Polinomios de Taylor

Prof. Jorge Brisset
Instituto de Profesores "Artigas" - Matemática II

2006

Índice

1. Introducción

Acabamos de estudiar las series de potencias. En ese tema, demostramos que toda serie de potencias, es decir, toda serie de la forma $\sum a_n x^n$ tiene asociado un radio de convergencia $\mathtt{R}$ que podía ser 0 , positivo , o $+\infty$.

Luego, a cada serie de potencias le asociamos una función con dominio (al menos) $(-\mathtt{R},\mathtt{R})$ de la siguiente manera: $f:(-\mathtt{R},\mathtt{R})\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Dicha función f goza de la propiedad de derivabilidad (obviamente de continuidad e integrabilidad), obteniendo expresiones para su función derivada y para la primitiva que verifica $F(0)=0$, de la siguiente manera:

$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1}$ y $F(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

Estos resultados nos permitieron encontrar, a partir de funciones dadas por una serie de potencias, otros nuevos.

Por ejemplo, conociendo que $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ pudimos obtener que $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$ y que también $F(x)=-\mathrm{L}\,(1-x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Desde otro punto de vista, podríamos decir que empezamos a obtener la expresión en series de potencia de otras funciones. Pero, ¿qué vinculación existe entre la serie y la función? Como respuesta a esta pregunta obtuvimos que sí existe una vinculación y que está dado por $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ en el caso de la serie "centrada" en el origen y por supuesto que $a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ en el caso de series de la forma $\sum a_n\,(x-a)^n$.

De esta manera, toda fución de clase C^∞ en cierto intervalo $(a-\mathtt{R},a+\mathtt{R})$ obtiene unívocamente una serie de potencias asociada a ella cuya expresión es: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Obrando con este criterio obtuvimos la expresión en serie de potencias de la función $f: f(x)=\operatorname{sen} x$.

La serie obtenida fue la siguiente: $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\cdots=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Lo que no sabemos es si la función obtenida (dada por la serie de potencias) resulta ser igual a $f(x)=\operatorname{sen} x$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Esta pregunta será respondida, luego de algunos resultados, en forma afirmativa. Pero no es ese nuestro único objetivo. Si tomamos una suma parcial de la serie de potencias en cuestión, ¿son "parecidas" las funciones a sus polinomios [1] asociados? ¿Y si la función solo poseyera derivadas en $x=a$ de orden 23, resultará útil "aproximar" a tal función con $\sum\limits_{n=0}^{23}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$?

Intentaremos dar respuesta a estas interrogantes a continuación.

[1] Nótese que al ser suma parcial de una serie de potencias, lo que tenemos es un polinomio.

2. Polinomios o fórmula de Taylor

Definición 1 *Sea una función* $f : I \to \mathbb{R}$ *(I un intervalo) tal que* f *admite derivadas de orden* n *en cierto entorno* $E(a)$, *con* $a \in \overset{\circ}{I}$. *Llamaremos polinomio de Taylor (Brook Taylor (1685-1731)) de orden* n *generado por* f *en* $x = a$ *al siguiente polinomio:*

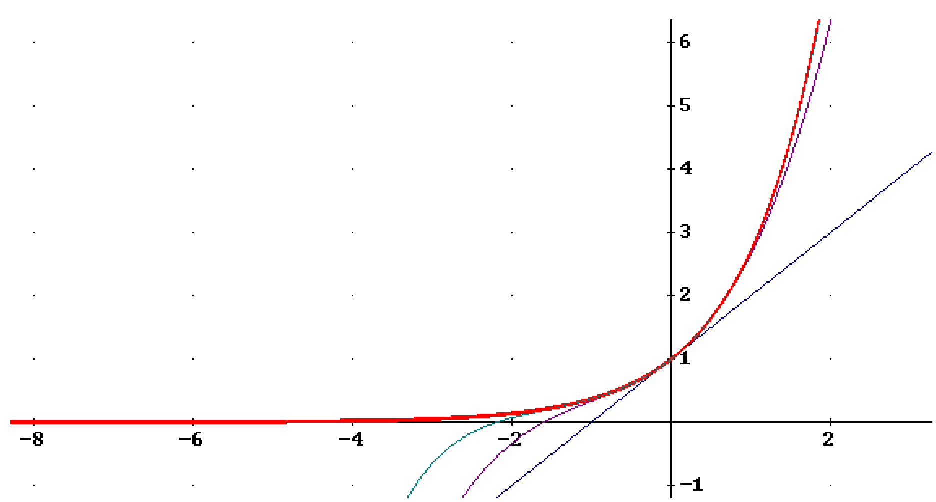
$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observación 2 *Al ser tomado de esta forma tenemos garantizado que los valores de las derivadas iteradas de* f *en* $x = a$ *coinciden con las del polinomio ¿por qué?*

