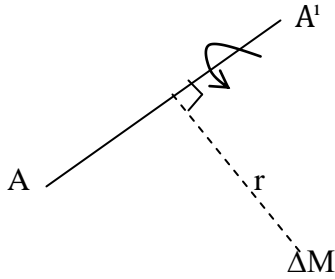


## BÖLÜM 9. BİR KÜTLENİN ATALET MOMENTLERİ

### Bir kütlenin atalet momenti

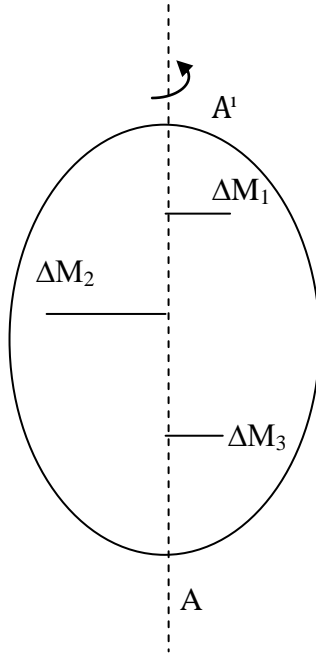
Bir alanın atalet momenti  $I_x = \int y^2 dA$  ,  $I_y = \int x^2 dA$  idi



Şekil 9.1.

Bir  $AA'$  eksenini etrafında serbestçe dönebilen kütlesi ihmal edilebilen bir çubuk üzerine monte edilmiş küçük bir  $\Delta M$  kütlesi göz önüne alalım. Sisteme bir kuvvet çifti uygulanırsa başlangıçta durgun olan çubuk ve kütle  $AA'$  etrafında dönmeye başlayacaktır. Sistemin dönme hızına erişmesi için gerekli zamanın  $\Delta M$  kütlesi

ile orantılı ve  $r$  uzaklığının karesi ile orantılıdır. Bundan dolayı  $r^2 \Delta M$  çarpımına  $\Delta M$  kütlesinin  $AA'$  eksenine göre atalet momenti denir. Sonsuz sayıda  $\Delta M$  kütlesinin toplanması ile bir cisim elde edilir.



Şekil 9.2.

$$I = \sum r_i^2 \Delta M_i$$

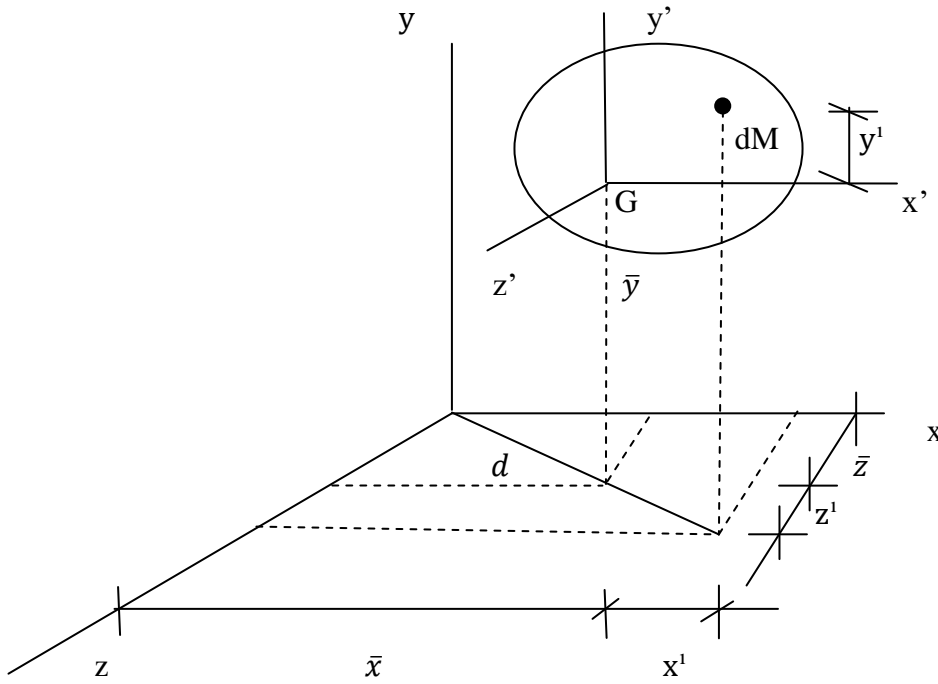
$$I = \int r^2 dM \quad \text{kütle atalet momenti}$$

$$I = r_{gy}^2 M = k^2 M \quad r_{gy} = k = \sqrt{\frac{I}{M}} \quad (\text{Merkeze göre})$$

$r_{gy} = k$ =atalet yarıçapı veya jirasyon yarıçapı denir.

