

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                | <b>2</b>  |
| 1.1      | Problembeschreibung . . . . .                    | 2         |
| 1.2      | Motivation für Dekompositionsansätze . . . . .   | 7         |
| <b>2</b> | <b>Der erste Dekompositionsansatz</b>            | <b>8</b>  |
| 2.1      | Berechnen einer Jobreihenfolge . . . . .         | 8         |
| 2.1.1    | Ganzzahlige Lineare Programmierung . . . . .     | 8         |
| 2.1.2    | Der Algorithmus von Gilmore und Gomory . . . . . | 9         |
| 2.1.3    | Heuristische Verfahren . . . . .                 | 10        |
| 2.1.4    | Vergleich der Heuristiken . . . . .              | 13        |
| 2.2      | Zuweisung von Ressourcen . . . . .               | 18        |
| 2.2.1    | Zulässigkeit der Zuweisung . . . . .             | 20        |
| 2.2.2    | Optimierung der Ressourcenzuweisung . . . . .    | 22        |
| 2.3      | Unzulässige Reihenfolgen . . . . .               | 23        |
| 2.3.1    | Nachbarschaftssuche . . . . .                    | 23        |
| 2.3.2    | Idle-Jobs . . . . .                              | 23        |
| <b>3</b> | <b>Der zweite Dekompositionsansatz</b>           | <b>24</b> |
| 3.1      | Ressourcenzuweisung . . . . .                    | 24        |
| 3.1.1    | Ressourcenzuweisung mit Binpacking . . . . .     | 24        |
| 3.1.2    | Zulässigkeit der Zuweisung . . . . .             | 26        |
| 3.2      | Anordnung der Jobgruppen . . . . .               | 28        |
| 3.2.1    | MIP mit fixierten Bins . . . . .                 | 28        |
| 3.2.2    | MIP mit freien Bins . . . . .                    | 30        |
| 3.2.3    | Mehrere fixierte Reihenfolgen . . . . .          | 32        |
| 3.2.4    | Nachbarschaftssuche . . . . .                    | 33        |
| <b>4</b> | <b>Rechenergebnisse und Vergleiche</b>           | <b>34</b> |

# 1 Einleitung

## 1.1 Problembeschreibung

Bei synchronen Flow-Shop-Problemen handelt es sich um Produktionsplanungsprobleme, bei denen die zu produzierenden Güter (Jobs) z.B. auf einer zyklisch angeordneten Produktionsanlage produziert werden. Die Produktionsanlage besteht aus  $m$  Stationen, die sich mit der Anlage drehen. Außen, um die Anlage herum, befinden sich  $m$  fortlaufend nummerierte fixierte Maschinen  $M_1, \dots, M_m$ , die die einzelnen Produktionsschritte durchführen. Dabei handelt es sich bei Maschine  $M_1$  um das Einlegen des Jobs in die Anlage und nach der letzten Maschine  $M_m$  wird das fertige Produkt entnommen. Durch Rotation der Anlage werden die Stationen mit den auf ihnen befindlichen Jobs zur jeweils nächsten Maschine transportiert. Die Reihenfolge, in der alle Jobs die Maschinen durchlaufen müssen ist also fest vorgegeben. In Abbildung 1.1 ist eine solche zyklische Anlage dargestellt. Eine Rotation darf immer nur dann stattfinden, wenn alle Maschinen

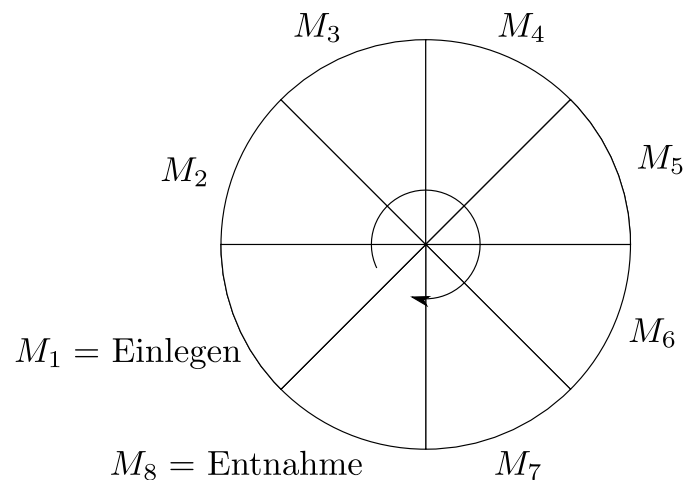


Abbildung 1.1: Kreisförmige Anlage mit  $m = 8$  Maschinen und Stationen.

ihren Produktionsschritt an ihrem aktuellen Job durchgeführt haben. Auf diese Weise können die Jobs, im Gegensatz zum klassischen (asynchronen) Flow-Shop, immer nur *synchron* zur nachfolgenden Maschine gelangen. Die Zeit, die zwischen zwei Rotationen vergeht, wird als *Zykluszeit* bezeichnet.

Die zu produzierenden Jobs sind gegeben durch die Menge  $J = \{1, \dots, n\}$  und die Prozesszeiten von Job  $j$  auf Maschine  $i$  sind durch  $p_{ij}$  gegeben. Eine Beispielinstantz mit  $n = 5$  und  $m = 3$  ist in Tabelle 1.2 zu sehen. Ziel ist es, eine Permutation  $\pi$  der

|   | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | 4     | 6     | 5     |
| 2 | 1     | 5     | 6     |
| 3 | 2     | 5     | 4     |
| 4 | 5     | 2     | 4     |
| 5 | 4     | 5     | 4     |

Abbildung 1.2: Beispielinstantz mit 5 Jobs und 3 Maschinen. Die Werte in der Tabelle sind die Prozesszeiten  $p_{ij}$ .

Jobs zu erstellen, die die gesamte Produktionsdauer minimiert. Diese Zielfunktion wird mit  $C_{\max}$  bezeichnet. Die Beispielinstantz 1.2 ist in Abbildung 1.3 als Gantt-Diagramm aufgetragen. Oben sind die Jobs in der initialen Reihenfolge und unten in einer bezüglich  $C_{\max}$  optimalen Reihenfolge. Die Zykluszeiten  $c_t$  mit  $1 \leq t \leq n + m - 1$  berechnen sich wie folgt:

$$c_t = \max_{i=\max\{1, t-n+1\}}^{\min\{t, m\}} p_{i\pi_{t-i+1}}$$

Die Zielfunktion lässt sich also durch  $C_{\max} = \sum_{t=1}^{n+m-1} c_t$  berechnen. Andere Zielfunktionen werden in dieser Masterarbeit nicht betrachtet.

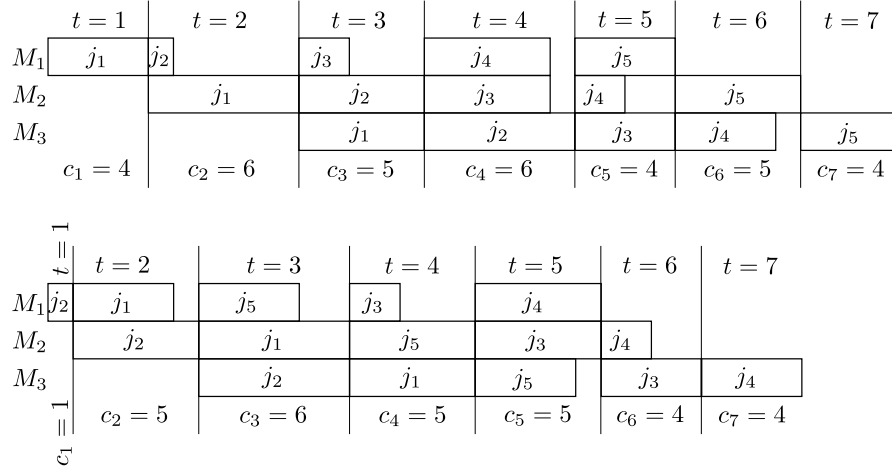
Eine Teilmenge  $D \subseteq \{1, \dots, m\}$  der Maschinen heißt *dominierend*, wenn

$$p_{dj} \geq p_{ej} \quad \forall j \in J, d \in D, e \notin D$$

ist. Die Prozesszeiten aller Jobs auf dominierenden Maschinen sind also immer mindestens so groß wie die Prozesszeiten auf den restlichen Maschinen. Treten dominierende Maschinen auf, müssen für die Berechnung der Zykluszeiten die Prozesszeiten auf den übrigen Maschinen also nicht betrachtet werden.

Zusätzlich benötigen die Jobs unter Umständen Ressourcen aus einer Menge  $R$ , um in die Stationen eingelegt werden zu können. Diese Ressourcen können erst nach Fertigstellung eines Jobs, also nachdem er nach Maschine  $M_m$  aus der Anlage genommen wurde, wiederverwendet werden. Sie sind allerdings nur in begrenzter Zahl vorhanden und im Allgemeinen ist nicht jede Ressource für jeden Job geeignet. Für  $j \in J$  sei  $\rho_j \subseteq R$  die Menge der Ressourcen, die für  $j$  geeignet ist. Umgekehrt sei für  $r \in R$  mit  $\iota_r \subseteq J$  die Menge der Jobs bezeichnet, für die  $r$  geeignet ist. An Maschine  $M_1$  kann es daher notwendig sein, vor dem Einlegen des nächsten Jobs die Ressource zu wechseln, wenn auf der entsprechenden Station zuvor Job  $j \in J$  mit Ressource  $r \in \rho_j$  fertiggestellt wurde und nun Job  $j' \notin \iota_r$  eingelegt werden soll.

Für die Ressourcen können folgende Situationen auftreten:



Abbildungung 1.3: Gantt-Diagramme der initialen Reihenfolge von Beispiel 1.2 mit  $C_{\max} = 34$  und einer optimalen Reihenfolge mit  $C_{\max} = 30$ .

- Alle Ressourcen sind für alle Jobs geeignet, also  $\rho_j = R$  für alle  $j \in J$ .
- Die Jobs lassen sich in disjunkte Gruppen unterteilen, so dass für alle Jobs aus einer Gruppe dieselbe Ressourcenmenge geeignet ist. Wenn also  $\rho_i \cap \rho_j \neq \emptyset$ , dann folgt  $\rho_i = \rho_j$ .
- Die Ressourcenmengen bilden Hierarchien. D.h., wenn  $\iota_q \cap \iota_r \neq \emptyset$ , dann folgt  $\iota_q \subseteq \iota_r$  oder  $\iota_r \subseteq \iota_q$ .
- Die  $\rho_j$  sind beliebige Teilmengen von  $R$ .

Neben dem Wechsel von Ressourcen, der zusätzliche Zeit in Anspruch nimmt, können auch andere Formen von *Rüstkosten* auftreten. Z.B. kann es sein, dass an einer Station zunächst einige Umstellungen vorgenommen werden müssen, bevor der neue Job eingelegt werden kann. Die Jobs können in Familien  $\mathcal{F}$  eingeteilt werden, so dass beim Übergang zwischen zwei Jobs aus den Familien  $f$  und  $g$  die Rüstkosten  $s_{fg}$  auftreten. Diese Rüstkosten können

- sowohl vom Vorgänger als auch vom Nachfolger abhängig sein ( $s_{fg}$ ),
- nur vom Nachfolger abhängig sein ( $s_{fg} = s_g$ ) oder
- konstant sein ( $s_{fg} = s > 0$ ).

Dabei wird  $s_{ff} = 0$  angenommen für alle  $f \in \mathcal{F}$ , dass also keine Rüstkosten innerhalb einer Familie auftreten. Wenn Ressourcen notwendig sind, können die Familien über die

|   | $j_1$ | $j_2$ | $j_3$ | $j_4$ | $j_5$ |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0     | 8     | 5     | 9     | 4     |
| 2 | 6     | 0     | 6     | 8     | 8     |
| 3 | 4     | 7     | 0     | 5     | 4     |
| 4 | 5     | 7     | 8     | 0     | 9     |
| 5 | 4     | 5     | 8     | 9     | 0     |

Abbildung 1.4: Rüstkosten für die Beispielinstantz aus Tabelle 1.2. Beispielsweise treten Rüstkosten von 6 auf, wenn von  $j_2$  auf  $j_1$  gewechselt werden muss.