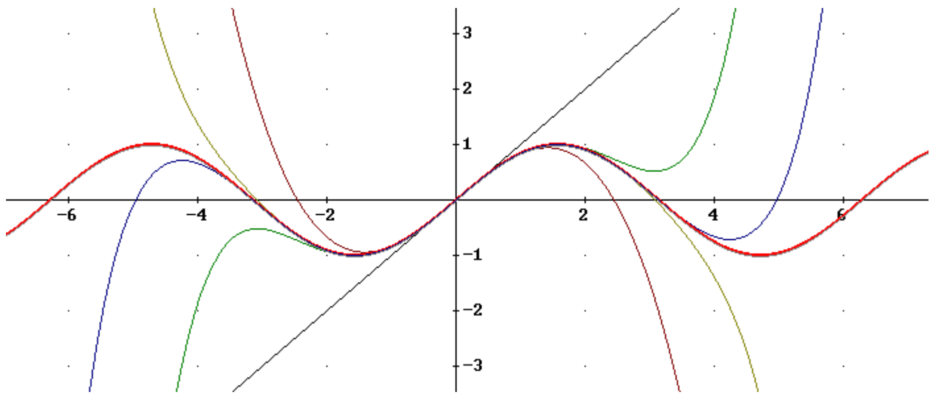
Notación 3 *Escribiremos a* $p_n(x)$ *de la siguiente manera:* $T_n(f, a)$ *o* $T(f, a, n)$ *que significa polinomio de Taylor de orden* n *generado por* f *en* $x = a$. *En algunos casos lo escribiremos* $T_n(f, a, x)$ *para poner énfasis en el hecho de que su variable es* x, *o también* $T(f, a, n)(x)$

Observación 4 *En los casos que trabajamos con* $a = 0$, *los polinomios reciben el nombre de polinomios de Mac Laurin (Colin Mac Laurin (1698-1746)).*

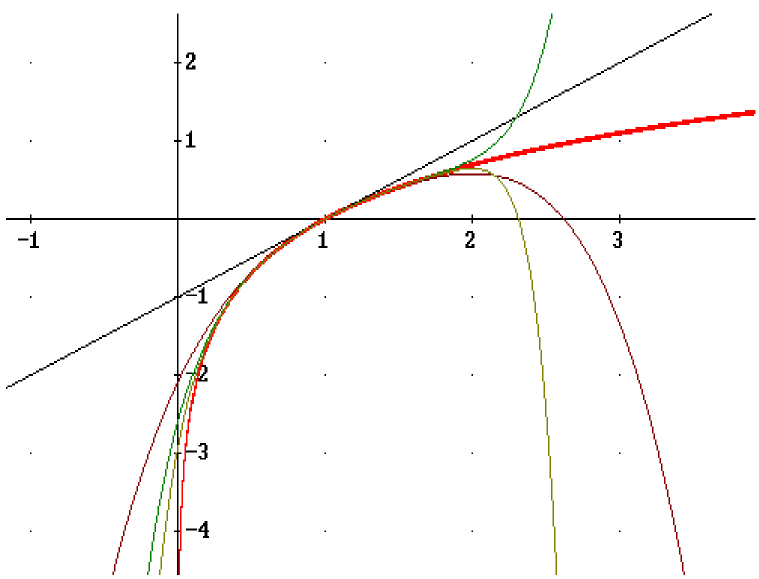
Ejemplo 5 $T_4(e^x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$. *En la gráfica se representa a la función exponencial junto a algunos de sus polinomios de Mac Laurin*



Ejemplo 6 $T_5(\operatorname{sen} x, 0) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. *En la gráfica se representa a la función seno junto a algunos de sus polinomios de Mac Laurin*



Ejemplo 7 $T_3(L\,x, 1) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$. *En la gráfica se representa a la función logarítmica junto a algunos de sus polinomios de Taylor en* $x = 1$.



