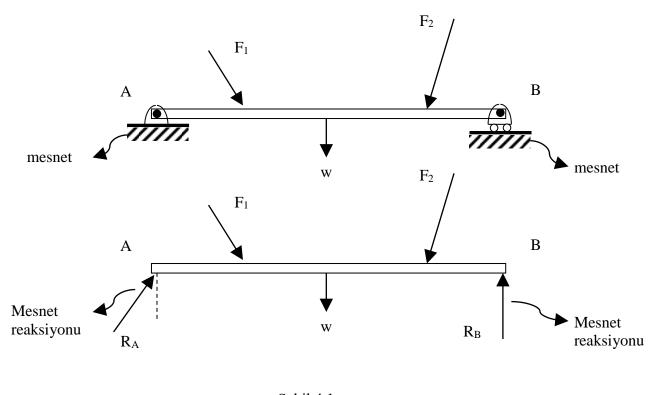
BÖLÜM 4. RİJİT CİSİMLERİN DENGESİ

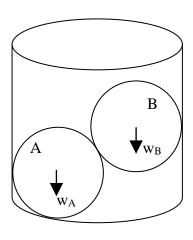
4.1. Serbest Cisim Diyagramı



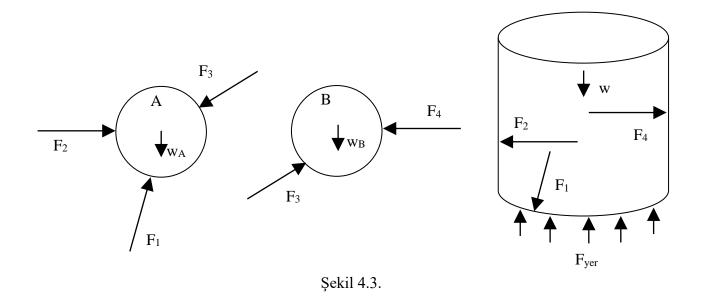
Şekil 4.1.

Bir cismin dıştan etki eden bütün kuvvetler ile birlikte çizilen diyagramına Serbest Cisim Diyagramı (SCD) denir.

İçinde 2 küre olan ve tüm yüzeyleri sürtünmesiz olan bir silindir



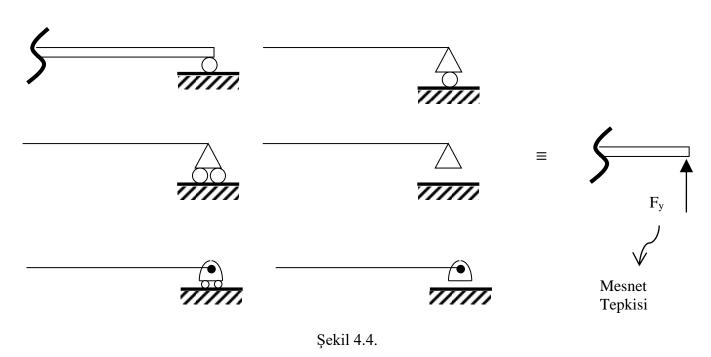
Şekil 4.2.



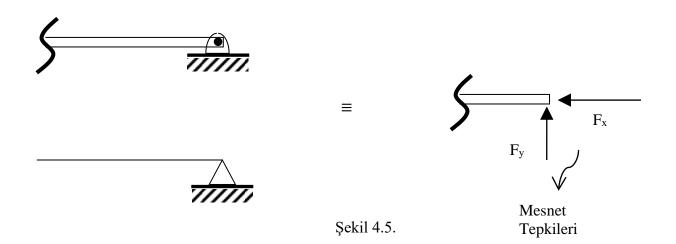
Pratik mühendislik problemlerinde özel mesnet şekilleri vardır. Her tip mesnet özel tip kuvvetler sağlar. Bu özel tip kuvveti bulmak için mesnetlenen cismi değişik şekilde hareket ettirmeyi inceleriz. Hareket ettiremediğimiz yönde bir kuvvet var demektir. (x, y, z doğrultularında ötelenme x, y, z etrafında dönme)

4.1.1. Düzlemsel Mesnet Tipleri

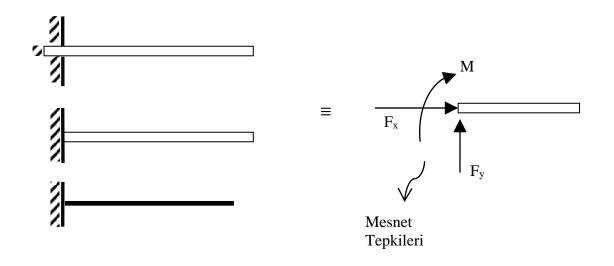
Kayıcı Mafsal



Sabit Mafsal

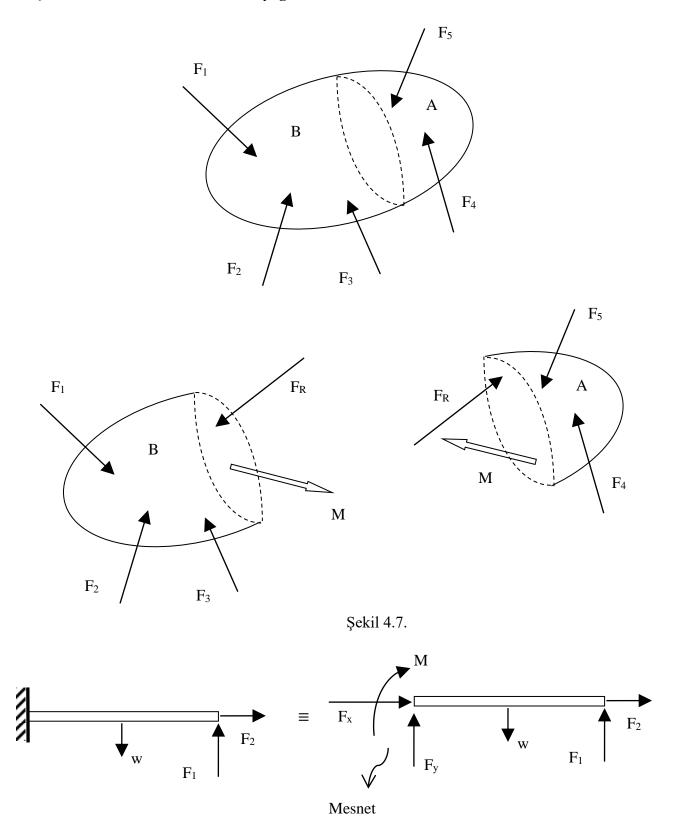


Ankastre Mesnet



Şekil 4.6.

4.2. İç Kesitleri Olan Serbest Cisim Diyagramları

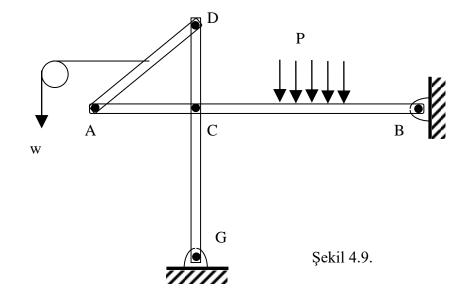


Şekil 4.8.

