BÖLÜM 5. RİJİT CİSİMLERİN KİNEMATİĞİ

5.1. Giriş

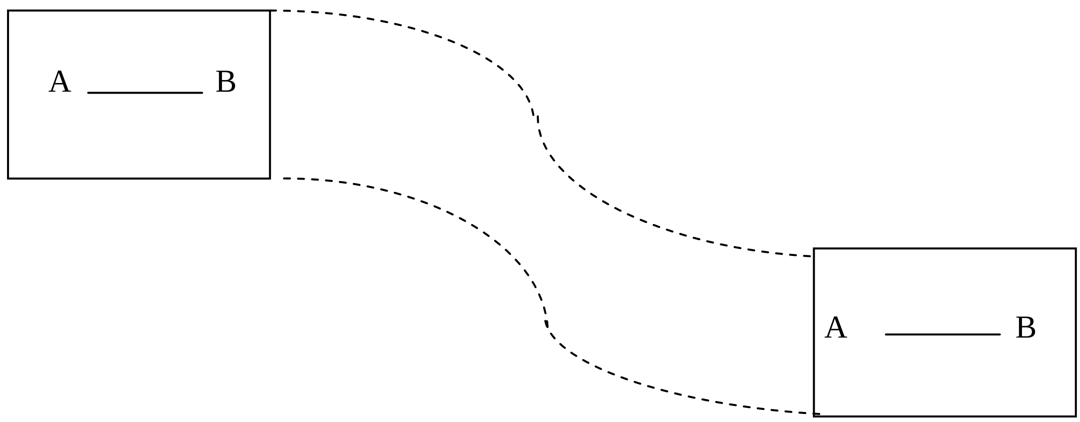
Bu bölümde rijit cisimlerin kinematiğini inceleyeceğiz. Zaman, yer, hız ve ivme arasındaki bağıntıların bir cisim değişik noktaları için uygulanmasını ele alacağız

Rijit cisimlerin hareketleri şu türden olabilir.

1-Ötelenme:

Bir cismin üzerindeki 3 noktanın oluşturduğu üçgen hareket sırasında aynı kalırsa (her kenar ayrı ayrı) bu harekete ötelenme denir. Ötelenmede cismin bütün noktaları paralel yörüngeler üzerinde hareket eder. Bu yörüngeler birer doğru ise o ötelenmeye doğrusal ötelenme denir. Aksi halde eğrisel ötelenme denir.

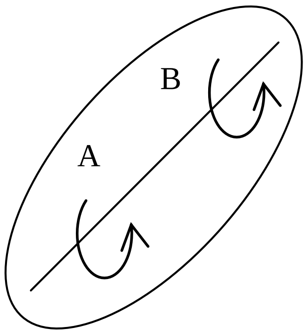
Doğrusal Ötelenme



Eğrisel Ötelenme

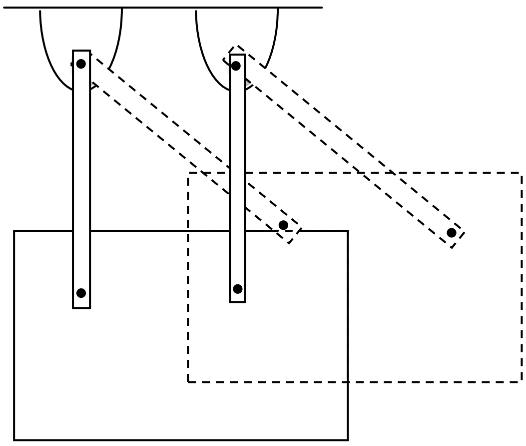
Şekil 5.1.

2-Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme:

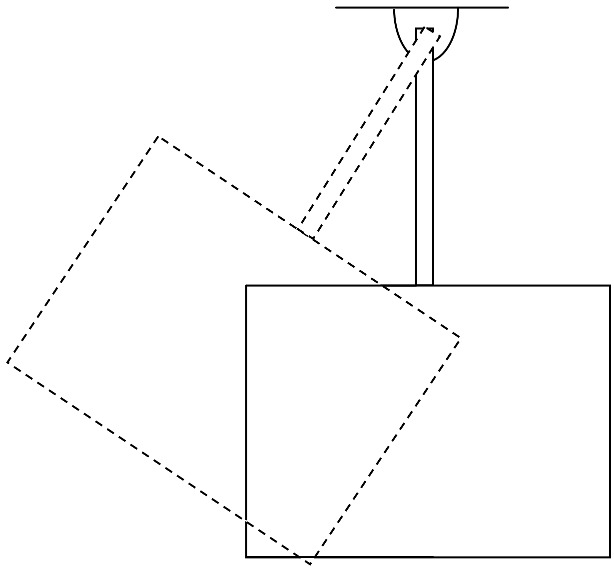


Şekil 5.2.

Bu harekette rijit cismi oluşturan noktalar aynı bir sabit eksenin noktalarını merkez alan daireler üzerinde hareket ederler. Dönme eksenini oluşturan doğru cismi keserse kesim noktalarının hızı ve ivmeleri sıfırdır. Bazı ötelenme hareketlerini dönme ile karıştırmamak gerekir.



Eğrisel Ötelenme



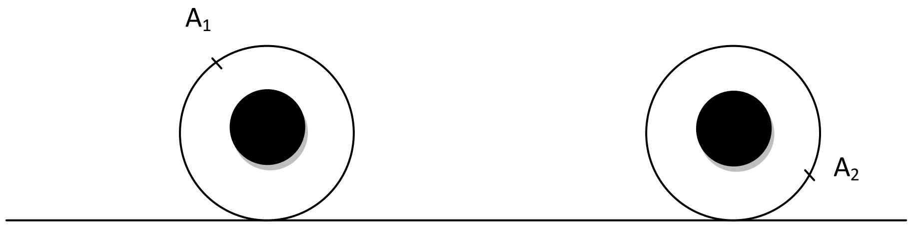
Dönme

Şekil 5.3.

Cismin tüm noktaları aynı düzleme paralel hareket ettiği için sabit eksen etrafında dönme düzlemsel bir harekettir denir.

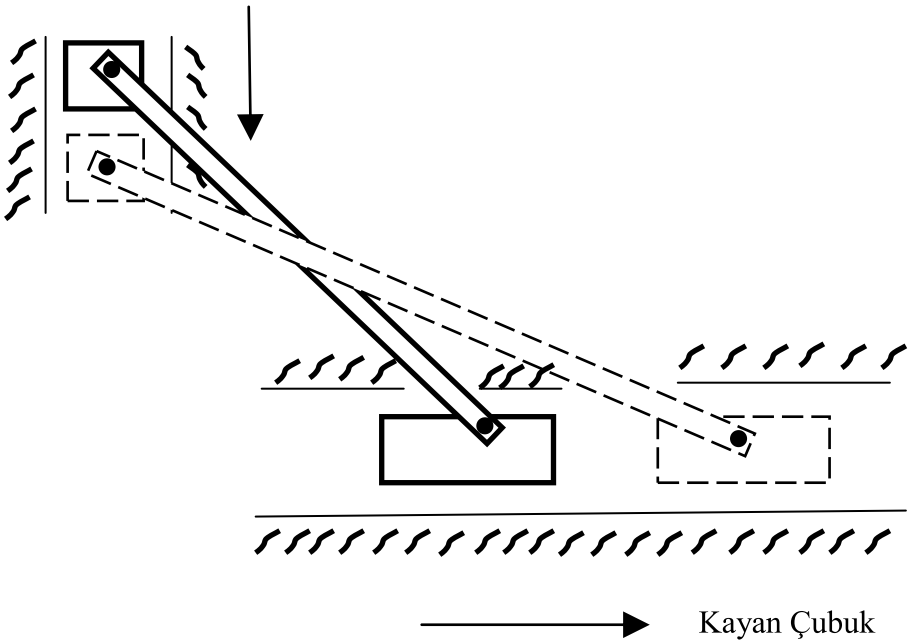
3-Genel Düzlemsel Hareket:

Bir cismin tüm noktalarının bir düzleme paralel hareket etmesi düzlemsel hareket diye adlandırılır. (Ötelenme ve Dönme)



Yuvarlanan silindir ve disk

Şekil 5.4.



Şekil 5.5.

4-Sabit Bir Nokta Etrafında Hareket:

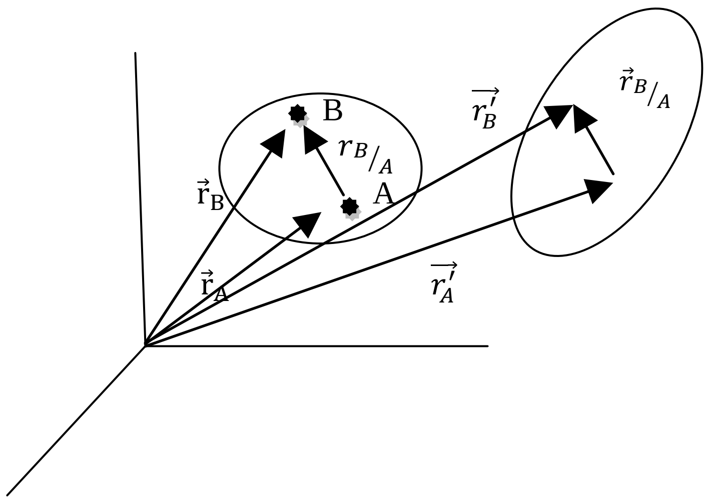
Sabit bir noktaya bağlanmış bir cismin üç boyutlu uzayda hareketi bu türdendir. Birde pürüzlü yüzeyde bir topacın hareketi de bu türdendir.

5-Genel hareket:

Bir rijit cismin yukarıdaki özel şekillerden hiç birine uymayan hareketine genel hareket denir.

5.2. Ötelenme

En genel ötelenme (3 boyutlu uzayda) hareketinde ayrı bir takıma göre $\vec{r}_A$ ve $\vec{r}_B$ yer vektörlerini, $\vec{r}_{B/A}$ da A ve B yi birleştiren vektörü göstersin



Şekil 5.6.

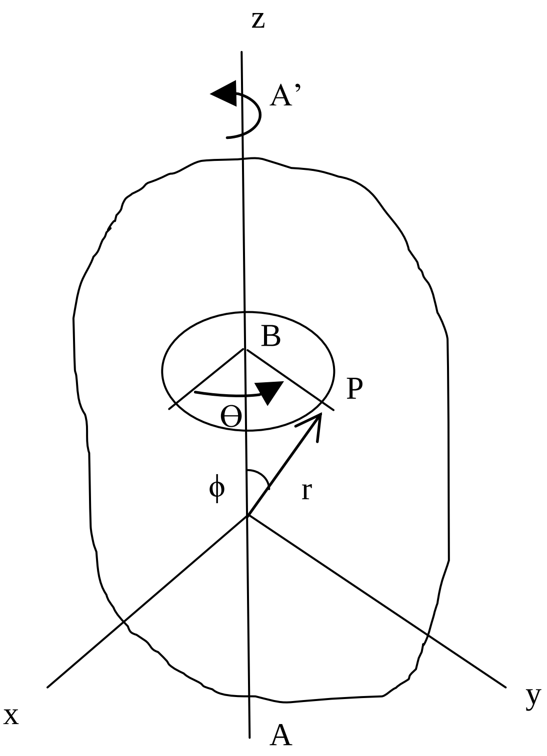
$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$

$\vec{r}_{B/A}$ = Ötelenmeden dolayı sabit doğrultu ve rijit cisimden dolayı sabit şiddetlidir. Türev alınırsa

$\vec{v}_A = \vec{v}_B$, $\vec{a}_A = \vec{a}_B$

Ötelenmede hız ve ivme her t anında tüm noktalar için aynı doğrultuda olur.

