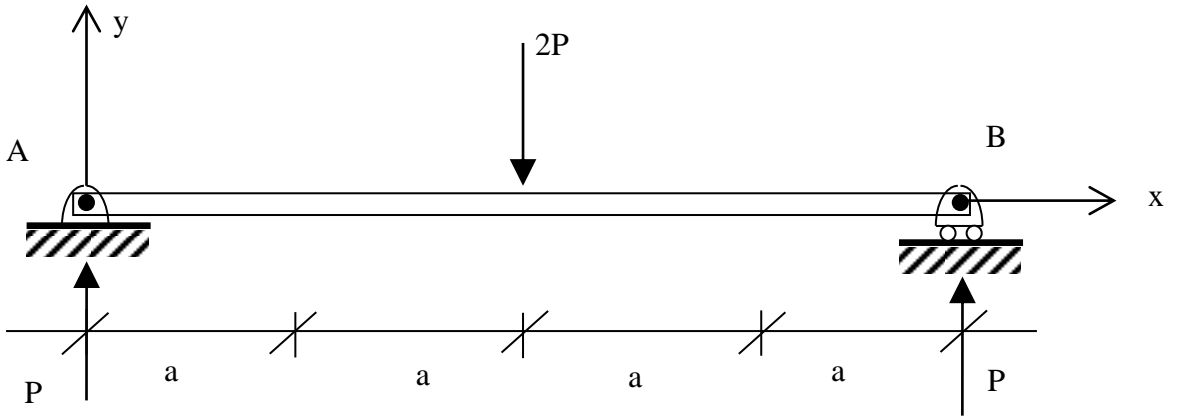


## BÖLÜM 7. KİRİŞ VE ÇERÇEVELERDEKİ İÇ KUVVETLER

### 7.1. Giriş

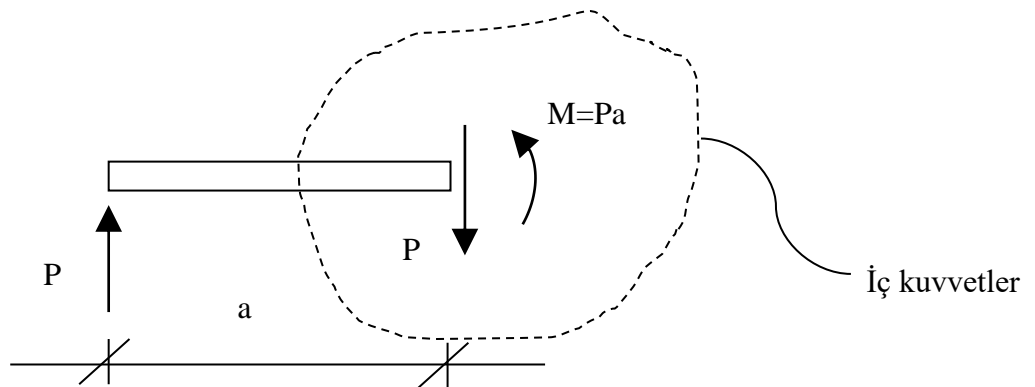
Rijit bir cisme bir kuvvet etki ettiği zaman rijit cismin mesnetlerinde oluşan kuvvetlere ek olarak cismin içinde de çeşitli kuvvetler oluşur.



Şekil 7.1.

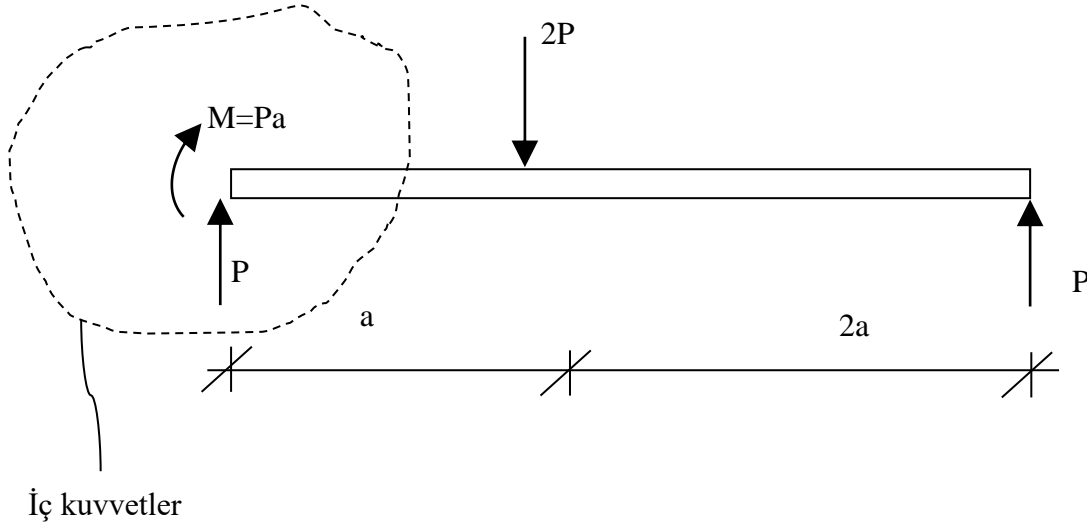
### 7.2. İç Kuvvetler

Başlangıç noktasını A alıp Şekil 7.1.'deki AB kirişini başlangıçtan  $a$  kadar uzakta bir yerden kesersek ve sol parça için denge şartını uygularsak,



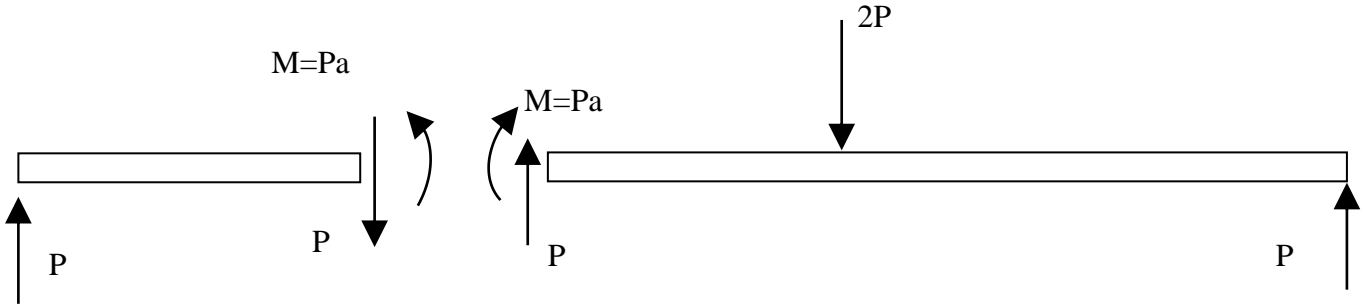
Şekil 7.2.

Sol parçanın dengede olabilmesi için kesilen yerde aşağıya doğru bir  $P$  kuvvetinin ve saat yönünün tersine bir  $M=Pa$  momentinin olması lazım aynı şekilde sağ parça için



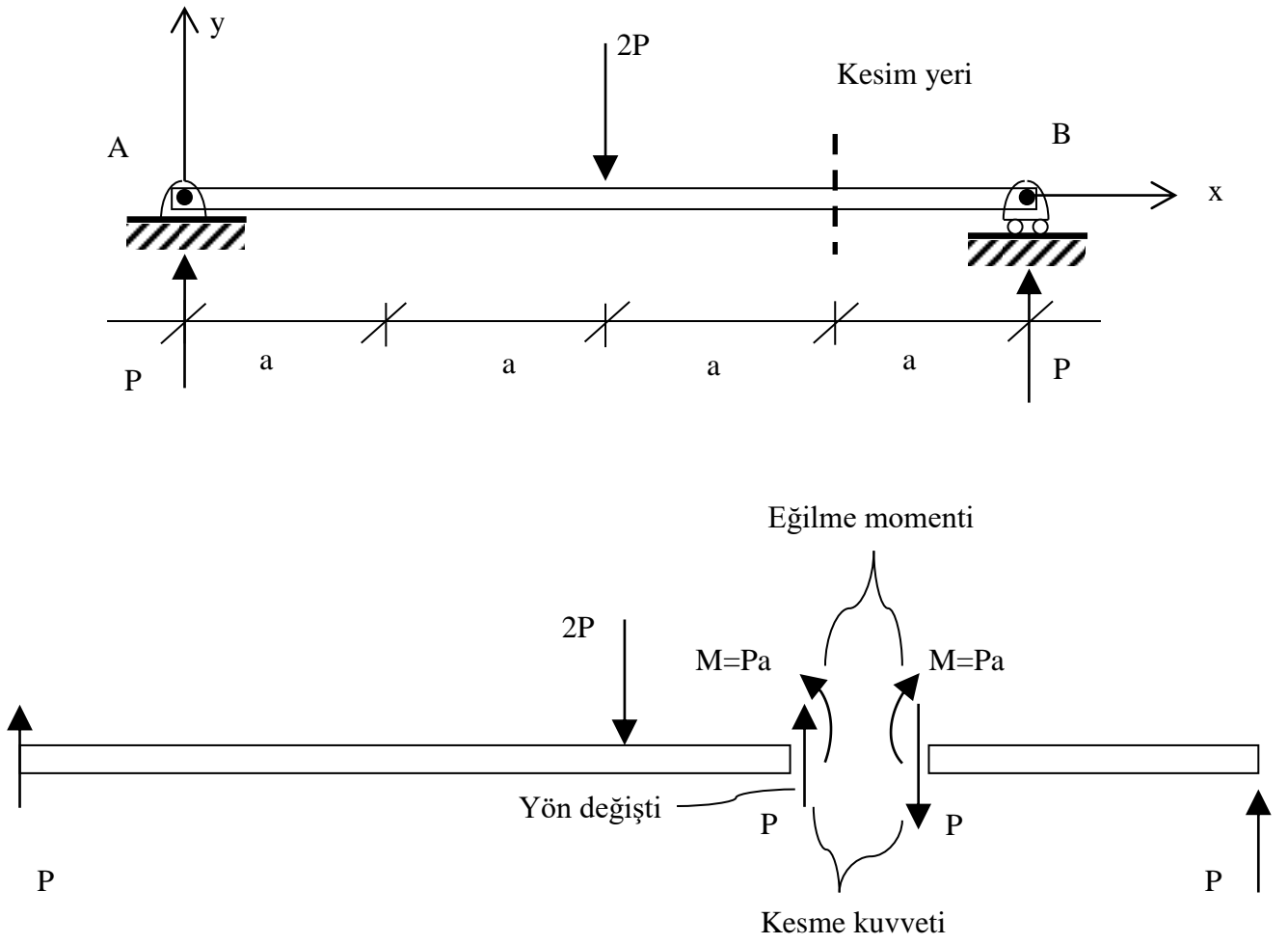
Şekil 7.3.

Kesilen yerde  $Pa$  momenti ve  $P$  kuvveti oluşacaktır.

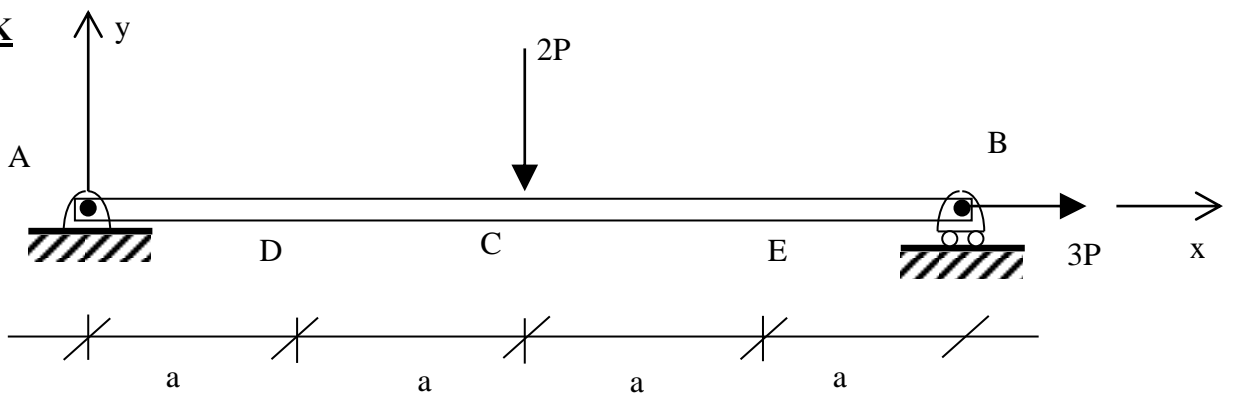


Şekil 7.4.