Observación 8 *En los ejemplos anteriores podemos observar que no sólo tenemos coincidencias en* $x = a$ *sino que además de eso "el parecido" se extiende.*

Los puntos siguientes intentarán dar una explicación a nuestra observación.

3. Propiedades de los polinomios de Taylor

Para obtener los polinomios de Taylor, sólo contamos hasta el momento con la definición. Esto significa que para obtenerlos no nos queda otra opción que derivar reiteradas veces la función, lo que además de tedioso resulta poco práctico. A continuación veremos algunas propiedades que nos permitirán obtener polinomios de Taylor a partir de otros conocidos.

Sean f y g funciones reales en las condiciones de la definición 1, las principales propiedades son las siguientes:

1. Linealidad:

   $T_n(\alpha f + \beta g, a) = \alpha T_n(f, a) + \beta T_n(g, a)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

   Ejemplo 9 $T_3(2e^x + sen\, x) = 2 + 3x + x^2 + \frac{1}{6}x^3$

2. Derivación (e integración):

   $(T_n(f, a))' = T_{n-1}(f', a)$

   Ejemplo 10 $T_7(sen\, x, 0) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$,
   entonces $T_6(\cos x, 0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6$

3. Sustitución: [2]

   Si $g(x) = f(cx)$ entonces, $T_n(f, ca, cx) = T_n(g, a, x)$ (ver notación 3)

   Ejemplo 11 *Busquemos el polinomio de Taylor de la función* $f(x) = \arctan x$ *en* $x = 0$.
   Como $T_n(\frac{1}{1-x}, 0) = x + x^2 + x^3 + \cdots x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i$ *, entonces*
   $T_n(\frac{1}{1+x}, 0) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^i$ *y también* $T_{2n}(\frac{1}{1+x^2}, 0) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^{2i}$
   y por lo tanto $T_{2n+1}(\arctan x, 0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2i+1}$
   Veamos a continuación los gráficos de $\arctan x$ *y de alguno de sus polinomios de Taylor.*

---

[2]Esta propiedad es mucho más general, es posible efectuar composiciones “más complicadas”, como por ejemplo obtener el $T_{2n}(e^{x^2}, 0)$ a partir del $T_n(e^x, 0)$.

4. Otras operaciones.

   También podemos obtener el desarrollo de productos y cocientes de funciones a partir del desarrollo de cada una de las involucradas. Se recomienda ver [5].

Ejercicio 12 *Encuentre la serie de potencias asociada de la función*

$f(x) = \arctan x$ *y determine su radio de convergencia. Interprete el resultado observando el gráfico anterior.*

Definición 13 *Sea f en las mismas condiciones que en la definición 1. Llamamos resto de Taylor de orden n en $x = a$ a la función $r_n : I \to R$ tal que $r_n(x) = f(x) - T_n(f, a, x)$.*[3]

Teorema 14 *Sea $r : I \to \mathbb{R}$ una función tal que sea n veces derivable en cierto entorno $E(a) \subset I$.*

Entonces, $\lim\limits_{x \to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow r(a) = r'(a) = \cdots\cdots = r^{(n)}(a) = 0$

Demostración. Realícela como ejercicio. Se sugiere utilizar adecuadamente la regla de L'Hôpital. ■

Corolario 15 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable hasta el orden n en $x = a$, entonces $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$ con $\lim\limits_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$ (Es decir, el resto enésimo de Taylor es un infinitésimo de orden mayor que n en $x = a$.)*

Demostración. Como por definición de resto de Taylor, $r_n(x) = f(x) - T_n(f, a)$, tenemos que r_n es derivable n veces y que además todas sus derivadas hasta el orden n y su valor funcional en $x = a$ son cero, entonces por el Teorema 14 tenemos que $\lim\limits_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$. ■

Teorema 16 *(resto de Lagrange)*

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función tal que es derivable de orden $(n+1)$ en cierto entorno $E(a) \subset I$, entonces para todo $x \neq a$, $x \in I$ se cumple que:

$f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^n + r_n(x)$

donde $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *(llamado resto de Lagrange)*

Demostración. A cargo del alumno. ■

4. Aplicaciones

A continuación veremos algunas de las aplicaciones de los polinomios de Taylor:

[3] Utilizamos la notación r_n a modo de simplificarla, pues hubiera sido correcto usar $r_{n,a}$.