5.3. Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme



Şekil 5.7.

z ve A-A' sabit dönme ekseni olsun . BP = $r\sin\emptyset$ = sabit

BP nın xz düzlemi ile açısı θ dir. θ cismin bir açısal koordinatı olup A'dan bakınca saat yönünün tersine (+) radyan, derece veya devir ile ifade edilir.

1 dev = 2π rad = 360^0 şiddeti $v=\frac{ds}{dt}$

$$\Delta S = \underbrace{(\,BP\,)}_{\text{Açı kolu}}\ \underbrace{\theta}_{\text{açı}} = \underbrace{(\,r\sin\emptyset\,)}\,\theta$$

Hız tanımında yerine konulup limiti alınırsa

$$v=\frac{ds}{dt} = \underbrace{(r\sin\emptyset)\,\dot{\theta}}_{\text{şiddet}}$$

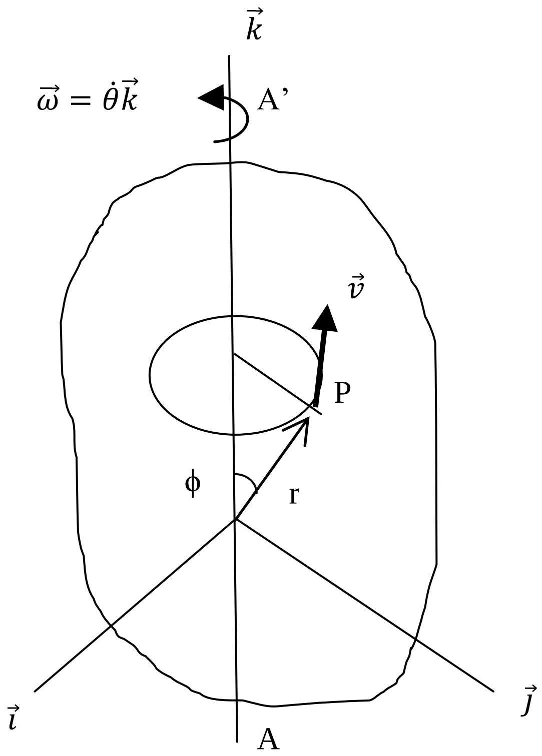
$\dot{\theta}$ noktadan bağımsızdır.

Sonuç: P nin $\vec{v}$ hızı A-A' ile $\vec{r}$ nin düzlemine dik ve v şiddeti ile tanımlanan bir vektördür.

Öyleyse $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{\omega}$ açısal hızdır. Şiddeti $\dot{\theta}$ ve yönü cismin dönüş yönüne göre sağ el kuralı ile bulunur.



Şekil 5.8.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

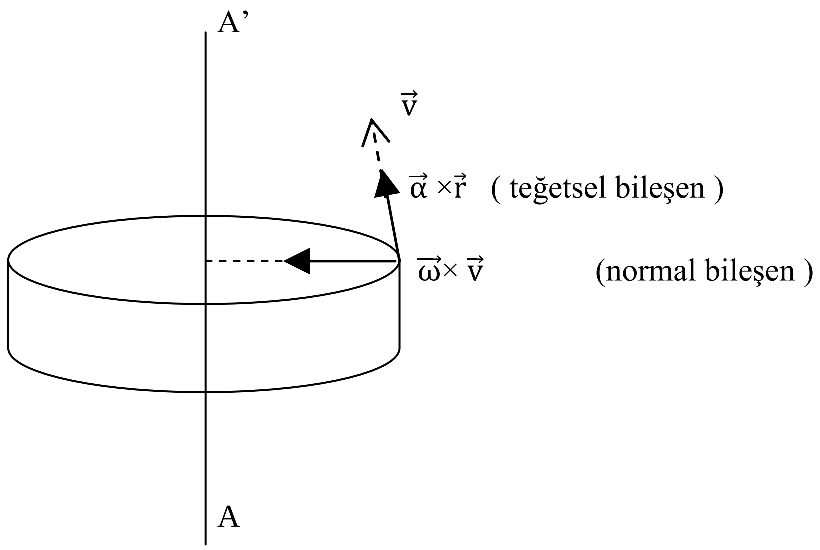
$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ açısal ivme

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 * \vec{r}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha\,\vec{k} = \dot{\omega}\,\vec{k} = \ddot{\theta}\,\vec{k}$$

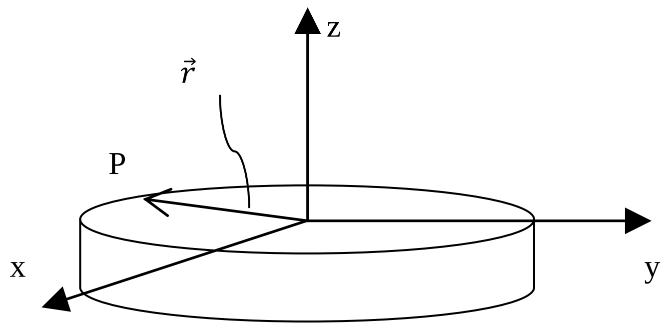
Sabit eksen etrafında dönmede w ve α aynı doğrultudadır. İvmenin ise 2 bileşeni var.



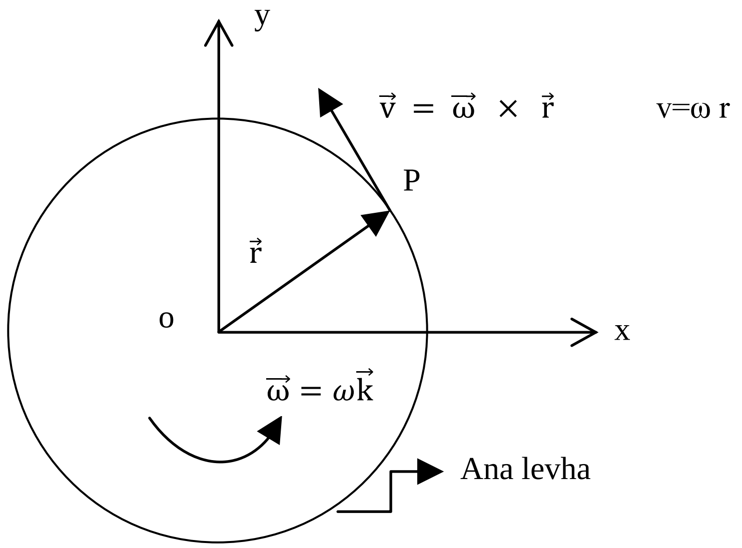
Şekil 5.9.

<u>Ana Levhanın Dönmesi:</u>

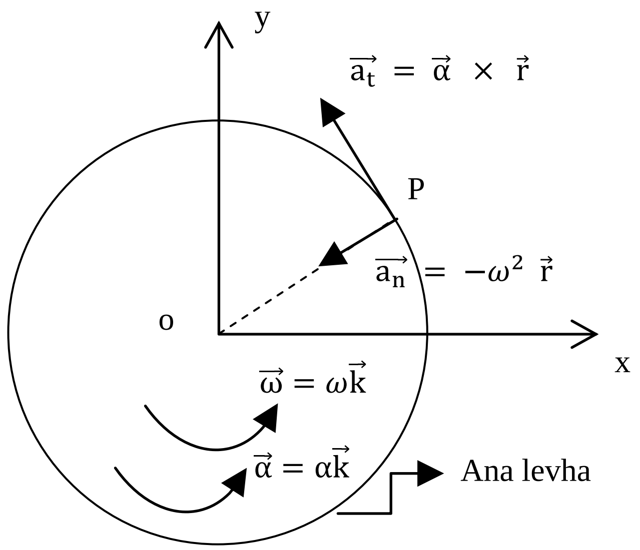
Sabit eksen etrafında dönme, sabit eksene dik bir ana levha hareketi ile gösterilebilir. x-y düzlemi ana levhanın düzlemi olsun



Şekil 5.10.

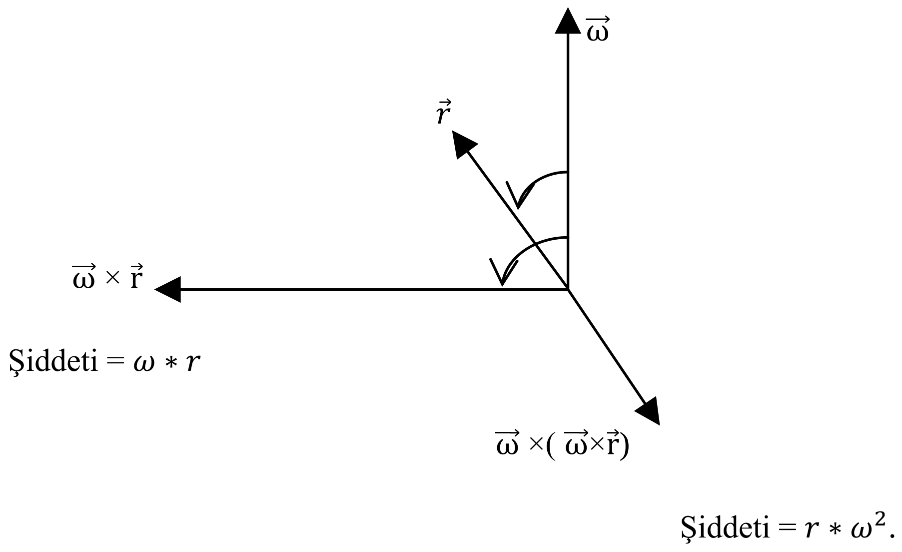


Şekil 5.11.



Şekil 5.12.

İvmenin normal bileşeni $\vec{\omega}\times(\vec{\omega} \times \vec{r})$ dir ve merkeze doğrudur. Normal bileşenin yönünü bulmak için önce $\vec{\omega} \times \vec{r}$ çarpımı yapılırsa sonuç vektör düzlem içinde 90^0 döner. $\vec{\omega}$ sonuç vektörle çarpılırsa en son elde edilen vektör $\vec{r}$ nin tersi yönde olur.



Şekil 5.13.

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 * \vec{r}$ (Sabit Eksen Etrafında Dönme)

$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

$\vec{a}_n = -\omega^2 * \vec{r}$

$a_t = r \ \alpha$

$a_n = r * \omega^2$

5.4. Bir Rijit Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesini Tanımlayan Denklemler

Bir dönme hareketinde $\theta = \theta(t)$ diye verilirse hareket belirlidir denir. Ancak kuvvetlerden ve momentlerden önce $\vec{\alpha}$ ivmesi t, θ, ve/veya ω cinsinden belirlenirse o zaman şöyle yapılır.

