Hogyan mozog a Föld a Nap körül?
Differenciálegyenletek számítógépes megoldása középiskolásoknak

Sebestyén Márton
Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium

Pályi András
Elméleti Fizika Tanszék, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

(Dated: June 7, 2021)

CONTENTS

I. BEVEZETÉS

Ebben a rövid jegyzetben bemutatjuk, hogy hogyan lehet egyszerű mechanika feladatokat számítógéppel megoldani. Itt azt a konkrét célt tűzzük ki, hogy néhány lépésben eljussunk a bolygómozgást leíró mozgásegyenletek megoldásáig, azaz leírjuk például azt, hogy hogyan mozog a Föld a Nap körül. A jegyzet hasznos lehet a fizika és/vagy a differenciálegyenletek és/vagy a programozás iránt érdeklődő középiskolások vagy egyetemisták számára.

II. A LEGEGYSZERŰBB PÉLDA: EGY ELSŐRENDŰ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET

Először egy olyan feladatot veszünk, ami nem kapcsolódik konkrét mozgáshoz, de vele példát tudunk mutatni egy egyszerű *differenciálegyenlet*re, és az annak *diszkretizációjá*val kapott *differenciaegyenlet*re. Ez a diszkretizáció az az eszköz, amit a későbbiekben például a Föld Nap körüli mozgásának leírásakor is használni fogunk.

Tekintsünk egy nagyon egyszerű elsőrendű differenciálegyenletet:

$$y'(t) = 3ct. \tag{1}$$

Bár ehhez az egyenlethez nem kapcsolunk konkrét mechanikai rendszert, a fizikai alkalmazást szem előtt tartva gondoljunk úgy y-ra, mint egy egydimenzióban mozgó pontszerű test (tömegpont) helyzetét megadó koordinátára, azaz mértékegysége legyen méter (m). Ebben a képben t változó jelöli az időt, azaz mértékegysége másodperc (s). Ezekből következik, hogy a c konstans mértékegysége $\mathrm{m/s}^2$.

Tegyük fel, hogy ismert a tömegpont pozíciója, $y_0 = y(t = 0)$, a $t = 0$ időpontban. Kérdés, hogyan változik ez a pozíció az idő függvényeként, $y(t) =?$

Az (1) egyenlet bal oldalán szereplő deriváltat közelíthetjük egy kis Δt időlépést választva:

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = 3ct. \tag{2}$$

Átrendezve az egyenletet, fejezzük ki a függvény későbbi értékét a korábbi értékével:

$$y(t + \Delta t) = 3ct\Delta t + y(t) \tag{3}$$

Ebből az egyenletből már látszik, hogy hogyan lehet számítógéppel (*numerikusan*) közelítőleg kiértékelni a tömegpont pozícióját a Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$, ... időpontokban.

A számítási eljárást bemutatjuk a következő konkrét példán. Legyen $c = 1\mathrm{m/s}^2$, és $y_0 = 4$ m. Rajzoljuk ki a tömegpont pozíciójának időfüggését a $\Delta t = 0.01$ időlépés használatával. Hasonlítsuk össze az így kapott görbét, és az egzaktul, zárt alakban felírt megoldást, ami ilyen alakú:

$$y(t) = y_0 + \frac{3}{2}ct^2 \tag{4}$$

III. SZABADESÉS

Az előző szakaszban egy elsőrendű közönséges lineáris differenciálegyenletet vizsgáltunk. Most egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet következik, ami a testek szabadesését írja le.

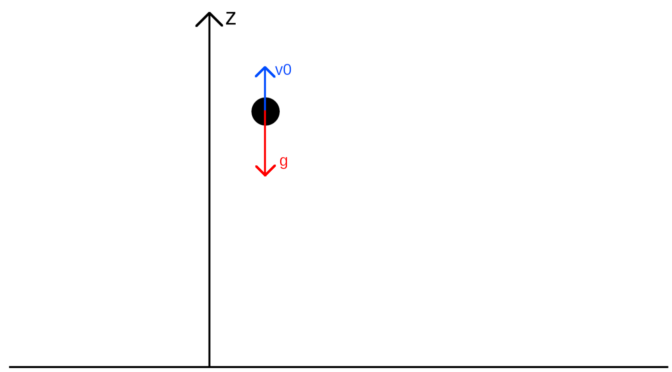

FIG. 1. Szabadesés v_0 kezdősebességgel, z_0 kezdeti magasságból.

