Elementi di teoria della Computazione I (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2010-2011
Prova Scritta - 8 Giugno 2011	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario orali: Mercoledì 15 GIUGNO, ore 14 - aula P/8

1. *(15 punti)*
   Sia $L = \{a^i b^j \in \{a,b\}^* \mid \exists k \geq 0 : \ i + j = 2k\}$. Ad esempio, $ab, aabb \in L$, $abb \notin L$. Definire un automa deterministico A il cui linguaggio riconosciuto sia L, cioè $L(A) = L$. Lo stato "pozzo" può essere omesso.

2. *(15 punti)*
   I seguenti linguaggi sono indecidibili? Giustificare le risposte (cioè in caso affermativo esibire una macchina di Turing che decida il linguaggio, in caso negativo esporre l'argomento che fornisce risposta negativa). Risposte non giustificate non saranno valutate.
   (a) $\{\langle M\rangle \mid M$ è una macchina di Turing deterministica e $|L(M)| = 2\}$
   (b) $\{\langle M\rangle \mid M$ è una macchina di Turing deterministica e $L(M) = L(M)^R\}$, dove $L(M)^R = \{w^R \mid w \in L(M)\}$ è il linguaggio delle stringhe che sono l'inversione delle stringhe in $L(M)$. Si ricorda che se $w = a_1 \cdots a_n$, con a_j lettere, allora $w^R = a_n \ldots a_1$.

3. *(15 punti)*
   Un sottoinsieme D di vertici di un grafo non orientato $G = (V, E)$ è un insieme dominante se ogni vertice in $V \setminus D$ è adiacente a un vertice in D. Consideriamo:
   $DOMINATING\text{-}SET = \{\langle G, k\rangle \mid G$ è un grafo non orientato e G ha un insieme dominante D con $|D| = k\}$
   (a) Dare un esempio di un grafo G e di un sottoinsieme D di vertici di G tale che D è un insieme dominante ma D non è un vertex cover in G.
   (b) Provare che $DOMINATING\text{-}SET$ è NP-completo. Si può assumere che $VC = \{\langle G, k\rangle \mid G = (V, E)$ è un grafo non orientato, $0 < k \leq |V|$ e G ha un vertex cover di cardinalità $k\}$ è NP-completo.

   Suggerimento: Definire una riduzione polinomiale di VC a $DOMINATING\text{-}SET$. Dato $G = (V, E)$, considerare il grafo $G' = (V', E')$ ottenuto a partire da G nel modo seguente: per ogni arco (u, v) in G aggiungere un nuovo vertice e due archi in modo da formare un triangolo con (u, v). Per ogni vertice isolato x aggiungere due archi in modo da formare un triangolo con un arco in G.

4. *(15 punti)*
   (a) Definire il linguaggio A_{TM}.
   (b) Provare che A_{TM} è indecidibile.

5. *(15 punti)*
   Definire le classi di complessità P, NP, $EXPTIME$ e la classe dei linguaggi NP-completi. Discutere la possibilità di ordinare queste classi rispetto alla relazione di inclusione insiemistica.

6. *(15 punti)*
   Dare le definizioni di:
   - Automa finito deterministico.
   - estensione della funzione di transizione di un automa finito deterministico.
   - linguaggio riconosciuto da un automa finito deterministico.
   - Automa finito non deterministico.

Elementi di teoria della Computazione I (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2010-2011
Prova Scritta - 23 Giugno 2011	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario orali: Lunedì 4 LUGLIO, ore 14 - aula F/5

1. *(15 punti)*

   Indicare quali tra i seguenti linguaggi sono regolari.

   (1) $\{a^n b^{2m} \mid n, m \geq 0\}$,

   (2) $\{a^n b^m \mid n, m \geq 0,\ n = 2m\}$,

   (3) $\{a^n b^n \mid 0 \leq n < 50\}$.

   Giustificare le risposte (cioè in caso affermativo esibire un automa o una espressione regolare per il linguaggio, in caso negativo esporre l'argomento che fornisce risposta negativa). Risposte non giustificate non saranno valutate.

2. *(15 punti)*

   Definire una macchina di Turing deterministica che decida il linguaggio $L = \{a^n b^k a^n \mid n \geq 0,\ k > 0\}$.

3. *(15 punti)*

   Dimostrare che il linguaggio

   $$\{\langle M, N\rangle \mid M, N \text{ sono macchine di Turing deterministiche e } L(M) \cap L(N) \text{ è finito}\}$$

   è indecidibile.

4. *(15 punti)* 11/6/14

   Due grafi non orientati $H = (V, E)$, $G' = (V', E')$ sono isomorfi se $|V| = |V'|$ ed esiste una biezione $g : V \to V'$ tale che $(u, v) \in E$ se e solo se $(g(u), g(v)) \in E'$. Intuitivamente H e G' sono isomorfi se H e G' coincidono a meno di una ridenominazione dei vertici. Sia:

   $SUBGRAPH\text{-}IS = \{\langle G, H\rangle \mid G$ è un grafo non orientato e G contiene un sottografo G' isomorfo ad $H\}$.

   Assumendo che $SUBGRAPH\text{-}IS \in NP$, provare che $SUBGRAPH\text{-}IS$ è NP-completo.

   Suggerimento: provare che $CLIQUE \leq_P SUBGRAPH$.

5. *(15 punti)*

   (a) Dare la definizione di riduzione

   (b) Dare la definizione di riduzione polinomiale

   (c) Siano L_1, L_2, L_3. Provare che se L_1 è polinomialmente riducibile ad L_2 e se L_2 è polinomialmente ruducibile ad L_3 allora L_1 è polinomialmente riducibile ad L_3.

6. *(15 punti)*

   Dimostrare che per ogni automa finito non deterministico $\mathcal{A}_N$ esiste un automa finito deterministico $\mathcal{A}_D$ tale che $\mathcal{A}_N$ e $\mathcal{A}_D$ riconoscono lo stesso linguaggio.

Elementi di teoria della Computazione I (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2010-2011
Prova Scritta - 8 Luglio 2011	

Nome e Cognome, email:

Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario orali: Lunedì 12 LUGLIO, ore 14 - aula F/4

1. *(15 punti)*

   Indicare quali tra i seguenti linguaggi sono regolari.

   (1) $L_1 = \{xcx \mid x \in \{a,b\}^*\}$,

   (2) $L_2 = \{xcy \mid x, y \in \{a,b\}^*\}$,

   Giustificare le risposte (cioè in caso affermativo esibire un automa o una espressione regolare per il linguaggio, in caso negativo esporre l'argomento che fornisce risposta negativa). Risposte non giustificate non saranno valutate.

2. *(15 punti)*

   Definire una macchina di Turing deterministica M che calcoli la funzione $f(x) = 4x$, con x intero non negativo. Si assuma che l'input sia la rappresentazione binaria di x e si definisca M in modo che l'output sia la rappresentazione binaria di $4x$. Per esempio se $x = 6$, l'input sarà 110 e M dovrà fermarsi con 11000 sul nastro, poichè $24 = 4 \times 6$. Non ci sono vincoli sulla posizione della testina all'arresto. Fornire il diagramma di M e giustificare la soluzione data.

3. *(15 punti)*

   Provare che per ogni linguaggio decidibile A risulta $A \leq_m \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. Chiarire dove interviene l'ipotesi che A sia decidibile.

4. *(15 punti)*

   Una formula booleana ϕ è monotona se ϕ è una variabile oppure ϕ si ottiene da due formule booleane monotone ϕ_1, ϕ_2, applicando l'operazione AND oppure OR, cioè $\phi = (\phi_1 \vee \phi_2)$ oppure $\phi = (\phi_1 \wedge \phi_2)$.

   (1) Definire il linguaggio $SAT\text{-}MON$ associato al problema della soddisfacibilità per le formule booleane monotone.

   (2) Stabilire se $SAT\text{-}MON$ appartiene alla classe P, giustificando la risposta.

   (3) Stabilire se $SAT\text{-}MON$ appartiene alla classe NP, giustificando la risposta.

5. *(15 punti)*

   Definire l'operazione star di un linguaggio e provare la chiusura dei linguaggi regolari rispetto a tale operazione.

6. *(15 punti)*

   Provare che un linguaggio L è decidibile se e solo se L e il suo complemento sono entrambi Turing riconoscibili. Utilizzando tale risultato provare l'esistenza di un linguaggio che non è Turing riconoscibile.

Elementi di teoria della Computazione I (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2010-2011
Prova Scritta - 19 Settembre 2011	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario orali: Venerdì 23 SETTEMBRE, ore 14 - aula P/5

1. *(15 punti)*
   Sia $L \subset \{a,b\}^*$ un linguaggio decidibile e sia $M = (Q, \{a,b\}, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ una macchina di Turing deterministica a un nastro che decide L. Definire una macchina di Turing deterministica M' a un nastro che decida il linguaggio $L' = \{aw \mid aw \in L\}$. È necessario fornire la definizione di ogni elemento della settupla che costituisce la macchina M'. Risposte incomplete non saranno valutate.

2. *(15 punti)*
   Definire un'espressione regolare E che denoti il linguaggio $L(A)$ riconosciuto dall'automa non deterministico $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, dove $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $F = \{q_2\}$ e δ è descritta dalla tabella riportata di seguito (cioè definire un'espressione regolare E tale che $L(E) = L(A)$).

	a	b	c
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$

3. *(15 punti)*
   Per un linguaggio $L \subset \Sigma^*$, denotiamo con $\overline{L} = \Sigma^* - L = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$ il complemento di L. Dimostrare che se L oppure $\overline{L}$ è un linguaggio finito allora L e $\overline{L}$ sono linguaggi decidibili.

