Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2014-2015
Prima Prova Intercorso (A) - 23 Aprile 2015	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

1. *(15 punti)*

   Dare le definizioni di:

   - Automa finito non deterministico.
   - estensione della funzione di transizione di un automa finito non deterministico.
   - linguaggio riconosciuto da un automa finito non deterministico.

2. *(15 punti)*
Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ogni sottostringa di } w \text{ di lunghezza 3 di } w \text{ contiene almeno un'occorrenza di } b\}.$$

3. *(15 punti)*

   - Dare la definizione di espressione regolare, indicando con precisione il linguaggio rappresentato.
   - Sia $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ ha lunghezza dispari e contiene bb come sottostringa$\}$. Ad esempio $bbaaa \in L$, $bbaa \notin L$, $aba \notin L$. Definire un'espressione regolare che descriva L.

4. *(15 punti)* Dare le definizioni di:
   - Macchina di Turing
   - Linguaggio
   - Linguaggio Turing riconoscibile.
   - Linguaggio decidibile.

5. *(15 punti)*

   - Definire il linguaggio A_{TM}.
   - Dimostrare che A_{TM} è indecidibile.

6. *(15 punti)*

Si consideri la seguente MdT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, dove $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{accept}, q_{reject})$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$ e la funzione $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è definita come segue

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_0, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_0, \sqcup) = (q_{reject}, \sqcup, R), \\
\delta(q_1, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_1, b) = (q_1, a, R), \quad \delta(q_1, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R), \\
\delta(q_2, a) &= (q_{reject}, b, R), \quad \delta(q_2, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_2, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R)
\end{aligned}$$

(1) Descrivere il diagramma di stato di M.

(2) Scrivere la computazione di M, dalla configurazione iniziale a una configurazione di arresto, sull'input w per

$$w = \epsilon, \quad w = aba, \quad w = ba.$$

Occorre specificare tutti i passi della computazione e tutte le configurazioni intermedie che intervengono nella computazione.

(3) Definire il linguaggio riconosciuto da M.

7. Enunciare il Pumping Lemma e utilizzarlo per mostrare che il linguaggio

$$L = \{wxw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*,\ |w| = |w'|,\ x \in \{c, d\}^*,\ x \text{ ha lunghezza dispari}\}$$

non è regolare.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2014-2015
Prima Prova Intercorso (B) - 23 Aprile 2015	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

1. *(15 punti)*

   Dare le definizioni di:

   - Automa finito non deterministico.
   - estensione della funzione di transizione di un automa finito non deterministico.
   - linguaggio riconosciuto da un automa finito non deterministico.

2. *(15 punti)*

   Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio

   $$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{ogni sottostringa di } w \text{ di lunghezza 3 di } w \text{ contiene almeno un'occorrenza di } a\}.$$

3. *(15 punti)*

- Dare la definizione di espressione regolare, indicando con precisione il linguaggio rappresentato.
- Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ha lunghezza dispari e contiene } aa \text{ come sottostringa}\}$. Ad esempio $bbaaa \in L$, $bbaa \notin L$, $aba \notin L$. Definire un'espressione regolare che descriva L.

4. *(15 punti)* Dare le definizioni di:
   - Macchina di Turing
   - Linguaggio
   - Linguaggio Turing riconoscibile.
   - Linguaggio decidibile.

5. *(15 punti)*

   - Definire il linguaggio A_{TM}.
   - Dimostrare che A_{TM} è indecidibile.

6. *(15 punti)*

Si consideri la seguente MdT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, dove $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{accept}, q_{reject})$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$ e la funzione $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è definita come segue

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_0, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_0, \sqcup) = (q_{reject}, \sqcup, R), \\
\delta(q_1, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_1, b) = (q_1, a, R), \quad \delta(q_1, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R), \\
\delta(q_2, a) &= (q_{reject}, b, R), \quad \delta(q_2, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_2, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R)
\end{aligned}$$

(1) Descrivere il diagramma di stato di M.

(2) Scrivere la computazione di M, dalla configurazione iniziale a una configurazione di arresto, sull'input w per

$$w = \epsilon, \quad w = ab, \quad w = baa.$$

Occorre specificare tutti i passi della computazione e tutte le configurazioni intermedie che intervengono nella computazione.

(3) Definire il linguaggio riconosciuto da M.

