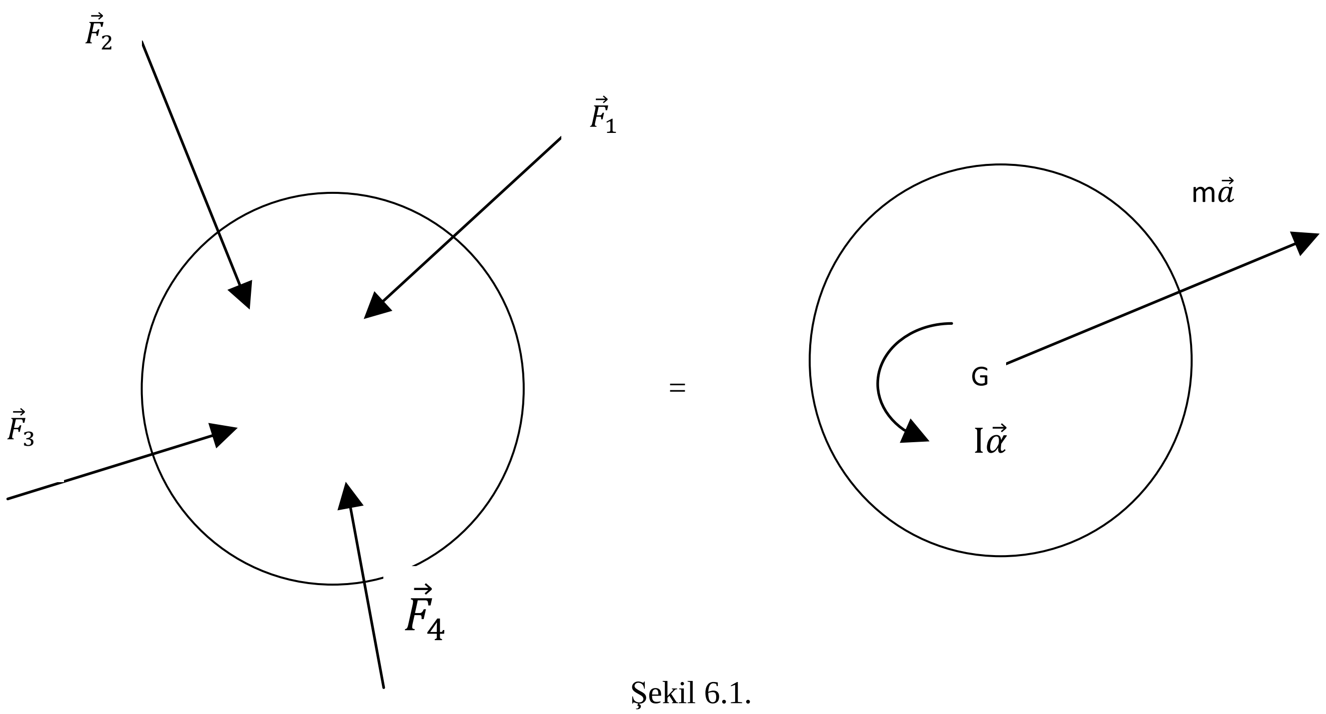
BÖLÜM 6. RİJİT CİSİMLERİN DÜZLEMSEL HAREKETİ

6.1. Giriş

Bir cismin ağırlık merkezinin ötelenmesine ek olarak onun bir nokta etrafında dönmesini de inceleyeceğiz. Disk, levha, çubuk ve silindir gibi cisimlerin düzlemsel hareketlerini ele alacağız.

6.2 Rijit Bir Cismin Düzlemsel Hareketi

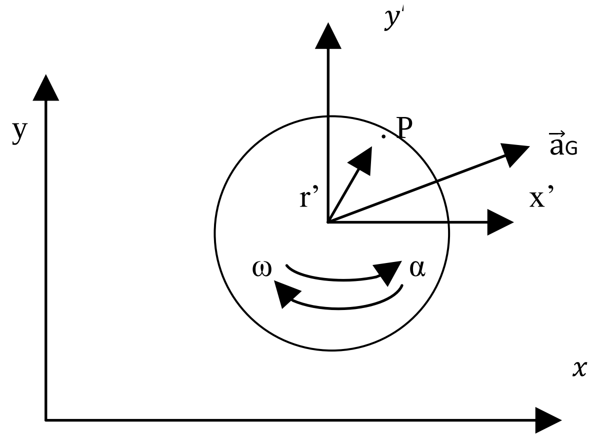


Şekil 6.1.

Bir cismin ağırlık merkezine o cismi temsil eden nokta olarak

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Denklemi maddesel nokta için uygulandığı gibi uygulanır.



Şekil 6.2.

$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{a'}$

$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{a}'_t + \vec{a}'_n = \vec{a}'_G + \vec{\alpha}\times\vec{r'} - \omega^2\ \vec{r'}$

P noktası için

$(\Delta m)\ \vec{a}_P = (\Delta m)\ \vec{a}_G + \Delta m(\vec{\alpha} \times \vec{r'}) - (\Delta m)\omega^2\ \vec{r'}$

Tüm noktaları toplarsak

$\Sigma a\Delta m = \Sigma\vec{a}_G\Delta m + \Sigma(\vec{\alpha} \times \vec{r'})\Delta m - \Sigma\omega^2\ \vec{r'}\Delta m = \vec{a}_G\Sigma\ \Delta m + \vec{\alpha}\times \underbrace{\overbrace{\Sigma\ \vec{r'}\ \Delta m}^{=0}}_{=0} - \omega^2\underbrace{\overbrace{\Sigma\ \vec{r'}\Delta m}^{=0}}_{=0}$

$\Sigma\ a\ \Delta\ m = \vec{a}_G\Sigma\Delta m$ $\qquad \Sigma\ F = m\ \vec{a}_G$

$\Sigma\ \vec{F}_x = m(\ \vec{a}_G)_x$

Düzlemsel harekette $\quad \Sigma\ \vec{F}_y = m(\ \vec{a}_G)_y$

Parçacık için Newton denklemi tekrar yazılırsa

$(\Delta m)\ \vec{a}_P = (\Delta m)\ \vec{a}_G + \Delta m(\vec{\alpha} \times \vec{r'}) - (\Delta m)\omega^2\ \vec{r'}$