Parçalar yan yana konulduğunda kesilen yerlerde ortaya çıkan kuvvetlerin Newton'un 3. Yasasına uygun olduğu yani şiddet ve doğrultuları aynı fakat yönlerinin ters olduğu görülür. Düzlemsel problemlerde bir rijit cismi hayali olarak kestiğimizde kesilen yerde 3 adet kuvvet ortaya çıkar. Kiriş örneğindeki gibi cismi eğmeye çalışan momente eğilme momenti, kiriş eksenine dik ve kesilen yüzeye paralel, kiriş kesmeye çalışan kuvvete kesme kuvveti ve son olarak kiriş eksenine paralel kesilen yüzeye dik olan kiriş eksenel kuvveti ortaya çıkar. Ortaya çıkan bu kuvvetler sabit olmayıp kesim yeri değiştikçe değişir.

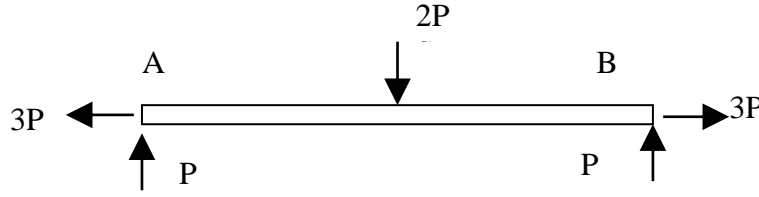


Şekil 7.5.

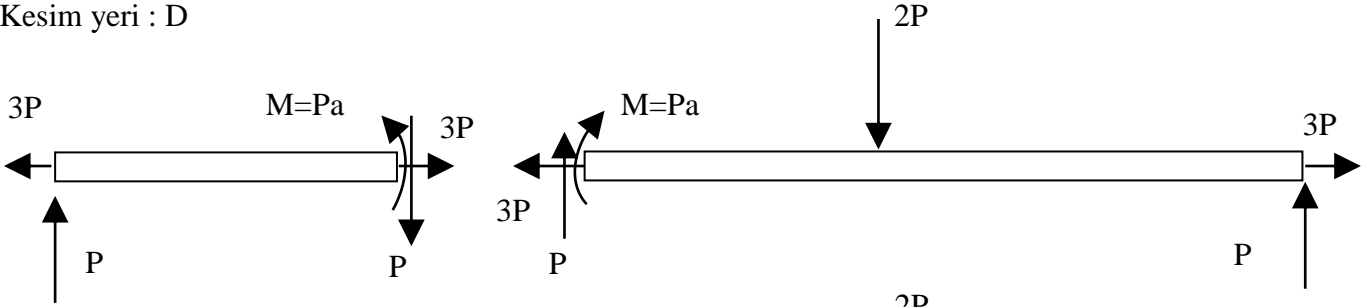
**ÖRNEK**

Şekil 7.6.

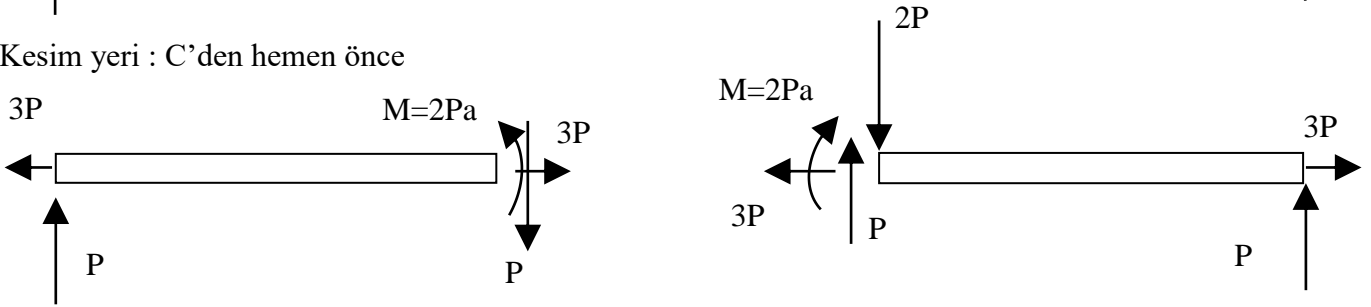
Şekildeki kirişi inceleyerek D, E, C noktasından hemen önce ve C noktasından hemen sonra kesme kuvveti, eğilme momenti ve eksenel kuvvet değerlerinin bulunuz.



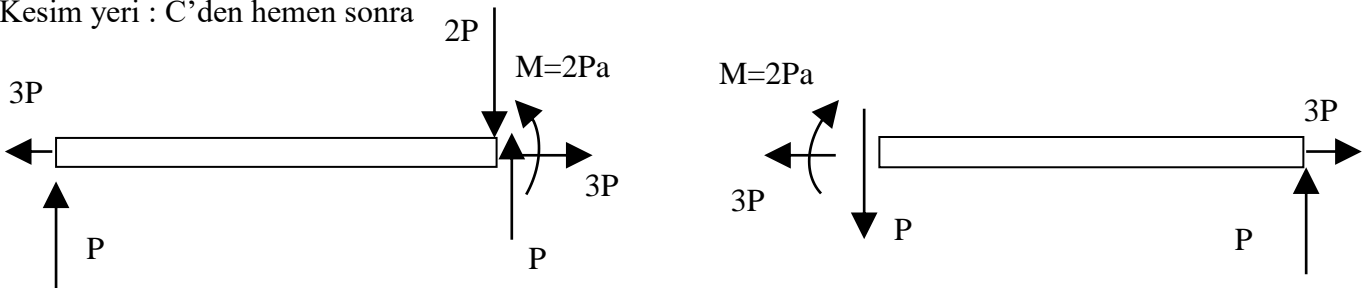
Kesim yeri : D



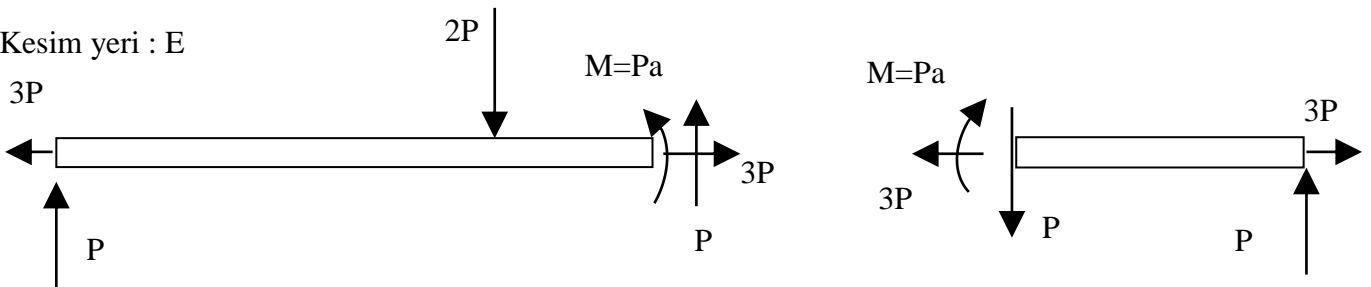
Kesim yeri : C'den hemen önce



Kesim yeri : C'den hemen sonra

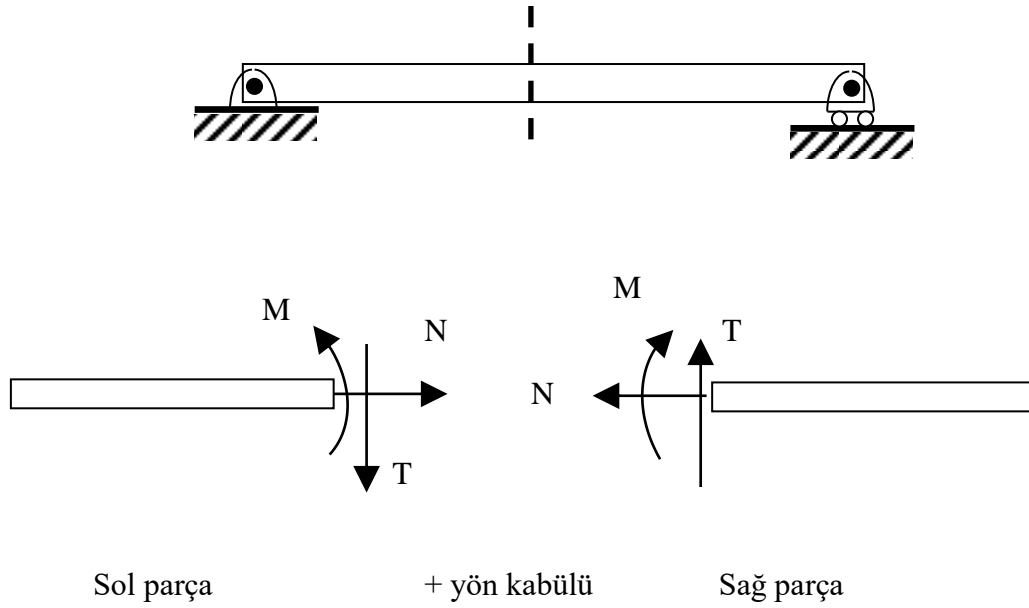


Kesim yeri : E



Şekil 7.7.

Bir rijit cismi hayali olarak kestiğimiz zaman eğilme momenti, kesme kuvveti ve eksenel kuvvet ortaya çıkar



Şekil 7.8.

N : Eksenel kuvvet

T : Kesme kuvveti

M : Eğilme momenti dir.

Daha önce görüldüğü gibi bu değerler kiriş boyunca sabit olmayıp kesilen yerin başlangıca uzaklığı değiştikçe N, T, M değerleri de değişmektedir. Kesilen yerin başlangıca uzaklığına x dersek N, T, M değerleri başlangıca uzaklık yani x değiştikçe değiştiğinden

$$N=N(x)$$

$$T=T(x)$$

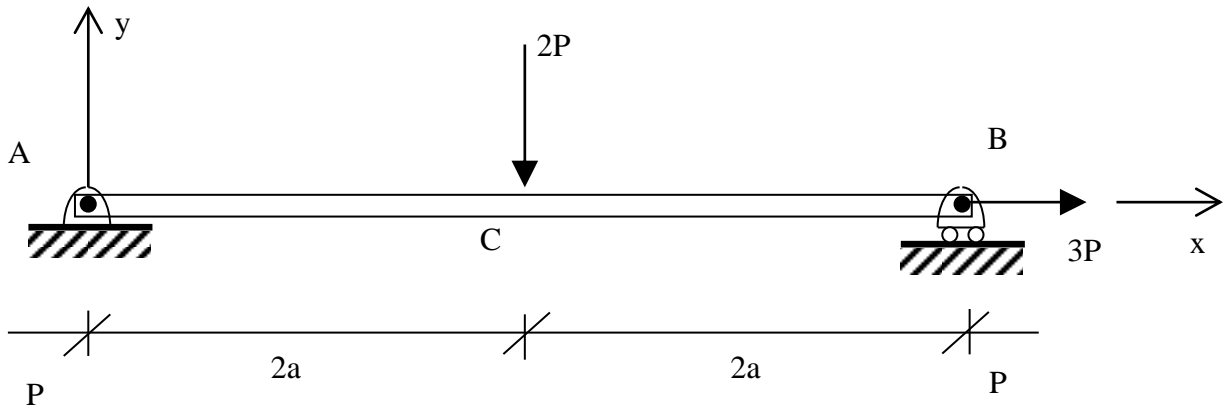
$$M=M(x)$$

olur. Görüldüğü gibi eksenel kuvvet, kesme kuvveti ve eğilme momenti x'e bağlı bir fonksiyon olduğundan bu fonksiyonların grafiği çizilebilir. Bu şekilde çizilen grafiklere eksenel kuvvet diyagramı, kesme kuvveti diyagramı ve eğilme momenti diyagramı yada kısaca N, T, M diyagramları da denebilir.

N, T, M diyagramları çizilirken yüklemenin değiştiği veya kiriş geometrisinin değiştiği her aralıkta hayali bir kesit alıp N, T, M büyüklüklerini x'e bağlı bir fonksiyon olarak yazmak gerekir.

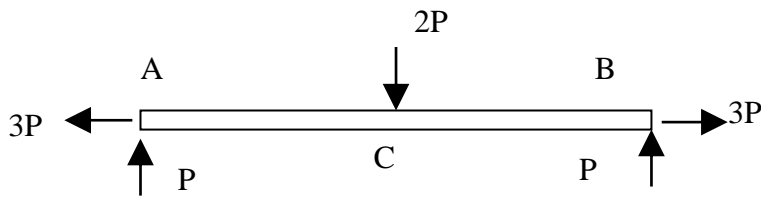
### **ÖRNEK**

Şekildeki kiriş için N, T, M diyagramını çiziniz.



Şekil 7.9.

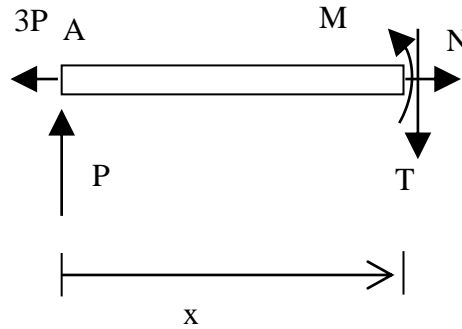
Öncelikle mesnet tepkilerinin bulunması gerekir.



