

Cryptographie pratique

Sébastien Millet

Version 1.0, 26 mars 2016

Table of Contents

1. Introduction	1
1.1. Pourquoi un tel document	1
1.2. Contenu	1
2. Le format x509	2
2.1. Visualisation d'un certificat x509	2
2.2. Structure d'un certificat x509	4
2.3. Hiérarchie des certificats	5
3. Vérification de signature RSA	10
3.1. La signature RSA	10
3.1.1. Calcul de la signature	10
3.1.2. Vérification de la signature	10
3.2. Vérification du certificat de letsencrypt.org	10
3.2.1. Choix d'un programme de calcul	10
3.2.2. Enregistrement de la signature sous forme d'entier	12
3.2.3. Enregistrement de la clé publique sous forme d'entier	14
3.2.4. La fonction <i>powmod</i>	15
3.2.5. Calcul de M	16
3.2.6. Analyse de M	17
3.2.7. Calcul de M'	20
3.3. Conclusion	29
4. Vérification de signature ECDSA	31
4.1. Cryptographie à courbes elliptiques	31
4.1.1. Les deux familles de courbes elliptiques	31
4.1.2. Les paramètres de domaine	31
4.1.3. L'arithmétique des courbes sur F_p	34
4.1.4. Fonctions de calcul sur F_p avec le programme <i>bc</i>	35
4.2. Les courbes elliptiques dans le standard x509	39
4.2.1. Représentation d'un point dans le standard x509	39
4.2.2. La courbe prime256v1 (secp256r1)	40
4.2.3. Création d'un certificat auto-signé	42
4.2.4. Vérification de la signature ECDSA du certificat	43
4.3. Les Certificats Électroniques Visibles	48
4.3.1. Présentation	48
4.3.2. Vérification manuelle d'une signature 2D-Doc	48
4.3.3. Vérification d'une signature 2D-Doc avec <i>openssl</i>	50
5. Bibliographie	53

1. Introduction

1.1. Pourquoi un tel document

Faire des calculs à la main sur des signatures électroniques est très ludique.

Il faut s'entendre sur le terme "à la main". Au fil du document nous ne ferons aucun calcul à la main ni même avec une calculatrice de bureau. Les nombres manipulés sont beaucoup trop grands. Même à supposer que l'on décide d'utiliser une calculatrice de bureau (la chose est sans doute possible, en transférant les données depuis un PC), il faudrait la programmer en raison du nombre d'étapes de calcul.

1.2. Contenu

Cet article décrit les calculs à faire pour vérifier des signatures RSA et ECDSA, dans le cadre x509 et 2D-Doc.

RSA ECDSA

RSA et *ECDSA* permettent de signer [1: *RSA* permet également de chiffrer.] avec une paire de clés privée et publique. La clé privée est utilisée pour signer. La clé publique permet de vérifier la signature.

Nous examinerons trois cas de signatures électroniques :

1. *RSA* dans le contexte x509 : cas du certificat d'un serveur https
2. *ECDSA* dans le contexte x509 : création d'un certificat x509 auto-signé, afin de se familiariser avec les calculs sur les courbes elliptiques
3. *ECDSA* dans le contexte 2D-Doc : vérification d'un code 2D-Doc, qui est le standard du Certificat Électronique Visible

Au fil du document nous ferons appel aux outils suivants :

- *openssl* pour travailler sur les certificats x509 en ligne de commande
- *pkfile* pour extraire la partie signée d'un certificat et *dder* pour afficher certains contenus binaires
- *python* ou *bc* pour faire des calculs avec des nombres entiers de grande taille
- Conversion entre encodage *PEM* et encodage *binaire* (Linux : *base64*, Windows : *notepad++*)
- Édition de contenu de fichier binaire (Linux : *gvim/xxd*, Windows : *notepad++*)

Windows versus Linux

Ce document s'adresse aux utilisateurs de Windows et Linux.

NOTE

Il peut arriver que l'outil ou la commande à employer diffère entre les deux environnements, dans ce cas les deux sont présentés.

2. Le format x509

2.1. Visualisation d'un certificat x509

A l'aide d'un navigateur, ouvrir une page en https et afficher le certificat. Les exemples de ce document sont réalisés avec le certificat https du site <https://letsencrypt.org/>.

Exemple avec Firefox 44

1. Cliquer sur l'icône de cadenas à gauche de la barre d'adresse et cliquer sur la flèche droite (Figure 1)
2. Cliquer sur *Plus d'informations* (Figure 2)
3. Cliquer sur *Afficher le certificat* (Figure 3)
4. Afficher l'onglet *Détails* et parcourir les différents champs du certificat (Figure 4, 5 et 6)

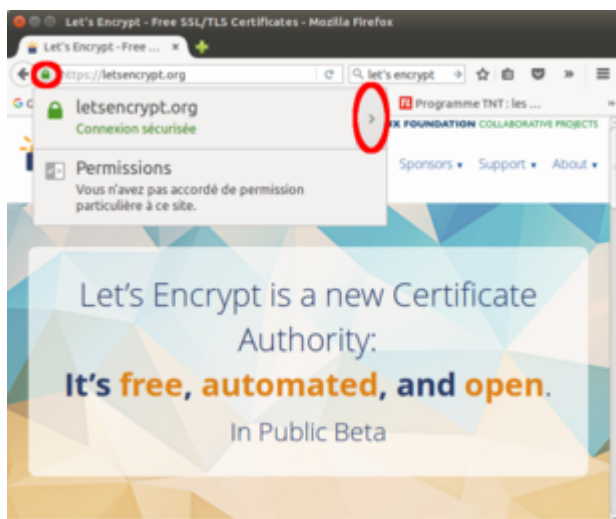


Fig. 1

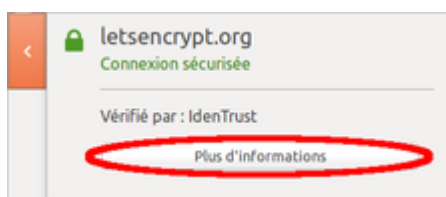


Fig. 2

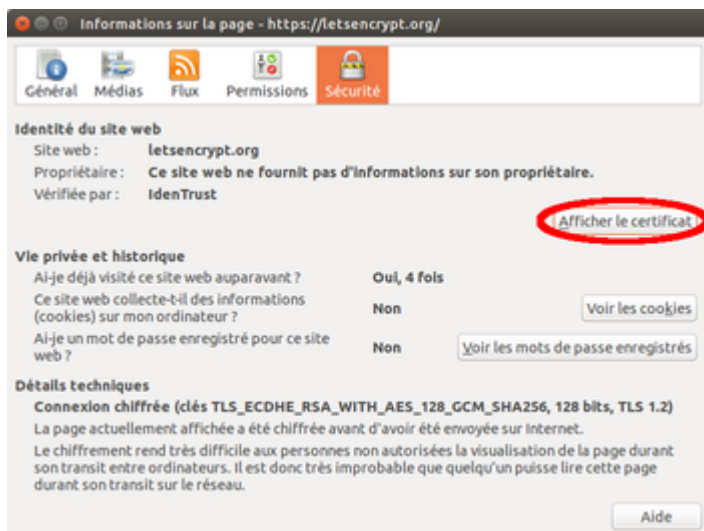


Fig. 3

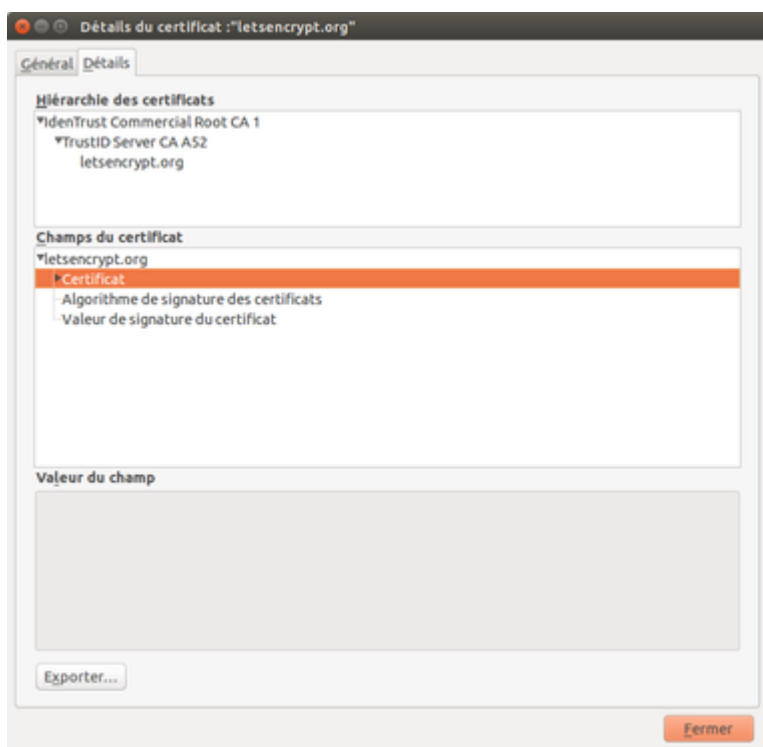


Fig. 4

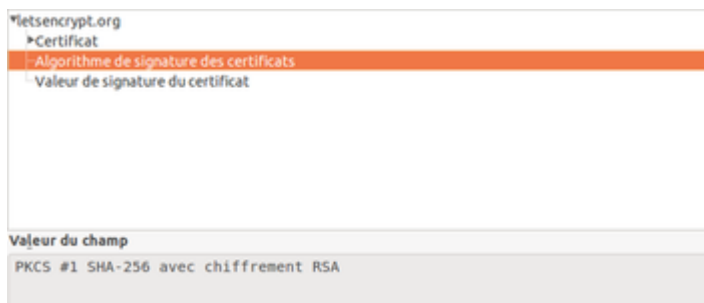


Fig. 5

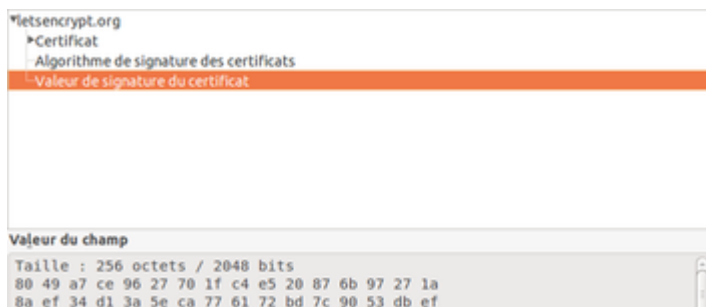


Fig. 6

Nous nous intéresserons à la partie supérieure (*Hiérarchie des certificats*) plus tard.

Pour le moment examinons le certificat. L'affichage de Firefox en dessous de *Champs du certificat* liste trois parties :

1. Le certificat proprement dit, qui contient beaucoup d'informations structurées sur plusieurs niveaux hiérarchiques
2. L'algorithme de signature du certificat, dans notre exemple, *PKCS #1 SHA-256 avec chiffrement RSA*
3. La signature du certificat, ici, une suite de 256 octets

Cette structure en trois parties est toujours respectée pour un certificat x509. A noter qu'Internet Explorer et Chrome affichent les mêmes informations mais sans faire ressortir la structure trois parties.

2.2. Structure d'un certificat x509

Où la structure d'un certificat est-elle définie, et quelle est cette définition ?

Une recherche sur un moteur de recherche avec les mots-clés *RFC* et *x509* produit l'URL suivante dans les premières réponses :

<https://tools.ietf.org/html/rfc5280>

Et effectivement la [2: Nous utiliserons le féminin dans ce document. RFC étant un acronyme anglais, il n'y a pas d'argument définitif pour l'emploi du masculin ou du féminin.] **RFC 5280** définit le format x509 version 3.

Affichons-la. Dans la section 4.1 se trouve la définition suivante.

...

4.1. Basic Certificate Fields

The X.509 v3 certificate basic syntax is as follows. For signature calculation, the data that is to be signed is encoded using the ASN.1 distinguished encoding rules (DER) [X.690]. ASN.1 DER encoding is a tag, length, value encoding system for each element.

```
Certificate ::= SEQUENCE {  
    tbsCertificate      TBSCertificate,  
    signatureAlgorithm  AlgorithmIdentifier,  
    signatureValue      BIT STRING }
```

...

La suite définit les différents éléments du certificat, à savoir *TBSCertificate* et *AlgorithmIdentifier*.

Grammaire, ASN.1 et DER

La structure du certificat est décrite par une *grammaire*, d'après les règles de syntaxe **ASN.1** (*Abstrat Syntax Notation number 1*) [1].

Les différents encodages possibles du standard *ASN.1* sont eux-mêmes des standards et le **X.690** est l'un d'entre eux [2].

La RFC précise que la partie du certificat à signer doit être encodée selon le standard *Distinguished Encoding Rules* ou **DER**. Entre autres encodages, le document X.690 définit le DER.

Nous verrons plus loin l'encodage DER. Si vous souhaitez le découvrir, plutôt que d'examiner directement le document X.690, je vous recommande de commencer par l'article Wikipédia [3].

En ASN.1 le mot-clé **SEQUENCE** sans autre précision indique que la valeur est constituée d'une suite de valeurs elles-mêmes spécifiées en ASN.1. La valeur *Certificate* contient donc, à la suite :

1. La valeur *tbsCertificate*, soit le certificat à signer (**to be signed Certificate**)
2. La valeur *signatureAlgorithm*, soit l'identification de l'algorithme de signature
3. La valeur *signatureValue*, soit la signature elle-même

2.3. Hiérarchie des certificats

Dans la partie *tbsCertificate* de *letsencrypt.org*, intéressons-nous à deux éléments en particulier, l'*émetteur* du certificat et le *sujet* du certificat.

- Le *sujet* du certificat a pour CN (*Common Name*) *letsencrypt.org* et c'est le dernier nom qui est affiché dans la hiérarchie des certificats (partie supérieure de la fenêtre).

- L'émetteur du certificat a pour CN *TrustID Server CA A52* et on peut voir ce nom au-dessus de letsencrypt.org dans la hiérarchie.

L'émetteur et le sujet ont également le pays © et l'organisation (O) définis dans leur nom, ainsi que d'autres éléments. Le "nom simple" ou "nom court" du certificat est son CN. Le standard x509 ne définit pas cette notion de "nom simple" ou "nom court", nous l'employons ici pour préciser que dans la pratique, le CN est le véritable nom du certificat, les autres éléments donnant des informations annexes.

Cela dit, le nom (au sens du standard x509) est constitué du DN (*Distinguished Name*), il s'agit de la *totalité des éléments qui le composent* (et non pas seulement du CN).

Le lien hiérarchique est toujours établi entre un émetteur et un sujet. L'émetteur est celui qui signe le certificat, le sujet est celui qui est signé. Voir figures 7 et 8.

Un certificat peut être à la fois émetteur (d'autres certificats sont signés par lui) et sujet (il est lui-même signé par un autre certificat), et cette chaîne forme une structure hiérarchique. Dans notre exemple, on voit que le certificat *TrustID Server CA A52* est lui-même signé par *IdenTrust Commercial Root CA 1*.

NOTE

- Dans la pratique la situation peut se compliquer avec des certificats croisés.
- Un cas particulier est celui où l'émetteur et le sujet sont identiques. Ce sont les certificats *auto-signés*. C'est le cas des certificats racine (en haut de la hiérarchie) et parfois d'autres certificats auto-signés pour toutes sortes de raisons bonnes ou mauvaises (souvent mauvaises, mais il existe des cas légitimes).
- Quoi qu'il en soit, la structure de base des liens qui relient les certificats est hiérarchique.