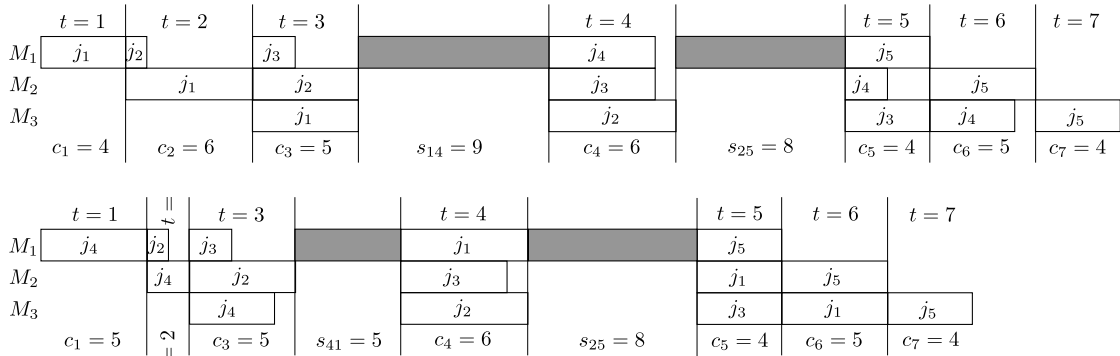


Abbildung 1.5: Initiale und eine optimale Lösung als Gantt-Diagramme für das Beispiel aus 1.2 erweitert um Rüstkosten aus 1.4.

Ressourcen definiert werden: Wenn  $\rho_i = \rho_j$ , dann gehören  $i$  und  $j$  zur gleichen Familie. Das setzt allerdings voraus, dass für  $i$  und  $j$  auf jeden Fall die selbe Ressource verwendet wird, falls sie in  $\pi$  im Abstand von  $m$  vorkommen.

Wenn Rüstkosten auftreten, soll nicht mehr nur die Summe aller Zykluszeiten minimiert werden, sondern zusätzlich noch die Summe aller auftretenden Rüstkosten. Diese Zielfunktion lässt sich als

$$\min \left( C_{\max} + \sum_{i=1}^{n-m} s_{i,i+m} \right)$$

formulieren, wobei hier die Rüstkosten direkt mit den Jobs statt mit den Familien indiziert sind.

In Abbildung 1.4 ist eine mögliche Rüstkostentabelle für das Beispiel aus 1.2 gegeben. Die initiale Reihenfolge und eine optimale sind in Abbildung 1.5 als Gantt-Diagramm dargestellt.

Insgesamt gilt es, neben der Reihenfolge  $\pi$  auch ein Mapping  $f : J \rightarrow R$  zu finden, das jedem Job  $j \in J$  eine Ressource  $r \in \rho_j$  zuweist und folgenden Ansprüchen genügt:

- $f$  muss zulässig sein in dem Sinne, dass beim Einlegen jedes Jobs  $j \in J$  eine Ressource  $r \in \rho_j$  verfügbar ist (d.h., dass  $r$  sich nicht gerade an anderer Stelle in der Anlage befindet).
- $f$  und  $\pi$  zusammen sollen optimal sein in dem Sinne, dass die Summe aus den durch  $\pi$  und  $f$  definierten Zykluszeiten und Rüstkosten minimal ist.

Im Folgenden wird ein Mixed Integer Linear Program (MIP) vorgestellt, dass das Gesamtproblem löst, allerdings ohne die Verfügbarkeit von Ressourcen zu beachten:

$$\min \quad \sum_{t=1}^{n+m-1} c_t + \sum_{j=1}^n \sum_{h=1}^n s_{jh} y_{jh} \quad (1.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^n x_{jk} = 1 \quad j \in N \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jk} = 1 \quad k \in N \quad (1.3)$$

$$c_t \geq \sum_{j=1}^n p_{t-k+1,j} \cdot x_{jk} \quad t \in T, k = \max\{1, t - m + 1\}, \dots, \min\{n, t\} \quad (1.4)$$

$$y_{jh} + 1 \geq x_{j,k-m} + x_{hk} \quad j, h \in N, k = m + 1, \dots, n \quad (1.5)$$

$$c_t \geq 0 \quad t \in T \quad (1.6)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\} \quad j, k \in N \quad (1.7)$$

$$y_{jh} \in \{0, 1\} \quad j, h \in N \quad (1.8)$$

$N$  ist die Indexmenge der Jobs, also  $N = \{1, \dots, n\}$  und  $T = \{1, \dots, n + m - 1\}$  ist die Indexmenge der Zykluszeiten. Die Binärvariablen  $x_{jk}$  geben an, an welcher Position  $k$  sich Job  $j$  befindet. Es gilt  $x_{jk} = 1$  genau dann, wenn  $j$  an Position  $k$  ist. Die Nebenbedingungen 1.2 und 1.3 stellen sicher, dass sich jeder Job an genau einer Position befindet und dass sich an jeder Position genau ein Job befindet. In Nebenbedingung 1.4 werden die Zykluszeiten bestimmt. Den Binärvariablen  $y_{jh}$  wird in Nebenbedingung 1.5 folgende Bedeutung gegeben:  $y_{jh} = 1$ , wenn Job  $j$  genau  $m$  Positionen vor Job  $h$  in  $\pi$  liegt. In der Zielfunktion 1.1 wird dann die Summe aus allen Zykluszeiten gebildet und die Summe aller Rüstkosten  $s_{jh}$ , die beim Übergang von Job  $j$  zu  $h$  auftreten.

Obwohl in diesem MIP nicht die Verfügbarkeiten von Ressourcen beachtet werden, benötigt es schon bei  $n = 20$  mehrere Stunden zum Finden der optimalen Lösung. Es ist also für Instanzen mit mehreren Tausend Jobs nicht geeignet. Aufgrund dieser Tatsache ist eine heuristische Herangehensweise an synchrone Flow-Shop-Probleme mit Ressourcen und Rüstkosten eine gute Alternative.

## 1.2 Motivation für Dekompositionsansätze

In [?] wurde gezeigt, dass schon das Optimieren bezüglich  $C_{\max}$ , also ohne Ressourcen und Rüstkosten,  $\mathcal{NP}$ -schwer ist für  $m > 2$ . Versuche, dieses Problem – oder auch einige Spezialfälle davon – mit ganzzahliger linearer Programmierung optimal zu lösen, waren nur für sehr kleine Instanzen mit  $n < 30$  in hinnehmbarer Zeit erfolgreich, was weit hinter praktischen Anforderungen zurückliegt (vgl. Abschnitt 2.1.1). Aufgrund der Komplexität des Gesamtproblems (vgl. das MIP aus Abschnitt 1.1 sollen in dieser Arbeit zwei Dekompositionsansätze verfolgt werden:

1. Zunächst wird eine Reihenfolge  $\pi$  aufgestellt, ohne Ressourcen und Rüstkosten zu betrachten, so dass  $C_{\max}$  möglichst gut ist. Anschließend wird ein Mapping  $f$  basierend auf  $\pi$  erstellt, möglichst ohne nachträgliche Änderung an  $\pi$  vorzunehmen.
2. Es wird zuerst ein Mapping  $f$  erstellt, so dass die Ressourcen zulässig zugewiesen sind und die durch die Ressourcenwechsel verursachten Rüstkosten minimal sind. Anschließend werden, ohne  $f$  zu verändern, die Jobs so in einer Reihenfolge  $\pi$  angeordnet, dass die Zykluszeiten möglichst minimal sind.

Beide Ansätze liefern natürlich im Allgemeinen keine optimalen Lösungen, da jeweils getrennt bezüglich  $\pi$  und  $f$  optimiert wird, obwohl die optimale Lösung von beiden zusammen abhängig ist. Außerdem sind selbst die aus den Ansätzen resultierenden Teilprobleme teilweise noch  $\mathcal{NP}$ -schwer. Beispielsweise ist bei Ansatz (1) das Berechnen einer  $C_{\max}$ -optimalen Reihenfolge  $\pi$  in dem Spezialfall, dass es nur eine dominierende Maschine gibt trivial, da  $C_{\max}$  bei jeder Reihenfolge identisch ist, und wenn es genau zwei benachbarte dominierende Maschinen gibt, ist es mit dem Algorithmus von Gilmore und Gomory [?] in Polynomialzeit lösbar. Bei der anschließenden Zuweisung von Ressourcen ist noch unbekannt, ob ein polynomieller Algorithmus existiert.

Je nachdem, ob die Rüstkosten die Zykluszeiten dominieren oder umgekehrt, ist Ansatz (2) bzw. Ansatz (1) vielversprechender.

## 2 Der erste Dekompositionsansatz

Beim ersten Dekompositionsansatz wird zunächst eine (möglichst gute) Jobreihenfolge  $\pi$  bestimmt. Dabei werden Ressourcen und Rüstkosten außer Acht gelassen. Es wird also zunächst ausschließlich  $C_{\max}$  optimiert. Anschließend wird ein Mapping  $f$  aufgestellt, so dass Ressourcen nur dann eingeplant werden, wenn sie auch zur Verfügung stehen, und darüber hinaus möglichst selten ausgetauscht werden müssen, so dass geringe Rüstkosten auftreten.

In Abschnitt 2.1 werden einige exakte und heuristische Verfahren für die Berechnung einer  $C_{\max}$ -optimalen Reihenfolge  $\pi$  vorgestellt, was im Allgemeinen  $\mathcal{NP}$ -schwer ist. Anschließend werden in Abschnitt 2.2 Verfahren vorgestellt, die ein möglichst gutes Mapping  $f$  erzeugen. Dabei wird speziell darauf eingegangen, ob mit der gegebenen Reihenfolge  $\pi$  und den gegebenen Ressourcen überhaupt eine zulässige Lösung möglich ist, und, wie dann ggf. die Zulässigkeit durch nachträgliche Änderungen an  $\pi$  erzeugt werden kann.

### 2.1 Berechnen einer Jobreihenfolge

Das Finden einer  $C_{\max}$ -optimalen Jobreihenfolge ist im Allgemeinen  $\mathcal{NP}$ -schwer. Daher wird im ersten Unterabschnitt 2.1.1 zunächst ein MIP vorgestellt, das solch eine Reihenfolge findet. Anschließend wird in Unterabschnitt 2.1.2 auf einen Spezialfall eingegangen, der in polynomieller Zeit lösbar ist. Danach werden in 2.1.3 einige heuristische Verfahren vorgestellt.

#### 2.1.1 Ganzzahlige Lineare Programmierung

Zum Finden einer  $C_{\max}$ -optimalen Lösung wurde folgendes MIP aufgestellt, das in dieser Form auch schon in [?] vorgestellt wurde. Es ist identisch mit dem MIP in Abschnitt 1.1



bis auf die Nichtberücksichtigung der Rüstkosten.

$$\min \sum_{t=1}^{n+m-1} c_t \quad (2.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^n x_{jk} = 1 \quad j \in N \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jk} = 1 \quad k \in N \quad (2.3)$$

$$c_t \geq \sum_{j=1}^n p_{t-k+1,j} \cdot x_{jk} \quad t \in T, k = \max\{1, t - m + 1\}, \dots, \min\{n, t\} \quad (2.4)$$

$$c_t \geq 0 \quad t \in T \quad (2.5)$$

$$x_{jk} \in \{0, 1\} \quad j, k \in N \quad (2.6)$$

Dieses MIP liefert für Instanzen mit  $n \leq 30$  eine optimale Lösung in unter einer Stunde. Diese Laufzeiten sind zwar schon deutlich besser als die Variante mit Rüstkosten in Abschnitt 1.1, bei größeren Instanzen ist dieser Zeitaufwand allerdings immer noch nicht praktikabel.

Für Instanzen mit  $n \leq 500$  ist die beste nach einer halben Stunde gefundene Lösung (obere Schranke) in ihrer Güte vergleichbar mit den Heuristiken, die in Unterabschnitt 2.1.3 vorgestellt werden (für einen Vergleich s. 2.1.4). In diesem Sinne kann dieses MIP daher ebenfalls als Heuristik betrachtet werden.

### 2.1.2 Der Algorithmus von Gilmore und Gomory

Der Algorithmus von Gilmore und Gomory [?] löst in  $\mathcal{O}(n \log n)$  einen speziellen Fall des gerichteten Travelling-Salesman-Problems (TSP), bei dem alle Knoten  $i$  zwei Parameter  $a_i, b_i$  haben und die Kantenkosten  $c_{ij}$  zwischen je zwei Knoten  $i$  und  $j$  nur von  $a_i$  und  $b_j$  abhängig sind.

Diese Situation liegt beim synchronen Flow-Shop vor, wenn es nur zwei benachbarte dominierende Maschinen gibt. O.B.d.A seien dies  $M_1$  und  $M_2$ . Jobs können durch Knoten repräsentiert werden und die beiden Prozesszeiten auf den dominierenden Maschinen liefern die Parameter  $a_i$  und  $b_i$ . Der Abstand zwischen zwei Knoten entspricht dann der Zykluszeit, die die entsprechenden Jobs verursachen, wenn sie nebeneinander liegen. Die Berechnung der Zykluszeiten vereinfacht sich hier zu  $c_t = \max\{p_{2\pi_{t-1}}, p_{1\pi_t}\}$  für  $2 \leq t \leq n$ . Sie sind also für je zwei Jobs  $\pi_{t-1}, \pi_t$  nur noch von der Prozesszeit des vorderen Jobs auf der zweiten Maschine ( $p_{2\pi_{t-1}}$ ) und der Prozesszeit des hinteren Jobs auf der ersten Maschine ( $p_{1\pi_t}$ ) abhängig.

