Muestra de prefinales

Primera Muestra:

Ejercicio 1: Dada la función

$$f(x) = \frac{e^{x^4-4x^3+2x^2+8x-8} + x - 3}{x-2}$$

Consideremos la ecuación

$$f(x) = 1$$

1. Haga un dibujo en el intervalo $\left[0, \frac{9}{5}\right]$ de una función convenientemente definida, de manera tal que sus raíces sean las soluciones de la ecuación dada. ¿Cuántas soluciones hay en ese intervalo? (puede responder esto en base al gráfico hecho).
2. ¿Se puede aplicar el método de bisección?. En tal caso, calcular la solución de la ecuación con 4 dígitos decimales exactos. ¿Cuántos pasos de bisección fueron necesarios para obtener esa exactitud?
3. ¿Se puede aplicar Newton?, ¿conviene hacerlo?. Explique cuál es la ventaja o la desventaja de aplicar Newton.

Ejercicio 2 Dada la función

$$f(x) = \operatorname{sen}(\ln(3x))$$

1. Se quiere calcular el área por debajo del gráfico de esta función con $1 \leq x \leq x_0$, siendo x_0 la primera raíz de $f(x)$ a la derecha de 1. Para esto use dos esquemas de cuadratura con un total de 7 nodos. Indique cuáles métodos usa.
2. Suponiendo que el valor de x_0 hallado es exacto, dar una cota del error cometido al calcular el área pedida en cada uno de los métodos usados..

Ejercicio 3: Se muestrea una señal en diferentes instantes de tiempo obteniendo los siguientes datos:

Tiempo	Valor
0	1
1	3
2	8
3	7
5	2
7	7

1. Determinar la forma aproximada de la curva
2. Usando la regla del trapecio y la regla de Simpson, con ocho nodos, calcular el área bajo la curva hallada en el intervalo de tiempo $[0, 7]$.

3. Estimar el error cometido al haber usado la regla de trapecio compuesto.

Ejercicio 4: Dada la ecuación diferencial de primer orden, no lineal

$$\begin{cases} y' = e^{\operatorname{sen}(t+y)} - 1 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

1. Comprobar que el punto $(t, y) = (\pi, 0)$ es un punto de equilibrio (i.e: $y'(\pi) = 0$). En base a esto, ¿cuánto vale la solución $y(t)$ del problema anterior para todo tiempo t?.
2. Considerar ahora el mismo problema pero con el dato inicial $y(\pi) = 0,1$. Si llamamos $\tilde{y}(t)$ a la solución de ese problema, calcular el valor de $\tilde{y}(2\pi)$ usando Euler con un sólo paso, Euler con cuatro pasos y Euler modificado o Heun, según prefiera, también con uno y cuatro pasos.
3. Acotar el error de truncamiento local cometido en cada paso de Euler al haberlo hecho con cuatro pasos.

%%%%%%%%%%%%%%%%
Segunda muestra:

Ejercicio 1: Dada la función

$$f(x) = 2\ln(4x - 7) + x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{209}{16} - 2\ln 4$$

1. Se quiere hallar todas las **raíces** de $f(x)$, y se pueden tomar dos caminos posibles: (elija uno de ellos)
   (a) **Método analítico-numérico**: Decidir si existe al menos una raíz (por cambio de signo) y luego analizar la monotonía de la función a través del análisis de los signos de la primera derivada (si se pone difícil hacer las cuentas a mano, puede usar Matlab para calcular las posibles soluciones de $f'(x) = 0$). Por último, usar algún método numérico para calcular la raíz detectada (Bisección, Newton, etc.)
   (b) **Método gráfico-numérico**: Haga un dibujo del gráfico de $f(x)$ y viendo cómo se comporta decidir cuál método va a usar para calcular la raíz (Bisección, Newton o el que prefiera). ¿Conviene usar Newton?.
2. Ahora se quiere calcular la **solución de la ecuación**

$$f(x) = x$$

   (a) ¿Se puede aplicar el método de bisección?. En tal caso, calcular la solución de la ecuación con 4 dígitos decimales exactos. ¿Cuántos pasos de bisección fueron necesarios para obtener esa exactitud?