Quelques précisions

- Pour qu'un certificat joue le rôle émetteur, il doit être une autorité de certification ou CA (*Certificate Authority*), il s'agit de l'une des nombreuses options que l'on peut trouver dans un certificat.
- En plus des éléments permettant d'identifier le sujet du certificat, la partie `tbsCertificate` contient sa *clé publique*. C'est précisément le rôle du certificat : *certifier* la correspondance entre une entité (un DN) et une clé publique.
- L'émetteur (qui est forcément une autorité de certification) a toujours un numéro d'identification de clé (*Subject Key Identifier*). Cet identifiant, qui doit être par construction un entier, doit être enregistré dans les certificats émis comme numéro de clé d'autorité de certification (*Authority Key Identifier*). Cette logique permet de gérer facilement les cas où une autorité de certification possède plusieurs clés.
 - En résumé, quand un émetteur signe un sujet, on doit avoir égalité entre ces différents éléments

Dans le certificat émetteur	Lien	Dans le certificat sujet
Subject DN [4: Ici on a un peu simplifié les choses pour ne pas alourdir le texte. En fait l'émetteur est identifié par son DN mais aussi par un <i>Serial Number</i> , nécessaire dans les cas où une même entité (DN) est associée à différentes clés. Donc le lien hiérarchique est établi avec le couple (DN, Serial Number), qui correspond à un couple (DN, key) de manière unique. Le DN seul ne serait pas suffisant. Les identifiants de clé correspondent (de manière bi-univoque) à un couple (DN, key).]	=	Issuer DN
Subject Key Identifier	=	Authority Key Identifier

- La RFC 5280 ([4]) impose l'emploi d'identifiants de clé lors de l'émission de certificats mais la section 4.2.1.2 indique aussi que les applications ne sont pas obligées de vérifier les identifiants de clé lors de la validation d'une chaîne de certification. Conclusion ? Il n'y en a pas.

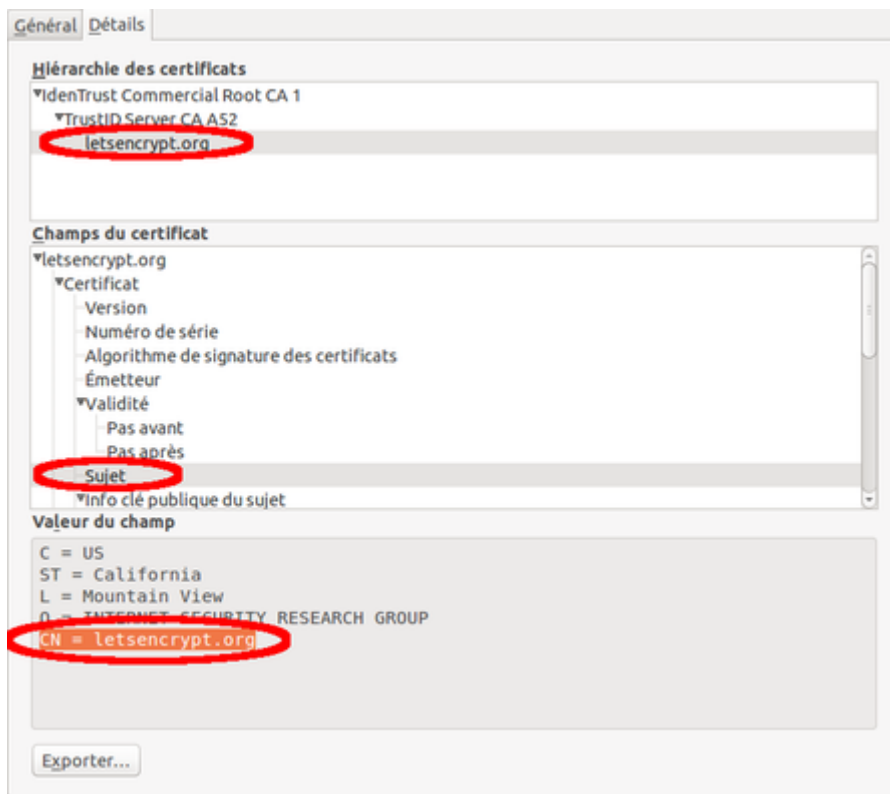


Fig. 7 : Sujet du certificat

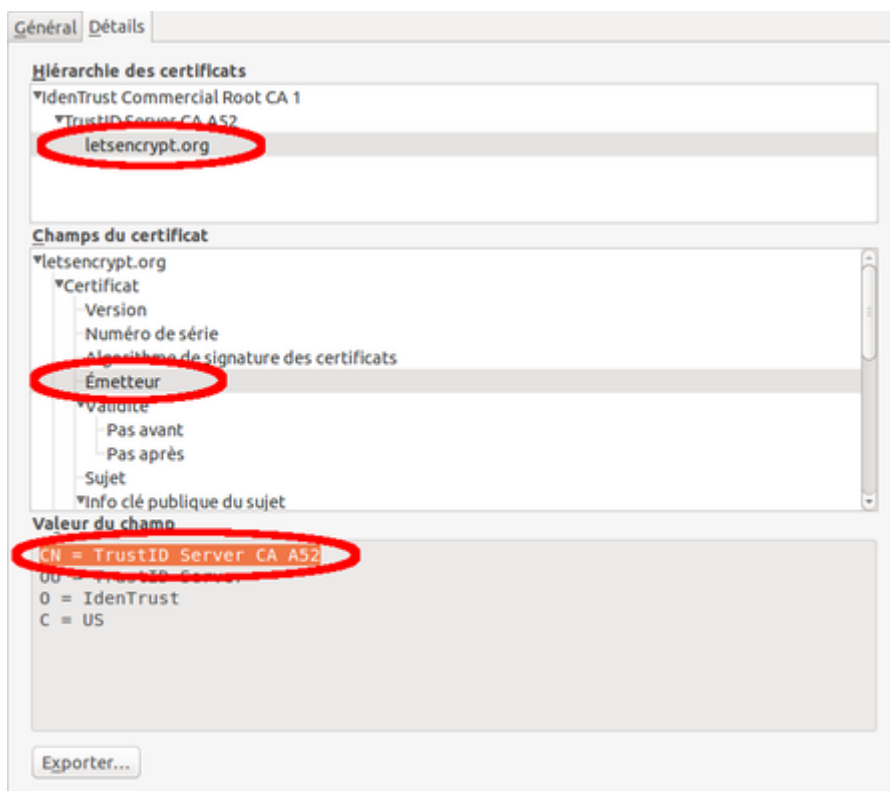


Fig. 8 : Émetteur du certificat

Pour signer, l'émetteur utilise sa clé privée. La vérification de la signature est faite avec sa clé publique. Ainsi pour vérifier l'authenticité du certificat https de *letsencrypt.org*, nous aurons besoin de la clé publique de son émetteur, *TrustID Server CA A52*.

Ce principe est toujours respecté avec les certificats x509, que ce soit avec RSA ou d'autres mécanismes à clé publique / clé privée.

Nous allons maintenant passer à la vérification de la signature RSA.

3. Vérification de signature RSA

3.1. La signature RSA

Notations

- La valeur à signer (ou si l'on préfère, le *bloc de données* à signer) est **tbsCertificate**, soit le certificat sans les informations de signature. Dans la structure en trois parties de notre certificat x509, c'est la première.
- L'entité qui signe le certificat (l'émetteur du certificat) a pour clé RSA **(n, e)** (**n** est le modulo, **e** est l'exposant) et **d**. Le couple **(n, e)** est la clé publique, **d** est la clé privée.

La page Wikipédia consacrée au système RSA [5] explique le lien entre (n, e) et d , et nous indique le calcul à effectuer pour *chiffrer*. Pour *signer*, le calcul inverse le rôle de l'exposant privé et public, et pour *vérifier* la signature, le rôle des exposants privé et public est encore inversé (par rapport à la signature).

Dans notre exemple le tbsCertificate est celui de *letsencrypt.org*, tandis que la clé RSA (clé publique (n, e) et clé privée d) est celle de *TrustID Server CA A52*.

3.1.1. Calcul de la signature

1. L'émetteur calcule le hash (noté M) de la valeur *tbsCertificate* du sujet, soit $M = \text{hash}(\text{"tbsCertificate"})$
2. Il calcule la signature [5: On simplifie ici pour se concentrer sur les étapes importantes. En fait, le hash M calculé n'est pas signé tel quel, il subit auparavant quelques transformations comme nous le verrons plus loin.] [6: Ce calcul est le même que pour déchiffrer un message destiné au propriétaire de la clé publique (qui est ici l'émetteur du certificat). Signer en RSA revient à chiffrer en inversant le rôle de l'exposant public et privé.] (notée S) avec la formule $S = M^d \bmod n$

3.1.2. Vérification de la signature

1. Le vérificateur calcule $M = S^e \bmod n$
2. Il calcule $M' = \text{hash}(\text{"tbsCertificate"})$
3. Si on a l'égalité $M = M'$, la signature est vérifiée

3.2. Vérification du certificat de letsencrypt.org

3.2.1. Choix d'un programme de calcul

Nous avons besoin d'une "calculatrice" qui calcule sur des nombres entiers arbitrairement grands, sans perte de précision. Dans la suite de ce document, c'est *bc* qui sera utilisé [6].

- Linux : *bc* est disponible par défaut sur la plupart des distributions.
- Windows : les binaires sont accessibles ici [7]. La version standard de *bc* (GnuWin32) gère mal le clavier français. La référence [7] vous propose un exécutable *bc.exe* qui n'a pas ce défaut.

NOTE	<p><i>Le choix de bc</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>bc</i> est installé par défaut sur la plupart des distributions Linux, et facile et rapide à installer sous Windows (si ce n'est les problèmes de clavier français). • <i>bc</i> contient peu de fonctions mathématiques intégrées mais sur Internet on trouve de nombreux scripts qui permettent de l'enrichir considérablement. <ul style="list-style-type: none"> ◦ Dans <i>bc</i> la variable <i>scale</i> définit le nombre de décimales des nombres manipulés. Comme nous ne ferons que des calculs sur des entiers, nous laisserons <i>scale</i> à zéro (pas de partie décimale). Zéro est la valeur par défaut de <i>scale</i> au lancement de <i>bc</i> [8: Lorsque <i>bc</i> est lancé avec l'option <i>-l</i>, des fonctions mathématiques sont chargées au démarrage et <i>scale</i> vaut 20. Nous ne nous servirons pas de cette option dans ce document et <i>scale</i> sera toujours égal à zéro.] .
	<p><i>Alternatives à bc</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • sagemath, logiciel mathématique en licence GPL. • python, langage de programmation en licence GPL, calcule par défaut sur des entiers de taille arbitrairement grande et convient donc aux calculs que nous allons faire. Beaucoup de tuto sur Internet utilisent <i>python</i>. • Logiciels mathématiques propriétaires bien connus.

Table 1. Comparaison entre *bc* et *python*

bc	python
Saisie d'un entier en hexadécimal	
Exécuter au préalable <code>ibase = 2 * 8</code> [9: <code>2 * 8</code> produit toujours 16 (décimal). Si 16 est lu alors qu' <i>ibase</i> vaut déjà 16, le résultat sera lu en hexadécimal et vaudra 22.] Exemple : <code>ibase = 2 * 8 var = ABEF0E0</code> (Attention les caractères hexadécimaux doivent être en majuscule.)	Saisir l'entier précédé de 0x Exemple : <code>>>> var = 0xabef0e0</code> [10: <i>python</i> peut lire les nombres hexadécimaux indifféremment en majuscule et minuscule. <i>bc</i> exige des majuscules.]
Affichage d'entier en hexadécimal	

bc	python
<p>Exécuter au préalable <code>obase = 2 * 8</code> [9: 2 * 8 produit toujours 16 (décimal). Si 16 est lu alors qu'ibase vaut déjà 16, le résultat sera lu en hexadécimal et vaudra 22.] Exemple : <code>obase = 2 * 8 2 ^ (2 ^ 4) + 1</code> [11: Sous Windows, <i>bc</i> a des difficultés à lire le caractère <i>circonflexe</i> au clavier (en-dessous de la touche 9). Pour contourner ce problème, il est possible d'utiliser (sur un clavier français) l'accent circonflexe à droite de la touche P, en appuyant dessus à deux reprises. Cela affiche deux <i>circonflexes</i> et vous devez alors en supprimer un. Voir [7].] 10001</p>	<p>Interpoler avec %x Exemple : <code>>>> '%x' % (2 ** (2 ** 4) + 1) '10001'</code></p>

3.2.2. Enregistrement de la signature sous forme d'entier

1. Depuis le navigateur, afficher la signature du certificat de *letsencrypt.org*.
2. Sélectionner la signature et la copier-coller dans un éditeur de texte.
3. Supprimer les caractères surnuméraires (enlever les ':' et les sauts de ligne).
4. Passer les caractères hexadécimaux en majuscule [12: Si vous utilisez *python*, il est inutile de passer les caractères hexadécimaux en majuscule.].
5. Ajouter `s=` devant le nombre, et ajouter une première ligne `ibase = 2 * 8`.
6. Enregistrer dans **val.b**.

Voir figures 9 et 10.

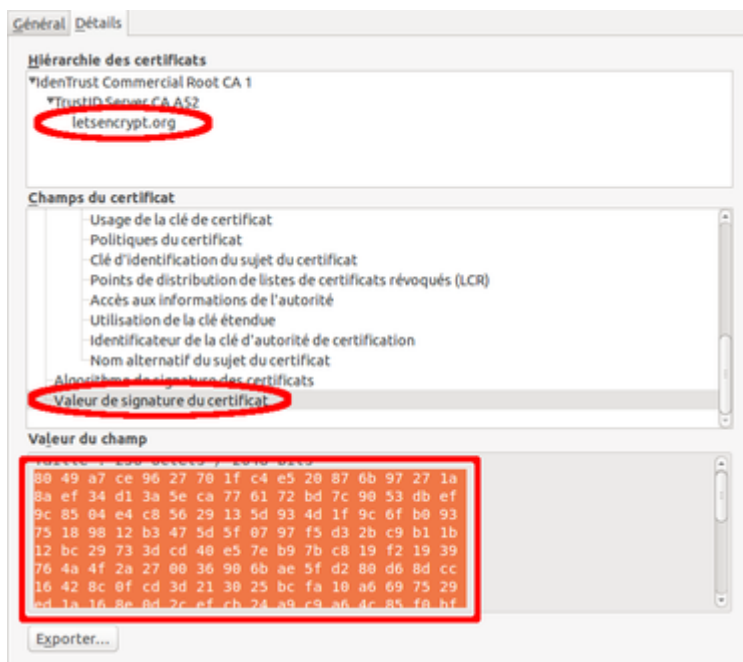


Fig. 9 : Signature dans le navigateur

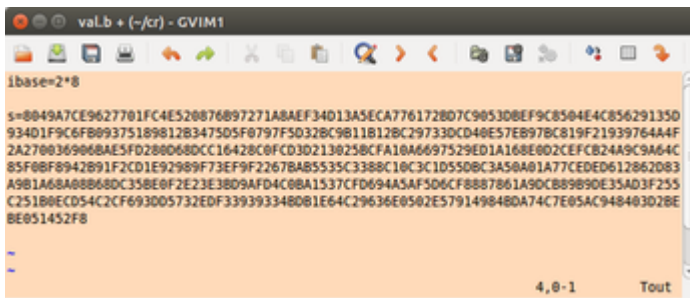


Fig. 10 : Fichier *val.b*

L'instruction *ibase = 2 * 8* ordonne à *bc* de lire les nombres en hexadécimal. *ibase = 16* fonctionne aussi, à condition qu'*ibase* soit égal à 10 (valeur par défaut) au moment d'exécuter *ibase = 16*. Si *ibase* est déjà égal à 16 et que l'on exécute *ibase = 16*, une erreur se produit car *bc* lit 16 en hexadécimal (soit 22) et cette valeur est interdite.

NOTE

1. Avec *bc* il est impératif de passer les nombres hexadécimaux en majuscule.
2. *bc* n'accepte pas les noms de variable qui contiennent des majuscules.

Le navigateur affiche l'exposant de la clé RSA (le nombre noté *e* tout à l'heure) sous forme décimale, alors que dans le script *bc* nous l'entrons en hexadécimal. Pour convertir un nombre décimal en hexadécimal, exécuter dans un terminal :

Linux

```
$ echo "obase=16; 65537" | bc
10001
```

Windows

```
$ echo obase=16; 65537 | bc.exe
10001
```

Passer du texte en majuscule

Linux

Sous Linux, on peut utiliser la ligne de commande, par exemple (nombreuses autres solutions) :

```
$ tr '[:lower:]' '[:upper:]' < fichier_entrée > fichier_sortie
```

Un éditeur suffisamment avancé comme *vim* ou *emacs* le permet aussi.

