Orale di analisi

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\sqrt{x}$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|x| + c$

$\int \frac{1}{x+1}\,dx$

Resto zero

Un **PUNTO DI ACCUMULAZIONE** è un punto x_0 per il quale, comunque si sceglie un intorno completo del punto stesso, esiste almeno un punto y dell'insieme E diverso da x_0 e tale da appartenere all'intorno considerato

DEFINIZIONE DI FUNZIONI LIMITATE

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. DICIAMO CHE

- f è LIMITATA SUPERIORMENTE SE

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) \leq M \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- f È LIMITATA INFERIORMENTE SE

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tale che } K \leq f(x) \leq K \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

- f È LIMITATA SE È SIA LIMITATA SUPERIORMENTE CHE LIMITATA INFERIORMENTE, CIOÈ SE

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ e } \exists M \in \mathbb{R} \text{ tali che } K \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

CHE PUÒ ESSERE SCRITTA ANCHE COME

$$\exists B \in \mathbb{R} \text{ tale che } |f(x)| \leq B \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Consideriamo una funzione $f(x)$ con dominio $dom(f)$ e un punto di accumulazione x_0 del dominio. Se il limite per $x \to x_0$ della funzione $f(x)$ esiste finito o infinito, allora il valore di tale limite è unico

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow l \text{ è UNICO}$$

dove $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE IL LIMITE NON SIA UNICO E CHE QUINDI

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \text{con } l \neq m \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = m$$

E DIMOSTREREMO CHE $l = m$

PREMESSA: DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad |a+b| \leq |a| + |b| \qquad |-x| = |x|$

AVREMO

$$|l-m| = |\underbrace{(l - f(x))}_{a} + \underbrace{(f(x) - m)}_{b}| \leq |f(x) - l| + |f(x) - m| \qquad \text{(A)}$$

UTILIZZANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE, IN CORRISPONDENZA AD $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ SI HA:

(1) $\exists I_1(x_0) : \forall x \in I_1(x_0^*) \cap X \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ (B)

FATTA ECCEZIONE PER IL PUNTO x_0

(2) $\exists I_2(x_0) : \forall x \in I_2(x_0^*) \cap X \Rightarrow |f(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$ (C)

I = INTORNO DI x_0

QUINDI SE INTERSECHIAMO I DUE INTORNI DI x_0 OTTENIAMO ANCORA UN INTORNO DI x_0

$$I_3(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$$

PER $I_3(x_0) : \forall x \in I_3(x_0^*) \cap X$ VALGONO ENTRAMBE LE RELAZIONI (B) E (C)

PARTENDO DALLA RELAZIONE (A) AVREMO

$$|l-m| \leq |f(x) - l| + |f(x) - m| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}_{\text{LA CUI SOMMA FA } \varepsilon} \overset{\text{TESI}}{\Longrightarrow} |l-m| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow l = m \quad \text{(TESI)}$$

INFATTI AFFINCHÉ UN NUMERO NON NEGATIVO ($|l-m|$) SIA < di $\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$ (ε È UNA QUANTITÀ MOLTO PICCOLA A PIACERE >0), DEVE ESSERE PER FORZA ZERO

TEOREMA DEI CARABINIERI

IPOTESI

SIANO $h(x)$, $f(x)$, $g(x)$ 3 FUNZIONI DEFINITE IN UN INTORNO DI x_0:

$\exists\, I(x_0): \forall x \in I(x_0^*) \Rightarrow h(x) \le f(x) \le g(x)$

SE:

$\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \quad (*)$

$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \quad (**)$

ALLORA (TESI): $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

DIMOSTRAZIONE:

PER IPOTESI $\exists\, I(x_0): \forall x \in I(x_0^*) \cap X \Rightarrow h(x) \le f(x) \le g(x)$ (A)

UTILIZZANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE PER LE IPOTESI $(*)$ E $(**)$ SI AVRÀ:

$\exists\, I_1(x_0): \forall x \in I_1(x_0^*) \cap X \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$ (B)

$\exists\, I_2(x_0): \forall x \in I_2(x_0^*) \cap X \Rightarrow \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$ (C)

SIA $I_3(x_0) = I(x_0) \cap I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$

INTERSECANDO I, I_1, I_2 OTTENIAMO UN TERZO INTORNO DI x_0 IN CUI VALGONO TUTTE LE RELAZIONI PRECEDENTI (A)(B)(C)

EBBENE: $\forall x \in I_3(x_0^*) \cap X$

$$\left.\begin{array}{l} h(x) \le f(x) \le g(x) \\ \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \ell - \varepsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < \ell + \varepsilon$$

OVVERO CHE: $\forall x \in I_3(x_0^*) \cap X \quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$\Downarrow$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ TESI

UNA **FUNZIONE** SI DICE **CONTINUA** IN UN PUNTO QUANDO IN QUEL PUNTO COINCIDE CON IL SUO LIMITE

TEOREMA DI WEIERSTRASS

NO DIM

SE $f(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA NELL'INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a;b]$
ALLORA $f(x)$ È DOTATA DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI

OVVERO $\exists M \in \mathbb{R}: \quad \max f(x) = M$

CIOÈ: $M \geq f(x) \quad \forall x \in [a;b]$

ANALOGAMENTE $\exists m \in \mathbb{R}: \quad \min f(x) = m$

CIOÈ: $m \leq f(x) \quad \forall x \in [a;b]$

TEOREMA DI ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI

(O DI BOLZANO)

Ipotesi: Se $f(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA NELL'INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[a;b]$,
ALLORA ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI TRA IL MINIMO E IL MASSIMO ASSOLUTI

$\forall L \in [m, M] \quad \exists c \in [a;b]: \ f(c) = L$

DIMOSTRAZIONE

POICHÉ $f(c)$ ASSUME i valori m e M allora esistono c_1 e $c_2 \in [a;b]$ TALI CHE $f(c_1) = m$ e $f(c_2) = M$. SUPPONIAMO INOLTRE CHE $c_1 < c_2$