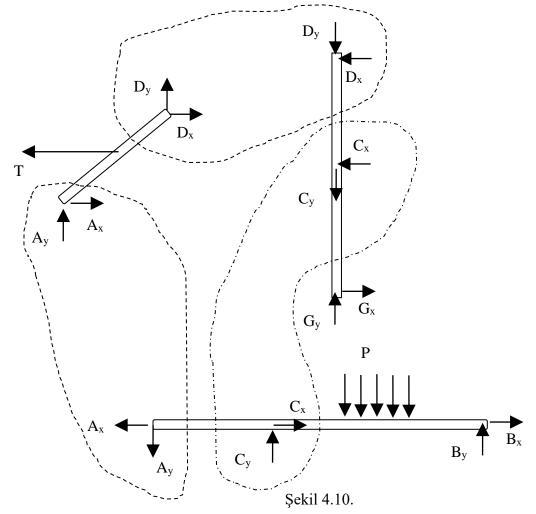
Tepkileri

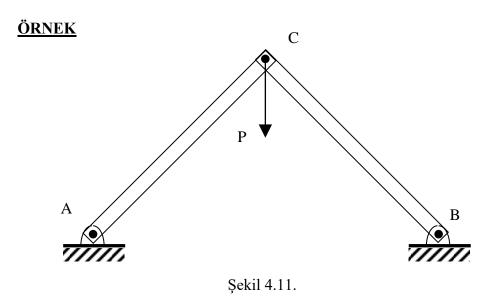
Bir ucu ankastre bir konsol kirişte yükler düşey düzlemde olup reaksiyonlarda(mesnet tepkileri) aynı düzlemdedir.

<u>ÖRNEK</u>

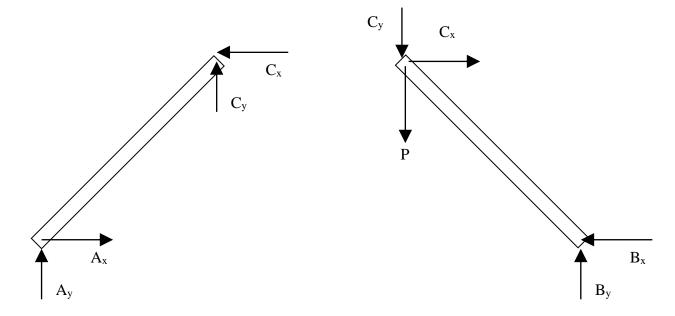


Her elemanın SCD çiziniz eleman ağırlıklarını ihmal ediniz.



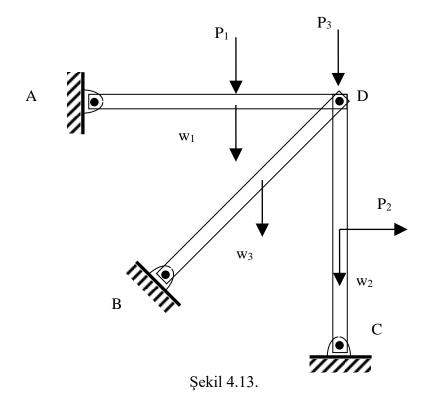


Serbest Cisim Diyagramını çiziniz

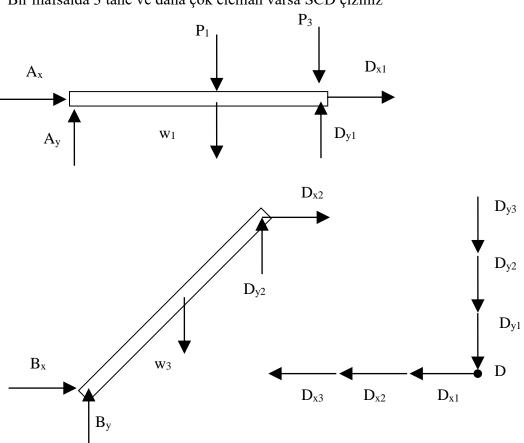


Şekil 4.12.

<u>ÖRNEK</u>



Bir mafsalda 3 tane ve daha çok eleman varsa SCD çiziniz



P₂

W₂

C_x

C_y

 D_{y3}

 D_{x3}

Şekil 4.14.

4.3. Denge Denklemleri

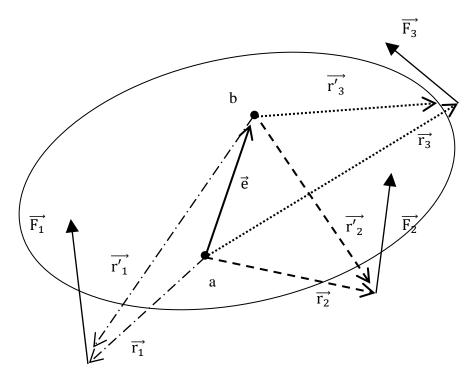
Bir rijit cismin dengede olması için gerekli ve yeterli koşullar bileşke kuvvet ve bir nokta etrafında momentin sıfır olmasıdır.

$$\overrightarrow{\mathbf{F}_R} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \qquad \overrightarrow{M_R} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$$

 $\overrightarrow{F_R}$ tüm vektörlerin toplamıdır. $\overrightarrow{M_R}$ kuvvet çifti momentleri ile kuvvetlerin taşınmasından doğan momentler toplamıdır.

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0} \qquad \qquad \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{F_i}) + \sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{M_i} = \overrightarrow{0}$$

 \vec{r} referans noktasından kuvvetlerin üzerindeki birer noktaya yer değiştirme vektörleridir. Şimdi bir referans noktası kullanılarak dengede olduğu gösterilen bir cismin başka bir noktaya göre de dengede olacağını gösterelim.



Şekil 4.15.

Diyelim ki cisim b noktasına göre dengededir. yani

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \dots = \overrightarrow{0} \qquad \qquad \overrightarrow{r'_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{r'_2} \times \overrightarrow{F_2} + \dots = \overrightarrow{0}$$

Cisim a noktasına göre de dengedemidir.

$$\sum \overrightarrow{M_a} = \overrightarrow{0} \quad \text{olmalı}$$

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{M}_{\mathbf{a}}} = \overrightarrow{\mathbf{r}_{\mathbf{1}}} \times \overrightarrow{F_{\mathbf{1}}} + \overrightarrow{\mathbf{r}_{\mathbf{2}}} \times \overrightarrow{F_{\mathbf{2}}} + \cdots$$

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{r'_1}$$
 $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{e} + \overrightarrow{r'_2}$

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{M_a}} = (\overrightarrow{\mathbf{e}} + \overrightarrow{\mathbf{r'_1}}) \times \overrightarrow{F_1} + (\overrightarrow{\mathbf{e}} + \overrightarrow{\mathbf{r'_2}}) \times \overrightarrow{F_2} + \cdots = \overrightarrow{\mathbf{e}} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{\mathbf{r'_1}} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{\mathbf{e}} \times \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{\mathbf{r'_2}} \times \overrightarrow{F_2} + \cdots$$

$$\sum \overrightarrow{M_{a}} = \overrightarrow{e} \times (\overrightarrow{F_{1}} + \overrightarrow{F_{2}} + \cdots) + (\overrightarrow{r'_{1}} \times \overrightarrow{F_{1}} + \overrightarrow{r'_{2}} \times \overrightarrow{F_{2}} + \cdots) = \overrightarrow{e} \times \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

$$\sum F_x = 0$$
 $\sum M_x = 0$

$$\sum F_y = 0$$
 $\sum M_y = 0$

$$\sum F_z = 0$$
 $\sum M_z = 0$

Bir rijit cisim için 6 bilinmeyen genellikle statik denge denklemleri ile bulunabilir. Düzlemsel problemlerde ise 3 adet denge denklemi

$$\sum F_x = 0$$
 $\sum F_y = 0$ $\sum M_z = 0$

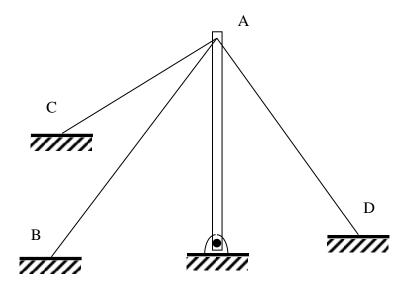
kullanılarak bilinmeyenler belirlenir.