İfadesinin G noktasına göre momenti alınır ve tüm parçaların oluşturduğu momentler toplanırsa

$\Sigma\,(\vec{r'} \times a\,\Delta m\,) = \Sigma\,(\vec{r'}\times a_G\,\Delta m\,) + \Sigma\,\vec{r'}\times(\vec{\alpha} \times \vec{r'})\,\Delta m - \Sigma\,(\vec{r'} \times \omega\,\vec{r'}\,\Delta m)$

$=\Sigma\,\vec{r'}\,\Delta m\;\times\;\vec{a}_G + \;\Sigma(\,\vec{r'}\times(\vec{\alpha} \times \vec{r'})\,\Delta m)\; - \;\omega^2\,\Sigma\,(\vec{r'} \times \vec{r'})\,\Delta m$

$=\underbrace{\Sigma(\,\vec{r'}\times(\vec{\alpha} \times \vec{r'})\,\Delta m)}$

α ile aynı doğrultuda $\underbrace{\alpha\,\Sigma\,\vec{r'}^{\,2}\;\Delta m}_{\bar{I}\alpha}$ şiddetinde vektör

$\Sigma\,(\vec{r'} x\; a\;\Delta m\,) \;= \bar{I}\alpha$

Kuvvetlerin kütle merkezine göre momenti ise

$\Sigma\,M_G = \;\bar{I}\,\alpha$

eşitliğini verir burada;

$\bar{I}$= levha düzlemine dik ve G'den gecen bir eksene göre atalet momentidir. Kuvvetlerin hangi noktaya göre momenti alınıyorsa $\bar{I}$ da aynı noktaya göre olmalıdır.

Rijit cismin düzlemsel hareketinden 3 adet skaler denklem elde edilir.

$\Sigma\,F_x = m\,a_x$ $\Sigma\,F_y = m\,a_y$ $\Sigma\,M_x = \bar{I}\,\alpha$

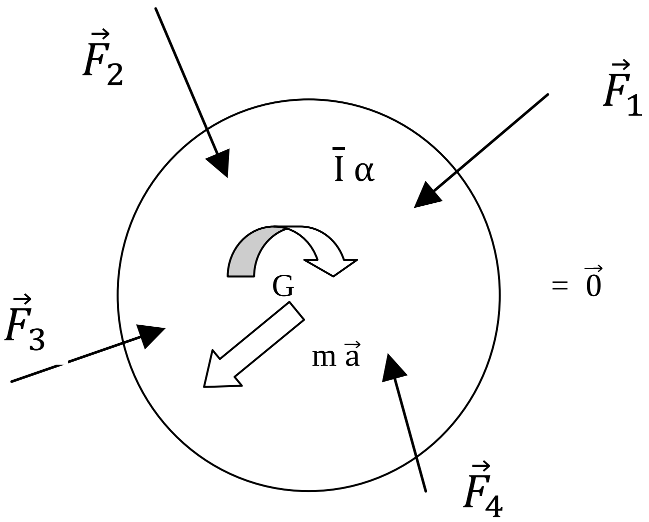
$\vec{a}$ =0 ise G etrafında dönme (v_0=0)

α: 0 ise ötelenme (w_o=0)

Bir cismin en genel düzlemsel hareketi öteleme ve G etrafında dönmeden oluşur.

6.3. Rijit Bir Cismin Düzlemsel Hareketi ile İlgili Problemler

Yukarıda elde edilen 3 adet skaler denklemler kullanarak problemler çözülür.



Dinamik denge

Şekil 6.3.

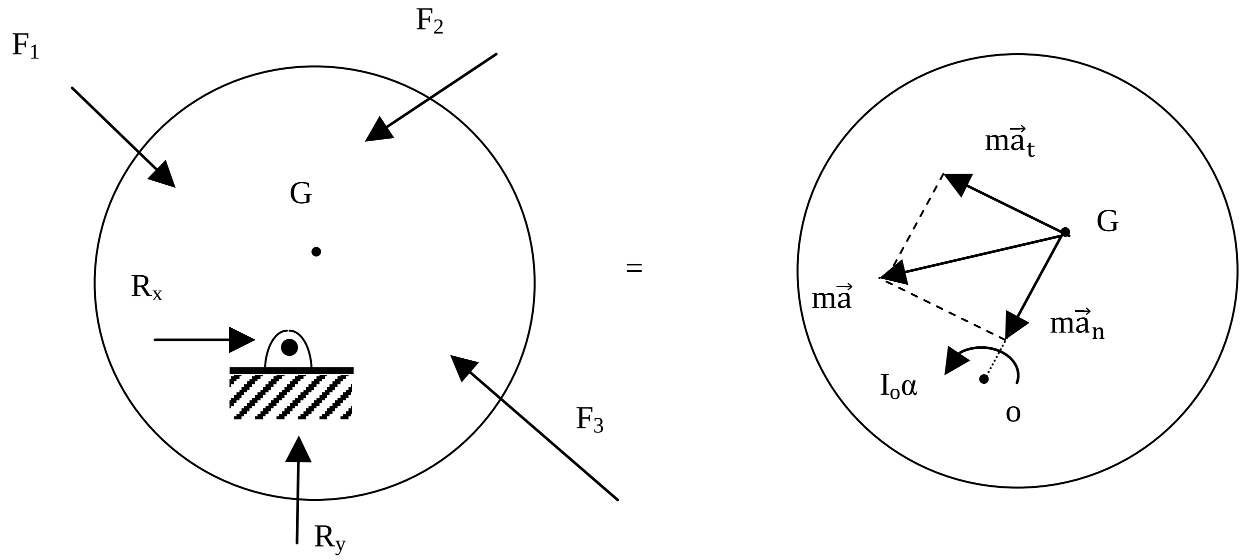
6.4 Rijit Cisimlerden Oluşan Sistemler:

Tek cisme uygulanan denklemler çok parçalı sistemlerde her parça için ayrı ayrı uygulanır. Cisimlerin mafsallarda ve dokunma noktalarıyla ip ve yayla bağlı yerlerinde Newton'un 3. Kanunu ve kinematik kurallar geçerlidir. Dinamik denge kullanarak statikteki gibi birden fazla parça birlikte dinamik denge denklemlerini sağlanır.