Şekil 7.10.

A noktası başlangıç olmak üzere A noktasından B noktasına giderken AC arasında bir kesit alınması gerekir. C noktasında bir yük olduğundan yani yükleme durumu değiştiğinden BC arasında da bir kesit alınmalıdır.

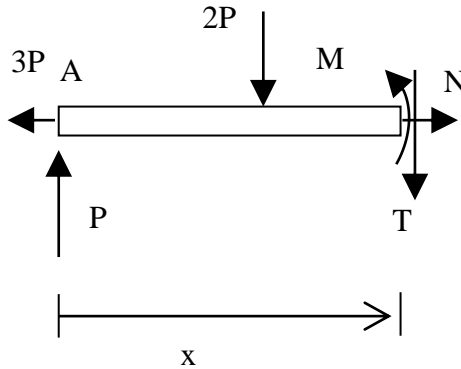
Kesim noktasının A dan x uzaklıkta olduğu ve kesim yerinde (+) yön kabulüne göre iç kuvvetler olduğu kabul edilirse



Şekil 7.11.

1.kesim (A-C arası), sol parça,  $0 \leq x \leq 2a$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow + \quad \sum F_x = 0 \text{ (Sağ Yön Pozitif)} & \quad -3P + N = 0 & \quad N = 3P \text{ (her } x \text{ değeri için)} \\
 \uparrow + \quad \sum F_y = 0 \text{ (Yukarı Yön Pozitif)} & \quad -T + P = 0 & \quad T = P \text{ (her } x \text{ değeri için)} \\
 \curvearrowright + \quad \sum M_{\text{Kesilen yere göre}} = 0 \text{ (Saat Yönü Pozitif)} & \quad Px - M = 0 & \quad M = Px
 \end{aligned}$$



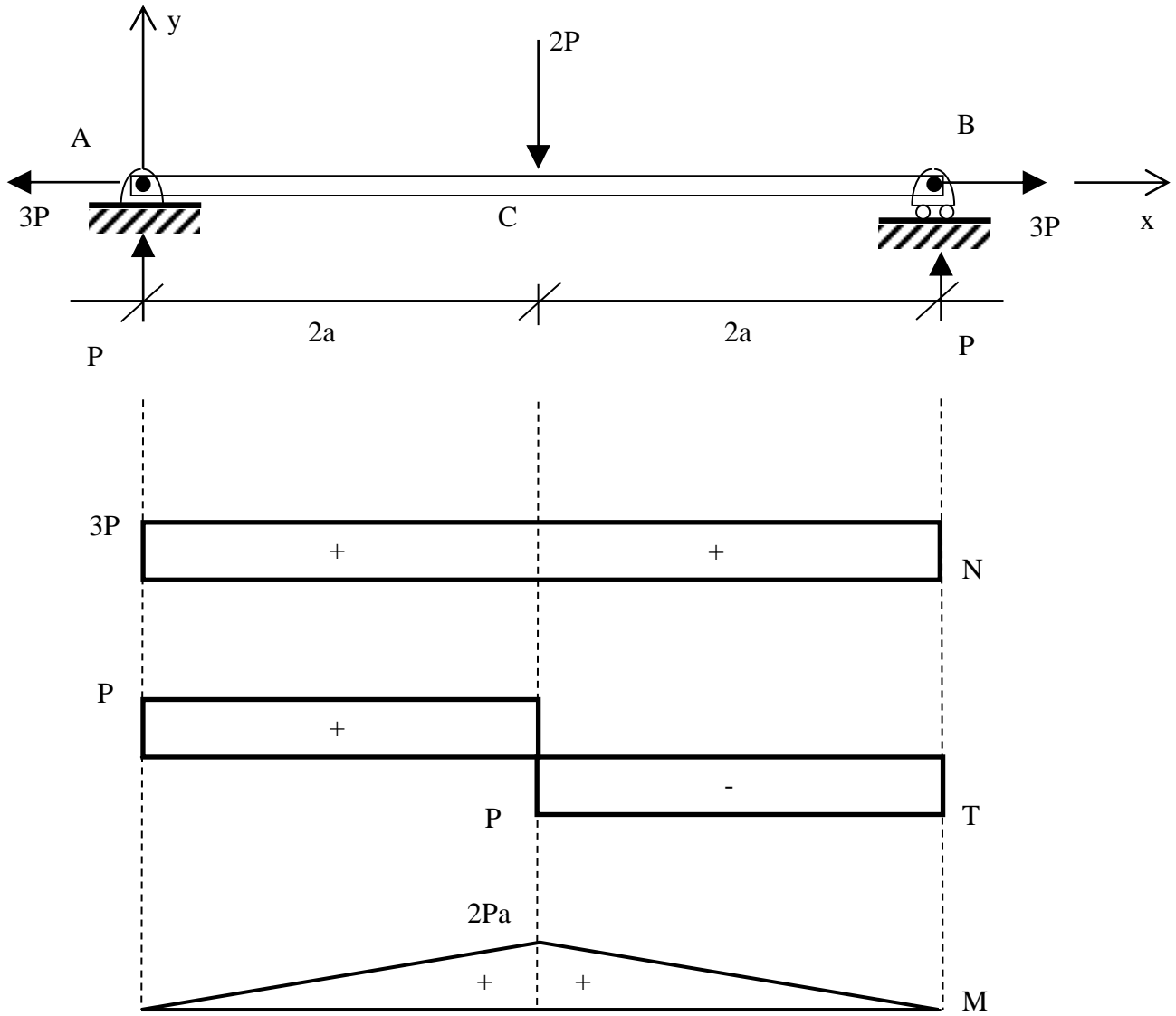
Şekil 7.12.

2.kesim (C-B arası), sol parça,  $2a \leq x \leq 4a$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow + \quad \sum F_x = 0 \text{ (Sağ Yön Pozitif)} & \quad -3P + N = 0 & \quad N = 3P \text{ (her } x \text{ değeri için)} \\
 \uparrow + \quad \sum F_y = 0 \text{ (Yukarı Yön Pozitif)} & \quad -T - 2P + P = 0 & \quad T = -P \text{ (her } x \text{ değeri için)} \\
 \curvearrowright + \quad \sum M_{\text{Kesilen yere göre}} = 0 \text{ (Saat Yönü Pozitif)} & \quad Px - 2P(x - 2a) - M = 0 & \quad M = 4Pa - Px
 \end{aligned}$$

Sonuç olarak

	$N=3P$		$N=3P$	
$0 \leq x \leq 2a$ için	$T=P$	$2a \leq x \leq 4a$ için	$T=-P$	grafikleri çizilecektir.
	$M=Px$		$M=4Pa-Px$	

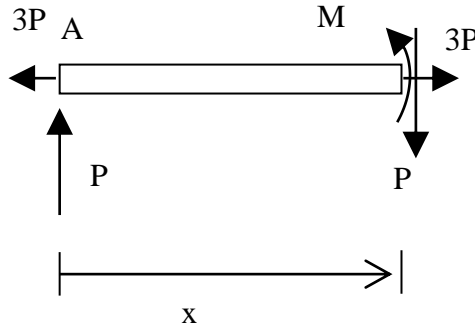


Şekil 7.13.



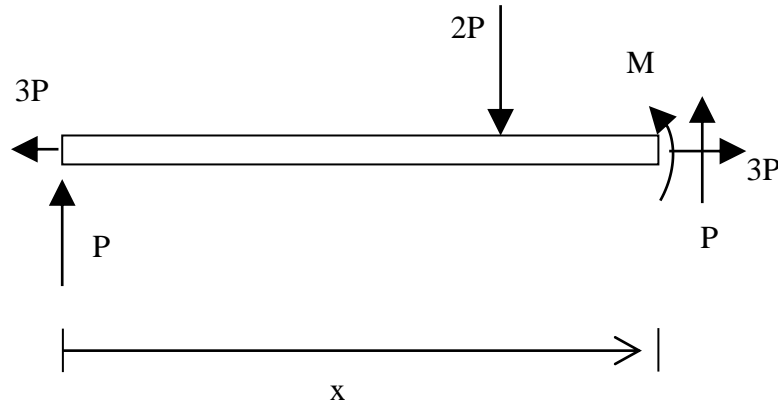
Bu diyagramlara N, T, M diyagramları denir. (+) değerler diyagramın üstüne (-) değerler diyagramın altına yazılır. Diyagramlar kirişin herhangi bir kesitinde oluşan eksenel kuvvet, kesme kuvveti ve eğilme moment değerlerinin kolayca görülmesini kirişin neresinde moment fazla, neresinde kesme kuvveti fazla, neresinde eksenel kuvvetin fazla olduğunu ve tedbir alınması gerektiğini gösterir. Örneğin bu kirişte C noktasında moment maksimum değerine ulaşmıştır. C noktası için daha fazla tedbir alınması (örneğin daha fazla çelik konulması) gerekir.

Kesme kuvveti diyagramı incelenecek olursa A-B aralığında diyagram pozitifdir. Kirişte oluşan kesme kuvveti (A-B aralığında) (+) yön kabulüne uygundur. Yani kirişteki kesme kuvveti (+) kabul ettiğimiz yöndedir.



Şekil 7.14.

C-B aralığında ise diyagram (-) dir. C-B aralığında kirişte oluşan kesme kuvvetinin (+) yön kabulüne göre tersi olduğunu gösterir

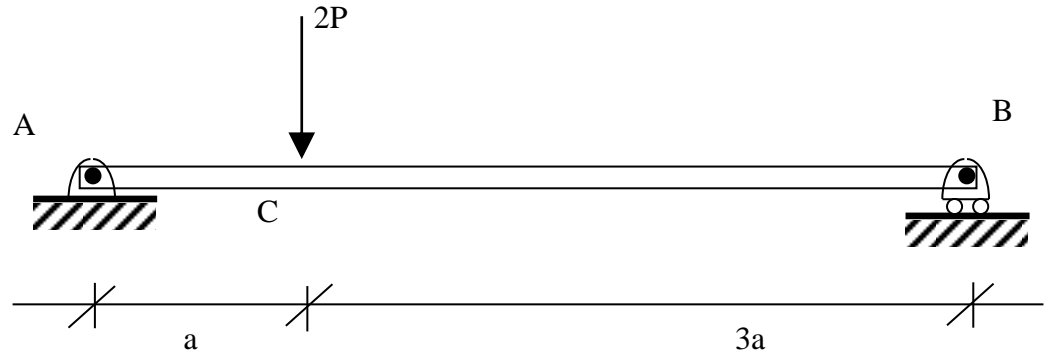


Şekil 7.15.

Benzer durum moment içinde geçerlidir. Moment diyagramı hep (+) dır. Bu durumda kiriş boyunca oluşan moment (+) kabul ettiğimiz yöndedir.

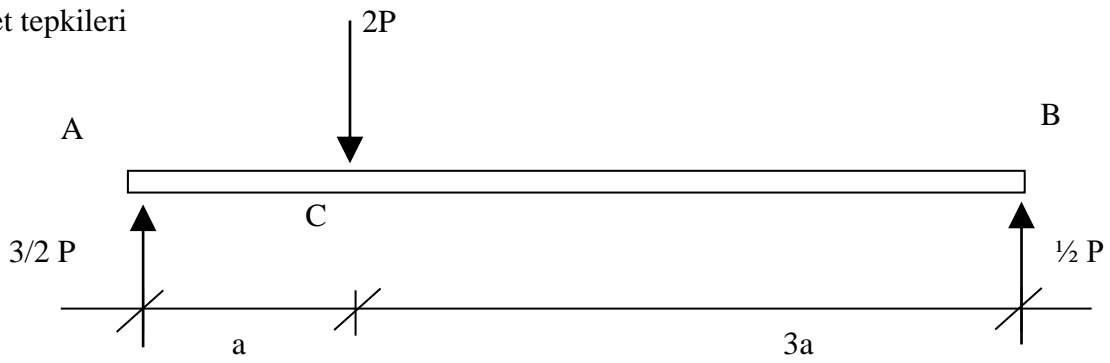
**ÖRNEK**

N, T, M



Şekil 7.16.

mesnet tepkileri



Şekil 7.17.

