Limiti Notevoli: Tabella

funzioni goniometriche	
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} nx} = \frac{m}{n}$	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(\arccos x)^2}{1-x} = 2$
funzioni esponenziali e logaritmiche	
$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \log_a e$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln (1+x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^k-1}{x} = k$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \qquad (a>1)$
$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{1+a^x} = \begin{cases} 1 & se\ a<1 \\ \frac{1}{2} & se\ a=1 \\ 0 & se\ a>1 \end{cases}$

Derivate

derivate delle funzioni elementari	
$D\ k = 0$ dove k è una costante	$D\ senx = cosx$
$D\ x^n = n\ x^{n-1}$	$D\ cosx = -\ senx$
$D\ \frac{1}{x^n} = Dx^{-n} = -\ n\ x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$D\ tgx = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$
$D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$D\ cotgx = -\frac{1}{sen^2x} = -1 - cotg^2x$
$D\ \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\ arcsenx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\ log_a\,x = \frac{1}{x} log_a\,e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{lna}$	$D\ arccosx = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$D\ln x = \frac{1}{x}$	$D\ arctgx = \frac{1}{1+x^2}$
$D\ a^x = a^x\ ln\,a = a^x\cdot\frac{1}{log_a\,e}$	$D\ arccotgx = -\frac{1}{1+x^2}$
$D\ e^x = e^x$	$D\ \lvert x\rvert = \frac{x}{\lvert x\rvert} = \frac{\lvert x\rvert}{x}$

regole di derivazione	
$D\ k\cdot f(x) = k\cdot f'(x)$	prodotto di una **costante** k per una funzione
$D\ f(x) \pm g(x) \pm h(x) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$	**somma** di due o più funzioni
$D\ f(x)\cdot g(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	**prodotto** di due funzioni
$D\ f(x)\cdot g(x)\cdot h(x) = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$	**prodotto** di tre funzioni
$D\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$	**rapporto** di due funzioni
$Df[g(x)] = f'[g(x)]\cdot g'(x)$	funzione **composta**
$Df(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot ln[f(x)] + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$	funzione **elevata** ad una funzione

Derivate

esempi di derivate di alcune funzioni elementari

$\boldsymbol{D\, k = 0}$	$D\ 5 = 0$	$D\ \pi = 0$	$D\ 0 = 0$	$D\ \log_2 5 = 0$
$\boldsymbol{D\, x^n = n\, x^{n-1}}$	$D\, x = 1$	$D\, x^7 = 7\, x^6$	$D\, x^{-2} = -2\, x^{-3}$	$D\ x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}$
$\boldsymbol{D \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}}$	$D\ \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^{3-1}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$		$D\ \sqrt[8]{x} = \frac{1}{8\sqrt[8]{x^{8-1}}} = \frac{1}{8\sqrt[8]{x^7}}$	
$\boldsymbol{D\, log_a x = \frac{1}{x} log_a e}$	$D\, log_3 x = \frac{1}{x}\, log_3 e = \frac{1}{x}\, \frac{1}{ln\, 3}$		$D\ log_{\frac{1}{5}} x = \frac{1}{x}\, log_{\frac{1}{5}} e = \frac{1}{x}\, \frac{1}{ln\frac{1}{5}}$	
$\boldsymbol{D\, a^x = a^x\, ln\, a}$	$D\, 2^x = 2^x\, ln\, 2$		$D\, 2012^x = 2012^x\, ln2012$	

esempi di derivate con le regole di derivazione

Derivata del prodotto di una costante k per una funzione $\boldsymbol{D\, k \cdot f(x) = k \cdot f'(x)}$

$D\,(5\, x^2) = 5 \cdot D\,(x^2) = 5 \cdot (2\, x\,) = 10\, x$

$D\left(\frac{7}{3} senx\right) = \frac{7}{3} \cdot D(\, senx\,) = \frac{7}{3} \cdot cosx$

Derivata della somma di due o più funzioni $\boldsymbol{D\, f(x) \pm g(x) \pm h(x) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)}$

$D(\, 7\, log_{10} x + 3x + 4\,) = \frac{1}{x} \cdot \frac{7}{ln10} + 3$

$D(\, 5x^3 - tgx + x\,) = 15\, x^2 - \frac{1}{cos^2 x} + 1$

Derivata del prodotto di due funzioni $\boldsymbol{D\, f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$