Abbildung 2.1:

Auf die Funktionsweise des Algorithmus soll in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden. Eine Anwendung des Algorithmus von Gilmore und Gomory als Heuristik für ein Problem mit mehreren dominierenden Maschinen wird in 2.1.3 beschrieben.

### 2.1.3 Heuristische Verfahren

Aufgrund der  $\mathcal{NP}$ -Schwere der Optimierung von  $C_{\max}$  im allgemeinen Fall und der schlechten Laufzeit des MIPs aus Abschnitt 2.1.1 bei Instanzen realer Größe werden hier einige heuristische Ansätze zur Berechnung von  $\pi$  vorgestellt.

#### Non-Full-Schedule-Heuristik

Diese Heuristik ist eine konstruktive Greedy-Heuristik, die Schritt für Schritt einen Job an  $\pi$  anhängt, beginnend mit einer leeren Reihenfolge. Sie arbeitet ähnlich wie die Nearest-Neighbor-Heuristik beim TSP. In jeder Iteration werden alle noch verbleibenden Jobs bewertet und der Job mit der besten Bewertung wird an  $\pi$  angehängt. Die Heuristik benötigt also genau  $n$  Iterationen. Die Bewertungsfunktion betrachtet die letzten  $m - 1$  Zykluszeiten der noch nicht fertigen Reihenfolge, wobei die Zykluszeiten am Anfang bei einer noch leeren Reihenfolge als 0 angenommen werden. Für jeden Job  $j$ , der noch nicht in  $\pi$  ist, werden diese  $m - 1$  Zykluszeiten mit den ersten  $m - 1$  Prozesszeiten von  $j$  verglichen. Die Idee ist, dass diese möglichst übereinstimmen sollten. Ist eine Prozesszeit sehr viel größer als die aktuelle Zykluszeit, zu der sie hinzugefügt werden würde, würde die Zykluszeit entsprechend um einen Wert  $c_+$  ansteigen. Ist umgekehrt die Zykluszeit sehr viel größer als die zugehörige Prozesszeit von  $j$ , dann würde diese kurze Prozesszeit verschenkt werden. Die Differenz aus Zykluszeit und Prozesszeit wird mit  $c_-$  bezeichnet. Die Bewertungsfunktion berechnet für jeden Job die Summe aus den  $m - 1$   $c_+$ -Werten. Diese Summe ist die Bewertung für einen Job  $j$ . Der Job mit der kleinsten Bewertung wird an  $\pi$  angehängt. Falls mehrere Jobs eine optimale Bewertung haben, wird für diese Jobs als zweites Kriterium die Summe der  $c_-$ -Werte betrachtet. Der Job, bei dem diese Summe am kleinsten ist, verschenkt am wenigsten Zeit und wird ausgewählt. Das Vorgehen dieser Heuristik wird anhand der Beispielinstantz 1.2 in Abbildung 2.1 veranschaulicht.

Da in jeder Iteration alle verbleibenden Jobs betrachtet werden und für jeden dieser Jobs  $m - 1$  Zeiten verglichen werden, liegt die asymptotische Laufzeit dieser Heuristik in  $\mathcal{O}(n^2m)$ .

## Double Ended Non-Full-Schedule-Heuristik

Diese Heuristik basiert auf der Non-Full-Schedule-Heuristik. Der Unterschied besteht darin, dass  $\pi$  nicht nur von vorne, sondern gleichzeitig auch von hinten zur Mitte hin aufgebaut wird. Jeder noch nicht in  $\pi$  enthaltene Job wird pro Iteration mit beiden Enden der bisherigen Reihenfolge verglichen. Die Bewertungsfunktion für das hintere Ende arbeitet analog. Es wird der beste Job für das vordere Ende und der beste für das hintere Ende gesucht und der mit der besseren Bewertung wird vorne bzw. hinten eingefügt. Die asymptotische Laufzeit liegt hier ebenfalls in  $\mathcal{O}(n^2m)$ .

## Gilmore-Gomory-Heuristik

Diese Heuristik wendet den Algorithmus von Gilmore und Gomory auf beliebige Instanzen an. Es können zwei Fälle eintreten:

1. Unter den dominierenden Maschinen  $D$  gibt es zwei, die benachbart sind, also  $\exists i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $i, i+1 \in D$ .
2. Es gibt keine benachbarten dominierenden Maschinen.

Wenn Fall (2) eintritt, werden alle  $m$  Maschinen als dominierend angesehen, da dies für den Algorithmus keine Einschränkung darstellt. Nun werden zwei benachbarte dominierende Maschinen gewählt. O.B.d.A seien dies die Maschinen  $M_1$  und  $M_2$ . Seien

$$d_{\min} := \min_{\substack{i \in \{1,2\} \\ j \in J}} p_{ij} \quad (2.7)$$

$$e_{\max} := \max_{\substack{i \notin \{1,2\} \\ j \in J}} p_{ij} \quad (2.8)$$

$$K := \frac{e_{\max}}{d_{\min}}, \quad (2.9)$$

wobei  $d_{\min} = 0$  und daraus folgend  $K = \infty$  erlaubt sind. Nun wird aus der gegebenen Instanz  $I$  eine neue Instanz  $I'$  erzeugt, die sich nur dadurch von  $I$  unterscheidet, dass die Prozesszeiten auf allen dominierenden Maschinen außer auf  $M_1$  und  $M_2$  mit  $\frac{1}{K}$  skaliert werden, also

$$p'_{ij} := \begin{cases} \frac{p_{ij}}{K} & \text{für } i \in D \setminus \{1, 2\} \\ p_{ij} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Auf diese Weise sind  $M_1$  und  $M_2$  in  $I'$  die einzigen dominierenden Maschinen und folglich kann  $I'$  mit dem Algorithmus von Gilmore und Gomory optimal gelöst werden. Die resultierende Reihenfolge  $\pi$  wird als heuristische Lösung für die ursprüngliche Instanz  $I$  verwendet.

Da die Prozesszeiten der in  $I'$  vernachlässigten dominierenden Maschinen sich um den Faktor  $K$  von denen in  $I$  unterscheiden, können sich die aus  $\pi$  ergebenden Zykluszeiten von  $I$  und  $I'$  auch maximal um den Faktor  $K$  unterscheiden:

$$c_t \leq K \cdot c'_t \quad \forall 1 \leq t \leq n + m - 1 \quad (2.11)$$

Da die optimale Lösung von  $I'$  eine untere Schranke für die optimale Lösung von  $I$  ist, also  $C'_{\max} \leq C_{\max}$ , folgt für die Lösung  $L_{GG}$  der Gilmore-Gomory-Heuristik:

$$L_{GG} \leq K \cdot C'_{\max} \leq K \cdot C_{\max} \quad (2.12)$$

Die Gilmore-Gomory-Heuristik hat also eine relative Gütegarantie von  $K$ . Bei der Wahl der beiden benachbarten dominierenden Maschinen sollte darauf geachtet werden, dass  $d_{\min}$  möglichst groß und  $e_{\max}$  möglichst klein ist. Dadurch ist dann auch der Gütefaktor  $K$  am kleinsten.

Das Finden der geeigneten dominierenden Maschinen kann in  $\mathcal{O}(nm)$  durchgeführt werden. Das Anpassen der Prozesszeiten der übrigen dominierenden Maschinen ist nur in der Theorie von Interesse. Der Gilmore-Gomory-Algorithmus kann diese einfach ignorieren. Die Gesamtlaufzeit beträgt daher  $\mathcal{O}(nm + n \log n)$ .

Für die weitere Analyse dieser Heuristik soll der Begriff der *Semidominanz* eingeführt werden. Die Semidominanz ist ein Maß dafür, wie weit eine Teilmenge von Maschinen davon entfernt ist, dominierend zu sein. Eine Semidominanz von 0 bedeutet, die Maschinen sind dominierend. Für eine Teilmenge von Maschinen  $D \subseteq \{1, \dots, m\}$  sei

$$d_{\min} = \min_{\substack{i \in D \\ j \in \{1, \dots, n\}}} p_{ij}$$

die kleinste ihrer Prozesszeiten, analog zur obigen Definition von  $d_{\min}$ . Die Semidominanz ist dann definiert als

$$\mathcal{D}_D := \sum_{i \notin D} \sum_{j=1}^n \max\{0, p_{ij} - d_{\min}\}.$$

Unabhängig von der *relativen* Gütegarantie  $K$  liefert diese Heuristik auch eine *absolute* Gütegarantie von  $\mathcal{D}_{\{i, i+1\}}$ , wenn  $M_i$  und  $M_{i+1}$  als benachbarte Maschinen ausgewählt werden. Die Gilmore-Gomory-Heuristik liefert also besonders gute Näherungen, wenn zwei benachbarte Maschinen fast dominierend sind und nur wenige Prozesszeiten auf anderen Maschinen dies verhindern.

## Nachbarschaftssuche

Mit einer Nachbarschaftssuche können bereits existierende (nicht optimale) Reihenfolgen verbessert werden. Mögliche Nachbarschaftsoperatoren sind

- $xch_{jk}$ : vertauscht die Jobs an den Positionen  $j$  und  $k$  miteinander,
- $shift_{jk}$ : „shiftet“ den Job an Position  $j$  nach Position  $k$ . Alle Jobs zwischen  $j$  und  $k$  rücken um eins nach links (falls  $j < k$ ) bzw. nach rechts (falls  $j > k$ ).

Auf Grundlage dieser Nachbarschaften lassen sich außerdem z.B. Iterative Improvement, eine Tabu-Suche oder Simulated Annealing implementieren.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Simulated Annealing Algorithmus auf Grundlage der  $xch_{jk}$ -Nachbarschaft implementiert. Es wird mit einer zufälligen initialen Reihenfolge  $\pi$  begonnen. Die Funktion, die  $C_{\max}$  von  $\pi$  berechnet, sei mit  $c$  bezeichnet. Pro Iteration werden zufällige  $j$  und  $k$  bestimmt, mit denen eine benachbarte Lösung  $\pi' = xch_{jk}(\pi)$  erzeugt wird. Ist  $\pi'$  besser als die aktuelle Lösung  $\pi$ , d.h.  $c(\pi') < c(\pi)$ , wird  $\pi'$  als neue Lösung übernommen. Ist  $\pi'$  schlechter als  $\pi$ , wird  $\pi'$  nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit übernommen. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt  $e^{\frac{c(\pi) - c(\pi')}{t_i}}$ , wobei  $(t_i)_i$  eine Nullfolge ist und  $i$  die Anzahl der bisher durchgeführten Iterationen angibt. Die Folge  $(t_i)_i$  wird auch als „Temperatur“ bezeichnet, die im Laufe des Verfahrens abnimmt. Es wurde mit unterschiedlichen Temperaturen experimentiert. Es wurden

- $t_i = \alpha t_{i-1}$  für unterschiedliche  $\alpha \in ]0, 1[$  und
- $t_i = \frac{c}{i}$ ,
- $t_i = \frac{c}{\log i}$  und
- $t_i = c \frac{|\cos \frac{i}{30}|}{i}$

jeweils für unterschiedliche  $c \in \mathbb{R}_+$  getestet. Die besten Resultate lieferte  $t_i = 50 \frac{|\cos \frac{i}{30}|}{i}$ . Durch den Cosinus schwankt die Temperatur, so dass abwechselnd verschlechternde Lösungen erlaubt bzw. nicht erlaubt werden. Das Verfahren terminiert, sobald in 1000 aufeinander folgenden Iterationen keine neue beste Lösung gefunden werden konnte.

Dieser Simulated Annealing Algorithmus lieferte in Tests meist etwas bessere Ergebnisse als die übrigen Heuristiken. Die Heuristiken werden im nachfolgenden Unterabschnitt 2.1.4 evaluiert.

## 2.1.4 Vergleich der Heuristiken

In diesem Abschnitt werden die Rechenergebnisse der Heuristiken aus Unterabschnitt 2.1.3 vorgestellt und miteinander verglichen. Es wurden drei Testreihen mit zufälligen Instanzen erzeugt, jeweils mit  $m = 8$  und  $n = 50, 100, 150, \dots, 5000$ . Getestet wurde auf einem PC mit Intel(R) Xeon(R) CPU E3-1230 v3, 8 Kerne @ 3.30GHz, und 16GB RAM

unter Ubuntu 13.10. Die MIPs wurden mit ZIMPL [Koc04] und CPLEX v12.6 gelöst. Die übrigen Heuristiken wurden in C++ implementiert und mit dem GCC v4.8.1 mit O2-Optimierung kompiliert.

