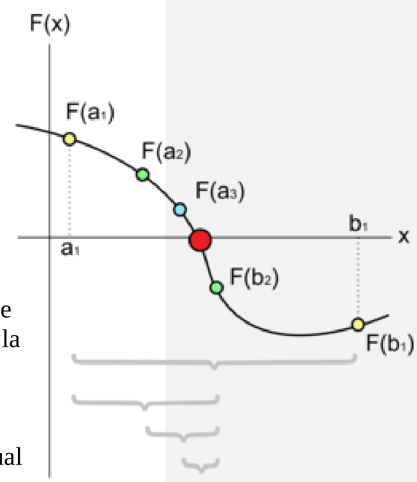
La frase más excitante que se puede oír en ciencia,
la que anuncia nuevos descubrimientos, no es "¡Eureka!"
sino "qué extraño" .



Método de bisección

Unas cuantas iteraciones del método de bisección aplicadas en un intervalo [a_1;b_1]. El punto rojo es la raíz de la función.

En matemáticas, el **método de bisección** es un algoritmo de búsqueda de raíces que trabaja dividiendo el intervalo a la mitad y seleccionando el subintervalo que tiene la raíz.

Este es uno de los métodos más sencillos y de fácil intuición para resolver ecuaciones en una variable. Se basa en el teorema del valor intermedio (TVI), el cual establece que toda función continua *f* en un intervalo cerrado [a,b] toma todos los valores que se hallan entre *f*(*a*) y *f*(*b*). Esto es que todo valor entre *f*(*a*) y *f*(*b*) es la imagen de al menos un valor en el intervalo [a,b]. En caso de que *f*(*a*) y *f*(*b*) tengan signos opuestos, el valor cero sería un valor intermedio entre *f*(*a*) y *f*(*b*), por lo que con certeza existe un *p* en [a,b] que cumple *f*(*p*)=0. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación *f*(*a*)=0.

El método consiste en lo siguiente: de antemano, debe existir seguridad sobre la continuidad de la función *f*(*x*) en el intervalo [*a*,*b*]. A continuación se verifica que $f(a)\cdot f(b)<0$. Se calcula el punto medio *m* del intervalo [*a*,*b*] y se evalúa *f*(*m*) si ese valor es igual a cero, ya hemos encontrado la raíz buscada. En caso de que no lo sea, verificamos si *f*(*m*) tiene signo opuesto con *f*(*a*) o con *f*(*b*). Se redefine el intervalo [*a, b*] como [*a, m*] ó [*m, b*] según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo. Con este nuevo intervalo se continúa sucesivamente encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la precisión deseada. En la siguiente figura se ilustra el procedimiento descrito.

El método de bisección es menos eficiente que el método de Newton, pero es mucho más seguro para garantizar la convergencia. Si *f* es una función continua en el intervalo [*a*, *b*] y *f*(*a*)*f*(*b*) < 0, entonces este método converge a la raíz de *f*. De hecho, una cota del error absoluto es:

$$\frac{|b-a|}{2^n}$$

en la *n*-ésima iteración. La bisección converge linealmente, por lo cual es un poco lento. Sin embargo, se garantiza la convergencia si f(*a*) y f(*b*) tienen distinto signo.

Si existieran más de una raíz en el intervalo entonces el método sigue siendo convergente pero no resulta tan fácil caracterizar hacia qué raíz converge el método.

Algoritmo

Para aplicar el método consideremos tres sucesiones $a_n \leq p_n \leq b_n$ definidas por las siguientes relaciones:

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n) \cdot f(p_n) < 0 \\ p_n & \text{si } f(a_n) \cdot f(p_n) > 0 \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } f(b_n) \cdot f(p_n) < 0 \\ p_n & \text{si } f(b_n) \cdot f(p_n) > 0 \end{cases}$$

Donde los valores iniciales vienen dados por:

$$a_0 := a, \quad b_0 := b$$

Se puede probar que las tres sucesiones convergen al valor de la única raíz del intervalo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Programa para encontrar raíces utilizando el método de la bisección en Microsoft Excel