$k$ = cismin  $AA^1$  eksenine göre atalet momenti aynı kalmak üzere cismin bütün kütlelerinin bir arada konulması gereken uzaklıktır.

### Paralel eksen teoremi



Şekil 9.3.

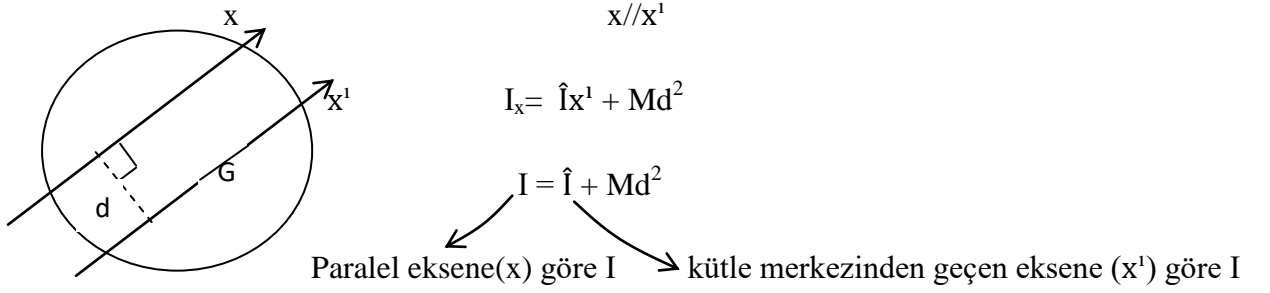
$$x = x^1 + \bar{x} \quad y = y^1 + \bar{y} \quad z = z^1 + \bar{z}$$

$$I_y = \int r^2 dM = \int (x^2 + z^2) dM = \int [(\bar{x} + x^1)^2 + (z^1 + \bar{z})^2] dM$$

$$= \int (x^{12} + z^{12}) dM + 2\bar{x} \int x^1 dM + 2\bar{z} \int z^1 dM + \int (\bar{x}^2 + \bar{z}^2) dM$$

$$I_y = \bar{I}_y + M (\bar{z}^2 + \bar{x}^2) = \bar{I}_y + M d^2 \quad , \quad I_z = \bar{I}_z + M (\bar{y}^2 + \bar{x}^2) \quad I_x = \bar{I}_x + M (\bar{z}^2 + \bar{y}^2)$$

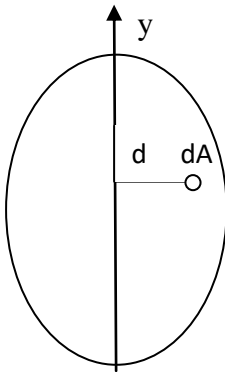
Basitçe



Şekil 9.4.

### İnce levhaların atalet momenti

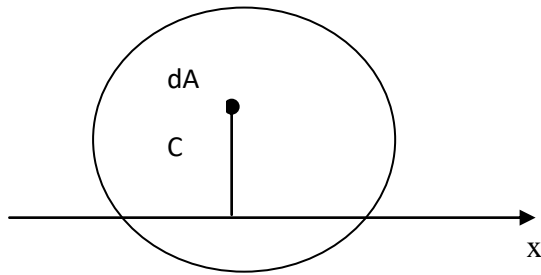
Homojen ve üniform kalınlıkta  $\rho$  yoğunluk ta bir ince levha düşünelim.



$$I_{y,kütle} = \int d^2 dM = \int d^2 \rho t dA = \rho t \underbrace{\int d^2 dA}_{I_{y,alan}}$$

$$I_{y,kütle} = \rho t I_{y,alan}$$

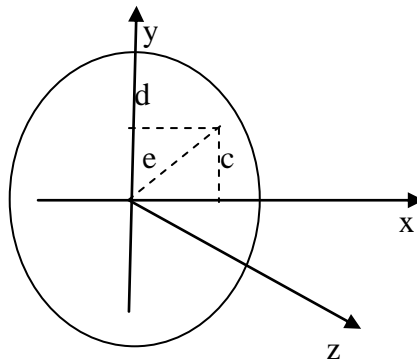
Şekil 9.5.