GRAZIE AI VALORI c_1, c_2, POSSIAMO COSTRUIRE UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO $[c_1, c_2]$ CONTENUTO NELL'INTERVALLO $[a;b]$. PER IPOTESI $f(c)$ È CONTINUA IN $[a;b]$ QUINDI SARÀ CONTINUA ANCHE IN $[c_1, c_2]$

SIA w UN VALORE COMPRESO TRA m E M:

$$m < w < M$$

SEGUE CHE:

$m < w \Rightarrow m - w < 0$

e $w < M \Rightarrow M - w > 0$

INOLTRE (CONSIDERIAMO LA FUNZIONE AUSILIARIA):

$g(c) = f(c) - w$ con $c \in [c_1, c_2]$ CHE È CONTINUA

, INOLTRE:

$g(c_1) = f(c_1) - w = m - w < 0$

$g(c_2) = f(c_2) - w = M - w > 0$

$g(c)$ DEVE DARE COME RISULTATO 0 SE $f(c) = w$

LA FUNZIONE AUSILIARIA $g(c)$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DEGLI ZERI, PERTANTO
ESISTE $c_0 \in (c_1, c_2)$ TALE CHE:

$$g(c_0) = 0 \quad \text{OSSIA} \quad f(c_0) - w = 0 \Rightarrow f(c_0) = w \quad \text{TESI}$$

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

SE $f(x)$ È CONTINUA IN $[a;b]$ SE

$f(a) \cdot f(b) < 0$ (OVVERO ASSUME AGLI ESTREMI DI a E b VALORI DI SEGNO OPPOSTO)

TESI: $\exists c \in \,]a;b[\, : \ f(c) = 0$

CONOSCENDO CIÒ CI ASSICURA CHE LA FUNZIONE INTERSECHI L'ASSE x

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

LA DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA $h(x)=g(f(x))$ È UGUALE ALLA DERIVATA DELLA FUNZIONE ESTERNA CON ARGOMENTO INVARIATO, MOLTIPLICATA PER LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INTERNA.

$$\frac{d}{dx}h(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: X \to \mathbb{R}$. LA FUNZIONE PRESENTA IN UN PUNTO DI ASCISSA $x=c$ UN ESTREMO RELATIVO (MASSIMO O MINIMO), ALLORA LA DERIVATA DI f IN c È UGUALE A 0:

SE $\exists f'(c)$ ALLORA

TESI: $f'(c)=0$

DIMOSTRAZIONE

SUPPONIAMO CHE c SIA UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO $\Rightarrow \exists I(c): f(c) \le f(x) \quad \forall x \in I(c)$

INTORNO

POSTO $x=c+h$ TALE CHE $c+h \in I(c)$

SI AVRÀ:

$$f(c) \le f(c+h) \Rightarrow f(c+h)-f(c) \ge 0$$

L'IDEA È QUELLA DI CREARE IL RAPPORTO INCREMENTALE, INFATTI:

SE $h<0$ SI AVRÀ: $\dfrac{\overset{+}{f(c+h)-f(c)}}{\underset{-}{h}} \le 0$

SE $h>0$ SI AVRÀ: $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0$

PER IL TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO, E UTILIZZANDO LE DEFINIZIONI DI DERIVATA DESTRA E SINISTRA SI AVRÀ:

$$\left.\begin{aligned} f'(c^-) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \le 0 \\ f'(c^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(c)=0$$

$\exists f'(c) = f'(c^-) = f'(c^+)$ SE NEL PUNTO c LA FUNZIONE È DERIVABILE, COINCIDE CON LA DERIVATA DESTRA E SINISTRA

SEGUE TEOREMA DI ROLLE

TEOREMA DI ROLLE

IPOTESI: Sia $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DEFINITA IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO DI ESTREMI a e b, E SIA CONTINUA IN $[a;b]$, INOLTRE SIA DERIVABILE IN $]a;b[$, E $f(a)=f(b)$

TESI: $\exists\, c \in\,]a;b[\, : f'(c)=0$

QUINDI TRA a e b, CI SARÀ PER FORZA UNA (O PIÙ D'UNA) TANGENTE ORIZZONTALE

DIMOSTRAZIONE:

ESSENDO $f(x)$ CONTINUA IN $[a;b]$ PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS POSSIAMO DIRE CHE LA FUNZIONE È DOTATA DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI, OVVERO:

$$\exists\, c \in [a,b] : f(c) = \min f(x) = m$$
$$\exists\, d \in [a;b] : f(d) = \max f(x) = M$$

PER DEFINIZIONE DI MASSIMO E MINIMO:

$$m = f(c) \leq f(d) = M$$

SI POSSONO DISTINGUERE 2 CASI:

I° CASO: $m = M$ ALLORA LA FUNZIONE È COSTANTE

MA SE È COSTANTE: $f(x) = K \quad \forall x \in [a;b]$

ALLORA: $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a;b]$

IN PARTICOLARE $\exists\, c \in\,]a;b[\, : f'(c) = 0$ TESI (I)

II° CASO: $m < M$ QUINDI

ALMENO UNO DEI 2 TRA MINIMO E MASSIMO È INTERNO ALL'INTERVALLO $[a;b]$ (VISTO CHE $f(a)=f(b)$)

SUPPONIAMO CHE SIA $c \in\,]a;b[$ CON $f(c) = \min f(x)$

POICHÉ LA FUNZIONE È DERIVABILE IN $]a;b[$:

$$\left.\begin{array}{l} \exists\, f'(c) \\ x = c \text{ ESTREMO RELATIVO} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{FERMAT}$$

$$f'(c) = 0 \qquad \text{TESI!}$$

SEGUE TEOREMA DI CAUCHY

TEOREMA DI CAUCHY

IPOTESI: SI CONSIDERANO 2 FUNZIONI

SIANO $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

1. f, g CONTINUE IN $[a;b]$
2. f, g DERIVABILI IN $]a;b[$
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a;b[$
4. $g(a) \neq g(b)$

$\Rightarrow$ TESI $\exists c \in]a;b[: \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