Windows

Windows ne dispose pas par défaut d'outil pour passer du texte en majuscule. L'une des solutions est d'installer les utilitaires adéquats avec *GNUWin32* ou bien *cygwin*.

L'éditeur de texte (natif) adapté pour ce type de transformation est **notepad++**, disponible à cette URL [\[8\]](#).

NOTE *vim* et *emacs* sont disponibles sous Windows.

3.2.3. Enregistrement de la clé publique sous forme d'entier

Depuis le navigateur :

1. Sélectionner le certificat de *TrustID Server CA A52* et afficher sa clé publique.
2. Sélectionner la valeur de la clé publique et la copier-coller dans **val.b**. Il faut le faire en deux fois, une fois pour le modulo de 256 octets (variable *n*) et une fois pour l'exposant (variable *e*).

Ne pas oublier de passer les caractères hexadécimaux en majuscule.

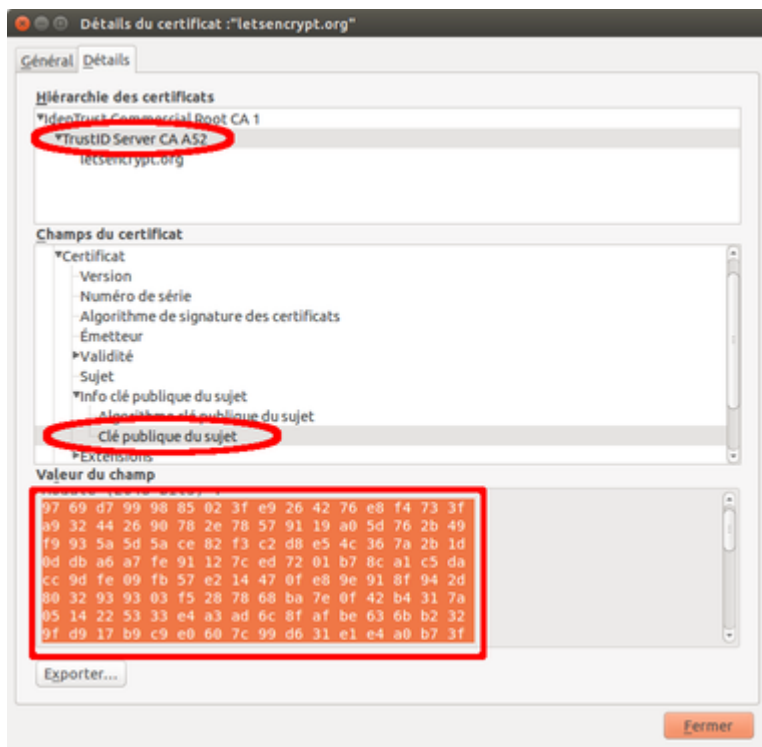


Fig. 11 : Clé publique dans le navigateur

A l'arrivée, **val.b** contient trois variables, *s* (la signature du certificat), *n* et *e* (la clé publique). On a ajouté la sauvegarde et la récupération d'*ibase*, c'est une bonne pratique.

val.b

```
save_ibase=ibase
ibase=2*8
s=8049A7CE9627701FC4E520876B97271A8AEF34D13A5ECA776172BD7C9053DBEF9C8504E4C85629135D93
4D1F9C6FB09375189812B3475D5F0797F5D32BC9B11B12BC29733DCD40E57EB97BC819F21939764A4F2A27
0036906BAE5FD280D68DCC16428C0FCD3D213025BCFA10A6697529ED1A168E0D2CEFCB24A9C9A64C85F0BF
8942B91F2CD1E92989F73EF9F2267BAB5535C3388C10C3C1D55DBC3A50A01A77CEDED612862D83A9B1A68A
08B68DC35BE0F2E23E3BD9AFD4C0BA1537CFD694A5AF5D6CF8887861A9DCB89B9DE35AD3F255C251B0ECD5
4C2CF693DD5732EDF33939334BDB1E64C29636E0502E57914984BDA74C7E05AC948403D2BEBE051452F8
n=9769D7999885023FE9264276E8F4733FA932442690782E78579119A05D762B49F9935A5D5ACE82F3C2D8
E54C367A2B1D0DDBA6A7FE91127CED7201B78CA1C5DACC9DFE09FB57E214470FE89E918F942D8032939303
F5287868BA7E0F42B4317A0514225333E4A3AD6C8FAFBE636BB2329FD917B9C9E0607C99D631E1E4A0B73F
AFB232AC7E8C9CDC02EBE1BC1F149CBC91F7B2FB42F3E1202BCBBF8FF3B37063FAF7752802ABC5D4B0EDEA
257F87CD371496833C40021BA09E19477FF3B0CCC52560B83512F151EB17DCFC5BA5D99BEF404CD77771E9
FB458B7EF2E369B042661746903ACD463DF1B0096FDCFFEE3361CAFCC72E3CED5E0AD1BF221269804B23
e=10001
ibase=save_ibase
```

3.2.4. La fonction *powmod*

Les amateurs de *python* ont encore un avantage à ce stade. L'équivalent de la fonction *powmod* y est disponible sous forme d'un troisième paramètre (facultatif) à la fonction *pow*.

Pour ceux qui utilisent *bc* comme moi, il faut écrire la fonction.

La fonction *powmod* met en oeuvre l'algorithme d'exponentiation rapide, décrit à cette URL [9]. En fait nous sommes dans un contexte modulaire et d'après Wikipédia le nom exact de l'algorithme est *exponentiation modulaire*. Un article y est consacrée [10]. Les deux algorithmes font appel au même principe, mais le second exploite le contexte modulaire pour que les nombres manipulés n'atteignent pas une taille démesurée. C'est le second algorithme (*exponentiation modulaire*) dont nous avons besoin pour la suite.

Sur Internet, on peut trouver la fonction *powmod* dans de nombreux scripts *bc* à télécharger. À noter qu'elle porte parfois d'autres noms, *mpower* par exemple.

powmod.b

```
define powmod(a, b, c) {
    auto p, r
    p = a
    r = 1
    while (b > 0) {
        if (b % 2) r = (r * p) % c
        p = (p * p) % c
        b /= 2
    }
    return r
}
```

3.2.5. Calcul de M

Nous voilà prêts pour calculer M .

1. Lancer la commande suivante [13: Par défaut, *bc* ajoute un anti-slash après le 68e caractère et passe à la ligne suivante. On peut modifier ce comportement avec la variable d'environnement *BC_LINE_LENGTH*. Quand cette variable est égale à zéro, les nombres ne sont pas coupés.] :

```
$ BC_LINE_LENGTH=0 bc powmod.b val.b
```

2. Dans le shell *bc*, exécuter [9: $2 * 8$ produit toujours 16 (décimal). Si 16 est lu alors qu'ibase vaut déjà 16, le résultat sera lu en hexadécimal et vaudra 22.] (pour que les nombres soient affichés en hexadécimal)

```
obase=2*8
```

3. Toujours dans le shell *bc*, exécuter

```
powmod(s, e, n)
```

Rappelons que c'est S (variable *s* dans *val.b*) qui doit être élevé à la puissance e , modulo n .

```

BC_LINE_LENGTH=0 bc powmod.b val.b
sebastien@maison-pclin in ~/cr
$ BC_LINE_LENGTH=0 bc powmod.b val.b
bc 1.06.95
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000, 2004, 2006 Free Software Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type `warranty'.
obase=2*8
powmod(s, e, n)
1FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
FFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFFF
FFFFFFFF003031300D0609608648016503040201050004208364DA78F1FD8DCC6812E568268BF2DAF87
91BE383109745388879C496A8C3DD

```

Fig. 12 : Calcul pour vérifier la signature RSA

IMPORTANT

Si vous exécutez `obase = 16`, vous obtiendrez le résultat voulu (*obase* défini à 16 *décimal*) seulement si *ibase* vaut 10. Pour parer à toute éventualité, le plus simple est d'utiliser `2 * 8` comme ici (ou bien `2 ^ 4`, ou quoi que ce soit qui n'utilise que des nombres à un seul chiffre).

Le résultat (figure 12) avec tous ces *F* prouve avec une quasi certitude que le calcul s'est bien passé. Les *F* correspondent au 'padding' standard effectué pour une signature RSA, la valeur qui suit (à partir de **303130**) est le hash de `tbsCertificate` "emballé".

"Emballé", c'est-à-dire ? La valeur est spécifiée en ASN.1 et codée en DER, et elle contient d'autres informations que le seul hash de `tbsCertificate`.

C'est ce que nous allons voir dans le chapitre suivant.

3.2.6. Analyse de *M*

Nous allons procéder en trois étapes :

1. Enregistrement du contenu hexadécimal
2. Conversion du contenu hexadécimal en binaire
3. Examen du contenu binaire avec la commande `openssl asn1parse`

1 Enregistrement du contenu hexadécimal

Faisons un copier-coller de *M* (en hexadécimal) à partir de l'octet qui suit l'octet nul, et enregistrons le résultat dans le fichier ***m.hex***.

```

sebastien@maison-pclin: ~/cr
sebastien@maison-pclin in ~/cr
$ cat m.hex
3031300D0609608648016503040201050004208364DA78F1FD8DCC6812E568268BF2DAF8791BE38310974
5388879C496A8C3DD
sebastien@maison-pclin in ~/cr
$

```

Fig. 13 : *m.hex*

```
3031300D0609608648016503040201050004208364DA78F1FD8DCC6812E568268BF2DAF8791BE383109745
388879C496A8C3DD
```

2 Conversion du contenu hexadécimal en binaire

Maintenant nous allons convertir *m.hex* en binaire, puisque le contenu actuel est le *codage des octets en hexadécimal* de la signature, ce n'est pas la signature elle-même.

Linux

Exécuter la commande

```
$ xxd -r -p m.hex > m.der
```

Windows

Le plus simple est d'utiliser *notepad++* et d'enregistrer le fichier transformé avec le nom *m.der*.

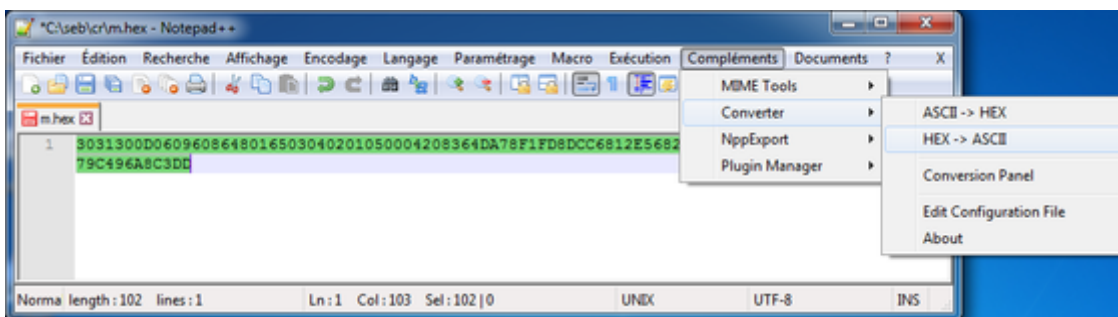


Fig. 14 : Avant la conversion hexadécimal -> binaire

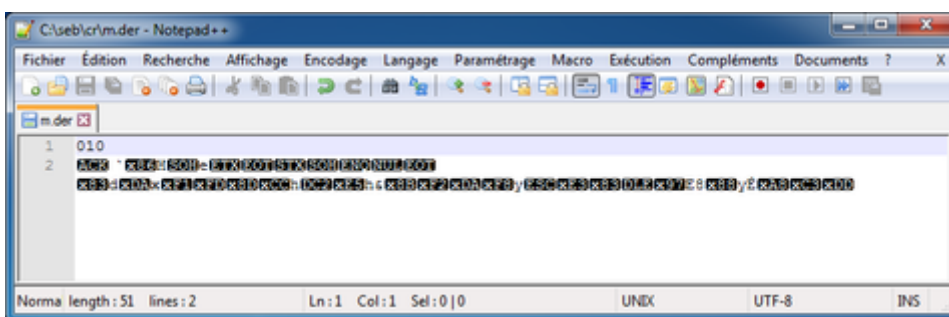


Fig. 15 : Après la conversion hexadécimal -> binaire

ATTENTION

Ne pas laisser un saut de ligne à la fin du fichier qui s'ajouterait aux données binaires de la signature.

Le fichier *m.der* contient les octets que l'on avait dans la signature, ce que l'on peut vérifier facilement...

- ... sous Linux avec la commande *hd* (on peut aussi utiliser *hexdump* ou *xxd*).

- ... sous Windows avec *notepad++*, en reconvertissant en hexadécimal et en vérifiant que l'on retombe sur ses pieds.

```
sebastien@maison-pclin: ~/cr
sebastien@maison-pclin in ~/cr
$ hd m.der
00000000  30 31 30 0d 06 09 60 86 48 01 65 03 04 02 01 05 |010...`H.e....|
00000010  00 04 20 83 64 da 78 f1 fd 8d cc 68 12 e5 68 26 |.. .d.x....h..h&|
00000020  8b f2 da f8 79 1b e3 83 10 97 45 38 88 79 c4 96 |...y.....E8.y..|
00000030  a8 c3 dd                                     |...|
00000033
sebastien@maison-pclin in ~/cr
$
```

Fig. 16 : Contenu du fichier binaire *m.der*

3 Examen du contenu DER du fichier *m.der*

openssl

Pour afficher le contenu binaire (qui se trouve être encodé en DER) nous allons utiliser l'exécutable en ligne de commande fourni avec la librairie openssl. Cet outil s'appelle *openssl*.

Par la suite nous utiliserons également *dder* et *pkfile*, deux utilitaires créés par l'auteur de cet article pour afficher et extraire plus facilement ce type de données.

dder est disponible à l'URL [\[11\]](#).

pkfile est disponible à l'URL [\[12\]](#).

- Sous Linux *openssl* est disponible par défaut.
- Sous Windows il faut trouver un binaire *openssl* à télécharger. Le plus simple est de télécharger la version GNUWin32, disponible à cette URL [\[13\]](#).

La version proposée au téléchargement (en février 2016) date de 2008. Des binaires plus récents sont disponibles sur Internet. Pour faire les manipulations décrites dans ce document, la version de GNUWin32 est suffisante.

- À noter que sous Windows les environnements "de taille importante" (*cygwin*, *perl*, ...) sont souvent installés avec leur librairie openssl, qui contient l'outil en ligne de commande *openssl*.

Exécuter la commande

```
$ openssl asn1parse -inform der -in m.der
```

```
sebastien@maison-pclin: ~/cr
sebastien@maison-pclin in ~/cr
$ openssl asn1parse -inform der -in m.der
0:d=0  hl=2  l= 49 cons: SEQUENCE
2:d=1  hl=2  l= 13 cons: SEQUENCE
4:d=2  hl=2  l=  9 prim: OBJECT           :sha256
15:d=2  hl=2  l=  0 prim: NULL
17:d=1  hl=2  l= 32 prim: OCTET STRING    [HEX DUMP]:8364DA78F1FD8DCC6812E5
68268BF2DAF8791BE383109745388879C496A8C3DD
sebastien@maison-pclin in ~/cr
```

Fig. 17

Nous verrons dans le chapitre suivant la syntaxe ASN.1 plus en détail.

La commande *openssl* (figure 17) nous donne deux informations :

- L'algorithme de hash est SHA-256, ce que l'on savait déjà d'après le contenu de *signatureAlgorithm* (deuxième partie de la structure en trois parties du certificat).
- Nous voyons la valeur du hash (le bloc **prim: OCTET STRING**) sous forme hexadécimale. Sa longueur correspond bien au SHA-256 (256 bits de longueur soit 32 octets).

Nous savons désormais que la signature SHA-256 de la valeur *tbsCertificate* du certificat de *letsencrypt.org* devrait être :

```
8364DA78F1FD8DCC6812E568268BF2DAF8791BE383109745388879C496A8C3DD
```

C'est ce que nous allons vérifier en calculant maintenant M' .

3.2.7. Calcul de M'

Nous allons calculer M' en deux étapes :

1. Extraction de *tbsCertificate* du certificat *letsencrypt.org*.
2. Calcul du hash SHA-256 de *tbsCertificate*.

Mais avant d'extraire *tbsCertificate*, nous devons comprendre comment le certificat est structuré et codé.