Şekil 9.6.

$$I_{x,kütle} = \int c^2 dM = \int c^2 \rho t dA = \rho t \int c^2 dA$$

$$I_{x,kütle} = \rho t I_{x,alan}$$



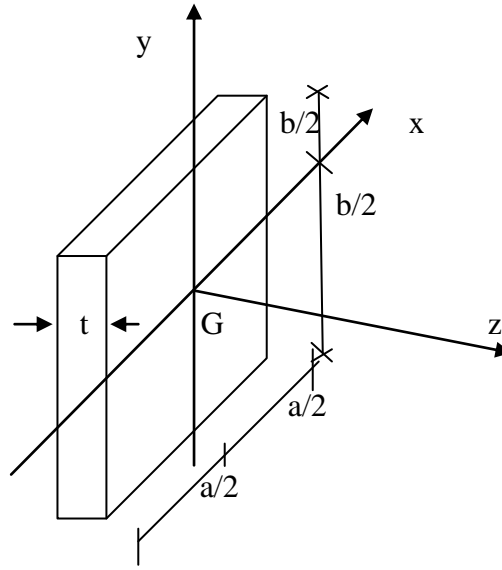
Şekil 9.7.

$$e^2 = d^2 + c^2$$

$$I_{z,kütle} = \int e^2 dM = \int (d^2 + c^2) dM = \int d^2 dM + \int c^2 dM$$

$$I_{z,kütle} = I_{y,kütle} + I_{x,kütle}$$

$$I_{z,kütle} = \rho t I_{y,alan} + \rho t I_{x,alan} = \rho t (I_{x,alan} + I_{y,alan}) = \rho t J_{z,alan}$$

**Homojen dikdörtgen levha**

Şekil 9.8.

$$I_{y,kütle} = \rho t I_{y,alan} = \rho t \left( \frac{1}{12} a^3 b \right)$$

$$I_{x,kütle} = \rho t I_{x,alan} = \rho t \left( \frac{1}{12} b^3 a \right)$$

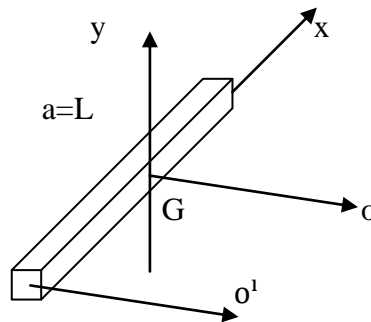
$\rho t a b = M$  olup

$$I_y = \frac{1}{12} M a^2$$

$$I_x = \frac{1}{12} M b^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

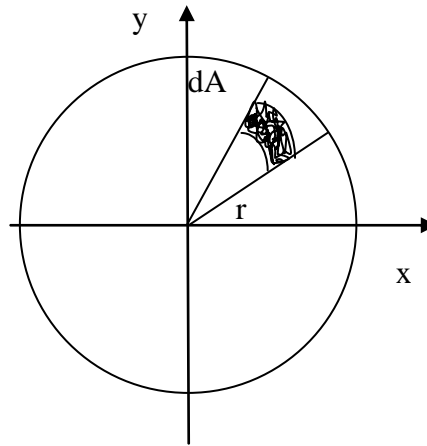
Çubuk durumun da  $b$  sıfıra 0  $a$   $L$ 'ye yaklaşır. ve  $I_z = \frac{1}{12} M (L^2)$  olur.



Şekil 9.9.

$$I_o = \frac{1}{12}M(L^2) \quad I_o^t = I_o + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)ML^2 + \frac{ML^2}{4} = \left(\frac{1}{3}\right)ML^2$$

### Dairesel plak

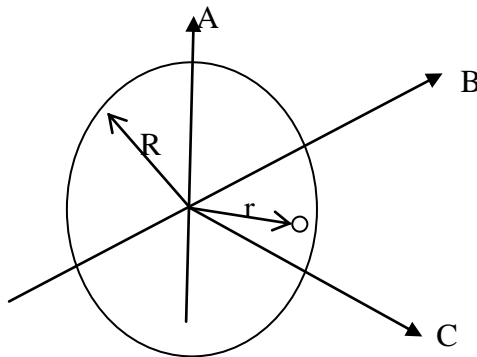


Şekil 9.10.

$$dA = r d\theta dr$$

$$I_{xx, alan} = \int y^2 dA = \int (r \sin \theta)^2 r d\theta dr = \int r^3 \sin^2 \theta d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 \theta d\theta dr = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{R^4}{4} \left( \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{2\pi} = \left( \frac{1}{4} \pi R^4 \right) = I_{yy, alan}$$



Şekil 9.11.