1.kesim (A-C arası), sol parça,  $0 \leq x \leq a$ 

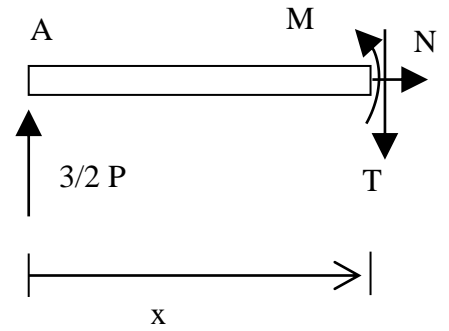
$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = -T + 3/2 P = 0$$

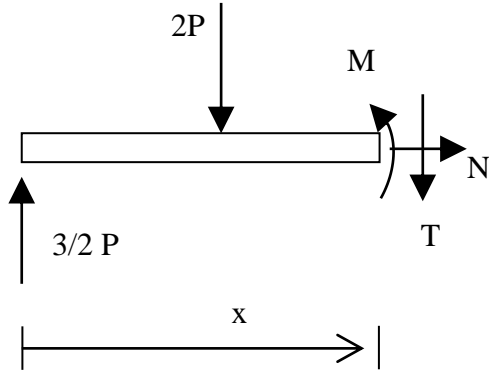
$$T = 3/2 P$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K.y.g.} = -3/2 P x + M = 0$$

$$M = 3/2 P x$$



Şekil 7.18.



Şekil 7.19.

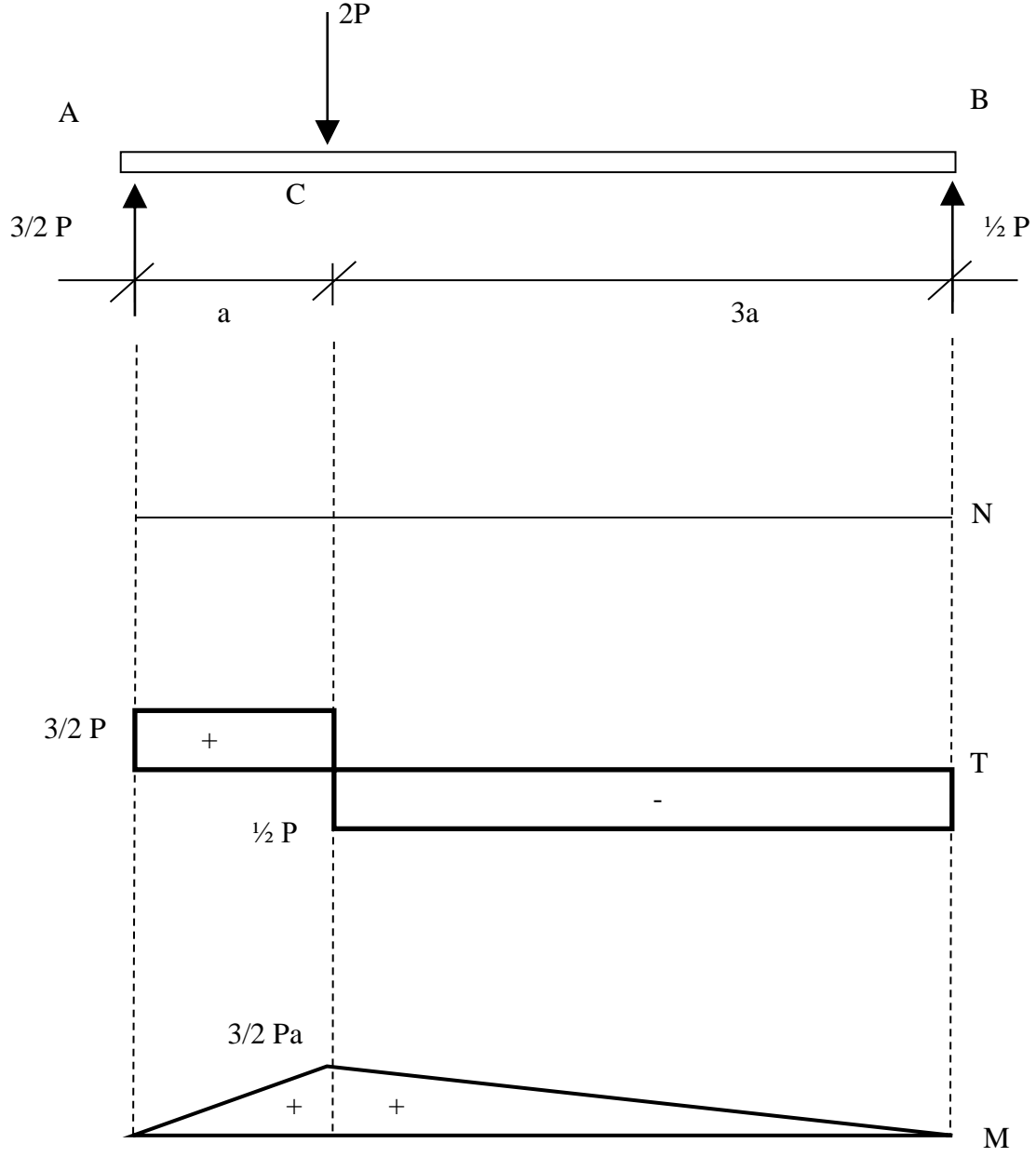
2.kesim (C-B arası), sol parça,  $a \leq x \leq 4a$ 

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

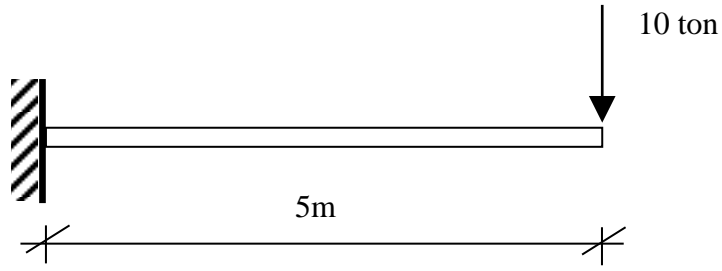
$$\uparrow + \quad \sum F_y = -T + 3/2 P - 2P = 0$$

$$T = -1/2 P$$

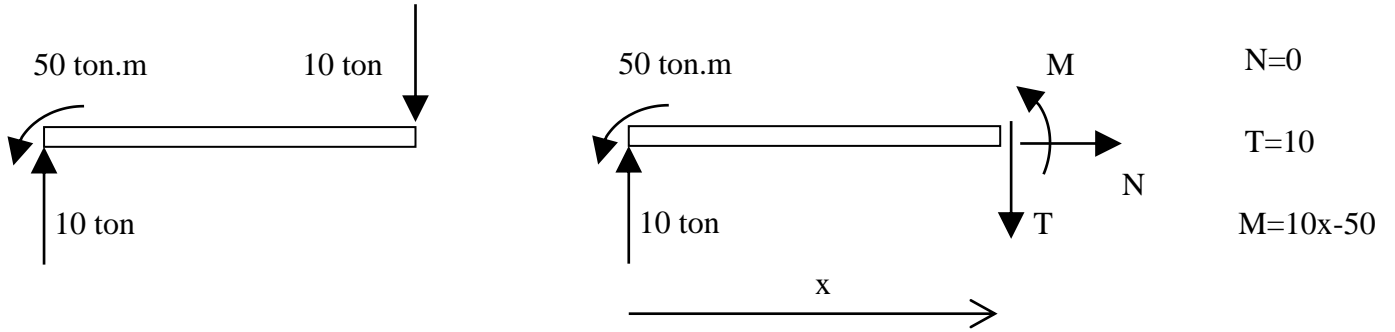
$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K.y.g.} = -3/2 P x + 2P(x-a) + M = 0 \quad M = 2Pa - 1/2 P x$$



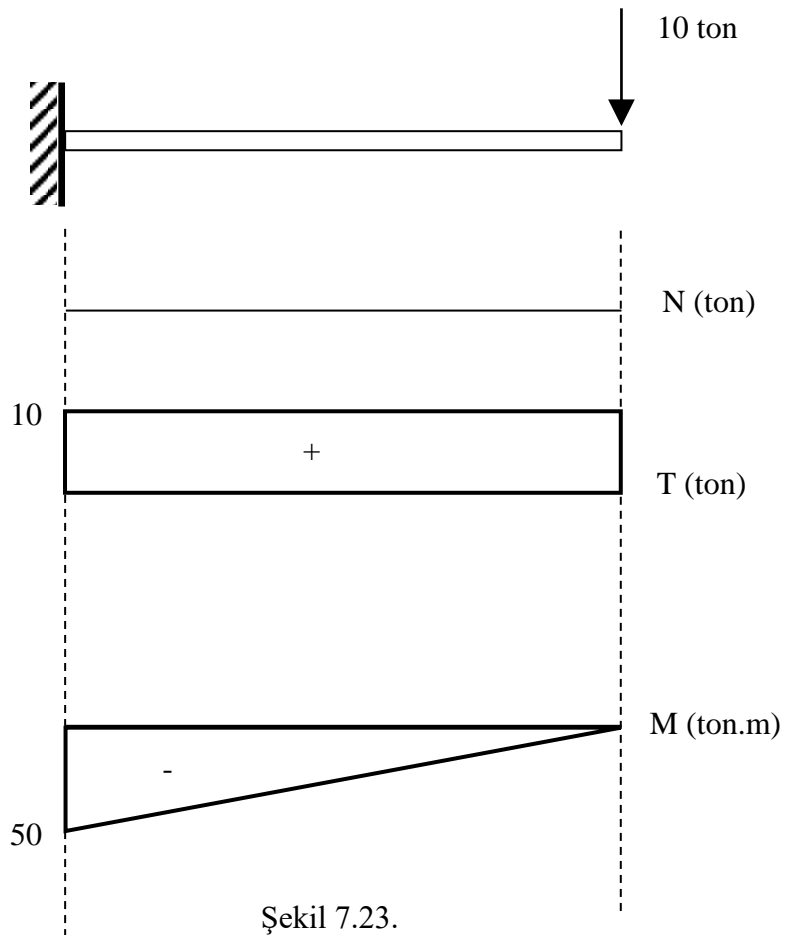
Şekil 7.20.

**ÖRNEK**

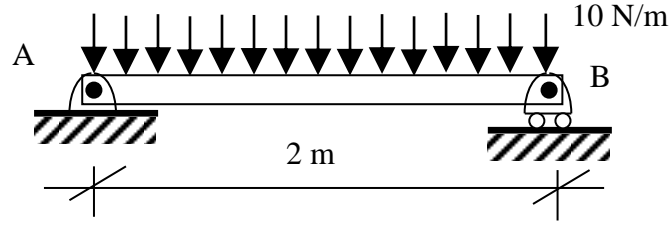
Şekil 7.21.



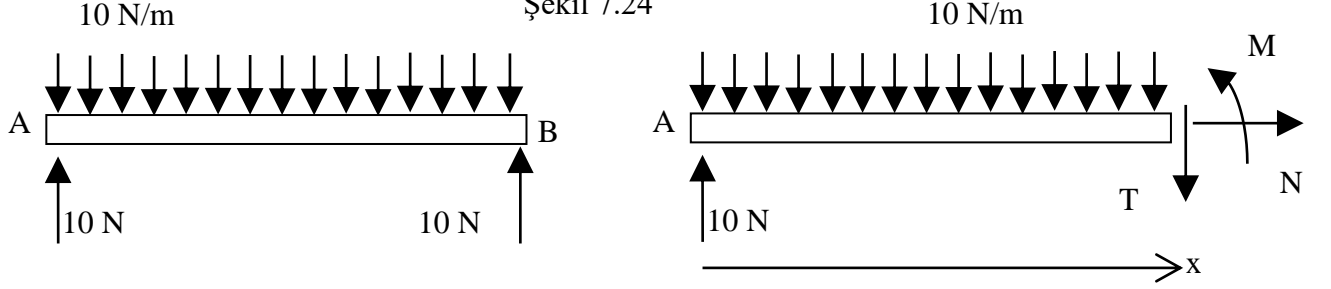
Şekil 7.22.



Şekil 7.23.

