

Fiche méthode : Suites

1. Démonstration par récurrence

- Pour démontrer une propriété par récurrence, on commence par donner la propriété que l'on souhaite vérifier. Exemple :

$$P_n : U_n > 0$$

- On procède ensuite à l'étape dite "**initialisation**" :
  - Propriété d'égalité : $P_n : U_n = \dfrac{1}{n+1}$

    Initialisation :

    D'une part, $U_1 = \dfrac{1}{2}$. D'autre part, $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} = U_1$

    Ainsi P_1 vraie.

  - Propriété d'inégalité : $P_n : 0 < U_n < U_{n+1} \leq 1$

    Initialisation :

    On a $U_1 = \dfrac{1}{2}$ et $U_2 = \dfrac{3}{4}$

    On a donc $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4} \leq 1 \Leftrightarrow 0 < U_1 < U_2 \leq 1$

    Ainsi P_1 vraie.

- On poursuit avec l'étape intitulé "**hérédité**" :
  - Propriété d'égalité :

    Hérédité :

    On suppose qu'il existe un rang n fixé tel que : $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. (On ne fait que recopier la propriété !)

    On veut montrer que $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$. (Pour trouver U_{n+2} on a juste à ajouter 1 à n donc on fait la même chose dans la formule : $U_{n+1} = U_{(n)+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$)

    Or on sait que $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n+1}$. (Ici on recopie la suite que l'on dispose)

    $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n+1}$ (On réécrit ce que l'on sait)

    $U_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1}$ (On remplace U_n par notre supposition $(\frac{n}{n+1})$)

    $U_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}}$ (On met au même dénominateur)

    $U_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1+n+1}{n+1}}$

    $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2}$ (Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse)

    $U_{n+1} = \dfrac{(n+1)}{(n+1)(n+2)}$

    $U_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$

    P_n vraie implique P_{n+1} vraie. Par hérédité, P_n vraie $\forall n \in \mathbf{N}$. (Simple conclusion)

  - Propriété d'inégalité :

Dans cet exemple, on se propose d'étudier la suite (U_n) définie $\forall n \in \mathbf{N}$ et $n \geq 1$ par $\dfrac{U_n + 1}{2}$ avec comme premier terme $U_1 = \frac{1}{2}$.
On souhaite montrer que la suite (U_n) est minorée par son premier terme U_1. Cela se traduit par la propriété suivante : $P_n : U_n \geq 0,5$.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un rang n fixé tel que : $U_n \geq 0,5$.
On veut montrer que $U_{n+1} \geq 0,5$.

$U_n \geq \frac{1}{2}$ (Le but est de retrouver la formule de U_{n+1})

$U_n + 1 \geq \frac{1}{2} + 1$

$\dfrac{U_n}{2} \geq \dfrac{\frac{3}{2}}{2}$

$U_{n+1} \geq \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$

$U_{n+1} \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$

P_n vraie implique P_{n+1} vraie. Par hérédité, P_n vraie $\forall n \in \mathbf{N}$.

– Propriété d'inégalité avec utilisation de fonction associée :
Dans cet exemple, on étudie la suite précédente avec une propriété cette fois-ci plus complète.
On rappelle que la suite (U_n) est définie $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ par $\dfrac{U_n + 1}{2}$.
On a la propriété suivante : $P_n : 0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$.
Avec ceci on peut établir une fonction associée à la suite. (il suffit de replacer U_n par x)
On aura $f(x) = \dfrac{x + 1}{2}$. On admet que cette fonction est croissante sur $[0; 1]$ (Normalement cela doit être montré mais au vu de sa simplicité, on ne va pas perdre de temps ici !)

Hérédité :

On suppose qu'il existe un rang n fixé tel que : $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$.
La fonction f est croissante sur $[0; 1]$ donc $f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(1)$.
$f(0) = \frac{1}{2} > 0$, $f(U_n) = U_{n+1}$, $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$ et $f(1) = 1$
On en déduit que $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$.

P_n vraie implique P_{n+1} vraie. Par hérédité, P_n vraie $\forall n \in \mathbf{N}$.

On notera que cette propriété nous apporte plusieurs choses.
On sait que la suite (U_n) est minorée par 0 et majorée par 1.
On en conclu que comme $U_n \leq U_{n+1}$, la suite (U_n) est croissante.

- Exemple d'exercice et correction :

1. Soit la suite (U_n) définie $\forall n \in \mathbf{N}$ par $U_{n+1} = 0,7 \times U_n + 1,8$ et de premier terme $U_0 = 2$. Démontrer par récurrence que la suite est croissante et majorée par 6.

Correction rédigée :

On note P_n la propriété suivante : $U_n \leq U_{n+1} < 6$.
Initialisation :
$U_0 = 2$ et $U_1 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2$.
On a donc $U_0 \leq U_1 < 6$.
Ainsi, P_0 vraie.

