



Olasılık Dağılımı İle İlgili Hipotezler

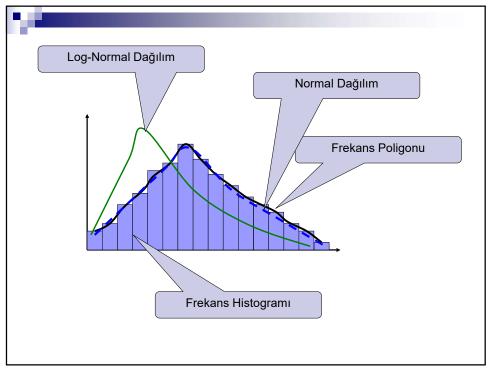
- Gözlenmiş bir örnekten elde edilen frekans dağılımının seçilen bir teorik dağılım fonksiyonuna uygunluğunu kontrol etmek için iki basit yol
 - ☐ Kullanılan teorik dağılıma ait olasılık kağıdı üzerinde grafiksel kontrol,
 - Örnekten hesaplanan yüksek mertebeden momentlerin (çarpıklık katsayısı, kurtosis katsayısı gibi) seçilen fonksiyonun teorik moment değerleri ile karşılaştırılması ile uygunluğunun kontrolüdür.
- Ancak her iki yöntem de güvenilir değildir.
- Çeşitli dağılım fonksiyonlarının biçimleri çok farklı olduğu halde yüksek mertebeden momentleri birbirine yakın çıkabilir.
- Bu nedenle olasılık dağılımlarının uygunluğunun kontrolünde de istatistik testler kullanmak gereklidir.

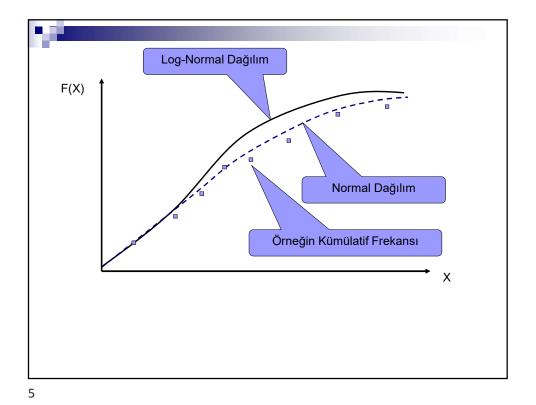


■ NOT: Bu ders materyali sadece ilgili bölümün mevcut dönemi için geçerlidir. Her yıl güncellenebilmektedir. Sadece kayıtlı olduğunuz ders için kullanılabilir. Ders harici her türlü paylaşım yasaktır, herhangi başka bir yerde yayımlanamaz.

Ç.Ü. İnş.Müh.Böl.

3





Olasılık Dağılımı İle İlgili Hipotezler

■ Dağılım Uygunluk Testleri
□ χ² Testi
□ Smirnov – Kolmogorov Testi



χ² Testi

- Bir rastgele değişkene ait *N* elemanlı bir örneği *m* sınıfa ayırarak herbir sınıftaki *N*_i eleman sayısını hesaplansın.
- Seçilen o.d.f una göre aynı sınıf aralıklarında bulunma olasılıkları p_i ile gösterilsin.

7



χ² Testi

$$\chi^{2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(N_{i} - N.p_{i})^{2}}{N.p_{i}}$$

- istatistiğinin örnekleme dağılımı asimptotik olarak n = s.d.= m-1 olan χ² dağılımıdır.
- (N.p_i) rastgele değişkenin dağılımının seçilen dağılıma uyması halinde i ninci sınıfa düşecek eleman sayısıdır.
- Bütün sınıf aralıklarında gözlenen eleman sayısının (N_i) , teorik sayıya $(N.p_i)$ eşit olması halinde $\chi^2=0$ olacağı görülmektedir.
- Aradaki farkların büyümesiyle χ² değeri de artar.
- Buna göre hesaplanan χ^2 değeri n=m-1 serbestlik derecesinde aşılma olasılığı α olan $\chi \alpha^2$ değerinden küçükse gözlenen dağılımın seçilen teorik dağılıma uygunluğu hipotezi kabul, aksi halde reddedilir.
- Seçilen o.d.f. nin n adet parametresi eldeki örnekten hesaplanmakta ise n = s.d. = m n 1 olur.