- Cálculo de límites.
- Aproximaciones con acotación del error.
- Estudio de extremos relativos.
- Clasificación de series numéricas.

4.1. Cálculo de límites

Para el cálculo de límites es útil recordar los conceptos de orden y de parte principal de un infinitésimo.

Definición 17 *Sea f un infinitésimo en $x = a$. Decimos que $q(x) = \beta(x-a)^\alpha$ es la parte principal del infinitésimo f en $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\beta(x-a)^\alpha} = 1$.*

En este caso se dice que f es un infinitésimo de orden α en $x = a$.

Ejemplo 18 *Calculemos $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{sen\, x - x}$.*

Utilizando los desarrollos de Mac Laurin de las funciones que se encuentran tanto en el numerador como en el denominador, es decir, como

$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{6}x^3 + r_3(x)$, *con* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r_n(x)}{x^3} = 0$

y $sen\, x - x = -\frac{1}{6}x^3 + r'_n(x)$, *con* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{r'_n(x)}{x^3} = 0$

Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2}{sen\, x - x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + r_3(x)}{-\frac{1}{6}x^3 + r'_n(x)} = -1$

Ejemplo 19 *Sea $\varphi : \varphi(x) = L\,(1 - ax) + e^{bx} - \cos x$.*

Determine los valores de a y b para que φ sea un infinitésimo del mayor orden posible en $x = 0$. En ese caso indique su orden y parte principal.

Obtengamos pues, el desarrollo de Mac Laurin de φ. Para ello usemos los respectivos desarrollos de las funciones que determinan φ.

$L\,(1 - ax) = (-a)\,x + \left(-\frac{1}{2}a^2\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3}a^3\right)x^3 + \left(-\frac{1}{4}a^4\right)x^4 + r_4(x)$

$e^{bx} = 1 + bx + \left(\frac{1}{2}b^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{6}b^3\right)x^3 + \left(\frac{1}{24}b^4\right)x^4 + \widetilde{r}_4(x)$

$-\cos x = -1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \overline{r}_4(x)$

Cada uno fue obtenido, o bien directamente, o bien a través del uso adecuado de propiedades. De ellos obtenemos el desarrollo de φ en $x = 0$ de orden 4. Este es:

$\varphi(x) = (-a + b)\,x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{6}b^3\right)x^3 + \left(\frac{1}{24}b^4 - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{24}\right)x^4 + r_4(x) + \widetilde{r}_4(x) + \overline{r}_4(x)$.

Para que sea del mayor orden posible debemos exigir $a = b$

Con lo que

$\varphi(x) = \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{6}a^3\right)x^3 + \left(\frac{1}{24}a^4 - \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{24}\right)x^4 + r_4(x) + \widetilde{r}_4(x) + \overline{r}_4(x)$.

De hecho, $\varphi(x) = \left(\frac{1}{2}\right) x^2 + r_2(x)$, dependiendo el orden del resto del valor de a. El lector puede preguntarse sobre cómo saber hasta qué orden desarrollar; la experiencia nos enseñará a ver qué hacer en los distintos casos. Analice este ejemplo y deduzca hasta qué orden hubiese sido suficiente desarrollar cada función.

4.2. Aproximaciones con acotación del error

Una de las aplicaciones del resto de Lagrange, es la de cuantificar el error cometido en aquellos casos en los cuales sustituimos una función por uno de sus polinomios de Taylor. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 20 *Sea $f : f(x) = e^x$. Su desarrollo de Mac Laurin con resto de Lagrange es: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$, donde $\theta \in (0,x)$ o al $(x,0)$. Si lo utilizamos para hallar e^{x_0}, es decir, si decimos que $e^{x_0} \approx 1 + x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x_0^n$, ¿qué error cometeríamos? o mejor dicho, ¿cuál sería el máximo error que estaríamos cometiendo?*

La idea es acotar $\left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}x_0^{n+1}\right|$. Veamos,

$\left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}x_0^{n+1}\right| = \left|e^\theta\right| \left|\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}\right| < e^{[x_0]+1} \left|\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}\right| < 3^{[x_0]+1} \left|\frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ [4]

En conclusión, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}x_0^{n+1}\right| = 0$ cualquiera haya sido x_0. Por lo tanto, $T_n(e^x, 0)$ aproxima a e^x hasta el nivel de exigencia que queramos en todo $\mathbb{R}$. Lo que no debería sorprendernos demasiado pues fue demostrado anteriormente que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 21 *En la introducción quedó pendiente una pregunta en relación a la función* seno. *Trataremos de responderla a continuación.*

Sabemos que:

$sen\, x = x - \frac{x}{3!} + \frac{x}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$.