**ÖRNEK**

Şekil 7.24



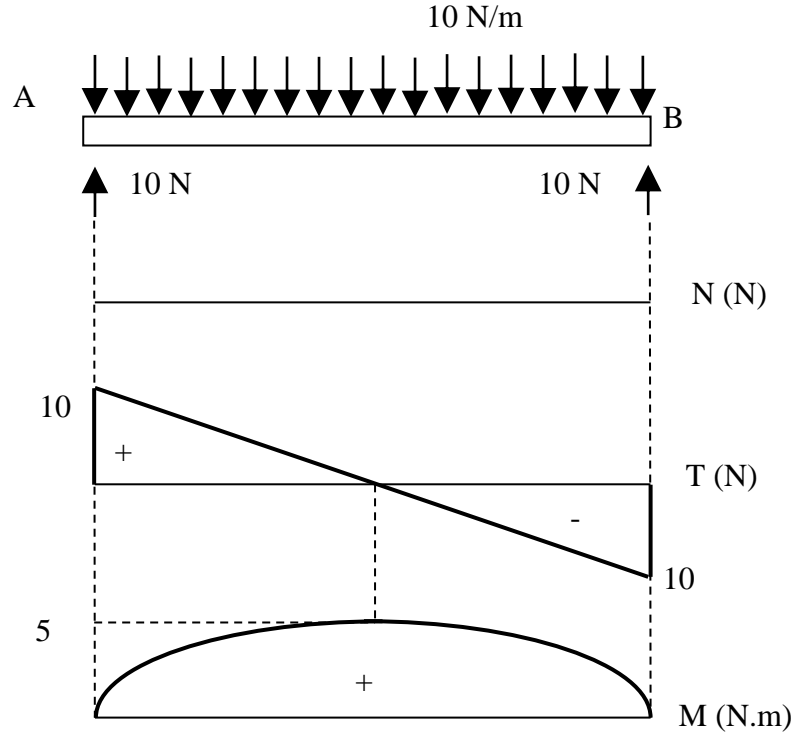
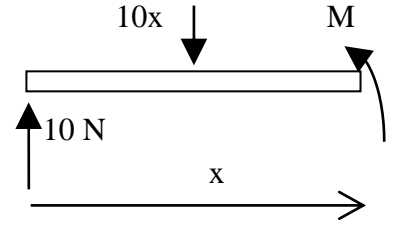
Şekil 7.25

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

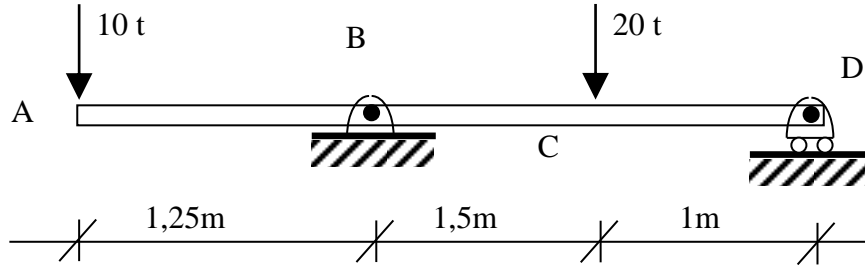
$$\uparrow + \quad \sum F_y = 10 - 10x - T = 0$$

$$T = 10 - 10x$$

$$+ \curvearrowleft \quad \sum M_{K.y.g.} = -10x + (10x) \frac{x}{2} + M = 0 \quad M = 10x - 5x^2$$



Şekil 7.26.

**ÖRNEK**

Şekil 7.27.

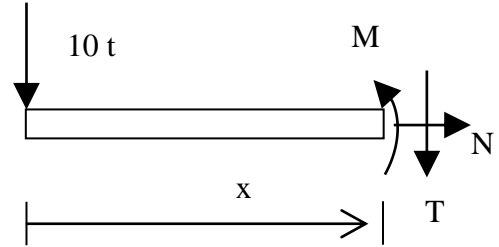
Mesnet tepkileri  $B_y=23 \text{ t}$      $D_y=7 \text{ t}$     3 adet kesit almak gerekir. A-B, B-C, C-D

1.kesim (A-B arası), sol parça,  $0 \leq x \leq 1,25$

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = -10 - T = 0 \quad T = -10$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K.y.g.} = 10x + M = 0 \quad M = -10x$$



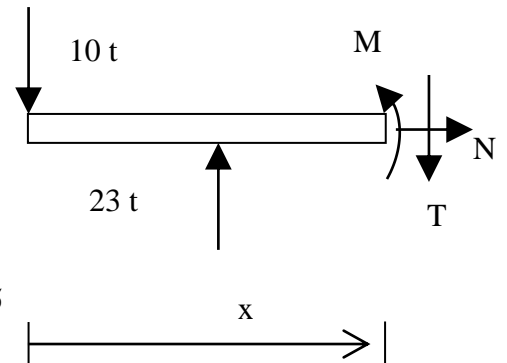
Şekil 7.28.

2.kesim (B-C arası), sol parça,  $1,25 \leq x \leq 2,75$

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = -10 + 23 - T = 0 \quad T = 13$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K.y.g.} = 10x - 23(x - 1,25) + M = 0 \quad M = 13x - 28,75$$



Şekil 7.29.

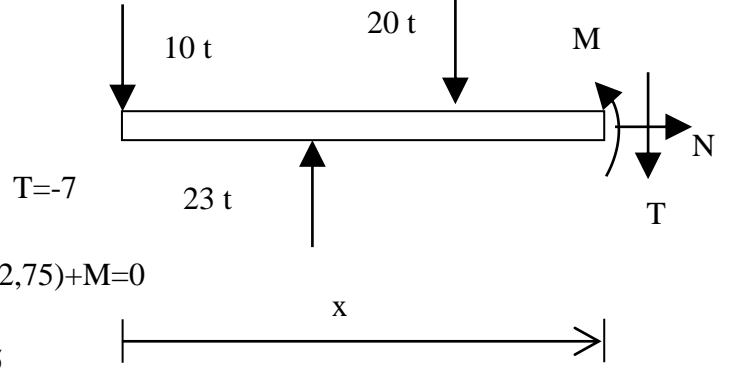
3.kesim (C-D arası), sol parça,  $2,75 \leq x \leq 3,75$

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

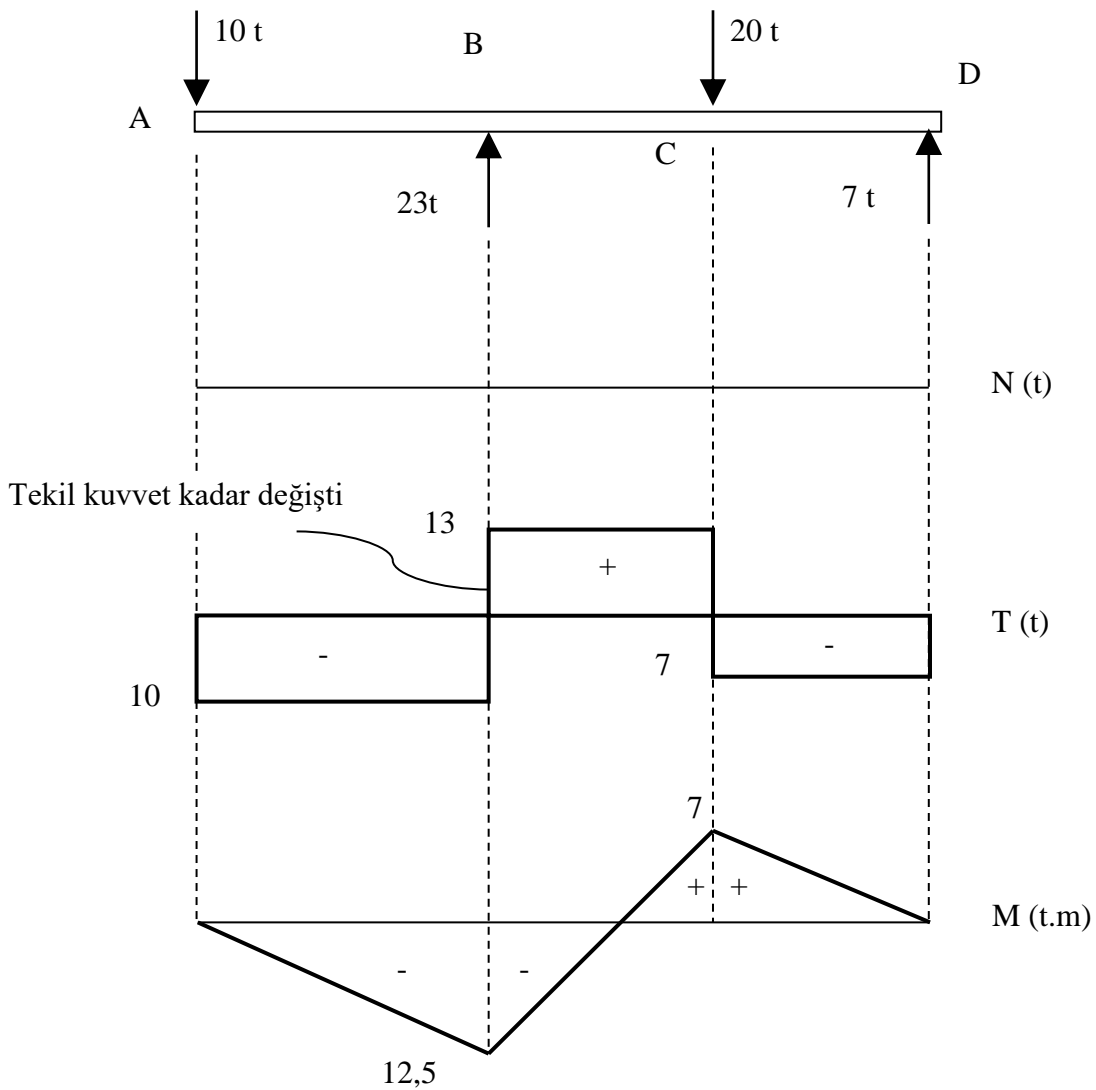
$$\uparrow + \quad \sum F_y = -10 + 23 - 20 - T = 0$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K,y.g.} = 10x + -23(x-1,25) + 20(x-2,75) + M = 0$$

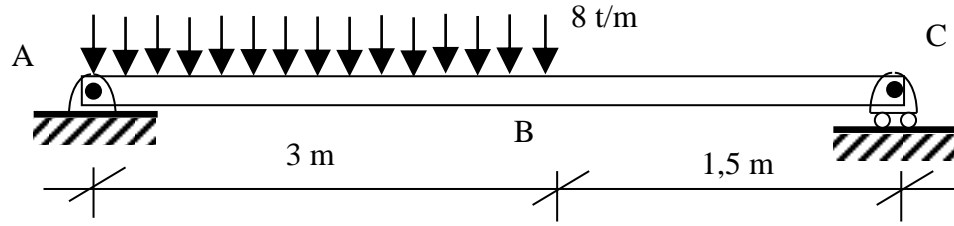
$$M = -7x + 26,25$$



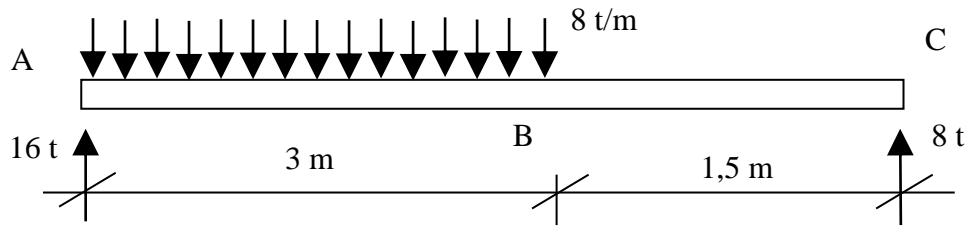
Şekil 7.30.



Şekil 7.31.

**ÖRNEK**

Şekil 7.32



Şekil 7.33

1.kesim (A-B arası), sol parça,  $0 \leq x \leq 3$ 

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

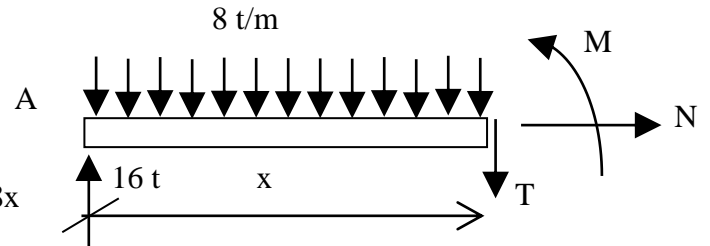
$$\uparrow + \quad \sum F_y = 16 - 8x - T = 0$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K,y.g.} = -16x + (8x) \frac{x}{2} + M = 0$$

$$T = 16 - 8x$$

$$M = 16x - 4x^2$$

Şekil 7.34

2.kesim (B-C arası), sol parça,  $3 \leq x \leq 4,5$ 

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

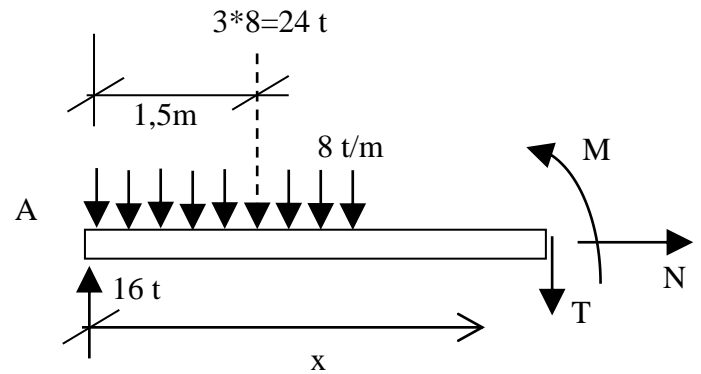
$$\uparrow + \quad \sum F_y = 16 - 24 - T = 0$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K,y.g.} = -16x + 24(x - 1,5) + M = 0$$