4.4. Özel Durumlarda Denge Denklemi

Durum 1: Aynı noktadan geçen kuvvetler.

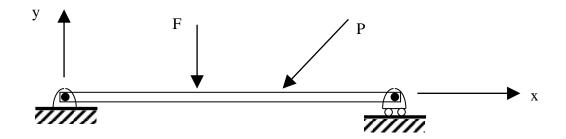
$$\sum F_x = 0$$
 $\sum F_y = 0$ $\sum F_z = 0$

Bazı koşullar sağlanırsa bunların bir, iki veya üçünün yerine moment denklemi kullanılabilir.



Şekil 4.16.

Durum 2: Düzlemsel kuvvetler.



Şekil 4.17.

$$\sum F_x = 0$$
 $\sum F_y = 0$ $\sum M_z = 0$

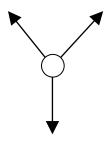
İki veya üç moment denklemi kullanılabilir.

Durum 3: Uzayda paralel kuvvetler.

$$\sum F_z = 0$$
 $\sum M_x = 0$ $\sum M_y = 0$

yine üç moment denklemi yazılabilir.

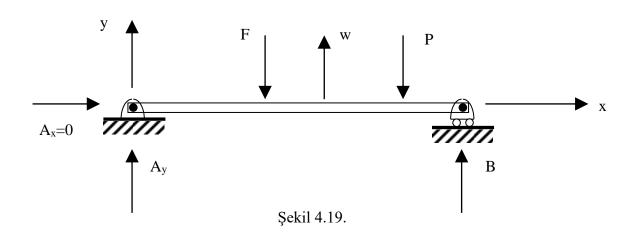
Durum 4: Aynı noktadan geçen düzlemsel kuvvetler.



Şekil 4.18.

$$\sum F_{x} = 0 \qquad \sum F_{y} = 0$$

Durum 5: Paralel düzlemsel kuvvetler.



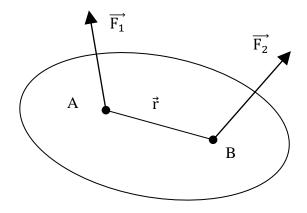
$$\sum F_y = 0$$
 $\sum M_z = 0$

4.5. Denge Problemleri

Denge problemlerini çözmek için önce bilinmeyenleri saptar ve isimlendiririz. Sonra denge denklemlerini vektörel veya skaler olarak yazarız. *Bilinmeyenlere istediğimiz yönü veririz. Sonuç pozitif* ise seçilen yön doğru negatif ise tersidir.

4.6. Dengeden Çıkan Bazı Sonuçlar

Durum 1: İki kuvvetle dengede olan cisim.

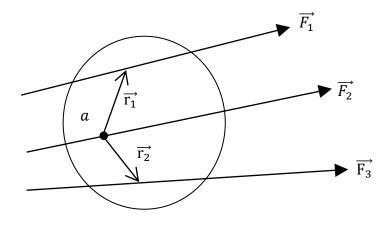


Şekil 4.20.

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{0}$$
 $\overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_2}$ $\sum M_A \neq 0$

Bu durumda A noktasına göre momentin sıfır olması için ya $\overrightarrow{F_2}$ sıfır olacak (mümkün değil çünkü $\overrightarrow{F_2}=0$ olursa $\overrightarrow{F_1}=0$ olur. Bu durumda kuvvet kalmaz) yada $\overrightarrow{r}//\overrightarrow{F_2}$ veya $\overrightarrow{r}=0$ olmalı.

Durum 2: Üç kuvvetle dengede olan cisim.

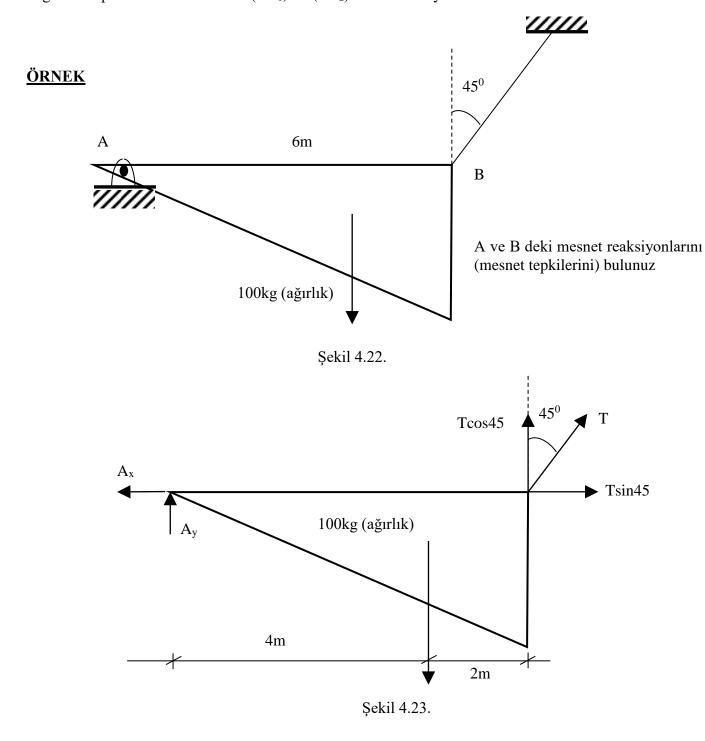


Şekil 4.21.

Dengede üç kuvvet aynı düzlemde olmalı ve tesir çizgileri ya paralel olmalı veya aynı noktadan geçmelidir.

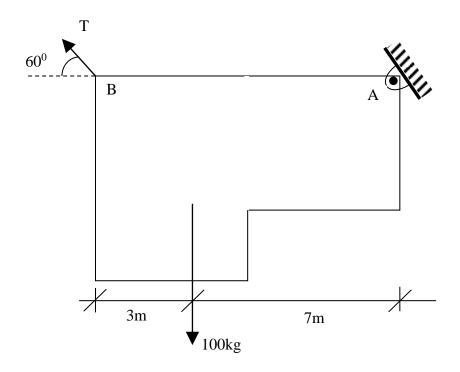
$$\overrightarrow{\mathbf{r}_1} \times \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{\mathbf{r}_2} \times \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \qquad \overrightarrow{\mathbf{r}_1} \times \overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{\mathbf{r}_2} \times \overrightarrow{F_2}$$

Vektörel çarpım sonucu elde edilen dik vektörlerin doğrultu ve şiddetleri aynı yönleri terstir. Dik doğrultular paralel olmalıdır. Yanı (a-F₁) ile (a-F₂) düzlemleri aynıdır.



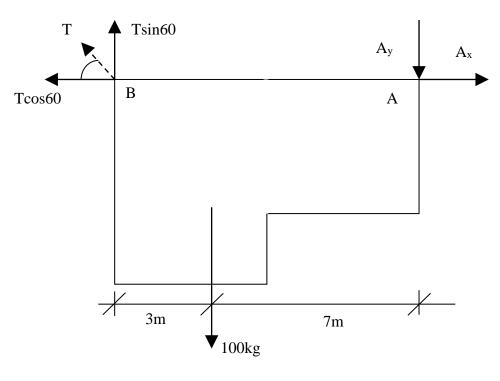
$$\begin{array}{l} \nearrow \\ + \\ \sum M_B = 0 \text{ (Saat Yönü Pozitif)} \\ \\ A_y * 6-100 * 2 = 0 \\ & A_y = 33,3 \text{ kg} \\ \\ & + \\ & \sum F_y = 0 \text{ (Yukarı Yön Pozitif)} \\ \\ A_y + T\cos 45 - 100 = 0 \\ & T = 94,28 \text{kg} \\ \\ & \rightarrow \\ + \\ & \sum F_x = 0 \text{ (Sağ Yön Pozitif)} \\ \\ - A_x + T\sin 45 = 0 \\ & A_x = 66,67 \text{ kg} \\ \end{array} \qquad A = \sqrt{33,3^2 + 66,67^2} = 74,52 \text{ kg}$$

ÖRNEK



Şekil 4.24.

