MIP zum Anordnen der Jobgruppen in den Bins

Mengen

$N = \{1, \ldots, n\}$		Jobgruppen
$M = \{1, \ldots, m\}$		Bins
$N_b \subseteq N$	$\forall b \in M$	Jobgruppen in Bin b
$N_b^* \subseteq N$	$\forall b \in M$	Jobgruppen im Nachbarbin $b \bmod m + 1$

Parameter

B		Größe der Bins
g_i	$i \in N$	Größe von Jobgruppe i
p_{1i}, p_{2i}	$i \in N$	Prozesszeiten der Jobs in Gruppe i
b_i	$i \in N$	Bin von Jobgruppe i

Variablen

$x_{ij} \in \{0,1\}$	$i \in N, j \in N_{b_i}, i \neq j$	Jobgruppe i liegt vor j
$s_i \in \mathbb{R}$	$i \in N$	Startzeitpunkt der Jobgruppe i
$o_{ij} \in \mathbb{R}$	$i \in N, j \in N_{b_i}^*$	Überschneidung von Jobgruppe i und j
$\tilde{o}_{ij} \in \mathbb{R}$	$i \in N, j \in N_{b_i}^*$	Hilfsvariable für Überschneidung
$y_{ij}, z_{ij} \in \{0,1\}$	$i \in N, j \in N_{b_i}^*$	Indikatorvariablen

$$\min \quad \sum_{b \in M} \sum_{\substack{i \in N_b \\ j \in N_b^*}} \max\{p_{2i}, p_{1j}\} o_{ij} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad x_{ij} + x_{ji} &= 1 && i \in N, j \in N_{b_i} && (2)\\
x_{ij} + x_{jk} &\leq x_{ik} + 1 && i \in N,\ j,k \in N_{b_i} && (3)\\
s_i &= \sum_{\substack{j \in N_{b_i} \\ i \neq j}} g_j x_{ji} && i \in N && (4)\\
M y_{ij} &\geq s_j - s_i + \sigma_{ij} + \epsilon && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (5)\\
M(1 - y_{ij}) &\geq s_i - s_j - \sigma_{ij} && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (6)\\
M z_{ij} &\geq s_i + g_i - s_j - g_j - \sigma_{ij} + \epsilon && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (7)\\
M(1 - z_{ij}) &\geq s_j + g_j - s_i - g_i + \sigma_{ij} + \epsilon && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (8)\\
o_{ij} &\geq s_i + g_i - s_j - \sigma_{ij} - M(1 - y_{ij} + z_{ij}) && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (9)\\
o_{ij} &\geq s_j + g_j - s_i + \sigma_{ij} - M(1 - y_{ji} + z_{ji}) && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (10)\\
o_{ij} &\geq g_j - M(2 - y_{ij} - z_{ij}) && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (11)\\
o_{ij} &\geq g_i - M(2 - y_{ji} - z_{ji}) && i \in N, j \in N_{b_i}^* && (12)
\end{aligned}$$

Für je zwei Jobgruppen $i, j \in N_b$, die im selben Bin b liegen, gibt es zwei Variablen x_{ij}, x_{ji}. Es ist $x_{ij} = 1$ genau dann, wenn Jobgruppe i vor j auf dem Bin liegt. Dabei muss i nicht notwendiger Weise direkt vor j liegen, sondern an beliebiger Position davor. Mit (2) wird erreicht, dass immer entweder i vor j liegt oder umgekehrt. (3) stellt die Transitivität dieser Beziehung her. Auf Grundlage der x_{ij} und der Größen der Jobgruppen g_i kann in (4) der Startzeitpunkt jeder Jobgruppe berechnet werden. Die Variablen s_i dienen dabei nur der Übersicht und können in den übrigen Constraints durch die Summe aus (4) ersetzt werden.

Über (**??**) und (**??**) wird den Indikatorvariablen y_{ij} für zwei Jobgruppen i, j aus benachbarten Bins folgende Bedeutung gegeben: $y_{ij} = 1$ genau dann, wenn die Differenz $s_j + g_j - s_i$ zwischen dem Endzeitpunkt von j und dem Startzeitpunkt von i größer ist als die Differenz $s_i + g_i - s_j$ zwischen dem Endzeitpunkt von i und dem Startzeitpunkt von j. Dabei behandelt (**??**) den Spezialfall, dass i in Bin m liegt und j in Bin 1, sodass jeweils eine Verschiebung der Start- und Endzeitpunkte von j um 1 erforderlich ist.

Mit Hilfe der y_{ij} bewirken die Constraints (**??**) bis (**??**), dass die Variablen $\tilde{o}_{ij}$ jeweils das Minimum der Differenzen aus Start- und Endzeitpunkten annehmen, also $\tilde{o}_{ij} = \min\{s_j + g_j - s_i, s_i + g_i - s_j\}$.

Den Indikatorvariablen z_{ij} wird für zwei Jobgruppen in benachbarten Bins in (**??**) folgende Bedeutung gegeben: $z_{ij} = 1 \iff \tilde{o}_{ij} > min\{g_i, g_j\}$. Die z_{ij} geben also an, ob die durch $\tilde{o}_{ij}$ gegebenen Überschneidungen größer sind als die Längen der Jobgruppen. Mit (**??**) und (**??**) wird den Variablen o_{ij} dann die endgültige Länge der Überschneidung der Jobgruppen i und j zugewiesen, nämlich $o_{ij} = \min\{\tilde{o}_{ij}, g_i, g_j\} = \min\{s_j + g_j - s_i, s_i + g_i - s_j, g_i, g_j\}$. Damit kann dann die Zielfunktion (1) formuliert werden als Summe der Länge der Überschneidungen multipliziert mit den jeweiligen Prozesszeiten der Jobs.