (0,0)$$

Sea $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$, definimos:

$$R_\varepsilon := \{(x,y) \in X : \varepsilon \le y \le 2 - \varepsilon\}$$

Tenemos que tiene medida nula, puesto que si es positiva, entonces por el teorema de recurencia de Poincare, hay puntos que retornan a R_ε, sin embargo, al iterar por T estos se van a punto sur, siendo imposible. Por tanto $\mu(R_\varepsilon) = 0$. Finalmente,

$$\mu(X \setminus \{s,n\}) = 0$$

Por tanto, $\mu = a\delta_n + b\delta_s$ con $a + b = 1$.

P4: Sea X un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ una transformación continua. Supongamos que existe $\mu \in \mathcal{M}(X,T)$ que da medida no nula a todos los conjuntos abiertos, demuestre que $\Omega(T) = X$.

Sol: Observemos que $\Omega(T)$ es cerrado, luego su complemento es abierto, de forma que,

$$\mu(\Omega^c(T)) \neq 0$$

Pero como μ es una medida de probabilidad T-invariante, se tiene que $\mu(\Omega(T)) = 1$, contradiciento el punto anterior, por lo que $X \setminus \Omega(T) = \emptyset$, probando que $\Omega(T) = X$.

Interrogación 1

P1: Sea $F(x) = 2x(1-x)$. Demuestre que si $x \in (0,1)$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = \frac{1}{2}$$

P2: Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $F(x) = 6x^3 - 9x^2 + 4x$. Describa la dinámica de los puntos al iterar por F.

P3: Considere la función $T : [0,1] \to [0,1]$, dada por,

$$T(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0,1/3) \\ 3x-1, & x \in [1/3,2/3) \\ 3x-2, & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

Demuestre que $([0,1], T)$ es semi-conjugado al full shift en tres símbolos $(\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$.

P4: Considere el mapa $T : [0,1/3] \bigcup [2/3,1] \to [0,1]$ dado por,

$$T(x) = T(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0,1/3] \\ 3x-2, & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

Sea Λ el conjunto de puntos para los cuales la función T está siempre definida, es decir,

$$\Lambda = \bigcap_{i=0}^{\infty} T^{-i}([0,1/3] \cup [2/3,1])$$

Abusando notación, consideraremos $T : \Lambda \to \Lambda$. Demuestre que Λ es el conjunto de Cantor $1/3$. Demuestre que $(\Lambda), T$ es topológicamente conjugado al full shift en dos símbolos.

P5: Describa el espacio de medidas de probabilidad invariantes $\mathcal{M}(X,T)$ si,

(a) $X = \mathbb{R}, T(x) = x+1$,

(b) $X = [-1,1], T(x) = x^3$,

(c) X es un espacio métrico completo y T es una contracción, es decir, existe $\lambda \in (0,1)$ de modo que $d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$, para todo $x, y \in X$,

(d) $X = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, T(z) = iz$.

Ayudantía 6

P1: Demuestre que para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene que,

$$h(T^m) = mh(T)$$

Sol: Probemos que,

$$h\left(T^n, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) = nh(T,\alpha)$$

donde h es asociada a la entropía sobre cubrimientos y α es un cubrimiento. Por definición observemos que,

$$H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-ni}\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\alpha\right)\right) = H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1}\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-(ni+j)}\alpha\right)$$

Observemos que para i fijo $ni+j$ toma los valores $\{ni, ni+1, \ldots, ni+(n-1)\}$, por lo que si tomamos $i = 0, \ldots, k-1$ entonces $(ni+j)$ toma los siguientes valores $\{0, 1, \ldots, nk-1\}$. Entonces,

$$H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1}\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-(ni+j)}\alpha\right) = H\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} T^{-i}\alpha\right)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
h\left(T^n, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i=0}^{k-1} T^{-ni}\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} T^{-j}\alpha\right)\right)\\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} T^{-i}\alpha\right)\\
&= n\lim_{k\to\infty} \frac{1}{nk} H\left(\bigvee_{i=0}^{nk-1} T^{-i}\alpha\right)\\
&= nh(T,\alpha)
\end{aligned}$$

Probemos el enunciado. Observemos que,

$$nh(T,\alpha) = h\left(T^n, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\alpha\right) \leq h(T^n)$$

Luego $h(T^n)$ es una cota superior de $nh(T,\alpha)$ para todo α cubrimiento, por tanto,

$$nh(T) \leq h(T^n)$$

Para otra otra desigualdad basta ver que si β es un cubrimiento, entonces,

$$h(T^n,\beta) \leq h\left(T^n, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\beta\right) = nh(T,\beta) \leq nh(T)$$

Entonces aplicando el supremo obtenemos que $h(T^n) \leq nh(T)$. Finalmente,

$$nh(T) = h(T^n)$$

Nota: Esta es una propiedad fundamental en la entropía en general, es decir, que para las otras definiciones d eentropía se cumple esto.