In der ersten Testreihe sind die Maschinen  $M_3, M_4, M_5$  dominierend. Ihre Prozesszeiten wurden gleichverteilt aus dem Intervall  $[10, 100]$  gewählt. Die Prozesszeiten der übrigen Maschinen wurden aus dem Intervall  $[0, 9]$  gleichverteilt gewählt. In Abbildung 2.2 sind die Resultate aufgetragen. Aufgetragen sind jeweils die absoluten Differenzen  $C_{\max, h} - C_{\max, nfs}$  der übrigen Heuristiken ( $h$ ) zur Non-Full-Schedule-Heuristik ( $nfs$ ). CPLEX LB und UB bezeichnen die untere und obere Schranke, die CPLEX nach 30 Minuten errechnet hat. Dabei ist die obere Schranke der Zielfunktionswert einer tatsächlich errechneten Lösung und kann daher als Heuristik verwendet werden. Zu sehen ist, dass die Lösungen des MIPs bei sehr kleinen Instanzen ( $n < 300$ ) nach einer halben Stunde Rechenzeit vergleichbar mit den Lösungen der übrigen Heuristiken sind. Allerdings benutzt CPLEX alle 8 Prozessorkerne parallel, während die übrigen Heuristiken nicht parallel implementiert sind. Außerdem liegen die Rechenzeiten der übrigen Heuristiken weit unter einer halben Stunde (s. Abbildung 2.3). Aus diesen Gründen wurde das MIP auch nur bis zu Instanzgrößen von  $n = 1500$  berechnet.

Außerdem ist zu erkennen, dass die Double Ended Non-Full-Schedule-Heuristik fast identische Resultate liefert im Vergleich zur Non-Full-Schedule-Heuristik und dass die Gilmore-Gomory-Heuristik hier relativ schlechte Resultate liefert und mit Simulated Annealing die besten Lösungen erzeugt werden. Der Plot der relativen Abweichungen zeigt außerdem, dass diese Abweichungen offenbar nahezu konstant sind zwischen den Heuristiken (nicht beim MIP) und nicht von der Instanzgröße abhängen. Einzig die relative Abweichung des Simulated Annealings scheint mit zunehmender Instanzgröße leicht abzunehmen.

In Abbildung 2.3 sind die Zeiten aufgetragen, die die Heuristiken benötigten, um die in Abbildung 2.2 dargestellten Resultate zu berechnen. Deutlich zu erkennen ist der quadratische Anstieg der beiden Non-Full-Schedule-Heuristiken, wobei die Double Ended Variante etwas langsamer ist, da pro Iteration immer zwei Jobs statt nur einem gesucht werden. Außerdem treten in der Kurve der Double Ended Non-Full-Schedule-Heuristik teilweise kleine Ausreißer nach oben auf. Eine plausible Begründung hierfür konnte nicht gefunden werden. Die Kurve des Simulated Annealings ist, wie zu erwarten war, sehr chaotisch, was durch die nicht deterministische Funktionsweise des Algorithmus erklärt werden kann: Die Laufzeit hängt stark vom Zufall ab und nur zweitrangig von der Instanzgröße. Am schnellsten ist die Gilmore-Gomory-Heuristik, die dafür aber auch vergleichsweise schlechte Resultate liefert.

Die zweite Testreihe unterscheidet sich nur dadurch von der ersten, dass die Prozesszeiten der dominierenden Maschinen nicht gleichverteilt aus dem Intervall  $[10, 100]$  ausgewählt wurden, sondern normalverteilt mit einem Erwartungswert von  $\mu = 50$  und einer Standardabweichung von  $\sigma = 20$ . Die Resultate sind analog zur ersten Testreihe in

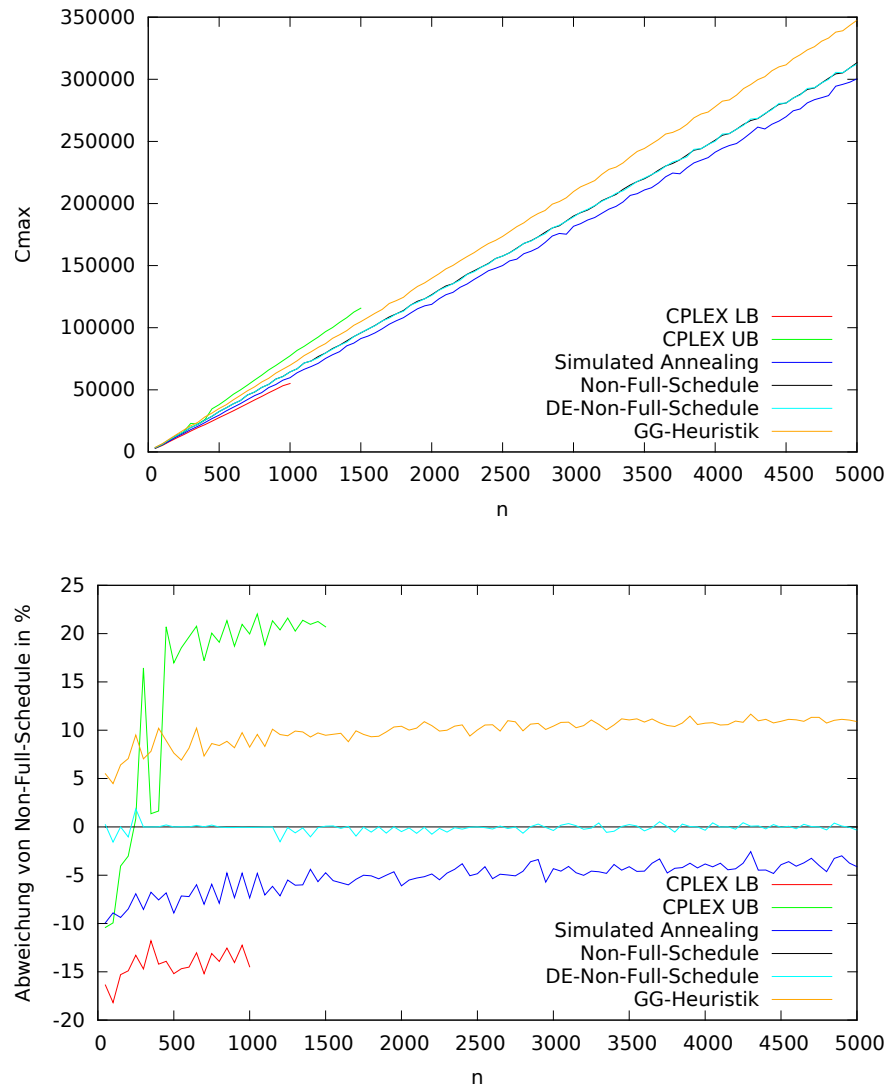


Abbildung 2.2: Absolute (oben) und relative (unten) Unterschiede zwischen der Non-Full-Schedule-Heuristik und den übrigen Heuristiken bei drei dominierenden Maschinen (gleichverteilte Prozesszeiten).

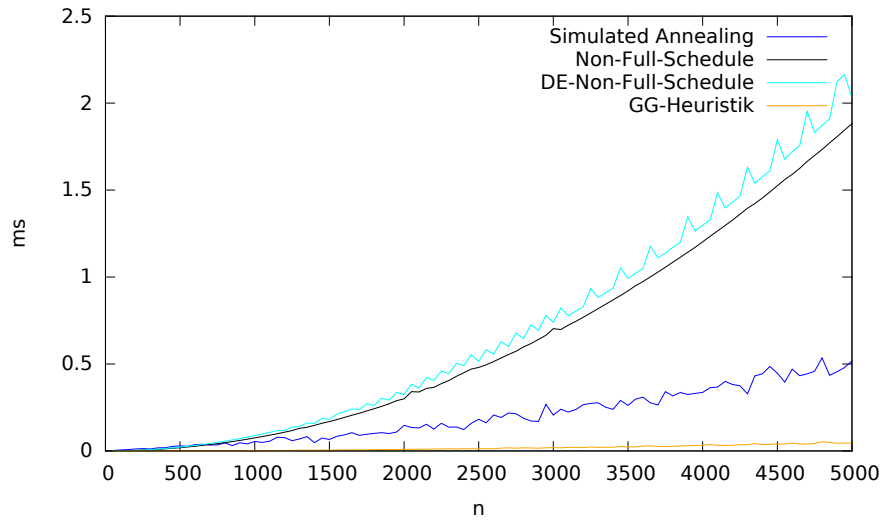


Abbildung 2.3: Laufzeiten der drei Heuristiken bei drei dominierenden Maschinen (gleichverteilte Prozesszeiten).

Abbildung 2.4 dargestellt und die Laufzeiten dazu in Abbildung 2.5.

Die Laufzeiten der zweiten Testreihe unterscheiden nur marginal von denen der ersten, was zu erwarten war, da die Laufzeiten der Heuristiken nicht von den Prozesszeiten abhängig sind. Die Kurven in Abbildung 2.4 unterscheiden sich im Verlauf kaum von denen in Abbildung 2.2. Allerdings sind diese Kurven im Vergleich zur ersten Testreihe in etwa um den Faktor 2 gestaucht. Die Resultate der Heuristiken unterscheiden sich hier also weniger. Das muss daran liegen, dass die Prozesszeiten (da sie normalverteilt sind) weniger unterschiedlich sind. Die beiden Non-Full-Schedule-Heuristiken ziehen daraus einen Vorteil, da sie nach eben diesem Prinzip vorgehen, möglichst ähnliche Prozesszeiten zu finden. Auch die Gilmore-Gomory-Heuristik profitiert davon, da beim (theoretischen) Wiederhochskalieren der Prozesszeiten der dritten dominierenden Maschine nur vergleichsweise wenige Zykluszeiten mit vergrößert werden müssen. Und auch CPLEX kommt bei diesen Daten offenbar ebenfalls schneller zu besseren Schranken.

Die dritte und letzte Testreihe wurde mit einem identischen Verfahren wie die zweite Testreihe generiert. Allerdings wurde der Erwartungswert der Prozesszeiten auf Maschine  $M_3$  auf  $\mu = 30$  festgesetzt, also um 20 weniger gegenüber  $M_4$  und  $M_5$ . Ziel sollte es sein, dass  $M_4$  und  $M_5$  nicht dominierend sind, sondern nur eine geringe Semidominanz haben, so dass die Vorzüge der Gilmore-Gomory-Heuristik zum Tragen kommen.

Und tatsächlich bestätigen die Rechenergebnisse diese Vermutung, wie in Abbildung 2.6 zu sehen ist. Fast alle Heuristiken liefern bessere Ergebnisse als sie es bei den ersten beiden Testreihen tun (in der gleichen Zeit, s. Abbildung 2.7). Simulated Annealing



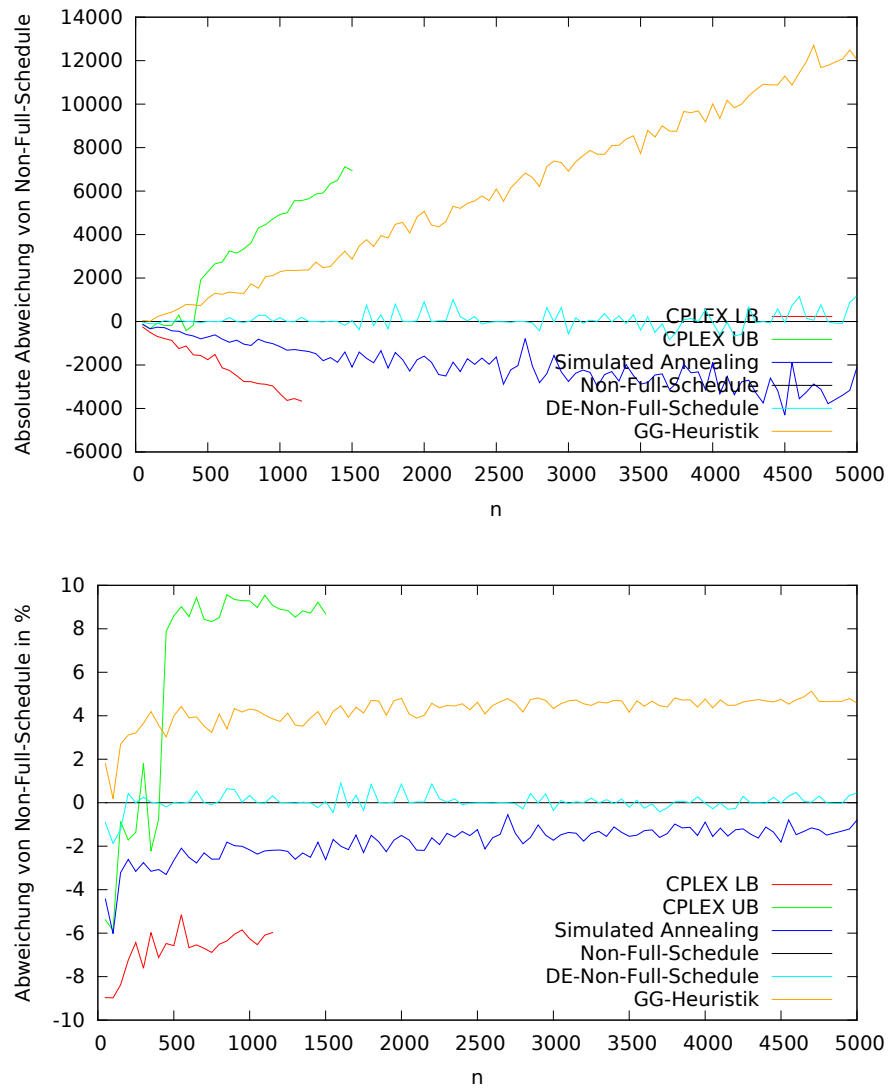


Abbildung 2.4: Absolute (oben) und relative (unten) Unterschiede zwischen der Non-Full-Schedule-Heuristik und den übrigen Heuristiken bei drei dominierenden Maschinen (normalverteilte Prozesszeiten).