(b) ¿Se puede aplicar Newton?, ¿conviene hacerlo?. Explique cuál es la ventaja o la desventaja de aplicar Newton.

Ejercicio 2 Dada la función

$$f(x) = 8e^{\sin x} - x$$

1. Se quiere calcular el área por debajo del gráfico de esta función con $0 \leq x \leq x_0$, siendo x_0 la primera raíz positiva de $f(x)$. Para esto use dos esquemas de cuadratura con un total de 11 nodos. Indique cuáles métodos usa.
2. Suponiendo que el valor de x_0 hallado es exacto, dar una cota del error cometido al calcular el área pedida en cada uno de los métodos usados..

Ejercicio 3: Se muestrea la altura de una cerca o valla irregular, en distintos puntos de su base. Se comienza a medir desde una de las puntas y se toma la altura después de cada metro que se avanza, con algunas excepciones, obteniendo los siguientes datos:

Metro	Altura
0	1.80
1	2.07
2	1.53
4	1.98
5	2.01
8	1.65
9	2.10

1. Determinar la forma aproximada de la curva
2. Usando la regla del trapecio y la regla de Simpson, con diez nodos, calcular el área bajo la curva hallada en el intervalo $[0, 9]$.
3. Estimar el error cometido al haber usado la regla de trapecio compuesto.

%%%%%%%%%%%%%%%

Tercera muestra:

Ejercicio 1: Se quiere hallar todas las raíces reales del polinomio:

$$f(x) = x^7 - x^6 - 8x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 50x - 50$$

1. Dibuje el gráfico de la función en el intervalo $[-2.5;\ 2.5]$ y determine a ojo tres subintervalos en los que seguro hay al menos uan raíz real.

2. Sabemos que un polinomio de grado 7 tiene exactamente siete raíces complejas (contadas con su multiplicidad). De lo que observa en el gráfico ¿cuántas raíces reales puede detectar?.
3. Hay una raíz que es obvia y que la puede hallar por evaluación ¿cuál es?.
4. Para las otras raíces que faltan, ¿se puede aplicar el método de Bisección para calcularlas?, justifique.
5. Si inicia el algoritmo de Newton-Raphson clásico en $x_0 = 0$ ¿a cuál raíz converge?. Y si inicia en $x_0 = 2$, ¿a cuál converge?. Usando el gráfico de la función, para cada raíz observada determine al menos un punto de inicio de Newton.
6. ¿Cuántos pasos de Newton clásico se necesitan para que una de las raíces halladas tenga al menos cuatro dígitos decimales exactos?.(es decir error $< 10^{-4}$).
7. ¿Dispone de algún otro algoritmo que le permita igual precisión en menor cantidad de pasos?.

Ejercicio 2: Dada la tabla de evaluaciones de las función $f(x)$:

x	-2.5	-1.5	-1	0	0.5	2
f (x)	11.125	3.2875	1.9	4	5.6125	17.2

1. Determinar la forma aproximada del gráfico de $f(x)$.
2. Usando alguna de las reglas de cuadratura compuesta, calcule

$$\int_{-3}^{2} f(x)\ dx$$

usando una malla de paso de 0.5, es decir que debe usar los nodos $\{-3, -2.5, -2, \ldots, 1.5, 2\}$
3. Estimar el error cometido al haber usado la regla de trapecio compuesto.