ASN.1 et DER

Au début de ce document, nous avons observé que la section 4.1 de la RFC 5280, qui définit la structure des certificats x509 v3, contient cette définition :

```
Certificate ::= SEQUENCE {
    tbsCertificate      TBSCertificate,
    signatureAlgorithm  AlgorithmIdentifier,
    signatureValue      BIT STRING }
```

Un certificat x509 est défini selon la syntaxe ASN.1. L'encodage peut être BER [14: BER signifie Basic

Encoding Rules] , CER [15: CER signifie Canonical Encoding Rules] ou DER [16: DER signifie Distinguished Encoding Rules] .

Ces trois standards sont très proches, l'intérêt de DER étant son unicité : une structure de données spécifiée en ASN.1 ne peut être encodée en DER que d'une manière, et une seule. BER et CER permettent certaines variations dans la manière d'encoder.

Pour ne pas alourdir la rédaction, nous parlerons toujours d'encodage DER ou simplement DER, même lorsque les données manipulées pourraient ne pas être DER [17: La RFC 5280 indique que les *données signées* d'un certificat (la partie *tbsCertificate*) doivent être encodées en DER, mais ne donne pas d'indication pour le reste.] .

ASN.1 structure chaque valeur (*data value* dans le document X.690) selon la typologie **T - L - V** ou **Tag - Length - Value**. La forme "longueur indéfinie" apporte un quatrième élément, "end-of-contents" (marqueur de fin de valeur), que nous ignorerons car DER ne permet pas cette forme.

[T]ag

Définit toutes les caractéristiques de la valeur, notamment son *type*, par exemple une date (**UTCTime**), une séquence (**SEQUENCE** ou **SEQUENCE OF**), un entier (**INTEGER**), et bien d'autres. Il indique également si l'encodage de la valeur est *primitive* ou *constructed*.

Encodage primitive

La donnée ne contient pas de sous-structure

Encodage constructed

La donnée est elle-même une structure qui suit la typologie **T-L-V**, et ici, cette structure est elle-même définie en ASN.1 [18: Certains types de données, notamment les **string* (**OCTET STRING**, **UTF8String**, etc.), peuvent être *primitive* ou *constructed*, ce qui signifie que leur encodage peut suivre une structure hiérarchique "propre à l'encodage", non explicitée dans la définition de la valeur en ASN.1.].

Structure hiérarchique

La différence *primitive* - *constructed* est à la base de la structure hiérarchique d'une spécification ASN.1, les éléments *constructed* étant les branches, les éléments *primitive* étant les feuilles.

Dans la définition d'un *Certificate* ci-dessus, le type **SEQUENCE** est, par définition du type **SEQUENCE** en ASN.1, *constructed*. Cela signifie que la valeur **SEQUENCE** est elle-même une structure ASN.1, ce qu'on peut voir dans la liste des trois composants d'un certificat définie entre accolades.

[L]ength

Donne la longueur de la valeur en octets.

[V]alue

Est la donnée elle-même. Dans ce document nous employons le terme *valeur* (dans le document X.690 le terme est *data value*).

Affichons le contenu DER avec l'utilitaire en ligne de commande *dder* en exécutant la commande

suivante :

```
$ dder -width 8 -recursive "| " m.der
```



Fig. 18

La copie d'écran de la figure 18 a été faite sous Windows pour changer un peu.

La description de la valeur indique *-cons* ou *-prim*, pour *constructed* ou *primitive*. Chaque fois que le tag indique une valeur *constructed* (ici, il s'agit à deux reprises du type **SEQUENCE**, qui est obligatoirement *constructed*), on descend d'un niveau dans la structure hiérarchique, que l'on a fait ressortir ici avec l'option *-recursive* "| ".

Extraction de tbsCertificate du certificat letsencrypt.org

Étape 1 de l'extraction

Commençons par enregistrer le certificat depuis le navigateur, dans le fichier *letsencryptorg.der*.

Firefox

Afficher le certificat comme vu précédemment, puis afficher l'onglet *Détails* et cliquer sur le bouton *Exporter*. Ensuite sélectionner *Certificat X.509 (DER)*.

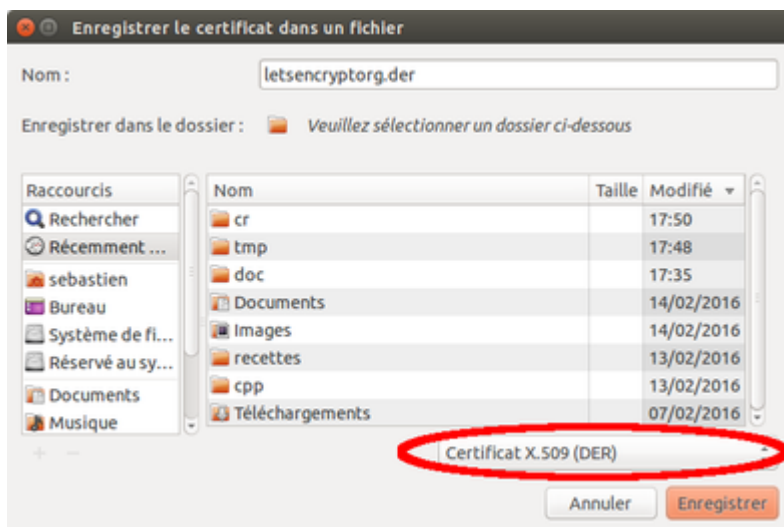


Fig. 19

Afficher le certificat, puis cliquer sur le bouton *Copier dans un fichier...*.... Ensuite sélectionner *X.509 binaire encodé DER*.

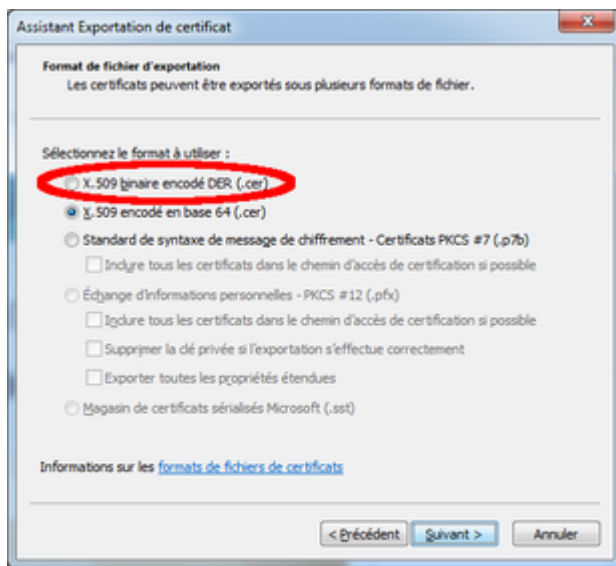


Fig. 20

PEM versus DER

Avec les certificats x509, l'encodage PEM est une surcouche de DER qui consiste à :

- Encoder le contenu binaire (après chiffrement éventuel) en BASE64
- Ajouter au début et à la fin un texte standardisé qui définit et délimite la nature du contenu, ainsi que les informations de chiffrement s'il y a lieu
 - La ligne ajoutée au début commence par -----BEGIN
 - La ligne ajoutée à la fin commence par -----END

Si vous avez enregistré le certificat avec un encodage PEM, vous pouvez le convertir en DER avec *openssl*. Exemple pour *letsencrypt.org* (PEM) que l'on convertit en *letsencrypt.org* (DER) - comme on peut voir, l'encodage par défaut avec *openssl* est PEM.

```
$ openssl x509 -in letsencrypt.org.cer -outform der -out  
letsencrypt.org.der
```

NOTE

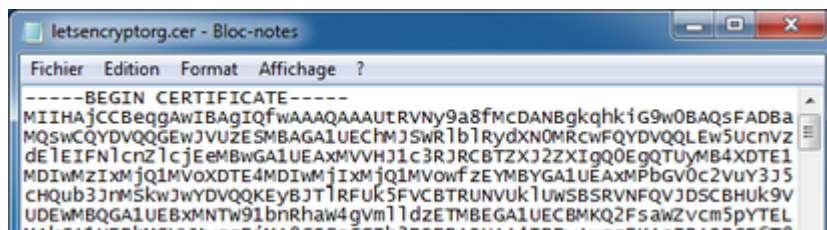


Fig. 21

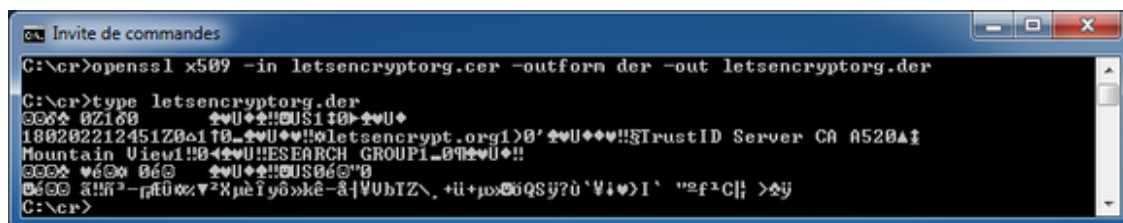


Fig. 22

Vous pouvez faire cette conversion "à la main" en enlevant la première et la dernière ligne et en faisant une conversion BASE64 → binaire avec des outils comme *base64* (Linux) ou *notepad++* (Windows).

Étape 2 de l'extraction

Nous disposons maintenant d'un certificat enregistré en binaire (encodage DER) dans le fichier *letsencrypt.org.der*, dont nous allons à présent extraire la partie *tbsCertificate*.

NOTE

Les outils *dder* et *pkfile* (*pkfile* est présenté plus loin) peuvent lire indifféremment des fichiers codés en PEM ou en DER. Si le fichier est PEM, il est décodé à la volée.

Il y a deux solutions pour ce faire

1. À la main
2. À l'aide de l'utilitaire *pkfile*. *pkfile* est disponible à cette URL [\[12\]](#).

Extraction de tbsCertificate : 1ère méthode (à la main)

Un éditeur de fichier binaire ferait l'affaire, mais la manipulation est plus claire si l'on affiche le contenu hexadécimal avec *dder*.

Exécuter la commande

```
$ dder -recursive "| " -hex letsencryptorg.der > d
```

Encodage des fichiers affichés par dder

dder lit indifféremment des fichiers PEM et DER. Si le fichier est PEM il décode (et décrypte si nécessaire) les données en mémoire avant d'afficher le contenu DER.

NOTE

Donc la commande aurait pu être (avec le fichier *letsencryptorg.cer* encodé en PEM) :

```
$ dder -recursive "| " -hex letsencryptorg.cer > d
```

Ouvrir le fichier *d* dans un éditeur de texte. Comme on a affiché le contenu avec un décalage à chaque niveau hiérarchique (option *-recursive "| "*), la structure en trois parties des certificats x509 ressort bien.

Supprimer les deux premières lignes et un certain nombre de lignes à la fin pour que seul demeure le contenu de *tbsCertificate*. Ci-dessous, le texte à conserver est le texte sélectionné (les lignes du milieu ont été supprimées pour condenser l'image).

```
C:\cr>dder -recursive "| " -hex letsencryptorg.cer > d
C:\cr>_
```

Fig. 23

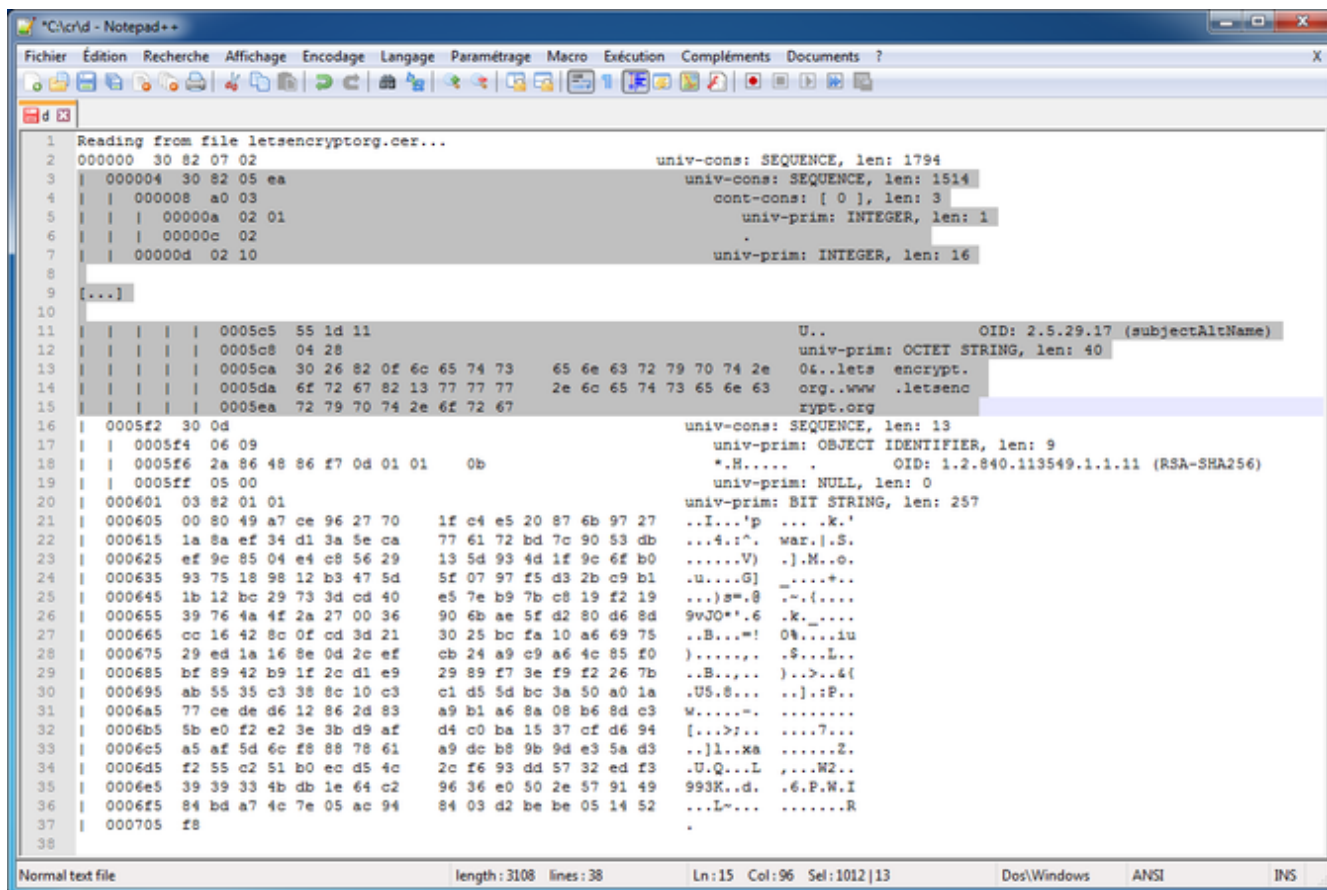


Fig. 24

Ensuite :

- Supprimer les "|" en début de ligne
- Supprimer l'offset (numéro sur six caractères)
- Supprimer le texte après les codes hexadécimaux (une fois supprimé les "|" et l'offset en début de ligne, ce sont tous les caractères au-delà de la 55e position qu'il faut supprimer).
- Supprimer tous les espaces

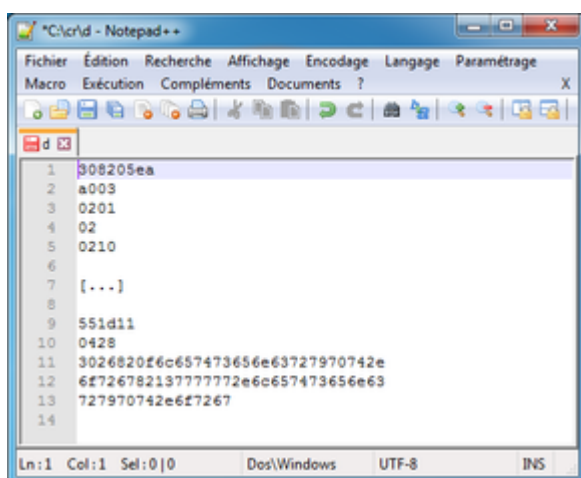


Fig. 25

On retrouve (figure 25) une sous-partie du fichier *letsencryptorg.der*, codée en hexadécimal, qui commence par **308205ea** et se termine par **2e6f7267**.