A'daki ve B'deki kuvvetleri bulunuz



Şekil 4.25.

$$\sum_{+}^{} M_{B} = 0$$
 (Saat Yönü Pozitif)

$$A_y=-30 \text{ kg}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$
 (Yukarı Yön Pozitif)

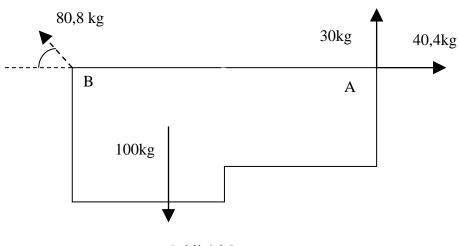
T=80,8 kg

$$\longrightarrow$$
 + $\sum F_x = 0$ (Sağ Yön Pozitif)

$$-T\cos 60+A_x=0$$

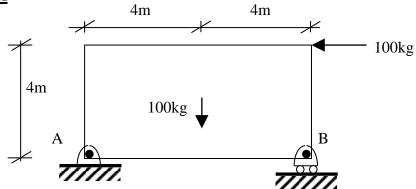
$$A_x = 40,4 \text{ kg}$$

$$A = \sqrt{40.4^2 + (-30)^2} = 50.33 \text{ kg}$$



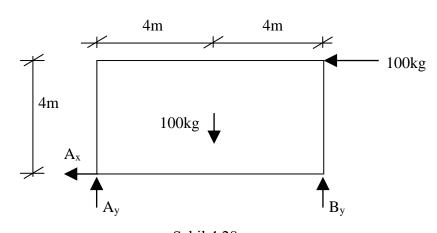
Şekil 4.26.

ÖRNEK



Şekil 4.27.

A ve B'deki mesnet tepkilerinin bulunuz



$$\sum M_A = 0$$
 (Saat Yönü Tersi Pozitif)

$$-100*4+100*4+B_y*8=0$$

$$B_y=0 kg$$

$$\longrightarrow$$
 + $\sum F_x = 0$ (Sağ Yön Pozitif)

$$-100-A_x=0$$

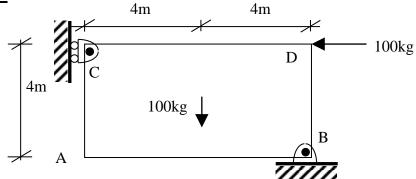
$$A_x=-100 \text{ kg}$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$
 (Yukarı Yön Pozitif)

$$B_y + A_y - 100 = 0$$

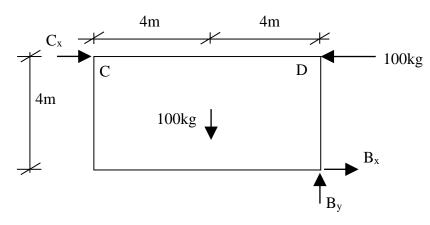
$$A_y=100 \text{ kg}$$

ÖRNEK



Şekil 4.29.

B ve C'deki mesnet tepkilerinin bulunuz



Şekil 4.30.

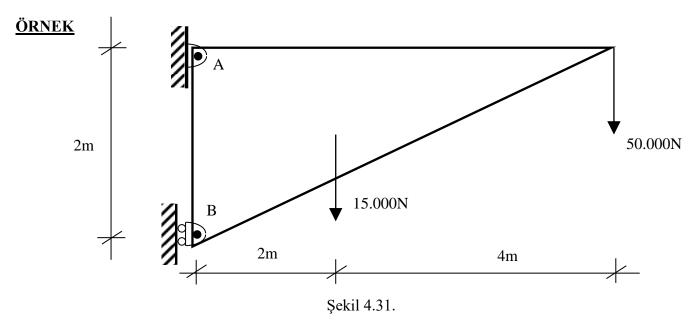
$$\sum M_B = 0$$
 (Saat Yönü Tersi Pozitif)
$$100*4+100*4-C_x*4=0 \qquad C_x=200 \text{ kg}$$

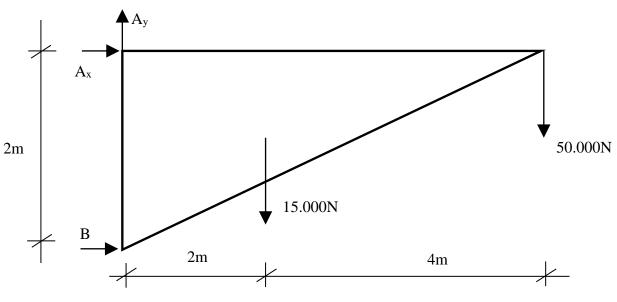
$$\Rightarrow + \qquad \sum F_x = 0 \text{ (Sağ Yön Pozitif)}$$

$$C_x-100+B_x=0 \qquad B_x=-100 \text{ kg}$$

$$\uparrow + \qquad \sum F_y = 0 \text{ (Yukarı Yön Pozitif)}$$

$$B_y-100=0 \qquad B_y=100 \text{ kg}$$





$$\uparrow + \sum F_y = 0$$
 (Yukarı Yön Pozitif)

Ay-15.000-50.000=0

A_y=65.000 N

Şekil 4.32.

$$\sum M_A = 0$$
 (Saat Yönü Tersi Pozitif)

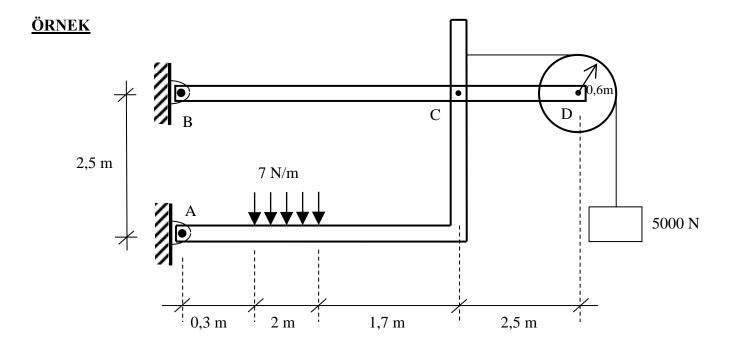
B*2-2*15.000-6*50.000=0

B=165.000 N

$$\longrightarrow$$
 + $\sum F_x = 0$ (Sağ Yön Pozitif)

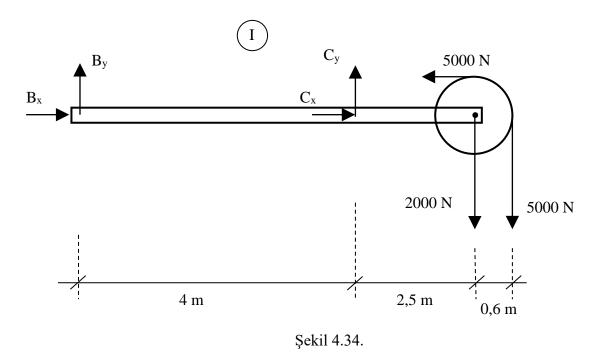
 $A_x+B=0$

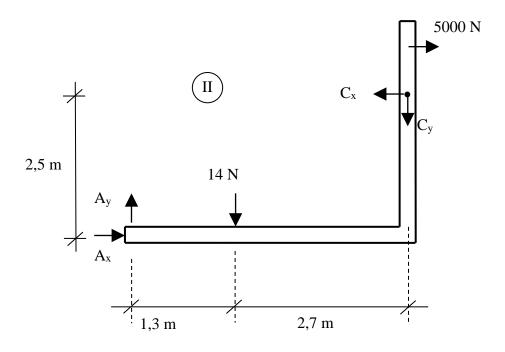
 $A_x = -165.000 \text{ N}$



Şekil 4.33.