A szabadesés problémáját és a kezdeti feltételeket a FIG. 1. ábrán mutatjuk be. Függőleges irányban áll a z tengely, felfelé irányítva. A mozgásegyenlet nem más, mint Newton II. törvénye:

$$m\ddot{z}(t) = -mg, \tag{5}$$

ahol m a test tömege, és g a nehézségi gyorsulás. A mozgás leírásához meg kell adni két kezdeti feltételt: kezdeti pozíció, $z_0 = z(t=0)$, és kezdeti sebesség, $v_0 = \dot{z}(t=0)$. Ezek ismeretében a feladat általában a mozgás leírása, azaz a pozíció és a sebesség időbeli változásának kiszámítása, $z(t) =?$ és $v(t) =?$. Ennek a problémának az egzakt megoldása természetesen jól ismert, így ezzel az ismert megoldással össze tudjuk majd vetni a numerikus megoldásunkat, így igazolva a numerikus módszer helyességét.

A számítógépes megoldáshoz szükségünk van a második derivált differenciál-közelítésére. Ennek egy lehetséges felírása a következőképpen adható meg.

Az első derivált a $t + \Delta t/2$ helyen közelítőleg kifejezhető így:

$$\dot{z}(t + \Delta t/2) \approx \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \tag{6}$$

Másrészt, az első derivált a $t - \Delta t/2$ helyen közelítőleg kifejezhető így:

$$\dot{z}(t - \Delta t/2) \approx \frac{z(t) - z(t-\Delta t)}{\Delta t} \tag{7}$$

A második derivált közelítőleg kifejezhető az első deriválttal:

$$\ddot{z}(t) \approx \frac{\dot{z}(t+\Delta t/2) - \dot{z}(t-\Delta t/2)}{\Delta t} \tag{8}$$

Mindezekből következik, hogy a második derivált közelítőleg kifejezhető így:

$$\ddot{z}(t) \approx \frac{\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t} - \frac{z(t)-z(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t} \tag{9}$$

Tehát a fenti mozgásegyenlet differenciaegyenlet formájában így írható fel:

$$m\frac{\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}-\frac{z(t)-z(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}=-mg. \tag{10}$$

Ennek átrendezésével pedig kapjuk a következő formulát, amit már közvetlenül használhatunk a számítógépes programunkban: ha ismerjük a pozíciót a $t-\Delta t$ időpontban, és a t időpontban, akkor a $t+\Delta t$ időpontban ez lesz a pozíció:

$$z(t+\Delta t)=-g\Delta t^2+2z(t)-z(t-\Delta t). \tag{11}$$

A kezdeti feltételek közül a z_0 kezdőpozíció adja a $z(t=0)$ értéket, míg a v_0 kezdősebességből megkaphatjuk az első időlépés utáni pozíciót, $z(\Delta t)=z_0+v_0\Delta t$. Ezt a két értéket beírva (11) jobb oldalába, a bal oldal megadja $z(2\Delta t)$ értékét, majd ezt a módszert iterálva az összes későbbi $n\Delta t$ időpontban is kiszámíthatjuk a pozíció értékét. Ha a sebességértékekre is szükségünk van, akkor azt például a

$$v(n\Delta t)\approx\frac{z((n+1)\Delta t)-z(n\Delta t)}{\Delta t} \tag{12}$$

egyenletből kaphatjuk meg.

A numerikus megoldásunkat könnyen ellenőrizhetjük, hiszen a szabadesés problémájára ismerjük az egzakt megoldást:

$$z(t)=z_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \tag{13}$$

Egy konkrét feladat a következő. Írjuk le a szabadesést, azaz a pozíció időfüggését, a következő kezdeti feltételek esetén: $z(t=0)=z_0=1$ m, $v_0=0\frac{m}{s}$. Kérdés: $z(t)=?$ 0 s és 5 s közötti időablakban.

A fent leírt numerikus eljárással kapott eredményt mutatják a kék adatpontok a FIG. 2 ábrán, egy konkrét Δt időlépés-érték esetén. Összehasonlításképpen a fekete vonal mutatja az egzakt megoldást; a hasonlóság meggyőző.