Smirnov - Kolmogorov Testi

■ Eldeki örneğin düzenlendiğini ve düzenlenmiş örnekten (x1 ≤ x2 ≤ x3 ≤... ≤ xn) frekans dağılımının:

$$F*(x_i) = \frac{i}{N}$$

şeklinde hesaplandığını düşünelim. Seçilen dağılım fonksiyonu F(x) ile gösterilirse:

$$\Delta = \max_{i} |F(x_i) - F^*(x_i)|$$

istatistiğinin örnekleme dağılımı bilinmektedir.

9



Smirnov - Kolmogorov Testi

- Bu dağılım gözönüne alınan o.d.f den bağımsızdır.
- Bu dağılım bilindiğine göre seçilen α anlamlılık düzeyinde aşılması olasılığı α olan Δ_{α} değeri <u>Tablo 6.1</u> den okunabilir(Δ_{α} değeri örnekteki **N** eleman sayısına da bağlıdır).
- Formülden hesaplanan Δ değeri Δ_{α} dan küçükse hipotez kabul, aksi halde reddedilir.



Smirnov - Kolmogorov Testi

■ Tablo 6.1. Δ_{α} Değerleri

N	0.20	0.10	0.05	0.01
5	0.45	0.51	0.56	0.67
10	0.32	0.37	0.41	0.49
15	0.27	0.30	0.34	0.40
20	0.23	0.26	0.29	0.36
25	0.21	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.20	0.23	0.27
40	0.17	0.19	0.21	0.25
45	0.16	0.18	0.20	0.24
50	0.15	0.17	0.19	0.23
>50	1.07	1.22	1.36	1.63
	$\frac{1}{\sqrt{N}}$	\sqrt{N}	$\frac{1}{\sqrt{N}}$	$\frac{1}{\sqrt{N}}$
				•

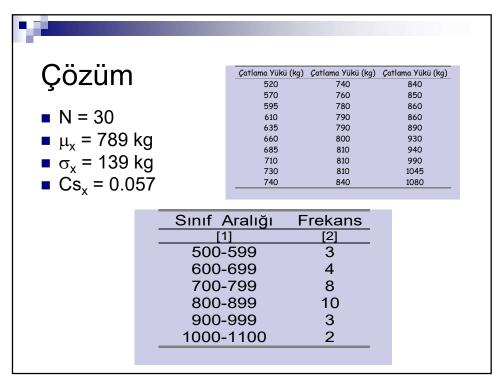
11

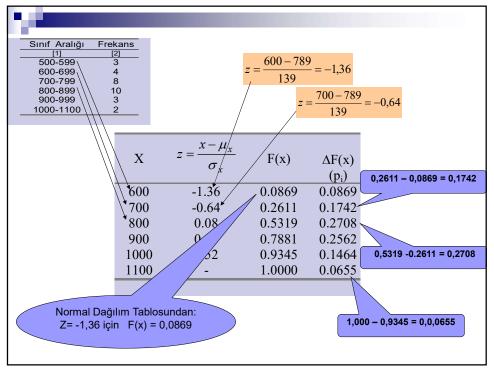


Örnek

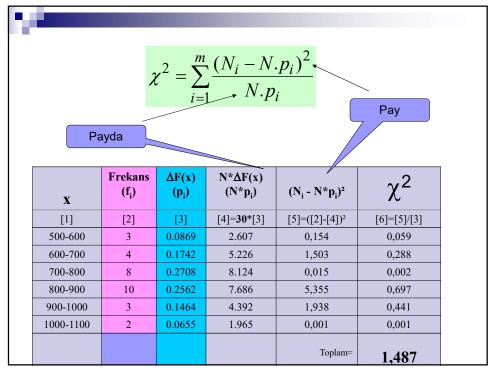
 Aşağıda yapılmış deney sonuçlarına göre betonarme kirişin çatlama yüklerinin <u>normal dağılıma</u> uyup uymadığını χ² testi ile % 10 anlamlılık düzeyinde kontrol ediniz.