4. *(15 punti)*
   Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato. Un ciclo semplice in G è un cammino $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ contenente almeno un arco, in cui $v_0 = v_k$ e i nodi $v_1, \ldots, v_k$ sono distinti. La lunghezza del ciclo $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ è k. Un ciclo Hamiltoniano è un ciclo $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tale che $(v_1, \ldots, v_k)$ è un cammino Hamiltoniano in G. Consideriamo

$$LCYCLE = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ contiene un ciclo semplice di lunghezza almeno } k\}.$$

   Assumendo che $LCYCLE$ è in P, provare che $LCYCLE$ è NP-completo. Si può inoltre assumere che

$$HAMCYCLE = \{\langle G\rangle \mid G \text{ contiene un ciclo Hamiltoniano}\}$$

   è NP-completo.

5. *(15 punti)*
   Enunciare il pumping lemma per i linguaggi regolari.

6. *(15 punti)*
   - Dare la definizione di macchina di Turing deterministica a nastro singolo.
   - Dare la definizione di macchina di Turing deterministica multinastro.
   - Provare che per ogni macchina di Turing multinastro M esiste una macchina di Turing a nastro singolo M' equivalente ad M, cioè tale che $L(M) = L(M')$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	**Anno Acc. 2010-2011**
Prova Scritta - 11 Novembre 2011	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Lunedì 14 Novembre, ore 14

1. *(15 punti)*

   Siano $x, y \in \Sigma^*$. Diciamo che y è fattore di x se esistono $z, z' \in \Sigma^*$ tali che $x = zyz'$. Si consideri

   $$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ non ha come fattore } ba\}.$$

   Ad esempio, $aba \notin L$, $ab, abb \in L$. Definire un automa deterministico A il cui linguaggio riconosciuto sia L, cioè $L(A) = L$. Occorre precisare ogni elemento della quintupla che definisce A.

2. *(15 punti)* (vedi 23/6/11)

   Dimostrare che il linguaggio

   $$\{\langle M, N\rangle \mid M, N \text{ sono macchine di Turing deterministiche e } L(M) \cup L(N) \text{ è finito}\}$$

   è indecidibile.

3. *(15 punti)*

   Provare che la classe P è chiusa rispetto all'unione, intersezione e prodotto.

4. *(15 punti)*

   (a) Definire il linguaggio 3-SAT.

   (b) Definire il linguaggio $CLIQUE$.

   (c) Dare la definizione di riduzione in tempo polinomiale di A a B, dove A e B sono linguaggi.

   (c) Provare che 3-SAT è riducibile in tempo polinomiale a $CLIQUE$.

5. *(15 punti)*

   Dare le definizioni di:

   - Linguaggio riconosciuto da una macchina di Turing.
   - Linguaggio Turing riconoscibile.
   - Linguaggio decidibile.

6. *(15 punti)*

   - Esistono linguaggi che non sono Turing riconoscibili e tali che ogni loro sottoinsieme non sia Turing riconoscibile? Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.
   - Dare un esempio di linguaggio decidibile tale che ogni suo sottoinsieme sia decidibile. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2010-2011
Prova Scritta - 18 Gennaio 2012	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Mercoledì 25 gennaio, ore 14 - aula P/8

1. *(15 punti)*

   Sia M un linguaggio su un alfabeto Σ e sia $L = \{w \in M \mid \exists x, y, z \in \Sigma^* : |x| = |y| = |z|, w = xyz\}$.

   - L è un linguaggio regolare?
   - Se M è un linguaggio regolare, L è un linguaggio regolare?

   Giustificare la risposta, cioè provare formalmente e con precisione che la risposta è positiva o negativa. Risposte non giustificate non saranno valutate.

2. *(15 punti)*

   Sia M un linguaggio su un alfabeto Σ e sia $L = \{w \in M \mid \exists v \in \Sigma^* : w = vvv\}$.

   L è un linguaggio regolare?

   Giustificare la risposta, cioè provare formalmente e con precisione che la risposta è positiva o negativa. Risposte non giustificate non saranno valutate.

3. *(15 punti)*

   Definire una macchina di Turing deterministica M che calcoli la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x\$0 & \text{se } x \text{ è pari} \\ x\$1 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

   dove x è un intero non negativo. Si assuma che l'input sia la rappresentazione binaria di x e si definisca M in modo che x sia rappresentato allo stesso modo nell'output. Per esempio se $x = 6$, l'input sarà 110 e M dovrà fermarsi con 110\$0 sul nastro. Non ci sono vincoli sulla posizione della testina all'arresto. Fornire il diagramma di M e giustificare la soluzione data.

4. *(15 punti)* 8/7/2011

   Provare che per ogni linguaggio decidibile A risulta $A \leq_m \{a^n b \mid n \geq 0\}$. Chiarire dove interviene l'ipotesi che A sia decidibile.

5. *(15 punti)*

   Dare la definizione delle classi P e NP e di problema NP−completo. Provare, formalmente e con precisione, che se esiste un linguaggio X tale che $X \in P$ e X è NP−completo allora $P = NP$.

6. *(15 punti)*

   Dare le definizioni di:

   - Linguaggio riconosciuto da una macchina di Turing.
   - Linguaggio Turing riconoscibile.
   - Linguaggio decidibile.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2010-2011
Prova Scritta - 23 Febbraio 2012	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Lunedì 27 febbraio, ore 15 - aula F/2

1. *(15 punti)*

   Sia $L \subset \{a,b\}^*$ un linguaggio decidibile e sia $M = (Q, \{a,b\}, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ una macchina di Turing deterministica a un nastro che decide L. Definire una macchina di Turing deterministica M' a due nastri che decida il linguaggio $L' = \{wcw^R \mid w \in L\}$. Si ricorda che w^R denota l'inversione (*reverse*) della stringa w: se $w = a_1 \cdots a_n$, con a_j lettere, allora $w^R = a_n \ldots a_1$. È necessario fornire la definizione di ogni elemento della settupla che costituisce la macchina M'. Risposte incomplete non saranno valutate.

2. *(15 punti)*

   Sia $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ è la rappresentazione binaria di un intero positivo multiplo di $4\}$.

   (a) Definire un'espressione regolare E che denoti L, cioè tale che $L(E) = L$.

   (b) Definire un automa finito deterministico A che riconosca L, cioè tale che $L(E) = L$.

3. *(15 punti)*

   Il linguaggio

   $$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una macchina di Turing deterministica ed } L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 2k+1, k \geq 0\}\}.$$

   è decidibile? Giustificare la risposta (cioè in caso affermativo esibire la descrizione ad alto livello di una macchina di Turing che decida il linguaggio, in caso negativo esporre l'argomento che fornisce risposta negativa). Risposte non giustificate non saranno valutate.

4. *(15 punti)*

   Sia L un linguaggio su un alfabeto Σ. Provare che se $L \leq_m \emptyset$ allora $L = \emptyset$.

5. *(15 punti)*

   Definire le classi P, NP e co-NP. Provare, formalmente e con precisione, che se $P = NP$ allora co-$NP = NP$.

6. *(15 punti)*

   Definire l'operazione di prodotto (o concatenazione) di due linguaggi. Provare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto al prodotto.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) Anno Acc. 2011-2012
Prova Scritta - 7 Giugno 2012

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Martedì 19 Giugno, ore 12, aula P/8

1. *(15 punti)* Utilizzare il pumping lemma per dimostrare che $\{wca^{|w|} \mid w \in \{a,b\}^*\}$ non è regolare.

2. *(15 punti)* Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.

   (a) La classe dei linguaggi decidibili è chiusa rispetto al complemento?

   (b) La classe dei linguaggi Turing riconoscibili è chiusa rispetto al complemento?

3. *(15 punti)* Si consideri il linguaggio

   $$REGULAR_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una } TM \text{ e } L(M) \text{ è regolare }\}$$

   Mostrare che $REGULAR_{TM}$ è indecidibile.

4. *(15 punti)* Provare che se $co-NP$ contiene un linguaggio NP-completo allora $NP = co-NP$.

5. *(15 punti)* Nella scuola XY è organizzata una gita scolastica. Gli studenti si sono suddivisi in gruppi: ogni studente appartiene a un solo gruppo e intende partecipare alla gita viaggiando nello stesso autobus con gli altri studenti del suo gruppo. Su ogni autobus possono viaggiare t studenti. Si consideri il problema di decisione:

   Gita-scolastica: Dato un insieme Z di gruppi di studenti, esiste un sottoinsieme di Z tale che il numero totale di studenti in tale sottoinsieme sia t?

   Definire il linguaggio $GITA$ corrispondente a tale problema e provare che $GITA$ è NP-completo.

   Si può assumere che $SUBSET-SUM = \{\langle S,t\rangle \mid \exists S' \subset S \text{ tale che } \sum_{s\in S'} s = t\}$, dove S è un insieme di interi positivi e t è un intero positivo, è NP-completo.

   Suggerimento: provare che $SUBSET-SUM \leq_P GITA$.

6. *(15 punti)* Provare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione di concatenazione (o prodotto).

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2011-2012

Prova Scritta - 21 Giugno 2012

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Martedì 26 Giugno, ore 12, aula P/8

1. *(15 punti)*
   Definire un automa deterministico A il cui linguaggio accettato sia
   $$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ non ha fattori in } \{000, 010\}\}$$

2. *(15 punti)*
   Si considerino i linguaggi
   $$ALL_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una macchina di Turing deterministica ed } L(M) = \Sigma^*\},$$
   $$L = \{\langle A, M \rangle \mid A \text{ è un DFA, } M \text{ è una macchina di Turing deterministica ed } L(A) \subset L(M)\}$$
   Mostrare che esiste una riduzione da ALL_{TM} a L.
   Si ricorda che "DFA" è un'abbreviazione di "automa finito deterministico".

3. *(15 punti)*
   Data la seguente istanza di 3-SAT
   $$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$$
   si descriva l'istanza di $SUBSET-SUM$ nella riduzione polinomiale di $3-SAT$ a $SUBSET-SUM$.

4. *(15 punti)*
   Sia $A \in P$, provare che per ogni B tale che $B \neq \emptyset$, $\overline{B} \neq \emptyset$, risulta $A \leq_P B$.

5. *(15 punti)*
   (a) Definire il linguaggio A_{TM}.
   (b) Provare che A_{TM} è indecidibile.