(FALTAN DOS EJERCICIOS)
%%%%%%%%%%%%%%%%

Cuarta muestra:

Ejercicio 1: Dada la ecuación

$$\ln\left(x^2+1\right) = (x+1)\left(x^3-2x-1\right)$$

1. Haga una exploración visual para decidir cuántas raíces posee esta ecuación.

2. Calcular la raíz positiva con un error menor o igual a 10^{-6} usando alguno de los métodos vistos en clase.
3. Si se usa Newton Raphson partiendo de $x_0 = 0$, ¿a cuál raíz se converge?. Proponga un punto inicial x_0 para iniciar Newton que converja a la raíz positiva.
4. ¿Se puede usar el método de Bisección en el intervalo $[-2, 0]$?. En el caso en que se pueda usar, calcule la raíz contenida en ese intervalo mediante el uso de Bisección. ¿Cuántos pasos debe hacer para asegurar que el error es menor o igual que 10^{-6}?.

Ejercicio 2 Se quiere calcular el área encerrada entre el siguiente par de funciones

$$f(x) = 1 - 2x - x^2 \qquad \text{y} \qquad g(x) = e^{x+x^2}$$

1. Calcular los valores de x en que los gráficos de estas dos funciones se tocan. Si debe calcular alguna de estos valores de manera aproximada, hágalo con un error menor que 10^{-6}.
2. Calcule el área pedida usando dos esquemas de cuadratura con un total de 9 nodos. Indique cuáles métodos usa.
3. Para cada uno de los dos métodos usados, dar una cota del error cometido para el cálculo del área.

Ejercicio 3: Se muestrea la altura de una cerca o valla irregular, en distintos puntos de su base. Se comienza a medir desde una de las puntas y se toma la altura después de cada metro que se avanza, con algunas excepciones, obteniendo los siguientes datos:

Metro	Altura
0	1.80
1	2.07
2	1.53
4	1.98
5	2.01
8	1.65
9	2.10

1. Determinar la forma aproximada de la curva
2. Usando la regla del trapecio y la regla de Simpson, con diez nodos, calcular el área bajo la curva hallada en el intervalo $[0, 9]$.
3. Estimar el error cometido al haber usado la regla de trapecio compuesto.

Ejercicio 4: Dada la ecuación diferencial de primer orden, no lineal

$$\begin{cases} y' = e^{2\cos(t+y)} - 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

1. Comprobar que el punto $(t, y) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ es un punto de equilibrio (i.e: $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$). En base a esto, ¿cuánto vale la solución $y_0(t)$ del problema anterior con el dato inicial dado, para todo tiempo t?.
2. Considerar ahora el mismo problema pero con el dato inicial $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,3$ y llamemos $\tilde{y}(t)$ a la solución de ese problema. Calcular el valor de $\tilde{y}(\pi)$ usando Euler con un sólo paso, Euler con cuatro pasos y Euler modificado o Heun, según prefiera, también con uno y cuatro pasos.
3. Acotar el error de truncamiento local cometido en cada paso de Euler al haberlo hecho con cuatro pasos.

%%%%%%%%%%%%%%%

Quinta muestra: (1° semestre 2021)

Ejercicio 1: Dada la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{3}x^3 - 1$$

calcular su **primer punto fijo positivo** con error de a lo sumo 10^{-6}.

Observación: recordar que x_0 es un punto fijo de $f(x)$ si cumple que $f(x_0) = x_0$.

Ejercicio 2 Dada la función

$$f(x) = \cos\left(\sqrt{1 + x^2}\right)$$

Es fácil ver que el gráfico de $f(x)$ cambia de signo en el intervalo $[0; 6]$. Se quiere calcular el **área** que está **por arriba** del eje x encerrada por este gráfico en este intervalo. Para esto se propone hacer los siguientes pasos:

1. Dibuje el gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[0; 6]$. Proponga algún método, analítico o numérico, para hallar la o las raíces con error menor o igual a 10^{-6}.
2. Calcular la segunda derivada $f''(x)$ y dibuje su módulo en el intervalo $[0; 6]$. Desde este dibujo extraiga una cota para $f''(x)$ en ese intervalo.
3. Calcule el número n de subintervalos necesarios para garantizar que el error cometido al calcular esta área por el método de **Trapecios Compuestos** no sea mayor que 10^{-4}. Determine cuál es el valor del área.