D'deki makara 2000 Newton dur. Çubukların ağırlıklarını ihmal ederek C'de iletilen kuvveti bulunuz.



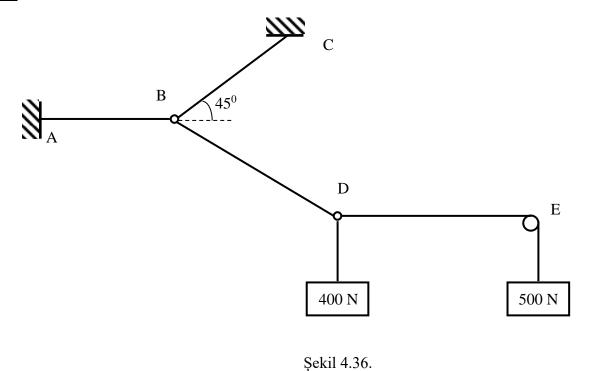


Şekil 4.35.

I
$$\sum M_B = 0$$
 (Saat Yönü Tersi Pozitif)

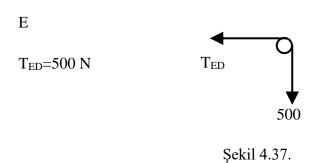
 $C_y*4+5000*0,6-5000*7,1-2000*6,5=0$
 $C_y=11380 \text{ N}$

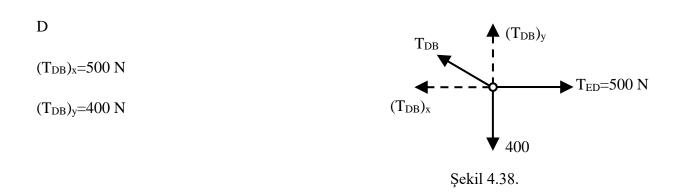
<u>ÖRNEK</u>



,

Şekildeki taşıyıcı sistem iplerden oluşmuştur. BC ipindeki kuvvet nedir?





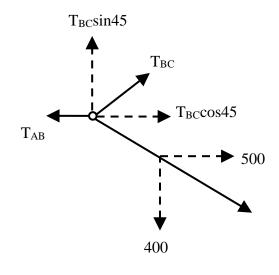
В

$$\uparrow$$
 + $\sum F_y = 0$ (Yukarı Yön Pozitif)

 $T_{BC}\sin 45-400=0$ $T_{BC}=566$ N

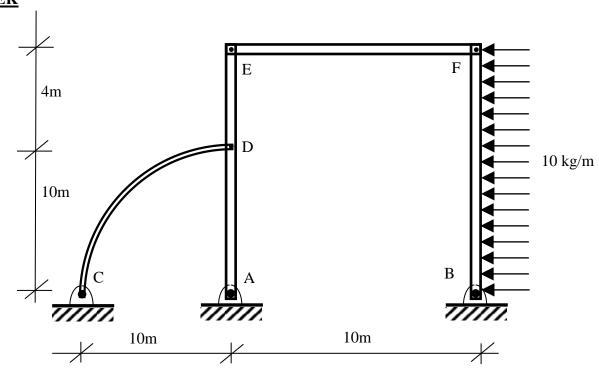
 \Rightarrow + $\sum F_x = 0$ (Sağ Yön Pozitif)

 $T_{BC}\cos 45+500$ - $T_{AB}=0$ $T_{AB}=900$ N



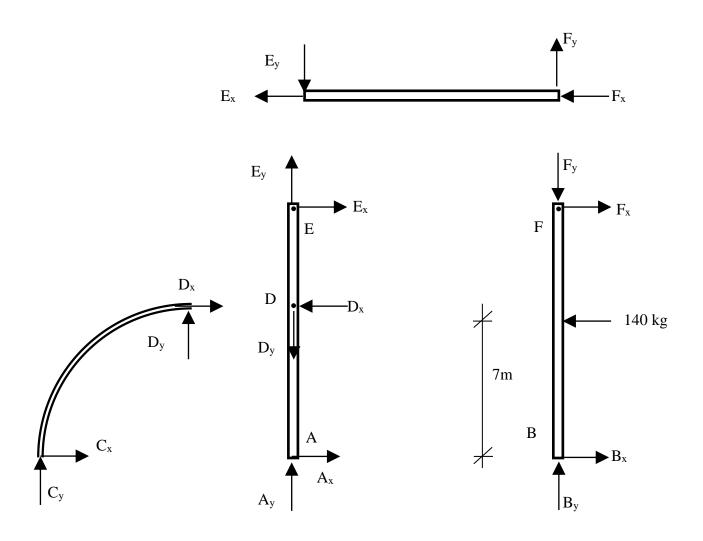
Şekil 4.39.

<u>ÖRNEK</u>



Şekil 4.40.

Bağlantı yerlerindeki rüm kuvvetleri bulunuz.

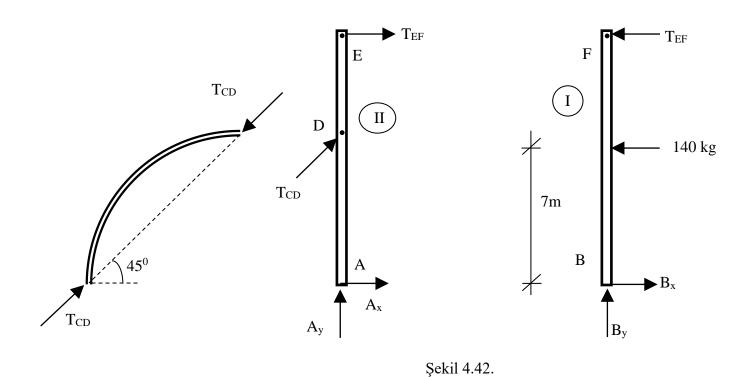


Şekil 4.41.

12 BİLİNMEYEN 12 DENKLEM

<u>İKİ KUVVET ÇUBUĞU</u>: Sadece uçlarında kuvvet olan arada kuvvet veya mesnet olmayan çubuklara iki kuvvet çubuğu denir. İki kuvvet çubuklarında çubuk içinde oluşacak kuvvet, çubuğun uçlarını birleştiren doğruya paraleldir.





6 BİLİNMEYEN 6 DENKLEM

 II

$$\sum M_D = 0 \text{ (Saat Yönü Pozitif)}$$

$$T_{EF}*4-A_x*10=0 \qquad A_x=-28 \text{ kg}$$

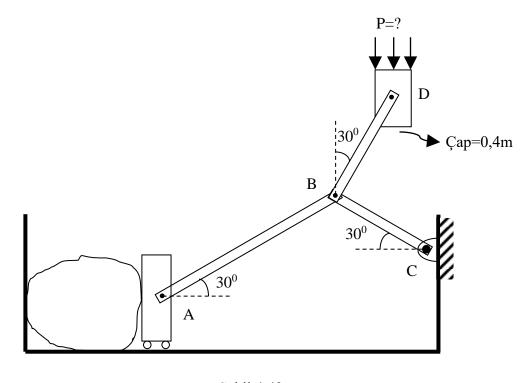
$$\Rightarrow + \qquad \sum F_x = 0 \text{ (Sağ Yön Pozitif)}$$

$$A_x+T_{EF}+T_{CD}\cos 45=0 \qquad T_{CD}=138,6 \text{ kg}$$

$$\uparrow + \qquad \sum F_y = 0 \text{ (Yukarı Yön Pozitif)}$$

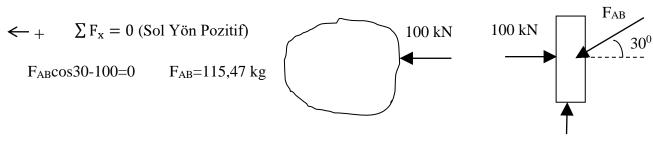
$$A_y+T_{CD}\sin 45=0 \qquad A_y=-98 \text{ kg}$$

<u>ÖRNEK</u>



Şekil 4.43.