Çatlama Yükü (kg)	Çatlama Yükü (kg)	Çatlama Yükü (kg)
520	740	840
570	760	850
595	780	860
610	790	860
635	790	890
660	800	930
685	810	940
710	810	990
730	810	1045
740	840	1080





1	[1] 500-599 600-699 700-799 800-899 900-999 1000-1100	Frekans [2] 3 4 8 10 3 2			$(N.p_i)^2$ $(P_i)^2$ $(N.p_i)^2$ $(R_i)^2$	$z = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \qquad F(x)$ -1.36	ΔF(x) (p _i) 0.0869 0.1742 0.2708 0.2562 0.1464 0.0655
	X	Frekans (f _i)	$\Delta F(x) \leftarrow (p_i)$	$N*\Delta F(x)$ $(N*p_i)$	$(N_i - N*p_i)^2$	χ^2	
	[1]	[2]	[3]	[4]=30*[3]	[5]=([2]-[4]) ²	[6]=[5]/[3]	
	500-600	3	0.0869	2.607	0,154	0,059	
	600-700	4	0.1742	5.226	1,503	0,288	
	700-800	8	0.2708	8.124	0,015	0,002	
	800-900	10	0.2562	7.686	5,355	0,697	
	900-1000	3	0.1464	4.392	1,938	0,441	
	1000-1100	2	0.0655	1.965	0,001	0,001	
					Toplam=	1,487	



• χ^2 = 1.487 (Hesaplanan)

Sınıf sayısı

$$m = 6$$

- Parametre sayısı = 2
- Serbestlik derecesi:

$$n = s.d. = 6 - 2 - 1 = 3$$

- Aşılma olasılığı = % 10
- χ^2 tablosundan χ^2 = **6.251** (0.10 ve 3 için)
- Hesaplanan $\chi^2 = 1.487 < \chi^2 = 6.251$
- olduğundan normal dağılıma uyduğu kabul edilir.

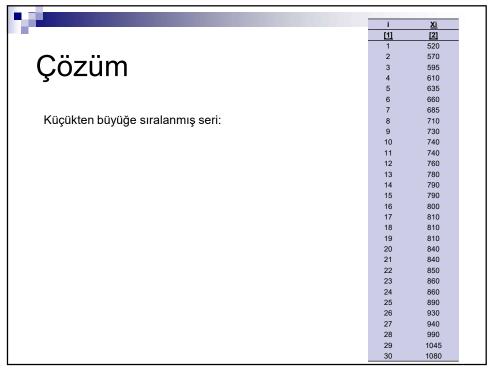
17

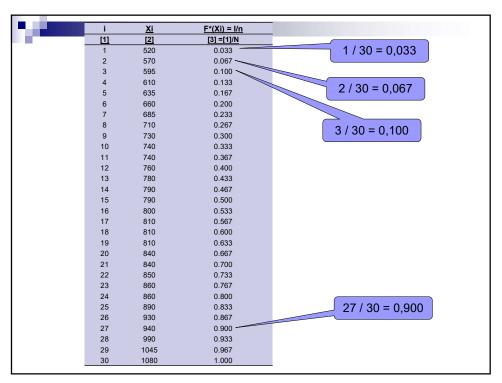


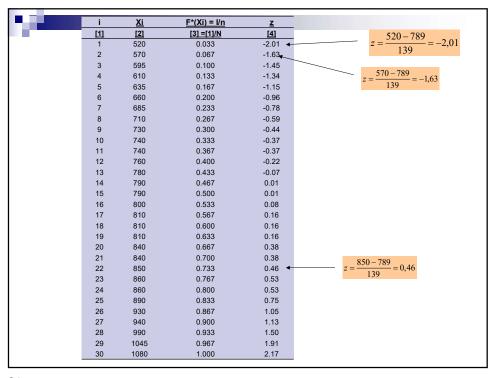
Örnek

 Aşağıda yapılmış deney sonuçlarına göre betonarme kirişin çatlama yüklerinin <u>normal dağılıma</u> uyup uymadığını Smirnov-Kolmogorov testi ile %5 anlamlılık düzeyinde kontrol ediniz.