6.5 Bağlı Düzlemsel Hareket

Şafların sabit bir eksen etrafında dönmesi ve tekerlerin kaymadan yuvarlanması gibi hareketlere bağlı hareketler denir. Bu durumda $\vec{a}$ ve $\vec{\alpha}$ vektörleri arasındaki bağlantılar kullanılır.

Keyfi bir sabit nokta (G'nın dışında) etrafında dönme

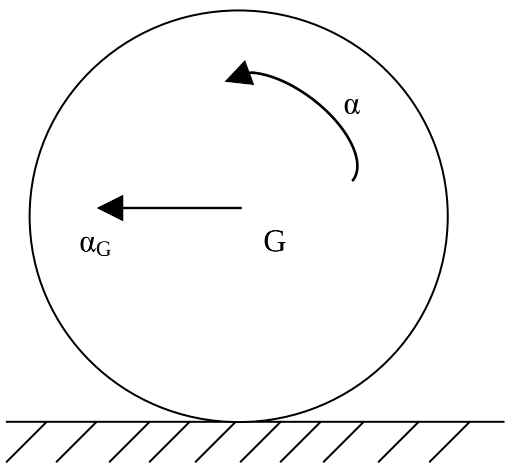


Şekil 6.4.

$\Sigma\vec{F} + \Sigma\vec{R} = m\,\vec{a}$ (a'nın teğet ve normal bileşeni olur.)

$\Sigma M_O = \bar{I}_o\,\alpha$

Yuvarlama hareket



Şekil 6.5.

Diskin ϴ radyan kadar dönmesi durumunda G'nin aldığı yol

S = r ϴ dır

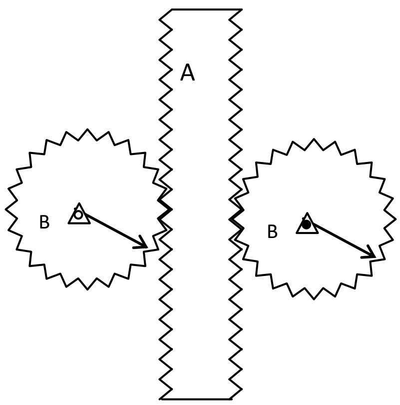
iki kere türev alınırsa

$a_G = r\,\alpha$

dinamik sürtünme kuvveti kaymadan yuvarlanmaya göre çözümde $F_{sür} > F_{max} = \mu_s.N$ bulunursa o yüzeyde kayma olduğuna göre

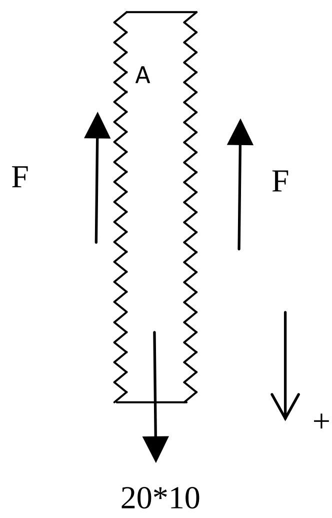
$F_{sür} = \mu_k N$ ile yeniden çözüm yapılır. Silindir ve disk için $a_G = r\,\alpha$ denkleminde kullanılmaz.

<u>ÖRNEK</u>



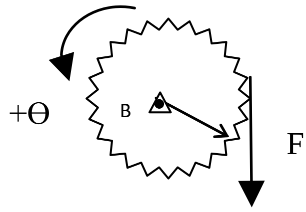
20kg'lık A çubuğu yarıçapı 20cm kütlesi 5kg olan B dişlilerine şekildeki gibi bağlıdır. A çubuğu serbest bırakıldığında 2 saniyede çubuk ne kadar aşağıya iner. ($g=10m/sn^2$)

Şekil 6.6.



Şekil 6.7.

Çubuk için $\Sigma F=ma$ $20*10 - 2F = 20\,\bar{a}_A$ ………………(1)



Şekil 6.8.

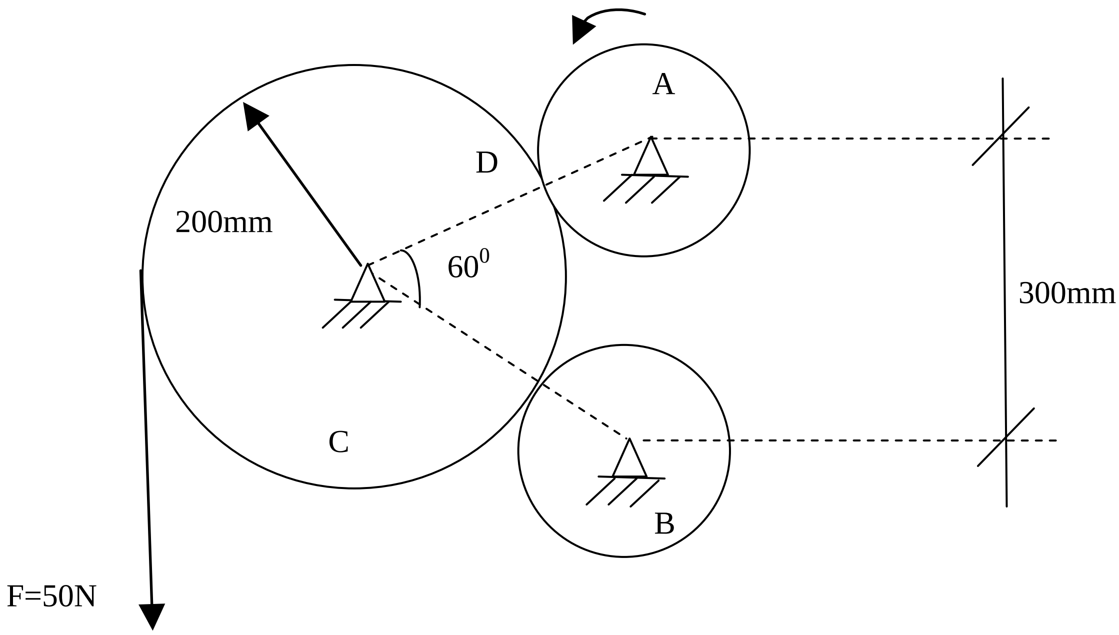
Disk için $\Sigma M= I\alpha$ (merkeze göre) $-0{,}2F = \frac{1}{2}5\,(0{,}2)^2\,\alpha_B$ ……..(2)