$D\,(\, x^2\, tgx\,) = 2x \cdot tgx + x^2 \cdot \frac{1}{cos^2 x}$

$D\,(\, 7lnx \cdot e^x\,) = 7\, \frac{1}{x} \cdot e^x + 7lnx \cdot e^x = 7e^x \left(\frac{1}{x} + lnx\right)$

Derivata del rapporto di due funzioni $\boldsymbol{D\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$

$D\left(\frac{2+x}{3x}\right) = \frac{(1) \cdot 3x - (2+x) \cdot 3}{(3x)^2} = \frac{3x - 3(2+x)}{(3x)^2} = \frac{x - 2 - x}{3x^2} = -\frac{2}{3\, x^2}$

Derivata di una funzione composta $\boldsymbol{Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)}$

$D\left(\sqrt{senx}\right) = \frac{1}{2\sqrt{senx}} \cdot cosx$

$D\left(sen\sqrt{x}\right) = cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$D\,(sen^2 x\,) = (2\, senx) \cdot cosx = 2\, senx\, cosx$

$D\,(\, sen\, x^2\,) = (\cos x^2) \cdot 2x = 2\, x \cos x^2$

Derivata di una funzione elevata ad una funzione $\boldsymbol{Df(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot lnf(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]}$

$D\,(\, x^{cosx}\,) = x^{cosx} \cdot \left[-senx \cdot ln(x) + cosx \cdot \frac{1}{x}\right]$

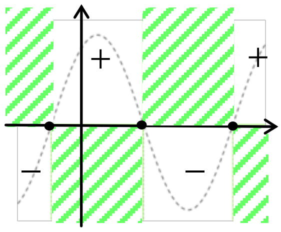
$D\,(\,(senx)^x\,) = (senx)^x \cdot \left[1 \cdot ln(senx) + x \cdot \frac{cosx}{senx}\right]$

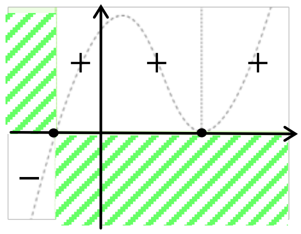
Studio del grafico di una funzione

1 ricerca del dominio (o campo di esistenza) della funzione

$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad g(x) \neq 0$	$y = [f(x)]^{\alpha}$ *α frazione positiva o irrazionale positivo* $\quad f(x) \geq 0$	$y = ctg\, f(x)$ $\quad f(x) \neq k\pi$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$ *n pari* $\quad f(x) \geq 0$	$y = [f(x)]^{\alpha}$ *α frazione negativa o irrazionale negativo* $\quad f(x) > 0$	$y = arcsen\, f(x)$ $\quad -1 \leq f(x) \leq 1$
$y = log_a\, f(x)$ $\quad f(x) > 0$	$y = f(x)^{g(x)}$ $\quad f(x) > 0$	$y = arccos\, f(x)$ $\quad -1 \leq f(x) \leq 1$
$y = log_{g(x)}\, f(x)$ $\quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$	$y = tg\, f(x)$ $\quad f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$	Le funzioni che non compaiono in questa tabella (ad esclusione di quelle iperboliche) sono definite $\forall\, x \in \mathcal{R}$

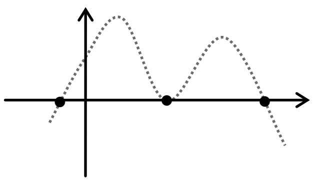
2 studio del segno della funzione





- si pone la funzione maggiore di zero
- si risolve la disequazione $f(x) > 0$
- si individuano le regioni di piano dove la funzione è positiva (+) o negativa (−) all'interno del dominio
- si cancellano le regioni di piano dove la funzione **non** esiste

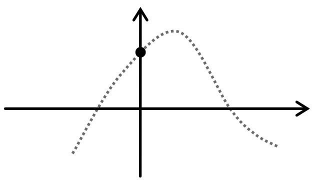
3 studio delle intersezioni della funzione con gli assi cartesiani



$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{f(x) = 0}$$

intersezioni con l'asse x o zeri della funzione:

- si pone la funzione uguale a zero, si risolve l'equazione
- le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione



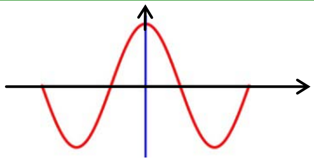
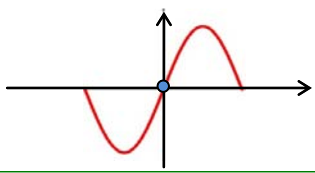
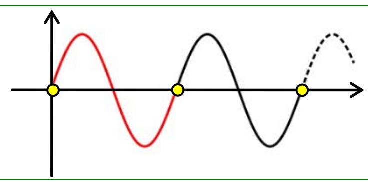
$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{y = f(0)}$$

intersezione con l'asse y (solo se il dominio lo consente):