Çatlama Yükü (kg)	Çatlama Yükü (kg)	Çatlama Yükü (kg)
520	740	840
570	760	850
595	780	860
610	790	860
635	790	890
660	800	930
685	810	940
710	810	990
730	810	1045
740	840	1080







	F(Xi)	<u>z</u>	$F^*(Xi) = I/n$	<u>Xi</u>	i
	[5]	[4]	[3] =[1]/N	[2]	[1]
Normal Dağılım	0.0223	-2.01	0.033	520	1
Tablosundan	0.0511	-1.63	0.067	570	2
Tablosulluali	0.0738	-1.45	0.100	595	3
	0.0908	-1.34	0.133	610	4
z = -2,01 için 0,0023	0.1252	-1.15	0.167	635	5
z = -1,63 için 0,0511	0.1678	-0.96	0.200	660	6
	0.2188	-0.78	0.233	685	7
	0.2777	-0.59	0.267	710	8
	0.3298	-0.44	0.300	730	9
	0.3573	-0.37	0.333	740	10
	0.3573	-0.37	0.367	740	11
	0.4143	-0.22	0.400	760	12
	0.4732	-0.07	0.433	780	13
	0.5030	0.01	0.467	790	14
	0.5030	0.01	0.500	790	15
	0.5327	0.08	0.533	800	16
	0.5623	0.16	0.567	810	17
	0.5623	0.16	0.600	810	18
	0.5623	0.16	0.633	810	19
	0.6483	0.38	0.667	840	20
	0.6483	0.38	0.700	840	21
	0.6756	0.46	0.733	850	22
	0.7019	0.53	0.767	860	23
	0.7019	0.53	0.800	860	24
	0.7745	0.75	0.833	890	25
	0.8537	1.05	0.867	930	26
	0.8701	1.13	0.900	940	27
	0.9332	1.50	0.933	990	28
	0.9720	1.91	0.967	1045	29
	0.9851	2.17	1.000	1080	30

i	<u>Xi</u>	F*(Xi) = I/n	<u>z</u>	F(Xi)	F(Xi) -F*(Xi)
[1]	[2]	[3] =[1]/N	<u>=</u> [4]	[5]	[6]=[5]-[3]
1	520	0.033	-2.01	0.0223	0.011
2	570	0.067	-1.63	0.0511	0.016
3	595	0.100	-1.45	0.0738	0.026
4	610	0.133	-1.34	0.0908	0.043
5	635	0.167	-1.15	0.1252	0.041
6	660	0.200	-0.96	0.1678	0.032
7	685	0.233	-0.78	0.2188	0.015
8	710	0.267	-0.59	0.2777	0.011
9	730	0.300	-0.44	0.3298	0.030
10	740	0.333	-0.37	0.3573	0.024
11	740	0.367	-0.37	0.3573	0.009
12	760	0.400	-0.22	0.4143	0.014
13	780	0.433	-0.07	0.4732	0.040
14	790	0.467	0.01	0.5030	0.036
15	790	0.500	0.01	0.5030	0.003
16	800	0.533	0.08	0.5327	0.001
17	810	0.567	0.16	0.5623	0.004
18	810	0.600	0.16	0.5623	0.038
19	810	0.633	0.16	0.5623	0.071
20	840	0.667	0.38	0.6483	0.018
21	840	0.700	0.38	0.6483	0.052
22	850	0.733	0.46	0.6756	0.058
23	860	0.767	0.53	0.7019	0.065
24	860	0.800	0.53	0.7019	0.098
25	890	0.833	0.75	0.7745	0.059
26	930	0.867	1.05	0.8537	0.013
27	940	0.900	1.13	0.8701	0.030
28	990	0.933	1.50	0.9332	0.000
29	1045	0.967	1.91	0.9720	0.005
30	1080	1.000	2.17	0.9851	0.015