7. Enunciare il Pumping Lemma e utilizzarlo per mostrare che il linguaggio

$$L = \{wxw' \mid w, w' \in \{a, b\}^*,\ |w| = |w'|,\ x \in \{c, d\}^*,\ x \text{ ha lunghezza pari}\}$$

non è regolare.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2014-2015
Prova Scritta - 23 Aprile 2015	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali:
Martedì 28 Aprile, ore 14, IV piano, Stecca VII, Studio N. 49

1. *(15 punti)*

   Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio

   $$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{ogni sottostringa di } w \text{ di lunghezza 2 di } w \text{ contiene almeno un'occorrenza di } a\}.$$

2. *(15 punti)*

   - Dare la definizione di espressione regolare, indicando con precisione il linguaggio rappresentato.
   - Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ha lunghezza pari e contiene } aa \text{ come sottostringa}\}$. Ad esempio $bbaa \in L$, $bbaaa \notin L$, $aba \notin L$. Definire un'espressione regolare che descriva L.

3. *(15 punti)*

Si consideri la seguente MdT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, dove $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{accept}, q_{reject}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$ e la funzione $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è definita come segue

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_0, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_0, \sqcup) = (q_{reject}, \sqcup, R), \\
\delta(q_1, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_1, b) = (q_1, a, R), \quad \delta(q_1, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R), \\
\delta(q_2, a) &= (q_{reject}, b, R), \quad \delta(q_2, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_2, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R)
\end{aligned}$$

(1) Descrivere il diagramma di stato di M.

(2) Scrivere la computazione di M, dalla configurazione iniziale a una configurazione di arresto, sull'input w per

$$w = \epsilon, \quad w = abba, \quad w = baa.$$

Occorre specificare tutti i passi della computazione e tutte le configurazioni intermedie che intervengono nella computazione.

(3) Definire il linguaggio riconosciuto da M.

4. *(15 punti)*

   - Definire il linguaggio A_{TM}.
   - Dimostrare che A_{TM} è indecidibile.

5. *(15 punti)*

   (1) Definire la classe di complessità NP.

   (2) Fornire la definizione di riduzione polinomiale

   (3) Definire il concetto di NP-completezza.

6. *(15 punti)*

   1) Definire i linguaggi 3-SAT e $CLIQUE$ (occorre definire ogni termine utilizzato nella definizione).
   2) Data la seguente formula booleana

   $$\Phi = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$$

   definire il grafo G e l'intero k tali che $\langle G, k\rangle$ sia l'immagine di $\langle \Phi \rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $CLIQUE$.

7. Enunciare il Pumping Lemma e utilizzarlo per mostrare formalmente e con precisione che il linguaggio

$$\{w \in \{a,b,c,d\}^* \mid \text{il numero delle occorrenze di } a \text{ in } w \text{ è uguale al numero delle occorrenze di } b \text{ in } w$$
$$\text{oppure il numero delle occorrenze di } c \text{ in } w \text{ è uguale al numero delle occorrenze di } d \text{ in } w\}$$

non è regolare.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2014-2015
Seconda Prova Intercorso - 10 Giugno 2015

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali:
Mercoledì 17 Giugno ore 12 - Stecca 7, IV Piano, Studio 49

1. *(15 punti)*

   Enunciare il teorema di Rice.

2. *(15 punti)*

   Dire, giustificando la risposta, se è possibile utilizzare il teorema di Rice per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile.

$$L = \{\langle M\rangle \mid L(M) \text{ è decidibile}\}.$$

3. *(15 punti)*

   Si consideri il linguaggio

   $$REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una } TM \text{ ed } L(M) \text{ è regolare } \}$$

   Definire il linguaggio A_{TM} e mostrare che $A_{TM} \leq REGULAR_{TM}$.

4. *(15 punti)*

   1) Dare la definizione di riduzione polinomiale.
   2) Definire la classe di complessità P.
   3) Definire la classe di complessità NP.

5. *(15 punti)*

   (1) Definire il concetto di NP-completezza.

   (2) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme degli interi non negativi. Indicare se la seguente affermazione è sicuramente VERA, sicuramente FALSA oppure NON SI SA (dipende dalle relazioni tra le classi P ed NP). Giustificare brevemente la risposta.

   Il linguaggio $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è NP-completo.