Hérédité :

On suppose qu'il existe un rang n fixé tel que : $U_n \leq U_{n+1} < 6$
On veut montrer que $U_{n+1} \leq U_{n+2} < 6$.

$$\begin{array}{ccccc} U_n & \leq & U_{n+1} & < & 6 \\ U_n \times 0,7 & \leq & U_{n+1} \times 0,7 & < & 6 \times 0,7 \\ 0,7U_n & \leq & 0,7U_{n+1} & < & 4,2 \\ 0,7U_n & \leq & 0,7U_{n+1} + 1,8 & < & 4,2+1,8 \\ U_{n+1} & \leq & U_{n+2} & < & 6 \end{array}$$

On a bien montré que $U_{n+1} \leq U_{n+2} < 6$. Donc $P_n + 1$ vraie implique P_{n+1} vraie. Ainsi, par hérédité, P_n vraie $\forall n \in \mathbf{N}$.

2. Montrer la monotonie d'une suite

- Méthode générale
  On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
  - Suite explicite
    Soit la suite (U_n) définie $\forall n \in \mathbf{N}$ par $\frac{1}{n+1}$. On peut en déduire que $U_{n+1} = \frac{1}{n+2}$

    Rédaction possible :
    On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{n+1-n-2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n^2+n+2n+2} \\ &= \frac{-1}{n^2+3n+2} \end{aligned}$$

Sachant que $n \in \mathbf{N}$, on sait que $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} -1 &< 0 \\ -1 \times \frac{1}{n^2+3n+2} &< 0 \\ \frac{-1}{n^2+3n+2} &< 0 \\ U_{n+1} - U_n &< 0 \end{aligned}$$

On n'a pas changé de sens dans l'inégalité car la fonction $\frac{1}{n^2+3n+2}$ est croissante sur $\mathbf{N}$. On peut tout de même le montrer.
Soit la fonction f définie et dérivable $\forall x \in \mathbf{N}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$.
Soit f' la fonction dérivée de f définie sur $\mathbf{N}$ par $f'(x) = \dfrac{-(-1)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} = \dfrac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2}$.
On résout $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{2x+3}{(x^2+3x+2)^2} &= 0 \\ 2x+3 &= 0 \\ x &= \frac{-3}{2} \notin \mathbf{N} \end{aligned}$$

Sachant que $f'(0) = 0,75 > 0$ et que sur $\mathbf{N}$, f' est toujours de même signe. On en déduit que $\forall x \in \mathbf{N} f'$ est positive ce qui implique $\forall x \in \mathbf{N} f$ est toujours croissante.
Ainsi la différence entre les termes de la suite est inférieure à 0. On peut donc en conclure que la suite est strictement décroissante.

– Suite définie par réccurence :
Dans ce cas, on aura besoin du signe des termes de la suite.
Soit la suite (U_n) définie $\forall n \in \mathbf{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$ avec $U_0 = \frac{1}{2}$. On admet que les termes de la suite (U_n) sont toujours strictement positifs.
On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{U_n}{U_n + 1} - U_n \\ &= \frac{U_n}{U_n + 1} - \frac{U_n(U_n + 1)}{U_n + 1} \\ &= \frac{U_n - U_n(U_n + 1)}{U_n + 1} \\ &= \frac{-(U_n)^2 - U_n + U_n}{U_n + 1} \\ &= \frac{-(U_n)^2}{U_n + 1} \end{aligned}$$

On sait que $U_n > 0$. On peut donc en conclure que $-(U_n)^2$ est strictement négatif. De même U_n+1 est donc strictement positif. Ainsi $\frac{-(U_n)^2}{U_n+1}$ admet un numérateur négatif et un dénominateur positif, on en déduit que $\frac{-(U_n)^2}{U_n+1}$ est négatif. Autrement dit : $U_{n+1} - U_n < 0$, cela signifie que la différence entre les termes est négative donc la suite (U_n) est décroissante.

- Méthode pour les suites explicites
<u>Théorème</u> : Si $U_n = f(n)$ et si f est monotone sur $[U_0; +\infty[$ alors, la suite (U_n) admet la même monotonie que f.
La méthode n'admet pas de rédation assez compliqué alors, pas d'exemple ici !

- Méthode par récurrence
On peut montrer qu'une suite est croissante ou décroissante à l'aide d'une conjecture que l'on démontrera dans un raisonnement par récurrence.

Si la suite semble décroissante $P_n : U_n > U_{n+1}$ ou $P_n : U_n \geq U_{n+1}$.
Si la suite semble croissante : $P_n : U_n < U_{n+1}$ ou $P_n : U_n \leq U_{n+1}$.
Puis cf. partie 1.

3. <u>Démontrer qu'une suite converge</u>
<u>Lorsque l'on doit montrer cela</u> on doit connaitre la monotonie de la suite étudiée et par quelle valeur elle est minorée ou majorée.
<u>Exemples :</u>

- On sait $U_n < U_{n+1} < 1$, on en déduit que (U_n) est sctrictement croissante car $U_n < U_{n+1}$ et majorée par 1 car $U_{n+1} < 1$ donc $U_n < 1$. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (U_n) converge vers une limite finie notée l.