6. *(15 punti)*
   Dare le definizioni di:
   - Automa finito deterministico.
   - estensione della funzione di transizione di un automa finito deterministico.
   - linguaggio riconosciuto da un automa finito deterministico.
   - Automa finito non deterministico.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2011-2012

Prova Scritta - 6 luglio 2012

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Giovedì 12 Luglio, ore 15, aula F/2

1. *(15 punti)* Definire una macchina di Turing deterministica M a due nastri che decida il linguaggio
$$\{wca^{|w|} \mid w \in \{a,b\}^*\}.$$
Fornire il diagramma di M e giustificare la soluzione data.

2. *(15 punti)* Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.
   (a) Se L_1 e L_2 sono due linguaggi non regolari, allora $L_1 \cup L_2$ non può essere un linguaggio regolare.
   (b) Se L_1 è un linguaggio non regolare, allora il complemento di L_1 non può essere un linguaggio regolare.

3. *(15 punti)* Siano L_1, L_2 linguaggi decidibili. Mostrare che la loro differenza simmetrica
$$L_1 \oplus L_2 = \{x \mid x \text{ è esattamente in uno dei due linguaggi } L_1, L_2\}$$
è decidibile.

4. *(15 punti)* Dimostrare che per ogni automa finito non deterministico $\mathcal{A}_n$ esiste un automa finito deterministico equivalente ad $\mathcal{A}_n$.

5. *(15 punti)* Fornire le definizioni di:
   (a) funzione calcolabile in tempo polinomiale
   (b) riduzione polinomiale
   (c) linguaggio NP-completo

6. *(15 punti)* Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.
   (a) Se A è NP-completo, $B \in NP$ e $A \leq_P B$, allora B è NP-completo.
   (b) Se B è NP-completo e $A \leq_P B$ allora $A \in NP$.

21/12
14

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2011-2012
Prova Scritta - 17 Settembre 2012	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Giovedì 27 Settembre, ore 12, aula P/18

1. *(15 punti)*

   Sia $L = \{xcy \mid x, y \in \{a,b\}^*, x$ e y hanno lo stesso numero di a o x e y hanno lo stesso numero di $b\}$. Ad esempio, $acaa, abcab \in L$ ma $acb \notin L$. Provare o confutare che L è regolare.

2. *(15 punti)* Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.

   (a) L'intersezione di un linguaggio regolare con uno non regolare è un linguaggio regolare.

   (b) L'intersezione di due linguaggi non regolari è un linguaggio non regolare.

   (c) Siano A e B linguaggi. Se $A \subseteq B$ e B è decidibile allora A è decidibile.

3. *(15 punti)* Si consideri il linguaggio

   $SIZE_{TM} = \{\langle M, n\rangle \mid M$ è una macchina di Turing deterministica, $n \in \mathbb{N}, n > 0$ ed $|L(M)| \geq n\}$.

   Mostrare che $SIZE_{TM}$ non è decidibile. Si ricorda che $|L(M)|$ denota la cardinalità di $L(M)$.

   [illegible] a 11/9/16

4. *(15 punti)* Un grafo non orientato $G' = (V', E')$ è un sottografo di un grafo non orientato $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ ed $E' \subseteq E$. Due grafi non orientati $H = (U, F)$ e $G' = (V', E')$ sono isomorfi se esiste una biezione $g : U \to V'$ tale che $(u, v) \in F$ se e solo se $(g(u), g(v)) \in E'$. Intuitivamente H e G' sono isomorfi se H e G' coincidono a meno di una ridenominazione dei vertici. Un cammino hamiltoniano in G è un cammino in G che attraversa ogni vertice in G una e una sola volta. Siano:

   $UHP = \{\langle G\rangle \mid G$ è un grafo non orientato ed esiste un cammino hamiltoniano in $G\}$,

   $SUBGRAPH\text{-}IS = \{\langle G, H\rangle \mid G, H$ sono grafi non orientati e G ha un sottografo G' isomorfo ad $H\}$.

   Provare che $UHP \leq_P SUBGRAPH\text{-}IS$.

5. *(15 punti)* Fornire le definizioni di:

   (a) automa finito deterministico, estensione della funzione di transizione alle stringhe, linguaggio riconosciuto da un automa finito deterministico,

   (b) automa finito non deterministico, estensione della funzione di transizione alle stringhe, linguaggio riconosciuto da un automa finito non deterministico.

6. *(15 punti)* Dimostrare che per ogni automa finito non deterministico $\mathcal{A}$ esiste un automa finito deterministico $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2011-2012

Prova Scritta - 16 Novembre 2012

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario orali: Martedì 20 Novembre, ore 13 - aula F/7

1. *(15 punti)*
   Sia $L = \{a^n b^m c \mid n, m > 0, m = 2n + 1\}$. Provare o confutare che L è regolare.

2. *(15 punti)*
   Sia $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ ha al più un'occorrenza della lettera a e w ha al più un'occorrenza della lettera $b\}$.
   (i) Definire un automa a stati finiti deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio riconosciuto sia L.
   (ii) Definire un'espressione regolare che rappresenti L.

3. *(15 punti)*
   Si consideri il linguaggio
   $$T_{DFA} = \{\langle \mathcal{A} \rangle \mid \mathcal{A} \text{ è un DFA, } L(\mathcal{A}) \subseteq \{0,1\}^* \text{ e ogni stringa in } L(\mathcal{A}) \text{ termina in } 01\}.$$
   Mostrare che T_{DFA} è decidibile. Si ricorda che "DFA" è un'abbreviazione di "automa finito deterministico".

4. *(15 punti)*
   Definire il problema di decisione $VERTEX - COVER$. Dimostrare che $VERTEX\text{-}COVER$ è NP-completo.

5. *(15 punti)*
   (a) Fornire le definizioni della classe dei linguaggi decidibili e della classe dei linguaggi Turing riconoscibili.
   (b) Dato un linguaggio decidibile, dire a quale classe appartiene il suo complemento. Giustificare dettagliatamente la risposta.

6. *(15 punti)* Dimostrare che per ogni automa finito non deterministico $\mathcal{A}$ esiste un automa finito deterministico $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2011-2012
Prova Scritta - 22 Gennaio 2013	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario orali:
Lunedì 25 gennaio, ore 16, aula F/5

1. *(15 punti)*

   Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ ha il carattere b solo nelle posizioni pari$\}$. Ad esempio $abaa \in L$, $abab \in L$, $ba \notin L$. Definire un'espressione regolare che descriva L.

2. *(15 punti)*

   Dato un linguaggio L, definire il linguaggio L^*. Dimostrare che $L^* = (L^*)^*$.

3. *(15 punti)* (1° altro blocco)

   Un cammino hamiltoniano in G è un cammino in G che attraversa ogni vertice in G una e una sola volta.

   Un ciclo hamiltoniano in G è un ciclo in G tale che, rimuovendo in esso un arco, diventa un cammino hamiltoniano. Quindi, un ciclo hamiltoniano in G è un ciclo $(v_0, \ldots, v_k)$ in G tale che $v_0 = v_k$ e $(v_1, \ldots, v_k)$ è un cammino hamiltoniano. Siano:

   $UHP = \{\langle G \rangle \mid G$ è un grafo non orientato ed esiste un cammino hamiltoniano in $G\}$,

   $UHC = \{\langle G \rangle \mid G$ è un grafo non orientato ed esiste un ciclo hamiltoniano in $G\}$.

   Dimostrare **(rigorosamente e dettagliatamente)** che $UHP \leq_P UHC$.
   Suggerimento:
   Dato $G = (V, E)$, considerare il grafo $G' = (V', E')$ con $V' = V \cup \{v\}$, $v \notin V$ e $E' = E \cup \{(u, v) \mid u \in V\}$.

4. *(15 punti)* (vedi 21/6/12)

   Si considerino i linguaggi

   $$E_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una macchina di Turing deterministica ed } L(M) = \emptyset\},$$

   $$INC = \{\langle A, M \rangle \mid A \text{ è un DFA, } M \text{ è una macchina di Turing deterministica ed } L(M) \subseteq L(A)\}.$$

   Mostrare che esiste una riduzione da E_{TM} a INC. Si ricorda che "DFA" è un'abbreviazione di "automa finito deterministico".

5. *(15 punti)*

   (a) Fornire la definizione di linguaggio decidibile.
   (b) Mostrare che la classe dei linguaggi decidibili è chiusa rispetto alle operazioni di unione ed intersezione.
   (c) Fornire un esempio di due linguaggi indecidibili la cui unione risulta decidibile.
   (d) Fornire un esempio di due linguaggi indecidibili la cui intersezione risulta decidibile.

6. *(15 punti)*

   (a) Dare la definizione di Automa finito deterministico (DFA).
   (b) Dare la definizione di Automa finito nondeterministico (NFA).
   (c) Dimostrare che per NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2011-2012
Prova Scritta - 8 Febbraio 2013	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Giovedì 14 febbraio, ore 15 - aula F/5

1. *(15 punti)*

   Sia $\Sigma = \{a, b\}$ e sia L il linguaggio che contiene tutte e sole le stringhe w in Σ^* che terminano con un carattere che non occorre in nessun'altra posizione in w. Definire un automa finito deterministico che riconosce L.

2. *(15 punti)* (vedi 6/7/12

   Siano L_1, L_2 in $NP \cap coNP$. Mostrare che la loro differenza simmetrica

   $$L_1 \oplus L_2 = \{x \mid x \text{ è esattamente in uno dei due linguaggi } L_1, L_2\}$$

   è in $NP \cap coNP$.

3. *(15 punti)*

   Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.

   (a) Ogni linguaggio non regolare ha un sottoinsieme che è un linguaggio regolare.

   (b) Ogni linguaggio regolare è un sottoinsieme proprio di un linguaggio regolare.

4. *(15 punti)*

   Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.

   (a) Se L è un linguaggio decidibile allora anche $X = \{xy \mid x \in L \text{ e } y \notin L\}$ è un linguaggio decidibile.

   (b) Se L è un linguaggio decidibile allora anche $Y = \{w \mid w \in L \text{ e } w^R \in L\}$ è un linguaggio decidibile.

5. *(15 punti)*

   (a) Definire il linguaggio A_{TM}.