NOTE

Cette manipulation peut être faite avec un programme d'édition de fichier binaire, en ne gardant que les données à partir de l'offset 4, d'une longueur de 1518 octets.

Il faut ensuite convertir le contenu "codé hexadécimal" en binaire comme cela a été vu précédemment (commande `xxd -r -p` sous Linux, avec `notepad++` sous Windows).

Au final on obtient le fichier `tbs.der` comme montré sur la figure 26.

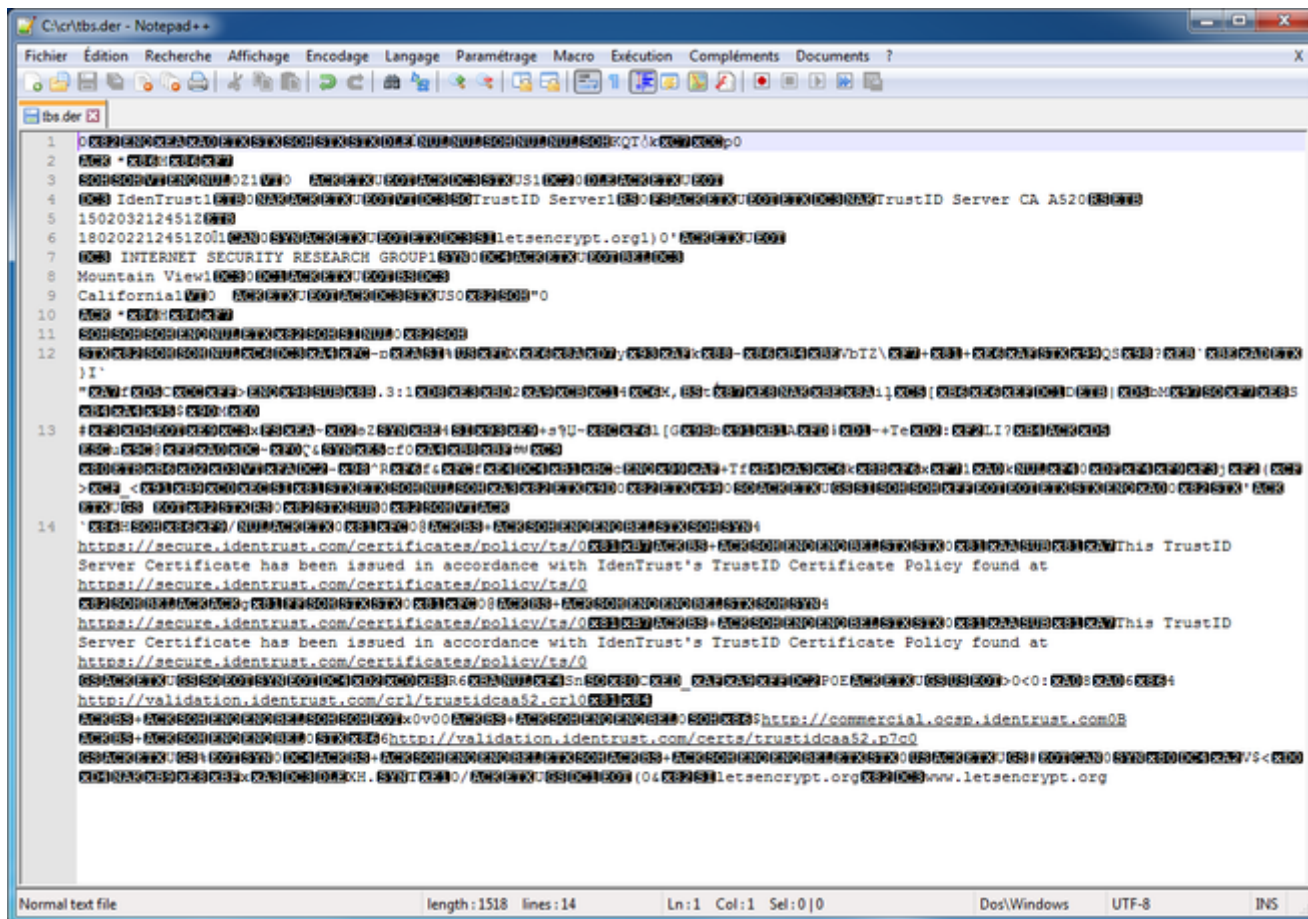


Fig. 26

Extraction de `tbsCertificate` : 2ème méthode (à l'aide de `pkfile`)

Exécuter la commande

```
$ pkfile letsencryptorg.der -l 2
```

```

C:\cr>pkfile.exe letsencryptorg.cer -l 2
1      cons: SEQUENCE, len: 1798 <4+1794>
1.1    ┌─ cons: SEQUENCE, len: 1518 <4+1514>
1.2    │ ┌─ cons: SEQUENCE, len: 15 <2+13>
1.3    │ └─ prim: BIT STRING, len: 261 <4+1+256>
1.3.1  │ 8049A7CE 9627701F C4E52087 6B97271A
        │ 8AEF34D1 3A5ECA77 6172BD7C 9053DBEF
        │ 9C8504E4 C8562913 5D934D1F 9C6FB093
        │ 75189812 B3475D5F 0797F5D3 2BC9B11B
        │ 12BC2973 3DCD40E5 7EB97BC8 19F21939
        │ 764A4F2A 27003690 6BAE5FD2 80D68DCC
        │ 16428C0F CD3D2130 25BCFA10 A6697529
        │ ED1A168E 0D2CEFCB 24A9C9A6 4C85F0BF
        │ 8942B91F 2CD1E929 89F73EF9 F2267BAB
        │ 5535C338 8C10C3C1 D55DBC3A 50A01A77
        │ CEDED612 862D83A9 B1A68A08 B68DC35B
        │ E0F2E23E 3BD9AFD4 C0BA1537 CFD694A5
        │ AF5D6CF8 887861A9 DCB89B9D E35AD3F2
        │ 55C251B0 ECD54C2C F693DD57 32EDF339
        │ 39334BDB 1E64C296 36E0502E 57914984
        │ BDA74C7E 05AC9484 03D2BEBE 051452F8
C:\cr>

```

Fig. 27

Le résultat visible sur la figure 27 nous montre que le `tbsCertificate` correspond à la valeur **SEQUENCE** de 1518 octets (4 octets d'en-tête, 1514 octets de données). *pkfile* donne à cette valeur les coordonnées 1.1.

Nous enregistrons cette valeur en binaire dans le fichier *tbs2.der* en exécutant la commande

```
$ pkfile letsencryptorg.der -n 1.1 -x -o tbs2.der
```

```

C:\cr>pkfile.exe letsencryptorg.cer -n 1.1 -x -o tbs2.der
C:\cr>

```

Fig. 28

Encodage des fichiers analysés par pkfile

NOTE

pkfile lit indifféremment des fichiers PEM et DER. Si le fichier est PEM il décode (et déchiffre si nécessaire) les données en mémoire avant de traiter le contenu DER.

Calcul du hash de `tbsCertificate`

Linux

Le calcul des différents algorithmes de hash est disponible en ligne de commande. Pour SHA-256 le programme est *sha256sum*.

Exécuter

```
$ sha256sum tbs.der
```

```

sebastien@maison-pclin:~/cr$ sha256sum tbs.der
8364da78f1fd8dcc6812e568268bf2daf8791be383109745388879c496a8c3dd  tbs.der
sebastien@maison-pclin:~/cr$ sha256sum tbs2.der
8364da78f1fd8dcc6812e568268bf2daf8791be383109745388879c496a8c3dd  tbs2.der
sebastien@maison-pclin:~/cr$

```

Fig. 29

Les outils de calcul de hash ne sont pas disponibles par défaut. Voici quelques solutions (d'autres existent) :

- Utiliser *pkfile*, qui permet de calculer différents hash [20: *pkfile* peut le faire aussi sous Linux, mais dans ce système il est plus logique d'utiliser les programmes déjà installés. La fonctionnalité de calcul de hash a été ajoutée à *pkfile* pour simplifier les manipulations sous Windows.] .
- Installer les outils *GNUWin32*, disponibles à cette URL [13].
- 7-ZIP ajoute des menus contextuels dans l'explorateur pour calculer différents hashes, dont SHA-256. 7-ZIP est disponible à cette URL [14].

Exemple avec *pkfile*, exécuter

```
$ pkfile --sha256 tbs.der
```



```
C:\cr>pkfile.exe --sha256 tbs.der
8364da78f1fd8dcc6812e568268bf2daf8791be383109745388879c496a8c3dd
C:\cr>
```

Fig. 30



```
C:\cr>pkfile.exe --sha256 tbs2.der
8364da78f1fd8dcc6812e568268bf2daf8791be383109745388879c496a8c3dd
C:\cr>
```

Fig. 31

Les captures d'écran montrent également le calcul sur le fichier *tbs2.der* (créé avec *pkfile*), qui est bien identique à *tbs.der*, ce qui confirme au passage l'équivalence des deux méthodes pour extraire *tbsCertificate*.

Le hash trouvé (*M'*) concorde avec la signature (*M*), ce qui valide la signature du certificat *letsencrypt.org*

3.3. Conclusion

Nous arrivons au terme des manipulations à effectuer pour vérifier la signature RSA d'un certificat x509. Les calculs étaient élémentaires, mais cela nous a permis de voir :

- Les différents formats et encodages et les outils pour passer de l'un à l'autre
 - PEM versus DER
 - BASE64 versus binaire
 - Hexadécimal versus binaire
 - ASN.1
 - La structure de certificat x509

- Les solutions pour calculer sur des entiers de grande taille
 - *python* (évoqué ici mais non détaillé) et *bc*
 - Les transformations éventuelles et précautions à prendre pour calculer en saisie et affichage hexadécimal
 - La création de la fonction *powmod* dans *bc*
- Outils divers
 - Calcul du hash d'un fichier
 - Extraction d'une valeur (c'est-à-dire, d'une sous-partie) d'un fichier encodé en DER

La *signature* a été vérifiée mais le certificat lui-même n'a pas été validé en totalité. Il y a deux raisons à cela.

1. Une fois un certificat vérifié, il faut vérifier son parent dans la hiérarchie (le certificat qui l'a signé), et ainsi de suite, jusqu'à vérifier un certificat connu dans la base des certificats du navigateur (les certificats *racine*).
2. Le navigateur vérifie si les certificats rencontrés ont été révoqués à l'aide des Listes de Révocation des Certificats ou *CRL* (*Certificate Revocation List*).

4. Vérification de signature ECDSA

4.1. Cryptographie à courbes elliptiques

Ce document se concentre sur les problématiques de calcul effectif et de formats de fichiers. Nous n'allons pas expliquer ici toute la cryptographie à base de courbes elliptiques, nous allons simplement en résumer les grandes lignes, donner les formules applicables et quelques définitions.

4.1.1. Les deux familles de courbes elliptiques

Les courbes sur F_{2m} (binary field)

La notation F_{2m} est un raccourci. On a $F_{2m} = F_2[x]/(p(x))$ où $p(x)$ est un polynôme irréductible de degré m (source : [15]). Les "nombres" manipulés sont des polynômes sur F_2 et les opérations sont faites modulo $p(x)$. L'équation de la courbe (source : [16]) est

$$y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$$

Les opérations sur F_{2m} portent sur des polynômes et leur arithmétique est différente de l'arithmétique usuelle sur les nombres entiers. Par exemple quel que soit A de F_{2m} , on a $A + A = 0$ (soit $A = -A$ pour tout A).

Les courbes sur F_p (prime field)

p est un nombre premier. On a $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (source : [17]). Les opérations sont faites modulo p . L'équation de la courbe est (source : [16])

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

4.1.2. Les paramètres de domaine

Ces paramètres définissent les caractéristiques de la courbe. Une clé est définie pour une courbe et une seule, la courbe étant entièrement déterminée par ses paramètres de domaine. On parle aussi de paramètres de la courbe.

Source : [16].

- Sur F_{2m} , les paramètres sont $(m, f(x), a, b, G, n, h)$
 - m , entier qui définit F_{2m} .
 - $f(x)$, polynôme irréductible de degré m .
 - a et b , les paramètres de l'équation $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$.
 - G , le générateur d'un sous-groupe du groupe $E(F_{2m})$.
 - n est l'ordre du groupe généré par G .
 - h est le cofacteur, c'est le nombre d'éléments de $E(F_{2m})$ divisé par n .
- Sur F_p , les paramètres sont (p, a, b, G, n, h)
 - p , nombre premier.

- a et b , les paramètres de l'équation $y^2 \pmod{p} = x^3 + ax + b \pmod{p}$.
- G , le générateur d'un sous-groupe du groupe $E(F_p)$.
- n est l'ordre du groupe généré par G .
- h est le cofacteur, c'est le nombre d'éléments de $E(F_p)$ divisé par n .

Les courbes nommées

Toute information pratique sur les courbes elliptiques (clé privée ou publique, signature...) n'est exploitable qu'avec les paramètres de domaine de la courbe elliptique utilisée. Les paramètres de domaine peuvent être donnés de deux manières : tels quels (les différents éléments vus précédemment et qui définissent une courbe, tels que a , b , G , etc.), ou bien sous la forme d'une *courbe nommée*.

`openssl` peut lister les courbes nommées :

```
$ openssl ecparam -list_curves
secp112r1 : SECG/WTLS curve over a 112 bit prime field
secp112r2 : SECG curve over a 112 bit prime field
[...]
brainpoolP512r1: RFC 5639 curve over a 512 bit prime field
brainpoolP512t1: RFC 5639 curve over a 512 bit prime field
```

La commande suivante permet d'afficher les détails d'une courbe, exemple avec `secp256r1` :

```
$ openssl ecparam -name secp256r1 -noout -text
using curve name prime256v1 instead of secp256r1
ASN1 OID: prime256v1
NIST CURVE: P-256
```

`openssl` nous avertit que `secp256r1` (définition "SECG" : [\[18\]](#)) est en fait la courbe *NIST P-256* (définie ici [\[19\]](#)), qui porte le nom *prime256v1* dans le standard X9.62.

Tout ça pour dire quoi ? Rien, à part que l'on peut se féliciter de vivre à l'heure d'Internet pour s'y retrouver dans la jungle des documents de normalisation.

Et les paramètres de domaine ? Il faut demander à `openssl` d'afficher les paramètres de la courbe sous forme explicite :

```

$ openssl ecparam -name secp256r1 -noout -text -param_enc explicit
using curve name prime256v1 instead of secp256r1
Field Type: prime-field
Prime:
    00:ff:ff:ff:ff:ff:00:00:00:01:00:00:00:00:00:00:
    00:00:00:00:00:00:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:
    ff:ff:ff
A:
    00:ff:ff:ff:ff:ff:00:00:00:01:00:00:00:00:00:00:
    00:00:00:00:00:00:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:ff:
    ff:ff:fc
B:
    5a:c6:35:d8:aa:3a:93:e7:b3:eb:bd:55:76:98:86:
    bc:65:1d:06:b0:cc:53:b0:f6:3b:ce:3c:3e:27:d2:
    60:4b
Generator (uncompressed):
    04:6b:17:d1:f2:e1:2c:42:47:f8:bc:e6:e5:63:a4:
    40:f2:77:03:7d:81:2d:eb:33:a0:f4:a1:39:45:d8:
    98:c2:96:4f:e3:42:e2:fe:1a:7f:9b:8e:e7:eb:4a:
    7c:0f:9e:16:2b:ce:33:57:6b:31:5e:ce:cb:b6:40:
    68:37:bf:51:f5
Order:
    00:ff:ff:ff:ff:ff:00:00:00:00:ff:ff:ff:ff:ff:ff:
    ff:ff:bc:e6:fa:ad:a7:17:9e:84:f3:b9:ca:c2:fc:
    63:25:51
Cofactor: 1 (0x1)
Seed:
    c4:9d:36:08:86:e7:04:93:6a:66:78:e1:13:9d:26:
    b7:81:9f:7e:90

```

Tous ces paramètres ont été vus plus haut, sauf *Seed*. Qu'en est-il ?