DIMOSTRAZIONE

SI CONSIDERA UNA FUNZIONE AUSILIARIA $\varphi(x) = f(x) - K g(x)$

phi

SI DETERMINA IL VALORE DI K PER CUI LA FUNZIONE VERIFICA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE

$\varphi(x)$ È CONTINUA IN $[a;b]$ E DERIVABILE IN $]a;b[$

PERCHÉ LO SONO PER IPOTESI f E g

CONSIDERIAMO ADESSO:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a) - K g(a) \\ \varphi(b) &= f(b) - K g(b) \end{aligned}\right\} \text{IMPONIAMO } \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$f(a) - Kg(a) = f(b) - Kg(b)$$

$$\Downarrow$$

$$Kg(b) - Kg(a) = f(b) - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

SOSTITUIAMO A K IL VALORE TROVATO E OSSERVIAMO CHE LA FUNZIONE:

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g(x)$$

VERIFICA TUTTE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE

QUINDI:

$$\exists c \in]a;b[: \varphi'(c) = 0$$

TROVIAMO:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x)$$

SI AVRÀ:

E DIVIDENDO PER $g'(c) \neq 0$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \text{TESI}$$

TEOREMA DI LAGRANGE

IPOTESI: $f : [a;b] \to \mathbb{R}$

f CONTINUA IN $[a;b]$

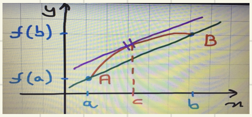
f DERIVABILE IN $]a;b[$

$f(a) \neq f(b)$

$\Rightarrow$ TESI $\exists c \in]a;b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

N.B. QUANDO $f(a) = f(b)$ AVREMO ROLLE

ESISTE ALMENO UN PUNTO DI ASCISSA c IN CUI LA RETTA TANGENTE È PARALLELA ALLA SECANTE AB



COEFFICIENTE ANGOLARE

$m_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

DIMOSTRAZIONE

BASTA APPLICARE IL TEOREMA DI CAUCHY CONSIDERANDO COME FUNZIONE $g(x)$ LA FUNZIONE: $g(x) = x$

f E g SONO ENTRAMBE DEFINITE IN $[a;b]$

f PER IPOTESI E $g(x)=x$ PERCHÉ DEFINITA IN $\mathbb{R}$, ANALOGAMENTE:

f, g CONTINUE IN $[a;b]$

f, g DERIVABILI IN $]a;b[$

INFATTI:

$g'(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DI CONSEGUENZA: $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a;b[$

E INFINE

$$\left.\begin{array}{l} g(a) = a \\ g(b) = b \end{array}\right\} \quad g(a) \neq g(b)$$

LE 2 FUNZIONI VERIFICANO TUTTE LE IPOTESI DEL TEOREMA DI CAUCHY

QUINDI: $\exists c \in]a;b[: \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

ED ESSENDO: $g'(c) = 1$, $g(b) = b$, $g(a) = a$ $\overset{\text{TESI}}{\Longrightarrow}$ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

CONSIDERIAMO 2 FUNZIONI $f(x)$ e $g(x)$, DEVONO ESSERE DEFINITE IN UN INTORNO I DI x_0

IPOTESI
- $f(x)$ e $g(x)$ DEVONO ESSERE CONTINUE IN x_0
- $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- $f(x)$ e $g(x)$ DEVONO ESSERE DERIVABILI IN $I - \{x_0\}$
- $g'(x) \neq 0$ IN $I - \{x_0\}$

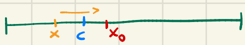
$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ED IN PIÙ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

IN PRESENZA DELLA FORMA INDETERMINATA $\frac{0}{0}$ È POSSIBILE APPLICARE IL TEOREMA

DIMOSTRAZIONE

Sia $x \in I - \{x_0\}$
$x < x_0$



APPLICHIAMO
- TEOREMA DI CAUCHY IN $]x; x_0[$

POSSIAMO DIRE CHE $\exists c \in]x; x_0[$ t.c. $\frac{\cancel{f(x_0)} - f(x)}{\cancel{g(x_0)} - g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \xrightarrow{\text{QUINDI}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

MA SAPPIAMO CHE $f(x_0)$ E $g(x_0)$ VALGONO 0

OSSERVIAMO CHE SE $x \to x_0$, ANCHE c TENDE A x_0

QUINDI

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(CAMBIANDO NOME A c)

TESI:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

CRITERIO DI MONOTONIA

$f(x)$ CONTINUA E DERIVABILE IN UN INTERVALLO DI I

SE $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ È STRETTAMENTE CRESCENTE IN I

SE $f'(x) < 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f(x)$ È STRETTAMENTE DECRESCENTE IN I

DIMOSTRAZIONE

Siano x_1, x_2 2 PUNTI DELL'INTERVALLO I CON $x_1 < x_2$

DIMOSTRIAMO IL CASO IN CUI $f'(x) > 0$ (IL CASO CON $f' < 0$ SARÀ ANALOGO)

DALLA DEFINIZIONE:

$f(x_2) > f(x_1)$ SE $x_2 > x_1 \quad \forall \,]x_1, x_2[\, \in I$

DATO CHE VALE LAGRANGE IN I DI CONSEGUENZA VARRÀ NELL'INTERVALLO $[x_1, x_2]$

$\exists$ ALMENO UN PUNTO x_0 APPARTENENTE ALL'INTERVALLO $]x_1, x_2[$ t.c. $f'(x_0) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

PER IPOTESI SAPPIAMO CHE $f'(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f'(x_0) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x_0) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

DA QUI POSSIAMO DIRE CHE

SE $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

ED È ESATTAMENTE LA DEFINIZIONE DI CRESCENZA STRETTA. Tale DISUGUAGLIANZA VALE $\forall \,]x_1, x_2[\, \in I$. CIÒ MI DIMOSTRA LA TESI

N.B. 1: IL TEOREMA NON È INVERTIBILE

DERIVATA DELLA SOMMA DI FUNZIONI

$(f+g)' = f' + g'$

DIMOSTRAZIONE

CALCOLO IL RAPPORTO INCREMENTALE DELLA FUNZIONE $f+g$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)-g(x)]}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

DOVE

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'$$

E PERTANTO

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f' + g'$$

DIMOSTRATO! IDEM PER LA DIFFERENZA

TEOREMA DELLE RADICI DI UN NUMERO COMPLESSO

OGNI NUMERO COMPLESSO AMMETTE ESATTAMENTE n RADICI n-ESIME COMPLESSE

TROVARE LA RADICE DI UN NUMERO COMPLESSO SIGNIFICA TROVARE UN NUMERO TALE CHE $w^n = z$ (CON z e w NUMERI COMPLESSI)

INTEGRARE DIM!