6. *(15 punti)*

   1) Definire i linguaggi 3-SAT e $VERTEX$-$COVER$ (occorre definire ogni termine utilizzato nella definizione).

   2) Data la seguente formula booleana

   $$\phi = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$$

   definire il grafo G e l'intero k tali che $\langle G, k\rangle$ sia l'immagine di $\langle \phi \rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $VERTEX$-$COVER$.

7. Si consideri il linguaggio

$$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una MdT che si arresta su 11 e non si arresta su 00}\}.$$

Definire il linguaggio $HALT_{TM}$ e dimostrare che $HALT_{TM} \leq_m L$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2014-2015
Prova Scritta - 10 Giugno 2015

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali:
Mercoledì 17 Giugno ore 12 - Stecca 7, IV Piano, Studio 49

1. *(15 punti)*

   - Dare la definizione dell'operazione di concatenazione di due linguaggi.
   - Dare la definizione dell'operazione star.
   - Definire un'espressione regolare che denoti il linguaggio

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ha un numero pari di occorrenze di } a\}.$$

2. *(15 punti)*

   Dimostrare che per ogni NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$. Occorre definire ogni termine utilizzato nella prova.

3. *(15 punti)*

   - Definire il linguaggio A_{TM}.
   - Dimostrare che A_{TM} è indecidibile.

4. *(15 punti)*

   Sia L un linguaggio sull'alfabeto Σ tale che $A_{TM} \leq_m L$. Dimostrare che L è indecidibile.

5. *(15 punti)*

   1) Definire la classe di complessità P.
   2) Definire la classe di complessità NP.
   3) Definire la classe $coNP$. Dimostrare, formalmente e con precisione, che $P \subseteq NP \cap coNP$. Occorre enunciare con precisione tutti i risultati intermedi utilizzati.

6. *(15 punti)*

   1) Definire i linguaggi 3-SAT e $CLIQUE$ (occorre definire ogni termine utilizzato nella definizione).

   2) Data la seguente formula booleana

   $$\phi = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$$

   definire il grafo G e l'intero k tali che $\langle G, k \rangle$ sia l'immagine di $\langle \Phi \rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $CLIQUE$.

7. Si consideri il linguaggio

$$L = \{\langle M_1, M_2, w\rangle \mid M_1 \text{ ed } M_2 \text{ sono } TM,\ M_1 \text{ si arresta su } w \text{ ed } M_2 \text{ si arresta } w\}.$$

Definire $HALT_{TM}$. Provare che $HALT_{TM} \leq_m L$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2014-2015
Prova Scritta - 24 Giugno 2015

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Mercoledì 8 Luglio ore 11 - Stecca 7, IV Piano, Studio 49

1. *(15 punti)*

   Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio

   $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ ha un numero pari di occorrenze di a e non contiene due occorrenze consecutive di $b\}$.

2. *(15 punti)*

   Dimostrare che per ogni NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$. Occorre definire ogni termine utilizzato nella prova.

3. *(15 punti)*

   - Definire il linguaggio A_{TM}.
   - Dimostrare che A_{TM} è indecidibile.

4. *(15 punti)*

   - Dare la definizione di macchina di Turing non deterministica.
   - Si consideri la macchina di Turing non deterministica $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, con $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{accept}, q_{reject}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$ e δ definita come segue (le transizioni che non sono riportate portano in q_{reject}).

stato attuale	simbolo letto	Valore funzione δ
q_0	a	$\{(q_0, a, R)\}$
q_0	b	$\{(q_0, b, R), (q_1, b, R)\}$
q_1	$\sqcup$	$\{(q_2, b, R)\}$
q_1	a	$\{(q_2, b, R), (q_1, b, R)\}$
q_2	b	$\{(q_{accept}, b, R)\}$

   Descrivere l'albero delle computazioni di N sull'input $abaabb$ e dire se tale stringa appartiene al linguaggio riconosciuto da N. Giustificare le risposte, risposte non giustificate non sono valutate.

5. *(15 punti)*

   - Definire la classe di complessità P.
   - Definire la classe di complessità NP.

- Definire il linguaggio $HAMPATH$ e provare che $HAMPATH$ è in NP.

6. *(15 punti)*

   - Dare la definizione di riduzione polinomiale.
   - Fornire la nozione di clique in un grafo. Definire il linguaggio $CLIQUE$ e provare che se $CLIQUE$ è in P, allora $HAMPATH$ è in P. Occorre enunciare con precisione tutti i risultati intermedi utilizzati.