Seed est un nombre arbitraire à partir duquel les autres paramètres de la courbe ont été déterminés, de manière vérifiable par n'importe qui, selon une spécification X9.62. Cela garantit qu'ils n'ont pas été choisis en raison de propriétés cachées qui permettraient à leur inventeur de casser la protection facilement. *Seed* est à l'origine des paramètres de la courbe mais il n'en fait pas partie. Le calcul des paramètres d'après *Seed* utilise une fonction de hachage à sens unique, ce qui garantit que le choix ne s'est pas fait dans l'autre sens (détermination de paramètres ad hoc puis du *Seed* correspondant).

Le x509

La RFC 5480 ([20]) interdit expressément l'usage de paramètres explicites dans le standard x509, seules les courbes nommées peuvent y être utilisées.

Nous allons maintenant nous intéresser aux courbes sur les corps premiers (F_p). Les courbes binaires fonctionnent selon les mêmes principes mais les "nombres" manipulés sont des polynômes sur F_2 , et si l'on souhaite y mener des calculs avec *bc* ou *python*, cela nécessite de coder spécifiquement leur arithmétique. Dans ce document nous ferons des calculs sur F_p uniquement.

4.1.3. L'arithmétique des courbes sur F_p

Les calculs sont faits modulo p et nous ne le précisons plus par la suite [21: Dans la signature ECDSA certains calculs sont faits modulo n , l'ordre du groupe associé à la courbe. Cela sera signalé. À défaut, tous les calculs sont faits modulo p .].

Clés privée et publique

La construction d'une paire de clés privée et publique consiste à

1. Choisir un entier k inférieur à n
2. Calculer $Q = kG$ où G est l'un des paramètres de domaine de la courbe (voir ci-après la multiplication d'un point par un scalaire)

Le point Q est la clé publique, l'entier k est la clé privée [22: Un peu plus loin la clé privée sera notée d]. Ainsi contrairement au RSA où la clé privée et publique ont même nature (ce sont deux entiers), ici la clé publique est un point tandis que la clé privée est un entier.

Addition de deux points distincts (et non alignés verticalement)

La signification de l'addition de deux points est géométrique et on peut le voir ici [21].

Les formules qui en découlent sont les suivantes, pour $R = P + Q$ de coordonnées (r_x, r_y) , (p_x, p_y) et (q_x, q_y) respectivement, P étant différent de Q et non aligné verticalement avec Q :

$$s = \frac{p_y - q_y}{p_x - q_x}, \quad r_x = s^2 - p_x - q_x, \quad r_y = s(p_x - r_x) - p_y$$

Addition d'un point avec lui-même

Pour $P = Q$, le calcul de $R = P + P = 2P$ est (en reprenant les notations précédentes) :

$$s = \frac{3(p_x^2 + a)}{2p_y}, \quad r_x = s^2 - 2p_x, \quad r_y = s(p_x - r_x) - p_y$$

IMPORTANT

Le symbole de fraction n'est pas la division euclidienne mais la multiplication par l'inverse modulo p .

Multiplication d'un point par un entier naturel

Avec les formules qui précèdent, on sait calculer $P + P = 2P$, $P + 2P = 3P$, et ainsi de suite. On sait donc calculer kP , k entier.

NOTE

Addition de deux points alignés verticalement

Si P et Q sont alignés verticalement ils sont opposés (cela découle du terme y^2 de l'équation), on a donc $P = -Q$ que l'on peut aussi écrire $P + Q = O$. O est le "point à l'infini" de la courbe elliptique et il joue le même rôle que zéro dans l'addition des entiers. Ainsi on a $P + O = O + P = O$ quel que soit P sur la courbe.

Multiplication par un entier k très grand

Les k utilisés en pratique étant des grands nombres (de l'ordre de 2^{256} avec *prime256v1*), il n'est pas possible de calculer kP en ajoutant P à lui-même k fois.

Il faut utiliser l'algorithme d'exponentiation rapide vu précédemment [9]. Remplacer la multiplication de deux entiers par l'addition de deux points et l'élévation à la puissance par la multiplication d'un point par un entier.

4.1.4. Fonctions de calcul sur F_p avec le programme *bc*

Nous allons maintenant écrire les fonctions de calcul d'après les formules qui précèdent.

Un point est représenté par un tableau et la convention du script est la suivante :

- Le point à l'infini est codé par *point[2]* différent de zéro
- Sinon (si *point[2]* est nul), *point[0]* est la coordonnée x et *point[1]* est la coordonnée y .

Le calcul de l'inverse modulaire utilise l'algorithme d'Euclide étendu [22].

NOTE

Le script présenté plus loin contient la fonction *powmod* utilisée précédemment, pour le RSA, mais nous n'en avons pas besoin pour les calculs ECDSA.

L'opérateur modulo

L'opérateur % (*modulo*) ne fonctionne pas à l'identique d'un langage à l'autre ou d'une librairie à l'autre.

IMPORTANT

- *bc* renvoie un nombre dont le signe est le signe du premier argument. Ainsi $(-5) \% 3$ renvoie -2 .
- *python* renvoie toujours une valeur positive. $(-5) \% 3$ renvoie 1 .
- La librairie *libgmp* (*GNU Multiple Precision Arithmetic Library*) renvoie toujours une valeur positive. $(-5) \% 3$ renvoie 1 .

Cela ne change pas la nature des calculs effectués mais doit parfois être pris en compte. Ainsi la fonction *invmod* (définie dans *crypto.b* ci-dessous) ne peut pas fonctionner avec des nombres négatifs et elle commence par "normaliser" le premier argument pour qu'il soit compris entre 0 et $n - 1$.

crypto.b

```
/* Calculate the invert of a modulo n */
define invmod(a, n) {
    auto aa, bb, r, t, anc_t, nou_t, negflag
    aa = n
    negflag = 0
    if (a < 0) {
        negflag = 1
        a %= n
        if (a < 0) a += n
    }
```

```

}
bb = a
r = 1
t = 1
anc_t = 0
while (1) {
    q = aa / bb
    anc_r = r
    r = aa - bb * q

    nou_t = anc_t - q * t
    if (nou_t >= 0) nou_t %= n
    if (nou_t < 0) nou_t = n - (-nou_t % n)
    anc_t = t
    t = nou_t

    aa = bb
    bb = r
    if (r <= 1) break;
}

if (r != 1) {
    /*
        No invert can be returned => error
        Alternate solution: return 0

        I find triggering an error best: the calculation stops
        immediately instead of continuing with meaningless values
    */
    return 1 % 0
} else {
    if (negflag) t -= n
    return t
}

/*
    The well-known powmod function, sometimes referred to in bc scripts
    as "mpower".
*/
define powmod(a, b, c) {
    auto p, r
    p = a
    r = 1
    while (b > 0) {
        if (b % 2) r = (r * p) % c
        p = (p * p) % c
        b /= 2
    }
    return r
}

```

```

/*
    The EC functions below use the following conventions.

    - The point at infinity has non null element of index 2 (array[2]!=0),
      for any other point, array[2] is zero.

    - If array[2] is zero, array[0] is the x coordinate and
      array[1] is the y coordinate.

*/

/*
    ECC addition of p and q, p[0] being different from q[0]
*/
define ec_add_core(*r[], p[], q[], m) {
    auto s
    s = ((p[1] - q[1]) * invmod(p[0] - q[0], m)) % m
    r[0] = (s^2 - p[0] - q[0]) % m
    r[1] = (s * (p[0] - r[0]) - p[1]) % m
    r[2] = 0
}

/*
    ECC point doubling
*/
define ec_dbl_core(*r[], p[], a, m) {
    auto s
    s = ((3 * p[0]^2 + a) * invmod(2 * p[1], m)) % m
    r[0] = (s^2 - 2 * p[0]) % m
    r[1] = (s * (p[0] - r[0]) - p[1]) % m
    r[2] = 0
}

/*
    ECC addition of p and q for any value of p and q
*/
define ec_add(*r[], p[], q[], a, m) {
    if (p[2]) { r[0] = q[0]; r[1] = q[1]; r[2] = q[2]; return }
    if (q[2]) { r[0] = p[0]; r[1] = p[1]; r[2] = p[2]; return }
    if (p[0] == q[0]) {
        if (p[1] != q[1]) {
            r[2] = 1 /* We don't verify whether p[1]==-q[1] as it should... */
        } else {
            if (p[2]) {
                r[2] = 1
                return
            }
            .=ec_dbl_core(r[], p[], a, m)
        }
    } else {

```

```

        .=ec_add_core(r[], p[], q[], m)
    }
}

/*
  ECC scalar point multiplication
*/
define ec_mul(*r[], p[], k, a, m) {
    auto tmp[]
    r[2] = 1
    if (p[2]) return
    while (k > 0) {
        if ((k % 2) == 1) {
            .=ec_add(r[], r[], p[], a, m)
        }
        /*
         * ec_add(p[], p[], p[], a, m) does not work with bc,
         * need to use a temporary array.
         */
        .=ec_add(tmp[], p[], p[], a, m)
        p[0]=tmp[0]
        p[1]=tmp[1]
        p[2]=tmp[2]
        k /= 2
    }
    if (!r[2]) {
        if (r[0] < 0) r[0] += m
        if (r[1] < 0) r[1] += m
    }
}

```

Le "." dans le script bc

bc permet de déclarer une fonction *void* pour qu'elle ne renvoie pas de valeur, exemple :

```
define void myprint(x) { print "x=", x, "\n" }
```

NOTE

La version Windows de *bc* (GnuWin32) est ancienne et ne reconnaît pas le mot-clé *void*. Le script *crypto.b* a été conçu pour être compatible avec cette version. Pour éviter qu'une expression (ici l'appel d'une fonction) ne produise un affichage parasite, chaque appel est précédé de ".". Ainsi le résultat est affecté à la variable *last* (qui vaut toujours la dernière valeur calculée). Cela ne modifie donc pas le calcul. C'est la méthode usuelle avec *bc* pour ne pas afficher le résultat d'une expression.

4.2. Les courbes elliptiques dans le standard x509

4.2.1. Représentation d'un point dans le standard x509

Un point de la courbe d'abscisse x donnée ne peut avoir que deux valeurs de y (du fait du terme y^2 des équations).

Le standard X9.62 définit la méthode pour désigner quel y est le bon, en utilisant un seul bit d'information. Ainsi l'enregistrement de x et du bit d'information pour retrouver le bon y suffisent à coder un point, et cette forme est dite *compressée*. Comme il est en plus possible de mélanger les formes (compressée et non compressée), un point peut être codé de trois manières :

La forme non compressée

Enregistrement des deux coordonnées

La forme compressée

Enregistrement de x et du bit d'information relatif à y

La forme hybride

Enregistrement de x , y et du bit d'information relatif à y

Sur F_p on a $y_1 = -y_2$ (car non seulement y apparaît sous la forme y^2 , mais en plus, il est isolé à gauche du signe *égal*) et comme nous sommes dans l'arithmétique modulaire on peut ré-écrire cette égalité $y_1 + y_2 = p$. p étant impair, y_1 et y_2 n'ont pas même parité. Le bit d'information est le dernier bit de y (sa parité). On comprend aisément que la forme hybride ne présente aucun intérêt sur F_p , puisqu'un simple examen de y donne le bit d'information à employer dans la forme compressée. La forme hybride apporte un plus sur F_{2m} où le bit d'information doit être calculé.

Le standard x509 (ici la RFC 5480) permet de coder un point soit sous forme compressée, soit sous forme non compressée. La RFC 5480 interdit expressément la forme hybride définie par le standard X9.62.

Selon le standard X9.62 en vigueur dans la RFC 5480 (nous ne mentionnons donc pas ici la forme hybride, interdite par la RFC 5480) les formes compressée et non compressée sont codées ainsi [23: Le standard X9.62 définit 00 comme seul octet pour coder le point à l'infini. La RFC 5480 interdit toute autre valeur que 02, 03 et 04, et interdit donc 00. C'est logique car on ne voit pas dans quel but le point à l'infini serait enregistré dans le cadre x509. Dans le standard x509, un point est une clé publique.] :

- Premier octet = 02 : le point est compressé, et y est pair. x est codé juste après 02.
- Premier octet = 03 : le point est compressé, et y est impair. x est codé juste après 03.
- Premier octet = 04 : le point est non compressé. x est codé juste après 04, et y est codé juste après x . Comme x et y ont même taille, il n'y a pas besoin de délimiteur pour retrouver la position à laquelle on passe de x à y .

Pour retrouver le y qui satisfasse l'équation $y^2 = x^3 + ax + b$, il faut calculer le terme à droite du signe égal puis en extraire la racine carrée (dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: il s'agit de la *racine modulaire*), et enfin choisir le bon y d'après le bit de parité.

D'après [23], il n'existe pas d'algorithme déterministe qui calcule la racine modulaire en temps polynomial. Cette même source donne un algorithme de type Monte-Carlo (qui fait donc intervenir le hasard) en *temps moyen* polynomial, ce qui est suffisant dans la pratique.

```

$ BC_LINE_LENGTH=0 bc secp256r1.b crypto.b
bc 1.06.95
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000, 2004, 2006 Free Software Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type `warranty'.
ec_mul(r[], g[], n, a, p)
r[2]
1

```

Fig. 33

Création d'une paire de clés privée et publique sur prime256v1

Exécuter [24: Enregistrer une clé privée dans un fichier non chiffré est une mauvaise pratique. D'autre part le fichier doit être enregistré dans un endroit parfaitement sécurisé, ne jamais être transféré à travers un réseau, etc. Ici cela n'a pas d'importance puisque la clé est une clé de test.]

```
$ openssl ecparam -name prime256v1 -genkey -out k.pem
```

Examiner le résultat avec

```
$ openssl ec -in k.pem -noout -text
```

```

sebastien@maison-pclin: ~
sebastien@maison-pclin:~$ openssl ec -in k.pem -noout -text
read EC key
Private-Key: (256 bit)
priv:
  67:3d:ca:d1:21:e3:7b:7e:15:ac:79:2f:8c:a0:67:
  08:56:e2:de:9c:23:36:84:a9:a0:fa:3d:76:7b:61:
  fb:f1
pub:
  04:13:4d:4e:5f:63:2e:05:45:35:0f:b8:9e:e0:52:
  00:45:0e:07:a5:b1:15:bc:a7:2d:f5:f4:89:6d:24:
  33:a6:5a:a1:a3:3a:97:ac:b4:e4:0d:05:19:cb:02:
  9b:1e:85:e2:6d:3d:6b:3d:7f:f3:d3:62:61:27:d0:
  c0:45:39:2d:91
ASN1 OID: prime256v1
NIST CURVE: P-256
sebastien@maison-pclin:~$

```

Fig. 34

Par défaut, *openssl* enregistre les clés publiques sous forme non compressée, ce que l'on peut voir au 04 qui démarre la suite d'octets en-dessous de "pub:".

À l'aide de la commande *openssl* ci-dessus (ou bien avec *pkfile*, ou encore *dder*), copier-coller les valeurs de la clé privée et publique dans *k.b*, sous les noms *k* et *q[]*, respectivement.