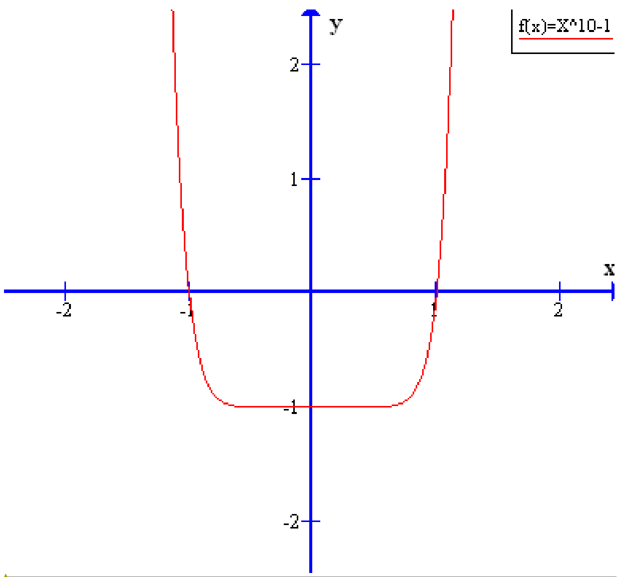
A manera de recordatorio, para que aparezcan solamente 6 cifras significativas, en Excel esto se hace en el menú Formato, Celdas..., Número, Categoría Número, Posiciones decimales 6. Para poner el signo porcentual: menú Formato, Celdas..., Número, Categoría Porcentaje.

EJEMPLO 1

Encontrar la raíz de f(x) = x^10 – 1 utilizando el Método de la Bisección con a = 0; b = 1.3; Tol = 0.01

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	**MÉTODO DE LA BISECCIÓN PARA ENCONTRAR RAÍCES DE FUNCIONES**									
2	EJERCICIO 1									
3	a= 0		b= 1.3		Tol= 0.01				Función=	x^10-1
4										
5	n	a	b	pm	f(a)	f(b)	f(pm)	Error	Error relativo	Respuesta/Raíz de la función
6	1	0.000000	1.300000	0.650000	-1.000000	12.785849	-0.986537			
7	2	0.650000	1.300000	0.975000	-0.986537	12.785849	-0.223670	0.325000	33.333333%	
8	3	0.975000	1.300000	1.137500	-0.223670	12.785849	2.626720	0.162500	14.285714%	
9	4	0.975000	1.137500	1.056250	-0.223670	2.626720	0.728491	0.081250	7.692308%	
10	5	0.975000	1.056250	1.015625	-0.223670	0.728491	0.167707	0.040625	4.000000%	
11	6	0.975000	1.015625	0.995313	-0.223670	0.167707	-0.045898	0.020313	2.040816%	
12	7	0.995313	1.015625	1.005469	-0.045898	0.167707	0.056053	0.010156	1.010101%	
13	8	0.995313	1.005469	1.000391	-0.045898	0.056053	0.003913	0.005078	0.507614%	1.000391

Gráfico de la Función



La raíz aproximada de la función es 1.000391 con un error de 0.01.

Como se puede apreciar en la gráfica, la raíz exacta de la función es de 1, pero con 8 iteraciones se llegó a 1.000391. Si se continuara con más iteraciones, se podría llegar a un valor aun más cercano al 1 exacto, pero el error tendría en ese caso que ser menor que 0.01, que es el 1%.

EJEMPLO 2

Resolver $f(x)=e^{-x}+4x^3-5; a=1; b=2; Tol=0.001$ utilizando el método de la Bisección.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

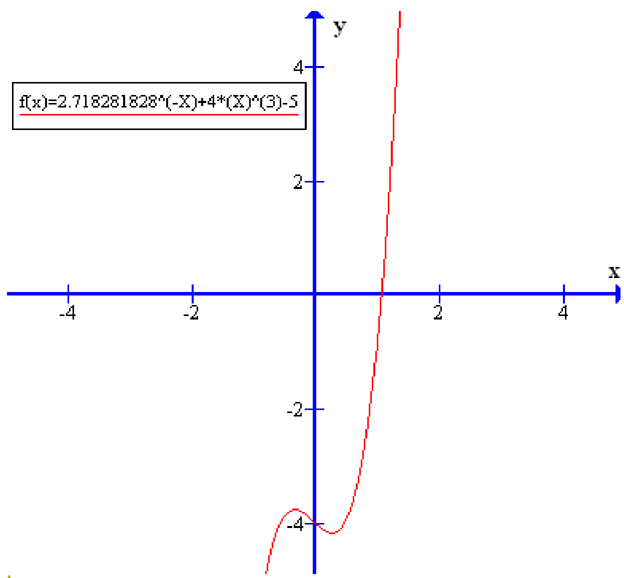
Con formato: Fuente: (Predeterminado) Georgia, 10,5 pto, Color de fuente: Color personalizado(RGB(68,85,85))