	Xi	F*(Xi) = I/n	<u>z</u>	F(Xi)	F(Xi) -F*(Xi)
[1]	[2]	[3] =[1]/N	<u>=</u> [4]	[5]	[6]=[5]-[3]
1	520	0.033	-2.01	0.0223	0.011
2	570	0.067	-1.63	0.0511	0.016
3	595	0.100	-1.45	0.0738	0.026
4	610	0.133	-1.34	0.0908	0.043
5	635	0.167	-1.15	0.1252	0.041
6	660	0.200	-0.96	0.1678	0.032
7	685	0.233	-0.78	0.2188	0.015
8	710	0.267	-0.59	0.2777	0.011
9	730	0.300	-0.44	0.3298	0.030
10	740	0.333	-0.37	0.3573	0.024
11	740	0.367	-0.37	0.3573	0.009
12	760	0.400	-0.22	0.4143	0.014
13	780	0.433	-0.07	0.4732	0.040
14	790	0.467	0.01	0.5030	0.036
15	790	0.500	0.01	0.5030	0.003
16	800	0.533	0.08	0.5327	0.001
17	810	0.567	0.16	0.5623	0.004
18	810	0.600	0.16	0.5623	0.038
19	810	0.633	0.16	0.5623	0.071
20	840	0.667	0.38	0.6483	0.018
21	840	0.700	0.38	0.6483	0.052
22	850	0.733	0.46	0.6756	0.058
23	860	0.767	0.53	0.7019	0.065
24	860	0.800	0.53	0.7019	(0.098)
25	890	0.833	0.75	0.7745	0:059
26	930	0.867	1.05	0.8537	0.013
27	940	0.900	1.13	0.8701	0.030
28	990	0.933	1.50	0.9332	0.000
29	1045	0.967	1.91	0.9720	0.005
30	1080	1.000	2.17	0.9851	0.015



 $\Delta = 0,098$ (Hesaplanan)

N = 30

 $\mu_{x} = 789$

 $\sigma_{x} = 139$

N = 30 ve α = % 5 için Tablodan Δ = 0.24

 $\Delta = 0.098$ (Hesaplanan) $\leq \Delta = 0.24$ (Tablodan)

Hipotez Kabul

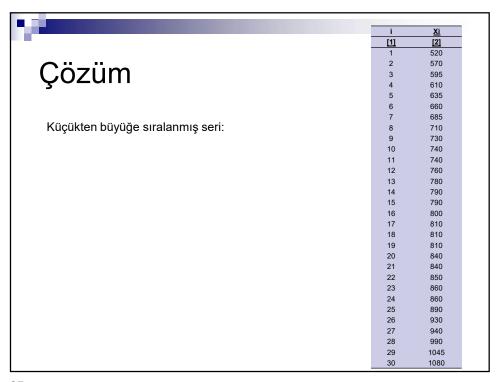
25



Örnek

 Aşağıda yapılmış deney sonuçlarına göre betonarme kirişin çatlama yüklerinin log-<u>normal dağılıma</u> uyup uymadığını Smirnov-Kolmogorov testi ile %5 anlamlılık düzeyinde kontrol ediniz.

Çatlama Yükü (kg)	Çatlama Yükü (kg)	Çatlama Yükü (kg)
520	740	840
570	760	850
595	780	860
610	790	860
635	790	890
660	800	930
685	810	940
710	810	990
730	810	1045
740	840	1080



<u>i</u>	<u>Xi</u>	Yi=In(Xi)	
[1]	[2]	[3]	
1	520	6.25	$y_i = \ln(520) = 6,25$
2	570	6.35	
3	595	6.39	
4	610	6.41	1 (550) (25
5	635	6.45	$y_i = \ln(570) = 6.35$
6	660	6.49	
7	685	6.53	
8	710	6.57	
9	730	6.59	
10	740	6.61	
11	740	6.61	(
12	760	6.63	$y_i = \ln(780) = 6,66$
13	780	6.66	
14	790	6.67	
15	790	6.67	
16	800	6.68	
17	810	6.70	
18	810	6.70	
19	810	6.70	N =30
20	840	6.73	y = In(X)
21	840	6.73	, - 6 656
22	850	6.75	$\mu_{y} = 6.656$ $\sigma_{y} = 0.174$
23	860	6.76	$\sigma_{V} = 0.174$
24	860	6.76	,
25	890	6.79	
26	930	6.84	
27	940	6.85	
28	990	6.90	
29	1045	6.95	
30	1080	6.98	

	<u>Xi</u>	Yi=In(Xi)	F*(Yi) = I/n
<u>.</u>			
[1]	[2]	[3]	[4] =[1]/N
1	520	6.25	0.033
2	570	6.35	0.067
3	595	6.39	0.100 —
4	610	6.41	0.133
5	635	6.45	0.167
6	660	6.49	0.200
7	685	6.53	0.233
8	710	6.57	0.267
9	730	6.59	0.300
10	740	6.61	0.333
11	740	6.61	0.367
12	760	6.63	0.400
13	780	6.66	0.433
14	790	6.67	0.467
15	790	6.67	0.500
16	800	6.68	0.533
17	810	6.70	0.567
18	810	6.70	0.600
19	810	6.70	0.633
20	840	6.73	0.667
21	840	6.73	0.700
22	850	6.75	0.733
23	860	6.76	0.767
24	860	6.76	0.800
25	890	6.79	0.833
26	930	6.84	0.867
27	940	6.85	0.900
28	990	6.90	0.933
28	1045	6.95	0.933
30	1080	6.98	1.000