Kinematikten $0{,}2\,\alpha_B = -\bar{a}_A$……………………(3)

$\bar{a}_A = 8m/sn^2$ $\bar{v}_A = 8\,t = 16$ m/s $\bar{S}_A = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 16$ m

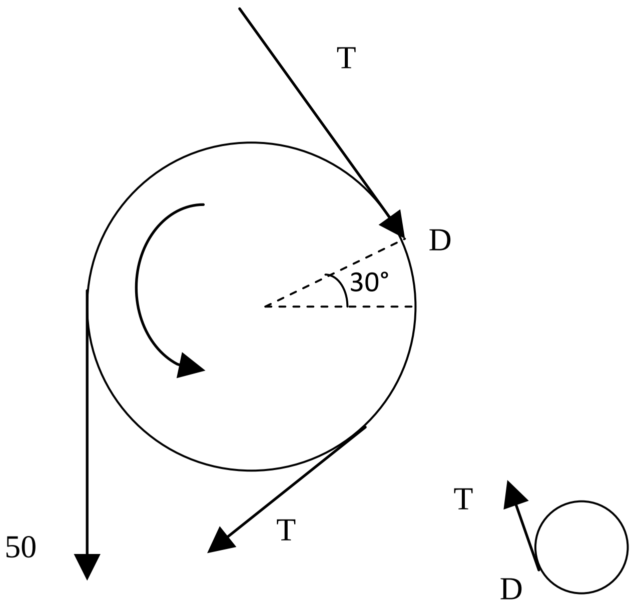
ÖRNEK

α_A=?



Şekil 6.9.

C diski için m=5 kg r_{gy}=141,42mm r=200mm A diski için m=2 kg r_{gy}=70,7mm r=100mm B diski için m=2 kg r_{gy}=70,7mm r=100mm ise α_A=?



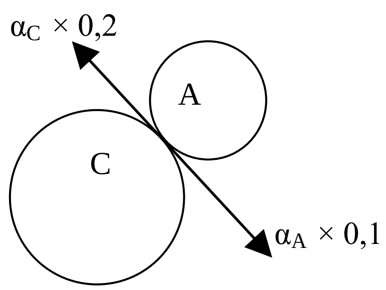
Şekil 6.10.

C için ΣM= Iα (merkeze göre)

$50*0,2 – T*0,2*2 = 5*0,141^2\, \alpha_C$ (1)

A için ΣM= Iα (merkeze göre)

$-T*0,1 = 2\,(0,0707)^2\ \alpha_A$ (2)

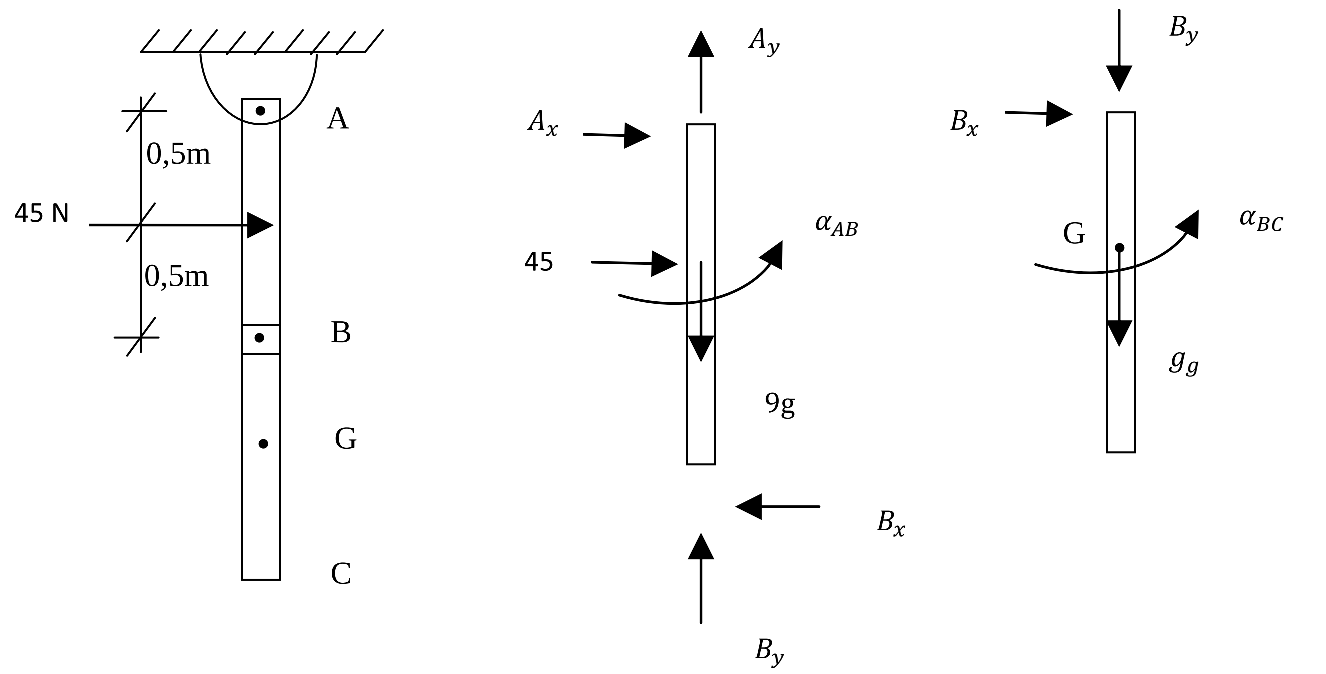


Şekil 6.11.