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

IPOTESI: SIA $y=f(x)$ UNA FUNZIONE CONTINUA NELL' INTERVALLO $[a;b]$

TESI: $\exists c \in [a;b]$ t. c.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{(b-a)}_{\text{BASE}} \cdot \overbrace{f(c)}^{\text{ALTEZZA}}$$

DIMOSTRAZIONE:

ESSENDO $f(x)$ CONTINUA NELL' INTERVALLO $[a;b]$, PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS LA FUNZIONE È DOTATA DI VALORE MASSIMO M E MINIMO m:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a;b]$$

POSSIAMO AFFERMARE CHE: L'AREA DEL TRAPEZOIDE È COMPRESA TRA L'AREA DEL RETTANGOLO DI BASE $b-a$ E ALTEZZA m (MINIMO) E L'AREA DEL RETTANGOLO DI BASE $b-a$ E ALTEZZA M (MASSIMO):

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$$

DIVIDENDO PER $b-a$:

$$m \leq \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}_{\lambda} \leq M$$

ABBIAMO COSÌ TROVATO UN VALORE COMPRESO TRA IL MINIMO m E IL MASSIMO M
PER IL TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

$$\exists c \in [a;b]: f(c) = \lambda = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

MOLTIPLICANDO PER $b-a$ SI OTTIENE:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a) \qquad \text{TESI}$$

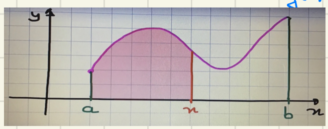
OSSERVAZIONE
CHIAMEREMO IL VALORE:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = V_m$$

VALORE MEDIO DELLA FUNZIONE $f(x)$ NELL' INTERVALLO $[a;b]$

LA FUNZIONE INTEGRALE

SIA $y=f(x)$ CONTINUA IN $[a;b]$, CHIAMIAMO FUNZIONE INTEGRALE DI $f(x)$ LA FUNZIONE DEFINITA DALLA LEGGE:



$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a;b]$$

GEOMETRICAMENTE RAPPRESENTA L'AREA DI UN TRAPEZOIDE
AL VARIARE DI $x \in [a;b]$ SI OTTIENE UN TRAPEZOIDE E QUINDI UN'AREA DIVERSA. IN PARTICOLARE:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = \text{AREA TRAPEZOIDE}$$

QUESTA FUNZIONE INTEGRALE È IMPORTANTE PERCHÉ CREA UN COLLEGAMENTO TRA L'INTEGRALE DEFINITO E INDEFINITO.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

LA FUNZIONE INTEGRALE È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$

IPOTESI: SIA $y = f(x)$ CONTINUA IN $[a;b]$

TESI: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$

DIMOSTRAZIONE

OCCORRE DIMOSTRARE CHE $DF(x) = f(x)$

DOBBIAMO CONSIDERARE IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE:

SIA $x_0 \in [a;b]$

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$$

IL RAPPORTO INCREMENTALE È:

$$\frac{\Delta F(x_0)}{h} = \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{\cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^{x_0} f(t)\,dt}}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} = \frac{h \cdot f(c_h)}{h} = f(c_h)$$

PER IL TEOREMA DELLA MEDIA

$\exists\, c_h \in [x_0; x_0+h]$: $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = (\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}) \cdot f(c_h)$

$= h \cdot f(c_h)$

QUINDI:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) =$$

$c_h \in [x_0; x_0+h]$ QUINDI PER $h \to 0$ SI HA: $c_h \to x_0$ => TESI

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$ INFATTI: ESSENDO $G(x)$ UNA PRIMITIVA DI $f(x)$.

DAL TEOREMA PRECEDENTE SAPPIAMO CHE LA FUNZIONE INTEGRALE È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$.

ESSENDO $F(x)$ E $G(x)$ ENTRAMBE PRIMITIVE DI $f(x)$, ESSE DIFFERISCONO DI UNA COSTANTE

=> $G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt + c$

QUINDI:

$$G(b) - G(a) = (F(b)+c) - (F(a)+c) = \int_a^b f(t)\,dt + \cancel{c} - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} - \cancel{c} = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

NON DIPENDE DAL NOME DELLA VARIABILE

NON ESISTE $c^2 = 2$ IN $\mathbb{Q}$ DIMOSTRAZIONE

SCRIVIAMO c COME $c = \frac{p}{q}$ DOVE $p, q \in \mathbb{N}$ SONO PRIMI TRA LORO.

ALLORA $c^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \quad (1)$

DALLA (1) SEGUE CHE $p^2 = 2q^2 \quad (2)$
E QUINDI p È PARI

SE PER ASSURDO p FOSSE DISPARI, QUINDI $p = 2m+1$, ALLORA SI TROVA $p^2 = 4m^2 + 4m + 1$ CHE È LA SOMMA DI DUE NUMERI PARI E UNO DISPARI, E DUNQUE È DISPARI, IL CHE CONTRADDICE L'ASSUNZIONE CHE p^2 È PARI.

ALLORA POSSO SCRIVERE $p = 2m$ CON $m \in \mathbb{N}$.

SOSTITUENDOLO NELLA (2)

$$4m^2 = 2q^2$$

OVVERO

$$2m^2 = q^2$$

DUNQUE ANCHE q È PARI, IL CHE CONTRADDICE L'IPOTESI CHE p E q SONO PRIMI TRA LORO.

