| | |
|---|---|
| EPFL - automne 2020 | Dr D. Strütt |
| **Analyse III** IN SC SIE | **Exercices** |
| Série 1 | 14 septembre 2020 |

**Remarque.**
Les théorèmes énoncés dans la présente série sont des rappels d'analyse II

**Notation 1.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, tel que $\boldsymbol{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leq i \leq m$. On note

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial x_i}\right).$$

**Exercice 1.**
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $1 \leq i \leq m$. Montrer que

$(i)$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}\rangle\right] = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i}, \boldsymbol{G}\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{F}, \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_i}\right\rangle,$$

où pour $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle a, b\rangle$ le *produit scalaire euclidien* de $a$ et $b$, c'est-à-dire,

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$(ii)$ si $n = 3$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{G}\right] = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x_i} \wedge \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial x_i}$$

où pour $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, on note $a \wedge b \in \mathbb{R}^3$ le *produit vectoriel* de $a$ et $b$, c'est-à-dire,

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

**Definition 2** (Matrice jacobienne, Jacobien)**.**
Soit $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \Omega' \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ telle que

— $\boldsymbol{u} \in C^\infty(\Omega; \Omega')$

— $\boldsymbol{u}$ est inversible et $\boldsymbol{u}^{-1} \in C^\infty(\Omega'; \Omega)$

La *matrice Jacobienne* de $\boldsymbol{u}$ notée $\nabla \boldsymbol{u}$ est la matrice dont les composantes sont

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{i,j} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial x_j}$$

Le *jacobien* de $\boldsymbol{u}$, noté $\operatorname{Jac} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ est défini par

$$\operatorname{Jac} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \det \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$$

**Exercice 2** (Voir aussi §8.5 du live *Analyse avancée pour ingénieurs*).
Calculer le jacobien des applications suivantes :

($i$) Les coordonnées polaires

$$\boldsymbol{u}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

($ii$) Les coordonnées sphériques

$$\boldsymbol{u}(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

($iii$) Les coordonnées cylindriques

$$\boldsymbol{u}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

($iv$) Les coordonnées carthésiennes.

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x,y,z)$$

**Théorème 3** (Voir aussi §8.5 du live *Analyse avancée pour ingénieurs*).
*Soit $f\colon \Omega' \to \mathbb{R}$ continue, $\boldsymbol{u}\colon \Omega \to \Omega'$ comme dans la définition 2 ci-dessus et $A \subset \Omega'$ un ensemble fermé borné. Alors*

$$\int_A f(\boldsymbol{y})dy = \int_{\boldsymbol{u}^{-1}(A)} f(\boldsymbol{u}(x))\,|\mathrm{Jac}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|\,dx$$

**Exercice 3.**
Esquisser l'ensemble A et calculer $\int_A f(x)dx$ dans les cas suivants :

($i$) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 4\}$ et $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$

($ii$) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ et } x-3 \leq y \leq 3-x\}$ et $f(x,y) = x^2 + \sin^3(y)$

($iii$) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ et } \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ et $f(x,y) = y(1+x^2)$

($iv$) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 9\}$ et $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

($v$) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ et $f(x,y,z) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

**Théorème 4.**
*Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ $f \in C^1(\Omega')$ et $g = (g_1, ..., g_m) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tel que $g(\Omega) \subset \Omega'$. Alors, le produit de composition $f \circ g \in C^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$,*

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(x))\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x).$$

**Exercice 4.** $(i)$ Soit $p \geq 1$ et la fonction

$$h_p(x) := |x|^p = \left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right)^p, \quad \forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Calculer $\nabla h_p(x)$.

$(ii)$ Soit une application $\boldsymbol{G} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ qui ne s'annule jamais et la fonction

$$f_p(t) := \frac{1}{p}|\boldsymbol{G}(tx)|^p, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\dfrac{d}{dt} f_p(t)$.