MIP zum Anordnen der Jobgruppen in den Bins

Mengen

$N = \{1, \ldots, n\}$		Jobgruppen
$M = \{1, \ldots, m\}$		Bins
$N_b \subseteq N$	$\forall b \in M$	Jobgruppen in Bin b
$N_b^* \subseteq N$	$\forall b \in M$	Jobgruppen im Nachbarbin $b \bmod m + 1$

Parameter

B		Größe der Bins
g_i	$i \in N$	Größe von Jobgruppe i
p_{1i}, p_{2i}	$i \in N$	Prozesszeiten der Jobs in Gruppe i
b_i	$i \in N$	Bin von Jobgruppe i

Variablen

$x_{ij} \in \{0, 1\}$	$i \in N, j \in N_{b_i}, i \neq j$	Jobgruppe i liegt vor j
$s_i \in \mathbb{R}$	$i \in N$	Startzeitpunkt der Jobgruppe i
$o_{ij} \in \mathbb{R}$	$i \in N, j \in N_{b_i}^*$	Überschneidung von Jobgruppe i und j
$\tilde{o}_{ij} \in \mathbb{R}$	$i \in N, j \in N_{b_i}^*$	Hilfsvariable für Überschneidung
$y_{ij}, z_{ij} \in \{0, 1\}$	$i \in N, j \in N_{b_i}^*$	Indikatorvariablen

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{b\in M} \sum_{\substack{i\in N_b\\ j\in N_b^*}} \max\{p_{2i}, p_{1j}\} o_{ij} && && (1)\\
\text{s.t.} \quad & x_{ij} + x_{ji} = 1 && i \in N, j \in N_{b_i}, i < j && (2)\\
& x_{ij} + x_{jk} \le x_{ik} + 1 && i \in N, j,k \in N_{b_i}, i \neq j,k, j \neq k && (3)\\
& s_i = \sum_{\substack{j\in N_{b_i}\\ i\neq j}} g_j x_{ji} && i \in N && (4)\\
& M y_{ij} \ge (s_j + g_j - s_i) && && \\
& \qquad - (s_i + g_i - s_j) && i \in N, b_i < m, j \in N_{b_i}^* && (5)\\
& M y_{ij} \ge (s_j - 1 + g_j - s_i) && && \\
& \qquad - (s_i + g_i - s_j + 1) && i \in N_m, j \in N_m^* && (6)\\
& \tilde{o}_{ij} \ge s_i + g_i - s_j && && \\
& \qquad - M(1 - y_{ij}) && i \in N, b_i < m, j \in N_{b_i}^* && (7)\\
& \tilde{o}_{ij} \ge s_i + g_i - s_j + 1 && && \\
& \qquad - M(1 - y_{ij}) && i \in N_m, j \in N_m^* && (8)\\
& \tilde{o}_{ij} \ge s_j + g_j - s_i - M y_{ij} && i \in N, b_i < m, j \in N_{b_i}^* && (9)\\
& \tilde{o}_{ij} \ge s_j - 1 + g_j && && \\
& \qquad - s_i - M y_{ij} && i \in N_m, j \in N_m^* && (10)\\
& M z_{ij} \ge \tilde{o}_{ij} - \min\{g_i, g_j\} && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (11)\\
& o_{ij} \ge \min\{g_i, g_j\} && && \\
& \qquad - M(1 - z_{ij}) && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (12)\\
& o_{ij} \ge \tilde{o}_{ij} - M z_{ij} && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (13)\\
& 0 \le o_{ij} \le B && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (14)\\
& 0 \le \tilde{o}_{ij} && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (15)
\end{aligned}
$$

Für je zwei Jobgruppen $i, j \in N_b$, die im selben Bin b liegen, gibt es zwei Variablen x_{ij}, x_{ji}. Es ist $x_{ij} = 1$ genau dann, wenn Jobgruppe i vor j auf dem Bin liegt. Dabei muss i nicht notwendiger Weise direkt vor j liegen, sondern an beliebiger Position davor. Mit (2) wird erreicht, dass immer entweder i vor j liegt oder umgekehrt. (3) stellt die Transitivität dieser Beziehung her. Auf Grundlage der x_{ij} und der Größen der Jobgruppen g_i kann in (4) der Startzeitpunkt jeder Jobgruppe berechnet werden. Die Variablen s_i dienen dabei nur der Übersicht und können in den übrigen Constraints durch die Summe aus (4) ersetzt werden.

Über (5) und (6) wird den Indikatorvariablen y_{ij} für zwei Jobgruppen i, j aus benachbarten Bins folgende Bedeutung gegeben: $y_{ij} = 1$ genau dann, wenn die Differenz $s_j + g_j - s_i$ zwischen dem Endzeitpunkt von j und dem Startzeitpunkt von i größer ist als die Differenz $s_i + g_i - s_j$ zwischen dem Endzeitpunkt von i und dem Startzeitpunkt von j. Dabei behandelt (6) den Spezialfall, dass i in Bin m liegt und j in Bin 1, sodass jeweils eine Verschiebung der Start- und

Endzeitpunkte von j um 1 erforderlich ist.

Mit Hilfe der y_{ij} bewirken die Constraints (7) bis (10), dass die Variablen $\tilde{o}_{ij}$ jeweils das Minimum der Differenzen aus Start- und Endzeitpunkten annehmen, also $\tilde{o}_{ij} = \min\{s_j + g_j - s_i, s_i + g_i - s_j\}$.

Den Indikatorvariablen z_{ij} wird für zwei Jobgruppen in benachbarten Bins in (11) folgende Bedeutung gegeben: $z_{ij} = 1 \iff \tilde{o}_{ij} > min\{g_i, g_j\}$. Die z_{ij} geben also an, ob die durch $\tilde{o}_{ij}$ gegebenen Überschneidungen größer sind als die Längen der Jobgruppen. Mit (12) und (13) wird den Variablen o_{ij} dann die endgültige Länge der Überschneidung der Jobgruppen i und j zugewiesen, nämlich $o_{ij} = \min\{\tilde{o}_{ij}, g_i, g_j\} = \min\{s_j + g_j - s_i, s_i + g_i - s_j, g_i, g_j\}$. Damit kann dann die Zielfunktion (1) formuliert werden als Summe der Länge der Überschneidungen multipliziert mit den jeweiligen Prozesszeiten der Jobs.