$(a_D)_t = \alpha_C\,(0,2) = -\alpha_A\,(0,1)$ (3)

$\alpha_A = –111$ rad/sn^2

ÖRNEK



Şekil 6.12.

2 çubuk 9 ar kg ve 1’er metre uzunlukta olup uniformdur. Başlangıçta durgun olan çubukların 45 N’luk kuvvet etkisinde açısal ivmeleri ne olur ?

BC $\Sigma M_G = I\,\alpha$ (merkeze göre) $-B_x*(0{,}5) = \frac{1}{12}(9)*(1)^2 * \alpha_{BC}$ (1)

AB $\Sigma M_A = I\,\alpha$ (A noktasına göre) $45*(0{,}5) - B_x(1) = \frac{1}{3}(9)*(1)^2 * \alpha_{AB}$ (2)

BC $\Sigma F = ma$ (x yönü) $B_x = 9\,a_{Gx}$ (3)

Kinetikten: $\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \times (-0{,}5\,\vec{j}) + \vec{0}$

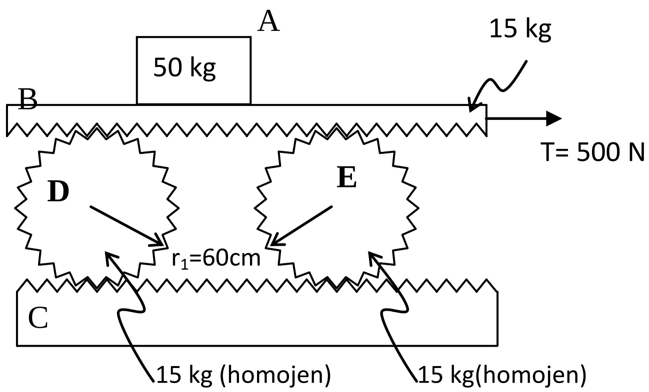
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB}\,\vec{k} \times (-1\vec{j}) + \vec{0}$

$$\vec{a}_G = \underbrace{(\vec{\alpha}_{AB}\,\vec{k} \times (-1\vec{j}))}_{\vec{a}_B} + (\vec{\alpha}_{BC} \times (-0{,}5\,\vec{j})) = \underbrace{(\alpha_{AB} + 0{,}5\,\alpha_{BC})}_{a_{Gx}}\,\vec{i}$$

$a_G = \alpha_{AB} + 0{,}5\,\alpha_{BC}$ (4)

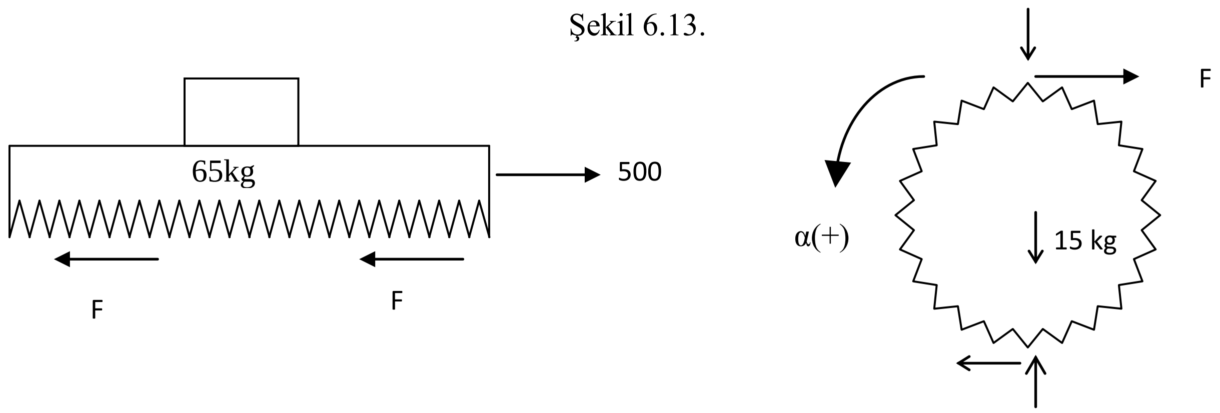
Ortak Çözüm : $\alpha_{AB} = 4{,}29$ rad/san^2 $\alpha_{BC} = -6{,}43$ rad/san^2

ÖRNEK



15 kg lık bir B platformu 50 kg lık A blok' unu taşımaktadır ve D, E dişlileri üzerinde hareket etmektedir. Her dişli 15 kg ise 500 N' luk bir kuvvet 1 saniyede platformu ne kadar hareket ettirir.

Şekil 6.13.



Şekil 6.14.

Dişli için $\Sigma M = I\alpha$ (tabana göre) $-F\,(1{,}2) = \frac{3}{2} * (15) * 0{,}6^2 * \alpha$