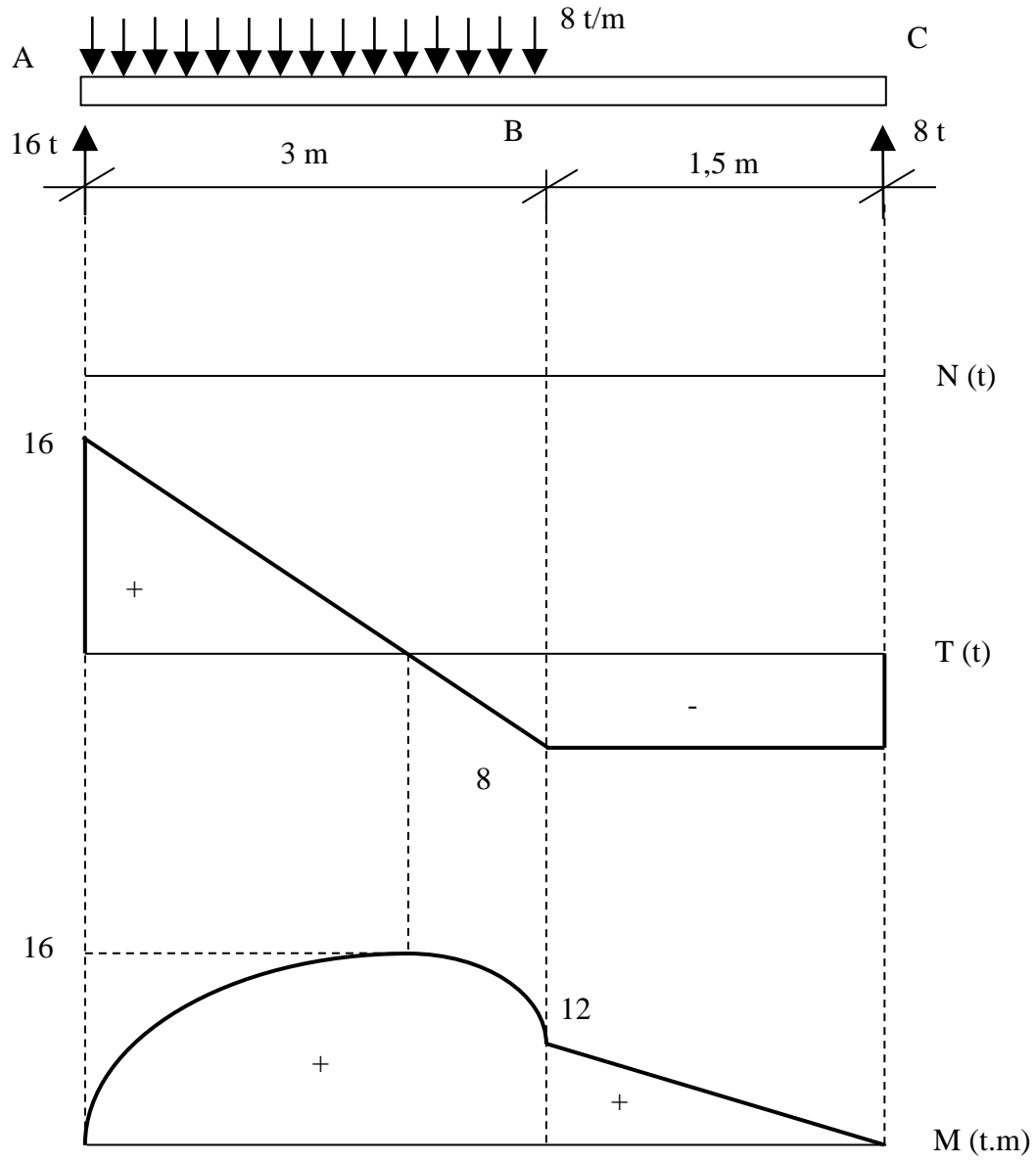
$$T = -8$$

$$M = -8x + 36$$

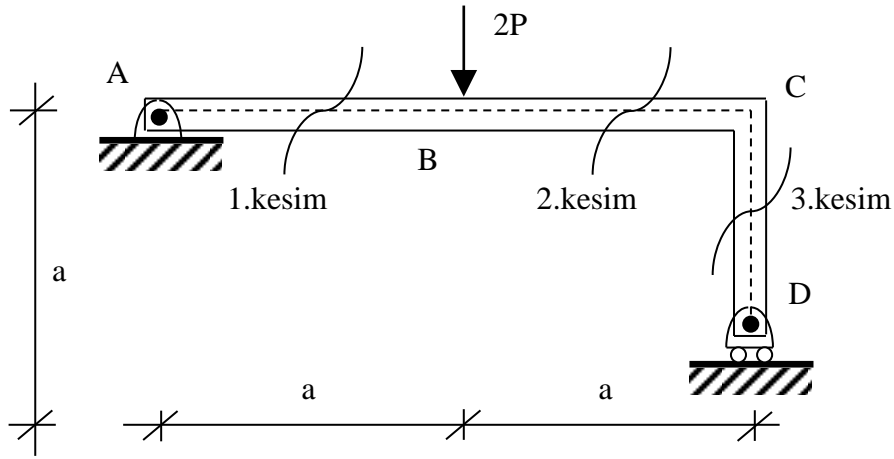
Şekil 7.35







Şekil 7.36

**ÖRNEK**

Şekil 7.37.

Mesnet Tepkileri :  $A_x=0$ ,  $A_y=P$ ,  $D=P$

1.kesim (A-B arası), sol parça,  $0 \leq x \leq a$

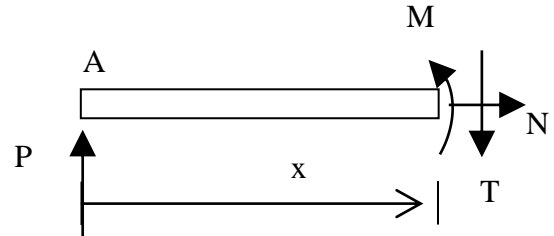
$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = P - T = 0$$

$$T = P$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K,y,g.} = -Px + M = 0$$

$$M = Px$$



Şekil 7.38.

2.kesim (B-C arası), sol parça,  $a \leq x \leq 2a$

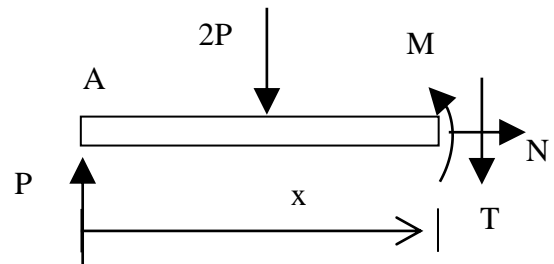
$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = P - 2P - T = 0$$

$$T = -P$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K,y,g.} = -Px + 2P(x-a) + M = 0$$

$$M = 2Pa - Px$$



Şekil 7.39.

3.kesim (C-D arası), sol parça,  $x = 2a$

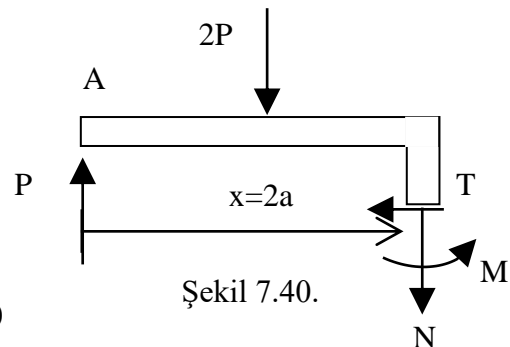
$$\rightarrow + \quad \sum F_x = T = 0$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = P - 2P - N = 0$$

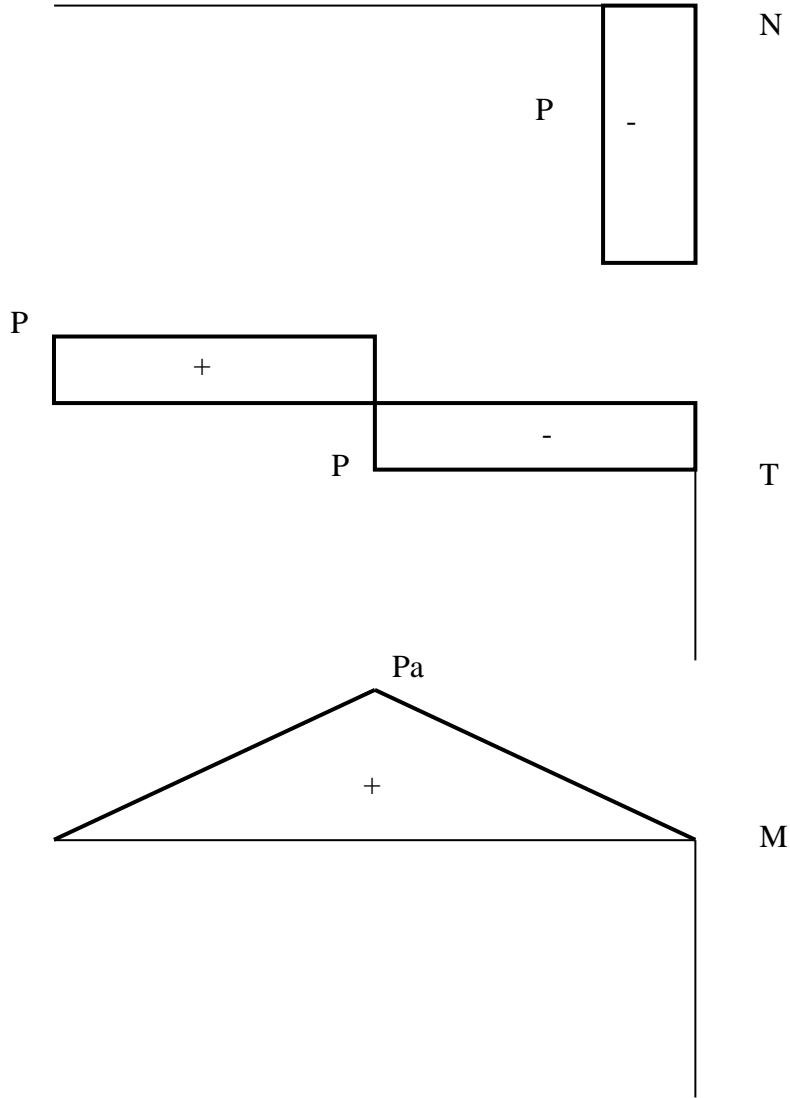
$$N = -P$$

$$\curvearrowleft + \quad \sum M_{K,y,g.} = -P \cdot 2a + 2P(2a-a) + M = 0$$

$$M = 0$$

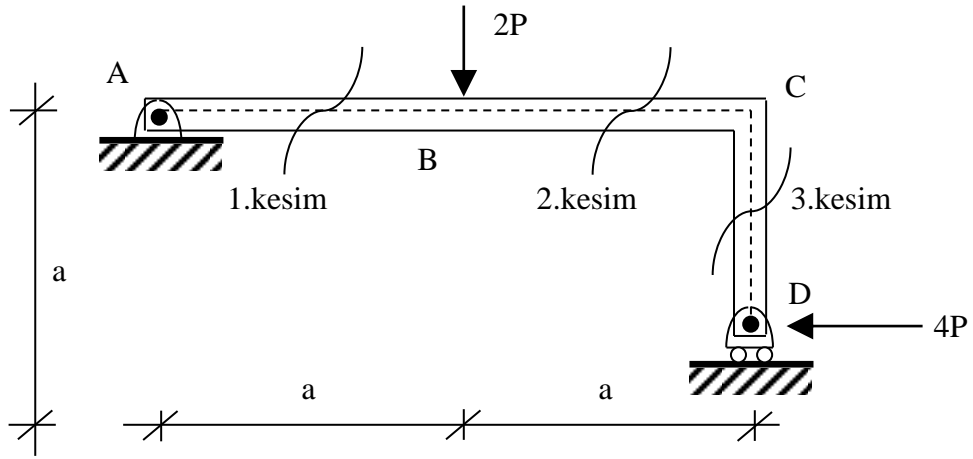


Şekil 7.40.



Şekil 7.41.

**DİKKAT** : Eksenel kuvvet (kesite dik, eksene paralel) ve kesme kuvveti (kesite paralel, eksene dik) değişimlerine dikkat ediniz. A-C arası yatay kuvvet eksenel kuvvet iken C-D arası yatay kuvvet kesme kuvvetidir. A-C arası düşey kuvvet kesme kuvveti iken C-D arası düşey kuvvet eksenel kuvvettir.

**ÖRNEK**

Şekil 7.42.