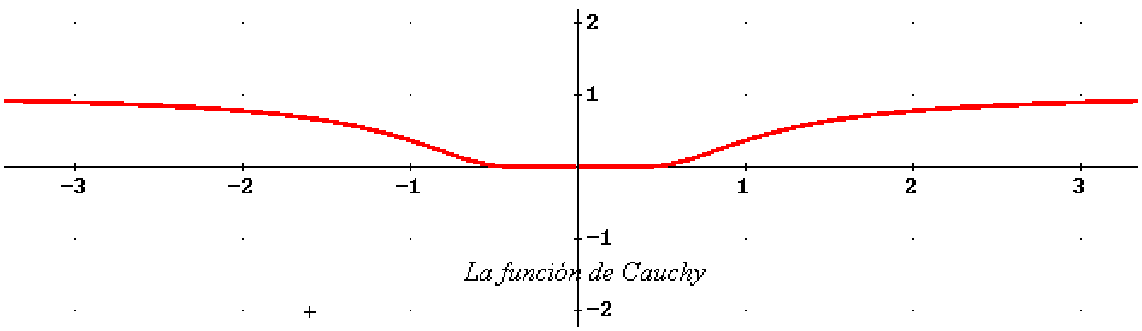
Nuevamente busquemos acotar $\left|\frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right|$, notemos que para hacerlo pudimos aprovechar que el coeficiente de orden $(2n+2)$ de esta función (y lo mismo ocurre con $\cos x$) es cero.

$\left|\frac{f^{(2n+2)}(\theta)}{(2n+2)!}x^{2n+2}\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ cuyo límite es cero cualquiera haya sido x prefijado. (Esta última desigualdad fue posible porque las funciones seno y coseno están acotadas). Por lo tanto, $T_{2n+1}(sen\, x, 0)$ aproxima a $sen\, x$ hasta el nivel de exigencia que queramos en todo $\mathbb{R}$, casualmente en todo el intervalo de convergencia de $\sum \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)$.

Ejemplo 22 *Recordemos que no siempre es util esta herramienta, la función de Cauchy $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , si\ x \neq 0 \\ 0 & , si\ x = 0 \end{cases}$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y sin embargo su*

[4] Explique esas desigualdades.

polinomio de Mac Laurin es el polinimio nulo, por lo que no es bueno para aproximar f más que en $x = 0$, en donde ya sabemos que resulta ser nula.



La función de Cauchy

4.3. Estudio de extremos relativos.

Antes de ver ejemplos sobre este punto demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 23 *Sea $f : I \to R$ tal que existen las $f^{(n)}(a)$, $f^{(n-1)}$ es continua en un $E(a) \subset I$. Si $f^{'}(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) \neq 0$, entonces*

(a) Si $n = \dot{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } f^{(n)}(a) > 0 & f \text{ presenta un mínimo relativo en } x = a \\ \text{si } f^{(n)}(a) < 0 & f \text{ presenta un máximo relativo en } x = a \end{cases}$

(b) Si $n \neq \dot{2}$ $\quad f$ no presenta un extremo relativo en $x = a$

Demostración. Como f satisface las condiciones de la fórmula de Taylor, también lo hace la función $f - f(a)$. El desarrollo de esta última función en $x = a$ es:

$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$, donde $\lim\limits_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Es decir, $f(x) - f(a) = (x-a)^n \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} \right)}$ en donde la expresión señalada tiene límite $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Por conservación del signo existe un $E(a)$ en el cual dicha expresión tiene el signo de $f^{(n)}(a)$.