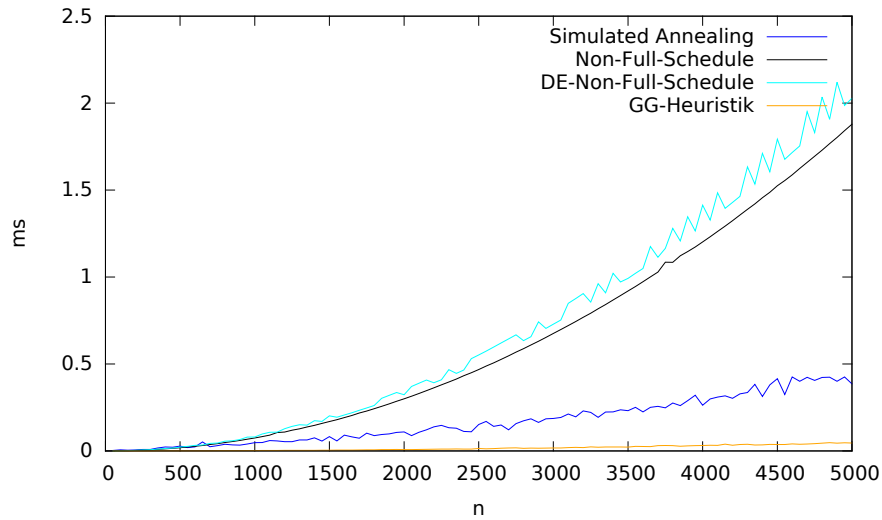


Abbildung 2.5: Laufzeiten der drei Heuristiken bei drei dominierenden Maschinen (normalverteilte Prozesszeiten).

ist hier allerdings nicht mehr die beste Heuristik. Die besten Resultate liefern hier die Gilmore-Gomory-Heuristik, die die größte Verbesserung gegenüber den anderen Testreihen erfährt, und die Non-Full-Schedule-Heuristik. Die Resultate von beiden sind nahezu identisch. Die Double Ended Non-Full-Schedule-Heuristik ist hier bei allen Instanzen schlechter als die Non-Full-Schedule-Heuristik, wenn auch nur um weniger als 1% bzw. bis zu 3% bei sehr kleinen Instanzen. Bemerkenswert ist außerdem, dass die untere Schranke, die von CPLEX für Instanzen mit  $n \leq 1500$  berechnet wurde, oft bis an die Ergebnisse der Gilmore-Gomory- und der Non-Full-Schedule-Heuristik heranreicht. Das bedeutet, dass die Resultate dieser beiden Heuristiken nahezu optimal sind. Andererseits sind die oberen Schranken von CPLEX vergleichsweise weit von den Resultaten der Heuristiken entfernt. Als Ausblick könnten diese Heuristiken daher in CPLEX integriert werden, um die oberen Schranken zu verbessern.

## 2.2 Zuweisung von Ressourcen

In diesem Abschnitt geht es darum, den Jobs in der Reihenfolge  $\pi$ , die in Abschnitt 2.1 aufgestellt wurde, Ressourcen zuzuweisen. An diese Zuweisung werden zwei Anforderungen gestellt:

1. Die Zuweisung muss zulässig sein. Das heißt, ist eine Ressource einem Job zugewiesen, darf sie den nachfolgenden  $m - 1$  Jobs nicht mehr zugewiesen werden.

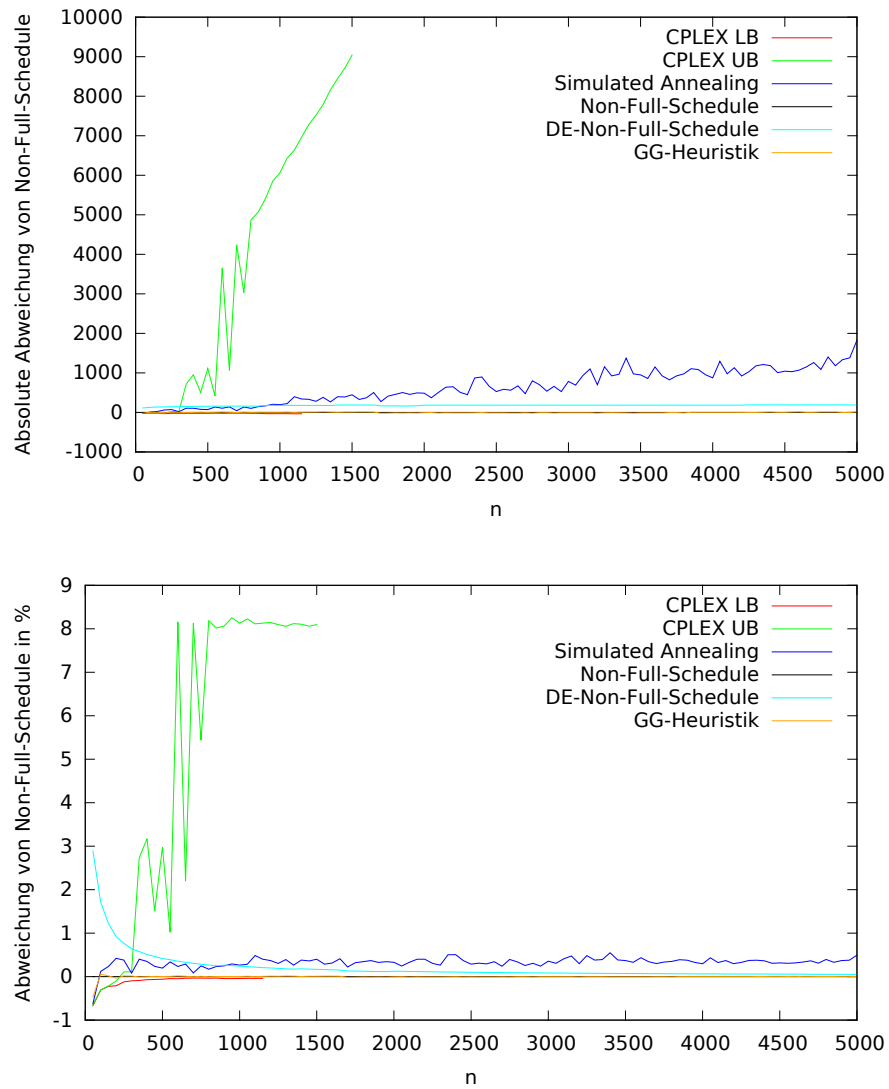


Abbildung 2.6: Absolute (oben) und relative (unten) Unterschiede zwischen der Non-Full-Schedule-Heuristik und den übrigen Heuristiken bei zwei semidominierenden Maschinen (normalverteilte Prozesszeiten).

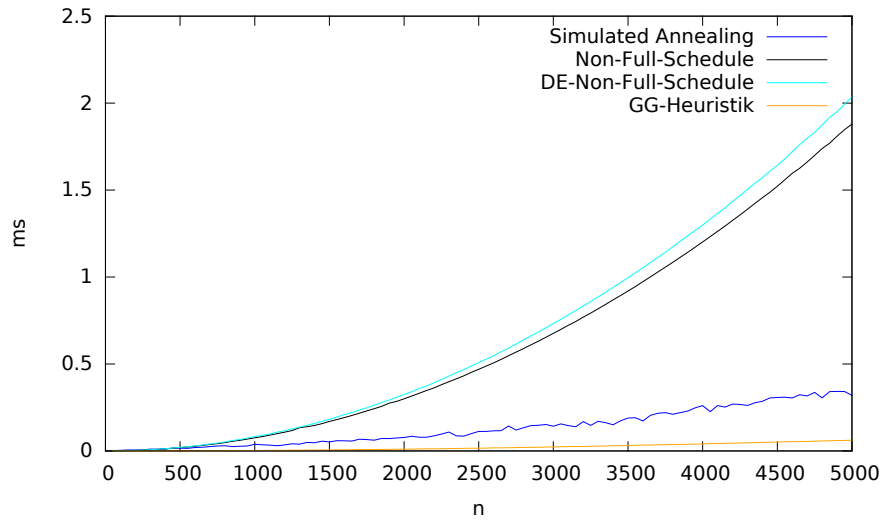


Abbildung 2.7: Laufzeiten der drei Heuristiken bei zwei semidominierenden Maschinen (normalverteilte Prozesszeiten).

Das Problem der Zulässigkeit einer Zuweisung wird im ersten Unterabschnitt 3.1.2 betrachtet.

2. Die Zuweisung soll möglichst gut sein. Wenn zwei Jobs, die im Abstand von  $m$  in  $\pi$  liegen, die selbe Ressource benutzen können, werden Rüstkosten eingespart, da die Ressource nicht ausgetauscht werden muss. Dieses Problem wird in Unterabschnitt 2.2.2 diskutiert.

Es ist natürlich möglich, dass bei gegebenem  $\pi$  keine zulässige Zuweisung von Ressourcen möglich ist. In diesem Fall muss  $\pi$  nachträglich geändert werden, worauf in Unterabschnitt 2.3 eingegangen wird.

### 2.2.1 Zulässigkeit der Zuweisung

Abhängig davon, welche Ressourcen für welche Jobs geeignet sind, kann das Zulässigkeitsproblem unterschiedlich schwer zu lösen sein. Folgende Situationen werden betrachtet:

- Alle Ressourcen sind für alle Jobs geeignet (trivial, es müssen  $m$  Ressourcen vorhanden sein).
- Die Ressourcenmengen sind disjunkt ( $\rho_i \cap \rho_j \neq \emptyset \Rightarrow \rho_i = \rho_j$ ).
- Die Ressourcen sind für hierarchische Jobgruppen geeignet ( $\iota_q \cap \iota_r \neq \emptyset \Rightarrow \iota_q \subseteq \iota_r$ ).

oder  $\iota_r \subseteq \iota_q$ ).

- Die  $\rho_i$  sind beliebige Teilmengen von  $R$ .

### Zulässigkeit bei disjunkten Ressourcenmengen

Bei disjunkten Ressourcenmengen können die Jobs in Gruppen unterteilt werden, so dass zu jeder Jobgruppe eine für sie exklusive Menge an zulässigen Ressourcen zur Verfügung steht. Für die Zulässigkeit reicht es aus, statt der Ressourcenmengen  $\rho_i$  nur deren Größen  $|\rho_i|$  zu betrachten (bei der Optimierung der Zuteilung ist diese Vereinfachung nicht sinnvoll). Mit einem Greedy-Algorithmus kann eine gegebene Reihenfolge  $\pi$  dann auf Zulässigkeit überprüft werden: Der Algorithmus durchläuft  $\pi$  von vorne nach hinten. Jede Jobgruppe erhält einen Counter, der mitzählt, wie viele Ressourcen momentan für sie zur Verfügung stehen. Diese Counter werden zu Beginn mit  $|\rho_i|$  initialisiert. An jeder Position in  $\pi$  wird der Counter der zugehörigen Jobgruppe dekrementiert. Nach  $m$  Schritten wird dieser Counter wieder inkrementiert. Sollte ein Counter einmal negativ werden, gibt es keine zulässige Ressourcenzuteilung.

### Zulässigkeit bei beliebigen Ressourcenteilungen

Es ist nicht bekannt, ob das Problem, zu entscheiden, ob es bei gegebenem  $\pi$  und beliebigen Ressourcenmengen ein zulässiges Mapping  $f$  gibt,  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist oder ob es einen polynomiellen Algorithmus gibt.