_		10.1.00		
<u> [</u>	<u>Xi</u>	Yi=In(Xi)	F*(Yi) = I/n	<u>z</u>
[1]	[2]	[3]	[4] =[1]/N	<u>[5]</u>
1	520	6.25	0.033	-2.32 ◀-
2	570	6.35	0.067	-1.79 🥋
3	595	6.39	0.100	-1.54
4	610	6.41	0.133	-1.40
5	635	6.45	0.167	-1.17
6	660	6.49	0.200	-0.94
7	685	6.53	0.233	-0.73
8	710	6.57	0.267	-0.52
9	730	6.59	0.300	-0.36
10	740	6.61	0.333	-0.29
11	740	6.61	0.367	-0.29
12	760	6.63	0.400	-0.13
13	780	6.66	0.433	0.02
14	790	6.67	0.467	0.09
15	790	6.67	0.500	0.09
16	800	6.68	0.533	0.16
17	810	6.70	0.567	0.23
18	810	6.70	0.600	0.23
19	810	6.70	0.633	0.23
20	840	6.73	0.667	0.44
21	840	6.73	0.700	0.44
22	850	6.75	0.733	0.51
23	860	6.76	0.767	0.58
24	860	6.76	0.800	0.58
25	890	6.79	0.833	0.78
26	930	6.84	0.867	1.03
26 27	930	6.85	0.867	1.03
28	990	6.90	0.933	1.39
29	1045	6.95	0.967	1.70
30	1080	6.98	1.000	1.89

i	<u>Xi</u>	Yi=In(Xi)	$F^*(Yi) = I/n$	<u>z</u>	<u>F(Yi)</u>	
[1]	[2]	[3]	[4] =[1]/N	[5]	[6]	Normal Dağılım
1	520	6.25	0.033	-2.32	0.010	Tablosundan
2	570	6.35	0.067	-1.79	0.037	
3	595	6.39	0.100	-1.54	0.062	z=-2,32 için 0,010
4	610	6.41	0.133	-1.40	0.081	
5	635	6.45	0.167	-1.17	0.122	z= -1,79 için 0,037
6	660	6.49	0.200	-0.94	0.173	
7	685	6.53	0.233	-0.73	0.233	
8	710	6.57	0.267	-0.52	0.300	
9	730	6.59	0.300	-0.36	0.358	
10	740	6.61	0.333	-0.29	0.387	
11	740	6.61	0.367	-0.29	0.387	
12	760	6.63	0.400	-0.13	0.447	
13	780	6.66	0.433	0.02	0.507	
14	790	6.67	0.467	0.09	0.536	
15	790	6.67	0.500	0.09	0.536	
16	800	6.68	0.533	0.16	0.564	
17	810	6.70	0.567	0.23	0.592	
18	810	6.70	0.600	0.23	0.592	
19	810	6.70	0.633	0.23	0.592	
20	840	6.73	0.667	0.44	0.671	
21	840	6.73	0.700	0.44	0.671	
22	850	6.75	0.733	0.51	0.695	
23	860	6.76	0.767	0.58	0.718	
24	860	6.76	0.800	0.58	0.718	
25	890	6.79	0.833	0.78	0.781	
26	930	6.84	0.867	1.03	0.848	
27	940	6.85	0.900	1.09	0.862	
28	990	6.90	0.933	1.39	0.917	
29	1045	6.95	0.967	1.70	0.955	
30	1080	6.98	1.000	1.89	0.970	