RELAZIONE TRA DERIVABILITÀ E CONTINUITÀ

SE UNA FUNZIONE $f(x)$ È DERIVABILE IN UN PUNTO x_0 ALLORA ESSA LÌ È ANCHE CONTINUA

hp: $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

con $f'(x_0)$ CHE ESISTE ED È FINITO

th: $f(x)$ È UNA FUNZIONE CONTINUA IN x_0, CIOÈ:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se una funzione y = f(x) è derivabile in un punto x_0, allora essa è anche continua in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$f(x) = f(x) - f(x_0) + f(x_0)$$

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] + \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 + f(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

DEFINIZIONE PRINCIPIO DI INDUZIONE

Se una proprietà P_n vale per $n=1$ e se dalla validità di P_n si può dedurre quella di P_{n+1}, allora P_n vale per ogni intero n.

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

$\forall x > -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA CHE $(1+x)^n \geq 1+nx$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

PER $n_0 = 0$ SI HA CHE

$$(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x \Rightarrow 1 \geq 1 \text{ CHE È VERO!}$$

PASSO INDUTTIVO

SUPPONIAMO VERO $P_n: (1+x)^n \geq 1+nx$ E DIMOSTRIAMO P_{n+1}

MOLTIPLICHIAMO ENTRAMBI I MEMBRI E SI OTTIENE

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE NON CAMBIA ESSENDO $1+x>0$ VISTA L'IPOTESI CHE $x>-1$

RISCRITTA MEGLIO DIVENTA $(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$

A QUESTO PUNTO POSSIAMO OSSERVARE CHE $nx^2 \geq 0$ ESSENDO IL PRODOTTO TRA NUMERI POSITIVI.

ALLORA $1+x+nx+nx^2 \geq 1+x+nx$ E QUINDI SI OTTIENE $(1+x)^{n+1} \geq 1+(1+n)x$ RACCOGLIENDO UNA x, E QUEST'ULTIMA ESPRESSIONE CORRISPONDE PROPRIO A P_{n+1} E QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO IL PASSO INDUTTIVO

DEFINIZIONE SUCCESSIONE

UNA SUCCESSIONE NUMERICA È UNA LEGGE CHE ASSOCIA AD OGNI NUMERO NATURALE n, UN NUMERO REALE a_n.

DEFINIZIONE LIMITI DI SUCCESSIONI

UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI a_n CONVERGE AD UN NUMERO REALE $a \in \mathbb{R}$ SE E SOLO SE PER DEFINIZIONE:
COMUNQUE SI FISSI UN NUMERO REALE $\varepsilon > 0$, RIUSCIREMO A DETERMINARE UN INDICE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE TUTTI I TERMINI DELLA SUCCESSIONE CON INDICE MAGGIORE DI n_0 HANNO DISTANZA DA a MINORE DI ε.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ con } n_0 > 0 \text{ TALE CHE } \forall n > n_0 \text{ RISULTA } |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

SE VALE LA DEFINIZIONE DIREMO CHE a È IL LIMITE DELLA SUCCESSIONE E SCRIVEREMO:
$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

- SI DICE CONVERGENTE SE AMMETTE LIMITE FINITO, DIVERGENTE SE AMMETTE LIMITE UGUALE A $+ - \infty$.
- QUEST'ULTIME SI DICONO REGOLARI. QUELLE CHE NON AMMETTONO LIMITE SI DICONO NON REGOLARI.
- UNA SUCCESSIONE CHE CONVERGE A ZERO SI DICE INFINITESIMA, MENTRE UNA DIVERGENTE SI DICE INFINITA

OGNI SUCCESSIONE CONVERGENTE È LIMITATA

DIMOSTRAZIONE:

Fornires la def. di limite prendo $\varepsilon = 1$

quindi $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. se $n > \nu$ $|a_n - a| < 1$

di conseguenza $a - 1 < a_n < a + 1$

Una volta sistemati i termini $> \nu$, Restano quelli prima che sono in numero finito. Ora possiamo prendere il massimo:

$m := \max_{n \le \nu} |a_n|$.

Di conseguenza se prendiamo il massimo tra i due valori, otteniamo:
$$M := \max\{m, |a| + 1\}$$
E VALGONO ENTRAMBE LE DISUGUAGLIANZE, finalmente $|a_n| < M \ \forall n \in \mathbb{N}$, OVVERO a_n È LIMITATA

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS

In $\mathbb{R}$ ogni successione limitata ha almeno una sottosuccessione convergente.

SOTTOSUCCESSIONE: SIA a_n UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI, E SIA n_k UNA SUCCESSIONE STRETTAMENTE CRESCENTE DI NUMERI NATURALI, LA SUCCESSIONE (a_{n_k}) È CHIAMATA SUCCESSIONE ESTRATTA O SOTTOSUCCESSIONE, DEFINITA IN $K \to \mathbb{N}$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

SE UNA FUNZIONE HA UN LIMITE PER $x \to c$ CHE È UGUALE AD ℓ ALLORA ESISTE UN INTORNO DI C IN CUI LA FUNZIONE ASSUME IL SEGNO DI ℓ. **DIMOSTRAZIONE:**

USANDO LA DEF. DI LIMITE CON $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

PONIAMO $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2}$, PER TALE ε ESISTE $\delta_\varepsilon > 0$ TALE CHE SE $x \in dom(f)$ e $0 < |x-c| < \delta_\varepsilon$

ALLORA RISULTA CHE $\ell - \frac{|\ell|}{2} < f(x) < \ell + \frac{|\ell|}{2}$

E SOMMANDO I TERMINI SIMILI ABBIAMO $\frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}$

SE ℓ È POSITIVO, LO È ANCHE $\frac{\ell}{2}$. POSSIAMO QUINDI ASSERIRE CHE ESISTE UN INTORNO DI C IN CUI $f(x)$ È POSITIVA, IN QUANTO MAGGIORE DI UNA QUANTITÀ POSITIVA

$$0 < \frac{\ell}{2} < f(x) \quad \forall x \text{ t.c. } 0 < |x-c| < \delta_\varepsilon$$