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

dt eşitlenirse $\frac{d\theta}{\omega} = \frac{d\theta}{\alpha}$ $\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

Bu denklemler maddesel noktanın doğrusal hareket denklemleriyle aynı olup aynı integrasyon yöntemleri kullanılabilir. Dönmenin 2 şekli çok sık karşılaşılır.

1-Düzgün Dönme

Açısal ivme = 0 ω = sabit

$\theta = \theta_0 + \omega$ t

2-Düzgün Değişen Dönme

Açısal ivme sabittir.

$\omega = \omega_0 + \alpha * t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 * t + \frac{1}{2} * \alpha * t^2$

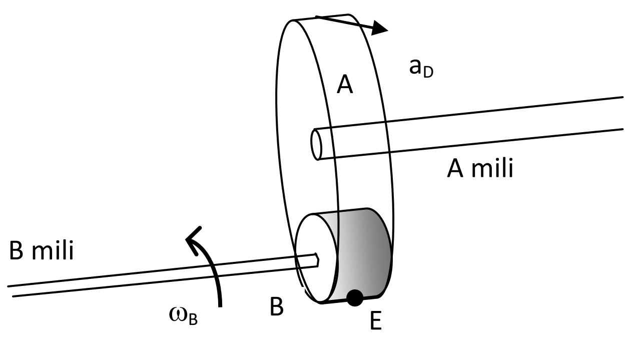
$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2 * \alpha\, (\theta - \theta_0)$

Bunlar doğrusal hareketteki denklemler ile benzerdir.

Açısal hız iki noktayı bağlayan doğrunun seçilen koordinat takımına göre konumunu gösteren θ açısının değişme hızı ω olup cisim için bir değerdir.

Mekanizmaların çoğu bir yerine, çok sayıda parçadan oluşur. Bu parçalar birbirine mafsallı ise mafsal noktalarının da salt hız aynı olmak üzere ayrı rijit cisimler olarak incelenirler. Dişliler ve kayma yapmayan yüzeyler olunca dokunma noktasında yine salt hızlar aynı olur. Ancak salt ivmenin dokunma yüzeyinde yalnız teğet bileşenleri eşittir.

ÖRNEK



Şekil 5.18.

B sürtünme tekerleği B miline A sürtünme tekerleği A miline bağlıdır. B tekerleği A tekerleğinin çemberinin iç yüzünde kaymadan yuvarlanmaktadır. A tekerleğinin yarıçapı r_A merkezi o_2 dir. B tekerleğinin yarıçapı r_B merkezi o_1 dir. B milinin sabit ω_B açısal hızı ile döndüğü bilindiğine göre

a) ω_A=?

b) A tekerleğindeki bir D noktasının ivmesini bulunuz

$\vec{v}_{0_1} = \vec{v}_{0_2} = \vec{0}$

a) $|\vec{v}_E| = r_A * \omega_A = r_B * \omega_B$ $\qquad \omega_A = \frac{r_B}{r_A} * \omega_B$

b) İvmenin teğet bileşeni = 0 çünkü ω_A = sabit dolayısı ile :

$\alpha_A = 0 \qquad \alpha_t = r * \alpha_A = 0$

$a_D = a_n = r_A * {\omega_A}^2 = r_A * (\frac{r_B}{r_A} * \omega_B)^2 = \frac{{r_B}^2}{r_A} * {\omega_B}^2$

<u>ÖRNEK</u>

Bir önceki örnekte B'nin açısal hızı 10 sn'lik süre içinde düzgün olarak 200 dev/dak'dan 500 dev/dak'ya çıktığı ve r_A= 15 cm r_B= 5 cm olduğuna göre :

a) A tekerleğin açısal ivmesini
b) 10 sn içerisinde A tekerleğinin yaptığı devir sayısını bulunuz.

$\Delta\omega_B$ = 500 – 200 = 300 dev/dak = 31,42 rad/san

$\alpha_B = \frac{\Delta\omega_B}{\Delta t} = \frac{31,42}{10}$ = 3,142 rad/san^2

a) $(a\ )_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B$ $\qquad \alpha_A = \frac{r_B}{r_A} * \alpha_B$ = 1,047 rad/san^2

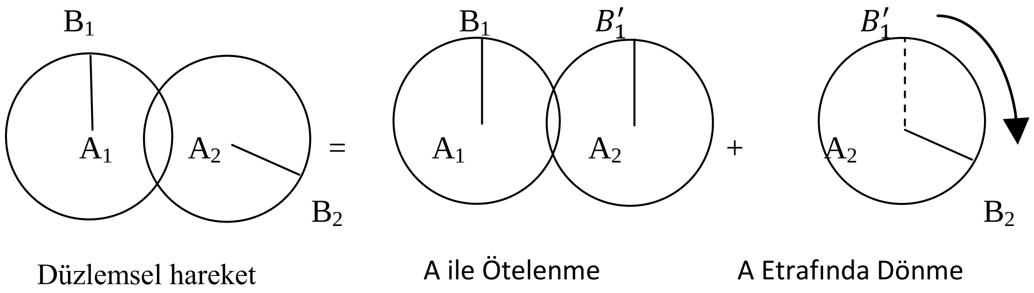
b) $(\omega_A)_0 = \frac{r_B}{r_A} * (\omega_B)_0 = \frac{5}{15}$ * 200 = 66,67 dev/dak = 6,98 rad / san

$$\theta = \theta_0 + (\omega_A)_0\ t + \frac{1}{2}\alpha_A t^2$$

$\Delta\theta = \theta - \theta_0$ = 6,98*(10) + $\frac{1}{2}$ * (1,047)*10^2 = 122,15 rad = 19,44 dev

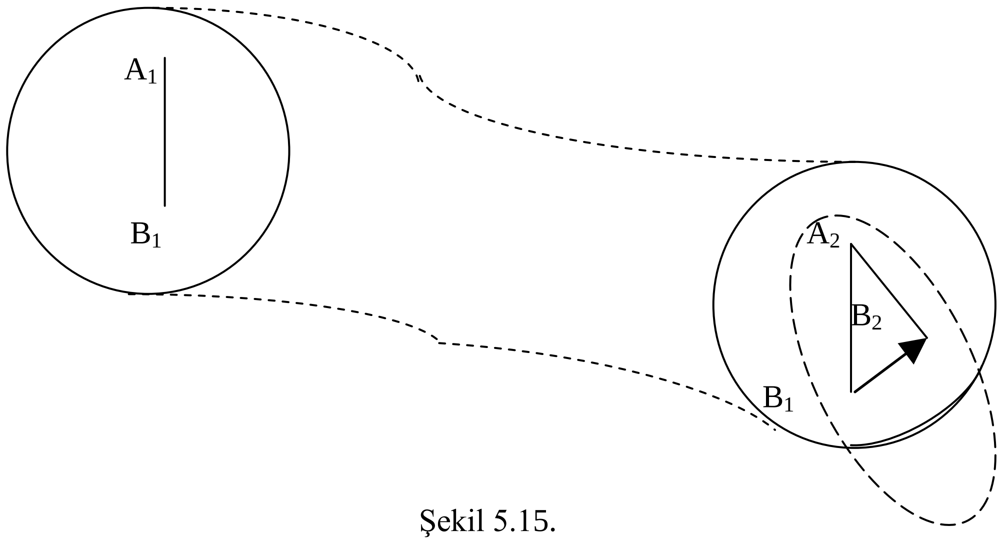
5.5. Genel Düzlemsel Hareket:

Ötelenme ve Dönme dışındaki düzlemsel hareketlere genel düzlemsel hareket deniliyordu. Şimdi her düzlemsel hareketin bir dönme ile bir ötelenmenin toplamı olduğunu göstereceğiz. Bunun için örnek olarak yuvarlanan bir tekerleği ele alacağız



Şekil 5.14.

Genel olarak biz levha için iki A, B noktası ile



Şekil 5.15.

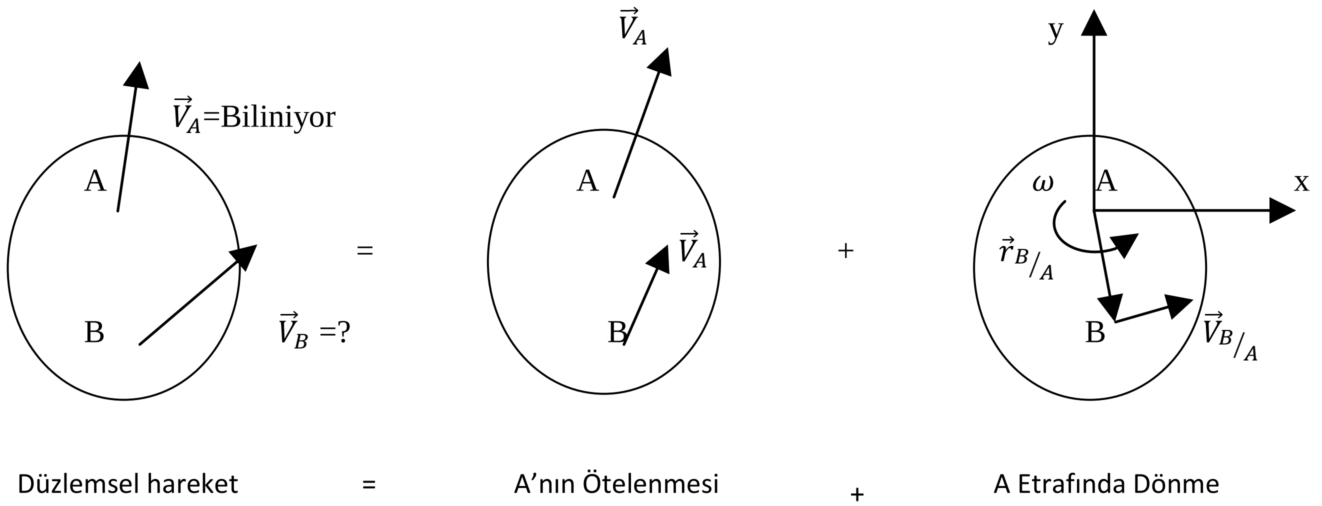
Böyle bir harekette bağıl hareket şöyle tanımlanabilir. A' daki sabit doğrultularda eleman takımına göre B'nin hareketi dairesel bir harekettir. Önce Ötelenme sonra dönme olur.

5.6. Düzlemsel Harekette Salt ve Bağıl Hız:

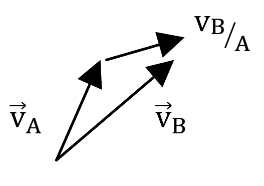
Önceki bölümde bir levhanın herhangi bir düzlemsel hareketi yerine keyfi bir A karşılaştırma noktası için tanımlanan bir ötelenme hareketi ile A etrafında bir dönmenin konulabileceğini gördük. B noktasının salt hızı

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

bağıl hız formülünden elde edilir. $\vec{v}_A$ hızı levhanın A noktasının ötelenmesine karşı gelmekte $\vec{v}_{B/A}$ bağıl hızı ise levhanın A etrafında dönmesi ile ilgili olup başlangıç noktası A'da bulunan ve doğrultuları değişmeyen eksenlere göre ölçülmektedir.



Şekil 5.16.



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$v_{B/A} = r\ \omega_{AB}$$

Şekil 5.17.

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$

$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$

$v_{A/B} = r * \omega_{AB}$

r A ile B arasındaki uzaklık $\vec{r}_{B/A}$ yönlüdür ve işareti vardır.