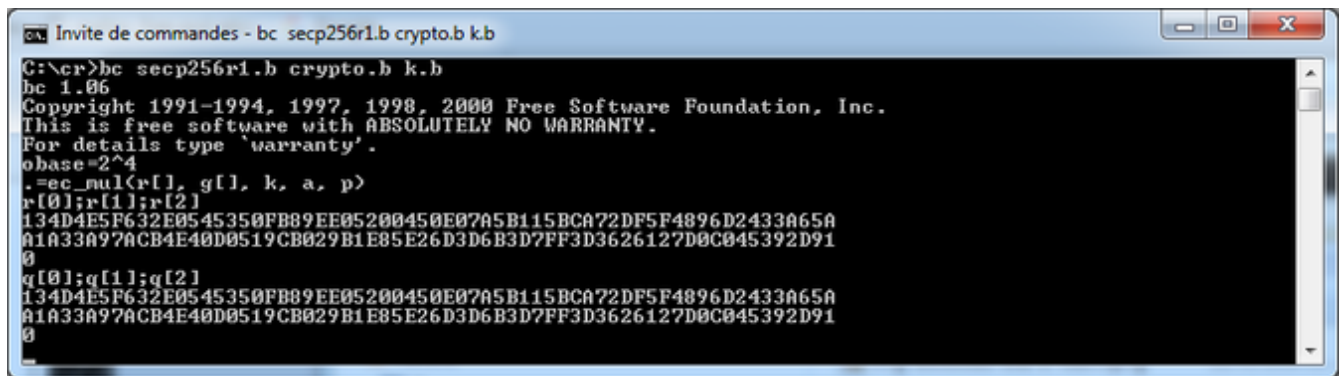
k.b

```
save_ibase=ibase
ibase=2^4
k=673DCAD121E37B7E15AC792F8CA0670856E2DE9C233684A9A0FA3D767B61FBBF1
q[0]=134D4E5F632E0545350FB89EE05200450E07A5B115BCA72DF5F4896D2433A65A
q[1]=A1A33A97ACB4E40D0519CB029B1E85E26D3D6B3D7FF3D3626127D0C045392D91
q[2]=0
ibase=save_ibase
```

Calcul de la clé publique d'après la clé privée

On peut facilement calculer Q (la clé publique) d'après k (la clé privée). Au passage, cela permet de vérifier le bon fonctionnement de la chaîne :

1. Les fonctions de *crypto.b*
2. Les paramètres de domaine de *prime256v1*
3. La définition dans *k.b* des valeurs de la paire de clés privée et publique



```
C:\cr>bc secp256r1.b crypto.b k.b
bc 1.06
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000 Free Software Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type 'warranty'.
ibase=2^4
.=ec_mul(r[], g[], k, a, p)
r[0];r[1];r[2]
134D4E5F632E0545350FB89EE05200450E07A5B115BCA72DF5F4896D2433A65A
A1A33A97ACB4E40D0519CB029B1E85E26D3D6B3D7FF3D3626127D0C045392D91
0
q[0];q[1];q[2]
134D4E5F632E0545350FB89EE05200450E07A5B115BCA72DF5F4896D2433A65A
A1A33A97ACB4E40D0519CB029B1E85E26D3D6B3D7FF3D3626127D0C045392D91
0
```

Fig. 35

4.2.3. Création d'un certificat auto-signé

Par définition, un certificat auto-signé a même émetteur (*issuer*) et sujet (*subject*). Sa clé sera celle du fichier *k.pem*.

Exécuter la commande :

```
$ openssl req -new -x509 -key k.pem -subj "/CN=Sebastien Millet DEV CA/C=FR" -out cert.pem
```

Contrôler le résultat avec cette commande :

```
$ openssl x509 -in cert.pem -noout -text
```

```

C:\cr>openssl req -new -x509 -key k.pem -subj "/CN=Sebastien Millet DEU CA/C=FR" -out cert.pem
C:\cr>openssl x509 -in cert.pem -noout -text
Certificate:
    Data:
        Version: 3 (0x2)
        Serial Number:
            b9:a3:d9:86:82:7e:b6:c7
        Signature Algorithm: ecdsa-with-SHA256
        Issuer: CN=Sebastien Millet DEU CA, C=FR
        Validity
            Not Before: Mar 21 12:52:54 2016 GMT
            Not After : Apr 20 12:52:54 2016 GMT
        Subject: CN=Sebastien Millet DEU CA, C=FR
        Subject Public Key Info:
            Public Key Algorithm: id-ecPublicKey
            Public-Key: (256 bit)
            pub:
                04:13:4d:4e:5f:63:2e:05:45:35:0f:b8:9e:e0:52:
                00:45:0e:07:a5:b1:15:bc:a7:2d:f5:f4:89:6d:24:
                33:a6:5a:a1:a3:3a:97:ac:b4:e4:0d:05:19:cb:02:
                9b:1e:85:e2:6d:3d:6b:3d:7f:f3:d3:62:61:27:d0:
                c0:45:39:2d:91
            ASN1 OID: prime256v1
            NIST CURVE: P-256
        X509v3 extensions:
            X509v3 Subject Key Identifier:
                7B:FE:80:F3:D7:D5:5D:12:2C:39:8D:AC:27:24:E1:C5:9C:69:3A:C9
            X509v3 Authority Key Identifier:
                keyid:7B:FE:80:F3:D7:D5:5D:12:2C:39:8D:AC:27:24:E1:C5:9C:69:3A:C9

            X509v3 Basic Constraints:
                CA:TRUE
        Signature Algorithm: ecdsa-with-SHA256
            30:45:02:21:00:ea:af:9a:71:67:9b:8d:b0:97:d9:b3:fd:6f:
            12:69:72:2f:90:64:71:9a:a0:f9:eb:a6:09:eb:ea:a2:13:72:
            49:02:20:34:1f:27:79:cf:a2:50:03:03:09:55:3a:62:49:47:
            93:d5:7f:06:cd:3a:f3:da:17:58:c0:5e:cd:f6:80:f7:f5
C:\cr>

```

Fig. 36

4.2.4. Vérification de la signature ECDSA du certificat

Signature d'un message avec ECDSA

Les formules sont disponibles sur de nombreux sites, par exemple ici [\[24\]](#).

Ce tutoriel (en anglais) est très bien fait et explique dans le détail de nombreux calculs [\[25\]](#).

Jusqu'à présent k désignait la clé privée. Ci-dessous k est un entier choisi aléatoirement, alors que la clé privée est notée d .

Les notations sont celles introduites précédemment pour les paramètres de domaine ainsi que la clé publique. Le message à signer est noté m et son hash est noté $H(m)$.

1. Choisir un entier k entre 0 et n , différent de 0 et de n

2. Calculer $R = (R_x, R_y) = kG$, $r = R_x \bmod n$ Si r est égal à 0, recommencer à l'étape 1

3. Calculer $s = \frac{H(m) + rd}{k} \bmod n$ Si s est égal à zéro, recommencer à l'étape 1

NOTE La division par k est une multiplication par $k^{-1} \bmod n$.

IMPORTANT

k doit être cryptographiquement aléatoire, et différent à chaque signature. Si une clé signe deux documents différents avec un k unique, il est trivial de la calculer. Le lien [25] en donne la démonstration et décrit un cas pratique avec le programme *openssl* modifié pour signer avec un k invariable.

Le couple (r, s) est la signature de $H(m)$.

Vérification d'une signature ECDSA

1. Calculer $u_1 = H(m)(s^{-1} \bmod n) \bmod n$ et $u_2 = r(s^{-1} \bmod n) \bmod n$

2. Calculer $P = (P_x, P_y) = u_1G + u_2Q, p = P_x \bmod n$

NOTE

Dans les formules de calcul de u_1 et u_2 , on pourrait se passer du deuxième $\bmod n$, mais le calcul serait un peu plus long.

3. Vérifier que $p = r$

Vérification de notre certificat auto-signé

L'encodage de (r, s) est standardisé par la RFC 5280. Il s'agit de la définition suivante :

```
ECDSA-Sig-Value ::= SEQUENCE {  
    r  INTEGER,  
    s  INTEGER  
}
```

Si vous vous rappelez les chapitres précédents concernant le RSA, la signature (ici la valeur de (r, s)) est la troisième séquence du certificat. Avec *pkfile* il s'agit du noeud de coordonnées 1.3.1.

Nous allons récupérer les valeurs de r et s du certificat et les écrire dans le fichier *sign.b*. Deux possibilités pour afficher r et s :

1. Avec *pkfile* (la première commande permet de voir que nous avons besoin de décoder la valeur 1.3.1) :

```
pkfile cert.pem -l 3  
pkfile cert.pem -N 1.3.1
```

```

C:\cr>pkfile cert.pem -l 3
1      cons: SEQUENCE, len: 425 <4+421>
1.1    cons: SEQUENCE, len: 335 <4+331>
1.1.1  cons: cont [ 0 ], len: 5 <2+3>
1.1.2  prin: INTEGER, len: 11 <2+9>
1.1.2.1 00B9A3D986827EB6C7
1.1.3  cons: SEQUENCE, len: 12 <2+10>
1.1.4  cons: SEQUENCE, len: 49 <2+47>
1.1.5  cons: SEQUENCE, len: 32 <2+30>
1.1.6  cons: SEQUENCE, len: 49 <2+47>
1.1.7  cons: SEQUENCE, len: 91 <2+89>
1.1.8  cons: cont [ 3 ], len: 82 <2+80>
1.2    cons: SEQUENCE, len: 12 <2+10>
1.2.1  prin: OBJECT IDENTIFIER, len: 10 <2+8>
1.2.1.1 1.2.840.10045.4.3.2 <ecdsa-with-SHA256>
1.3    prin: BIT STRING, len: 74 <2+1+71>
1.3.1  30450221 00EAAF9A 71679B8D B097D9B3
        FD6F1269 722F9064 719AA0F9 EBA609EB
        EAA21372 49022034 1F2779CF A2580383
        89553A62 494793D5 7F06CD3A F3DA1758
        C05ECDF6 80F7F5
C:\cr>

```

Fig. 37

```

C:\cr>pkfile cert.pem -N 1.3.1
1      cons: SEQUENCE, len: 71 <2+69>
1.1    prin: INTEGER, len: 35 <2+33>
1.1.1  00EAAF9A71679B8DB097D9B3FD6F1269722F90
        64719AA0F9EBA609EBEAA2137249
1.2    prin: INTEGER, len: 34 <2+32>
1.2.1  341F2779CFA258038389553A62494793D57F06
        CD3AF3DA1758C05ECDF680F7F5
C:\cr>

```

Fig. 38

2. Avec *openssl* (la première commande permet de voir que nous avons besoin de décoder la valeur située à l'offset 351) :

```

openssl asn1parse -in cert.pem
openssl asn1parse -in cert.pem -strparse 351

```



```

C:\cr>openssl asn1parse -in cert.pem
0:d=0 hl=4 l= 421 cons: SEQUENCE
4:d=1 hl=4 l= 331 cons: SEQUENCE
8:d=2 hl=2 l= 3 cons: cont [ 0 ]
10:d=3 hl=2 l= 1 prim: INTEGER           :02
13:d=2 hl=2 l= 9 prim: INTEGER           :B9A3D986827EB6C7
24:d=2 hl=2 l= 10 cons: SEQUENCE
26:d=3 hl=2 l= 8 prim: OBJECT             :ecdsa-with-SHA256
36:d=2 hl=2 l= 47 cons: SEQUENCE
38:d=3 hl=2 l= 32 cons: SET
40:d=4 hl=2 l= 30 cons: SEQUENCE
42:d=5 hl=2 l= 3 prim: OBJECT             :commonName
47:d=5 hl=2 l= 23 prim: UTF8STRING       :Sebastien Millet DEV CA
72:d=3 hl=2 l= 11 cons: SET
74:d=4 hl=2 l= 9 cons: SEQUENCE
76:d=5 hl=2 l= 3 prim: OBJECT             :countryName
81:d=5 hl=2 l= 2 prim: PRINTABLESTRING   :FR
85:d=2 hl=2 l= 30 cons: SEQUENCE
87:d=3 hl=2 l= 13 prim: UTCTIME          :160321125254Z
102:d=3 hl=2 l= 13 prim: UTCTIME         :160420125254Z
117:d=2 hl=2 l= 47 cons: SEQUENCE
119:d=3 hl=2 l= 32 cons: SET
121:d=4 hl=2 l= 30 cons: SEQUENCE
123:d=5 hl=2 l= 3 prim: OBJECT             :commonName
128:d=5 hl=2 l= 23 prim: UTF8STRING       :Sebastien Millet DEV CA
153:d=3 hl=2 l= 11 cons: SET
155:d=4 hl=2 l= 9 cons: SEQUENCE
157:d=5 hl=2 l= 3 prim: OBJECT             :countryName
162:d=5 hl=2 l= 2 prim: PRINTABLESTRING   :FR
166:d=2 hl=2 l= 89 cons: SEQUENCE
168:d=3 hl=2 l= 19 cons: SEQUENCE
170:d=4 hl=2 l= 7 prim: OBJECT             :id-ecPublicKey
179:d=4 hl=2 l= 8 prim: OBJECT             :prime256v1
189:d=3 hl=2 l= 66 prim: BIT STRING
257:d=2 hl=2 l= 80 cons: cont [ 3 ]
259:d=3 hl=2 l= 78 cons: SEQUENCE
261:d=4 hl=2 l= 29 cons: SEQUENCE
263:d=5 hl=2 l= 3 prim: OBJECT             :X509v3 Subject Key Identifier
268:d=5 hl=2 l= 22 prim: OCTET STRING     [HEX DUMP]:04147BFE80F3D7D55D122C398DAC2724E1C59C693A
C9
292:d=4 hl=2 l= 31 cons: SEQUENCE
294:d=5 hl=2 l= 3 prim: OBJECT             :X509v3 Authority Key Identifier
299:d=5 hl=2 l= 24 prim: OCTET STRING     [HEX DUMP]:301680147BFE80F3D7D55D122C398DAC2724E1C59C693AC9
325:d=4 hl=2 l= 12 cons: SEQUENCE
327:d=5 hl=2 l= 3 prim: OBJECT             :X509v3 Basic Constraints
332:d=5 hl=2 l= 5 prim: OCTET STRING     [HEX DUMP]:30030101FF
339:d=1 hl=2 l= 10 cons: SEQUENCE
341:d=2 hl=2 l= 8 prim: OBJECT             :ecdsa-with-SHA256
351:d=1 hl=2 l= 72 prim: BIT STRING

C:\cr>openssl asn1parse -in cert.pem -strparse 351
0:d=0 hl=2 l= 69 cons: SEQUENCE
2:d=1 hl=2 l= 33 prim: INTEGER           :EBAFA7A71679B8DB097D9B3FD6F1269722F9064719AA0F9EBA609
37:d=1 hl=2 l= 32 prim: INTEGER           :341F2779CFA258038389553A62494793D57F06CD3AF3DA1758C0
5ECD6680F7F5
C:\cr>

```

Fig. 39

Nous avons également besoin de $H(m)$, que nous noterons hm dans notre script (dans certains tutoriels il est noté e). Comme vu avec le RSA il faut extraire la partie `tbsCertificate` de notre certificat et en calculer le hash.

Quel hash ? Le certificat indique que l'algorithme est *ecdsa-with-SHA256*, donc $hm = \text{SHA256}(\text{tbsCertificate})$.

Calcul de hm

1. Extraire `tbsCertificate` dans `tbs.der` :

```
pkfile cert.pem -n 1.1 -x -o tbs.der
```

2. Calculer le hash SHA256 de `tbs.der` :


```
$ sha256sum tbs.der
```

```
sebastien@maison-pclin: ~/cr
sebastien@maison-pclin:~/cr$ pkfile cert.pem -l 2

1          | cons: SEQUENCE, len: 425 (4+421)
1.1        |   cons: SEQUENCE, len: 335 (4+331)
1.2        |   cons: SEQUENCE, len: 12 (2+10)
1.3        |   prim: BIT STRING, len: 74 (2+1+71)
1.3.1      |     30450221 00EAAF9A 71679B8D B097D9B3
           |     FD6F1269 722F9064 719AA0F9 EBA609EB
           |     EAA21372 49022034 1F2779CF A2580383
           |     89553A62 494793D5 7F06CD3A F3DA1758
           |     C05ECDF6 80F7F5
sebastien@maison-pclin:~/cr$ pkfile cert.pem -n 1.1 -x -o tbs.der
sebastien@maison-pclin:~/cr$ ls -l tbs.der
-rw-rw---- 1 sebastien sebastien 335 mars 22 23:23 tbs.der
sebastien@maison-pclin:~/cr$ sha256sum tbs.der
fa7c84f7ad64b726ac9261ce4b7dab683ce9e34491a2c4eab7f116fa7f1d2142  tbs.der
sebastien@maison-pclin:~/cr$
```

Fig. 40

Windows

```
pkfile --sha256 tbs.der
```

```
C:\cr>pkfile cert.pem -l 2

1          | cons: SEQUENCE, len: 425 (4+421)
1.1        |   cons: SEQUENCE, len: 335 (4+331)
1.2        |   cons: SEQUENCE, len: 12 (2+10)
1.3        |   prim: BIT STRING, len: 74 (2+1+71)
1.3.1      |     30450221 00EAAF9A 71679B8D B097D9B3
           |     FD6F1269 722F9064 719AA0F9 EBA609EB
           |     EAA21372 49022034 1F2779CF A2580383
           |     89553A62 494793D5 7F06CD3A F3DA1758
           |     C05ECDF6 80F7F5

C:\cr>pkfile cert.pem -n 1.1 -x -o tbs.der

C:\cr>dir tbs.der
Le volume dans le lecteur C n'a pas de nom.
Le numéro de série du volume est 048C-7445

Répertoire de C:\cr

21/03/2016  15:19                335 tbs.der
               1 fichier(s)                335 octets
               0 Rép(s)  366 073 024 512 octets libres

C:\cr>pkfile --sha256 tbs.der
fa7c84f7ad64b726ac9261ce4b7dab683ce9e34491a2c4eab7f116fa7f1d2142

C:\cr>
```

Fig. 41

Après ces manipulations le fichier *sign.b* contient *r*, *s* et *hm*.

sign.b

```
save_ibase=ibase
ibase=2^4
r=EAAF9A71679B8DB097D9B3FD6F1269722F9064719AA0F9EBA609EBEAA2137249
s=341F2779CFA258038389553A62494793D57F06CD3AF3DA1758C05ECDF680F7F5
hm=FA7C84F7AD64B726AC9261CE4B7DAB683CE9E34491A2C4EAB7F116FA7F1D2142
ibase=save_ibase
```

Ne reste plus qu'à faire les calculs :



```
sebastien@maison-pclin: ~/cr
sebastien@maison-pclin:~/cr$ bc secp256r1.b crypto.b k.b sign.b
bc 1.06.95
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000, 2004, 2006 Free Software Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type `warranty'.
obase=2^4
u1=(hm*invmod(s,n))%n
u2=(r*invmod(s,n))%n
.=ec_mul(t1[],g[],u1,a,p)
.=ec_mul(t2[],q[],u2,a,p)
.=ec_add(t[],t1[],t2[],a,p)
t[0];r
EAAF9A71679B8DB097D9B3FD6F1269722F9064719AA0F9EBA609EBEAA2137249
EAAF9A71679B8DB097D9B3FD6F1269722F9064719AA0F9EBA609EBEAA2137249
```

Fig. 42

On voit que l'abscisse du résultat est bien égale à *r* ce qui valide la signature.