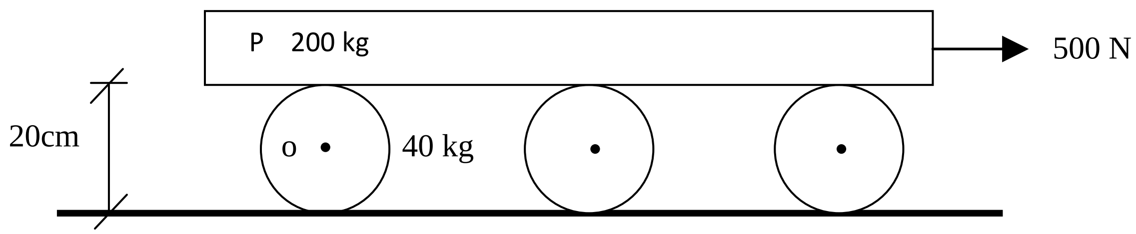
Platform için $500 - 2F = 65\,\bar{a}$

Kinetikten $\bar{a} = -1{,}2\,\alpha$

$\bar{a} = 6{,}56$ m/sn^2

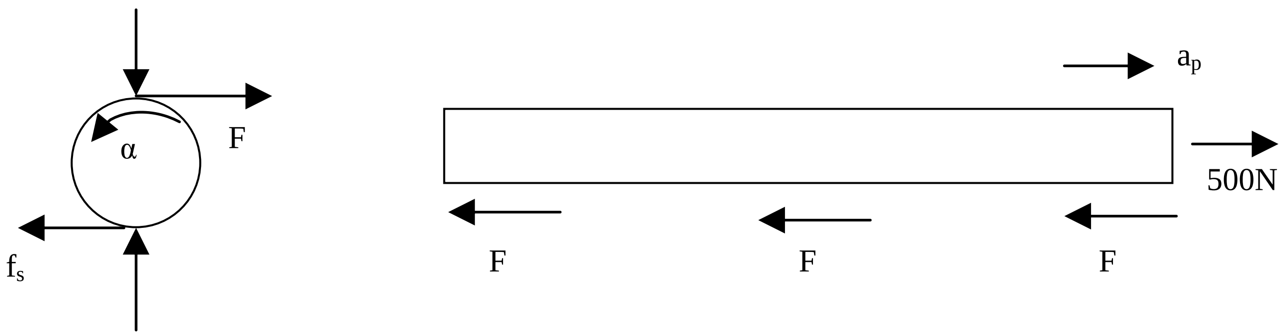
$x = 6{,}56 * \frac{t^2}{2}$ s = 3,28 m

ÖRNEK



Şekil 6.15.

Silindirlerin hepsi aynı özelliktedir. t=4 sn v_0 = ? v_p = ?



Şekil 6.16.

$$\left.\begin{array}{l} -3F + 500 = 200\, a_p \\ -0{,}2F = +\frac{3}{2} * 40 * (0{,}1)^2 * \alpha \\ -a_p = 0{,}2\,\alpha \end{array}\right\}$$

$a_p = 2{,}04$ m /sn^2 α = - 10, 2 rad/sn^2

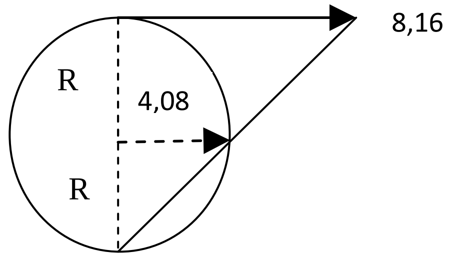
$\vec{a}_p = 2{,}04\,\vec{i}$ $\vec{\alpha} = -10{,}2\vec{k}$

$V_p = 0 + at$

$V_p = 2{,}04 * (4) = 8{,}16$ m/sn

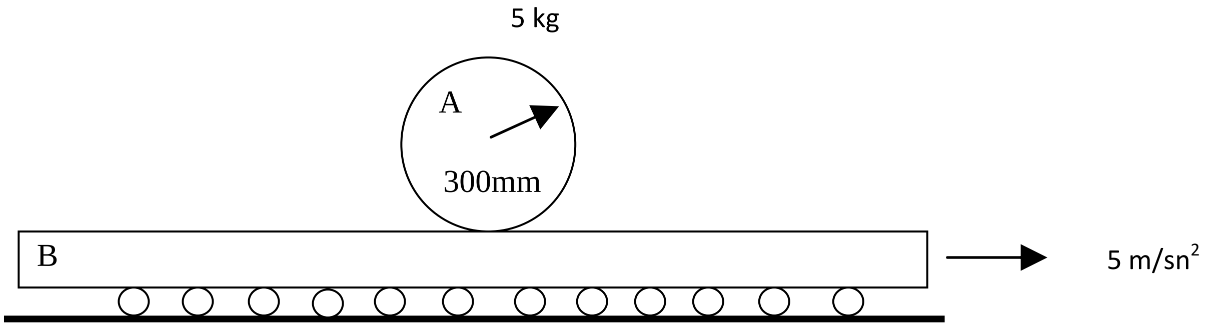
$0{,}2\,\omega = 8{,}16$ $\omega = -40{,}8$

$V_0 = 0 + (-40{,}8) * 0{,}1 = 4{,}08$ m/sn



Şekil 6.17.

ÖRNEK



Şekil 6.18.

B arabasının 5 m/sn^2 ivme veriliyor. Arabada ilk hızı sıfır olan A silindiri 5 kg ve 600 mm çaplıdır. 1,5 saniyede A B' ye göre ne kadar hareket eder ?

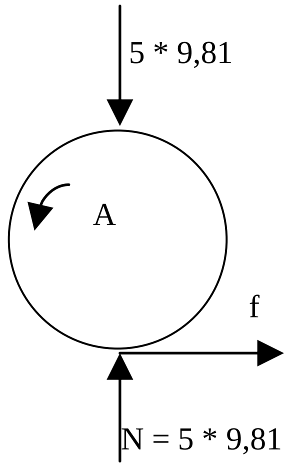
$f(0,3) = \frac{5}{2} * (0,3)^2 * \alpha_A$ Merkeze göre moment

$\Sigma F = m(a)_x \quad f = 5\,(\vec{a}_A)_x$

$a_A = a_B + (a_{A/B})_t + (a_{A/B})_n = 5\vec{i} + \alpha\vec{k} \times 0,3\vec{j}$ +normal ivme

$(\vec{a}_A)_x = 5 - 0,3 * \alpha_A$

$(a_A)_x = 1,667$ m/sn^2



Şekil 6.19.