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$ $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

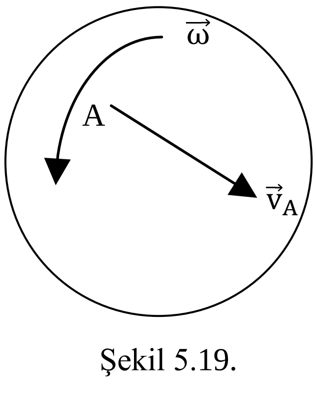
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$\vec{v}_{A/B} = - \vec{v}_{B/A}$

Her iki durumda da ω ayın r de aynı ancak bağıl hızın işareti değişmektedir. Konum vektörünün doğrultusuda aynı olup yönü değişmektedir. O halde bağıl hızın yönü seçilen karşılaştırma noktasına bağlıdır. Çizilen bir diyagram yanlışlığı önler.

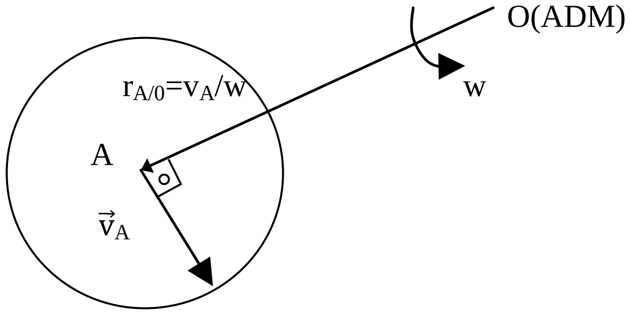
5.7. Düzlemsel Harekette Ani Dönme Merkezi

Bir levhanın düzlemsel hareketi en genel durumda bile bir eksen etrafında dönmeye eşittir. Bu eksenin levhayı ya da düzlemdeki noktayı kestiği noktaya da Ani Dönme Merkezi(ADM) denir. Bir levhanın A noktasının ötelenmesi ve sonra A etrafında ω açısal hızı ile dönmesi ile gösterilğini düşünelim.



Şekil 5.19.

A noktasının hızı ile ω açısal hızı bütün noktaların hızlarını belirler. Şimdi $\vec{v}_A$ ve $\vec{\omega}$ biliniyor ve sıfırdan farklı olduğunda ($\vec{v}_A = 0$ ise A dönme merkezidir. $\vec{\omega} = \vec{0}$ ise hareket ötelenmedir.)



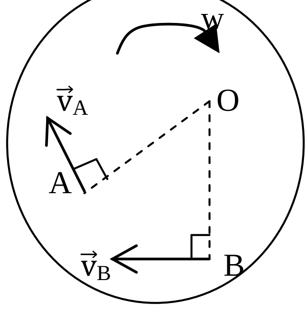
Şekil 5.20.

V_A'ya dik doğru üzerinde ve $r_{A/0}=v_A/w$ uzaklıktaki O noktası etrafında dönme ile de hızlar elde edilir. A'noktasının hızını O'ya göre yazalım.

$v_A = v_0 + \vec{v}_{A/0}$ $\qquad$ $v_A = \vec{v}_0 + \vec{w} \times \vec{r}_{A/0}$

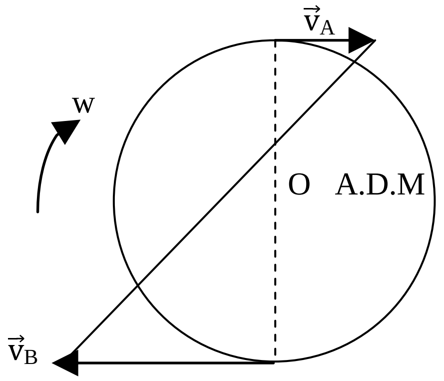
$v_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_A$ olması için $\vec{v}_0 = \vec{0}$ olmalı, yani O dönme merkezidir.

Ani dönme merkezi A ve B gibi iki noktada hızlar paralel değilse diklerin kesişmesiyle bulunur.

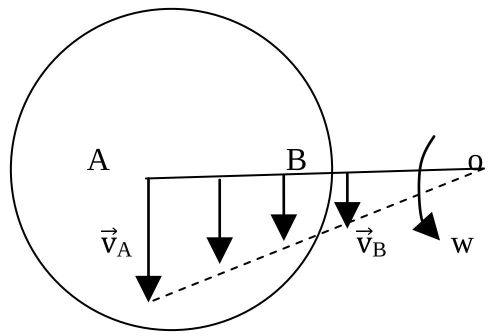


Şekil 5.21.

hızlar paralel ise

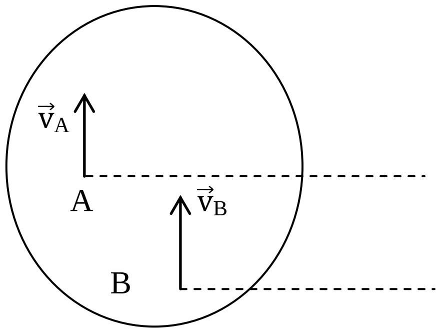


Şekil 5.20.



Şekil 5.22.

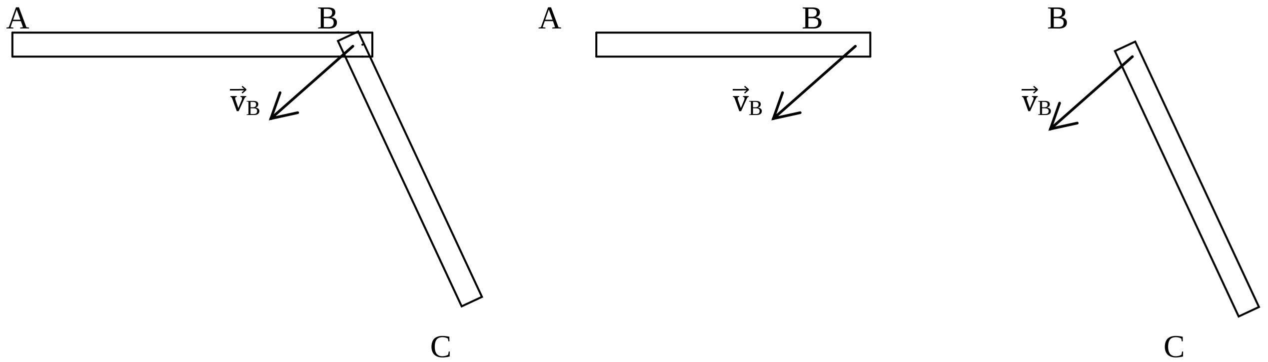
Eğer hızlar paralel, şiddetleri aynı ve yönleri de aynı ise o zaman cisim öteleme yapıyordur. Hızlara çıkılan dikler kesişmez. Dönme merkezi yoktur.



$\vec{v}_A = \vec{v}_B$ (öteleme)

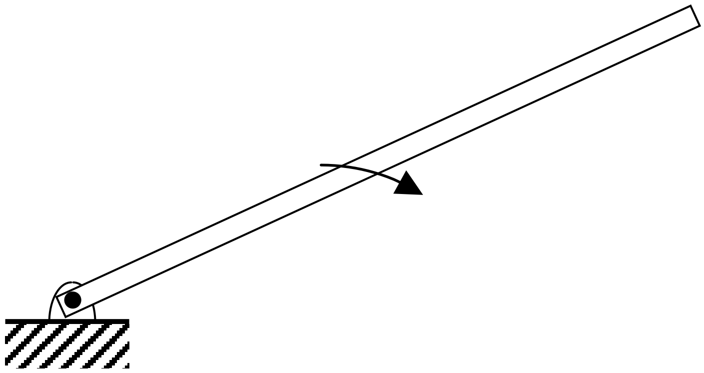
Şekil 5.23.

Ayrıca mafsal da iki cismin hızları eşittir.



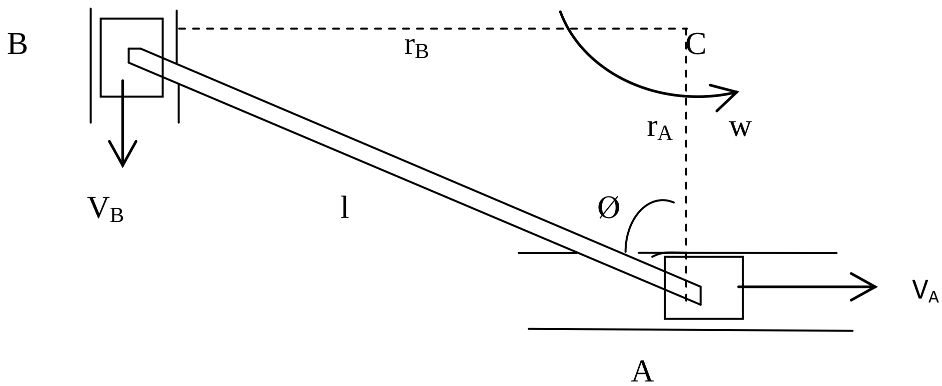
Şekil 5.24.

Sabit mesnette ani dönme merkezidir.



Şekil 5.25.

Ani dönme merkezi bazı hesaplarda yararlı olur.



Şekil 5.26.

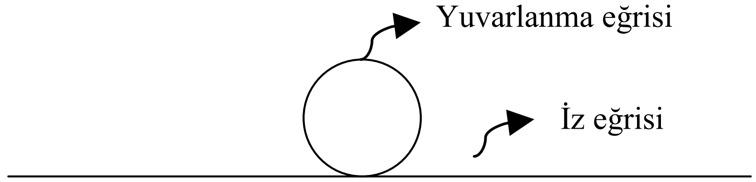
Dikler çizilerek C bulunur. A noktasının hızı belirli ise $w=\frac{v_A}{l\cos Ø}$ olur.

$v_B = l\sin Ø\frac{v_A}{l\cos Ø} = v_A \tan Ø$ ile v_B bulunur. Aslında tanØ ya bile gerek yok.

$v_A = w\, r_A$ $\quad v_B = w\, r_B$ olup $\quad w=\frac{v_A}{r_A}$ ve $w=\frac{v_B}{r_B}$ $\quad v_B= \frac{r_B}{r_A}\, v_A$ ile bulunur..

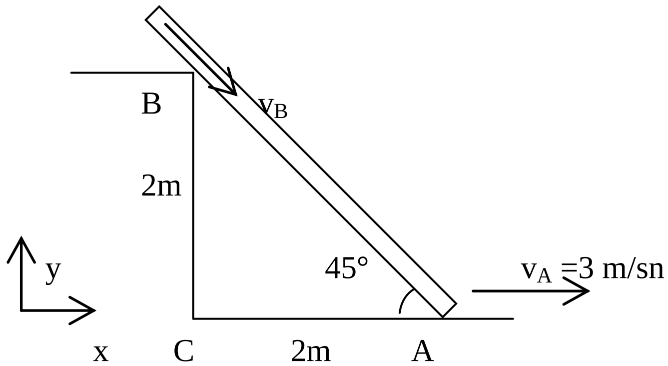
Ani dönme merkezi levha üzerinde veya dışında da olabilir. Ancak bu nokta levha üzerinde ise levhanın o noktadaki hızı sıfır olmak zorundadır. İki farklı zamanda ani dönme merkezinin yeri aynı olmayabilir. Yani ani dönme merkezinin ivmesi sıfırdan farklı olabilir. Öyle ise ivmeler C etrafında dönme oluşuna göre bulunmazlar.