- si sostituisce 0 alla x nella funzione
- si svolgono i calcoli e si ottiene l'ordinata del punto di intersezione con l'asse delle y

gli eventuali punti di intersezione della funzione con l'asse x si possono anche dedurre osservando il grafico dello studio del segno. Se il dominio lo consente, due zone di segno opposto sono separate da un punto di intersezione della funzione con l'asse x; due zone dello stesso segno individuano invece un punto di contatto della funzione con l'asse x

4 studio delle simmetrie e della periodicità di una funzione

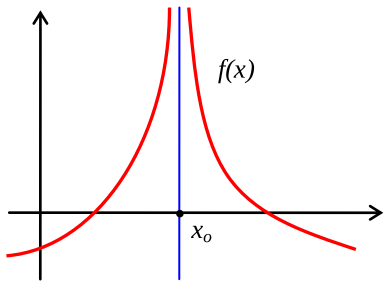
una funzione simmetrica rispetto all'asse delle y si dice **pari**	una funzione simmetrica rispetto all'origine degli assi si dice **dispari**	una funzione che ripete periodicamente la forma si dice **periodica**
		
• si sostituisce x con − x • si sviluppano i calcoli • se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$ • la funzione è pari	• si sostituisce x con − x • si sviluppano i calcoli e si raccoglie il "−" • se $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$ • la funzione è dispari	• si pone $\boldsymbol{f(x + T) = f(x)}$ • si risolve l'equazione ottenuta nell'incognita T • il valore trovato di T è il periodo della funzione

lo studio delle simmetrie si effettua **solo se** il dominio e il segno sono a loro volta entrambi simmetrici

Studio del grafico di una funzione

5 ricerca degli asintoti di una funzione

asintoto verticale $x = x_0$



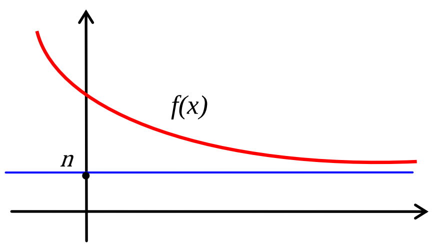
dove si cerca:

- nei punti x_0 di discontinuità della funzione
- nei punti agli estremi del dominio di $f(x)$ se sono finiti e non appartenenti al dominio stesso

come si cerca:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} n \text{ finito} & \to \text{ l'asintoto Non Esiste} \\ \pm\infty & \to \text{ Esiste} \to x = x_0 \end{cases}$$

asintoto orizzontale $y = n$



dove si cerca:

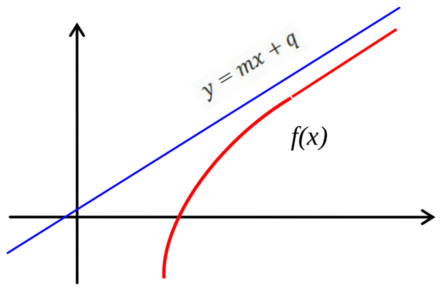
- a $\pm\infty$ se il dominio lo consente

come si cerca:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \to \text{ l'asintoto Non Esiste} \\ n \text{ finito} & \to \text{ Esiste} \to y = n \end{cases}$$

- solo se l'asintoto orizzontale non esiste, si cerca l'asintoto obliquo

asintoto obliquo $y = mx + q$



dove si cerca:

- a $\pm\infty$ se il dominio lo consente e se non esiste già l'asintoto orizzontale

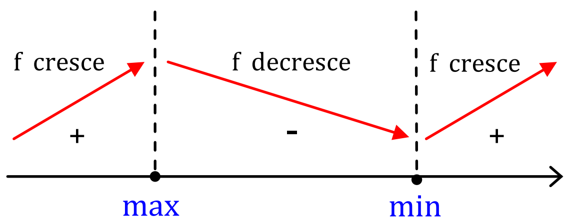
come si cerca:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} = \begin{cases} \pm\infty & \to \text{ l'asintoto Non Esiste} \\ 0 & \to \text{ l'asintoto Non Esiste} \\ m \text{ finito} & \to \text{ si cerca } q \end{cases}$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \begin{cases} \pm\infty & \to \text{ l'asintoto Non Esiste} \\ q \text{ finito} & \to \text{ Esiste} \to y = mx + q \end{cases}$$