4.3. Les Certificats Électroniques Visibles

4.3.1. Présentation

Le CEV ou *Certificat Électronique Visible* est un certificat au format 2D-Doc, mis en place par l'ANTS (Agence Nationale des Titres Sécurisés). Il est décrit à cette URL [\[26\]](#).

Le lien [\[26\]](#) permet de télécharger le document *ANTS_2D-Doc_CABSpec_v2.0.1_erratum.pdf*, qui en donne tous les détails techniques ainsi que quelques exemples. Par la suite nous le désignerons simplement comme "le document 2D-Doc".

4.3.2. Vérification manuelle d'une signature 2D-Doc

Nous allons vérifier la signature du code donné en page 59 du document 2D-Doc :


Code 2D-Doc	 2D-DOC
Date d'émission	125E - 15 novembre 2012
Date de signature	125C - 13 novembre 2012
Type de document	Justificatif de domicile – Code 00
Champs obligatoires	10 MLLE/SAMPLE/ANGELA 20 <vide> 21 BAT 2 ETG 3 22 7 PLACE DES SPECIMENS 23 <vide> 24 57000 25 METZ 26 FR
Message complet	DC02FR000001125E125C0026FR245700010MLLE/SAMPLE/ANGELA<GS>20<GS>21BAT 2 ETG 3<GS>23<GS>25METZ<GS>227 PLACE DES SPECIMENS<GS><US>Z2HSK7UZM6KPL7UL6OK7NR77GSPGPNNUYEE4ZV75L5OCIWKVOXTV3I5AJLRSUDOIR76F75QY5Z7KLH3FACKHVP7JH3DYMR I5EIAZMI
Données signées	DC02FR000001125E125C0026FR245700010MLLE/SAMPLE/ANGELA<GS>20<GS>21BAT 2 ETG 3<GS>23<GS>25METZ<GS>227 PLACE DES SPECIMENS<GS>
Signature (binaire)	CE 8F 25 7E 99 67 94 F5 FE 8B F3 95 F6 C7 FF 34 9E 67 B5 B4 C6 08 4E 66 BF EA FA E1 22 CA AB AF 3A ED 1D 02 57 19 50 6E 44 7F E2 FF B0 C7 73 F5 2C FB 28 04 A3 D4 BF 49 F6 3C 32 28 E9 10 0C B1

Fig. 43

Nous utiliserons le fichier *2Ddoc-values.b* pour stocker les nombres correspondants.

1. En page 58 du document 2D-Doc se trouve le certificat de l'autorité de certification de test (l'émetteur). Copier-coller le certificat dans un éditeur de texte et l'enregistrer dans le fichier *0001.pem*.
2. Extraire de ce fichier les valeurs de la clé publique à l'aide d'*openssl*. Le document indique que la clé est de type *NIST P-256*, ce qui correspond à la courbe *prime256v1* que nous avons étudiée précédemment et pour laquelle nous disposons déjà des paramètres (fichier *secp256r1.b*).

Nous n'utiliserons pas la clé privée qui sert à tester le mécanisme de signature - nous allons uniquement vérifier une signature existante.

3. Copier-coller la partie signée du document ("Données signées") dans le fichier *msg2ddoc-signed.bin*.
4. Extraire les variables *r* et *s* de la signature ("Signature (binaire)").

IMPORTANT

Dans le document signé (enregistré dans *msg2ddoc-signed.bin*), les séquences <GS> doivent être remplacées par le code ASCII 29, et il faut savoir qu'il y a un espace (et un seul) entre *DES* et *SPECIMENS* (l'affichage n'est pas clair sur ce point).

Au final le fichier *2Ddoc-values.b* contient ceci :

```

save_ibase=ibase
ibase=2^4
q[0]=A98F0D7CCD62808893BEC4D436E79D1834A1D6E001D70F1C4CDCCD9D9E2FE229
q[1]=F7240514E8DDC0CA98D0C7440C9CC492849A0FBDA73FC392F4DA0AE07F84C23C
q[2]=0
r=CE8F257E996794F5FE8BF395F6C7FF349E67B5B4C6084E66BFEAFAE122CAABAF
s=3AED1D025719506E447FE2FFB0C773F52CFB2804A3D4BF49F63C3228E9100CB1
hm=91337295417C81EE146FCBDE613DA9D3C8987BAA287200905B541B5681633E00
ibase=save_ibase

```

Comme précédemment, il ne nous reste plus qu'à faire les calculs.

```

C:\>bc sec256r1.b crypto.b 2Ddoc-values.b
bc 1.06
Copyright 1991-1994, 1997, 1998, 2000 Free Software Foundation, Inc.
This is free software with ABSOLUTELY NO WARRANTY.
For details type 'warranty'.
ibase=2^4
u1=(m*invmmod(s,n))%n
u2=(r*invmmod(s,n))%n
.=ec_mul(t1[1],g1[1],u1,a,p)
.=ec_mul(t2[1],g1[1],u2,a,p)
.=ec_add(t[1],t1[1],t2[1],a,p)
t[0];t[1];t[2]
CE8F257E996794F5FE8BF395F6C7FF349E67B5B4C6084E66BFEAFAE122CAABAF
5A35E4BD839048C1D83C3E9593E65147BEA0A0FD78BA83C0BF7CAE3D57A950C
0
r
CE8F257E996794F5FE8BF395F6C7FF349E67B5B4C6084E66BFEAFAE122CAABAF

```

Fig. 44

$t[0]$ est l'abscisse de $u_1G + u_2Q$ et comme attendu il est bien égal à r , ce qui valide la signature.

Pour être rigoureux il aurait fallu comparer r avec $t[0] \% n$, comme ici $t[0] < n$ nous avons omis ce calcul.

4.3.3. Vérification d'une signature 2D-Doc avec *openssl*

La signature (partie "Signature (binaire)") n'est pas exploitable telle quelle, elle doit être "emballée" pour être conforme à la structure **ECDSA-Sig-Value** présentée précédemment.

Ce qui suit est élaboré d'après le standard X.690.

1. En hexadécimal, ajouter **02 21 00** avant r , et **02 20** avant s . Ensuite ajouter **30 45** au tout début du fichier.
 - Pourquoi ajouter un zéro devant r ? L'entier r commence par **CE** (base 16). Le type **INTEGER** en ASN.1 est signé. Tel quel, r serait lu comme négatif du fait du bit de poids fort égal à 1. s commence par **3A** (base 16) et n'a donc pas besoin d'être préfixé avec un octet nul.

Sans cet ajout d'un octet nul devant r , *openssl* lit un entier négatif égal à $r - 2^{256}$: **-3170DA8166986B0A01740C6A093800CB61984A4B39F7B1994015051EDD355451** (base 16)

2. Enregistrer le fichier (hexadécimal) comme *2ddoc-signature-wrapped.hex*.

2ddoc-signature-wrapped.hex

```
3045
0221
00ce8f257e996794f5fe8bf395f6c7ff349e67b5b4c6084e66bfeafae122caabaf
0220
3aed1d025719506e447fe2ffb0c773f52cfb2804a3d4bf49f63c3228e9100cb1
```

3. Convertir le contenu hexadécimal en binaire et l'enregistrer comme *2ddoc-signature-wrapped.bin*. C'est cette signature qui sera examinée par *openssl*. Vous pouvez vérifier le résultat avec la commande

```
$ openssl asn1parse -inform der -in 2ddoc-signature-wrapped.bin
```

```
0:d=0 hl=2 l= 69 cons: SEQUENCE          :CE8F257E996794F5FE8BF395F6C7FF349E67B5B4C6084E66BFEAFAE122CAABAF
2:d=1 hl=2 l= 33 prim: INTEGER           :3AED1D025719506E447FE2FFB0C773F52CFB2804A3D4BF49F63C3228E9100CB1
37:d=1 hl=2 l= 32 prim: INTEGER
```

Fig. 45

4. Le certificat (fichier *0001.pem*) ne peut pas être exploité tel quel par *openssl dgst*, il faut en extraire la clé publique. Exécuter la commande suivante :

```
openssl x509 -in 0001.pem -noout -pubkey > 0001-pubkey.pem
```

Le fichier *0001-pubkey.pem* contient la clé publique de "0001", et rien d'autre.

Il ne nous reste plus qu'à demander à *openssl* de vérifier tout cela. Exécuter la commande :

```
openssl dgst -sha256 -verify 0001-pubkey.pem -signature 2ddoc-signature-wrapped.bin
msg2ddoc-signed.bin
```

Résultat :

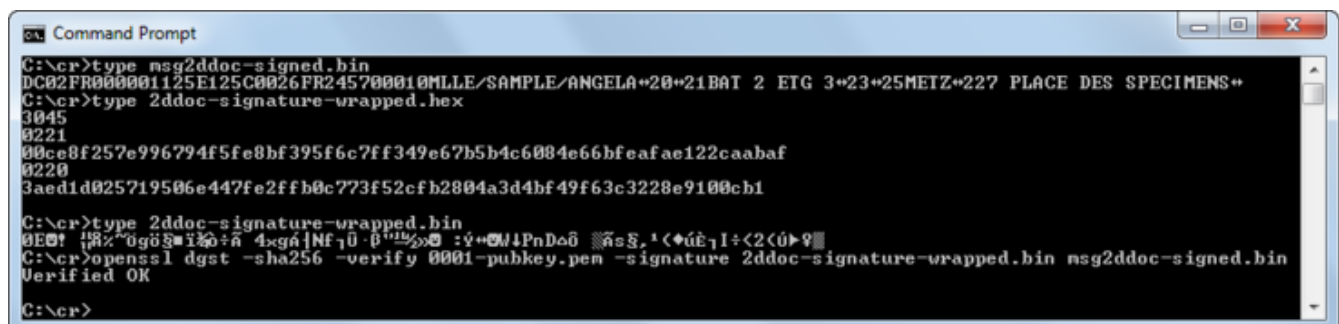


Fig. 46

openssl nous dit **Verified OK**.

Voilà qui clôt ces manipulations autour de la cryptographie à courbes elliptiques dans les cadres x509 et 2D-Doc.

N'oubliez pas que la validation d'un certificat nécessite d'autres étapes que la seule vérification d'une signature ECDSA. Si vous devez valider un certificat dans un environnement de production, seul un logiciel adapté pourra le faire de manière fiable.

FIN

5. Bibliographie

- [1] Présentation de l'ASN.1 : <http://www.itu.int/en/ITU-T/asn1/Pages/introduction.aspx>
- [2] Document X.690 (format PDF) : <https://www.itu.int/ITU-T/studygroups/com17/languages/X.690-0207.pdf>
- [3] Article Wikipédia consacré au X.690 : <https://en.wikipedia.org/wiki/X.690>
- [4] RFC 5280 (certificats x509 v3) : <https://tools.ietf.org/html/rfc5280>
- [5] Article Wikipédia consacré au RSA : https://fr.wikipedia.org/wiki/Chiffrement_RSA
- [6] Page d'accueil de *bc* : <https://www.gnu.org/software/bc/>
- [7] *bc* pour Windows : <http://gnuwin32.sourceforge.net/packages/bc.htm>

bc a besoin du fichier *readline5.dll* pour s'exécuter. Vous pouvez le trouver à cette URL : <http://gnuwin32.sourceforge.net/packages/readline.htm>

IMPORTANT

Le fichier exécutable *bc.exe* semble mal gérer le clavier français, à cause de *readline*. Cela oblige à jongler pour saisir des caractères tels que '^', '{' et ']', et il faut parfois passer en mode "clavier anglais" pour s'en sortir. Une alternative est de compiler *bc* sans *readline*. L'auteur de ce document a compilé *bc* sans *readline* et l'a publié ici : <http://seb-o-fourneaux.fr/?p=116>

- [8] Le site de notepad++ : <https://notepad-plus-plus.org/fr>
- [9] Article Wikipédia sur l'algorithme d'exponentiation rapide : https://fr.wikipedia.org/wiki/Exponentiation_rapide
- [10] Article Wikipédia sur l'exponentiation modulaire : https://fr.wikipedia.org/wiki/Exponentiation_modulaire
- [11] Obtenir *dder* : <http://dder.sourceforge.net>
- [12] Obtenir *pkfile* : <http://pkfile.sourceforge.net>
- [13] GNUWin32 : <http://gnuwin32.sourceforge.net/packages/openssl.htm>
- [14] Télécharger 7-ZIP : <http://www.7-zip.org/download.html>
- [15] Peter Seibt, Andreea Dragut Cours de cryptographie Chapitre V (format PDF) : <http://www.dil.univ-mrs.fr/~jfp/master/m03/CompresChap5AES.pdf>
- [16] An introduction to elliptic curve cryptography : <http://www.embedded.com/design/safety-and-security/4396040/An-Introduction-to-Elliptic-Curve-Cryptography>
- [17] Corps finis (format PDF) : <http://iml.univ-mrs.fr/~rodier/Cours/RappelCorps%20finis.pdf>
- [18] SEC 2: Recommended Elliptic Curve Domain Parameters (format PDF) : <http://www.secg.org/SEC2-Ver-1.0.pdf>
- [19] RECOMMENDED ELLIPTIC CURVES FOR FEDERAL GOVERNMENT USE (format PDF) : <http://csrc.nist.gov/groups/ST/toolkit/documents/dss/NISTReCur.pdf>
- [20] Elliptic Curve Cryptography Subject Public Key Information : <https://tools.ietf.org/html/rfc5480>

- [21] "Courbe elliptique" sur Wikipédia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_elliptique#Additionner_les_points:_d.C3.A9finition_par_la_m.C3.A9thode_des_tangentes_et_des_s.C3.A9cantes
- [22] Article Wikipédia sur l'inverse modulaire : https://fr.wikipedia.org/wiki/Inverse_modulaire
- [23] Conception d'algorithmes et applications (LI325) COURS 10 (format PDF) : <http://www.di.ens.fr/~busic/cours/LI325/coursCAAC10.pdf>
- [24] Elliptic curve digital signature algorithm : https://fr.wikipedia.org/wiki/Elliptic_curve_digital_signature_algorithm
- [25] ECC Tutorial (en anglais) : <http://www.johannes-bauer.com/compsci/ecc>
- [26] Le 2D-Doc de l'ANTS : <https://ants.gouv.fr/Les-solutions/2D-Doc>