Değişen ani dönme merkezinin cisim üzerinde değişen eğrisine yuvarlama eğrisi, uzayda çizdiği eğriyede iz eğrisi denir. Gösterilebilir ki her an 2 eğri birbirine teğettir. Levha hareket ettikçe yuvarlama eğrisi iz eğrisi üzerinde yuvarlanıyor gibidir.



Şekil 5.27.

ÖRNEK



Şekil 5.28.

Bir çubuğun yerdeki A ucu 3 m/sn hızla sağa doğru kayıyor. Çubuğun B noktasının hızı nedir ?

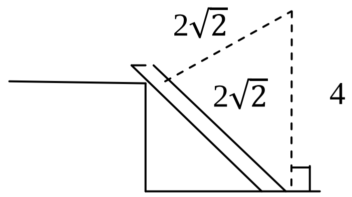
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$

$v_B(0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{j}) = 3\vec{i} + w_{AB}\vec{k} \times (-2\vec{i} + 2\vec{j})$ $0{,}707 v_B\,\vec{i} - 0{,}707\, v_B\,\vec{j} = (3 - 2\,w_{AB})\,\vec{i} - 2w_{AB}\,\vec{j}$

$0{,}707\, V_B = 3 - 2w_{AB}$

$-0{,}707\, v_B = -2w_{AB}$ $v_B = 2{,}12$ m/sn ve $\vec{v}_B = 2{,}12(0{,}707\vec{i} - 0{,}707\vec{j}) = 1{,}5\vec{i} - 1{,}5\vec{j}$ olur.

Ani dönme merkezi ile :



$\overrightarrow{v_A} = (\vec{v})_{ADM} + (\vec{v})_{A/ADM}$

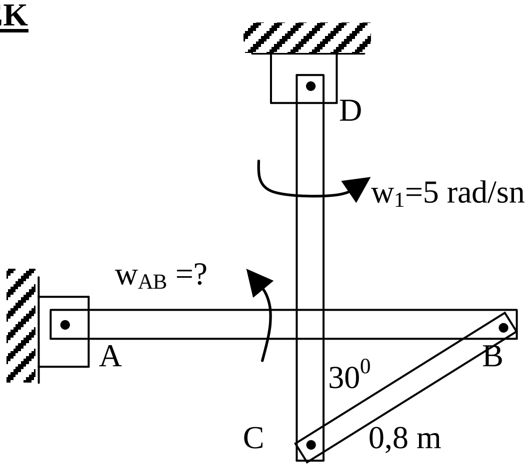
$w = \frac{3}{4}$rad

$v_B = \frac{3}{4} 2\sqrt{2} = \underline{2{,}12 \text{ m/sn}}$

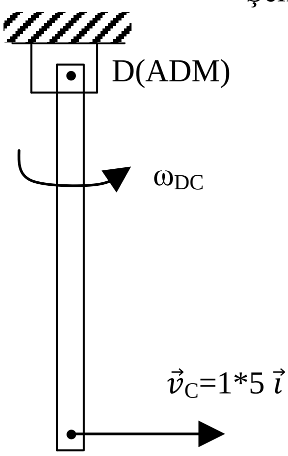
Şekil 5.29.

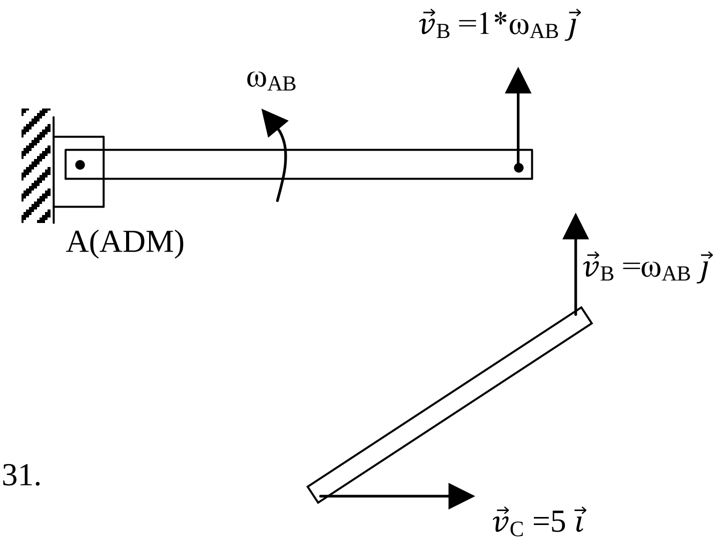
ÖRNEK

DC=1m, AB=1m w_{AB}=?



Şekil 5.30.





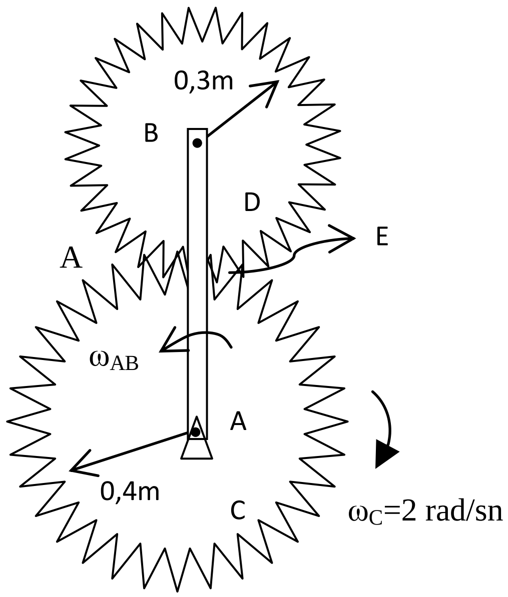
Şekil 5.31.

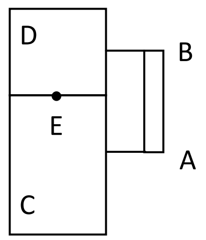
$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C}$ $\qquad$ $w_{AB}\,\vec{j} = 5\vec{i} + w_{BC}\,\vec{k} \times (0{,}8 \cos 30\vec{j} + 0{,}8 \sin 30\vec{i}\,)$

$0=5-0,866 * 0,8\ w_{BC}$ $\quad w_{BC}= 7,22$ rad/sn

$w_{AB} = w_{BC} * 0,40 = 2,89$ rad/sn

ÖRNEK





Şekil 5.32.

C dişlisi saat ibresi yönünde 2 rad/sn ile dönüyor. Aynı anda AB çubuğu saat ibresinin tersine w_{AB}=4rad/sn ile dönüyor. D dişlisinin açısal hızını bulunuz.(E ortak nokta)

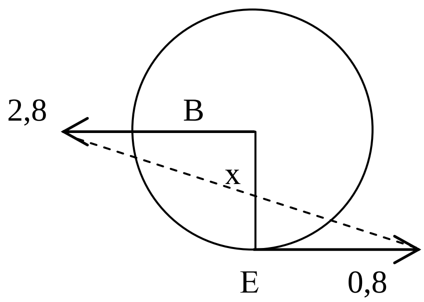
AB çubuğundan

$v_B = 4*0,7 = 2,8$ m/sn

C dişlisindeki E noktasının hızı:

$(v_E) = 2*0,4 = 0,8$ m/sn $\quad \frac{x}{2,8} = \frac{0,3-x}{0,8} \rightarrow x=0,233$m

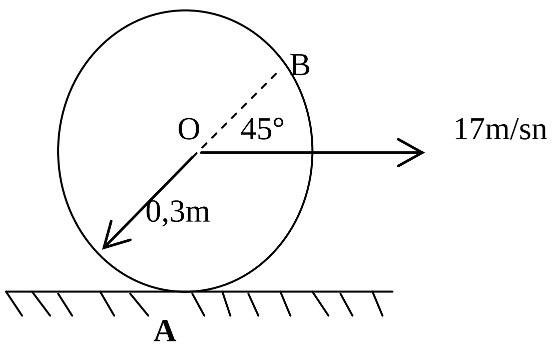
$w_D = \frac{2,8}{0,233} = 12$ rad/sn



Şekil 5.33.

ÖRNEK

Bir teker 17m/sn hızla yuvarlanarak ilerliyor. Açısal hızı nedir? B noktasının verilen konumda hızı nedir?

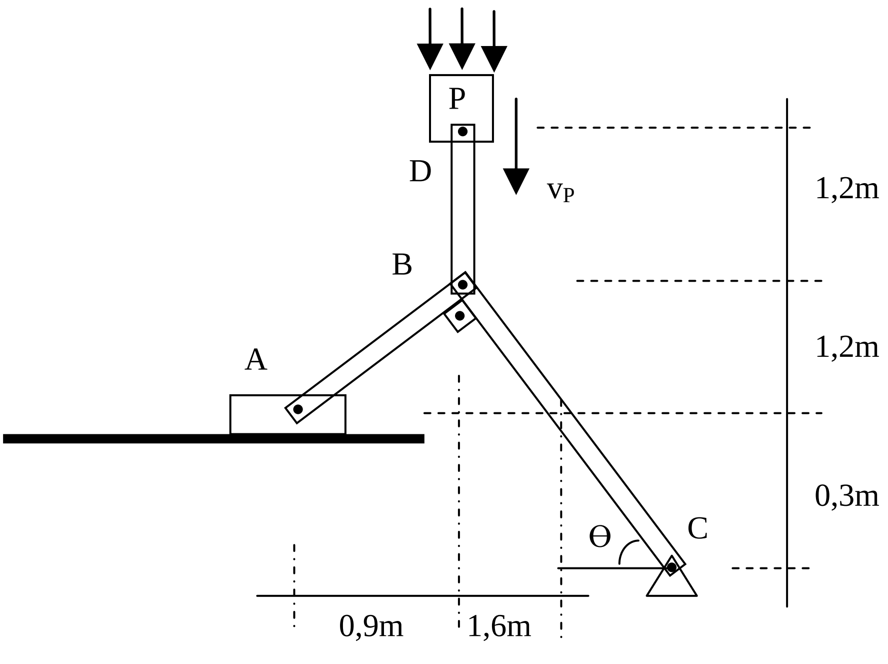


Şekil 5.34.

$\vec{v}_o = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{o/A}$ 17 $\vec{i}$=w$\vec{k}$ ×0,3$\vec{j}$ w= - $\frac{17}{0,3}$ = -56,7 rad/sn

$\vec{v}_B = \vec{v}_o + \vec{w} \times \vec{r}_{B/o}$ =17 $\vec{i}$ +(-56,7$\vec{k}$) × (0,3)[0,707$\vec{i}$ + 0,707$\vec{j}$] =29$\vec{i}$ - 12,3$\vec{j}$ m/sn

ÖRNEK



Şekil 5.35.