6 studio della monotonia di $f(x)$ e ricerca dei massimi e minimi relativi

monotonia



$f'(x) > 0$

- si calcola la derivata prima di $f(x)$ e la si pone maggiore di 0
- si risolve la disequazione $f'(x) > 0$
- si individuano le regioni di piano dove:

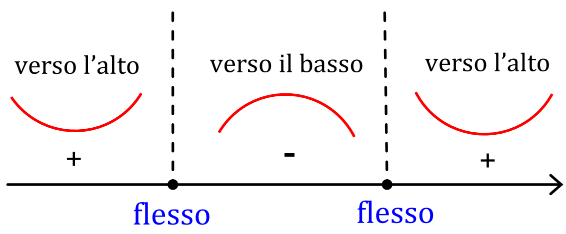
  $f'(x) > 0 \to f(x)$ è crescente ↗

  $f'(x) < 0 \to f(x)$ è decrescente ↘

- osservando il grafico della crescenza e decrescenza si individuano i punti di massimo e di minimo. Essi vanno considerati **solo se** appartengono al dominio della funzione

7 studio della concavità e ricerca dei flessi di una funzione

concavità



$f''(x) > 0$

- si calcola la derivata seconda di $f(x)$ e la si pone maggiore di 0
- si risolve la disequazione $f''(x) > 0$
- si individuano le regioni di piano dove:

  $f''(x) > 0 \to f(x)$ è concava verso l'alto ∪

  $f''(x) < 0 \to f(x)$ è concava verso il basso ∩

- osservando il grafico della concavità si possono individuare i punti di flesso. Essi vanno considerati **solo se** appartengono al dominio della funzione

Per ottenere una maggiore precisione nel disegno del grafico si possono calcolare le coordinate di alcuni suoi punti attribuendo alla x valori arbitrari (appartenenti al dominio) nel testo della funzione $y = f(x)$ e calcolando le rispettive y

ASINTOTI CURVILINEI

ASINTOTI RETTILINEI

Una funzione algebrica o trascendente y=f(x) ha un asintoto obliquo quando sono finiti i limiti

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \\ \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx\right] = q \end{cases}$$

E l'equazione dell'asintoto è

$$y=mx+q$$

Per le funzioni algebriche razionali fratte (cioè quelle costituite dal rapporto fra due polinomi), ciò significa che una funzione del tipo $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (con il numeratore di grado n ed il denominatore di grado d) ammette l'esistenza di un asintoto obliquo quando n-d=1, cioè quando il numeratore è un polinomio di un grado superiore al grado del polinomio a denominatore.

Fin qui la teoria degli asintoti che è generalmente nota a tutti.

Vediamo ora cosa avviene se una funzione algebrica razionale fratta $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ha il numeratore di 2, 3 o più gradi superiore al grado del denominatore, cioè se n-d=2, n-d=3 ecc.

ASINTOTI PARABOLICI

Nel caso in cui n-d=2 si ha (con evidente generalizzazione del criterio precedente)

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = a \\ \lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} - ax\right] = b \\ \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - ax^2 - bx\right] = c \end{cases}$$