P2: Para $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon 0$ definimos,

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(T,n,\varepsilon) &: = \text{mín}\{|A| : \ A \text{ es } (n,\varepsilon)\text{-generador}\} \\ \operatorname{sep}(T,n,\varepsilon) &: = \text{máx}\{|B| : \ B \text{ es } (n,\varepsilon)\text{-separador}\} \\ \operatorname{cov}(T,n,\varepsilon) &: = \text{mín}\{|\mathcal{C}| : \text{ colección de abiertos con } X = \bigcup_{O\in\mathcal{C}} O, \operatorname{diam}_{d_n}(0) < \varepsilon\} \end{aligned}$$

Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$,

$$\operatorname{cov}(T,n,2\varepsilon) \leq \operatorname{span}(T,n,\varepsilon) \leq \operatorname{sep}(T,n,\varepsilon) \leq \operatorname{cov}(T,n,\varepsilon)$$

Sol: La desigualdad $\operatorname{span}(T,n,\varepsilon) \leq$sep$(T,n,\varepsilon)$ ya se ha demostrado. Por lo que debemos probar las otras desigualdades. Demostremos que,

$$\operatorname{cov}(T,n,2\varepsilon) \leq \operatorname{span}(T,n,\varepsilon)$$

Sea A un (n,ε)-generador minimal, es decir, $|A| = \operatorname{span}(T,n,\varepsilon)$. Por compacticidad existe un $\varepsilon_0 < \varepsilon$ tal que,

$$X = \bigcup_{y\in A} B_{d_n}(y,\varepsilon_0)$$

En efecto, si ε_0 no existiria, entonces existe $\{x_n\}$ una sucesión de puntos que no están en $\bigcup_{y\in A} B_{d_n}(y,\varepsilon - 1/m)$. Supongamos que x_n converge a x, entonces,

$$d_n(x,y) \geq d_n(x_m,y) - d_n(x_m,x)$$

Tomando $m \to \infty$ ocurre que $d(x,y) \geq \varepsilon$ para todo $y \in A$ siendo una contradicción puesto que A es (n,ε)-generador.

Como el diámetro de la bola $B_{d_n}(y,\varepsilon_0) < 2\varepsilon$ para todo $y \in A$ y a su vez $\{B_{d_n}(y,\varepsilon_0)\}_{y\in A}$ cubre a X, entonces,

$$\operatorname{cov}(T,n,2\varepsilon) \leq \operatorname{span}(T,n,\varepsilon)$$

Probemos a otra desigualdad, es similar al caso anterior, se toma **terminar**

P3: Use lo anterior para demostrar que las dos definiciones de entropías dadas en clases coinciden.

Sol: Sea h^* la entropía asociada a los cubrimientos y sea h la entropía asociada a la métrica.

Observemos lo siguiente. Sea $\mathcal{C}$ el valor mínimo tal que $\operatorname{cov}(T, n, \varepsilon) = ||\mathcal{C}$. Observemos que,

$$\mathcal{C} = \{O_i\}_{i \in I}$$

es un cubrimiento de X con diámetro menor a 2ε. Por tanto, $N(\mathcal{C}) = \operatorname{cov}(T, n, 2\varepsilon)$. Para concluir necesitamos el siguiente resultado:

Afirmación: *Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubrimientos abiertos de X tal que diam$\alpha_n \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$. Entonces si $h^*(T) < \infty$, entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} h^*(T, \alpha_n) = h^*(T)$$

Si $h^*(T) = \infty$ se concluye lo mismo.

Dem: Sea γ un cubrimiento abierto tal que $h^*(T, \gamma) > h^*(T) - \varepsilon$. Sea δ el número de Lebesgue para γ, es decir, todo conjunto C con diámetro menor a δ, está contenido en algún elemento de γ.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene que diam$\alpha_n < \delta$ para todo $n \geq N, \gamma < \alpha_n$ y entonces $h^*(T) \geq h^*(T, \alpha_n) > h^*(T) - \varepsilon$. Como ε es arbitrario se tiene lo que queiramos.

Ahora tenemos que,

$$\operatorname{cov}(T, n, 2\varepsilon) \leq \operatorname{span}(T, n, \varepsilon) \leq \operatorname{sep}(T, n, \varepsilon) \leq \operatorname{cov}(T, n, \varepsilon)$$

Luego,

$$\frac{1}{n}\log\operatorname{cov}(T, n, 2\varepsilon) \leq \frac{1}{n}\log\operatorname{span}(T, n, \varepsilon) \leq \frac{1}{n}\log\operatorname{sep}(T, n, \varepsilon) \leq \frac{1}{n}\log\operatorname{cov}(T, n, \varepsilon)$$

Tomando los límites superires y luego $\varepsilon \to 0$ se llega a que,

$$h^*(T) \leq h(T) \leq h^*(T)$$

Por tanto $h^*(T) = h(T)$ como queriamos probar.