Piston (P) $\vec{v}_p$ = -6$\vec{j}$ m/sn sabit hızla aşağıya inerken kayıcı $\vec{v}_A$'nın hızını bulunuz

$\overrightarrow{v_D} = \vec{v}_p$ = -6$\vec{j}$ tanΘ=$\frac{1,2}{1,6}$ Θ=36,8°

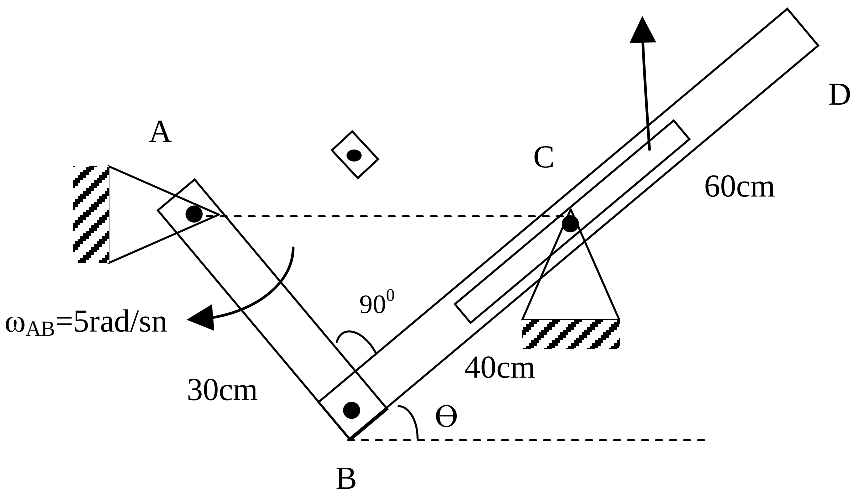
BD: $\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{v}_{B/D}$ $\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{w}_{BD} \times \vec{r}_{B/D}$ $\vec{v}_B$= -6$\vec{j}$ +w_{BD} $\vec{k}$ ×(-1,2$\vec{j}$) ***1***

BC: $\vec{v}_B = v_B(-0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j})$ ***2*** ($\vec{v}_B$ BA doğrusuna paraleldir dolayısı ile birim vektörler aynıdır)

1=2 $v_B(-0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j}) = -6\vec{j} + w_{BD}\vec{k} \times (-1{,}2\vec{j}) \rightarrow v_B = 7{,}5$ m/sn

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \rightarrow -v_A\vec{i} = 7{,}5(-0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j}) + w_{AB}\vec{k} \times (-0{,}9\vec{i} - 1{,}2\vec{j}) \rightarrow v_A = 12{,}5$ m/sn; $\vec{v}_A = -12{,}5\vec{i}$ m/sn

ÖRNEK



Şekil 5.36.

AB çubuğu saat yönünde 5rad/sn lik bir hız ile dönmektedir. BD çubuğunun C noktasında hareketini kısıtlayan bir yarık vardır ($\vec{V_c} \mathbin{/\!/}$ BD). Şekildeki konumda D noktasının hızı ile BD'nin açısal hızını bulunuz.

$\tan\Theta = \frac{30}{40} \rightarrow \Theta = 36{,}9°$ $\sin\Theta = 0{,}6$ $\cos\Theta = 0{,}8$

$\vec{v}_B = \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = -5\vec{k} \times 30(\sin\Theta\vec{i} - \cos\Theta\vec{j}) = -90\vec{j} - 120\vec{i}$ cm/sn

$\vec{v}_C = v_C(\cos\Theta\vec{i} + \sin\Theta\vec{j}) = 0{,}8v_C\vec{i} + 0{,}6v_C\vec{j}$ ……………….(1)

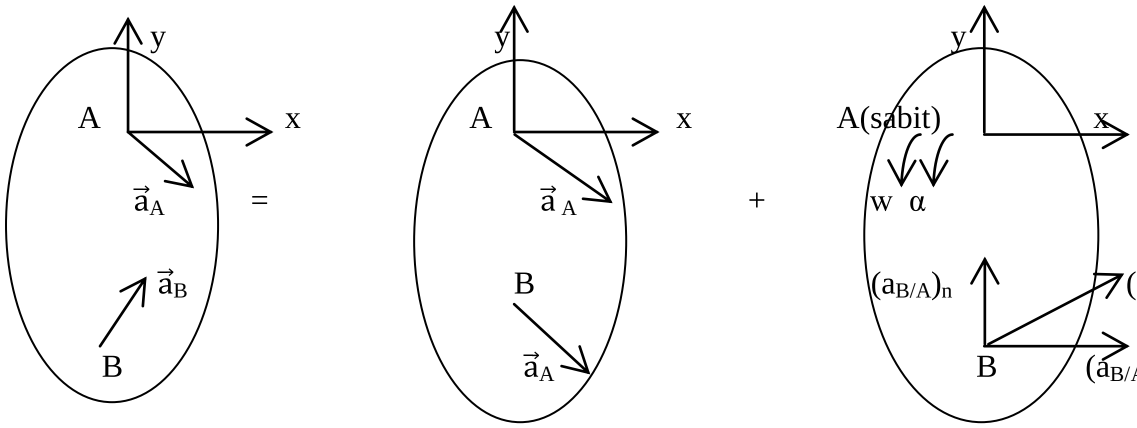
$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{w}_{BD} \times \vec{r}_{C/B} = -120\vec{i} - 90\vec{j} + w_{BD}\vec{k} \times 40(0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}) = (-120 - 24\,w_{BD})\,\vec{i} + (-90 + 32\,w_{BD})\,\vec{j}$ cm/sn … (2)

(1)=(2) $\rightarrow$ $v_C = -150$ cm/sn , $w_{BD} = 0$ (Ötelenme)

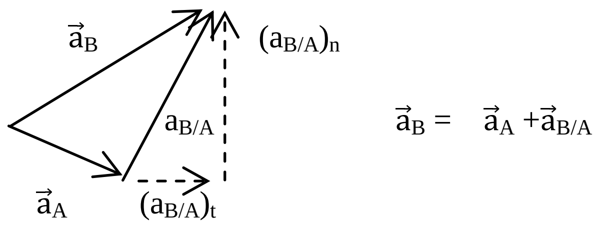
$\vec{v}_C = -150(0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}) = -120\vec{i} - 90\vec{j}$ olur. $\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{w}_{BD} \times \vec{r}_{D/B} = -120\vec{i} - 90\vec{j}$

5.8. Düzlemsel Harekette Salt ve Bağıl İvme

Herhangi bir düzlemsel hareket seçilen bir A noktasının ötelenmesi ve bunun etrafında dönmesi ile oluşturulabilir. (5.6.) kısımda hızlar için kullandığımız bu özelliği şimdi ivmeler için kullanacağız.



Şekil 5.37.



Şekil 5.38.

$\vec{a}_A$ ivmesi levhanın A ile birlikte ötelenmesine karşı gelmekte $\vec{a}_{B/A}$ bağıl ivmesi ise levhanın A etrafında dönmesi ile ilgili olup A noktası sabit gibi düşünülecektir. ($\vec{a}_{B/A}$) bağıl ivmesi ($\vec{a}_{B/A})_t$ bileşeni ile $(\vec{a}_{B/A})_n$ bileşenine ayrılabilir.

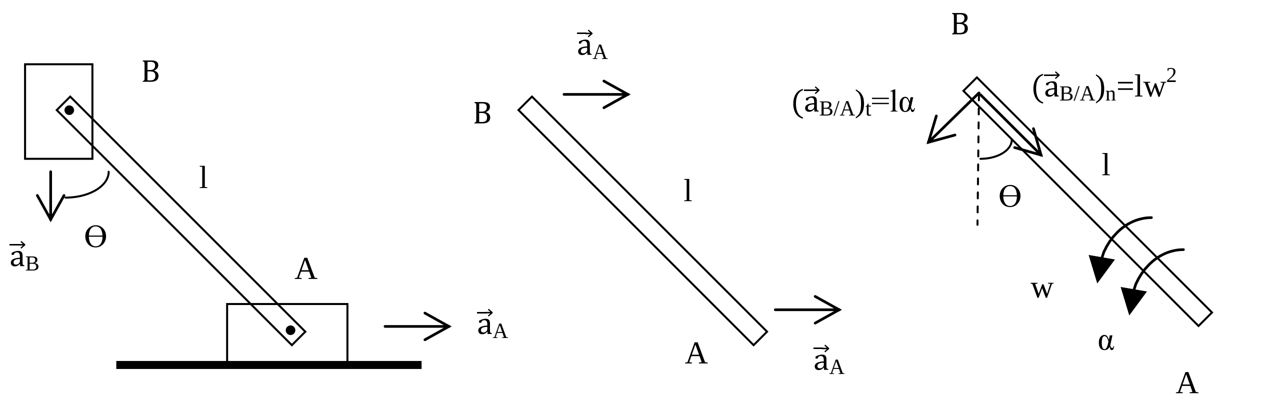
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$

Levhanın x-y takımına göre açısal hızı “w” ivmesi “α” olduğuna göre ve $r=|\vec{r}_{B/A}|$ ise

$$(\vec{a}_{B/A})_t = \vec{\alpha} \times (\vec{r}_{B/A}) \quad , \quad (a_{B/A})_t = r\alpha$$

$$(\vec{a}_{B/A})_n = -w^2 (\vec{r}_{B/A}) \quad , \quad (a_{B/A})_n = rw^2$$

Örnek olarak yine 2 ucu doğrusal kayan bir çubuğu ele alalım.



Düzlemsel hareket A ile ötelenme A etrafında dönme

Şekil 5.39.

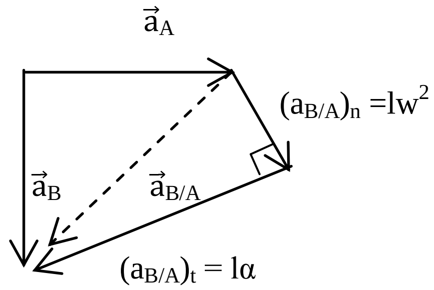
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$$

Birinci durum için :

$\overset{+}{\rightarrow}$ $0=a_A + lw^2 \sin\Theta - l\alpha\cos\Theta$

$+\uparrow$ $-\vec{a}_B = -lw^2\cos\Theta - l\alpha\sin\Theta$

a_B ve α ortak çözülür. Grafik yol ile de çözüm yapılabilir.



Şekil 5.40.

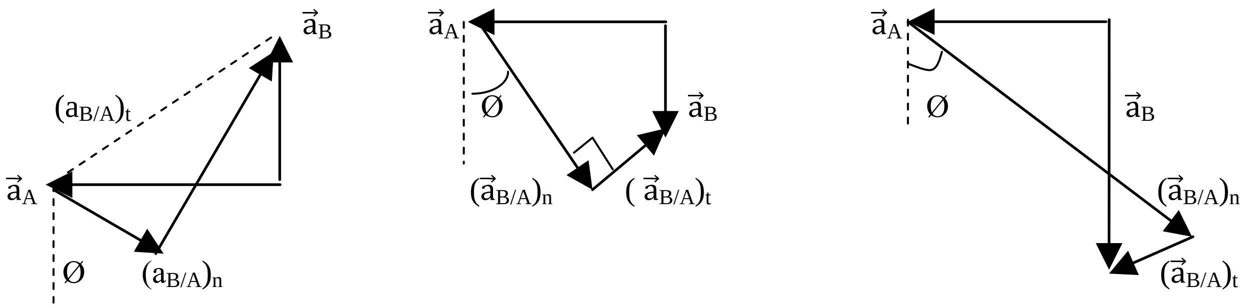
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$

$|(\vec{a}_{B/A})_n| = lw^2$ olup yönü A'ya doğrudur.