e l'asintoto è una parabola con equazione

$$y=ax^2+bx+c$$

ASINTOTI CUBICI

Nel caso in cui sia invece n-d=3 si ha in modo analogo

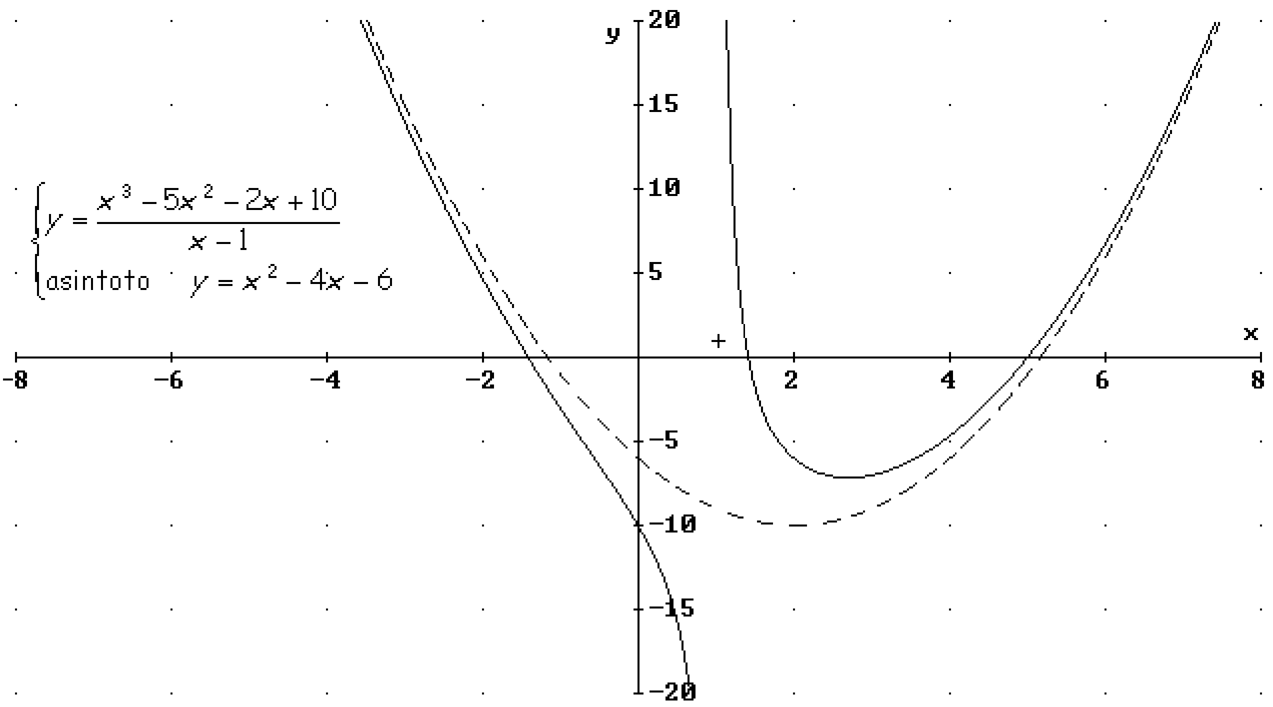
$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = a \\ \lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x^2} - ax\right] = b \\ \lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} - ax^2 - bx\right] = c \\ \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - ax^3 - bx^2 - cx\right] = d \end{cases}$$

e l'asintoto è una cubica di equazione

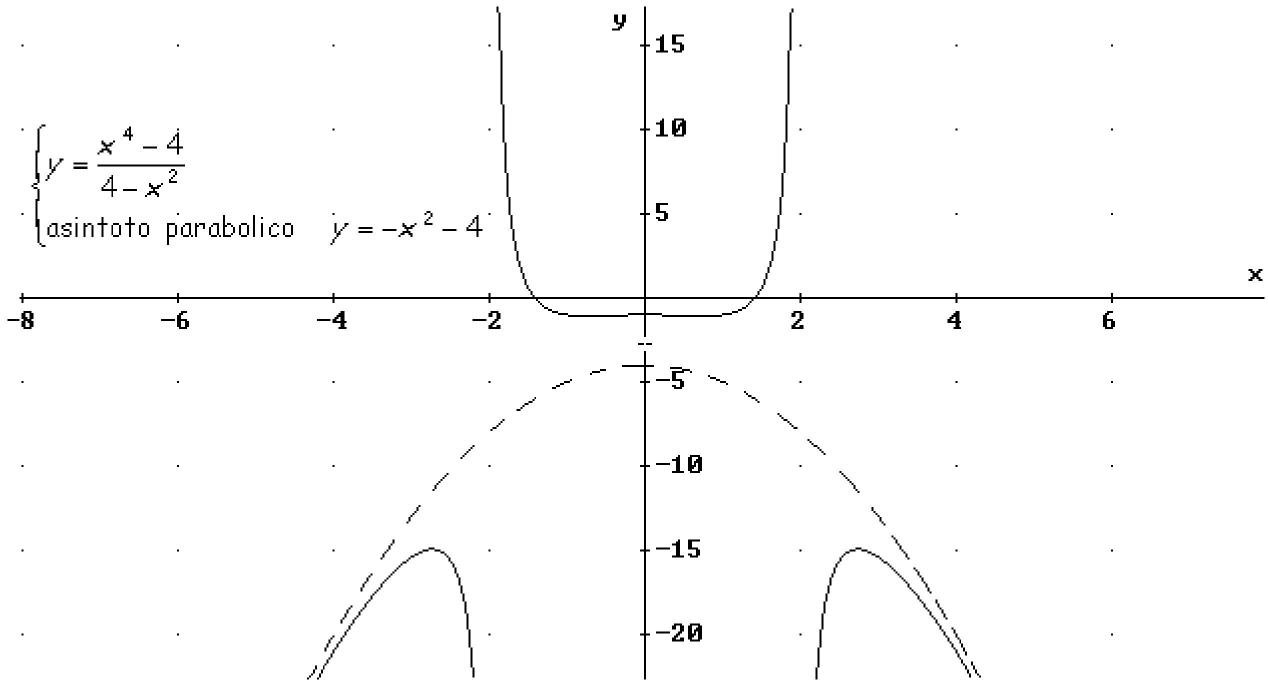
$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

e così via per valori maggiori di n-d.