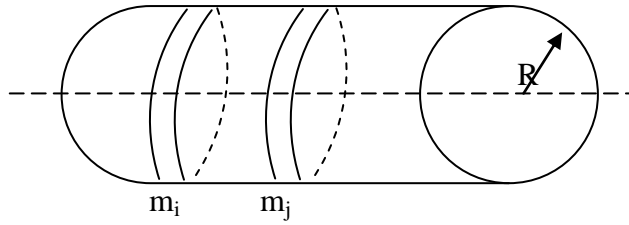
$$I_{AA,kütle} = \rho t I_{AA,alan} = \rho t \frac{1}{4} \pi R^4$$

$$I_{BB,kütle} = \rho t \frac{1}{4} \pi R^4$$

$$m = \rho \pi R^2 t$$

$$I_{C,kütle} = I_{A,kütle} + I_{B,kütle} = \frac{1}{2} \rho t \pi R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

### Silindir durumunda

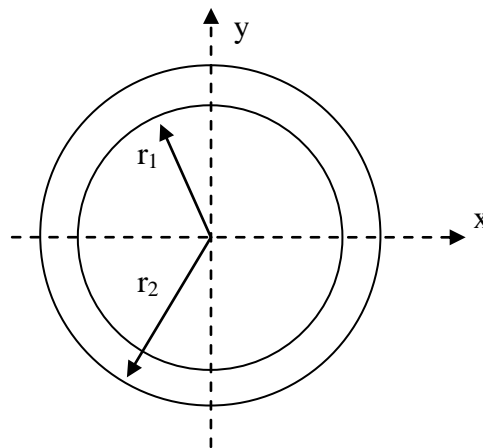


Şekil 9.12.

Küçük dairesel plakların toplanması ile silindir elde edilir.

$$M = \sum m_i \text{ olsun} \quad I = \frac{1}{2} M R^2$$

### ÖRNEK



Şekil 9.13.

$$I_{\text{çap}} = ? \quad I_{\text{eksen}} = ?$$

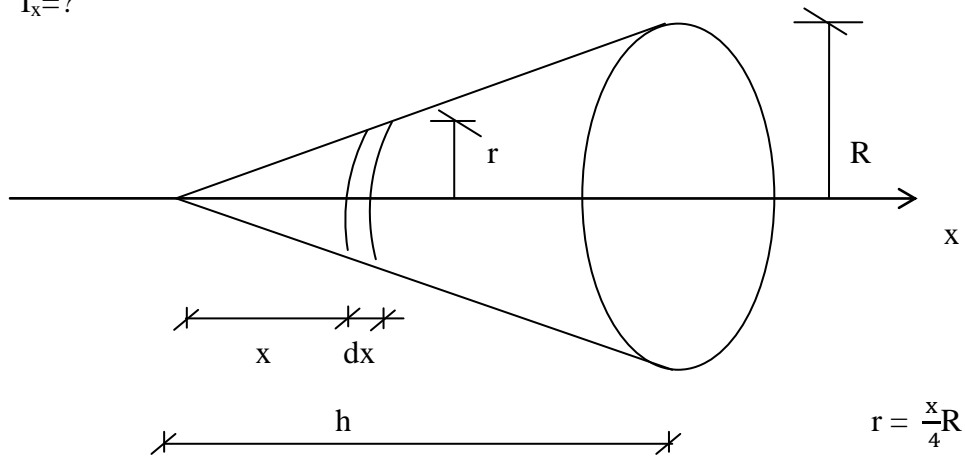
ince dairesel halka levha ;  $m=\rho tA$

$$I_{küt}=\rho t I_{alan} = \frac{M}{A} I_{alan} \quad A=\pi r_2^2 - \pi r_1^2$$

$$I_{y,alan}= I_{x,alan}=\frac{1}{4} \pi r_2^4 - \frac{1}{4} \pi r_1^4 \quad I_{y,küte}=I_{x,küte}=\frac{M}{A} \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{M}{4} (r_2^2 + r_1^2)$$

$$I_{z,küte}= I_{x,küte}+ I_{y,küte} = 2I_{küte} = \frac{M}{2} (r_2^2 + r_1^2)$$

**ÖRNEK**  $I_x=?$



Şekil 9.14.

$$I_x = \int_0^h \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{4} R\right)^2 dx \rho \left(\frac{xR}{4}\right)^2 = \frac{3}{10} \left(\frac{1}{3} \pi R^2 h \rho\right) R^2 = \frac{3}{10} M R^2$$