   (b) Provare che A_{TM} è indecidibile.

6. *(15 punti)*

   Dare le definizioni di:

   - Macchina di Turing deterministica
   - Configurazione di una Macchina di Turing deterministica.
   - Linguaggio
   - Linguaggio riconosciuto da una macchina di Turing.
   - Funzione calcolabile

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2010-2011

Prova Scritta - 15 Aprile 2013

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Lunedì 29 Aprile ore 15 - Stecca 7, IV Piano, Studio 49

1. *(15 punti)*
Definire un automa deterministico il cui linguaggio riconosciuto sia $L = a^* \cup a(b^* a \cup ab)$.

2. *(15 punti)*
a) Enunciare il pumping lemma.
b)Mostrare che il seguente linguaggio non può essere riconosciuto da un automa finito deterministico:
$$L = \{v\#w \mid v, w \in \{0,1\}^* \text{ ed il numero di 0 in } v \text{ risulta uguale alla lunghezza di } w\}$$

3. *(15 punti)*
a) Illustrare la differenza tra linguaggio decidibile e linguaggio Turing riconoscibile.
b) Dimostrare (mediante diagonalizzazione) l'esistenza di linguaggi che non sono Turing riconoscibili.

4. *(15 punti)*
Provare o confutare che il seguente linguaggio è decidibile
$$\text{2-STRINGHE} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una MdT deterministica che accetta esattamente 2 stringhe}\}$$

5. *(15 punti)* Ricordando che $HALT_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ è una MdT che si ferma sull'input } w\}$
1) Mostrare una riduzione $A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$
2) Dedurne che $HALT_{TM}$è indecidibile

6. *(15 punti)*
Definire in maniera formale e rigorosa la classe NP ed il concetto di linguaggio NP-completo.

Si considerino 4 linguaggi A, B, C e D. Ognuno può appartenere o meno alla classe NP. Si conosce l'esistenza delle seguenti riduzioni:
$$A \leq_P B, \qquad B \leq_P C, \qquad D \leq_P C.$$

Per ognuna delle affermazioni seguenti indicare se é sicuramente VERA, sicuramente FALSA oppure NON SI SA (cioè dipende dai linguaggi e dalla relazione tra le classi P e NP); giustificare brevemente le risposte.

- Se A è NP-completo allora C è NP-completo.

- A è NP-completo e $C \in P$.

- Se A è NP-completo e $B \in NP$, allora B è NP-completo.

- Se C è NP-completo allora $D \in NP$.

6. *(15 punti)*

   1) Definire i linguaggi 3-*SAT* e *CLIQUE* (occorre definire ogni termine utilizzato nella definizione).
   2) Data la seguente formula booleana

$$\Phi = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$$

   definire il grafo G e l'intero k tali che $\langle G, k \rangle$ sia l'immagine di $\langle \Phi \rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-*SAT* a *CLIQUE*.

4. *(15 punti)*

   - Enunciare il teorema di Rice.
   - Dire, giustificando la risposta, se è possibile utilizzarlo per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile.

$$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è un automa finito deterministico}\}.$$

6. *(15 punti)* Sia $L = \{a^n b^k c^n d^k \mid n, k \geq 0\}$. Rispondere alle seguenti domande, giustificando la risposta. È possil limitarsi a una descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate.

- L appartiene a P?
- L appartiene a NP?
- L è NP-completo?

7. Un cammino hamiltoniano in G è un cammino in G che attraversa ogni vertice in G una e una sola volta.

   Un ciclo hamiltoniano in G è un ciclo in G tale che, rimuovendo in esso un arco, diventa un cammino hamiltoniano. Quindi, un ciclo hamiltoniano in G è un ciclo $(v_0, \ldots, v_k)$ in G tale che $v_0 = v_k$ e $(v_1, \ldots, v_k)$ è un cammino hamiltoniano. Siano:

   $UHP = \{\langle G \rangle \mid G$ è un grafo non orientato ed esiste un cammino hamiltoniano in $G\}$,

   $UHC = \{\langle G \rangle \mid G$ è un grafo non orientato ed esiste un ciclo hamiltoniano in $G\}$.

   Dimostrare **(rigorosamente e dettagliatamente)** che $UHP \leq_P UHC$.
   Suggerimento:
   Dato $G = (V, E)$, considerare il grafo $G' = (V', E')$ con $V' = V \cup \{v\}$, $v \notin V$ e $E' = E \cup \{(u, v) \mid u \in V\}$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	**Anno Acc. 2012-2013**
Prova Scritta - 7 Giugno 2013	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Martedì 11 giugno, ore 14 - aula F/5

1. *(15 punti)*
   Sia M un linguaggio sull'alfabeto $\{a, b, c\}$. Sia $L = \{w \in M \mid w$ ha almeno un'occorrenza della lettera $a\}$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.
   (i) Per ogni linguaggio M, il linguaggio L è regolare.
   (ii) Per ogni linguaggio regolare M, il linguaggio L è regolare.

2. *(15 punti)*
   Siano
   $$NO\text{-}LOOP = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una MdT deterministica che si arresta su ogni input}\},$$
   $$HALT_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ è una MdT deterministica ed } M \text{ si arresta sull'input } w\},$$
   dove MdT è un'abbreviazione di "macchina di Turing".
   (i) Dimostrare che $HALT_{TM}$ si riduce a $NO\text{-}LOOP$, cioè $HALT_{TM} \leq_m NO\text{-}LOOP$.
   (ii) Dedurre da (i) che $NO\text{-}LOOP$ è indecidibile.

3. *(15 punti)*
   Un'espressione booleana ϕ è detta essere **in forma normale disgiuntiva** o **espressione booleana DNF** se è un OR di AND di letterali. Cioè ϕ è della forma $\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant n} C_i = C_1 \vee \ldots \vee C_n$, dove i disgiunti hanno la forma $C_i = \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant k_i} l_{i,j}$, con $l_{i,j}$ letterali:
   $$\phi = (l_{1,1} \wedge \ldots \wedge l_{1,k_1}) \vee \ldots \vee (l_{n,1} \wedge \ldots \wedge l_{n,k_n}).$$
   Ad esempio $(x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3)$ è un'espressione booleana in forma normale disgiuntiva. Si consideri il linguaggio SAT_{DNF}, così definito:
   $$SAT_{DNF} = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ è un'espressione booleana in forma normale disgiuntiva e } \phi \text{ è soddisfacibile}\}.$$
   Dimostrare che SAT_{DNF} appartiene alla classe P.

4. *(15 punti)*
   Dimostrare che per ogni automa finito non deterministico $\mathcal{A}$ esiste un automa finito deterministico $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

5. *(15 punti)*
   Dare la definizione delle classi P e NP e di linguaggio NP-completo.

6. *(15 punti)*
   Dare le definizioni di:
   - Macchina di Turing deterministica
   - Configurazione di una Macchina di Turing deterministica.
   - Linguaggio
   - Linguaggio riconosciuto da una macchina di Turing.
   - Funzione calcolabile

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2012-2013
Prova Scritta - 24 Giugno 2013	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Martedì 9 luglio, ore 15 - aula F/5

1. *(15 punti)*

   Indicare quali tra i seguenti linguaggi sono regolari. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.

   (i) $L_1 = \{0^n 1^m \mid n - m < 5\}$.

   (ii) $L_2 = \{0^n 1^m \mid n + m < 5\}$.

2. *(15 punti)*

   Un linguaggio B è *Turing completo* se B è Turing riconoscibile e se ogni linguaggio Turing riconoscibile A si riduce a B. Provare che A_{TM} è Turing completo.

3. *(15 punti)*

   Si consideri il seguente problema di decisione: "Dato un insieme U, siano $S_1, \ldots, S_n$ sottoinsiemi di U, sia k un intero. Esiste una famiglia costituita da k dei sottoinsiemi S_i tale che l'unione dei sottoinsiemi in tale famiglia sia l'insieme U?". Si consideri il seguente linguaggio associato:

   $$SET\text{-}COVER = \{\langle U, S_1, \ldots, S_n, k\rangle \mid \exists S_{j_1}, \ldots, S_{j_k},\ 1 \leq j_t \leq n,\ \cup_{t=1}^{k} S_{j_t} = U\}.$$

   Provare formalmente e con precisione che $VERTEX\text{-}COVER \leq_P SET\text{-}COVER$.

   Suggerimento: si consideri la funzione che alla stringa $\langle G, k\rangle$, dove $G = (V, E)$ è un grafo non orientato, $V = \{u_1, \ldots u_n\}$, associa la stringa $\langle U, S_{u_1}, \ldots, S_{u_n}, k\rangle$, dove U è in corrispondenza biunivoca con l'insieme E degli archi in G e, per ogni vertice u in V, S_u è l'insieme degli elementi di U che sono in corrispondenza con gli archi in G di cui u è uno dei due vertici.

4. *(15 punti)*

   Dimostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione star (o operazione di chiusura di Kleene).

5. *(15 punti)*

   Dimostrare l'esistenza di linguaggi che non sono Turing riconoscibili mediante il metodo della diagonalizzazione.

6. *(15 punti)*

   Dare le definizioni di:

   - automa finito deterministico (DFA).
   - estensione della funzione di transizione di un DFA alle stringhe.
   - Linguaggio riconosciuto da un DFA.
   - automa finito non deterministico (NFA).
   - estensione della funzione di transizione di un NFA alle stringhe.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2012-2013
Prova Scritta - 17 luglio 2013	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Martedì 23 luglio, ore 15 - aula F/5

1. *(15 punti)*

   Sia $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. Indicare quali tra i seguenti linguaggi sono regolari. Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.

   (i) $0^* L$

   (ii) $0^* L \cup L1^*$

2. *(15 punti)*

   Siano

   $$FINITE_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ è un linguaggio finito sull'alfabeto } \{a\}\},$$

   $$REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ è un linguaggio regolare sull'alfabeto } \{a, b\}\}.$$

   Provare formalmente e con precisione che $FINITE_{TM} \leq_m REGULAR_{TM}$.