Es besteht allerdings die Vermutung, dass es bei konstantem  $m$  einen polynomiellen Algorithmus in  $n$  gibt. Ein Indiz für diese Vermutung liefert folgendes MIP:

$$\max \quad 0 \tag{2.13}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r \in \rho_i} x_{ir} = 1 \quad i \in N \tag{2.14}$$

$$x_{ir} + x_{jr} \leq 1 \quad i \in N, j = i + 1, \dots, i + m - 1, r \in \rho_i \cap \rho_j \tag{2.15}$$

$$x_{ir} \in \{0, 1\} \quad i \in N, r \in \rho_i \tag{2.16}$$

O.B.d.A. sei hier  $\pi_i = i$ , d.h. Job  $i$  ist an Position  $i$ . Die Binärvariablen  $x_{ir}$  geben hier an, ob dem Job  $i$  die Ressource  $r$  zugeteilt wird. In diesem Fall ist  $x_{ir} = 1$  und sonst  $x_{ir} = 0$ . Die erste Nebenbedingung (2.14) bewirkt, dass jedem Job genau eine Ressource zugewiesen wird. Durch die zweite Nebenbedingung (2.15) kann jede Ressource jeweils nur einmal an  $m$  aufeinander folgende Jobs vergeben werden. Eine Zielfunktion ist nicht notwendig, da die Zulässigkeit nur durch die Nebenbedingungen entschieden wird. Mit diesem MIP können selbst sehr große Instanzen mit  $n \approx 100000$  (allerdings mit  $m \leq 8$ ) in weniger als einer Sekunde gelöst werden.

Nebenbedingung (2.15) verhindert immer nur für Paare von Jobs, deren Abstand kleiner als  $m$  ist, dass ihnen die selbe Ressource zugewiesen wird. Das ist für die Korrektheit des MIPs zwar ausreichend, durch zusätzliche Nebenbedingungen, die dasselbe für Tripel, Quadrupel, bis hin zu  $m$ -Tupeln verhindern, können aber einige fraktionale Lösungen der Relaxation „abgeschnitten“ werden. Für ein  $k$ -Tupel von Jobs, die alle in einem Abschnitt von  $\pi$  der Länge  $m$  stehen, sieht diese zusätzliche Nebenbedingung so aus:

$$\sum_{l=1}^k x_{i_l r} \leq 1 \quad i_l \in N, i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_1 + m, r \in \bigcap_{l=1}^k \rho_{i_l} \quad (2.17)$$

Für  $k = 2$  ist diese Nebenbedingung identisch mit (2.15). Die Anzahl dieser Nebenbedingungen lässt sich durch  $\mathcal{O}(n(m-1)!|R|)$  abschätzen, was bei konstantem  $m$  polynomiell ist. Werden sie für  $k = 3, \dots, m$  zu obigem MIP hinzugefügt, so war bei allen bislang getesteten Instanzen die Relaxation bereits ganzzahlig. Ein Beweis, dass dies tatsächlich bei allen Instanzen der Fall ist, ist noch nicht gelungen. Gelingt er, ist bewiesen, dass es in polynomieller Zeit (bei konstantem  $m$ ) möglich ist, zu entscheiden, ob es für eine gegebene Jobreihenfolge  $\pi$  und gegebene (beliebige) Ressourcenteilmenen  $\rho_i$  möglich ist, allen Jobs eine Ressource zuzuweisen.

## 2.2.2 Optimierung der Ressourcenzuweisung

Da unbekannt ist, ob das Finden *irgendeiner* Ressourcenzuweisung  $\mathcal{NP}$ -schwer ist, ist es natürlich ebenfalls unbekannt, ob das Finden einer *optimalen* Ressourcenzuweisung  $\mathcal{NP}$ -schwer ist.

Eine Ausnahme bildet der Fall von disjunkten Ressourcenteilmenen  $\rho_i$ . Immer, wenn zwei Jobs aus einer Familie im Abstand  $m$  aufeinander folgen, kann ihnen dieselbe Ressource zugewiesen werden. Wenn zwei Jobs im Abstand  $m$  nicht zur selben Familie gehören, gibt es auch keine Möglichkeit, Rüstkosten zu vermeiden oder zu verringern.

Für den allgemeinen Fall lässt sich das MIP aus Unterabschnitt 2.2.1 erweitern:

$$\max \sum_{i=m}^n \sum_{r \in \rho_i \cap \rho_{i-m}} y_{ir} \quad (2.18)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{r \in \rho_i} x_{ir} = 1 \quad i \in N \quad (2.19)$$

$$x_{ir} + x_{jr} \leq 1 \quad i \in N, j = i + 1, \dots, i + m - 1, r \in \rho_i \cap \rho_j \quad (2.20)$$

$$y_{ir} \leq x_{ir} \quad i = m, \dots, n, r \in \rho_i \cap \rho_{i-m} \quad (2.21)$$

$$y_{ir} \leq x_{i-m,r} \quad i = m, \dots, n, r \in \rho_i \cap \rho_{i-m} \quad (2.22)$$

$$x_{ir} \in \{0, 1\} \quad i \in N, r \in \rho_i \quad (2.23)$$

$$y_{ir} \in \{0, 1\} \quad i = m, \dots, n, r \in \rho_i \cap \rho_{i-m} \quad (2.24)$$

Auch hier sei wieder o.B.d.A.  $\pi_i = i$ . Für die Binärvariablen  $y_{ir}$  gilt  $y_{ir} = 1$  genau dann, wenn den Jobs an den Positionen  $i$  und  $i - m$  die selbe Ressource  $r$  zugeteilt ist. Diese Eigenschaft wird durch die Nebenbedingungen (2.21) und (2.22) erzwungen. In der Zielfunktion (2.18) wird daher die Anzahl der  $y$ -Variablen, die auf 1 gesetzt sind, maximiert, da so die wenigsten Rüstkosten auftreten. Dieses MIP liefert genau wie jenes aus 2.2.1 in weniger als einer Sekunde auch für sehr große Instanzen eine Lösung.

## 2.3 Unzulässige Reihenfolgen

Für den Fall, dass für eine gegebene Reihenfolge  $\pi$  kein zulässiges Mapping  $f$  erstellt werden kann, muss  $\pi$  nachträglich verändert werden.

### 2.3.1 Nachbarschaftssuche

Mit einer Vertauschung zweier Jobs kann  $\pi$  unter Umständen so abgeändert werden, dass doch ein zulässiges Mapping existiert. Der Greedy-Algorithmus aus Unterabschnitt 2.2.1 kann so abgewandelt werden, dass er, sobald einer der Counter negativ wird, nicht terminiert, sondern weiter Ressourcen zuweist, auch wenn dies eigentlich gar nicht geht. Sei  $j$  ein Job, dessen Counter negativ geworden ist. Ziel ist es, einen anderen Job  $k$  zu finden mit der Eigenschaft, dass die Counter von  $j$  und  $k$  jeweils noch mindestens 1 betragen, wenn man ihre Positionen vertauscht, und dass auch keiner der Counter der umliegenden Jobs von  $j$  und  $k$  durch eine Vertauschung negativen werden würde. Falls mehrere solcher  $k$  existieren, wird derjenige ausgewählt, dessen Vertauschung mit  $j$  die geringste Verschlechterung von  $C_{\max}$  verursacht. Die Counter der umgebenen Jobs müssen nach der Vertauschung aktualisiert werden. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis es keine negativen Counter mehr gibt. Falls kein solcher Job  $k$  existiert, kann die Zulässigkeit von  $\pi$  mit dieser Methode nicht erlangt werden.

### 2.3.2 Idle-Jobs

Falls mit der Nachbarschaftssuche keine Lösung gefunden werden kann, besteht die Möglichkeit sogenannte Idle-Jobs in  $\pi$  einzufügen. Idle-Jobs sind Jobs, die auf allen Maschinen die Prozesszeit 0 haben und keine Ressourcen benötigen. In der Praxis kann ein Idle-Job durch „nichts“ realisiert werden, es wird also einfach kein Job in die Station eingelegt. Nach dem Einfügen eines Idle-Jobs kann erneut die Nachbarschaftssuche angewandt werden. Es können so lange Idle-Jobs eingefügt werden, bis eine gültige Ressourcenzuweisung gefunden wurde.

## 3 Der zweite Dekompositionsansatz

In diesem Kapitel wird der zweite Dekompositionsansatz vorgestellt. Hierbei wird erst jedem Job eine Ressource zugewiesen, also ein Mapping  $f$  erzeugt, und anschließend werden die Jobs in eine Reihenfolge  $\pi$  gebracht. Neben der reinen Ressourcenzuteilung wird im ersten Schritt auch teilweise schon festgelegt, welche Jobs in der späteren Reihenfolge einen Abstand von  $m$  haben sollen. So wird sichergestellt, dass die durch das Mapping  $f$  vorgeschriebenen Ressourcenzuteilungen auch dazu führen, dass Rüstkosten eingespart werden.

In Abschnitt 3.1 wird erklärt, wie ein optimales Mapping  $f$  mit möglichst wenigen Rüstkosten mit einem Binpacking-Ansatz erstellt werden kann. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 beschrieben, wie basierend auf dem gegebenen Mapping  $f$  eine Reihenfolge  $\pi$  erstellt wird, so dass die Summe der Zykluszeiten ( $C_{\max}$ ) minimal ist.

### 3.1 Ressourcenzuweisung

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion des Mappings  $f$  erläutert. Dabei wird davon ausgegangen, dass Rüstkosten einzig durch einen Ressourcenwechsel verursacht werden. In Unterabschnitt 3.1.1 wird auf den Spezialfall  $s_{fg} = s$ , der mit einem Binpackingansatz gelöst werden kann, eingegangen.

In realen Anwendungsfällen ist es in häufig nicht der Fall, dass bei  $n$  zu produzierenden Jobs alle  $n$  Jobs unterschiedlich sind, d.h. unterschiedliche Prozesszeiten und Ressourcen haben. Stattdessen bietet ein Produzent eine gewisse Anzahl unterschiedlicher Güter an und ein Käufer gibt mehrere identische Güter auf einmal in Auftrag. Im Folgenden ist daher von *Jobgruppen* die Rede, wobei eine Jobgruppe  $g$  aus  $n_g \in \mathbb{N}$  identischen Jobs besteht.  $n_g$  ist also die Größe einer Jobgruppe  $g$ . Die Anzahl der Jobgruppen wird mit  $\tilde{n}$  bezeichnet. Für die Gesamtanzahl an Jobs gilt dann  $n = \sum_{g=1}^{\tilde{n}} n_g$ .

#### 3.1.1 Ressourcenzuweisung mit Binpacking

Bei  $\tilde{n}$  gegebenen Jobgruppen, wobei alle Jobs aus einer Gruppe die gleichen Ressourcen verwenden können, ist es naheliegend, die Jobs einer Gruppe immer im Abstand von  $m$



in die Anlage einzulegen. Auf diese Weise muss die Ressource in der entsprechenden Station so lange nicht ausgetauscht werden, bis alle Jobs aus einer Jobgruppe fertiggestellt worden sind. Erst danach, wenn Jobs aus einer anderen Gruppe eingelegt werden, muss einmalig die Ressource gewechselt werden, so dass nur dann Rüstkosten auftreten. Dabei soll zunächst nur der Spezialfall mit disjunkten Ressourcenmengen und konstanten Rüstkosten ( $s_{fg} = s$ ) betrachtet werden.

O.B.d.A. sei  $n$  ein Vielfaches von  $m$ , denn andernfalls kann eine weitere „Dummy“-Jobgruppe  $g_d$  aus Idle-Jobs konstruiert werden, deren Jobs die Prozesszeiten 0 haben und die genau so groß ist, dass  $n + n_{g_d}$  ein Vielfaches von  $m$  ist. Bei  $\tilde{n}$  gegebenen Jobgruppen mit den Größen  $n_g$ ,  $g = 1, \dots, \tilde{n}$  ist das Ziel, die Jobgruppen in  $m$  gleichgroße Teilmengen zu unterteilen, möglichst ohne eine der Jobgruppen zu teilen. Dieses Problem lässt sich als Binpacking-Instanz betrachten, wobei entschieden werden muss, ob  $\tilde{n}$  Items mit den Größen  $n_1, \dots, n_{\tilde{n}}$  in  $m$  Bins der Größe  $\frac{n}{m}$  untergebracht werden können. Für den Fall, dass es möglich ist, müssen noch die Bins den Stationen der Anlage zugeordnet werden und die Reihenfolge der Jobgruppen in jedem Bin muss so bestimmt werden, dass die Zykluszeiten minimiert werden. Dies wird in Abschnitt 3.2 beschrieben. Falls dies nicht möglich ist, bedeutet das, dass mindestens eine der Jobgruppen aufgeteilt werden muss auf zwei Bins, so dass ein weiteres Mal Rüstkosten auftreten.

