Sébastien Lassalle Licence CC-BY-NC-SA

Fiche méthode: Fonction

1. Trouver l'ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{e^{2x^3 + 2x^2 - 2x + 2}}{\ln(3x^2 - 2)}$. Déterminer son ensemble de définition.

Exemple de rédaction :

Dans cette fonction on a trois fonction respectivement : exp, ln et $\frac{1}{x}$.

Or on sait que la fonction exponentielle est définie sur ${\bf R}$ donc elle ne pose pas de problème.

Cependant, la fonction inverse est définie sur $]-\infty;0[\ \cup\]0;+\infty[$ donc son dénominateur ne doit pas être égal à 0. On résout $ln(3x^2-2)=0$:

$$ln(3x^{2} - 2) = 0$$

$$3x^{2} - 2 = e^{0}$$

$$3x^{2} - 2 = 1$$

$$3x^{2} - 3 = 0$$

$$\Delta = 0^{2} - 4 \times 3 \times (-3)$$

$$\Delta = 36$$

Donc, la fonction $3x^2 - 3$ admet deux racines réelles disctinctes :

$$x_1 = \frac{0 - \sqrt{36}}{2 \times 3} = -1$$
$$x_2 = \frac{0 + \sqrt{36}}{2 \times 3} = 1$$

On a un premier intervalle qui est donc $\mathbb{R}\setminus\{1;-1\}$.

Cependant, la fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$. Donc il faut vérifier que sur l'intervalle précédent, ln est toujours définie.

On étudie de signe de $3x^2-2$. Or $3x^2-2$ est une fonction polynomiale de degré deux, et l'on connait ses racines réelles que l'on a calculé précédemment soit $x_1=-1$ et $x_2=1$. On sait donc que sur l'intervalle $]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\ 3x^2-2$ est de signe du coefficient a qui ici est positif. On peut alors dire que sur $[-1;1],\ 3x^2-2$ est négatif. Ainsi la fonction ln n'étant pas définie sur $]-\infty;0]$ on peut dire que $ln(3x^2-2)$ n'est donc pas définie sur l'intervalle [-1;1].

On en déduit donc que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-\infty;-1[\ \cup\]1;+\infty[$

2. Étudier le sens de variation d'une fonction.

On se propose d'étudier le sens de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$ par

$$\frac{2x^2 - 2x + 2}{3x - 2}$$

On admet que les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition on été déterminé. On note f' la dérivée de f. Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition. Exemple de rédaction :

$$f'(x) = \frac{(4x-2)(3x-2) - (2x^2 - 2x + 2)(3)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{(12x^2 - 8x - 6x + 4) - (6x^2 - 6x + 6)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{12x^2 - 14x + 4 - 6x^2 + 6x - 6}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 8x - 2}{(3x-2)^2}$$

Fiche méthode 1/4

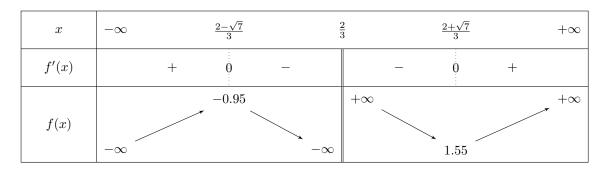
Sébastien Lassalle Licence CC-BY-NC-SA

On résout f'(x) = 0.

$$f'(x) = 0$$
$$\frac{6x^2 - 8x - 2}{(3x - 2)^2} = 0$$
$$6x^2 - 8x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 64 + 48 = 112$$

Donc
$$6x^2 - 8x - 2 = 0$$
 admet deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \frac{8 - \sqrt{112}}{2 \times 6} = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \frac{8 + \sqrt{112}}{2 \times 6} = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$



3. Limite et intépretation graphique

Déterminer les limites de la fonction f et donner une intéprétation graphique.