$|(\vec{a}_{B/A})_n| = l\alpha$ olup yönü belli değildir. Fakat doğrultusu AB'ye diktir.

$\vec{a}_A$ 'nın yönüne ve $(\vec{a}_{B/A})$ nın şiddetine göre değişik durumlar çıkabilir. a_B ve α iki bilinmeyen olup w daha önce hızlarla ilgili bağıntılardan elde edilebilir. 3 farklı durum için aşağıda grafik yöntemler verilmiştir.

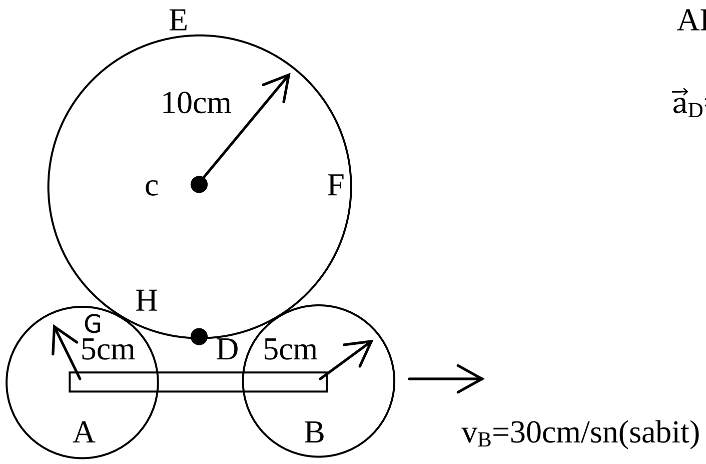


Şekil 5.41.

ÖRNEK

$AB=15$ cm

$\vec{a}_D=?$ $\vec{a}_E=?$ $\vec{a}_F=?$



Şekil 5.42.

A ve B ‘nin ortasında olması gereken $\vec{v}_C=\vec{v}_A=\vec{v}_B$ (sabit) $\vec{a}_C=0$ (hem düşeyde hem yatayda)

v_c sabit (düşeyde hareket yok)

$w_A=w_B=\frac{30}{5}=6$ rad /sn $\vec{v}_G=\vec{v}_H \rightarrow \vec{v}_A+\vec{w}_A\times\vec{r}_{G/A}=\vec{v}_C+\vec{w}_C\times\vec{r}_{H/C}$ $w_C=\frac{r_A}{r_C}w_A=3$ rad/sn

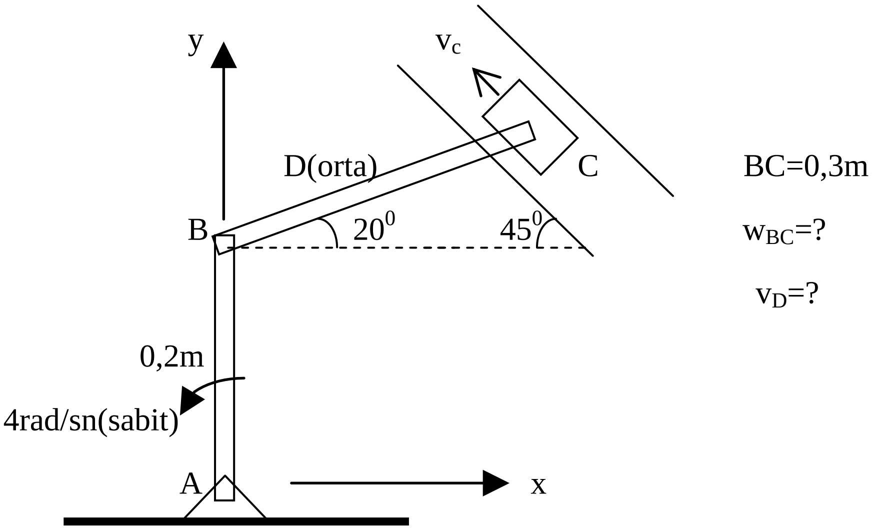
$\alpha_C=0$ (w_C sabit)

$\vec{a}_D=\vec{a}_C+\vec{a}_{D/C}=\vec{0}+\vec{0}+(-3^2)(-10\vec{j})=90\vec{j}$

$\vec{a}_E=\vec{a}_C+\vec{a}_{E/C}=\vec{0}+\vec{0}+(-3^2)(10)(\vec{j})=-90\vec{j}$

$\vec{a}_F=\vec{a}_C+\vec{a}_{F/C}=\vec{0}+\vec{0}+(-3^2)(10)(\vec{i})=-90\vec{i}$

ÖRNEK



Şekil 5.43.

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = 4\vec{k} \text{ x } 0{,}2\vec{j} = -0{,}8\vec{i}$

$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{w}_{B/C} \times \vec{r}_{C/B}$ $\quad v_C(-\cos45\vec{i}+\sin45\vec{j}) = -0{,}8\vec{i} + w_{BC}\vec{k} \text{ x } 0{,}3(\cos20\vec{i}+\sin20\vec{j})$

$= -0{,}8\vec{i} + 0{,}3\, w_{BC} \cos20\vec{j} - 0{,}3 w_{BC} \sin20\vec{i} \rightarrow \quad v_C = 1{,}779$ m/sn

$w_{BC} = 4{,}46$, $\vec{w}_{BC} = 4{,}46\vec{k}$ rad/sn

$\vec{v}_D = -0{,}8\vec{i} + (4{,}46\vec{k}) \times (0{,}141\vec{i} + 0{,}0513\vec{j}) = -1{,}029\vec{i} + 0{,}629\vec{j}$ m/sn

ÖRNEK

Bir önceki örnekte w_{AB}= 3rad/sn α_{AB} =5 rad/sn^2 ise α_{BC}=?

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = -3(0{,}2)\,\vec{i} = -0{,}6\vec{i}$

$\vec{v}_C = v_C(-0{,}707\vec{i}+0{,}707\vec{j}) = \vec{v}_B + \vec{w}_{BC} \times \vec{r}_{C/B} = -0{,}6\vec{i} + w_{BC}\vec{k} \times 0{,}3(\cos20\vec{i}+\sin20\vec{j})$

$= -0{,}6\vec{i} + w_{BC}(0{,}282)\,\vec{j} - w_{BC}(0{,}1026)\,\vec{i}$

$$\left.\begin{aligned} -0{,}707 v_C &= -0{,}6 - w_{BC}(0{,}1026) \\ 0{,}707 v_C &= 0{,}282 w_{BC} \end{aligned}\right\} \quad \vec{w}_{BC} = 3{,}35\vec{k} \text{ rad/sn}$$

$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A+(\vec{a}_{B/A})_t +(\vec{a}_{B/A})_n = \vec{a}_A +\vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} +\vec{w}_{AB} \times (\vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A})$

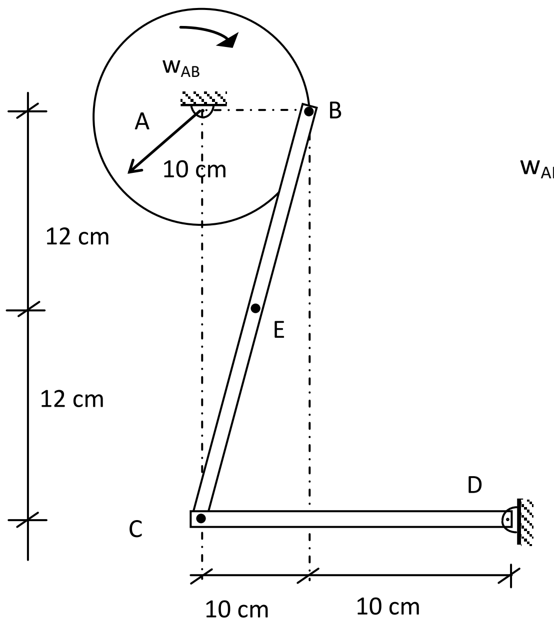
$\vec{a}_B=0 -0,2\alpha\vec{i} - 0,2w^2\vec{j} = -1,0\vec{i} - 1,8\,\vec{j}$

$\vec{a}_C=\vec{a}_B +(\vec{a}_{C/B})_t +(\vec{a}_{C/B})_n$

$a_C(-0,707\vec{i}+0,707\vec{j})= -1,0\vec{i} -1,8\vec{j} +\alpha_{BC}\vec{k} \times (0,3\cos 20\vec{i}+0,3\sin 20\vec{j})+(3,35\vec{k})\times[(3,35\vec{k})\times(0,3\cos 20\vec{i}+0,3\sin 20\vec{j})]$

$\alpha_{BC}=39,7$ rad/sn^2 olur.

ÖRNEK



$w_{AB}=8$ rad/sn (sabit)ve $\alpha_{AB}=\vec{0}$ ise

a) $\vec{\alpha}_{BC}=?$, $\vec{\alpha}_{CD}=?$
b) $\vec{a}_C=?$, $\vec{a}_D=?$

Şekil 5.44.

Açıkça görülüyor ki $\vec{a}_D=0$ ve $\vec{v}_D=0$

$\vec{v}_B= -80\vec{j}$ BC çubuğunun ani dönme merkezi "∞" da dolayısı ile BC çubuğu ötelenme yapıyor.

$\vec{v}_C=\vec{v}_B= -80\vec{j}$ $\vec{w}_{BC} =\vec{0}$ (ötelenme)

$\vec{v}_C=\vec{w}_{CD} \times \vec{r} \rightarrow v_C= w_{CD} * 20 \rightarrow \frac{80}{20}= w_{CD} \rightarrow \vec{w}_{CD}= 4\vec{k}$ rad/sn

$\vec{\alpha}_{AB}=\vec{0}$ $\vec{a}_B= -r\, w_{AB}{}^2\, \vec{i} = -10(8)^2\vec{i} = -640\vec{i}$ cm/sn^2

$\vec{a}_C=\vec{a}_B+\vec{a}_{C/B} = \vec{a}_B+(\vec{a}_{C/B})_t +(\vec{a}_{C/B})_n$ $\vec{a}_C=-640\, \vec{i}+ \alpha_{BC}\vec{k} \times (-10\vec{i} -24\vec{j})$

$\vec{a}_C=\vec{a}_D+\vec{a}_{C/D} = \vec{a}_D+(\vec{a}_{C/D})_t +(\vec{a}_{C/D})_n$

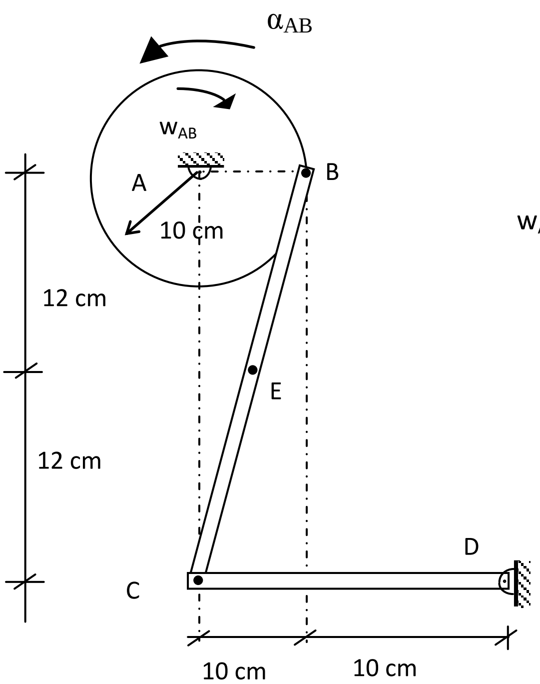
$\vec{a}_C= \vec{a}_D +\alpha_{CD}\, \vec{k} \times (-20\vec{\imath})+4\vec{k} \times [4\vec{k} \times (-20\vec{i})] =0+(-20\alpha_{CD}\vec{j})+(320\vec{j})=320\vec{i} - 20\alpha_{CD}\vec{j}$