Um herauszufinden, welche Jobgruppe geteilt werden muss und wie groß die beiden Hälften sein müssen, wird eine weitere Binpacking-Instanz<sup>1</sup> gelöst, die bis auf eine Änderung identisch zur vorherigen ist: Es gibt nicht mehr  $m$  Bins, sondern nur noch  $m - 1$  und einer dieser Bins hat die Größe  $2\frac{n}{m}$  (alle anderen haben weiterhin die Größe  $\frac{n}{m}$ ). Wenn hier eine Aufteilung möglich ist, kann der Bin mit doppelter Größe wieder halbiert werden, wobei dann eine der Jobgruppen in ihm auch geteilt werden muss wie in Abbildung ?? veranschaulicht. Sollte auch hier keine Lösung möglich sein, muss eine weitere Jobgruppe geteilt werden. Dazu wird wiederum eine neue Binpacking-Instanz erzeugt. Abbildung ?? zeigt, wie die Binsgrößen in den weiteren Instanzen aussehen. Es handelt sich dabei um die *ungeordnete Zahlenpartition* von  $m$ . Spätestens bei der Binpacking-Instanz, die nur noch einen Bin enthält mit der Größe  $n$ , gibt es eine Lösung, bei der dann  $m$  Jobgruppen aufgeteilt werden müssen, so dass  $m$  weitere Ressourcenwechsel und damit Rüstkosten auftreten.

Das Binpacking-Problem ist zwar  $\mathcal{NP}$ -vollständig, da aber sowohl die Anzahl der Bins  $m$  als auch die Anzahl der Items bzw. Jobgruppen  $\tilde{n}$  meist relativ klein sind (meist deutlich kleiner als die Anzahl Jobs  $n$ ), lässt sich das Problem, die Jobgruppen den Bins zuzuordnen und ggf. geeignete Jobgruppen zu finden, die aufgeteilt werden müssen,

---

<sup>1</sup>Streng genommen handelt es sich hierbei nicht mehr um eine Binpacking-Instanz.

trotzdem in hinnehmbarer Zeit mit folgendem MIP lösen:

$$\max \quad 0 \quad (3.1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{m'} x_{gj} = 1 \quad g = 1, \dots, \tilde{n} \quad (3.2)$$

$$\sum_{g=1}^{\tilde{n}} n_g x_{gj} = B_j \quad j = 1, \dots, m' \quad (3.3)$$

$$x_{gj} \in \{0, 1\} \quad g = 1, \dots, \tilde{n}, j = 1, \dots, m' \quad (3.4)$$

Für die Binärvariablen  $x_{gj}$  gilt:  $x_{gj} = 1$  genau dann, wenn Jobgruppe  $g$  in Bin  $j$  ist. Die erste Nebenbedingung fordert, dass jede Jobgruppe in genau einem Bin ist und die Zweite Nebenbedingung verlangt, dass jeder Bin exakt gefüllt ist. Dabei sind  $B_j$  die Größen der Bins, die zusammen mit der Anzahl der Bins  $m'$  mit jedem Aufruf einer Zahlenpartition von  $m$  entsprechen. In Abbildung ?? sind die Laufzeiten dieses MIPs aufgetragen. Dabei wurde das MIP in ZIMPL formuliert und mit CPLEX gelöst. Die Partitionen von  $m$  wurden der Reihenfolge nach (vgl. Abbildung ??) mit kleiner werdendem  $m'$  durchlaufen, bis eine zulässige Aufteilung gefunden wurde.

### 3.1.2 Zulässigkeit der Zuweisung

In Unterabschnitt 3.1.1 wurde erläutert, wie Jobs bzw. Jobgruppen so angeordnet werden können, dass möglichst selten eine Ressource gewechselt werden muss, was Rüstkosten verursacht. Es wurde allerdings davon ausgegangen, dass immer genug Ressourcen vorhanden sind, d.h. es wurde nur optimiert, ohne zu beachten, ob diese Zuweisung von Ressourcen überhaupt zulässig ist. Die drei Fälle, wie die Ressourcen verteilt sein können (disjunkt, hierarchisch, beliebig) sollen hier deshalb diskutiert werden.

#### Zulässigkeit bei disjunkten Ressourcenmengen

O.B.d.A. kann davon ausgegangen werden, dass es für jede Jobgruppe mindestens eine zulässige Ressource gibt. Andernfalls könnten diese Jobs niemals produziert werden. Außerdem kann mit dem oben beschriebenen Verfahren eine Jobgruppe  $g$  nur dann mehr als einmal geteilt werden, wenn  $n_g > \frac{n}{m}$  ist. Bei einer  $k$ -fachen Teilung von  $g$  gilt für die resultierenden Teilgruppen  $n_{g_1}, n_{g_k} \leq \frac{n}{m}$  und  $n_{g_i} = \frac{n}{m}$  für  $i = 2, \dots, k$ . Allen Teilgruppen mit  $g_i = \frac{n}{m}$  kann eine Ressource fest zugeteilt werden, da sich Jobs dieser Teilgruppen durchgehend auf einer Station befinden. Sie können daher als eigenständige Jobgruppen mit genau einer zulässigen Ressource aufgefasst werden. Für  $g_1$  und  $g_k$  stehen dann entsprechend weniger Ressourcen zur Verfügung. Daher kann o.B.d.A. davon ausgegangen werden, dass jede Jobgruppe höchstens einmal aufgeteilt werden kann. Eine

Jobgruppe, die nicht geteilt wird, benötigt nur eine Ressource. Es muss also nur der Fall betrachtet werden, dass es für eine Jobgruppe  $g$ , die geteilt wird, nur eine Ressource gibt. Denn dann dürfen sich zu keinem Zeitpunkt Jobs aus den beiden Teilgruppen  $g_1$  und  $g_2$  gleichzeitig in der Anlage befinden.

Falls  $n_g \leq \frac{n}{m}$  ist, ist es immer möglich, die beiden Teilgruppen, die aus  $g$  hervorgehen, so in den Bins anzuordnen, dass niemals zwei Jobs aus  $g$  zur gleichen Zeit in der Anlage sind, indem beispielsweise  $g_1$  an den Anfang ihres Bins gelegt wird und  $g_2$  ans Ende von ihrem Bin (vgl. Abbildung ??). Diese Bedingung, dass  $g_1$  und  $g_2$  sich nicht überlappen dürfen, muss allerdings in den nachfolgenden Verfahren, die  $C_{\max}$  minimieren (s. Abschnitt 3.2), beachtet werden. Falls mehrere Jobgruppen mit  $n_g \leq \frac{n}{m}$  geteilt werden (es können höchstens  $m$  sein), können in jedem Bin höchstens zwei resultierende Teilgruppen vorkommen, so dass es immer möglich ist, eine von beiden an den Anfang und die andere an das Ende des Bins zu legen (vgl. Abbildung ??).

Falls eine Jobgruppe  $g$  mit  $n_g > \frac{n}{m}$  geteilt wird, gibt es keine Möglichkeit,  $g$  so aufzuteilen, dass sich in jedem Zyklus höchstens ein Job aus  $g$  in der Anlage befindet, da nur  $\frac{n}{m}$  Zyklen gemacht werden. Da  $g$  zu groß ist für einen Bin, muss  $g$  aber zwangsweise geteilt werden, so dass bei nur einer geeigneten Ressource definitiv keine zulässige Lösung existiert (dieser Umstand kann bereits im Voraus geprüft werden, so dass dieser Fall hier o.B.d.A. nicht auftritt). Von dieser Regel gibt es allerdings eine Ausnahme: Falls  $n_g = \frac{n}{m} + 1$  ist, kann  $g_1$  in ihrem Bin an vorderster Stelle eingeplant werden und  $g_2$  in ihrem Bin an hinterster Stelle. Wenn dann der Bin von  $g_1$  Station 1 und der von  $g_2$  Station  $m$  zugeordnet wird, ist trotzdem in jedem Zyklus nur ein Job aus  $g$  in der Anlage wie in Abbildung ?? dargestellt. Von dieser Ausnahme kann allerdings höchstens einmal Gebrauch gemacht werden.

Das Problem, dass eine Jobgruppe mit nur einer Ressource geteilt wird, kann vermieden werden, indem beim Binpacking, sobald die Notwendigkeit der Teilung einer Jobgruppe festgestellt wurde, nicht eine beliebige Jobgruppe für die Teilung ausgewählt wird, sondern eine, für die es mindestens zwei Ressourcen gibt. Wenn solch eine Jobgruppe nicht zur Auswahl steht, kann trotzdem eine mit  $n_g \leq \frac{n}{m}$  ausgewählt werden, was dann zusätzliche Bedingungen für die nachfolgenden Verfahren verursacht. Wenn auch solch eine Jobgruppe nicht existiert, muss eine neue Binpacking-Instanz mit der nächsten Zahlenpartition von  $m$  gelöst werden. Erst, wenn alle Partitionen getestet wurden, steht fest, dass keine zulässige Ressourcenzuteilung existiert.

## Zulässigkeit bei hierarchischen Ressourcenmengen

*Fällt weg, oder?*

## Zulässigkeit bei beliebigen Ressourcenmengen

*Fällt weg, oder?*

## 3.2 Anordnung der Jobgruppen

In diesem Abschnitt werden Verfahren zur Anordnung der Jobgruppen in den Bins einerseits und zum Anordnen der Bins untereinander andererseits vorgestellt. Aus den vorangegangenen Verfahren (vgl. Abschnitt 3.1) ist bekannt, zu welchen Bins die Jobgruppen gehören. Geteilte Jobgruppen werden hier als eigenständige Gruppen betrachtet. Auch eventuelle zusätzliche Restriktionen, dass die Teile einer geteilten Jobgruppe sich nicht überschneiden dürfen, sind bekannt. Ziel ist es,  $C_{\max}$  zu minimieren, ohne die Jobgruppen zu teilen und somit die bereits minimierten Rüstkosten zu verändern.

### 3.2.1 MIP mit fixierten Bins

Hier wird zunächst ein MIP vorgestellt, dass lediglich die Jobgruppen in den Bins anordnet. Die Bins sind dabei bereits fest den Stationen zugeordnet (der erste Bin zur ersten Station usw.). Dieses MIP ist allerdings nur anwendbar bei zwei dominierenden Maschinen, die nicht notwendiger Weise benachbart sein müssen. Ein MIP, das auch die Bins untereinander anordnet, d.h. den Stationen zuordnet, wird in Unterabschnitt 3.2.2 vorgestellt.

Mit  $\tilde{N} = \{1, \dots, \tilde{n}\}$  wird die Menge der Jobgruppen bezeichnet.  $B = \{1, \dots, m\}$  ist die Menge der Bins und für  $b \in B$  ist  $\tilde{N}_b \subset \tilde{N}$  die Teilmenge der Jobgruppen, die in Bin  $b$  liegen. Für  $i \in \tilde{N}$  gibt  $b_i \in B$  den Bin an, in dem sich  $i$  befindet.  $\tilde{N}_b^* \subset \tilde{N}$  bezeichnet die Menge der Jobgruppen im „Nachbarbin“ von  $b$ . Der Nachbarbin von  $b$  ist derjenige, dessen Jobs auf der ersten dominierenden Maschine sind, während die Jobs von  $b$  gerade auf der zweiten dominierenden Maschine sind. Wenn die beiden dominierenden Maschinen beispielsweise einen Abstand von 2 haben, dann ist der Nachbarbin eines Bins auch um zwei Bins weiter rechts (modulo  $m$ ).  $p_{1i}$  und  $p_{2i}$  sind die Prozesszeiten auf den beiden dominierenden Maschinen. Der Parameter  $\sigma_{ij}$  hat für je zwei Jobgruppen  $i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^*$  den Wert 1, wenn  $b_j < b_i$ , und 0 sonst.  $\sigma_{ij}$  gibt also an, ob bei der Berechnung der Überlappung der Jobgruppen  $i$  und  $j$  eine Verschiebung um 1 stattfinden

muss (vgl. Abbildung ??).

$$\min \sum_{b \in B} \sum_{\substack{i \in \tilde{N}_b \\ j \in \tilde{N}_b^*}} \max\{p_{2i}, p_{1j}\} o_{ij} \quad (3.5)$$

$$\text{s.t. } x_{ij} + x_{ji} = 1 \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i} \quad (3.6)$$

$$x_{ij} + x_{jk} \leq x_{ik} + 1 \quad i \in \tilde{N}, j, k \in \tilde{N}_{b_i} \quad (3.7)$$

$$s_i = \sum_{\substack{j \in \tilde{N}_{b_i} \\ i \neq j}} n_j x_{ji} \quad i \in \tilde{N} \quad (3.8)$$

$$M y_{ij} \geq s_j - s_i + \sigma_{ij} + \epsilon \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.9)$$

$$M(1 - y_{ij}) \geq s_i - s_j - \sigma_{ij} \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.10)$$

$$M z_{ij} \geq s_i + n_i - s_j - n_j - \sigma_{ij} + \epsilon \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.11)$$

$$M(1 - z_{ij}) \geq s_j + n_j - s_i - n_i + \sigma_{ij} \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.12)$$

$$o_{ij} \geq s_i + n_i - s_j - \sigma_{ij} - M(1 - y_{ij} + z_{ij}) \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.13)$$

$$o_{ij} \geq s_j + n_j - s_i + \sigma_{ij} - M(1 - y_{ji} + z_{ji}) \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.14)$$

$$o_{ij} \geq n_j - M(2 - y_{ij} - z_{ij}) \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.15)$$

$$o_{ij} \geq n_i - M(2 - y_{ji} - z_{ji}) \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.16)$$

$$o_{ij} \geq 0 \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.17)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i} \quad (3.18)$$

$$y_{ij}, z_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i}^* \quad (3.19)$$

Für je zwei Jobgruppen  $i, j \in N_b$ , die im selben Bin  $b$  liegen, gibt es zwei Binärvariablen  $x_{ij}, x_{ji}$ . Es ist  $x_{ij} = 1$  genau dann, wenn Jobgruppe  $i$  vor  $j$  auf dem Bin liegt. Dabei muss  $i$  nicht notwendiger Weise direkt vor  $j$  liegen, sondern an beliebiger Position davor. Mit (3.6) wird erreicht, dass immer entweder  $i$  vor  $j$  liegt oder umgekehrt. (3.7) stellt die Transitivität dieser Beziehung her. Auf Grundlage der  $x_{ij}$  und der Größen der Jobgruppen  $g_i$  kann in (3.8) der Startzeitpunkt jeder Jobgruppe berechnet werden. Die Variablen  $s_i$  dienen dabei nur der Übersicht und können in den übrigen Constraints durch die Summe aus (3.8) ersetzt werden.