Bir kayayı kırmak için 100 kN kuvvet gerekiyor. Şekildeki pistona ne kadar basınç uygulanmalıdırki bu kuvvet sağlansın



Şekil 4.44.

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \text{ (Yukarı Yön Pozitif)}$$

$$F_{BC}\sin 30 + 115,47\sin 30 - F_{BD}\cos 30 = 0.....(1)$$

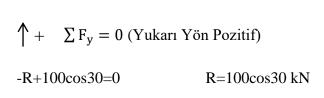
$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \text{ (Sağ Yön Pozitif)}$$

$$115,47\cos 30 - F_{BC}\cos 30 - F_{BD}\sin 30 = 0....(2)$$

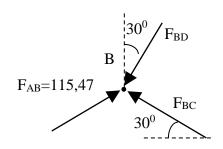
1 ve 2'nin ortak çözümüden

P=R/alan

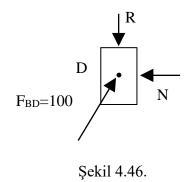
$$F_{BD}=100 \text{ kN}$$

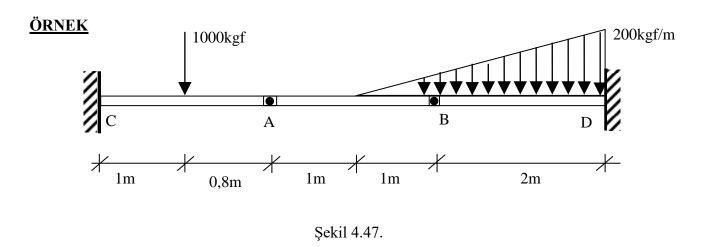




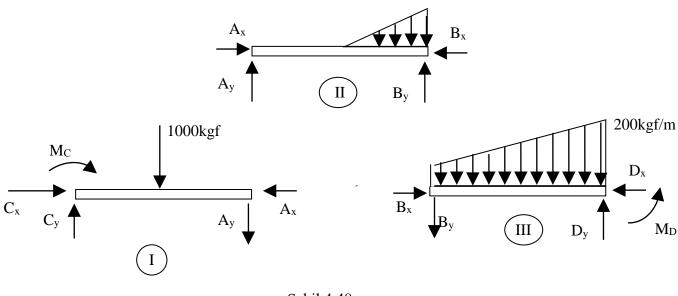


Şekil 4.45.

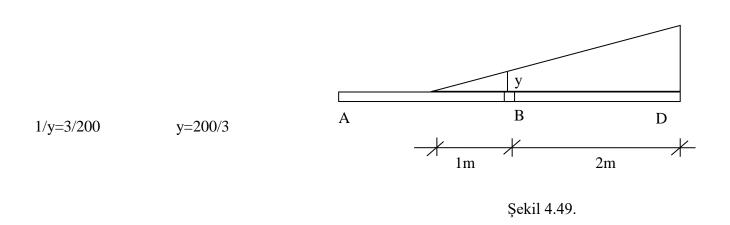


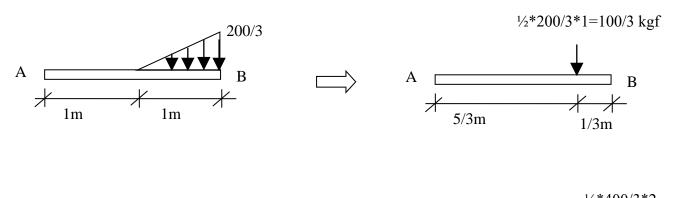


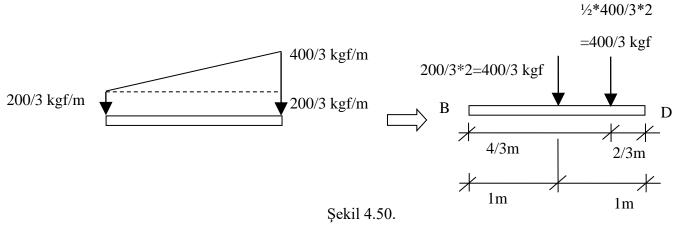
x doğrultusundaki mesnet reaksiyonlarını hesaba katmadan problemi çözünüz.

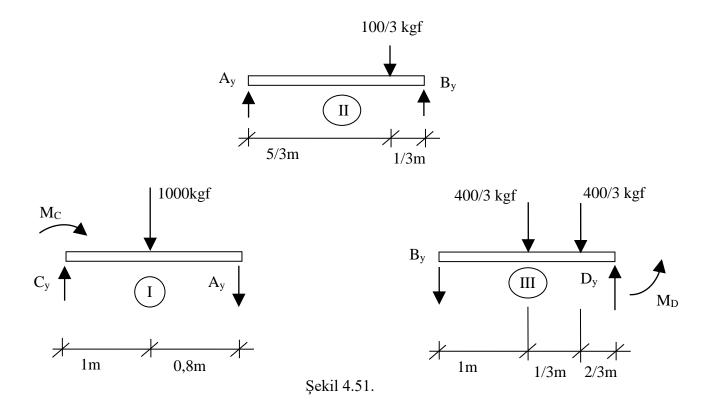


Şekil 4.48.









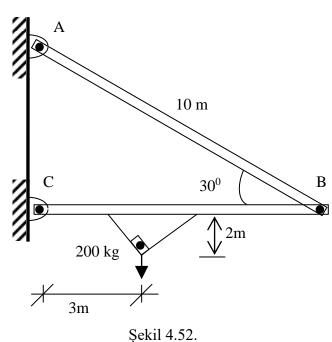
II
$$\nearrow_+$$
 $\sum M_B = 0$ (Saat Yönü Pozitif)
$$A_y*2-100/3*(1/3)=0$$
 $A_y=50/9$ kgf
$$\uparrow_+$$
 $\sum F_y = 0$ (Yukarı Yön Pozitif)
$$A_y+B_y-100/3=0$$
 $B_y=250/9$ kgf