   Suggerimento: considerare la funzione che alla stringa $\langle M \rangle$ associa la stringa $\langle M' \rangle$, dove M' sull'input w: se $w \neq a^n b a^n$, rifiuta w; se $w = a^n b a^n$, accetta w se M accetta a^n.

3. *(15 punti)*

   (i) Dare un esempio di un linguaggio in P ma non regolare,

   (ii) Dare un esempio di un linguaggio in NP ma non NP-completo.

   Giustificare la risposta. Risposte non giustificate non saranno valutate.

   Suggerimento: il linguaggio vuoto è NP-completo? (vedi 23/2/12)

4. *(15 punti)*

   Definire formalmente e con precisione le classi NP e $coNP$ e dimostrare che la loro intersezione include la classe P.

5. *(15 punti)*

   Definire il linguaggio A_{TM} e dimostrare che A_{TM} è indecidibile.

6. *(15 punti)*

   - Definire il linguaggio 3-SAT.
   - Definire il linguaggio $CLIQUE$
   - Data l'istanza $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$ di 3-SAT si descriva l'istanza di $CLIQUE$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $CLIQUE$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2012-2013

Prova Scritta - 12 Settembre 2013

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Giovedì 19 settembre, ore 15 - aula F/5

1. *(15 punti)*
   Dimostrare formalmente e con precisione che il linguaggio $\{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$ non è regolare. Utilizzare il pumping lemma.

2. *(15 punti)*
   Definire un automa finito deterministico che riconosca il linguaggio $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \circ \{0,1\}^*$.

3. *(15 punti)*
   Sia Σ un alfabeto. Si considerino i seguenti linguaggi:
   $$TOTAL = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è un decider}\},$$
   $$ALL_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una macchina di Turing ed } L(M) = \Sigma^*\}.$$
   Provare formalmente e con precisione che $TOTAL \leq_m ALL_{TM}$.
   Suggerimento: considerare la funzione che alla stringa $\langle M \rangle$ associa la stringa $\langle M' \rangle$, dove M', sull'input w, accetta w se M accetta o rifiuta w.

4. *(15 punti)*
   Definire formalmente e con precisione le classi NP e $coNP$. Dimostrare formalmente e con precisione l'affermazione seguente:
   $$\forall L \in NP \quad L \leq_P \overline{L} \Rightarrow NP = coNP.$$

5. *(15 punti)*
   Dimostrare che per ogni automa finito non deterministico $\mathcal{A}$ esiste un automa finito deterministico $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

6. *(15 punti)*
   Dare le definizioni di:
   - Macchina di Turing deterministica
   - Configurazione di una Macchina di Turing deterministica.
   - Linguaggio
   - Linguaggio riconosciuto da una macchina di Turing.
   - Funzione calcolabile

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2012-2013
Prova Scritta - 14 Novembre 2013	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: lunedì 18 novembre, ore 15 - aula P/20

1. *(15 punti)*

   Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio definito dall'espressione regolare $E = 0^*1(01 \cup 10)^*$ (cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(E)$).

2. *(15 punti)*

   Dimostrare formalmente e con precisione che il linguaggio $\{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 0, k \geq n\}$ non è regolare. Utilizzare il pumping lemma.

3. *(15 punti)*

   Siano

   $$A_{DFA} = \{\langle \mathcal{A}, w\rangle \mid \mathcal{A} \text{ è un automa finito deterministico e } \mathcal{A} \text{ accetta la stringa } w\},$$

   $$E_D = \{\langle D\rangle \mid D \text{ è un decider ed } L(D) = \emptyset\}.$$

   Dimostrare che A_{DFA} si riduce a E_D, cioè $A_{DFA} \leq_m E_D$.

   Suggerimento: considerare la funzione che associa a ogni stringa $\langle \mathcal{A}, w\rangle$, dove A è un DFA e w è una stringa, la stringa $\langle D_{\mathcal{A},w}\rangle$ dove $D_{\mathcal{A},w}$ rifiuta y se $y \neq w$, rifiuta $y = w$ se e solo se $\mathcal{A}$ accetta w.

4. *(15 punti)*

   Data la seguente istanza di 3-SAT

   $$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

   si descriva l'istanza di $SUBSET$-SUM nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $SUBSET$-SUM.

5. *(15 punti)*

   Dimostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione di prodotto.

6. *(15 punti)*

   Definire formalmente e con precisione le classi P, NP e la classe dei linguaggi NP-completi.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice) **Anno Acc. 2012-2013**

Prova Scritta - 21 Gennaio 2014

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Lunedì 27 gennaio, ore 15 - aula F/1

1. *(15 punti)*

   Definire un'espressione regolare che denoti il linguaggio

   $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ contiene un numero pari di caratteri uguali a 0 ed esattamente una occorrenza del carattere $1\}$.

2. *(15 punti)*

   Sia

   $$QEQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1, M_2 \text{ sono macchine di Turing deterministiche ed esiste un carattere } b \text{ tale che } L(M_1) = \{b\} \circ L(M_2)\}.$$

   Dimostrare che A_{TM} si riduce a QEQ_{TM}, cioè $A_{TM} \leq_m QEQ_{TM}$.

   Suggerimento: considerare la funzione che associa a ogni stringa $\langle M, w\rangle$, dove M è una MdT e w è una stringa, la stringa $\langle M_1, M_2\rangle$ dove $L(M_1) = \{bw\}$ ed M_2 rifiuta y se $y \neq w$, accetta $y = w$ se e solo se M accetta w.

3. *(15 punti)* (6/9/12)

   Siano A, B linguaggi tali che $A \leq_P B$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni indicare, giustificando formalmente e con precisione la risposta, se essa è vera, falsa oppure se la risposta dipende dai linguaggi A e B.

   (a) Se B è NP-completo allora A è in NP.

   (b) Se A è in NP allora B è NP-completo.

   (c) Se A è NP-completo allora anche B è NP-completo.

4. *(15 punti)*

   Data la seguente istanza di 3-SAT

   $$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

   si descriva l'istanza di $VERTEX$-$COVER$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $VERTEX$-$COVER$.

5. *(15 punti)*

   Dare le definizioni di:

   - Macchina di Turing deterministica
   - Configurazione di una Macchina di Turing deterministica.
   - Linguaggio
   - Linguaggio riconosciuto da una macchina di Turing.
   - Macchina di Turing a k nastri

6. *(15 punti)*

   Dimostrare che, per ogni automa finito non deterministico $\mathcal{A}$, esiste un automa finito deterministico $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2012-2013

Prova Scritta - 11 Aprile 2014

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.
						/3

Discussione prova scritta ed esami orali: Mercoledì 23 aprile, ore 16.30 - IV piano Stecca VII Studio N. 49

1. *(15 punti)*

   Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio

   $$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene un numero pari di occorrenze del carattere 0 e termina con 1}\}.$$

   Suggerimento: Rappresentare il linguaggio come risultato di un'operazione regolare applicata a due linguaggi regolari e utilizzare la corrispondente costruzione dell'automa deterministico studiata.

2. *(15 punti)*

   Dimostrare che il linguaggio $\{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ non è regolare.

3. *(15 punti)*

   Definire un'espressione regolare E che denoti il linguaggio $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = 10y = z01\}$, cioè tale che $L(E) = L$.

4. *(15 punti)*

   Si consideri il linguaggio $L = \{\langle M \rangle \mid M$ è una macchina di Turing e $1001 \in L(M)\}$. Definire A_{TM}. Provare formalmente e con precisione che $A_{TM} \leq_m L$.

   Suggerimento: considerare la funzione che alla stringa $\langle M, w\rangle$ associa la stringa $\langle M' \rangle$, dove M', sull'input y, rifiuta se $y \neq 1001$ e accetta 1001 se e solo se M accetta w.

5. *(15 punti)*

   Due grafi non orientati $H = (V, E)$, $G' = (V', E')$ sono isomorfi se $|V| = |V'|$ ed esiste una biezione $g : E \to E'$ tale che $(u, v) \in E$ se e solo se $(g(u), g(v)) \in E'$. Intuitivamente H e G' sono isomorfi se H e G' coincidono a meno di una ridenominazione dei vertici. Sia:

   $SUBGRAPH\text{-}IS = \{\langle G, H\rangle \mid G$ è un grafo non orientato e G contiene un sottografo G' isomorfo ad $H\}$.

   Assumendo che $SUBGRAPH\text{-}IS \in NP$, provare che $SUBGRAPH\text{-}IS$ è NP-completo.

   Suggerimento: provare che $CLIQUE \leq_P SUBGRAPH$.

6. *(15 punti)*

   (a) Dare la definizione di Automa finito deterministico (DFA).

   (b) Dare la definizione di Automa finito nondeterministico (NFA).

   (c) Dimostrare che per NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2012-2013
Prova Scritta - 17 Febbraio 2014	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.

Discussione prova scritta ed esami orali: Giovedì 20 febbraio, ore 12 - aula P/17

1. *(15 punti)*
   Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio
   $$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene almeno 2 occorrenze del carattere 0 e al più una occorrenza del carattere } 1\}.$$

2. *(15 punti)*
   Dimostrare formalmente e con precisione che il linguaggio
   $$\{w \in \{a,b,c,d\}^* \mid \text{il numero delle occorrenze di } a \text{ in } w \text{ è uguale al numero delle occorrenze di } b \text{ in } w$$
   $$\text{oppure il numero delle occorrenze di } c \text{ in } w \text{ è uguale al numero delle occorrenze di } d \text{ in } w\}$$
   non è regolare. Utilizzare il pumping lemma.

3. *(15 punti)*
   Definire il linguaggio A_{TM} e dimostrare che A_{TM} si riduce a $L = \{0x \mid x \in A_{TM}\}$, cioè $A_{TM} \leq_m L$.

4. *(15 punti)*
   Data la seguente istanza di 3-SAT
   $$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$
   si descriva l'istanza di $CLIQUE$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $CLIQUE$.

5. *(15 punti)*
   Dimostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione di prodotto.