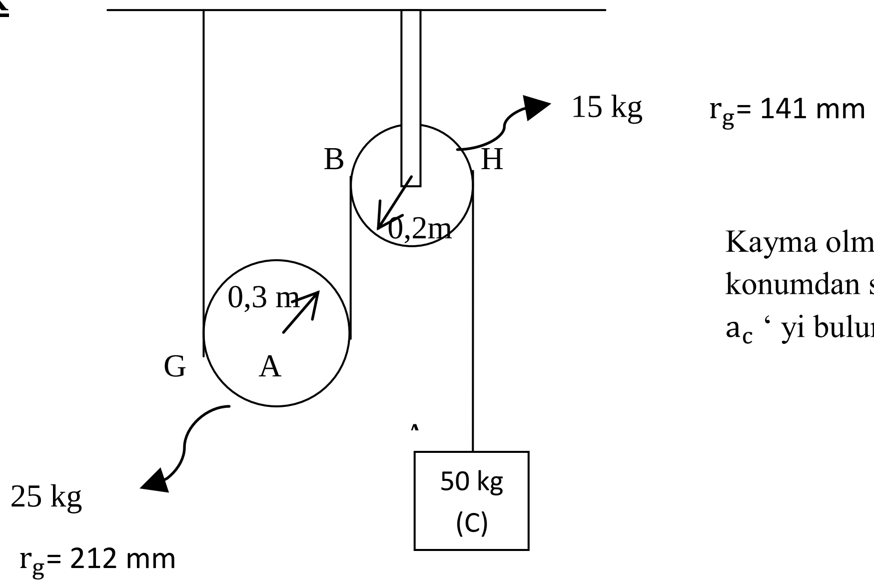
$x_A = \frac{1}{2} * 1,667 * t^2$ $\quad x_A = \frac{1}{2} * 1,667 * (1,5)^2 = 1,87$m

$x_B = \frac{1}{2} * 5 * t^2$ $\quad x_B = \frac{1}{2} * 5 * (1,5)^2 = 5,62$m

$x_B = x_A + x_{B/A}$

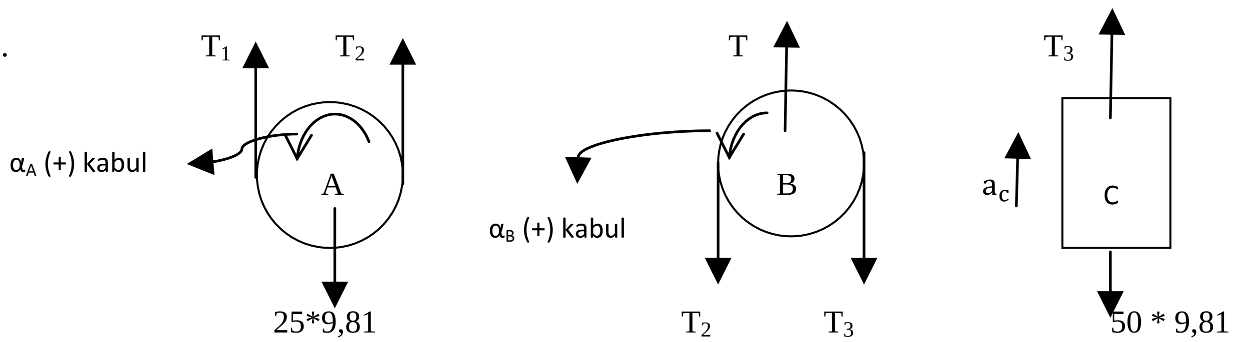
$5,62 = 1,87 + x_{B/A}$ $\quad x_{B/A} = -3,75$ m

ÖRNEK



Kayma olmadığına ve sistem görülen konumdan serbest bırakıldığına göre a_c ‘ yi bulunuz .

Şekil 6.20.



Şekil 6.21.

$$\sum M_G = (k^2 m)\,\alpha_A$$

A $\quad M_G = 0{,}6 * T_2 - 25 * 9{,}81 * 0{,}3 = (25 * 0{,}212^2 + 25 * 0{,}3^2)\,\alpha_A \quad (1)$

B $\quad M_B = T_2 * (0{,}2) - T_3 * (0{,}2) = 15 * 0{,}141^2 * \alpha_B \quad (2)$

C $\quad T_3 - 50 * (9{,}81) = 50 * a_c \quad (3)$

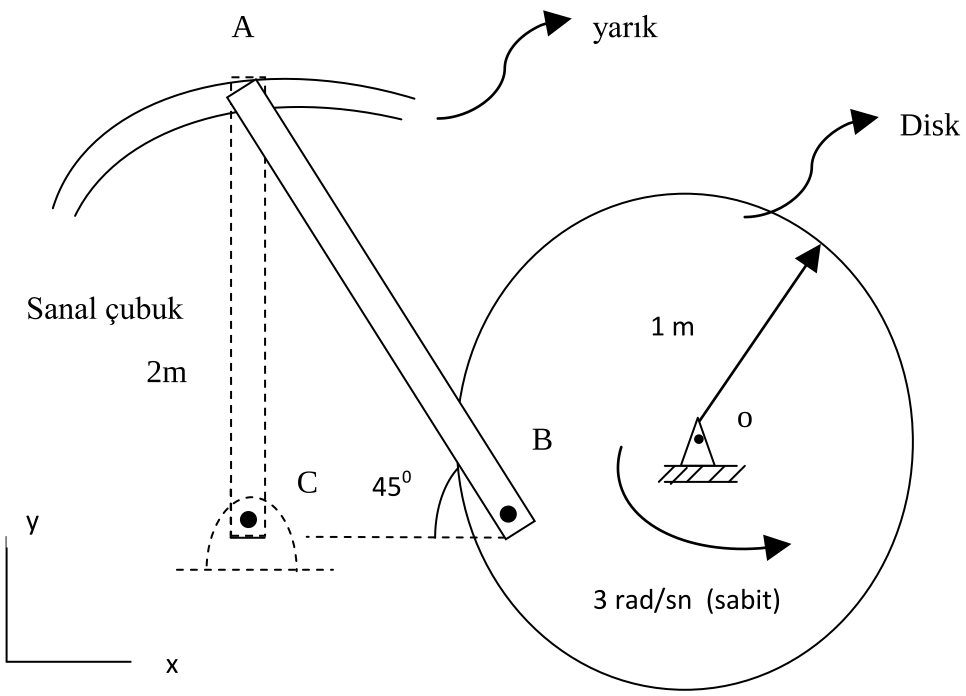
Kinematik:

$0{,}2 * \alpha_B = a_c \quad (4)$

$-\alpha_A\,(0{,}3) * 2 = a_c \quad (5)$

$$a_c = -5{,}32\ \frac{m}{sn^2}$$

ÖRNEK



$\vec{a}_A = ?$

Şekil 6.22.