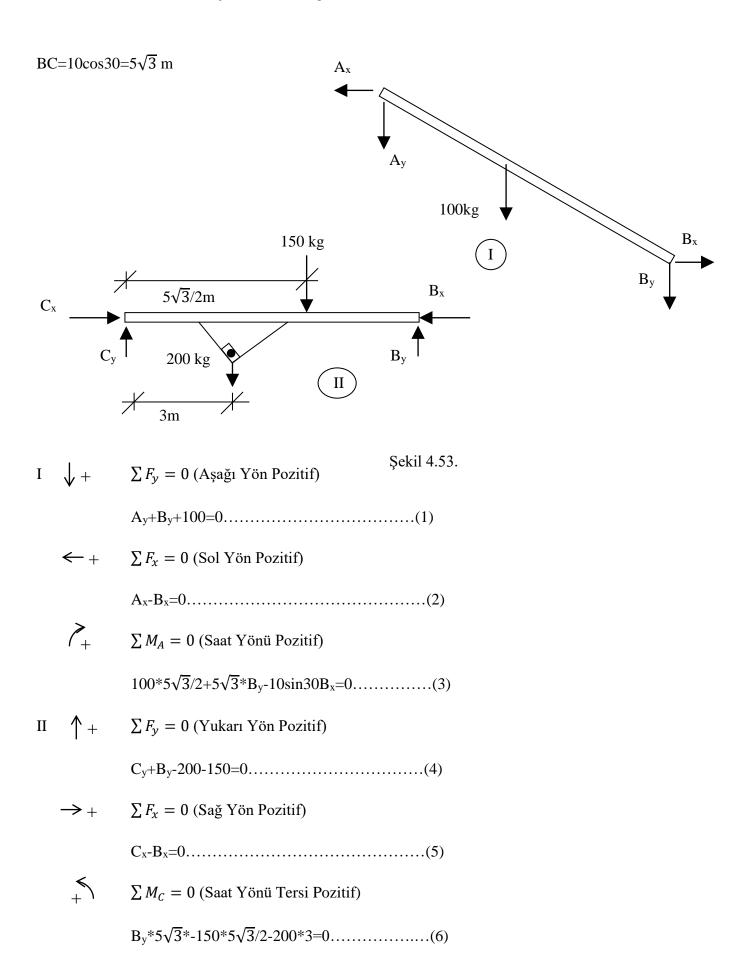
I
$$\searrow$$
 + $\sum M_C = 0$ (Saat Yönü Pozitif)
 $M_C+1000*1+50/9*1,8=0$ $M_C=-1010$ kgf-m
 \uparrow + $\sum F_y = 0$ (Yukarı Yön Pozitif)
 $C_y-1000-50/9=0$ $C_y=9050/9$ kgf

III
$$+$$
 $\sum M_D = 0$ (Saat Yönü Tersi Pozitif)
$$M_D + 250/9*2 + 400/3*1 + 400/3*(2/3) = 0 \qquad M_D = -2500/9 \text{ kgf-m}$$
 $\downarrow +$ $\sum F_y = 0$ (Aşağı Yön Pozitif)
$$250/9 + 400/3 + 400/3 - D_y = 0 \qquad D_y = 2650/9 \text{ kgf}$$

<u>ÖRNEK</u>

AB çubuğu 100 kg BC çubuğu 150 kg ise mesnetlerdeki kuvvetleri bulunuz





6 adet bilinmeyen 6 denklemin ortak çözümünden bulunur.

 $A_x = 336,50 \text{ kg}$

 $B_x = 336,50 \text{ kg}$

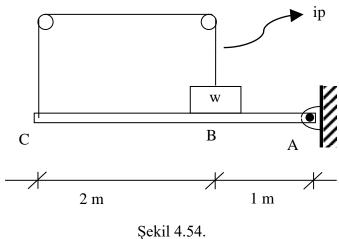
 $C_x = 336,50 \text{ kg}$

 $A_y = -244,28 \text{ kg}$

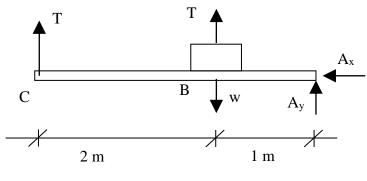
 $B_y = 144,28 \text{ kg}$

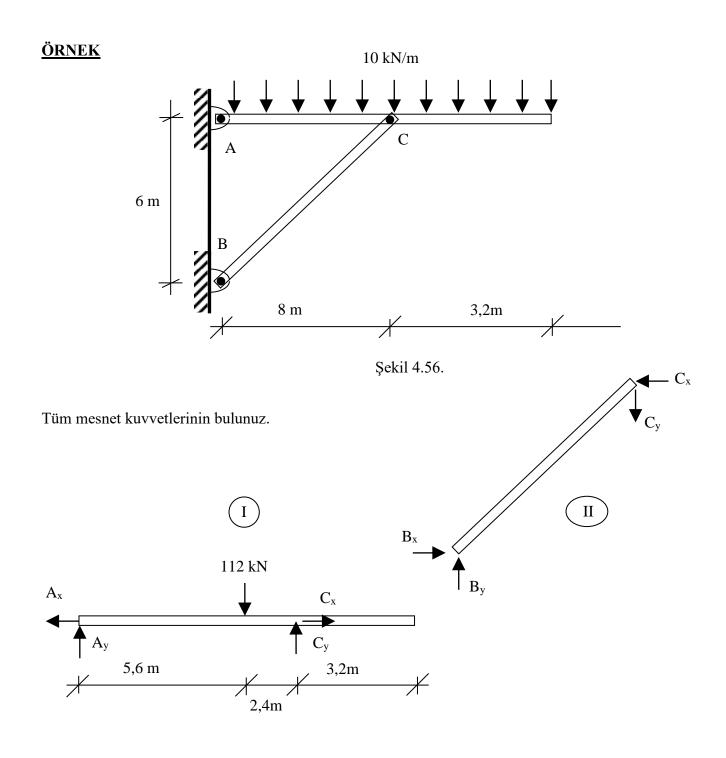
 $C_y = 205,72 \text{ kg}$

<u>ÖRNEK</u>



A'daki mesnet tepkileri nedir.





Şekil 4.57.

I
$$+$$
 $\sum M_A = 0$ (Saat Yönü Tersi Pozitif)

 $C_y*8-112*5,6=0$ $C_y=78,4$ kN

 $+$ $\sum F_y = 0$ (Yukarı Yön Pozitif)

 $78,4-112+A_y=0$ $A_y=33,6$ kN

II
$$\sum M_B = 0$$
 (Saat Yönü Tersi Pozitif)

$$C_x*6-8*78,4=0$$

 $C_x = 104,53 \text{ kN}$

$$\uparrow$$
 + $\sum F_y = 0$ (Yukarı Yön Pozitif)

$$B_y$$
- C_y = 0

 $B_y = 78,4 \text{ kN}$

$$\longrightarrow$$
 + $\sum F_x = 0$ (Sağ Yön Pozitif)

$$B_x-C_x=0$$

 $B_x = 104,53 \text{ kN}$

I
$$\sum F_x = 0$$
 (Sağ Yön Pozitif)