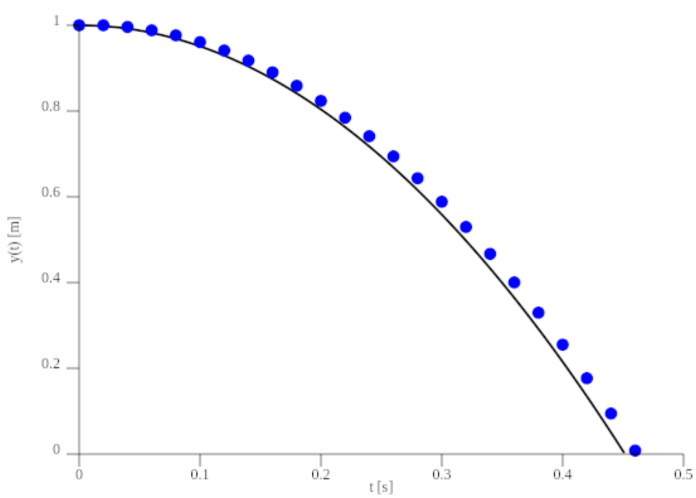

FIG. 2. A szabadesés numerikus szimulációja. Kék: Szimulált adatok, időlépés: $\Delta t=0.02$ s. Fekete: egzakt megoldás.
Forráskód: code/szabadeses

IV. REZGŐMOZGÁS KÉT DIMENZIÓBAN

Az előző szakaszokban egydimenziós mozgást vizsgáltunk, ebben a szakaszban viszont továbblépünk a kétdimenziós mozgások leírására. Egy kétdimenziós rezgőmozgás egyenleteit fogjuk megoldani numerikusan. Az egzakt megoldás itt is ismert.

Feltételezzük, hogy a síkon mozgó tömegpontra egy centrális erő hat, ami a sík origója felé húzza a tömegpontot, mégpedig az origótól vett távolsággal arányos nagyságú erővel. Formálisan tehát az erővektor és a pozícióvektor így függ össze:

$$\vec{F} = -\alpha \vec{r}(t) \tag{14}$$

Ez az egyenlet maga a mozgásegyenlet is. Az elrendezés a FIG. 3 ábrán látható. A feladat akkor válik jól definiálttá, ha megadjuk a kezdeti pozícióvektort és sebességvektort is.

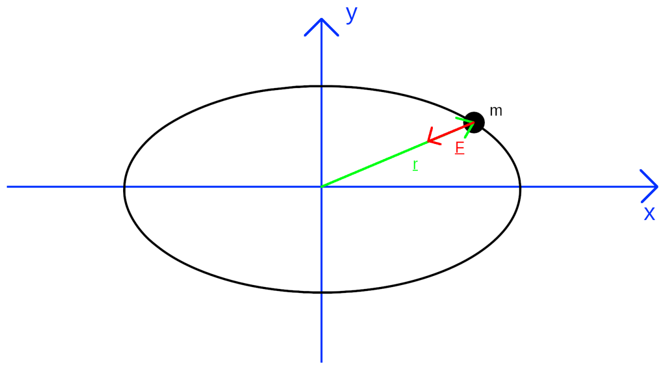

FIG. 3. Kétdimenziós rezgőmozgás.

A vektorokkal felírt fenti mozgásegyenlet diszkretizációja előtt írjuk ki a vektorokat komponensenként. Például a helyvektor

$$\vec{r} = (x(t), y(t)) \tag{15}$$

alakú. Írjuk fel a differenciálegyenletet mindkét koordinátára:

$$m\ddot{x}(t) = -\alpha x(t) \tag{16}$$

$$m\ddot{y}(t) = -\alpha y(t) \tag{17}$$

A feladatunkat jelentősen leegyszerűsíti, hogy az egyik egyenlet csak x-et, a másik csak y-t tartalmazza, azaz a két egyenlet *szétcsatolódik*.

A fenti differenciálegyenletek diszkretizációjával ezeket a differencia-egyenleteket kapjuk:

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) - \beta x(t)\Delta t, \tag{18}$$
$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t, \tag{19}$$
$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) - \beta y(t)\Delta t, \tag{20}$$
$$y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t)\Delta t, \tag{21}$$

ahol $\beta = \alpha/m$.

Mivel másodrendű a differenciálegyenletünk, és két koordinátánk van, négy kezdőfeltételt kell megadnunk, és ezen kívül az α konstanst is. Tegyük konkréttá a feladatot! Oldjuk meg numerikusan a fenti differenciálegyenletet $\Delta t = 0.01$ s időlépéssel, $\beta = 7\,\mathrm{N}/(\mathrm{m\,kg}) = 7/\mathrm{s}^2$ együtthatóval, és a következő kezdeti paraméterekkel:

1. $x_0 = 1$ m,
2. $y_0 = 0$ m,
3. $v_{x0} = 0$ m/s,
4. $v_{y0} = 1$ m/s.