6. *(15 punti)*
   Definire formalmente e con precisione le classi P, NP e la classe dei linguaggi NP-completi.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Seconda Prova Intercorso - 9 Giugno 2014	

Nome e Cognome, email:

Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Martedì 17 giugno, ore 15, aula F/4

1. *(15 punti)* Dare le definizioni di:
   - Macchina di Turing
   - Linguaggio
   - Linguaggio Turing riconoscibile.
   - Linguaggio decidibile.

2. *(15 punti)*
   (a) Enunciare il teorema di Rice.

   (b) È possibile utilizzarlo per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile? Giustificare la risposta.
   $$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una MdT che accetta ogni input di lunghezza dispari}\}.$$

   (c) È possibile utilizzarlo per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile? Giustificare la risposta.
   $$X = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ è una MdT e } |w| \text{ è pari}\}.$$

   È possibile dimostrare con un'altra tecnica che L è indecidibile? Giustificare la risposta.

3. *(15 punti)*
   Dimostrare l'esistenza di linguaggi che non sono Turing riconoscibili utilizzando il metodo della diagonalizzazione.

4. *(15 punti)*
   Dimostrare in maniera formale e rigorosa le seguenti inclusioni tra classi di complessità. Enunciare con precisione eventuali risultati intermedi utilizzati.

   1) P $\subseteq$ NP
   2) NP $\subseteq$ EXP
   3) P $\subseteq$ co-NP

5. *(15 punti)*
   1) Definire il concetto di riduzione polinomiale.
   2) Definire il problema di decisione *SUBSET-SUM*
   3) Data la seguente istanza di 3-*SAT*
   $$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$
   si descriva l'istanza di *SUBSET-SUM* nella riduzione polinomiale di 3-*SAT* a *SUBSET-SUM*.

6. *(15 punti)*

   Si consideri il seguente problema di decisione. Un'organizzazione internazionale cerca interpreti in grado di effettuare traduzioni orali simultanee per un insieme $U = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ di lingue. Presentano la loro candidatura m interpreti $I_1, \ldots, I_m$, e ogni interprete I_j è idoneo a ricoprire l'incarico per l'insieme di lingue $L_j \subset U$. È possibile assumere k interpreti tali che, per ogni lingua in U, vi sia un corrispondente interprete tra quelli assunti? Chiamare INTERPRETE–COVER il linguaggio associato al suddetto problema di decisione. Definire formalmente INTERPRETE–COVER. Provare che INTERPRETE–COVER $\leq_p$ SET–COVER dove:

   $$SET\text{–}COVER =$$

   $$\{\langle U, S_1, \ldots, S_n, k\rangle \mid U \text{ insieme, } S_j \subseteq U, 1 \leq j \leq n, \text{ ed esistono } S_{j_1}, \ldots, S_{j_k},\ 1 \leq j_t \leq n,\ \cup_{t=1}^{k} S_{j_t} = U\}.$$

7. Dimostrare l'indecidibilità del seguente linguaggio

   $$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una MdT che si arresta su ogni input di lunghezza dispari}\}.$$

   Enunciare con precisione eventuali risultati intermedi utilizzati e definire eventuali linguaggi intermedi utilizzati.
   Suggerimento Dimostrare che $HALT \leq_m L$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 9 giugno 2014	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Martedì 17 giugno, ore 15, aula F/4

1. *(15 punti)* Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio definito dall'espressione regolare $E = (aa)^*b \cup (ab)^*a$ (cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(E)$.

2. *(15 punti)* Indicare quali tra i seguenti linguaggi sono regolari.

   (a) $A = \{0^n1^m \mid n, m \geq 0\}$

   (b) $B = \{xx \mid x \in A\}$

   Giustificare le risposte. Risposte non giustificate non saranno valutate.

3. *(15 punti)* Dimostrare l'esistenza di linguaggi che non sono Turing riconoscibili utilizzando il metodo della diagonalizzazione.

4. *(15 punti)*

   (a) Dare la definizione di Automa finito deterministico (DFA).

   (b) Dare la definizione di Automa finito nondeterministico (NFA).

   (c) Dimostrare che per NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

5. *(15 punti)*

   1) Definire il concetto di riduzione polinomiale.

   2) Definire il problema di decisione $SUBSET\text{-}SUM$

   3) Data la seguente istanza di 3-SAT

   $$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

   si descriva l'istanza di $SUBSET\text{-}SUM$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $SUBSET\text{-}SUM$.

6. *(15 punti)* Si consideri il seguente problema di decisione. Un'organizzazione internazionale cerca interpreti in grado di effettuare traduzioni orali simultanee per un insieme $U = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ di lingue. Presentano la loro candidatura m interpreti $I_1, \ldots, I_m$, e ogni interprete I_j è idoneo a ricoprire l'incarico per l'insieme di lingue $L_j \subset U$. È possibile assumere k interpreti tali che, per ogni lingua in U, vi sia un corrispondente interprete tra quelli assunti? Chiamare INTERPRETE–COVER il linguaggio associato al suddetto problema di decisione. Definire formalmente INTERPRETE–COVER. Provare che INTERPRETE–COVER $\leq_p$ SET–COVER dove:

   $$SET\text{-}COVER =$$

   $$\{\langle U, S_1, \ldots, S_n, k\rangle \mid U \text{ insieme}, S_j \subseteq U, 1 \leq j \leq n, \text{ ed esistono } S_{j_1}, \ldots, S_{j_k},\ 1 \leq j_t \leq n,\ \cup_{t=1}^{k} S_{j_t} = U\}.$$

7. Dimostrare l'indecidibilità del seguente linguaggio

   $$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una MdT che si arresta su ogni input di lunghezza dispari}\}.$$

   Enunciare con precisione eventuali risultati intermedi utilizzati e definire eventuali linguaggi intermedi utilizzati. **Suggerimento** Dimostrare che $HALT \leq_m L$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Seconda Prova Intercorso - 23 Giugno 2014	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Lunedì 30 giugno, ore 15, aula F/5

1. *(15 punti)*
   - Definire il linguaggio A_{TM}.
   - Dimostrare che A_{TM} è indecidibile.
2. *(15 punti)*
   (a) Dare la definizione di riduzione.
   (b) Definire il linguaggio EQ_{TM}.
   (c) Dimostrare che EQ_{TM} non è Turing riconoscibile e non è co-Turing riconoscibile. Occorre enunciare con precisione tutti i risultati intermedi utilizzati e dimostrare tutte le riduzioni utilizzate.
3. *(15 punti)*
   Si consideri l'operazione che a un linguaggio L sull'alfabeto Σ associa il linguaggio $\Sigma^{-1}L = \{x \mid ax \in L, a \in \Sigma\}$. Provare che la classe dei linguaggi decidibili è chiusa rispetto a tale operazione. È consentita la descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate.
4. *(15 punti)* Definire in maniera formale e rigorosa: la classe P, la classe NP, la classe dei linguaggi NP-completi.
5. *(15 punti)* Definire la classe co-NP. Provare che se NP $\neq$ co-NP allora P $\neq$ NP.
6. *(15 punti)*
   1) Definire il concetto di riduzione polinomiale.
   2) Definire i linguaggi 3-SAT e CLIQUE
   3) Dimostrare che 3-SAT si riduce polinomialmente a CLIQUE.
7. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, con insieme V di vertici e insieme E di archi. Un *independent set* in G, è un insieme V' di vertici tali che, per ogni u, v in V', la coppia (u, v) non è un arco, cioè u e v non sono adiacenti. Si consideri il linguaggio:

   $INDEPENDENT\!-\!SET = \{\langle G, k\rangle \mid G$ è un grafo non orientato e G ha un independent set V' di cardinalità $k\}$.

   - Definire il linguaggio CLIQUE.
   - Provare che CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT–SET.
   - Utilizzare il risultato ottenuto al punto precedente per provare che INDEPENDENT–SET è NP–completo.

Suggerimento Dato $G = (V, E)$, definire il grafo $G' = (V, E')$, con $E' = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v \text{ e } (u, v) \notin E\}$ e dimostrare che la funzione che associa alla stringa $\langle G, k\rangle$ la stringa $\langle G', k\rangle$, è una riduzione polinomiale da CLIQUE a INDEPENDENT–SET.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 23 giugno 2014	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Lunedì 30 giugno, ore 15, aula F/5

1. *(15 punti)* Definire un automa deterministico $\mathcal{A}$ il cui linguaggio accettato sia il linguaggio definito dall'espressione regolare $E = (000^* \cup 111^*)^*$ (cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(E)$.

2. *(15 punti)* Sia $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. Indicare quali tra i seguenti linguaggi sono regolari.

   (a) $H(L) = \{x \mid \exists y$ tale che $xy \in L$ e $|x| = |y|\}$

   (b) $B = \{0^n \mid n \geq 0\} \circ L \circ \{1^m \mid m \geq 0\}$

   Giustificare le risposte. Risposte non giustificate non saranno valutate.

3. *(15 punti)*

   - Definire il linguaggio A_{TM}.
   - Dimostrare che A_{TM} è indecidibile.

4. *(15 punti)*

   Si consideri l'operazione che a un linguaggio L sull'alfabeto Σ associa il linguaggio $\Sigma^{-1}L = \{x \mid ax \in L, a \in \Sigma\}$. Provare che la classe dei linguaggi decidibili è chiusa rispetto a tale operazione. È consentita la descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate.

5. *(15 punti)*

   Definire in maniera formale e rigorosa: la classe P, la classe NP, la classe dei linguaggi NP-completi.

6. *(15 punti)* Definire la classe co-NP. Provare che se NP $\neq$ co-NP allora P $\neq$ NP.

7. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, con insieme V di vertici e insieme E di archi. Un *independent set* in G, è un insieme V' di vertici tali che, per ogni u, v in V', la coppia (u, v) non è un arco, cioè u e v non sono adiacenti. Si consideri il linguaggio:

   $INDEPENDENT\text{–}SET = \{\langle G, k\rangle \mid G$ è un grafo non orientato e G ha un independent set V' di cardinalità $k\}$.