Con formato: Fuente: (Predeterminado) Georgia, 10,5 pto, Color de fuente: Color personalizado(RGB(68,85,85))

Con formato: Fuente: (Predeterminado) Georgia, 10,5 pto, Color de fuente: Color personalizado(RGB(68,85,85))

14	EJERCICIO 2									
15	a= 1		b= 2		Tol= 0.001				Función=	e^(-x)+4*x^(3)-5
16										
17	n	a	b	pm	f(a)	f(b)	f(pm)	Error	Error relativo	Respuesta/Raíz de la función
18	1	1.000000	2.000000	1.500000	-0.632121	27.135335	8.723130			
19	2	1.000000	1.500000	1.250000	-0.632121	8.723130	3.099005	0.250000	20.000000%	
20	3	1.000000	1.250000	1.125000	-0.632121	3.099005	1.019965	0.125000	11.111111%	
21	4	1.000000	1.125000	1.062500	-0.632121	1.019965	0.143442	0.062500	5.882353%	
22	5	1.000000	1.062500	1.031250	-0.632121	0.143442	-0.256598	0.031250	3.030303%	
23	6	1.031250	1.062500	1.046875	-0.256598	0.143442	-0.059688	0.015625	1.492537%	
24	7	1.046875	1.062500	1.054688	-0.059688	0.143442	0.041094	0.007813	0.740741%	1.054688

Gráfico de la Función



La raíz aproximada de la función es 1.054688 con un error de 0.001.

EJEMPLO 3

Resolver $f(x) = 3x + sen(x) - e^{x}; a = 0; b = 1; Tol = 0.001$ utilizando el método de Bisección.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
25	EJERCICIO 3									
26	a= 0		b= 1		Tol= 0.001				Función=	3*x+sin(x)-2.718281828^(x)
27										
28	n	a	b	pm	f(a)	f(b)	f(pm)	Error	Error relativo	Respuesta/Raíz de la función
29	1	0.000000	1.000000	0.500000	-1.000000	1.123189	0.330704			
30	2	0.000000	0.500000	0.250000	-1.000000	0.330704	-0.286621	0.250000	100.000000%	
31	3	0.250000	0.500000	0.375000	-0.286621	0.330704	0.036281	0.125000	33.333333%	
32	4	0.250000	0.375000	0.312500	-0.286621	0.036281	-0.121899	0.062500	20.000000%	
33	5	0.312500	0.375000	0.343750	-0.121899	0.036281	-0.041956	0.031250	9.090909%	
34	6	0.343750	0.375000	0.359375	-0.041956	0.036281	-0.002620	0.015625	4.347826%	
35	7	0.359375	0.375000	0.367188	-0.002620	0.036281	0.016886	0.007813	2.127660%	
36	8	0.359375	0.367188	0.363281	-0.002620	0.016886	0.007147	0.003906	1.075269%	
37	9	0.359375	0.363281	0.361328	-0.002620	0.007147	0.002267	0.001953	0.540541%	0.361328