<u>i</u>	<u>Xi</u>	Yi=In(Xi)	$F^*(Yi) = I/n$	<u>z</u>	F(Yi)	F(Yi) - F*(Yi)
[1]	[2]	[3]	[4] =[1]/N	<u>[5]</u>	[6]	[7]=[6]-[4]
1	520	6.25	0.033	-2.32	0.010	0.023
2	570	6.35	0.067	-1.79	0.037	0.030
3	595	6.39	0.100	-1.54	0.062	0.038
4	610	6.41	0.133	-1.40	0.081	0.052
5	635	6.45	0.167	-1.17	0.122	0.045
6	660	6.49	0.200	-0.94	0.173	0.027
7	685	6.53	0.233	-0.73	0.233	0.001
8	710	6.57	0.267	-0.52	0.300	0.033
9	730	6.59	0.300	-0.36	0.358	0.058
10	740	6.61	0.333	-0.29	0.387	0.054
11	740	6.61	0.367	-0.29	0.387	0.021
12	760	6.63	0.400	-0.13	0.447	0.047
13	780	6.66	0.433	0.02	0.507	0.073
14	790	6.67	0.467	0.09	0.536	0.069
15	790	6.67	0.500	0.09	0.536	0.036
16	800	6.68	0.533	0.16	0.564	0.031
17	810	6.70	0.567	0.23	0.592	0.026
18	810	6.70	0.600	0.23	0.592	0.008
19	810	6.70	0.633	0.23	0.592	0.041
20	840	6.73	0.667	0.44	0.671	0.004
21	840	6.73	0.700	0.44	0.671	0.029
22	850	6.75	0.733	0.51	0.695	0.038
23	860	6.76	0.767	0.58	0.718	0.048
24	860	6.76	0.800	0.58	0.718	0.082
25	890	6.79	0.833	0.78	0.781	0.052
26	930	6.84	0.867	1.03	0.848	0.019
27	940	6.85	0.900	1.09	0.862	0.038
28	990	6.90	0.933	1.39	0.917	0.016
29	1045	6.95	0.967	1.70	0.955	0.011
30	1080	6.98	1.000	1.89	0.970	0.030

<u>i</u>	<u>Xi</u>	Yi=In(Xi)	$F^*(Yi) = I/n$	<u>z</u>	<u>F(Yi)</u>	F(Yi) - F*(Yi)
[1]	[2]	[3]	[4] =[1]/N	[5]	[6]	[7]=[6]-[4]
1	520	6.25	0.033	-2.32	0.010	0.023
2	570	6.35	0.067	-1.79	0.037	0.030
3	595	6.39	0.100	-1.54	0.062	0.038
4	610	6.41	0.133	-1.40	0.081	0.052
5	635	6.45	0.167	-1.17	0.122	0.045
6	660	6.49	0.200	-0.94	0.173	0.027
7	685	6.53	0.233	-0.73	0.233	0.001
8	710	6.57	0.267	-0.52	0.300	0.033
9	730	6.59	0.300	-0.36	0.358	0.058
10	740	6.61	0.333	-0.29	0.387	0.054
11	740	6.61	0.367	-0.29	0.387	0.021
12	760	6.63	0.400	-0.13	0.447	0.047
13	780	6.66	0.433	0.02	0.507	0.073
14	790	6.67	0.467	0.09	0.536	0.069
15	790	6.67	0.500	0.09	0.536	0.036
16	800	6.68	0.533	0.16	0.564	0.031
17	810	6.70	0.567	0.23	0.592	0.026
18	810	6.70	0.600	0.23	0.592	0.008
19	810	6.70	0.633	0.23	0.592	0.041
20	840	6.73	0.667	0.44	0.671	0.004
21	840	6.73	0.700	0.44	0.671	0.029
22	850	6.75	0.733	0.51	0.695	0.038
23	860	6.76	0.767	0.58	0.718	0.048
24	860	6.76	0.800	0.58	0.718	(<u>0.082</u>)
25	890	6.79	0.833	0.78	0.781	0.052
26	930	6.84	0.867	1.03	0.848	0.019
27	940	6.85	0.900	1.09	0.862	0.038
28	990	6.90	0.933	1.39	0.917	0.016
29	1045	6.95	0.967	1.70	0.955	0.011
30	1080	6.98	1.000	1.89	0.970	0.030

•

N =30

y = ln(X)

 $\mu_{y} = 6.656$

 $\sigma_{y} = 0.174$

N = 30 ve α =% 5 için Tablodan Δ =0.24

 Δ = 0.082 (Hesaplanan) < Δ = 0.24 (Tablodan)

Hipotez Kabul

