

Fiche méthode : Fonction

1. <u>Trouver l'ensemble de définition d'une fonction</u>

   Soit f une fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x^3+2x^2-2x+2}}{ln(3x^2-2)}$. Déterminer son ensemble de définition.

   <u>Exemple de rédaction :</u>

   Dans cette fonction on a trois fonction respectivement : exp, ln et $\frac{1}{x}$.
   Or on sait que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbf{R}$ donc elle ne pose pas de problème.
   Cependant, la fonction inverse est définie sur $]-\infty;0[\ \cup\ ]0;+\infty[$ donc son dénominateur ne doit pas être égal à 0. On résout $ln(3x^2-2)=0$:

$$\begin{aligned} ln(3x^2-2) &= 0 \\ 3x^2-2 &= e^0 \\ 3x^2-2 &= 1 \\ 3x^2-3 &= 0 \\ \Delta = 0^2 - 4\times 3\times(-3) \\ \Delta &= 36 \end{aligned}$$

   Donc, la fonction $3x^2-3$ admet deux racines réelles disctinctes :

$$x_1 = \frac{0-\sqrt{36}}{2\times 3} = -1$$

$$x_2 = \frac{0+\sqrt{36}}{2\times 3} = 1$$

   On a un premier intervalle qui est donc $\mathbf{R}\backslash\{1;-1\}$.
   Cependant, la fonction logarithme népérien est définie sur $]0;+\infty[$. Donc il faut vérifier que sur l'intervalle précédent, ln est toujours définie.
   On étudie de signe de $3x^2-2$. Or $3x^2-2$ est une fonction polynomiale de degré deux, et l'on connait ses racines réelles que l'on a calculé précédemment soit $x_1=-1$ et $x_2=1$. On sait donc que sur l'intervalle $]-\infty;-1]\ \cup\ [1;+\infty[$ $3x^2-2$ est de signe du coefficient a qui ici est positif. On peut alors dire que sur $[-1;1]$, $3x^2-2$ est négatif. Ainsi la fonction ln n'étant pas définie sur $]-\infty;0]$ on peut dire que $ln(3x^2-2)$ n'est donc pas définie sur l'intervalle $[-1;1]$.

   On en déduit donc que la fonction f est définie sur l'intervalle $\boxed{]-\infty;-1[\ \cup\ ]1;+\infty[}$

2. <u>Étudier le sens de variation d'une fonction</u>.

   On se propose d'étudier le sens de variation d'une fonction f définie sur $\mathbf{R}\backslash\{\frac{2}{3}\}$ par

$$\frac{2x^2-2x+2}{3x-2}$$

   On admet que les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition on été déterminé. On note f' la dérivée de f. Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

   <u>Exemple de rédaction :</u>

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x-2)(3x-2)-(2x^2-2x+2)(3)}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{(12x^2-8x-6x+4)-(6x^2-6x+6)}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{12x^2-14x+4-6x^2+6x-6}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{6x^2-8x-2}{(3x-2)^2} \end{aligned}$$

On résout $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{6x^2 - 8x - 2}{(3x-2)^2} &= 0 \\ 6x^2 - 8x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 64 + 48 = 112$$

Donc $6x^2 - 8x - 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{8 - \sqrt{112}}{2 \times 6} = \dfrac{2 - \sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{8 + \sqrt{112}}{2 \times 6} = \dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{7}}{3}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-0.95	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1.55	↗	$+\infty$

3. Limite et intépretation graphique

   Déterminer les limites de la fonction f et donner une intéprétation graphique.

   Exemple de rédaction :
   On rappelle que la fonction f est définie sur $]-\infty; \frac{2}{3}[\ \cup\ ]\frac{2}{3}; +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2}{3x - 2}$$

Quand x tend vers $-\infty$, la relation $\frac{2x^2-2x+2}{3x-2}$ est indéterminé.
Or

$$\frac{2x^2 - 2x + 2}{3x - 2} = \frac{x(2x - 2 + \frac{2}{x})}{x(3 - \frac{2}{x})} = \frac{2x - 2 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}} = \left(2x - 2 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{1}{3 - \frac{2}{x}}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$
Par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 2 - \frac{2}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{2}{x} = 0$
Par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 - \frac{2}{x} = 3$

Par quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{3 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{3}$

Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

On utilise la fonction f comme :

$$(2x^2 - 2x + 2) \times \frac{1}{3x - 2}$$

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^-} 3x - 2 = 3 \times \frac{2}{3} - 2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
Par produit des limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^-} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} 3x - 2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x) = +\infty}$

On utilise la forme

$$f(x) = \left(2x - 2 - \frac{2}{x}\right) \times \frac{1}{3 - \frac{2}{x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}=0$
Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2-\frac{2}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x}=0$
Par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\frac{2}{x}=3$

Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3-\frac{2}{x}}=\frac{1}{3}$

On conclut que par produit des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

On peut en déduire que la fonction f admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x=\frac{2}{3}}$.

4. Étudier la convexité d'une fonction

On admet que la fonction g admet comme fonction dérivée la fonction définie $\mathbf{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$ par $g'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$
Étudier la convexité de g et préciser les éventuels points d'inflexion.

Exemple de rédaction :

On appelle g'' la dérivée seconde de g définie sur l'ensemble de définition de g' par :

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

On résout $f''(x)=0$.

$$\begin{aligned} f''(x)&=0\\ \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}&=0\\ 2(1-x^2)&=0\\ 1-x^2&=0\\ x^2&=1\\ x=1 \text{ ou } x&=-1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
$f(x)$		concave		convexe		concave	

Les points d'inflexion sont en $x=-1$ et $x=1$.

5. Théorème des valeurs intermédiaires

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α donc on précisera un encadrement à 10^{-2} près. On dispose du tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Exemple de rédaction :

D'après le tableau de variations, on remarque que sur l'intervalle $[-1;+\infty[$, $f(x) \in \ ]-\infty;-1]$ donc $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[-1;+\infty[$.
La fonction f est continue car dérivable sur $\mathbf{R}$. De plus sur l'intervalle $]-\infty;-1]$, f est strictement décroissante et vérifie l'inéquation $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0 < f(-1)$. Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α tel que $f(\alpha)=\alpha$.
À l'aide de la calculatrice on trouve un encadrement à 10^{-2} près :

$$-52,24 < \alpha < -52,23$$