Ejercicio 3: Dado el problema a valores iniciales no lineal de primer orden:

$$\begin{cases} y' + y = \ln\left(t + y^2\right) \\ y\left(0\right) = 0.5 \end{cases}$$

se quiere calcular la curva solución en el intervalo $[0, 10]$ por el método de Euler y controlar el error cometido. Desarrolle los siguientes ítems:

1. Trace la curva solución en el intervalo $[0, 10]$ usando el método de Euler, con $n = 10,\ n = 20,\ n = 50$ y $n = 100$. Presente un dibujo que tenga sólo el gráfico obtenido para $n = 10$, luego otro dibujo que contenga los gráficos superpuestos para $n = 10$ y $n = 20$, luego otro con los gráficos de $n = 10,\ n = 20$ y $n = 50$, y por último otro donde se vea los cuatro gráficos superpuestos. Observe qué sucede en el intervalo $[0, 2]$ y en el $[5, 10]$, de forma descriptiva ¿qué cosa nota en cada uno de esos intervalos?.
2. Reescriba ahora la ecuación diferencial en la forma

   $$y' = f\left(t, y\right)$$

   y diga explícitamente cuál es la función $f\left(t, y\right)$. Ahora recuerde cuál es la fórmula del error de truncamiento local para Euler que involucra los módulos de las funciones $f\left(t, y\right),\ f_t\left(t, y\right)$ y de $f_y\left(t, y\right)$. Calcule explícitamente ambas derivadas parciales y haga un dibujo con `Matlab/Octave` de los módulos de estas derivadas y de la misma f, para lo que se le sugiere usar el caso $n = 100$. De estos dibujos obtenga cotas adecuadas para usarlas en la fórmula del error total de Euler. Con lo anterior, hallar un valor de n que asegure que el error cometido al calcular la solución en el intervalo $[0, 10]$ no sea mayor que 10^{-4}.
3. Analizando los dibujos de $\left|f\left(t, y\right)\right|, \left|f_t\left(t, y\right)\right|$ y de $\left|f_y\left(t, y\right)\right|$ ¿puede dar una razón de los diferentes comportamientos de la solución $y\left(t\right)$ en los intervalos $[0, 2]$ y en el $[5, 10]$ respecto al tamaño del n.usado?.

%%%%%%%%%%%%%%

Sexta muestra: (1° semestre 2021)

Ejercicio 1: Los datos provenientes de un pulsador nos da una serial binaria (ceros y unos) en función del tiempo. Se testea si el área bajo la curva en un lapso de un segundo, con 10 pulsos por segundo, es mayor a 1. Consideremos el siguiente

$$\text{serial} = [0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$$

1. Utilizando el método de **trapecios** compuesto, calcular si el área del serial obtenido es mayor a 1. Calcular analíticamente (en el papel) el error cometido.

2. ¿Podría haber usado el método de Simpson?. Explique su respuesta.
3. ¿Considera que si hubiera aplicado un método de interpolación para obtener una curva más ajustada, esto hubiese mejorado la integración?.

Ejercicio 2: Hallar la primera solución positiva de la ecuación

$$(x+1)\,e^{-x} = x$$

con error menor que 10^{-4}.

Ejercicio 3: Dado los puntos $(0,1)$, $(2,7)$, $(3,20)$ y $(4,55)$:

1. Calcular un vector interpolador usando
   - El comando `interp1`
   - El comando `spline`
   - Una función polinomial.
2. ¿Es posible interpolar utilizando el método que representa el comando `trapz`?.

Ejercicio 4: Consideramos la ecuación diferencial $y' = f(t,y)$ para el caso en que $f(t,y) = y$.

1. ¿Puede calcular la solución numérica en el intervalo $[0,1]$ mediante el método de Heun usando un paso h que ud. elija?.
2. Si se se tiene el dato $y(0) = 1$, usando el método de Heun calcule la solución numérica en el intervalo $[0,1]$ en **cuatro** pasos.
3. Idem el ítem anterior pero calculando analíticamente (en el papel) el método de Euler.