7. - Enunciare il pumping lemma.
   - Provare che $L = \{xx \mid x \in \{a, b\}^*\}$ non è regolare.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2014-2015
Prova Scritta - 20 Luglio 2015

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Lunedì 27 Luglio ore 11 - Stecca 7, IV Piano, Studio 49

1. *(15 punti)*

   Dati due linguaggi X, Y sull'alfabeto $\{a, b\}$, si consideri il linguaggio L:

   $$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{esistono } x \in X, y \in Y, \text{ con } |x| = |y|, \text{ tali che } w = xy\}.$$

   Dare un esempio di due linguaggi X e Y tali che X e Y sono regolari ma L non è regolare.

2. *(15 punti)*

   Dato l'automa finito non deterministico $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$, la cui funzione di transizione δ è definita dalla tabella seguente, definire l'automa finito deterministico equivalente ottenuto mediante la costruzione per sottoinsiemi.

	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

3. *(15 punti)*

   - Definire i linguaggi A_{TM} e $REGULAR_{TM}$.
   - Data una macchina di Turing deterministica M e una stringa w, si consideri la macchina di Turing $U_{M,w}$ così definita:
     - Se $z \in \{xx \mid x \in \{a,b\}^*\}$, la macchina di Turing $U_{M,w}$ accetta z.
     - Se $z \notin \{xx \mid x \in \{a,b\}^*\}$, la macchina di Turing $U_{M,w}$ accetta z se M accetta w.

     Si consideri la funzione f, calcolabile, che a una stringa della forma $\langle M, w\rangle$, dove M è una macchina di Turing deterministica e w è una stringa w, associa la stringa $\langle U_{M,w}\rangle$ (e a stringhe che non sono della forma $\langle M, w\rangle$ associa una stringa che non è la codifica di una macchina di Turing). Provare o confutare che f è una riduzione da A_{TM} a $REGULAR_{TM}$.

4. *(15 punti)*

   - Dare la definizione di macchina di Turing non deterministica.
   - Si consideri la macchina di Turing non deterministica $N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, con $Q = \{q_0, q_1, q_{accept}, q_{reject}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$ e δ definita come segue.

stato attuale	simbolo letto	Valore funzione δ
q_0	a	$\{(q_0, a, R)\}$
q_0	b	$\{(q_0, b, R), (q_1, b, R), (q_{reject}, b, R)\}$
q_0	$\sqcup$	$\{(q_{reject}, b, R)\}$
q_1	$\sqcup$	$\{(q_{accept}, b, R)\}$
q_1	a	$\{(q_{reject}, b, R)\}$
q_1	b	$\{(q_{reject}, b, R)\}$

– Descrivere l'albero delle computazioni di N sull'input bab.
– Dire se tale bab appartiene al linguaggio riconosciuto da N.
– Definire la complessità temporale di N.

Giustificare le risposte, risposte non giustificate non sono valutate.

5. *(15 punti)*

- Definire la classe di complessità P.
- Definire la classe di complessità NP.
- Dimostrare le seguenti relazioni tra le classi

$$P \subseteq NP \subseteq EXPTIME = \bigcup_k TIME(2^{n^k})$$

Occorre enunciare con precisione gli eventuali risultati intermedi utilizzati.

6. *(15 punti)*

- Dare la definizione di riduzione polinomiale.
- Dare la definizione di linguaggio NP-completo.
- Siano A, B linguaggi tali che $A \leq_P B$.
Sotto quali ipotesi è possibile affermare con certezza che B è NP-completo?
Enunciare e dimostrare, formalmente e con precisione, il relativo teorema.

7.
- Enunciare il pumping lemma.
- Date due stringhe x, y, la stringa y è una sottostringa di x se esistono stringhe w, z tali che $x = wyz$.
Provare che $L = \{xby \mid x, y \in \{a\}^* \text{ e } y \text{ è una sottostringa di } x\}$ non è regolare.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2014-2015
Prova Scritta - 11 Settembre 2015

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Mercoledì 16 settembre ore 11 - Stecca 7, IV Piano, Studio 49

1. *(15 punti)*

   Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio definito dall'espressione regolare $E = ab^* \cup abba^*$ (cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(E)$.