A numerikus megoldást a FIG. 4 mutatja. Egy koszinusz- (kék) és egy szinuszfüggvényt (piros) látunk, ugyanazzal a periódusidővel ($T = 2\pi/\omega \approx 2.37\,\mathrm{s}$, ahol $\omega = \sqrt{\beta} \approx 2.64$), de különböző amplitúdóval.

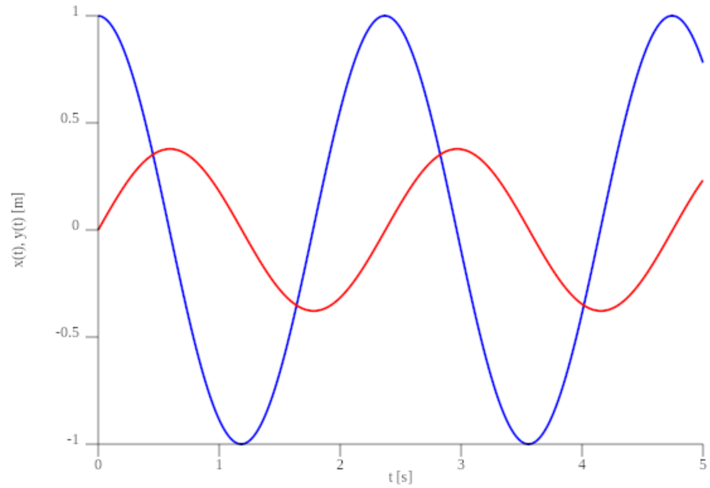

FIG. 4. A körmozgás numerikus szimulációja. Kék: x koordináta. Piros: y koordináta. Időlépés: $\Delta t = 0.01$ s.
Forráskód: code/kormozgas

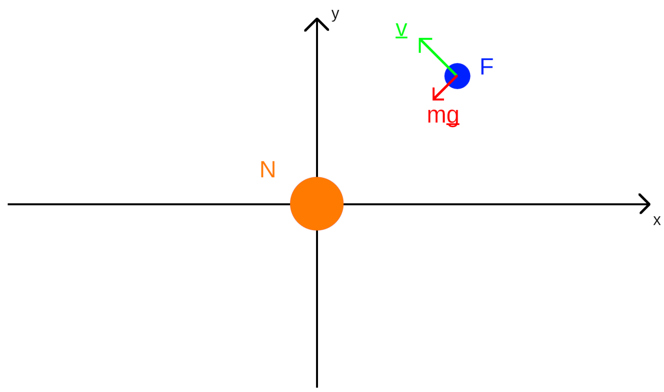

FIG. 5. A Föld mozgása a Nap körül.

V. A FÖLD MOZGÁSA A NAP KÖRÜL

Végül megvizsgáljuk a Nap gravitációs terében lévő Föld mozgását. Feltevésünk szerint a Nap az origóban van, és rögzített, lásd FIG. 5 ábra. A Földnek a Naphoz viszonyított pozícióvektorát jelöljük $\vec{r}$-el, és feltesszük hogy a Föld mozgása az xy síkban történik.

A mozgásegyenletet úgy kapjuk, hogy felírjuk a Földre a Nap által kifejtett gravitációs erővektort:

$$\vec{F}_g = \ddot{\vec{r}} = -\hat{\vec{r}}\gamma\frac{m_N m_F}{r^2} \tag{22}$$

ahol $\hat{\vec{r}} = \vec{r}/r$ az $\vec{r}$ irányú egységvektor, és $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}$ a gravitációs állandó.

Fejezzük ki az $\hat{\vec{r}}$ helyvektort:

$$\hat{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{23}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\vec{F}_g = -\gamma\frac{m_F m_N \vec{r}}{r^3}, \tag{24}$$

illetve ezt a mozgásegyenletet koordinátánként kiírva kapjuk, hogy

$$\ddot{x}(t) = -\gamma \frac{m_N x(t)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{25}$$

$$\ddot{y}(t) = -\gamma \frac{m_N y(t)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{26}$$

Az ezekből diszkretizáció révén kapható differenciaegyenletek:

$$v_x(t+\Delta t) = -\gamma \frac{m_N x(t)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta t \tag{27}$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t \tag{28}$$

$$v_y(t+\Delta t) = -\gamma \frac{m_N y(t)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta t \tag{29}$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + v_y(t)\Delta t \tag{30}$$