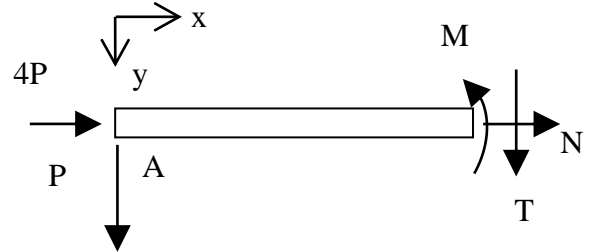
Mesnet Tepkileri :  $A_x=4P$ ,  $A_y=-P$ ,  $D=3P$

1.kesim (A-B arası), sol parça,  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq 0$

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = -4P$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = -P - T = 0 \quad T = -P$$

$$\curvearrowright + \quad \sum M_{K,y,g.} = Px + M = 0 \quad M = -Px$$



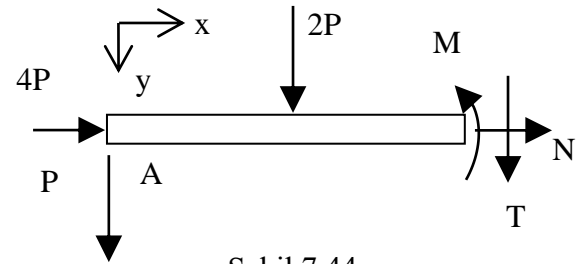
Şekil 7.43.

2.kesim (B-C arası), sol parça,  $a \leq x \leq 2a$ ,  $0 \leq y \leq 0$

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = -4P$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = -P - 2P - T = 0 \quad T = -3P$$

$$\curvearrowright + \quad \sum M_{K,y,g.} = Px + 2P(x-a) + M = 0 \quad M = 2Pa - 3Px$$



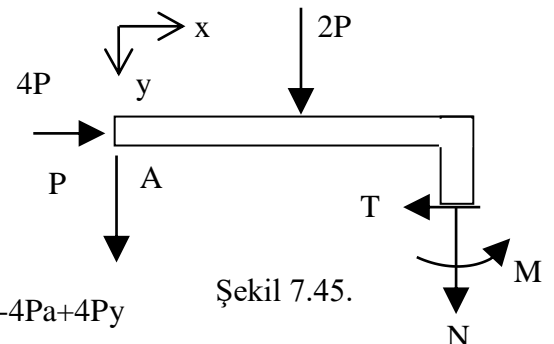
Şekil 7.44.

3.kesim (C-D arası), sol parça,  $2a \leq x \leq 2a$ ,  $0 \leq y \leq a$

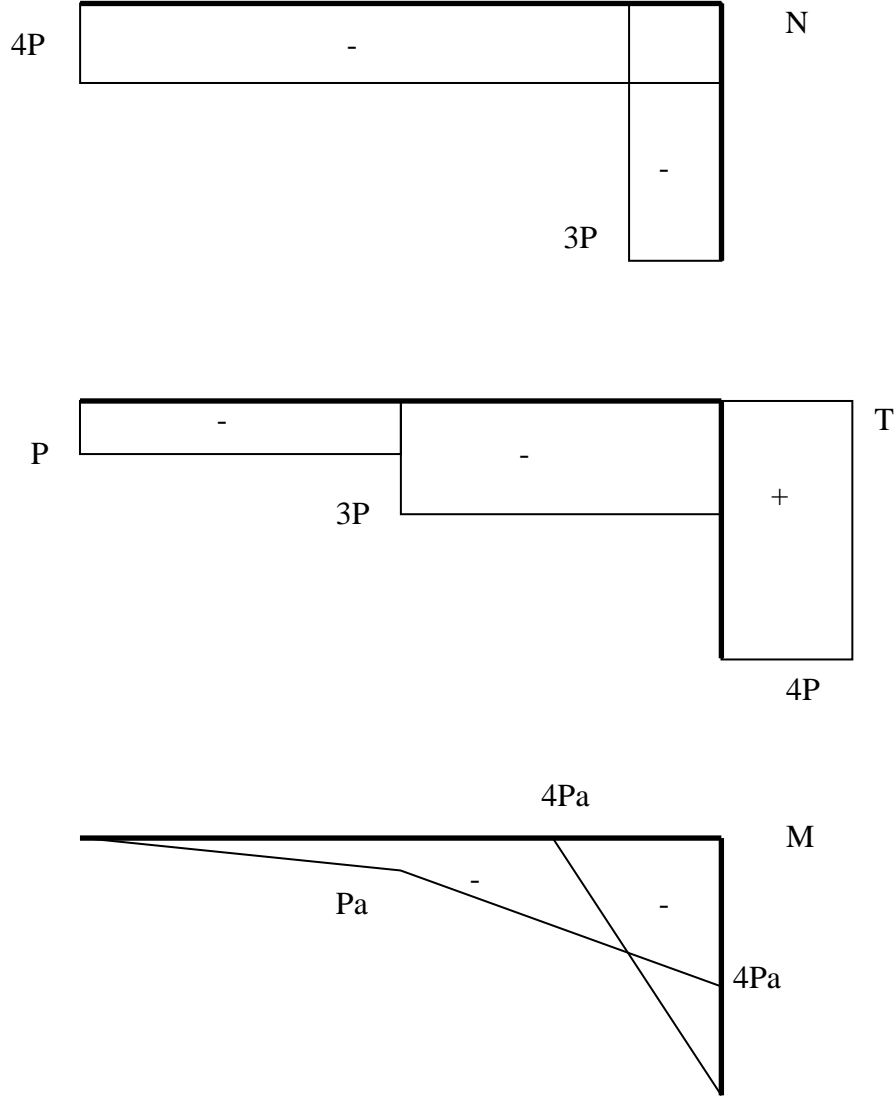
$$\rightarrow + \quad \sum F_x = T = 4P$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = -P - 2P - N = 0 \quad N = -3P$$

$$\curvearrowright + \quad \sum M_{K,y,g.} = P \cdot 2a + 2P(2a-a) - 4P \cdot y + M = 0 \quad M = -4Pa + 4Py$$



Şekil 7.45.

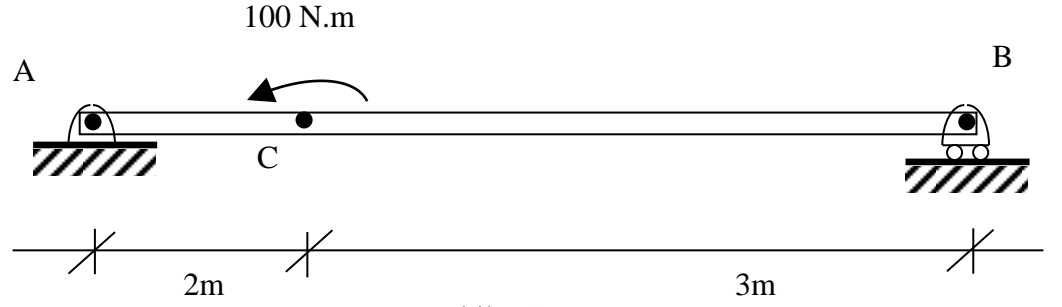


Şekil 7.46.

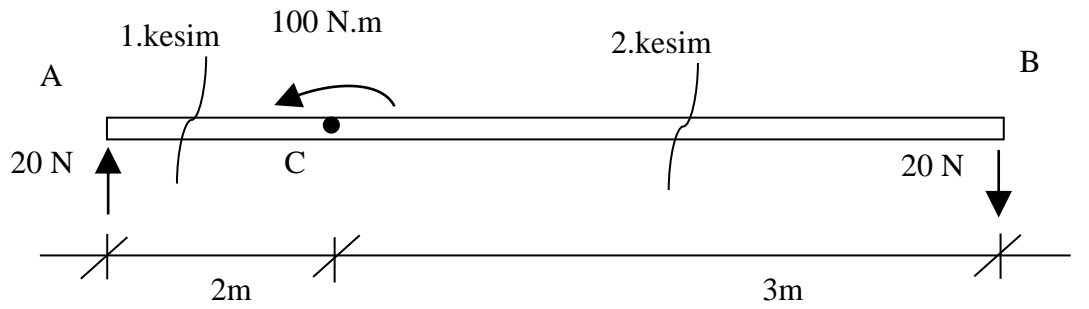
**DİKKAT** : Eksenel kuvvet (kesite dik, eksene paralel) ve kesme kuvveti (kesite paralel, eksene dik) değişimlerine dikkat ediniz. A-C arası yatay kuvvet eksenel kuvvet iken C-D arası yatay kuvvet kesme kuvvetidir. A-C arası düşey kuvvet kesme kuvveti iken C-D arası düşey kuvvet eksenel kuvvettir.

**ÖRNEK**

N, T, M



Şekil 7.47.



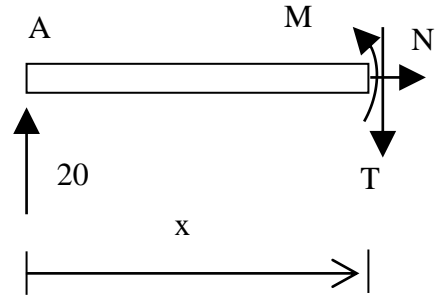
Şekil 7.48.

1. kesim (A-C arası), sol parça,  $0 \leq x \leq 2$ 

$$\rightarrow + \quad \sum F_x = N = 0$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = 20 - T = 0 \quad T = 20 \text{ N}$$

$$+ \curvearrowleft \quad \sum M_{K.y.g.} = -20x + M = 0 \quad M = 20x$$



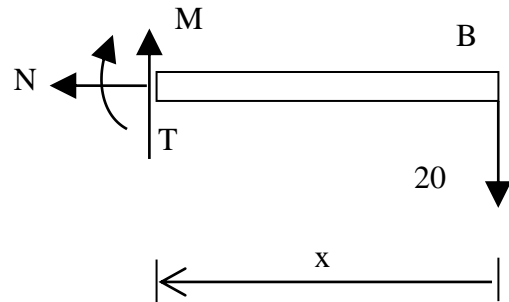
Şekil 7.49.

2. kesim (C-B arası), sağ parça,  $0 \leq x \leq 3$ 

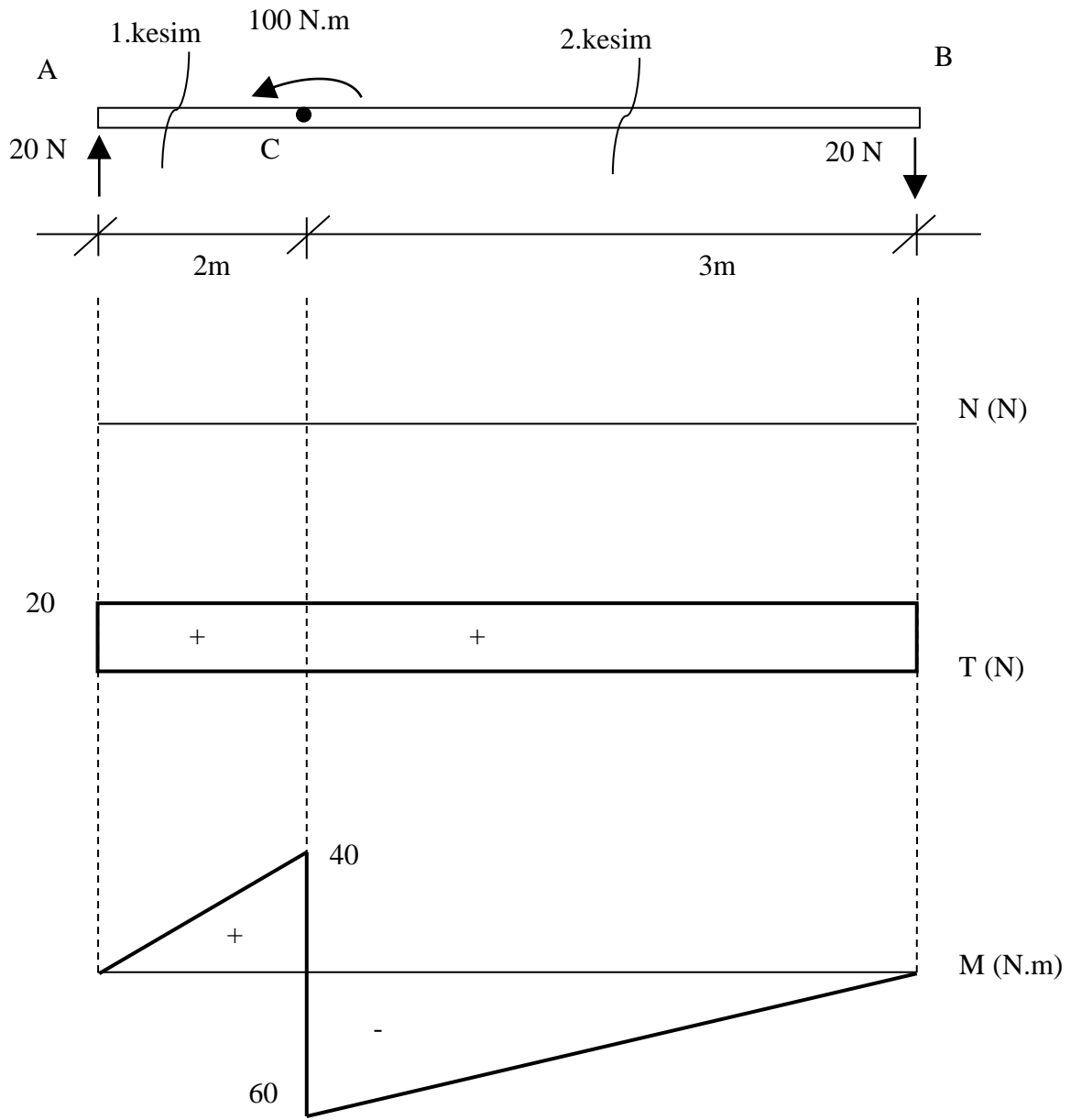
$$\rightarrow + \quad \sum F_x = -N = 0$$