- On sait $0 > U_n \geq U_{n+1}$, on en déduit que (U_n) est décroissante car $U_n \geq U_{n+1}$ et minorée par 0 car $0 > U_n$. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (U_n) converge vers une limite finie notée l.

4. <u>Déterminer la limite d'une suite</u>

- Suite géométrique
On distungue deux limites possibles, soit 0 soit $+\infty$.
<u>Exemple de rédaction :</u>

- La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2} < 1$. On en déduit que :
$$\lim_{n\to\infty} U_n = 0$$
- La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 8 > 1$. On en déduit que :
$$\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$$

- Limites sans théorème
ATTENTION : Un infini n'est pas défini alors sa grandeur non plus ! On ne peut donc pas écrire $+\infty = +\infty$ car cette propriété n'est pas toujours vraie ! Par exemple, n croit moins vite que n^2 pourtant ils croient tous les deux vers $+\infty$.

On s'intéresse aux limites que l'on ne peut pas déterminer directement.

(a) $U_n = n^2 + \sqrt{n} - 1$
$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$$
Donc par somme,
$$\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$$

(b) $V_n = -\dfrac{2}{n^3} + \dfrac{3}{\sqrt{n}} + 4$
$\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ Donc $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{2}{n^3} = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ Donc $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0$
Donc par somme,
$$\lim_{n\to\infty} U_n = 4$$

(c) $W_n = 3n^2 - 2n + 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} 3n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} -3n = -\infty$
Il s'agit donc ici d'une forme indéterminée. On factorise pour déterminer la limite de (W_n).
$W_n = n(3n - 2 + \frac{1}{n})$
$\lim\limits_{n\to\infty} 3n - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Par somme, $\lim\limits_{n\to\infty} 3n - 2 + \frac{1}{n} = +\infty$
Par produit : $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = +\infty$

- Limites avec théorème de comparaison et des gendarmes
  - On sait que $W_n < U_n < 1$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = 1$.
  Ainsi : $\lim\limits_{n\to\infty} W_n < \lim\limits_{n\to\infty} U_n < 1$, Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 1$.
  - On sait que $W_n < U_n$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = +\infty$.
  Ainsi : $\lim\limits_{n\to\infty} W_n < \lim\limits_{n\to\infty} U_n$, Donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = +\infty$.

- Théorème du point fixe
Pour cette méthode on doit disposer d'une suite définie par récurrence pour construire une fonction associée et avoir $f(U_n) = U_{n+1}$.
L'exemple rédigé ci-dessous dispose des informations suivantes : $U_{n+1} = 1,9U_n(1 - U_n)$ et $f(x) = 1,9x(1 - x)$. On sait également que la suite (U_n) est croissante.

Exemple de rédaction :
On appel l la limite de la suite (U_n).
Comme pour tout n, $f(U_n) = U_{n+1}$ et que la fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc continue sur $\mathbf{R}$, la limite l vérifie $f(l) = l$.
On résout l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ 1,9x(1-x) &= x \\ 1,9x(1-x) - x &= 0 \\ 1,9x - 1,9x^2 - x &= 0 \\ -1,9x^2 + 0,9x &= 0 \\ x(1,9x + 0,9) &= 0 \\ x = 0 \text{ ou } x &= \frac{0,9}{1,9} \end{aligned}$$

Mais comme la suite (U_n) est croissante $l \geq u_0$. Or $u_0 > 0$ donc 0 ne peut pas être le limite de la suite (U_n). En revanche la deuxième solution $\frac{0,9}{1,9}$ est bien supérieur à u_0. On peut donc en conclure que $l = \frac{0,9}{1,9}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \frac{0,9}{1,9}$

5. Montrer qu'une suite est géométrique et trouver la suite explicite associée

Dans l'exemple ci-dessous on dispose des informations suivantes : $V_n = 6 - U_n$ et $U_{n+1} = 0,7U_n + 1,8$ (avec $U_0 = 2$).
Nous devons montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $0,7$ et nous devons déterminer une expression de U_n en fonction de n.

Exemple de rédaction :
On veut montrer que $V_{n+1} = V_n \times k$.
Or, on sait que $V_n = 6 - U_n$, on en déduit que $V_{n+1} = 6 - U_{n+1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 6 - U_{n+1} \\ &= 6 - 0,7U_n + 1,8 \\ &= -0,7U_n + 4,2 \\ &= 0,7(6 - U_n) \\ &= 0,7V_n \end{aligned}$$

On a bien montré que $V_{n+1} = V_n \times k$. On en déduit que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme $V_0 = -U_0 + 6 = 6 - 2 = 4$.
Désormais, on peut exprimer V_n en fonction de n. On a :
$V_n = V_0 \times q^n = 4 \times 0,7^n$

On veut déterminer une expression de la suite (U_n) en fonction de n. On sait que :

$$V_n = 6 - U_n$$

On a donc :

$$\begin{aligned} V_n &= 6 - U_n \\ 4 \times 0,7^n &= 6 - U_n \\ -U_n &= 4 \times 0,7 - 6 \\ U_n &= -4 \times 0,7 + 6 \end{aligned}$$