   - Definire il linguaggio CLIQUE.
   - Provare che CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT–SET.
   - Utilizzare il risultato ottenuto al punto precedente per provare che INDEPENDENT–SET è NP–completo.

Suggerimento Dato $G = (V, E)$, definire il grafo $G' = (V, E')$, con $E' = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v$ e $(u, v) \notin E\}$ e dimostrare che la funzione che associa alla stringa $\langle G, k\rangle$ la stringa $\langle G', k\rangle$, è una riduzione polinomiale da CLIQUE a INDEPENDENT–SET.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 9 Luglio 2014	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Giovedì 17 luglio, ore 15, aula F/5

1. *(15 punti)*
   - Dare la definizione di espressione regolare, indicando anche il linguaggio rappresentato.
   - Definire un'espressione regolare che denoti il linguaggio

   $$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ha un numero pari di occorrenze della lettera } a\}.$$

2. *(15 punti)* Dimostrare che per NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.
3. *(15 punti)*
   - Enunciare il teorema di Rice.
   - È possibile utilizzarlo per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile? Giustificare la risposta.

   $$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una MdT che si ferma su ogni input di lunghezza dispari}\}.$$

4. *(15 punti)* Si consideri il linguaggio $L = \{\langle M \rangle \mid M$ è una MdT che ha un insieme vuoto di stati$\}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere. Giustificare la risposta.
   - L è decidibile.
   - L è Turing riconoscibile.
5. *(15 punti)* Definire la classe co-NP. Provare che se VERTEX-COVER appartiene a P allora NP = co-NP. Occorre enunciare con precisione tutti i risultati intermedi utilizzati.
6. *(15 punti)*
   1) Definire il concetto di riduzione polinomiale.
   2) Definire i linguaggi 3-SAT e VERTEX-COVER (occorre definire ogni termine utilizzato nella definizione).
   3) Data la seguente istanza di 3-SAT

   $$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

   si descriva l'istanza di VERTEX-COVER nella riduzione polinomiale di 3-SAT a VERTEX-COVER.
7. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, con insieme V di vertici e insieme E di archi. Un *independent set* in G, è un insieme V' di vertici tali che, per ogni u, v in V', la coppia (u, v) non è un arco, cioè u e v non sono adiacenti. Si consideri il linguaggio:

   $INDEPENDENT\!-\!SET = \{\langle G, k\rangle \mid G$ è un grafo non orientato e G ha un independent set V' di cardinalità $k\}$.

   - Definire il linguaggio CLIQUE.
   - Provare che CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT–SET.
   - Utilizzare il risultato ottenuto al punto precedente per provare che INDEPENDENT–SET è NP–completo.

   Suggerimento Dato $G = (V, E)$, definire il grafo $G' = (V, E')$, con $E' = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v \text{ e } (u, v) \notin E\}$ e dimostrare che la funzione che associa alla stringa $\langle G, k\rangle$ la stringa $\langle G', k\rangle$, è una riduzione polinomiale da CLIQUE a INDEPENDENT–SET.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Seconda Prova Intercorso - 9 Luglio 2014	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Giovedì 17 luglio, ore 15, aula F/5

1. *(15 punti)* Si consideri l'operazione che a un linguaggio L sull'alfabeto Σ e a una lettera $a \in \Sigma$ associa il linguaggio $aL = \{ax \mid x \in L\}$. Provare che la classe dei linguaggi decidibili è chiusa rispetto a tale operazione. È consentita la descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate.

2. *(15 punti)* Definire in maniera formale e rigorosa: la classe P, la classe NP, la classe dei linguaggi NP-completi.

3. *(15 punti)*
   - Enunciare il teorema di Rice.
   - È possibile utilizzarlo per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile? Giustificare la risposta.

   $$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una MdT che si ferma su ogni input di lunghezza dispari}\}.$$

4. *(15 punti)* Si consideri il linguaggio $L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una MdT che ha un insieme vuoto di stati}\}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere. Giustificare la risposta.
   - L è decidibile.
   - L è Turing riconoscibile.

5. *(15 punti)* Definire la classe co-NP. Provare che se VERTEX-COVER appartiene a P allora NP = co-NP. Occorre enunciare con precisione tutti i risultati intermedi utilizzati.

6. *(15 punti)*
   1) Definire il concetto di riduzione polinomiale.
   2) Definire i linguaggi 3-SAT e VERTEX-COVER (occorre definire ogni termine utilizzato nella definizione).
   3) Data la seguente istanza di 3-SAT

   $$(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

   si descriva l'istanza di VERTEX-COVER nella riduzione polinomiale di 3-SAT a VERTEX-COVER.

7. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, con insieme V di vertici e insieme E di archi. Un *independent set* in G, è un insieme V' di vertici tali che, per ogni u, v in V', la coppia (u, v) non è un arco, cioè u e v non sono adiacenti. Si consideri il linguaggio:

   $INDEPENDENT{-}SET = \{\langle G, k \rangle \mid G$ è un grafo non orientato e G ha un independent set V' di cardinalità $k\}$.

   - Definire il linguaggio CLIQUE.
   - Provare che CLIQUE $\leq_p$ INDEPENDENT–SET.
   - Utilizzare il risultato ottenuto al punto precedente per provare che INDEPENDENT–SET è NP–completo.

   Suggerimento Dato $G = (V, E)$, definire il grafo $G' = (V, E')$, con $E' = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v \text{ e } (u, v) \notin E\}$ e dimostrare che la funzione che associa alla stringa $\langle G, k \rangle$ la stringa $\langle G', k \rangle$, è una riduzione polinomiale da CLIQUE a INDEPENDENT–SET.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 16 settembre 2014	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali:
Martedì 23 settembre, ore 13, IV piano, Stecca VII, Studio N. 49

1. *(15 punti)*
   - Dare la definizione dell'operazione di concatenazione di due linguaggi.
   - Dare la definizione dell'operazione star.
   - Definire un'espressione regolare che denoti il linguaggio

   $$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ non ha come fattore } ab\}.$$

2. *(15 punti)* Dimostrare che per ogni NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$. Occorre definire ogni termine utilizzato nella prova.

3. *(15 punti)* Si consideri il linguaggio

   $$REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una } TM \text{ ed } L(M) \text{ è regolare }\}$$

   Definire il linguaggio A_{TM} e mostrare che $A_{TM} \leq REGULAR_{TM}$.

4. *(15 punti)*
   - Definire la classe di complessità $TIME(t(n))$.
   - Mostrare che $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ $\cancel{\in TIME(n)}$] → $\in P$

5. *(15 punti)* Dimostrare che il linguaggio

   $$NONREGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è una } TM \text{ ed } L(M) \text{ non è regolare }\}$$

   è indecidibile. Occorre enunciare con precisione tutti gli eventuali risultati noti utilizzati nella prova.

6. *(15 punti)*
   1) Definire il concetto di riduzione polinomiale.
   2) Definire i linguaggi 3-SAT e $CLIQUE$ (occorre definire ogni termine utilizzato nella definizione).
   3) Data la seguente formula booleana

   $$\Phi = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$$

   definire il grafo G e l'intero k tali che $\langle G, k \rangle$ sia l'immagine di $\langle \Phi \rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $CLIQUE$.

7. Enunciare il Pumping Lemma e utilizzarlo per mostrare che il linguaggio

   $$L = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^* \text{ e il numero di occorrenze di } a \text{ in } x \text{ è uguale al numero di occorrenze di } b \text{ in } y\}$$

   non è regolare.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 10 novembre 2014	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Martedì 18 novembre, ore 14, IV piano, Stecca VII, Studio N. 49

1. *(15 punti)* Si consideri il linguaggio L delle stringhe w sull'alfabeto $\{a, b\}$ tali che ogni sottostringa (o fattore) di w di lunghezza due abbia almeno un'occorrenza della lettera a. Definire un automa finito deterministico $\mathcal{A}$ che riconosca L, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L$.
2. *(15 punti)*
   - Dare la definizione di espressione regolare, indicando anche il linguaggio rappresentato.
   - Definire un'espressione regolare che denoti il linguaggio delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ di lunghezza pari e che contengono almeno un'occorrenza della lettera a.
3. *(15 punti)* Provare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione star.
4. *(15 punti)*
   - Enunciare il teorema di Rice.
   - Dire, giustificando la risposta, se è possibile utilizzarlo per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile.
   $$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è un decider}\}.$$
5. *(15 punti)*
   (1) Definire le classi di complessità P ed NP.
   (2) Definire la classe dei linguaggi NP-completi.
6. *(15 punti)* Sia $L = \{xcx^R \mid x \in \{a, b\}^*\}$, dove x^R denota l'inversione di x, cioè la stringa x letta da destra verso sinistra. Rispondere alle seguenti domande, giustificando la risposta. È possibile limitarsi a una descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate.
   - L appartiene a P?
   - L appartiene a NP?
   - L è NP-completo?
7. Si consideri il linguaggio
   $$L = \{\langle M_1, M_2, w\rangle \mid M_1 \text{ ed } M_2 \text{ sono } TM,\ M_1 \text{ accetta } w \text{ ed } M_2 \text{ accetta } w\}.$$
   Provare che $A_{TM} \leq_m L$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 21 gennaio 2016	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Risultati prova scritta ed esami orali: Venerdì 22 gennaio, ore 15 IV piano, Stecca VII, Studio N. 49

1. *(15 punti)* Sia L il linguaggio definito dall'espressione regolare $E = 0^*(1 \cup 01)^*$. Definire un automa finito deterministico $\mathcal{A}$ che riconosca L, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L$.

2. *(15 punti)*
   - Dare la definizione di Automa finito deterministico (DFA).
   - Dare la definizione di Automa finito nondeterministico (NFA).
   - Dimostrare che per NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

3. *(15 punti)*
   (1) Enunciare (in maniera matematicamente precisa) il teorema di Rice.
   (2) È possibile utilizzarlo per mostrare che il seguente linguaggio risulta indecidibile? Giustificare la risposta.

   $$L = \{\langle M\rangle \mid M \text{ è una MdT che accetta tutte e sole le stringhe la cui lunghezza è un numero pari}\}$$

4. *(15 punti)* Si consideri l'operazione che a un linguaggio L sull'alfabeto Σ e a una lettera $a \in \Sigma$ associa il linguaggio $aL = \{ax \mid x \in L\}$. Provare che la classe dei linguaggi decidibili è chiusa rispetto a tale operazione. È consentita la descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate.