$$\uparrow + \quad \sum F_y = -20 + T = 0 \quad T = 20 \text{ N}$$

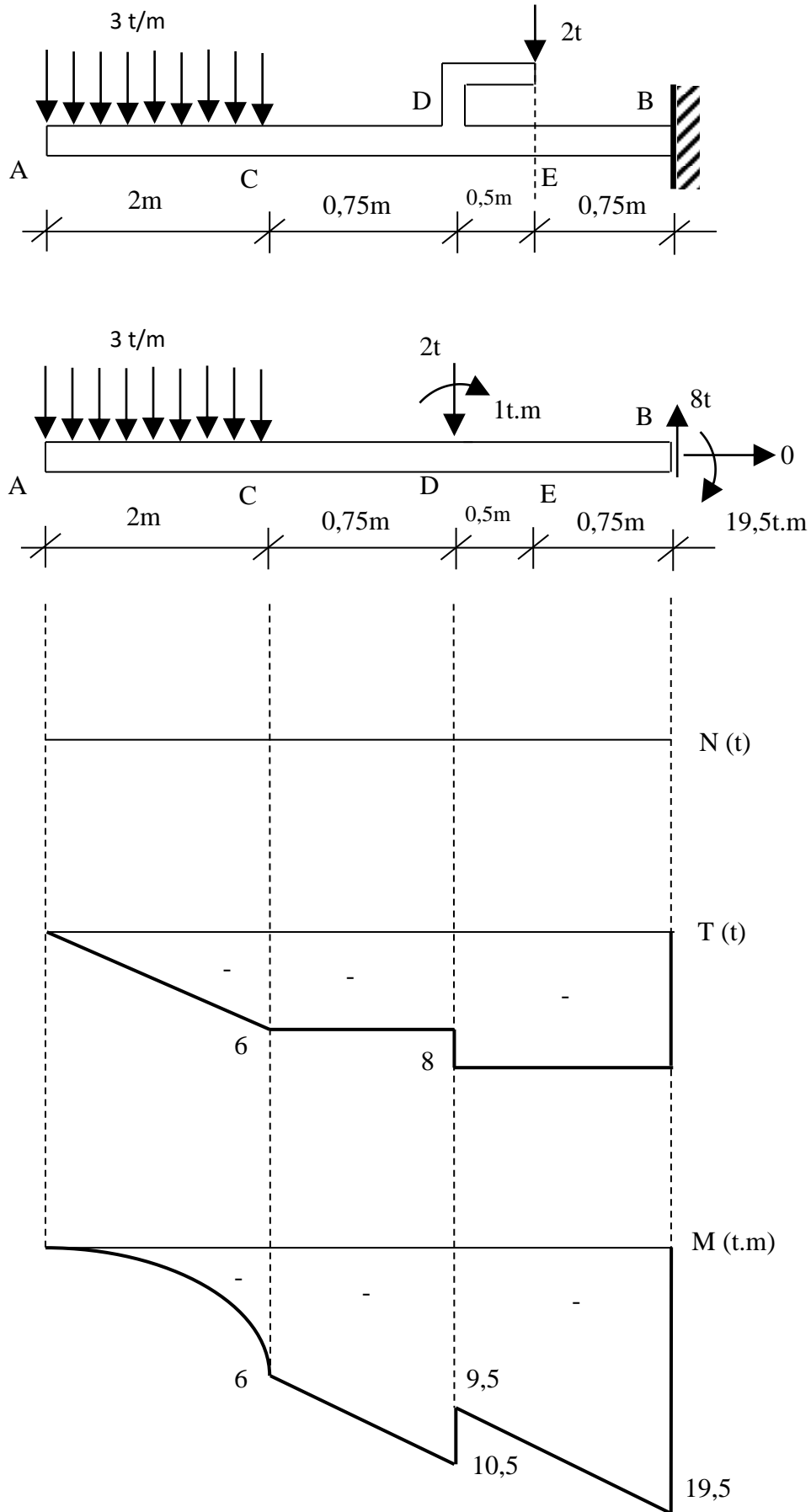
$$+ \curvearrowleft \quad \sum M_{K.y.g.} = -20x - M = 0 \quad M = -20x$$



Şekil 7.50.



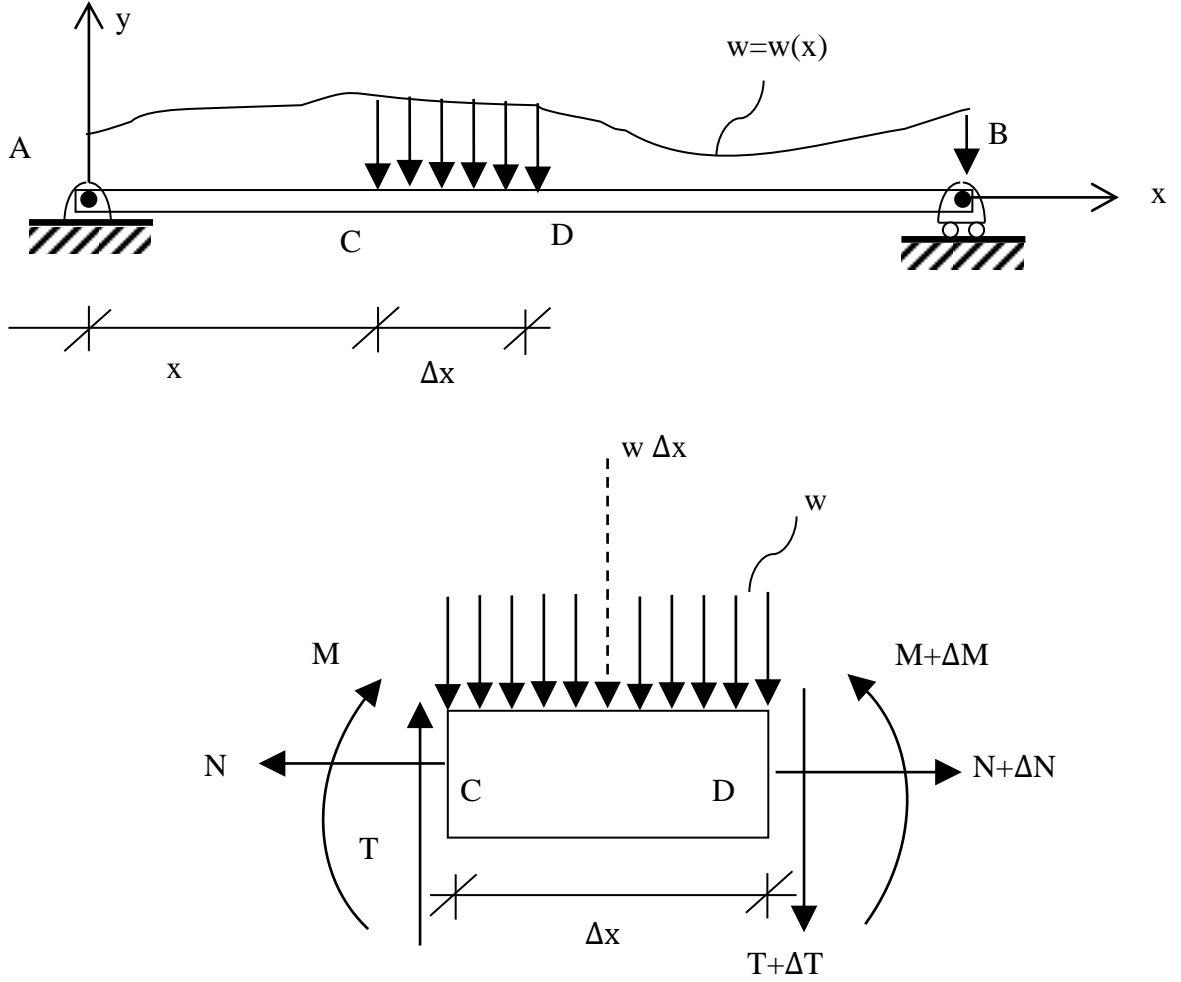
Şekil 7.51.

**ÖDEV**

Şekil 7.52.



### 7.3. Yük, Kesme Kuvveti ve Eğilme Momenti Arasındaki Bağıntılar



Şekil 7.53.

$$\uparrow + \quad \sum F_y = 0 \quad T - T - \Delta T - w\Delta x = 0 \quad \Delta T = -w\Delta x \quad \frac{\Delta T}{\Delta x} = -w$$

$$\Delta x \rightarrow 0, \quad \frac{dT}{dx} = -w$$

$$\sum M_D = M + \Delta M - M - T\Delta x + w * \Delta x * \left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \quad \frac{\Delta M}{\Delta x} = T$$

$$\Delta x \rightarrow 0, \quad \frac{dM}{dx} = T$$

$$\frac{dT}{dx} = -w \quad dT = -w * dx$$

$$\int dT = - \int w * dx \quad T_D - T_C = - \int_{x_C}^{x_D} w * dx$$

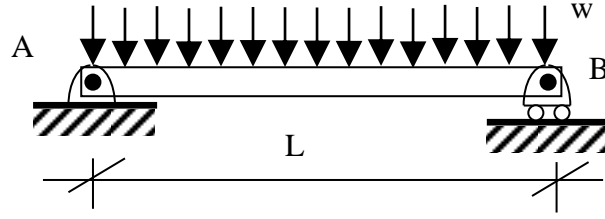
$T_D - T_C = -$ (C ve D noktaları arasında yük eğrisinin altında kalan alan)

$$\frac{dM}{dx} = T \quad dM = T * dx$$

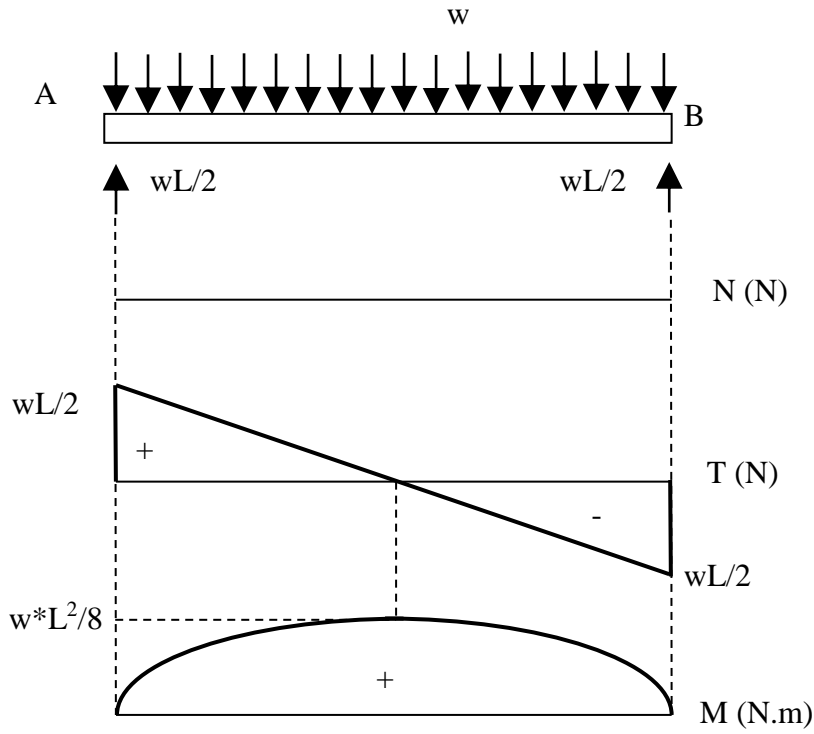
$$\int dM = \int T * dx \quad M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} T * dx$$

$M_D - M_C =$ (C ve D noktaları arasında kesme kuvveti eğrisinin altında kalan alan)

$T=0$  ise  $\frac{dM}{dx} = 0$  yani M eğrisinin türevi yani eğimi sıfır demektir. Fonksiyonun maksimum olduğu yerde eğim sıfır olduğundan  $T=0$  olan yerde moment maksimum değerdedir.

**ÖRNEK**

Şekil 7.54



$$T_B - T_A = -\text{Yük alanı}$$

$$\text{Yük alanı} = w \cdot L$$

$$T_B - w \cdot L/2 = -w \cdot L$$

$$T_B = -w \cdot L/2$$

$$M_B - M_A = \text{Kesme alanı}$$

$$M_B - 0 = 0$$

$$M_B = 0$$

Şekil 7.55.