Exemple de rédaction :

On rappelle que la fonction f est définie sur $]-\infty; \frac{2}{3}[\cup]^{\frac{2}{3}}; +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{3x - 2}$$

Quand x tend vers $-\infty$, la relation $\frac{2x^2-2x+2}{3x-2}$ est indéterminé.

$$\frac{2x^2 - 2x + 2}{3x - 2} = \frac{x(2x - 2 + \frac{2}{x})}{x(3 - \frac{2}{x})} = \frac{2x - 2 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}} = \left(2x - 2 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{1}{3 - \frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2x - 2 = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$$
Par somme
$$\lim_{x \to -\infty} 2x - 2 - \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\begin{vmatrix} \lim_{x \to -\infty} -\frac{2}{x} = 0 \\ \text{Par somme } \lim_{x \to -\infty} 3 - \frac{2}{x} = 3 \end{vmatrix}$$

Par quotient
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{3 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{3}$$

Par produit, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

On utilise la fonction f comme :

$$(2x^2 - 2x + 2) \times \frac{1}{3x - 2}$$

$$\lim_{x \to \frac{2}{x} \to \frac{2}{x}} 3x - 2 = 3 \times \frac{2}{3} - 2 = 0$$
 et $\lim_{x \to 0^{-}} \frac{1}{x} = -\infty$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} 3x - 2 = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

 $\lim_{x \to \frac{2}{3}^{-}} 3x - 2 = 3 \times \frac{2}{3} - 2 = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^{-}} \frac{1}{x} = -\infty$ $\text{Par produit des limites, } \lim_{x \to \frac{2}{3}^{-}} f(x) = -\infty$ $\text{Par produit, } \lim_{x \to \frac{2}{3}^{+}} f(x) = +\infty$

Par produit,
$$\lim_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x) = +\infty$$

On utilise la forme

$$f(x) = \left(2x - 2 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{1}{3 - \frac{2}{x}}$$

Fiche méthode 2/4 Sébastien Lassalle Licence CC-BY-NC-SA

$$\lim_{x \to +\infty} 2x - 2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\operatorname{Par somme } \lim_{x \to +\infty} 2x - 2 - \frac{2}{x} = +\infty$$

$$\operatorname{Par quotient } \lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{2}{x} = 3$$

$$\operatorname{Par quotient } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{3}$$
 On conclut que par produit des limites,
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

On peut en déduire que la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{2}{3}$

4. Étudier la convexité d'une fonction

On admet que la fonction g admet comme fonction dérivée la fonction définie $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ par $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ Étudier la convexité de g et préciser les éventuels points d'inflexion.

Exemple de rédaction :

On appelle g'' la dérivée seconde de g définie sur l'ensemble de définition de g' par :

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

On résout f''(x) = 0.

$$f''(x) = 0$$

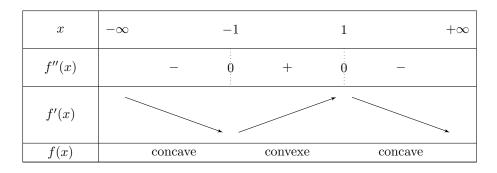
$$\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$2(1-x^2) = 0$$

$$1-x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

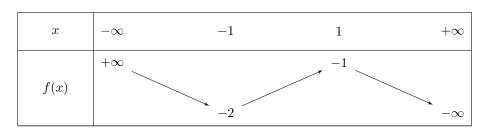
$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$



Les points d'inflexion sont en x = -1 et x = 1.

5. Théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution notée α donc on précisera un encadrement à 10^{-2} près. On dispose du tableau de variation de f:



Fiche méthode 3/4

Sébastien Lassalle Licence CC-BY-NC-SA

Exemple de rédaction :

D'après le tableau de variations, on remarque que sur l'intervalle $[-1; +\infty[, f(x) \in]-\infty; -1]$ donc f(x) = 0 n'admet pas de solution sur $[-1; +\infty[$.

La fonction f est continue car dérivable sur \mathbf{R} . De plus sur l'intervalle $]-\infty;-1], f$ est strictement décroissante et vérifie l'inéquation $\lim_{x \to -\infty} f(x) < 0 < f(-1)$. Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha)=\alpha$. À l'aide de la calculatrice on trouve un encadrement à 10^{-2} près :

$$-52,24 < \alpha < -52,23$$

4/4Fiche méthode