5. *(15 punti)*
   (a) Fornire le definizioni di riduzione polinomiale e di linguaggio NP-completo.
   (b) Dimostrare che se X è un linguaggio NP-completo, $Y \in NP$ e $X \leq_P Y$, allora Y è NP-completo.

6. *(15 punti)*
   - Definire il linguaggio 3-SAT.
   - Definire il linguaggio $VERTEX$-$COVER$
   - Data la seguente espressione booleana in 3-CNF

   $$\phi = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$$

   si descriva l'immagine di $\langle\phi\rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $VERTEX$-$COVER$.

7. Si consideri il linguaggio

   $$L = \{\langle M_1, M_2, w\rangle \mid M_1 \text{ ed } M_2 \text{ sono } TM,\ M_1 \text{ accetta } w \text{ ed } M_2 \text{ accetta } w\}.$$

   Definire il linguaggio A_{TM} e provare che $A_{TM} \leq_m L$.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 12 novembre 2015	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Lunedì 16 novembre, ore 11, IV piano, Stecca VII, Studio N. 49

1. *(15 punti)* Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ non ha } aab \text{ come sottostringa}\}$. Ad esempio $baa \in L$, $babaa \in L$, $abaab \notin L$. Definire un automa finito deterministico $\mathcal{A}$ che riconosca L, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L$.

2. *(15 punti)*
   - Dare la definizione di espressione regolare, indicando con precisione il linguaggio rappresentato.
   - Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{ogni } a \text{ in } w \text{ è seguita da un numero pari di } b\}$. Ad esempio $baa \in L$, $babba \in L$, $aba \notin L$. Definire un'espressione regolare che descriva L.

3. *(15 punti)* Definire i linguaggi A_{TM} e $HALT_{TM}$. Dimostrare, provando con precisione ogni passaggio, che $A_{TM} \leq_m HALT_{TM}$.

4. *(15 punti)* Definire una macchina di Turing deterministica M che calcoli la funzione $f(x) = 2x$, con x intero non negativo. Si assuma che l'input sia la rappresentazione binaria di x e si definisca M in modo che l'output sia la rappresentazione binaria di $2x$. Per esempio se $x = 6$, l'input sarà 110 ed M dovrà fermarsi con 1100 sul nastri, poiché $6 \times 2 = 12$. Non ci sono vincoli sulla posizione della testina all'arresto. Fornire il diagramma di M e giustificare la soluzione data.

5. *(15 punti)*
   (1) Definire la classe di complessità NP.
   (2) Fornire la definizione di riduzione polinomiale
   (3) Definire il concetto di NP-completezza.

6. *(15 punti)*
   - Definire il linguaggio 3-SAT.
   - Definire il linguaggio $CLIQUE$
   - Data la seguente espressione booleana in 3-CNF

   $$\phi = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$$

   si descriva l'immagine di $\langle\phi\rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $CLIQUE$.

7.
   - Sia $A = \{a^n u a^n \mid n \geq 1, u \in \{a,b\}^*\}$. Mostrare che A è regolare.
   - Sia $B = \{a^n b u a^n \mid n \geq 1, u \in \{a,b\}^*\}$. Mostrare che B non è regolare.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 24 febbraio 2015	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali: Venerdì 27 febbraio, ore 14, IV piano, Stecca VII, Studio N. 49

1. *(15 punti)* Sia

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ ha un numero pari di occorrenze di una lettera e un numero dispari di occorrenze dell'altra$\}$.

Ad esempio $baa \in L$, $babaa \in L$, $abaa \notin L$. Definire un automa finito deterministico $\mathcal{A}$ che riconosca L, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L$.

2. *(15 punti)* Dimostrare che per ogni NFA $\mathcal{A}$ esiste un DFA $\mathcal{B}$ equivalente ad $\mathcal{A}$, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$. Occorre definire ogni termine utilizzato nella prova.

3. *(15 punti)* Si consideri la seguente MdT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, dove $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{accept}, q_{reject}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$ e la funzione $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è definita come segue

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= (q_1, b, R), \quad \delta(q_0, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_0, \sqcup) = (q_{reject}, \sqcup, R), \\
\delta(q_1, a) &= (q_1, b, R), \quad \delta(q_1, b) = (q_{reject}, b, R), \quad \delta(q_1, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R), \\
\delta(q_2, a) &= (q_1, b, R), \quad \delta(q_2, b) = (q_{reject}, b, R), \quad \delta(q_2, \sqcup) = (q_{reject}, \sqcup, R)
\end{aligned}$$

(1) Descrivere il diagramma di stato di M.

(2) Scrivere la computazione di M, dalla configurazione iniziale a una configurazione di arresto, sull'input *baa*. Occorre specificare tutti i passi della computazione e tutte le configurazioni intermedie che intervengono nella computazione.

(3) Definire il linguaggio riconosciuto da M.

4. *(15 punti)*

- Enunciare il teorema di Rice.
- Dire, giustificando la risposta, se è possibile utilizzarlo per mostrare che il seguente linguaggio è indecidibile.

$$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ è un automa finito deterministico}\}.$$

5. *(15 punti)*

    (1) Definire la classe di complessità NP.

    (2) Fornire la definizione di riduzione polinomiale

    (3) Definire il concetto di NP-completezza.

6. *(15 punti)*

   1) Definire i linguaggi 3-SAT e $CLIQUE$ (occorre definire ogni termine utilizzato nella definizione).

   2) Data la seguente formula booleana

   $$\Phi = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$$

   definire il grafo G e l'intero k tali che $\langle G, k\rangle$ sia l'immagine di $\langle \Phi \rangle$ nella riduzione polinomiale di 3-SAT a $CLIQUE$.

7. Enunciare il Pumping Lemma e utilizzarlo per mostrare che il linguaggio

$$L = \{xcy \mid x, y \in \{a, b\}^* \text{ e il numero di occorrenze di } a \text{ in } x \text{ è maggiore del numero di occorrenze di } b \text{ in } y\}$$

non è regolare.

Elementi di teoria della Computazione (Prof.ssa De Felice)	Anno Acc. 2013-2014
Prova Scritta - 23 gennaio 2015	

Nome e Cognome, email: Matricola:

Spazio riservato alla correzione: non scrivere in questa tabella.

1	2	3	4	5	6	Tot.	7
						/3	SI NO

La domanda n.7 non concorre al raggiungimento della sufficienza, ma solo alla determinazione del voto finale.

Discussione prova scritta e calendario esami orali:
Martedì 27 gennaio, ore 14, IV piano, Stecca VII, Studio N. 49

1. *(15 punti)* Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ ha il carattere b solo nelle posizioni dispari$\}$. Ad esempio $baa \in L$, $babaa \in L$, $aba \notin L$. Definire un automa finito deterministico $\mathcal{A}$ che riconosca L, cioè tale che $L(\mathcal{A}) = L$.

2. *(15 punti)*

   - Dare la definizione di espressione regolare, indicando con precisione il linguaggio rappresentato.
   - Sia $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ ha il carattere } b \text{ solo nelle posizioni dispari}\}$. Ad esempio $baa \in L$, $babaa \in L$, $aba \notin L$. Definire un'espressione regolare che descriva L.

3. *(15 punti)* Definire il linguaggio A_{TM}. Dimostrare che A_{TM} è indecidibile.

4. *(15 punti)* Si consideri la seguente MdT $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$, dove $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_{accept}, q_{reject}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \sqcup\}$ e la funzione $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è definita come segue

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_0, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_0, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R), \\
\delta(q_1, a) &= (q_2, b, R), \quad \delta(q_1, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_1, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R), \\
\delta(q_2, a) &= (q_1, a, R), \quad \delta(q_2, b) = (q_2, b, R), \quad \delta(q_2, \sqcup) = (q_{accept}, \sqcup, R)
\end{aligned}$$

(1) Descrivere il diagramma di stato di M.

(2) Scrivere la computazione di M, dalla configurazione iniziale a una configurazione di arresto, sull'input *abab*. Occorre specificare tutti i passi della computazione e tutte le configurazioni intermedie che intervengono nella computazione.

(3) Descrivere il comportamento della macchina su input a^n, $n \geq 0$

5. *(15 punti)*

   (1) Definire la classe di complessità NP.

   (2) Fornire la definizione di riduzione polinomiale

   (3) Definire il concetto di NP-completezza.

6. *(15 punti)* Sia $L = \{a^n b^k c^n d^k \mid n, k \geq 0\}$. Rispondere alle seguenti domande, giustificando la risposta. È possibile limitarsi a una descrizione ad alto livello delle macchine di Turing utilizzate.

    - L appartiene a P?
    - L appartiene a NP?
    - L è NP-completo?

7. Un cammino hamiltoniano in G è un cammino in G che attraversa ogni vertice in G una e una sola volta.

   Un ciclo hamiltoniano in G è un ciclo in G tale che, rimuovendo in esso un arco, diventa un cammino hamiltoniano. Quindi, un ciclo hamiltoniano in G è un ciclo $(v_0, \ldots, v_k)$ in G tale che $v_0 = v_k$ e $(v_1, \ldots, v_k)$ è un cammino hamiltoniano. Siano:

   $UHP = \{\langle G \rangle \mid G$ è un grafo non orientato ed esiste un cammino hamiltoniano in $G\}$,

   $UHC = \{\langle G \rangle \mid G$ è un grafo non orientato ed esiste un ciclo hamiltoniano in $G\}$.

   Dimostrare **(rigorosamente e dettagliatamente)** che $UHP \leq_P UHC$.
   Suggerimento:
   Dato $G = (V, E)$, considerare il grafo $G' = (V', E')$ con $V' = V \cup \{v\}$, $v \notin V$ e $E' = E \cup \{(u, v) \mid u \in V\}$.