P4: Demuestre que si $T : X \to X$ es una isometría $h(T) = 0$.

Sol: Recordemos que una isometría es una transformación tal que,

$$d(Tx, Ty) = d(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. En particular se cumple que,

$$d(T^k x, T^k y) = d(x, y)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Eso implica que $d_n(x,y) = d(x,y)$. Probemos que $\operatorname{sep}(T,n,\varepsilon)$ es constante para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea A de cardinalidad mínima como (n,ε)-separador. Observamos que se cumple que $d_n(x,y) > \varepsilon$ para todo $x,y \in A$, pero por la observación inical se tiene que $d(x,y) > \varepsilon$ para todo $x,y \in A$. Verifiquemos que A es cardinal mínimo para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea B el cardinal mínimo de $\operatorname{sep}(T,m,\varepsilon)$ para cualquier m, luego por definición necesraiamente $|B| \leq |A|$, pero luego por el otro lado se tiene $|A| \leq |B|$, entonces $|A| = |B|$. Probando que $\operatorname{sep}(T,n,\varepsilon)$ es constante para todo n. Digamos que vale $K \in \mathbb{R}$, luego se tiene que,

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\log K}{n} = 0$$

Probando que la entropía es nula.

Ayudantía 7

P1: Para $i \in \{1,2\}$ sean (X_1, d_1) espacios métricos compactos y $T_i : X_i \to X_i$ una transformación continu. Definamos una métrica d sobre $X_1 \times X_2$ por,

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$$

Demuestre que $T_1 \times T_2$ es una transformación continua en $X_1 \times X_2$ y $h_d(T_1 \times T_2) = h_{d_1}(T_1) + h_{d_2}(T_2)$.

Sol: Probemos que $T_1 \times T_2$ es una transformación continua. Sea $R = A \times B$ una bola en $X_1 \times X_2$, entonces,

$$(T_1 \times T_2)^{-1}(R) = \{(x, y) \in X_1 \times X_2 : (T_1 x, T_2 y) \in R\}$$

Entonces $x \in T_1^{-1}A, y \in T_2^{-1}B$, de forma que,

$$(T_1 \times T_2)^{-1}(R) = T_1^{-1}A \times T_2^{-1}B$$

Donde $T_1^{-1}A, T_2^{-1}B$ son abiertos por la continuidad de T_i. Por tanto $T_1 \times T_2$ es continua.

Probemos la igualdad de entropías. Sea E_i conjuntos (n, ε)-generador para $T_i, i = 1, 2$.

Afirmación: *$E_1 \times E_2$ es (n, ε)-generador para $T_1 \times T_2$.*

Dem: Debemos probar que,

$$X_1 \times X_2 = \bigcup_{(x,y)\in E_1\times E_2} B_n((x, y), \varepsilon)$$

Una inclusión es evidente. Sea $(x, y) \in X_1 \times X_2$, ahora como E_1, E_2 son (n, ε)-generadores, se cumple que.

$$X_i = \bigcup_{x_i\in E_i} B_n(x_i, \varepsilon)$$

para $i = 1, 2$. De forma que $x \in B_n(x', \varepsilon)$ y $y \in B_n(y', \varepsilon)$ con $x' \in E_1, y' \in E_2$. Luego,

$$(x, y) \in B_n(x', \varepsilon) \times B_n(y', \varepsilon)$$

terminar

■

Luego se cumple que,

$$|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$$

No necesariamente $E_1 \times E_2$ tiene la cardinalidad mínima al mismo tiempo que E_1, E_2 lo tienen, sin embargo se sigue cumpliendo la siguiente desigualdad,

$$R_n(\varepsilon, T_1 \times T_2) \leq R_n(\varepsilon, R_1) + R_n(\varepsilon, T_2)$$

Luego,

$$R(\varepsilon, T_1 \times T_2) \leq R(\varepsilon, T_1) + R(\varepsilon, T_2)$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ se concluye que la primera desigualdad,

$$h_d(T_1 \times T_2) \leq h_{d_1}(T_1) + h_{d_2}(T_2)$$

Para la otra desigualdad el procedimiento es similar. Sean E_i (n, ε)-separadores para T_i con $i = 1, 2$. Entonces se puede probar que $E_1 \times E_2$ es (n, ε)-separador para $T_1 \times T_2$. De aquí se obtiene,

$$S_n(\varepsilon, T_1) S_n(\varepsilon, T_2) \leq S_n(\varepsilon, T_1 \times T_2)$$

Por lo tanto,

$$h_d(T_1 \times T_2) = h_{d_1}(T_1) + h_{d_2}(T_2)$$

Como queriamos probar.