NEL CASO IN CUI IL LIMITE FOSSE NEGATIVO RISULTEREBBE: $|\ell| = -\ell$ E SOSTITUENDOLA NELLA RELAZIONE, OTTERREMMO

$$\ell + \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell - \frac{\ell}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$3\frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{\ell}{2}$$

ℓ NEGATIVO ALLORA ANCHE $\frac{\ell}{2}$ LO SARÀ POSSIAMO QUINDI ASSERIRE CHE ESISTE UN INTORNO DI C IN CUI $f(x)$ È NEGATIVA, IN QUANTO MINORE DI UNA QUANTITÀ NEGATIVA

$$f(x) < \frac{\ell}{2} \quad \forall x \text{ t.c. } 0 < |x-c| < \delta_\varepsilon$$

E CIÒ CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$x_1, x_2, \dots, x_m$ $\qquad P \in \mathbb{R}^m$

$E \subseteq \mathbb{R}^m$

TUTTE LE VOLTE CHE, ASSEGNATO UN CERTO INSIEME DI PUNTI $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ DELLO SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^m$, ESISTE UNA LEGGE (DI NATURA QUALSIASI) CHE PERMETTA DI ASSOCIARE AD OGNI PUNTO $P \in E$ UN BEN DETERMINATO NUMERO REALE u, DIREMO CHE u È UNA FUNZIONE DEL PUNTO P DEFINITA IN E, A VALORI IN $\mathbb{R}$, OPPURE CHE u È UNA FUNZIONE DELLE m VARIABILI $x_1, x_2, \dots, x_m$ DEFINITA NELL' INSIEME $E \subseteq \mathbb{R}^m$, OPPURE UN' APPLICAZIONE DEL TIPO $f: E \to \mathbb{R}$

PER INDICARE CIÒ, SI UTILIZZA UNA NOTAZIONE DEL TIPO $u = f(P)$ O ANCHE $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ E TALVOLTA SI POSSONO ANCHE ADOTTARE LOCUZIONI DEL TIPO $f(P)$ o $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ O ANCHE SEMPLICEMENTE f.

$P(x, y)$ $\qquad \underset{\text{VARIABILE DIPENDENTE}}{z} = f(\underset{\text{VARIABILE INDIPENDENTE}}{x, y})$

$xy \leftarrow E \subseteq \mathbb{R}^2$

$z = \log(x+y)$ $\qquad x + y > 0$

INTORNO CIRCOLARE

γ = GAMMA

UN INTORNO CIRCOLARE DI RAGGIO $\gamma > 0$ DI UN PUNTO $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ È PER DEFINIZIONE IL CERCHIO APERTO DI CENTRO (x_0, y_0) E RAGGIO γ. ANALITICAMENTE, L'INTORNO I È INDIVIDUATO DALLA CONDIZIONE:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\}$$

$$(x,y) \in I_\delta \iff \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

SIA $f(x,y)$ UNA FUNZIONE DEFINITA IN UN INSIEME $D \subseteq \mathbb{R}^2$ E SIA (x_0, y_0) UN PUNTO DI $\mathbb{R}^2$ CON LA PROPRIETÀ CHE IN OGNI INTORNO CIRCOLARE DI (x_0, y_0) CADA ALMENO UN PUNTO DEL DOMINIO D DISTINTO DA TALE PUNTO, SI DICE CHE (x_0, y_0) È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER IL DOMINIO D DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE $f(x,y)$

① DOMINIO

ESEMPIO: $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x}$

$$\begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2 \wedge x \geq 0\}$$

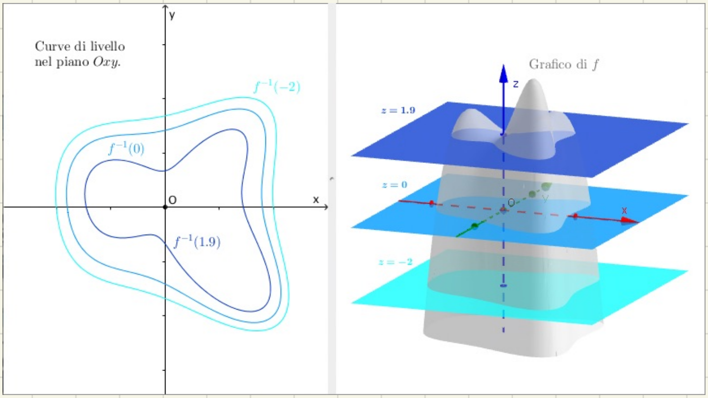
② CODOMINIO

IL CODOMINIO DI UNA FUNZIONE

$z = f(x,y)$ È L'INSIEME DEI VALORI DELLA VARIABILE z, ED È UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$

IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI SI RAPPRESENTA IN 3 DIMENSIONI

VA STUDIATA LA FUNZIONE A DIVERSE ALTEZZE



CURVE DI LIVELLO

SIA DATA UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI

$$z = f(x,y)$$

E UN PIANO

$z = K$ CON $K \in \mathbb{R}$ PARALLELO AL PIANO xy

→ PRENDE IL NOME DI **CURVA DI LIVELLO** DI QUOTA K L'INTERSEZIONE DELLA FUNZIONE $z = f(xy)$ CON IL PIANO $z = K$

PER TROVARE LE CURVE DI LIVELLO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI DOBBIAMO CONSIDERARE IL SISTEMA

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = K \end{cases}$$

DAL QUALE SI OTTIENE $f(x,y) = K$

→ QUINDI AL VARIARE DI $K \in \mathbb{R}$ POSSIAMO OTTENERE INFINITE CURVE DI LIVELLO CHE CI FORNISCONO UNA BUONA DESCRIZIONE DELLA FUNZIONE DESIDERATA