2. *(15 punti)*

   Dare la definizione di espressione regolare, indicando con precisione il corrispondente linguaggio rappresentato.

   Definire un'espressione regolare che denoti il linguaggio

   $$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ha almeno un'occorrenza di } a \text{ termina per } b\}.$$

3. *(15 punti)*

   Enunciare il teorema di Rice.

   Utilizzare il teorema di Rice per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile (MdT è l'acronimo di "Macchina di Turing").

   $$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una MdT}, L(M) = X^*, X \text{ è un linguaggio regolare}\}.$$

4. *(15 punti)*

   Sia L un linguaggio Turing riconoscibile ma non decidibile. Sia

   $$X = \{0w \mid w \in L\}.$$

   Dimostrare o confutare (mediante dimostrazione) ciascuna delle seguenti affermazioni. Occorre fornire enunciati dei risultati intermedi utilizzati e definizioni dei concetti utilizzati.

   - X è un linguaggio Turing riconoscibile
   - X è un linguaggio co-Turing riconoscibile
   - X è un linguaggio decidibile

5. *(15 punti)*

- Definire la classe di complessità NP.
- Dare la definizione di riduzione polinomiale.
- Siano A, B linguaggi tali che $A \leq_P B$. Se A è in NP possiamo concludere che B è in NP? Giustificare la risposta, risposte non giustificate non saranno valutate.

6. *(15 punti)*

7. *(15 punti)*

   Definire i linguaggi 3-SAT e $SUBSET$-SUM

   Data la seguente istanza di 3-SAT

   $$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

   si descriva l'istanza di $SUBSET$-SUM nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $SUBSET$-SUM.

8. Sia k un intero maggiore di 2 e siano $L_1, \ldots, L_k$ linguaggi tali che

   Ogni linguaggio L_j è Turing riconoscibile, $1 \leq j \leq k$,
   I linguaggi sono a due a due disgiunti, cioè $L_i \cap L_j = \emptyset$, per $i \neq j$
   Ogni stringa è in un linguaggio L_j, cioè $\cup_{i=1}^{k} L_i = \Sigma^*$

   Dimostrare che ogni linguaggio L_j è decidibile, $1 \leq j \leq k$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2015-2016
Prova Scritta - 25 febbraio 2016	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Risultati prova scritta ed esami orali:
Lunedì 29 febbraio, ore 12, IV piano, Stecca VII, Studio N. 49.

1. *(15 punti)*
   Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ ha il carattere b solo nelle posizioni pari$\}$. Ad esempio $abaa \in L$, $abab \in L$, $ba \notin L$. Definire un automa finito deterministico $\mathcal{A}$ che riconosca L, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L$.
2. *(15 punti)*
   Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ ha il carattere b solo nelle posizioni pari$\}$. Ad esempio $abaa \in L$, $abab \in L$, $ba \notin L$. Definire un'espressione regolare che descriva L.
3. *(15 punti)*
   (a) Definire il linguaggio A_{TM}.
   (b) Provare che A_{TM} è indecidibile.
4. *(15 punti)*
   Enunciare il teorema di Rice e utilizzarlo per dimostrare che il linguaggio
   $$ALL_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una macchina di Turing ed } L(M) = \Sigma^*\}$$
   è indecidibile.
5. *(15 punti)*
   (a) Fornire le definizioni di riduzione polinomiale e di linguaggio NP-completo.
   (b) Dimostrare che se X è un linguaggio NP-completo, $Y \in NP$ e $X \leq_P Y$, allora Y è NP-completo.
6. *(15 punti)*
   Si consideri la funzione $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ definita come segue:
   $$f(w) = \begin{cases} ab & \text{se } w = \langle\phi\rangle \text{ e } \phi \text{ è un'espressione booleana soddisfacibile,} \\ a & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
   Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta. Risposte non motivate non saranno valutate.
   (a) Esiste una macchina di Turing che calcola f? Possiamo dedurne che $SAT \leq_m \{ab\}$?
   (b) Esiste una macchina di Turing che calcola f in tempo polinomiale?
7. Sia Σ un alfabeto. Si considerino i seguenti linguaggi:
   $$TOTAL = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è un decider}\},$$
   $$ALL_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una macchina di Turing ed } L(M) = \Sigma^*\}.$$
   Provare formalmente e con precisione che $TOTAL \leq_m ALL_{TM}$.