Nota: No necesariamente se cumple la igualdad de entropias. Si X_1, X_2 son no compactos, esto puede ser una desigualdad, sin embargo, si uno de lo dos espacios métricos, es compacto, entonces la igualdad se cumple.

P2: Considere $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ con la métrica producto, y $\sigma : X \to X$ el shift. Demuestre que $h(\sigma) = \infty$.

Dem: Sea M **falta**. Sea $i = 0, \ldots, M_1$ y definimos,

$$R_i := [i \cdot \varepsilon, (i+1)\varepsilon] \cap [0,1]$$

Si E es un conjunto (n, ε) generador, debe existir al menos un $r \in E$ tal que,

$$r \in R_{i_1} \times \cdots \times R_{i_n}$$

para todo $i_1, \ldots, i_n \in \{0, \ldots, M-1\}$. Por ende,

$$R_n(\varepsilon, \sigma) \geq M^n \geq \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^n$$

Por lo tanto,

$$R(\varepsilon, \sigma) \geq \log M \geq \log\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

Para concluir se toma $\varepsilon \to 0$ y entonces,

$$h_d(\sigma) = \infty$$

P3 (mejorar): El objetivo de este problema será demostrar que para todo $\beta > 1$ existe un sistema dinámico topológico con entropía $\log \beta$.

a) Sea $k = [\beta] + 1$, demuestre que existe $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X := \{0, \dots, k-1\}^{\mathbb{N}}$ tal que,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^{-m}$$

b) Definimos el orden lexicografico en X por $x < y$ si para el natural más pequeño j tal que $x_j \neq y_j$ se tiene que $x_j < y_j$. Demuestre que $T^n a \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $T : X \to X$ es el shift.

c) Considere,

$$X_\beta = \{x \in X : T^n x \leq a, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Notemos que $TX_\beta \subset X_\beta$. Sea θ_n la cantidad de cilindros C_n de largo n tales que $C_n \cap X_\beta \neq \emptyset$. Tomemos $a_0 = 0, \theta_0 = 1$. Demuestre que,

$$\theta_n = 1 + a_0\theta_n + \cdots + a_n\theta_0$$

d) La fórmula anterior se puede rescribir como,

$$\beta^{-n}\theta_n = \beta^{-n} + \beta^{-1}a_1\beta^{n-1}\theta_{n-1} + \cdots + \beta^{-n}a_n\theta_0$$

Un teorema nos dice que $\lim_{n\to\infty} \beta^{-n}\theta_n > 0$. Use esto y una fórmula demostrada en clases para shifts de tipo finito para calcular $h(T|_{X_\beta})$.

Ayudantía 8

Ayudantía 9

P1: Dado la misma lógica de lo construido en clases, tenemos que toda matriz $L \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ con determinante ± 1 define un mapa en el toro. Demuestre que el mapa resultado tiene una cantidad finita de puntos periódicos para cada periódo si y sólo si ningún valor propio de L es una raíz de la unidad.

P2: Demuestre que las órbitas periódicas de cualquier enformorfismo hiperbólico del toro F_L son densos.

P3: Sea $L \in M_{m\times m}(\mathbb{Z})$ con entradas enteras y determinantes ± 1. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ los valores propios de L con multiplicidad. Demuestre que para el atormophismo $F_L : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$,

$$h_{\text{top}}(F_L) \geq \sum_{i:|\lambda_i|>1} \log |\lambda_i|$$

Ayudantía 10

P1: Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto hiperbólico de una variedad M de una función f que contrae. Demuestre que Λ consiste de finitas órbitas periódicas de f.

P2: Sea $\Lambda \subset M$ un conjunto hiperbólico de f.

a) Demuestre que $W^s(x)$ y $W^u(x)$ varián continuamente en $x \in \Lambda$.

b) Use lo anterior para concluir que $\dim W^s(x)$ y $\dim W^u(x)$ son localmente constantes.

c) Demuestre que $\overline{\Lambda}$ es un conjunto hiperbólico de f.

Ayudantía 11

P1: Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomofirsmo que revierte la orientación. Entonces f tiene exactamente puntos fijos.

P2: Para el siguiente ejercicio denotaremos por,

$$E(x) = \{y \in \mathbb{S}^1 : y = \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x), \{n_k\}_k \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \text{ creciente}\} \tag{1}$$

Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ un homeomorfismo que preserva la orientción con número de rotación irracional.

a) Demuestre que $E(x)$ no depende de x.

b) Demuestre que E es todo $\mathbb{S}^1$ o un cantor.