2 CURVE DI LIVELLO

TROVARE LE CURVE DI LIVELLO DELLA FUNZIONE

$$f(x,y) = y - x^2 - 1$$

$$\begin{cases} z = y - x^2 - 1 \\ z = K \end{cases}$$

$$K = y - x^2 - 1$$

quindi $y = x^2 + 1 + K$

3) DISEQUAZIONI

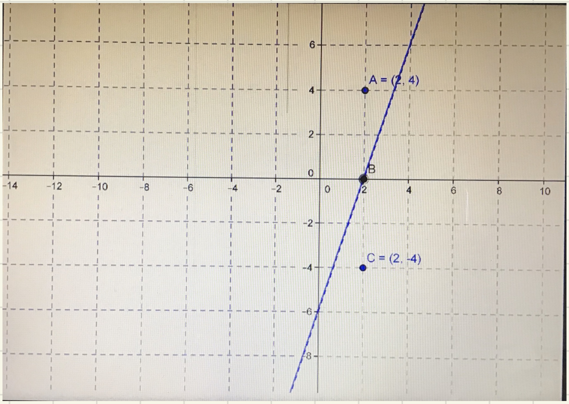
PROCEDIMENTO:

1) RETTA $ax+by+c=0$ CHE DIVIDE IL PIANO IN DUE SEMIPIANI
2) "PUNTO DI PROVA": $P(x_0, y_0)$ E VERIFICA SE SODDISFA LA DISEQUAZIONE
3) SE $ax_0+by_0+c \geq 0$ È VERA, ALLORA IL SEMIPIANO È QUELLO CHE CONTIENE IL "PUNTO DI PROVA", ALTRIMENTI È QUELLO OPPOSTO

ESEMPIO

CONSIDERIAMO LA DISEQUAZIONE:

$3x < 6+y \rightarrow y > 3x-6$



4) I LIMITI DELLE FUNZIONI IN DUE VARIABILI

DATA UNA FUNZIONE $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ED UN PUNTO $P_0 = (x_0, y_0)$ CHE SIA DI ACCUMULAZIONE PER A, SI DICE CHE LA FUNZIONE f HA PER LIMITE l CON $P=(x,y)$ CHE TENDE A P_0 E SI SCRIVE:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} F(x,y) = l$$

I = INTORNO

SE: $\forall I(l), \exists I(x_0,y_0): \forall (x,y) \in I(x_0,y_0) \cap A$, CON $(x,y) \neq (x_0,y_0)$,

SEGUE CHE:

$$F(x,y) \in I(l)$$

1) NELLE FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE SOSTENERE CHE $x \to x_0$, SIGNIFICA CHE x SI AVVICINA A x_0 MUOVENDOSI SU UNA RETTA

NEL CASO DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI, SOSTENERE CHE $(x,y) \to (x_0,y_0)$, SIGNIFICA CHE P SI AVVICINA A P_0 LUNGO UN PERCORSO QUALUNQUE CHE COLLEGA P A P_0

2) PER CALCOLARE IL LIMITE CON $(x,y) \to (x_0,y_0)$ DOBBIAMO FAR TENDERE CONTEMPORANEAMENTE x A x_0 E y A y_0 IN MODO INDIPENDENTE

3) PER IL CALCOLO DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI SI SEGUONO GLI STESSI CRITERI PER IL CALCOLO DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE.

5 CONTINUITÀ

DATA UNA FUNZIONE $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ED UN PUNTO $P_0 = (x_0, y_0) \in A \cap A'$, CIOÈ UN PUNTO CHE SIA DI ACCUMULAZIONE PER A ED APPARTENENTE AD A, SI DICE CHE LA FUNZIONE f È CONTINUA IN $P_0 = (x_0, y_0)$ SE E SOLO SE

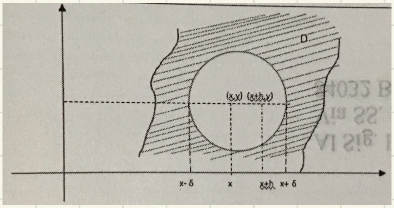
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

SE LA FUNZIONE f È CONTINUA IN OGNI PUNTO $(x_0, y_0) \in A$, ALLORA SI DICE CHE È CONTINUA IN A

DERIVATE PARZIALI

LA DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO AD x NEL PUNTO (x,y) È, PER DEFINIZIONE, IL LIMITE:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$



SE TALE LIMITE ESISTE ED È FINITO (SI NOTI CHE SI TRATTA DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE DI UNA VARIABILE REALE, DATO CHE y È FISSATO E GIOCA IL RUOLO DI PARAMETRO). ANALOGAMENTE, LA DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO AD y NEL PUNTO (x,y) È, PER DEFINIZIONE, IL LIMITE

$$\lim_{K \to 0} \frac{f(x, y+K) - f(x,y)}{K}$$

SE LA FUNZIONE f AMMETTE DERIVATE PARZIALI f_x, f_y IN UN PUNTO (x,y), IN TALE PUNTO SI DEFINISCE IL GRADIENTE DI f, INDICATO CON grad f, OPPURE Df, COME IL VETTORE DI $\mathbb{R}^2$ AVENTE PER COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI DI f; IN SIMBOLI:

$$\text{grad} f = Df = (f_x, f_y)$$

SI DIMOSTRA CHE, SE NON È NULLO, IL VETTORE GRADIENTE INDICA LA DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE

SIA f UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI DEFINITA IN UN INTORNO CIRCOLARE I_δ DI UN PUNTO $\mathbb{R}^2$ E SUPPONIAMO CHE IN TUTTI I PUNTI DI I_δ, f AMMETTA DERIVATE PARZIALI. δ = DELTA

$$f_x(x,y), \quad f_y(x,y), \quad \text{CON } (x,y) \in I_\delta$$

IN PARTICOLARE f_{xy}, f_{yx} VENGONO DETTE DERIVATE SECONDE MISTE, MENTRE f_{xx}, f_{yy} VENGONO DETTE DERIVATE SECONDE PURE.