$$\rightarrow$$
 + $-A_x+C_x=0$

 $A_x=104,53 \text{ kN}$

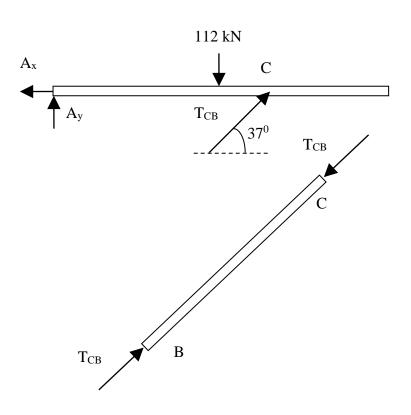
2. yol: iki kuvvet çubuğu

3 bilinmeyen 3 denklem

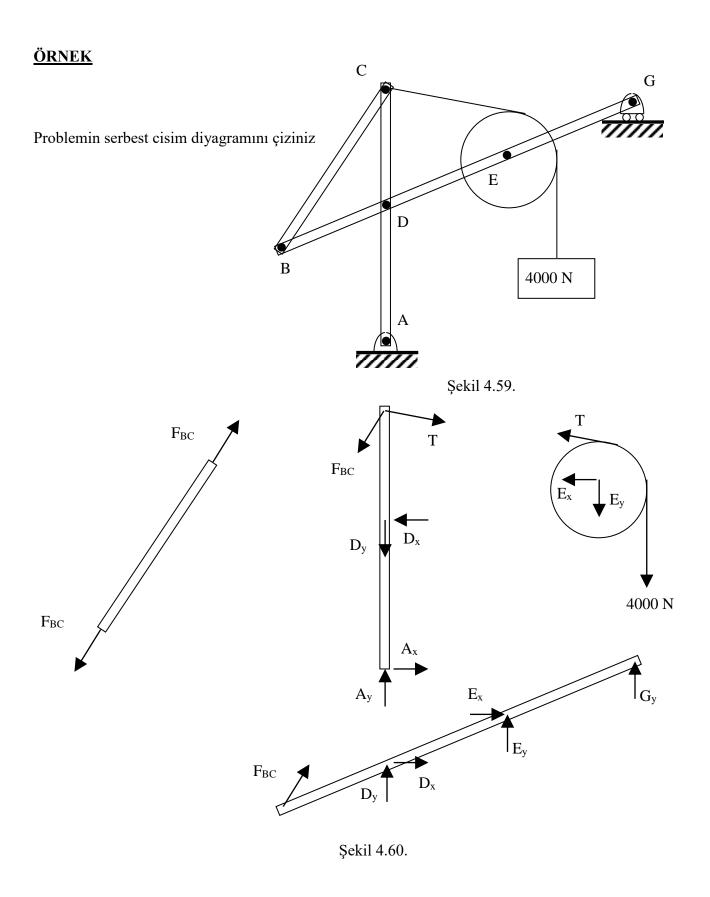
 $T_{CB}=130,66 \text{ kN}$

 $B_x = (T_{CB})_x = T_{CB} * \cos 37 = 104,53 \text{ kN}$

 $B_y = (T_{CB})_y = T_{CB} * \sin 37 = 78,4 \text{ kN}$

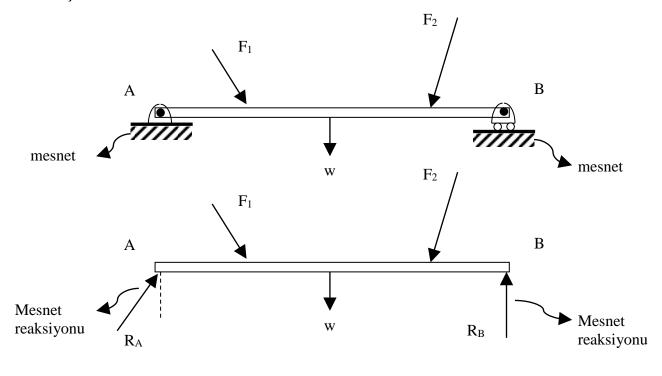


Şekil 4.58.



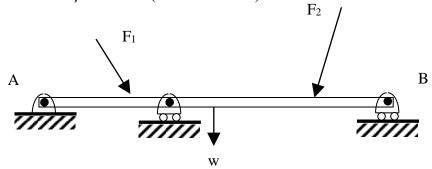
9 bilinmeyen 9 denklem (BC için denklem yazmaya gerek yoktur.)

4.7. Statikçe Belirlilik



Şekil 4.61.

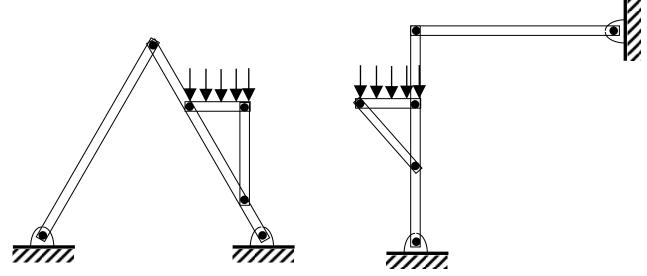
Şekil değiştirme denklemleri gerekmeden 3 adet statik denge denklemleri ile 3 adet bilinmeyen belirlenir. Bu tür sistemlere statikçe belirlidir (izostatik sistem) denir.



Şekil 4.62.

4 bilinmeyen şekil değiştirmeler hesaba katılmadan çözülemez. Bu tür sistemlere statikçe fazla bağlıdır, statikçe belirsizdir (hiper statik sistem) denir. Bir sistemin mesnet reaksiyonları yalnız statik denge denklemleri ile bulunabilirse dıştan tam bağlıdır denir. Mesnet kuvvetleri biliniyorken iç kuvvetler statik denge denklemleri ile bulunabiliyorsa içten tam bağlıdır denir.

Bazı sistemler ancak iç ve dıştan birlikte düşünüldüklerinde sınıflandırılabilirler. Aşağıdaki sistemler statikçe belirlidir yani tam bağlıdır.

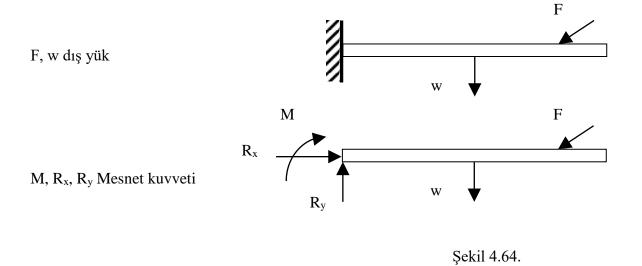


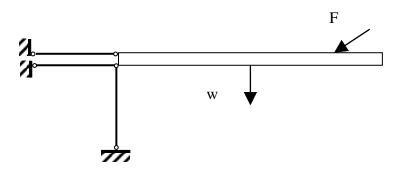
Şekil 4.63.

Dıştan fazla içten eksik bağlıdır. Tüm sistem tam bağlıdır.

4.8. Tam Bağlılık Koşulları

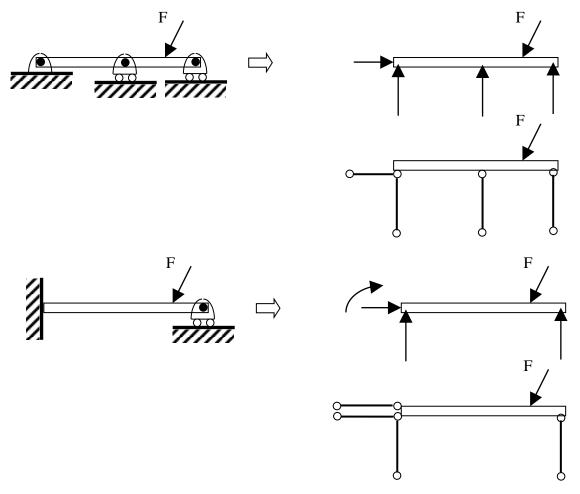
Bir cismin yerinde durmasını sağlayan kuvvet ve momentlere sistemin reaksiyonu (mesnet reaksiyonu) denir. Diğer tüm kuvvetler dış kuvvetlerdir.





Şekil 4.65.

Şekildeki diyagrama Pandül ayak diyagramı veya bağ çubuk diyagramı denir. Sistemi dengede tutmak için 3 pandül ayak yeterlidir. Her bir pandül ayak ekseni doğrultusunda bir kuvvet ile sistemi dengede tutar.

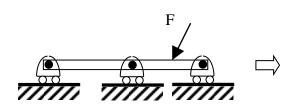


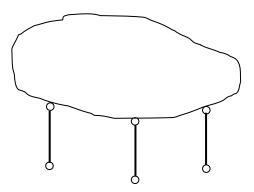
Şekil 4.66.

4.8.1. Düzlemde Tam Bağlılık

Düzlemde tam bağlılık için 3 bağ çubuğu gereklidir ancak yeterli değildir.

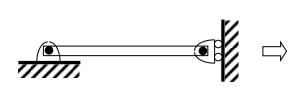
a- 3 çubuk paralel olmamalıdır.

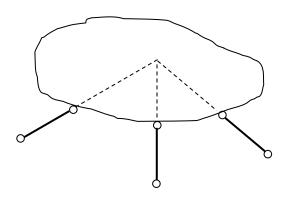




Şekil 4.67.

b- 3 çubuk aynı noktada kesişmemelidir.





Şekil 4.68.