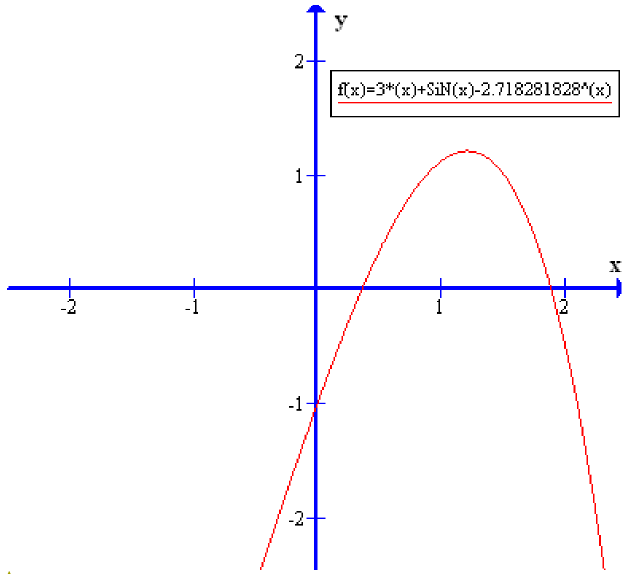
Gráfico de la Función

Con formato: Fuente: (Predeterminado) Georgia, 10,5 pto, Color de fuente: Color personalizado(RGB(68,85,85))

Con formato: Fuente: (Predeterminado) Georgia, 10,5 pto, Color de fuente: Color personalizado(RGB(68,85,85))

Con formato: Fuente: (Predeterminado) Georgia, 10,5 pto, Color de fuente: Color personalizado(RGB(68,85,85))

Con formato: Fuente: (Predeterminado) Georgia, 10,5 pto, Color de fuente: Color personalizado(RGB(68,85,85))



La raíz aproximada de la función es 0.361328 con un error de 0.001.

FÓRMULAS PARA PROGRAMAR EL MÉTODO DE LA BISECCIÓN EN MICROSOFT EXCEL

En la tabla que se presentará a continuación, no aparecen las fórmulas para cada una de las celdas porque serían demasiadas fórmulas. Basta con presentar algunas y todas las demás se deducen fácilmente. Además, al estar trabajando en Excel, bastará con copiar y luego pegar las fórmulas o celdas de una de las filas superiores porque las celdas de todas las demás filas serán las mismas, y Excel automáticamente irá cambiando correctamente todos los valores de forma apropiada. La tabla de fórmulas utilizada es la siguiente:

Celda	Fórmula
B15	= 1
D15	= 2
F15	= 0.001
A18	= 1
B18	= B15
C18	= D15
D18	= PROMEDIO (B18:C18) ó PROMEDIO(B18,C18)

Con formato: Fuente: (Predeterminado) Georgia, 10,5 pto, Color de fuente: Color personalizado(RGB(68,85,85))

E18	= 2.718281828^(-B18)+4*(B18)^(3)-5
F18	= 2.718281828^(-C18)+4*(C18)^(3)-5
G18	= 2.71828182^(-D18)+4*(D18)^(3)-5
A19	= A18+1
B19	= SI(B18*G18>0,D18,B18)
C19	= SI(B19=D18,C18,D18)
D19	= PROMEDIO(B19,C19)
E19	= 2.718281828^(-B19)+4*(B19)^(3)-5
F19	= 2.718281828^(-C19)+4*(C19)^(3)-5
G19	= 2.718281828^(-D19)+4*(D19)^(3)-5
H19	= ABS(D19-D18)
I19	= H19/D19
J19	= SI(I19<=F$3,D19,"")
J24	SI(I19<=F$3,D24,"")

Autor:

Jaime Oswaldo Montoya Guzmán

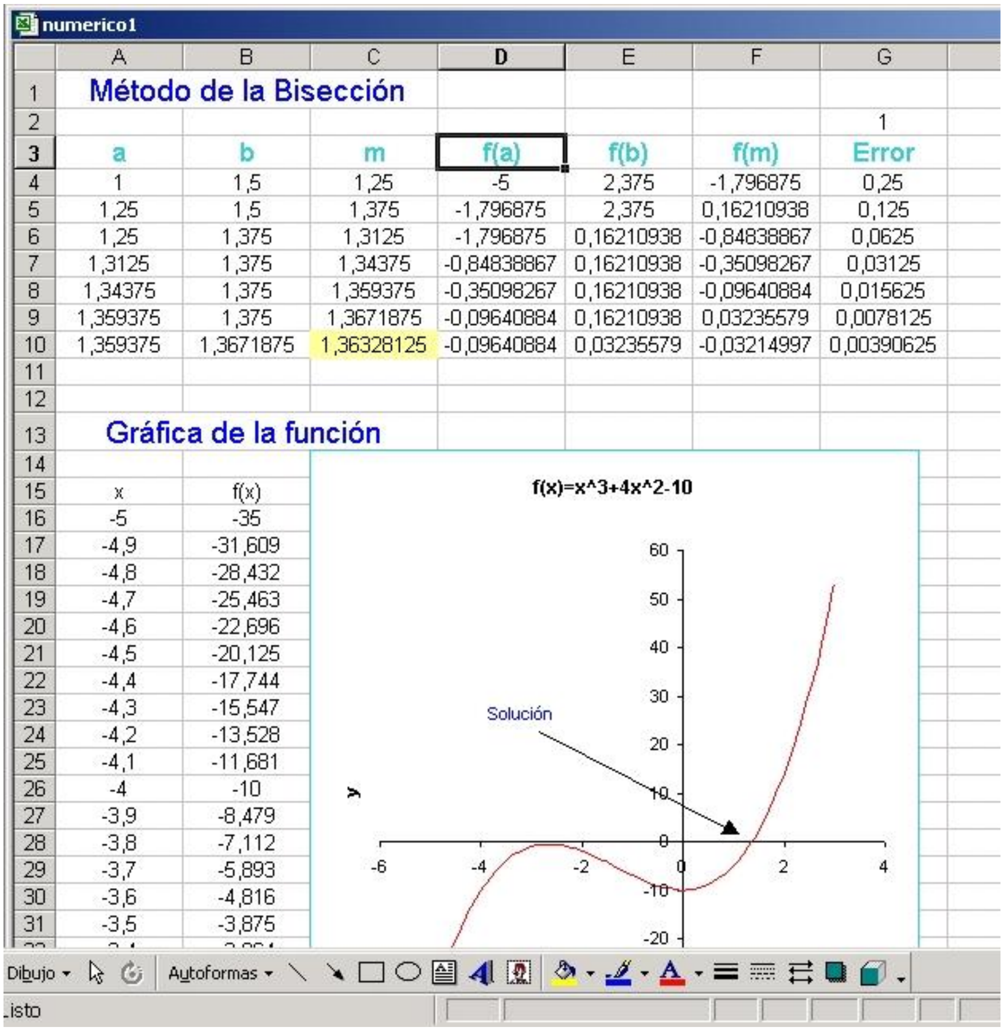
Estudiante de Ingeniería en Sistemas Informáticos.

Universidad Católica de Occidente (UNICO)

El Salvador

Santa Ana, 4 de febrero de 2007

Y por último, lo único que debemos hacer es ir generando las aproximaciones, para esto arrastramos cada columna una a una. El resultado de esto se muestra en la figura 4.



						1
a	b	m	f(a)	f(b)	f(m)	Error
1	1,5	1,25	-5	2,375	-1,796875	0,25
1,25	1,5	1,375	-1,796875	2,375	0,16210938	0,125
1,25	1,375	1,3125	-1,796875	0,16210938	-0,84838867	0,0625
1,3125	1,375	1,34375	-0,84838867	0,16210938	-0,35098267	0,03125
1,34375	1,375	1,359375	-0,35098267	0,16210938	-0,09640884	0,015625
1,359375	1,375	1,3671875	-0,09640884	0,16210938	0,03235579	0,0078125
1,359375	1,3671875	1,36328125	-0,09640884	0,03235579	-0,03214997	0,00390625

x	f(x)
-5	-35
-4,9	-31,609
-4,8	-28,432
-4,7	-25,463
-4,6	-22,696
-4,5	-20,125
-4,4	-17,744
-4,3	-15,547
-4,2	-13,528
-4,1	-11,681
-4	-10
-3,9	-8,479
-3,8	-7,112
-3,7	-5,893
-3,6	-4,816
-3,5	-3,875

Figura 4: Método de la bisección: $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

El método de la bisección, aunque es conceptualmente claro, tiene inconvenientes importantes.

Es muy lento en su convergencia (es decir, n tiene que ser muy grande para que $|m - m_n|$ sea pequeño, por ejemplo, se requiere de 10 iteraciones para obtener un error absoluto menor a 10^{-3} en el ejemplo anterior), además una buena aproximación intermedia puede ser descartada inadvertidamente. Sin embargo, el método tiene la importante propiedad de que siempre converge a una solución, además de que lo único que se requiere es que f sea continua, es por estas razones que se usa con frecuencia como punto de partida de métodos más eficientes