$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_{0B} \times \vec{r}_{B/0} = 3\,\vec{k} \times (-\vec{i}\,) = -3\,\vec{j}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_0 + \vec{\alpha}_{OB} \times \vec{r}_{B/0} + 3\,\vec{k} \times (3\,\vec{k} \times (-\vec{i}\,)) = 9\,(\vec{i}\,)$

$\vec{v}_A = v_A\vec{i} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$

$v_A\vec{i} = -3\,\vec{j} + \omega_{ab}\vec{k} \times \left(-2\vec{i} + 2\vec{I}\right)$ $\quad v_A = 3\ \mathrm{m/sn}$ $\quad \omega_{AB} = -1{,}5\ \mathrm{rad/sn}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = 9\vec{i} + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B})$

$= 9\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{k} \times (-\frac{3}{2}\vec{k} \times (-2\vec{i} + 2\vec{j}\,)) + \alpha_{AB}\vec{k} \times (-2\vec{i} + 2\vec{j}\,)$

$\vec{a}_A = 9\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{i} - \frac{9}{2}\vec{j} - 2\,\alpha_{AB}\vec{j} - 2\alpha_{AB}\vec{i}$

$\vec{a}_A = (13{,}5 - 2\alpha_{AB})\,\vec{i} - (4{,}5 + 2\alpha_{AB})\vec{j}$ (1)

$v_A = \omega_{AC}\vec{k} \times (2\vec{j}) = 3\vec{i}$ $\quad \omega_{AC} = -3/2$

$\vec{a}_A = \vec{0} + \alpha_{AC}\vec{k} \times (2\vec{j}\,) - \frac{3}{2}\vec{k} \times (-\frac{3}{2}\vec{k} \times 2\vec{j}\,) = -2\,\alpha_{AC}\vec{i} - \frac{9}{2}\vec{j}$ (2)

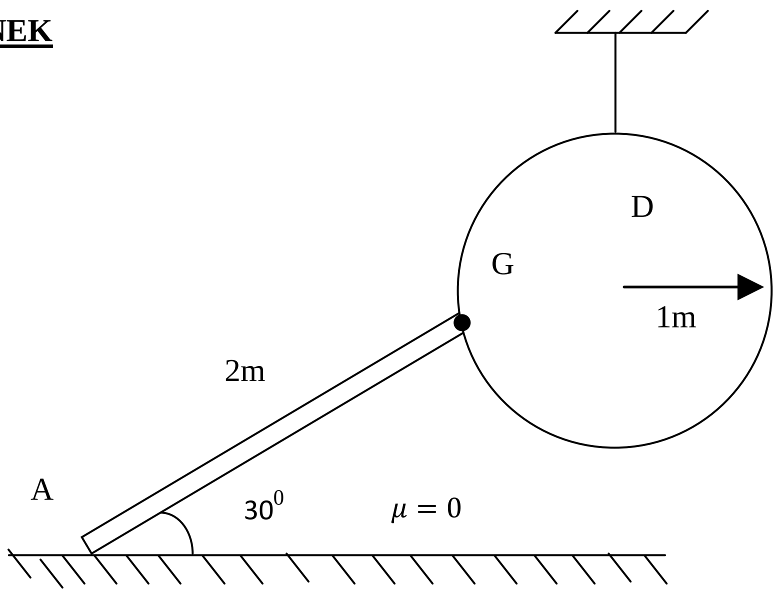
(1) ve (2) ortak çözülür

$-\frac{9}{2} = -4{,}5 - 2\,\alpha_{AB}$ $\alpha_{AB} = 0$

$-2\alpha_{AC} = 13{,}5 - 2\,\alpha_{AB}$ $\alpha_{BC} = -6{,}75$

$\vec{a}_A = (13{,}5\,\vec{i} - 4{,}5\,\vec{j})$ m / sn^2

ÖRNEK

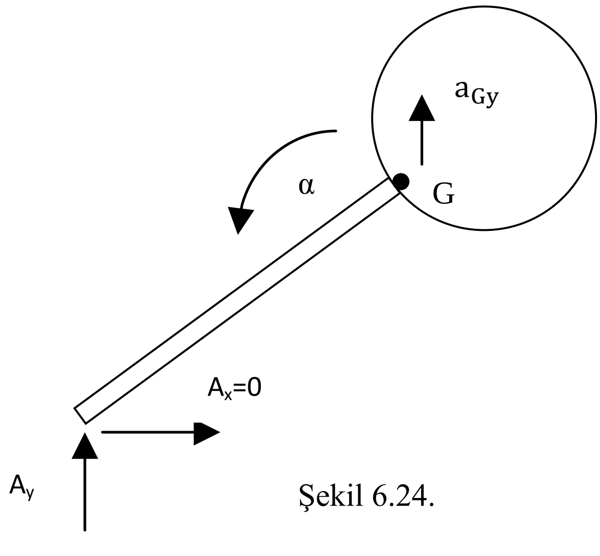


İp kesilince A_x , A_y ne olur ?

$M_D = 40$ kg ($r_g = 10$ cm)

$M_{AB} = 40$ kg (Homojen)

Şekil 6.23.



Şekil 6.24.

$\sum F_x = 0 = 80\, a_{Gx}$ $\qquad a_{Gx} = 0$

Sabit veya G ‘ ye doğru ivmeli nokta yok

$\sum M_G = -A_y(2\cos 30) = \frac{1}{3} * 40\,(2)^2 + 40\,(0{,}1)^2 + 40\,(1)^2\,\alpha$ (1)

$\sum F_y = A_y - 80 * 10 = 80\, a_{Gy}$ (2)

$a_A \vec{i} = a_{Gy}\,\vec{j} + \alpha\vec{k} \times 2\,(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j})$

$A_y = 224{,}7$ N $\qquad a_{Gy} - \sqrt{3}\,\alpha = 0$