Über (3.9) und (3.10) wird den Indikatorvariablen  $y_{ij}$  für zwei Jobgruppen  $i, j$  aus benachbarten Bins folgende Bedeutung gegeben:  $y_{ij} = 1$  genau dann, wenn  $s_j \geq s_i$ , d.h. wenn der Startzeitpunkt von  $i$  nicht vor dem von  $j$  liegt. Analog wird mit (3.11) und (3.12)  $z_{ij} = 1$  gesetzt genau dann, wenn  $s_i + n_i \geq s_j + n_j$ , der Endzeitpunkt von  $i$  also nicht vor dem von  $j$  liegt.

Mit den Variablen  $o_{ij}$  wird die Überlappung von zwei Jobgruppen in benachbarten Bins berechnet. Je nachdem, welche der  $y_{ij}$  und  $z_{ij}$  auf 1 bzw. 0 gesetzt sind, wird der Wert von  $o_{ij}$  durch eine der Nebenbedingungen (3.13) bis (3.17) festgelegt. Die Zielfunk-

tion (3.5) multipliziert die Überlappung mit der jeweiligen Prozesszeit und minimiert die Summe darüber.

### **3.2.2 MIP mit freien Bins**

Das folgende MIP erweitert das MIP aus Unterabschnitt 3.2.1 um die Fähigkeit, die Bins untereinander zu Vertauschen, was dem Zuweisen der Bins an die Stationen entspricht. Für die Berechnung der Überschneidungen zwischen den Jobgruppen sind daher weitere Variablen notwendig, die als Indikator dafür dienen, Bins der Jobgruppen auf

benachbarten Stationen liegen.

$$\min \sum_{\substack{i,j \in \tilde{N} \\ b_i \neq b_j}} \max\{p_{2i}, p_{1j}\} o_{ij} \quad (3.20)$$

$$\text{s.t. } x_{ij} + x_{ji} = 1 \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i} \quad (3.21)$$

$$x_{ij} + x_{jk} \leq x_{ik} + 1 \quad i \in \tilde{N}, j, k \in \tilde{N}_{b_i} \quad (3.22)$$

$$s_i = \sum_{\substack{j \in \tilde{N}_{b_i} \\ i \neq j}} g_j x_{ji} \quad i \in \tilde{N} \quad (3.23)$$

$$\sum_{b \in B} \beta_{bd} = 1 \quad d \in B \quad (3.24)$$

$$\sum_{d \in B} \beta_{bd} = 1 \quad b \in B \quad (3.25)$$

$$\beta_{bd} + \beta_{cd} \leq \nu_{bcd} \quad b, c, d \in B \quad (3.26)$$

$$\nu_{bcd} \leq \beta_{bd} \quad b, c, d \in B \quad (3.27)$$

$$\nu_{bcd} \leq \beta_{bd} \quad b, c, d \in B \quad (3.28)$$

$$My_{ij} \geq s_j - s_i - \nu_{b_i b_j m} + \epsilon \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.29)$$

$$M(1 - y_{ij}) \geq s_i + \nu_{b_i b_j m} - s_j \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.30)$$

$$Mz_{ij} \geq s_i + n_i + \nu_{b_i b_j m} - s_j - n_j + \epsilon \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.31)$$

$$M(1 - z_{ij}) \geq s_j + n_j - s_i - n_i - \nu_{b_i b_j m} \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.32)$$

$$w_{ij} = \sum_{d \in B} \nu_{b_i b_j d} \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.33)$$

$$o_{ij} \geq s_i + n_i + \nu_{b_i b_j m} - s_j - M(2 - y_{ij} + z_{ij} - w_{ij}) \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.34)$$

$$o_{ij} \geq s_j + n_j - s_i - \nu_{b_i b_j m} - M(2 + y_{ij} - z_{ij} - w_{ij}) \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.35)$$

$$o_{ij} \geq n_j - M(3 - y_{ij} - z_{ij} - w_{ij}) \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.36)$$

$$o_{ij} \geq n_i - M(1 + y_{ij} + z_{ij} - w_{ij}) \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.37)$$

$$o_{ij} \geq 0 \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.38)$$

$$\beta_{bd} \in \{0, 1\} \quad b, d \in B \quad (3.39)$$

$$\nu_{bcd} \in \{0, 1\} \quad b, c, d \in B, b \neq c \quad (3.40)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in \tilde{N}, j \in \tilde{N}_{b_i} \quad (3.41)$$

$$y_{ij}, z_{ij}, w_{ij} \in \{0, 1\} \quad i, j \in \tilde{N} \quad (3.42)$$

Die Positionen der Bins werden durch die Variablen  $\beta_{bd}$  beschrieben. Es ist  $\beta_{bd} = 1$  genau dann, wenn Bin  $b$  der Station  $d$  zugewiesen wird. Die Nebenbedingungen (3.24) und (3.25) gewährleisten, dass jeder der  $m$  Bins genau einer der  $m$  Stationen zugewiesen

wird. Über die Nebenbedingungen (3.26), (3.27) und (3.28) wird erzwungen, dass die Binärvariablen  $\nu_{bcd}$  genau dann auf 1 gesetzt werden, wenn Bin  $b$  Station  $d$  zugewiesen ist und zugleich Bin  $c$  der Nachbarstation  $d^*$ . Die  $\nu_{bcd}$  ersetzen in den weiteren Nebenbedingungen die  $\sigma_{ij}$  aus dem MIP in Abschnitt 3.2.1. Wenn  $\nu_{b_i b_j m} = 1$  ist, dann ist der Bin von Jobgruppe  $i$  der letzten Station  $m$  zugewiesen und der Bin von Jobgruppe  $j$  ist auf der Nachbarstation von  $m$ , so dass die Überschneidung von  $i$  und  $j$  um 1 versetzt berechnet werden muss. Dies funktioniert allerdings nur, wenn die beiden dominierenden Maschinen direkt benachbart sind. Denn dann muss die Versetzung um 1 nur zwischen den Stationen  $m$  und 1 stattfinden, was anhand der  $\nu_{b_i b_j m}$  identifiziert werden kann. Wenn noch eine Maschine zwischen den dominierenden Maschinen liegt, dann muss die Versetzung um 1 sowohl zwischen den Stationen  $m$  und 2 als auch zwischen  $m - 1$  und 1 stattfinden. Mit den  $\nu_{bcd}$  können zwar beide dieser Situationen erkannt werden, aber es bräuchte weitere Binärvariablen, die eine Oder-Verknüpfung zwischen  $\nu_{b_i b_j (m-1)}$  und  $\nu_{b_i b_j m}$  darstellen, damit diese in den Berechnungen der Überlappungen eingesetzt werden können. Außerdem spielen bei der Berechnung der Überschneidungen  $o_{ij}$  jetzt auch die Variablen  $w_{ij}$  eine Rolle. Nur, wenn  $w_{ij} = 1$  ist, wird die Überschneidung von  $i$  und  $j$  in den Nebenbedingungen (3.34) bis (3.37) berechnet. In Nebenbedingung (3.33) wird  $w_{ij} = 1$  gesetzt, wenn  $i$  und  $j$  in benachbarten Bins sind. Genau wie  $s_{ij}$  dienen auch die  $w_{ij}$  nur der Übersicht und können überall durch die Summe in (3.33) ersetzt werden.

Das Lösen dieses MIPs mit CPLEX dauert sehr viel länger als beim MIP mit fixierten Bins. Allerdings ist die obere Schranke, also die aktuell beste gefundene Lösung, meist schon nach wenigen Minuten besser als die beste Lösung mit fixierten Bins (abhängig davon, ob die initiale Binreihenfolge zufällig „gut“ ist).

### 3.2.3 Mehrere fixierte Reihenfolgen

Das MIP in Unterabschnitt 3.2.2 liefert zwar theoretisch optimale Lösungen, diese zu berechnen benötigt aber zu viel Zeit. Schon bei kleinen Instanzen mit  $\tilde{n} = 10$  Jobgruppen und  $m = 8$  beträgt der LP-Gap nach einer Stunde Berechnung noch 20%. Man beachte, dass es bei 10 Jobgruppen und 8 Bins mindestens 6 Bins gibt mit genau einer Jobgruppe. Es müssen also im Wesentlichen nur noch die Bins den Stationen zugeordnet werden.

Das MIP mit fixierten Bins hingegen findet erst ab Instanzen mit ca.  $\tilde{n} = 25$  nicht mehr die optimale Lösung innerhalb von einer Stunde. Je nach Größe der Jobgruppen kann dies ein beträchtlicher Unterschied zu  $\tilde{n} = 10$  sein. Allerdings ist die Güte der Lösungen des MIPs mit fixierten Bins von der initialen Binreihenfolge abhängig. Dazu wird in diesem Unterabschnitt versucht, solch eine initiale Binreihenfolge zu erzeugen, mit der das MIP dann arbeiten kann.

*kommt noch...*



### 3.2.4 Nachbarschaftssuche

Als Alternative zu den MIPs mit freien oder fixierten Bins lassen sich Nachbarschaftsoperatoren beschreiben, die für diverse Nachbarschaftssuchverfahren benutzt werden können. Naheliegende Operatoren sind:

- $bch_{bc}$ : vertauscht die Bins an den Stationen  $b$  und  $c$  miteinander,
- $jch_{bjk}$ : vertauscht im Bin an Station  $b$  die Jobgruppen  $j$  und  $k$  miteinander.

Es wurde ein Simulated Annealing Algorithmus implementiert, der diese beiden Nachbarschaften benutzt. Dieser ähnelt dem Simulated Annealing aus Abschnitt 2.1.3 und unterscheidet sich bloß in einem Punkt von diesem: In jeder Iteration wird mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{m}{\tilde{n}+m}$  eine neue Lösung aus der  $bch_{bc}$ -Nachbarschaft erzeugt (mit zufällig gewählten  $b$  und  $c$ ) und mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{\tilde{n}}{\tilde{n}+m}$  eine Lösung aus der  $jch_{bjk}$ -Nachbarschaft (mit ebenfalls zufälligen  $b, j, k$ ). Auf diese Weise wird je nach Verhältnis zwischen der Anzahl der Jobgruppen ( $\tilde{n}$ ) und der Bins ( $m$ ) der entsprechende Operator häufiger benutzt.

## 4 Rechenergebnisse und Vergleiche

*Anfang September anfangen, soweit Messergebnisse vorliegen.*

Obwohl in den vorherigen Kapiteln schon einige Laufzeiten vorgestellt werden, hier nochmal eine Zusammenfassung und insbesondere ein Vergleich zwischen den beiden Dekompositionsansätzen. Sowohl echte Instanzen als auch generierte. Dabei ggf. auf Methoden zur Instanzengenerierung eingehen und diese bewerten?

# Literaturverzeichnis

- [Koc04] KOCH, Thorsten: *Rapid Mathematical Programming*, Technische Universität Berlin, Diss., 2004.  
<http://opus4.kobv.de/opus4-zib/frontdoor/index/index/docId/834>.  
– ZIB-Report 04-58