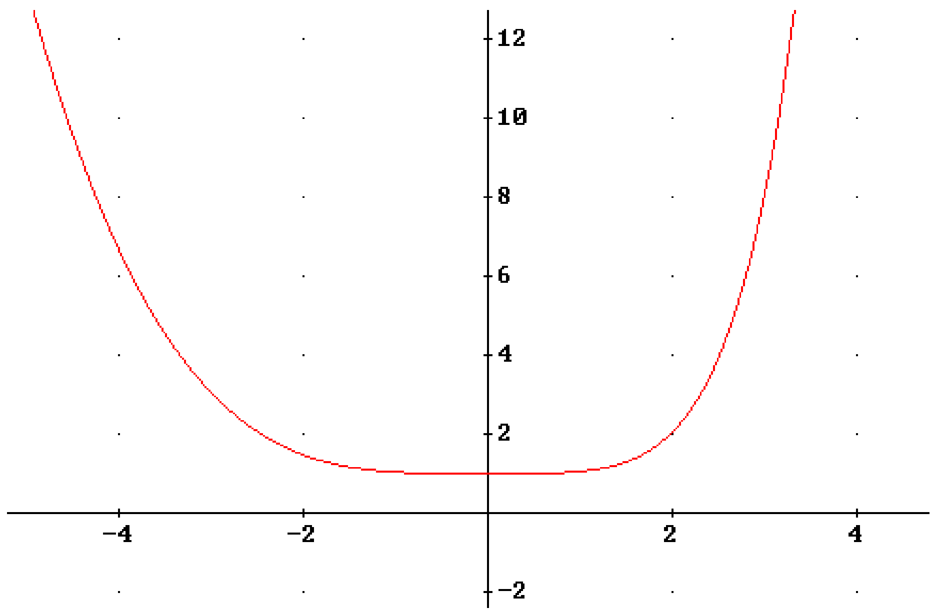
Por lo tanto, dado que el signo en el $E(a)$ mencionado de $(x-a)^n$ es conocido y depende de la paridad de n, obtenemos lo afirmado en la tesis. ■

Ejemplo 24 *Demuestre que la función $f : f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ tiene un mínimo en $x = 0$.*

Usando lo demostrado en el punto anterior,

como $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ *y* $f^{iv}(0) = 1$, *tenemos que* f *presenta un mínimo relativo en* $x = 0$.

Mostramos a continuación un bosquejo de su gráfico:



4.4. Clasificación de series numéricas

Este punto vale la pena ser aclarado. La experiencia con la contamos corrigiendo exámenes nos permitió encontrarnos con un preconcepto de parte de los alumnos: "Taylor es uno de los criterios para clasificar series". Sepa el alumno que no es cierto, al clasificar series numéricas aplicamos los criterios adecuados y que en ocasiones trabajar con el desarrollo de Taylor de una función (casi siempre una función auxiliar que deberá tomarse adecuadamente), puede facilitar la tarea. Veamos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 25 *Clasifique* $\sum \left(sen\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$. *Como se trata de una serie de términos negativos, por las propiedades conocidas*[5]*, buscaremos una sucesión equivalente a* $\left(sen\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$*, ya que la serie que genera es de la misma clase que la dada.*

Consideremos la función auxiliar $f : f(x) = sen\,(x) - x$*. Usando el desarrollo de Mac Laurin de* f *podemos concluír que* $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + R_3\,(x)$*, con* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_3\,(x)}{x^3} = 0$*. Por esta razón, no solamente* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3$ *sino que, además* $sen\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{-1}{6n^3}$

Luego, como $\sum \frac{1}{n^3}$ *converge, por ser armónica (con* $\alpha > 1$*), entonces (indique qué propiedades avalan la conclusión)* $\sum \left(sen\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ *converge.*

[5] ¿nota cuáles son esas propiedades?

Referencias

[1] Tom M. Apostol, *Calculus, Volumen I*, Editorial Reverté, S. A., 1980.

[2] Stefan Banach, *Cáculo Diferencial e Integral*, Editorial Limusa, S. A., 1991.

[3] Miguel A. Galmés y Jorge Moretti, *Series*, Oficina de Apuntes CECEA.

[4] Elon Lages Lima, *Curso de Análise, Volume 1*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

[5] Rodolfo Louro, *Fórmulas de Taylor*, Oficina de Publicaciones CEI, 1995.

[6] J. Rey Pastor, P.Pi Calleja y C.A Trejo, *Análisis Matemático*, Editorial Kapelusz octava ed.,1979.

[7] M. Spivak, *Calculus*, Editorial Reverté, S. A., 1992.