

Fiche méthode : Géométrie dans l'espace

Démontrer que 4 points sont coplanaires

Exemple de rédaction :

On veut montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires. Or, ces points sont coplanaires si, et seulement si, il existe un couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \ \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$. On rappelle les coordonnées des vecteurs :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}-2 & = -3x - y\\ 2 & = -x - y\\ -2 & = -x\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-2 & = -6 - y\\ y & = 4\\ x & = 2\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y & = 4\\ y & = 4\\ x & = 2\end{cases}$$

Le système d'équations admet bien un couple (x, y) solution donc les points A, B, C et D sont coplanaires.

Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires et que trois points sont alignés

Exemple de rédaction :

On veut montrer que les points A, B et C sont alignés. Ce problème revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Or, on sait que ces deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. On rappelle les coordonnées de ces vecteurs :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-8\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\9\\-24\end{pmatrix}$
On a donc :

$$\begin{pmatrix}2\\3\\-8\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}6\\9\\-24\end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}2 & = 6k\\ 3 & = 9k\\ -8 & = -24k\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}k & = \frac{1}{3}\\ k & = \frac{1}{3}\\ k & = \frac{1}{3}\end{cases}$$

Le système d'équations admet bien une solution donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Puisque la propriété de départ est vérifiée, on peut en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Donner une équation cartésienne d'un plan

On admet que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC). Les coordonnées du point A sont $(2;4;\frac{3}{8})$

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exemple de rédaction :

Une équation cartésienne de plan s'exprime de la forme,

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec les coefficients a, b, c les coordonnées d'un vecteur normal au plan. Or, on sait que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC). Ainsi on a :

$$(ABC) : -2x + y + d = 0$$

On sait que tout point du plan (ABC) vérifie toute équation cartésienne du plan (ABC). Alors, on peu trouver la valeur du coefficient d en remplaçant par les coordonnées du point A qui appartient au plan (ABC). Cela nous donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned}-2\times 2 - 4 + d &= 0\\ -8 + d &= 0\\ d &= 8\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(ABC) : -2x + y + 8 = 0$$

Donner une représentation paramétrique d'une droite

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$. Un point de la droite (d) est le point A de coordonnées $(4,-2,-1)$.

Exemple de rédaction :

Une représentation paramétrique de droite s'obtient avec un vecteur directeur de cette droite et un point appartenant à cette droite. On a donc :

$$(d) : \quad \begin{cases}x = 4 - 2t\\ y = -2 + 2t\\ z = -1 - 2t\end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

Démontrer que deux vecteurs sont orthogonaux

Exemple de rédaction :

Deux vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est égal à 0. On rappelle les coordonnées des deux vecteurs :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$

On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= -2\times(-3) + 2\times(-1) + (-2)\times(-1)\\ &= 6 - 2 + 2\\ &= 6\end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux.

Démontrer qu'une doite est orthogonale à un plan

On admet que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de la droite (d).

Exemple de rédaction :

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (ABC) si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan. Autrement dit, le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{n}$ et deux vecteurs non-colinéaires du plan (ABC) doit être égal à 0.
Or, on sait que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ils forment une base du plan (ABC) et appartiennent à ce plan.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = 0$
Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n} = 0$
Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

On conclut donc que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au plan (ABC).
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant un vecteur directeur de la droite (d), on en déduit que la droite (d) est aussi orthogonale au plan (ABC).

Démontrer que deux plans sont parallèles

Exemple de rédaction :

Deux plans sont parallèles si, et seulement si, un vecteur normal au premier plan et aussi normal au deuxième plan. (Cela revient donc à la rédaction de l'objectif précédent : Démontrer qu'une doite est orthogonale à un plan)

Démontrer qu'un point est le projeté orthogonal d'un autre point sur un plan

On a une droite (Δ) qui passe par le point K et qui est orthogonale au plan (ABD) et dont on connait une représentation paramétrique qui est la suivante :

$$(\Delta) : \quad \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 14 + 10t \\ z = 14 + 13t \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}$$

On a le plan (ABD) dont on connait un équation cartésienne qui est la suivante :

$$-2x + 10y + 13z - 55 = 0$$

Le but est ici, de trouver les coordonnées du projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD). On notera ce point I.

Exemple de rédaction :

On sait que la droite Δ est orthogonale au plan (ABD). Or on sait que le projeté orthogonal d'une droite sur un plan est l'intersection entre la droite qui est perpendiculaire au plan et qui passe par le point dont on veut connaitre son projeté orthogonal. Mais on sait que la droite (Δ) passe par le point K et est orthogonale au plan (ABD). Il vient alors que le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD) est le point d'intersection I entre la droite (Δ) et le plan (ABD).
Il vient alors que le point I, qui appartient à la fois au plan (ABD) et à la droite (Δ), doit vérifier une équation paramétrique de la doite (Δ) et une équation cartésienne du plan (ABD). Cela se traduit par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 14 + 10t \\ z = 14 + 13t \\ -2x + 10y + 13z - 55 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 14 + 10t \\ z = 14 + 13t \\ -2 \times (-3 - 2t) + 10 \times (14 + 10t) + 13 \times (14 + 14t) - 55 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 14 + 10t \\ z = 14 + 13t \\ 6 + 4t + 140 + 100t + 182 + 169t - 55 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 14 + 10t \\ z = 14 + 13t \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3 - 2 \times (-1) = -1 \\ y = 14 + 10 \times (-1) = 4 \\ z = 14 + 13 \times (-1) = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

On peut donc conclure que les coordonnées du point I sont $(-1; 4; 1)$.

Donner la distance entre un point et un plan ou entre un point une droite

Exemple de rédaction :

Calculer la distance entre un point et une droite revient à trouver la longueur du segment qui passe par le point dont on veut calculer la distance et qui est perpendiculaire à cette droite. On peut alors trouver le projeté orthogonal et calculer la longueur de ce segment (mais cela revient au même raisonnement que : Démontrer qu'un point est le projeté orthogonal d'un autre point sur un plan.)

Calculer l'aire d'un triangle

Exemple de rédaction :

On sait que l'aire d'un triangle se calcule par la relation :

$$\frac{b \times h}{2}$$

avec b une longueur quelconque du triangle et h la longueur de la hauteur associée de la base choisie.
Si l'on prend comme base $[AB]$, la hauteur associée est donc la distance entre le point C et la droite (AB).

Calculer le volume d'un tétraèdre

Exemple de rédaction :

On sait que le volume d'un tétraèdre se calcule par la relation :

$$\frac{1}{3} \times b \times h$$

avec b l'aire d'une face quelconque du tétraèdre et h la longueur de la hauteur associée de la base choisie.
Si l'on prend comme base le triangle ABC, la hauteur associée est donc la distance entre D et le projeté orthogonal du point D sur la plan (ABC) ou simplement la distance entre D et le plan (ABC).