MASSIMI E MINIMI RELATIVI DI UNA FUNZIONE

SIA $f(x,y)$ UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI DEFINITA IN UN INSIEME $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

UN PUNTO $(x_0,y_0) \in D$ È DI MASSIMO RELATIVO PER LA FUNZIONE $F(x,y)$ NEL DOMINIO D, SE ESISTE UN INTORNO CIRCOLARE I_δ DI (x_0,y_0) TALE CHE:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y), \quad \forall (x,y) \in I_\delta \cap D.$$

ANALOGAMENTE, UN PUNTO $(x_0,y_0) \in D$ È DI MINIMO RELATIVO PER LA FUNZIONE $f(x,y)$ NEL DOMINIO D SE ESISTE UN INTORNO CIRCOLARE I_δ DI (x_0,y_0) TALE CHE:

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y), \quad \forall (x,y) \in I_\delta \cap D.$$

UN PUNTO (x_0,y_0) È INTERNO AD UN INSIEME $D \subseteq \mathbb{R}^2$ SE ESISTE UN INTORNO CIRCOLARE I_δ DI (x_0,y_0) CONTENUTO IN D:

PERTANTO UN PUNTO $(x_0,y_0) \in D$ È DI MASSIMO RELATIVO INTERNO ALL'INSIEME D PER LA FUNZIONE f SE ESISTE UN INTORNO CIRCOLARE δ I_δ DI (x_0,y_0) TALE CHE:

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y), \quad \forall (x,y) \in I_\delta$$

TEOREMA DI SCHWARZ

SE UNA FUNZIONE AMMETTE ENTRAMBE LE DERIVATE MISTE, E SE TALI DERIVATE SECONDE SONO CONTINUE IN (x_0,y_0), ALLORA $f_{yx}(x_0,y_0) = f_{xy}(x_0,y_0)$

$$F(x)-F(x_0) = f(x,y)-f(x,y)-[f(x_0,y)-f(x_0,y_0)]$$

$$G(y)-G(y_0) = f(x,y)-f(x,y)-[f(x,y_0)-f(x_0,y_0)]$$

$$F(x)-F(x_0) = G(y)-G(y_0)$$

TEOREMA DI MASSIMI E MINIMI RELATIVI DI UNA FUNZIONE A PIÙ VARIABILI

SE (x_0,y) È UN PUNTO DI MASSIMO O DI MINIMO RELATIVO INTERNO AL DOMINIO D DI UNA FUNZIONE $f(x,y)$ E SE $f(x,y)$ È DOTATA DI DERIVATE PARZIALI PRIME IN (x,y), ALLORA RISULTA $f(x,y)=0$

LA SEGUENTE È LA DIMOSTRAZIONE ALLA CONDIZIONE NECESSARIA PER IL TEOREMA:

SUPPONIAMO AD ESEMPIO CHE (x,y) SIA UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO INTERNO AL DOMINIO D DI UNA FUNZIONE $f(x,y)$; ESISTE ALLORA UN INTORNO CIRCOLARE I_δ PER CUI VALE $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$.

FISSATO $y=y_0$, CONSIDERIAMO LA FUNZIONE DI UNA VARIABILE REALE $F(x) = f(x_0,y_0)$.

CON $y=y_0$, SODDISFA $F(x_0) \geq F(x)$.

CIOÈ x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO INTERNO PER LA FUNZIONE $F(x)$ DELL'INTERVALLO $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

PER IL TEOREMA DI FERMAT, RISULTA $F'(x_0)=0$, CIOÈ:

$$F'(x_0) = f_x(x_0,y_0) = 0.$$

SI PROCEDE IN MODO ANALOGO PER OTTENERE $f_y(x_0,y_0)=0$

RIPORTIAMO SOLO BREVEMENTE QUALCOSA DELLE SERIE NUMERICHE

SIA a_m UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI.

CI PROPONIAMO DI DEFINIRE LA SOMMA DEI TERMINI DELLA SUCCESSIONE, CIOÈ DI DEFINIRE L'ESPRESSIONE $a1+a2+a3+\ldots+am+\ldots$

INTRODUCIAMO LA SOMMA sm DEI PRIMI m TERMINI DELLA SUCCESSIONE (DETTA ANCHE SOMMA PARZIALE, O RIDOTTA m-ESIMA):

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$$

È NATURALE DEFINIRE L'ESPRESSIONE COME LIMITE, PER $m \to +\infty$, DELLA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI. CIOÈ PONIAMO PER DEFINIZIONE:

$$\sum_{k=1} a_k = \lim_{m \to +\infty} \qquad S_m = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} a_k$$

IL SIMBOLO AL PRIMO MEMBRO SI LEGGE: SOMMA, O SERIE, PER K CHE VA DA 1 A $+\infty$, DI a_k.

- SE IL LIMITE PER $m \to +\infty$ DI sm ESISTE ED È UN NUMERO FINITO, SI DICE CHE LA SERIE È CONVERGENTE
- SE IL LIMITE DI sm VALE $+\infty$ (OPPURE $-\infty$), SI DICE CHE LA SERIE È DIVERGENTE
- UNA SERIE CONVERGENTE O DIVERGENTE SI DICE REGOLARE
- SE NON ESISTE IL LIMITE PER $m \to +\infty$ DI sm SI DICE CHE LA SERIE È INDETERMINATA
- IL CARATTERE DI UNA SERIE È LA SUA PROPRIETÀ DI ESSERE CONVERGENTE, O DIVERGENTE OPPURE INDETERMINATA

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE – SE LA SERIE $\sum a_k$ È CONVERGENTE, ALLORA LA SUCCESSIONE a_m TENDE A ZERO PER $m \to +\infty$.

INDICHIAMO CON S_m LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI E CON $S \in \mathbb{R}$ LA SOMMA DELLE SERIE.

ESSENDO $S_m+1 = S_m + a_m+1, \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to+\infty} a_m+1 = \lim_{m\to+\infty} S_m+1 - \lim_{m\to+\infty} S_m = S - S = 0$$

CRITERIO DI CAUCHY PER LA SERIE – CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ LA SERIE $\sum a_k$ SIA CONVERGENTE È CHE, PER $\varepsilon > 0$, ESISTA $\nu > 0$ TALE CHE $|\sum a_k| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+p}| < \varepsilon$