Ezen egyenletek numerikus megoldását ábrázoljuk a FIG. 6, 7, 8 ábrákon, három különböző kezdeti feltétel esetén (ld. ábrafeliratok). A FIG. 6 ábrán a kezdősebesség úgy van beállítva, hogy a Föld - a tényleges mozgásához hasonlóan - ellipszispályán mozog a Nap körül. A FIG. 7 ábrán a kezdősebesség nagyobb, ezért a Föld a mozgása során eltávolodik a Naptól. A FIG. 8 ábrán a kezdősebesség kisebb, ezért a Föld a mozgása során beleesik a Napba.
Forráskód: code/orbsim

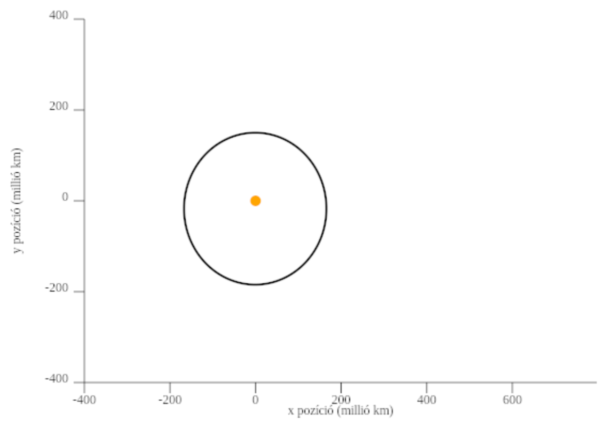

FIG. 6. A Föld körpályán(x = 0 km, y = $150,000,000 km$, v = $262.5 km/s$, Időlépték: $\Delta t = 5000 s$)

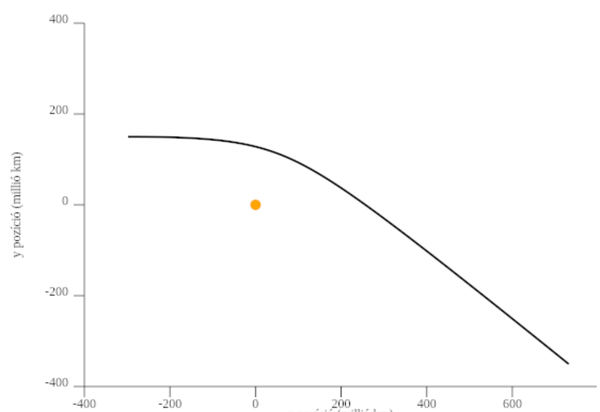

FIG. 7. A Föld elhagyja a Napot(x = $-225,000,000 km$, y = $150,000,000 km$, $v = 375 km/s$, Időlépték $\Delta t = 5000 s$)

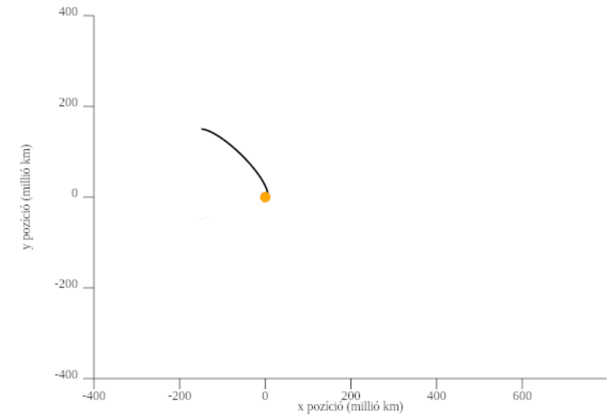

FIG. 8. A Föld és a Nap összeütközik(x $= -150,000,000km$, y $= 150,000,000km$, v $= 53,25km/s$, Időlépték $\Delta t = 5000s$)

VI. ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a jegyzetben bemutattuk, hogy hogyan lehet a tömegpont-mechanika feladatait számítógéppel, numerikusan megoldani. Néhány lépésben eljutottunk a bolygómozgást leíró mozgásegyenletek megoldásáig.

A jegyzet hasznos lehet a fizika és/vagy a differenciálegyenletek és/vagy a programozás iránt érdeklődő középiskolások vagy egyetemisták számára.

A jegyzet a Matehetsz Mentor Programban készült, 2020-2021-ben. SM készítette a numerikus számításokat, ábrákat, illetve a szöveg első verzióját. PA javasolta a témát és szerkesztette a szöveget.