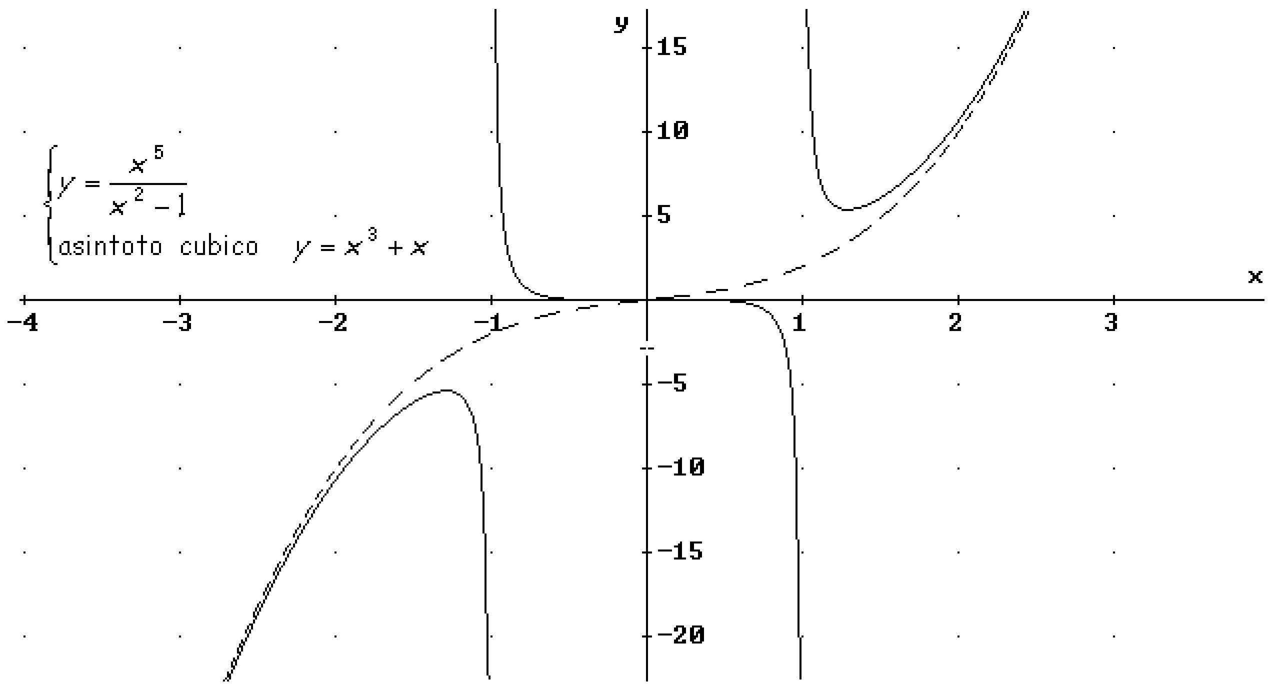
ESEMPIO n.1



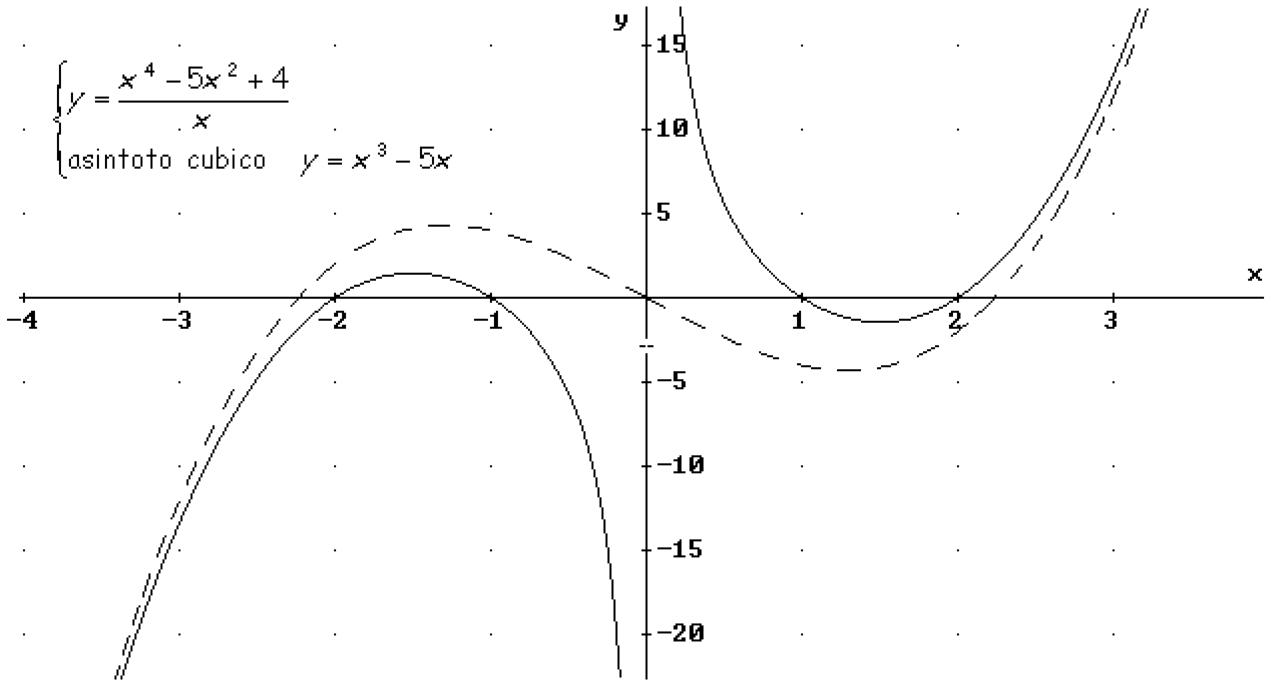
ESEMPIO n.2



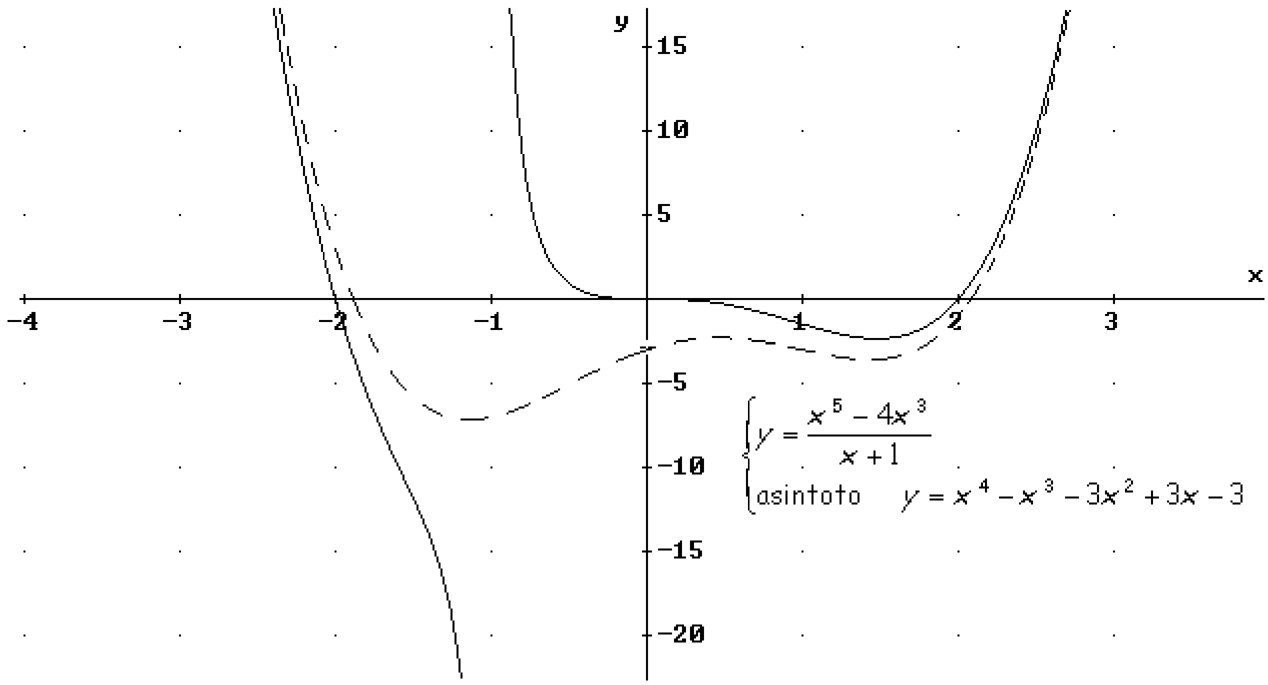
ESEMPIO n.3



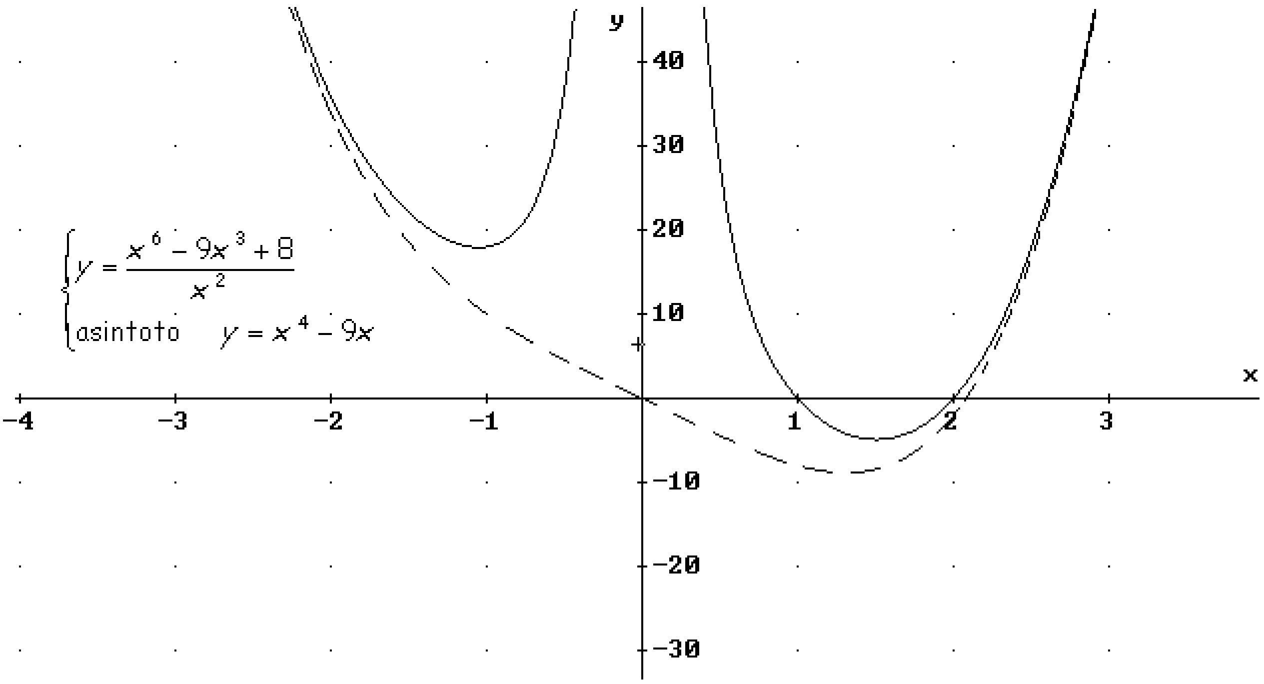
ESEMPIO n.4



ESEMPIO n.5



ESEMPIO n.6



Integrali indefiniti

immediati	immediati generalizzati
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = ln\|x\| + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln\|f(x)\| + c$
$\int a^x dx = a^x \, lg_a e + c$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = a^{f(x)} \, lg_a e + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
$\int senx \, dx = -cosx + c$	$\int senf(x) \cdot f'(x) dx = -\cos f(x) + c$
$\int cosx \, dx = senx + c$	$\int \cos f(x) \cdot f'(x) dx = sen \, f(x) + c$
$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tgx + c$	$\int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)} dx = tg \, f(x) + c$
$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -cotgx + c$	$\int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)} dx = -cotg \, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc \, senx + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = arc \, sen \, f(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = arc \, sen \, \frac{x}{\|a\|} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-f(x)^2}} dx = arc \, sen \, \frac{f(x)}{\|a\|} + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = arctg \, f(x) + c$

in generale
$\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = F[g(x)] + c$

regole di integrazione	
$\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx$	prodotto di una costante k per una funzione
$\int f(x) \pm g(x) \pm h(x) dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx \pm \int h(x) \, dx$	somma di due o più funzioni
$\int f(x) \cdot g(x) \, dx = F(x) g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) \, dx$	integrazione per parti

altri metodi di integrazione
• integrazione per sostituzione • integrazione delle funzioni razionali fratte • integrazione per serie