$320\vec{i} -20\alpha_{CD}\vec{j} = -640\vec{i} + \alpha_{BC}\vec{k} \times (-10\vec{i} -24\vec{j})$

$$\left.\begin{aligned} 320&= -640 + 24\alpha_{BC} \\ -20\alpha_{CD}&= -10\alpha_{BC} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha_{BC}&= 40\text{rad/sn}^2 \\ \alpha_{CD}&= 20\text{rad/sn}^2 \end{aligned}$$

$\vec{a}_C= \vec{a}_D +\alpha_{CD}\, \vec{k} \times (-20\vec{\imath})+w_{CD}\vec{k} \times [w_{CD}\vec{k} \times (-20\vec{i})] =320\vec{i}- 400\vec{j}$ cm/sn^2

ÖRNEK



w_{AB}=8 rad/sn ve α_{AB}=30rad/sn^2 ise

a) $\vec{\alpha}_{BC}$=? , $\vec{\alpha}_{CD}$=?
b) $\vec{a}_C$=? , $\vec{a}_D$=?

Şekil 5.45.

$\vec{v}_B= \vec{0} +(-8\vec{k})x10\vec{i} = -80\vec{j}$, $\vec{v}_C =\vec{v}_B +\vec{v}_{C/B}$ $\rightarrow$ $v_C\,(-\vec{j})= -80\vec{j}+w_{BC}\vec{k} \times (-10\vec{i} - 24\vec{j})=80$, $w_{BC}=0$, v_c=80cm/sn

$w_{CD}=\frac{80}{20}$=4 rad/sn , $\vec{w}_{CD}= 4\vec{k}$

$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A+(\vec{a}_{B/A})_t +(\vec{a}_{B/A})_n =$

$\vec{a}_B = \vec{0} + 30\vec{k} \times (10\vec{\imath}) + (-8\vec{k}) \times [(-8\vec{k}) \times (10\vec{\imath})] = 300\vec{\jmath} - 640\vec{\imath}$

$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{C/D} = \vec{a}_D + (\vec{a}_{C/D})_t + (\vec{a}_{C/D})_n$

$\vec{a}_C = \vec{0} + \alpha_{CD}\vec{k} \times (-20\vec{\imath}) + 4\vec{k} \times [\, 4\vec{k} \times (-20\vec{\imath})\,] = 320\vec{\imath} - 20\alpha_{CD}\vec{\jmath}$ ……………(1)

Öte yandan:

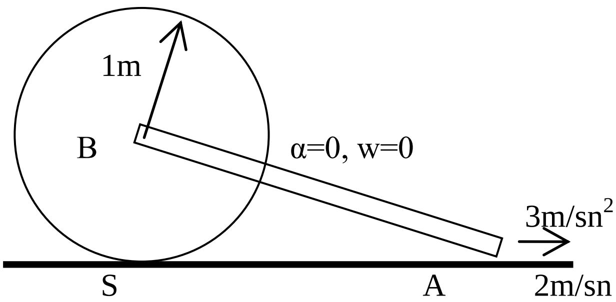
$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} = \vec{a}_B + (\vec{a}_{C/B})_t + (\vec{a}_{C/B})_n$

$\vec{a}_C = 300\vec{\jmath} - 640\vec{\imath} + \alpha_{BC}\vec{k} \times (-10\vec{\imath} - 24\vec{\jmath})$ ………………….(2)

(1) = (2) ise $\left.\begin{array}{l} 320 = -640 + 24\alpha_{BC} \\ -20\alpha_{CD} = 300 - 10\alpha_{BC} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha_{BC} = 40 \text{ rad/sn}^2 \\ \alpha_{CD} = 5 \text{rad/sn}^2 \end{array}$

$\vec{a}_C = \vec{0} + 5\vec{k} \times (-20\vec{\imath}) + 4\vec{k} \times [4\vec{k} \times (-20\vec{\imath})] = -100\vec{\imath} + 320\vec{\jmath}$ cm/sn^2

ÖRNEK



$\vec{a}_S = ?$ $\vec{\alpha}_{BS} = ?$

Şekil 5.46.

A.D.M → ∞ ötelenme , $w_{AB}=0$ $\alpha_{AB}=0$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \rightarrow \vec{a}_B = 3\vec{\imath}$

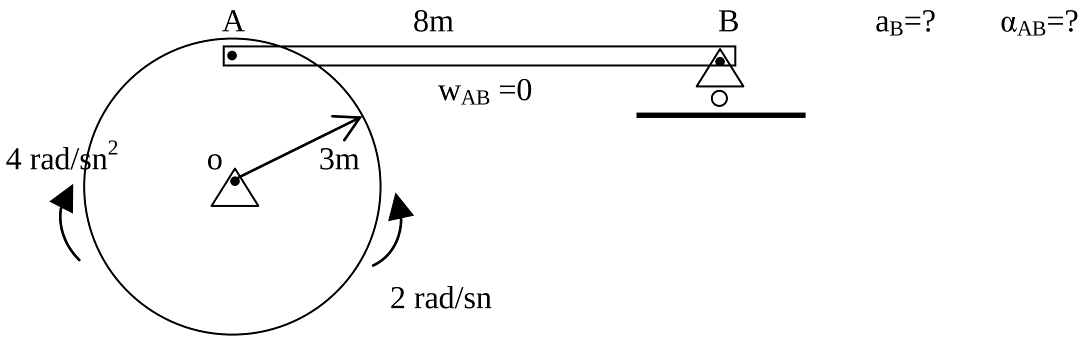
$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{w}_{BS} \times \vec{r}_{B/S}$ $\vec{v}_B = \vec{0} + w_{BS}\vec{k} \times 1\vec{\jmath} =$ $\vec{v}_B = \vec{0} + w_{BS}\vec{k} \times 1\vec{\jmath} = 2\vec{\imath} \rightarrow w_{BS} = -2$rad/sn

$\vec{a}_S = \vec{a}_B + (\vec{a}_{S/B})_t + (\vec{a}_{S/B})_n$

$a_S\,\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} + \alpha_{BS}\vec{k} \times (-1\vec{\jmath}) + (-2\vec{k}) \times [(-2\vec{k}) \times (-1\vec{\jmath})\,] = 3\vec{\imath} + \alpha_{BS}\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

$a_S = 4$m/sn^2 ve $\alpha_{BS} = -3$ rad/sn^2

ÖRNEK



Şekil 5.47.

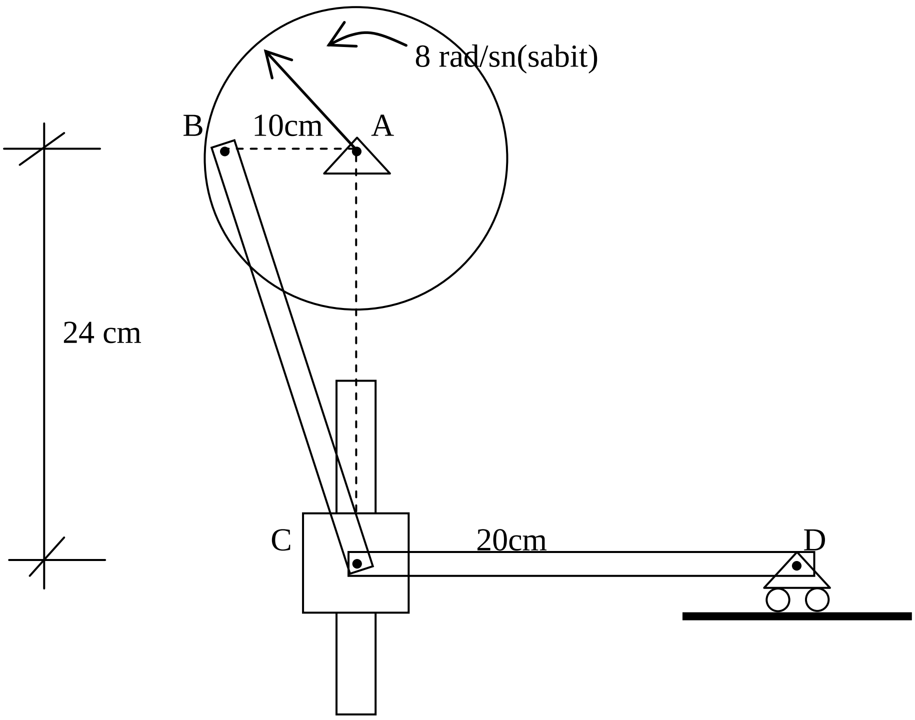
$\vec{v}_A = \vec{v}_B = 2\vec{k} \times 3\vec{j} = -6\vec{i}$ $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O} = \vec{a}_O + (\vec{a}_{A/O})_t + (\vec{a}_{A/O})_n$

$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{AO} \times \vec{r}_{A/O} + \vec{w}_{AO} \times (\vec{w}_{AO} \times \vec{r}_{A/O})$, $\vec{a}_A = \vec{0} + (-4\vec{k} \times 3\vec{j}) + 2\vec{k} \times (2\vec{k} \times 3\vec{j}) = -12\vec{j} + 12\vec{i}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_t + (\vec{a}_{B/A})_n$ $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{w}_{AB} \times (\vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A})$

$\vec{a}_B = a_B\,\vec{i} = -12\vec{j} + 12\vec{i} + \alpha_{AB}\vec{k} \times 8\vec{i} + 0 = 12\vec{i}\ m/sn^2$ $a_B = 12 m/sn^2$ $-12 + 8\alpha_{AB} = 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 1{,}5\ (rad/sn^2)$

ÖRNEK



Şekil 5.48.

a) $\vec{\alpha}_{BC}$=? , $\vec{\alpha}_{CD}$=?

b) $\vec{a}_C$=? , $\vec{a}_D$=?

$\vec{v}_B = -80\vec{j}$, $\overrightarrow{w_{BC}} = \vec{0}$, $\vec{v}_C = -80\vec{j}$ D noktası ADM, $w_{CD} = \frac{80}{20} = 4 rad/sn^2$

$a_B = 8^2 * 10\vec{i} = 640\,\vec{i}$ $\quad a_C(-\vec{j}) = 640\vec{i} + \alpha_{BC}\vec{k} \times (10i - 24\vec{j})$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 640 + 24\alpha_{BC} \\ -a_C = 10\alpha_{BC} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha_{BC} = -26{,}67 \text{ rad/sn}^2 \\ a_C = 266{,}7 \text{ cm/sn}^2 \text{ ve } \vec{a}_C = -266{,}7\,\vec{j} \end{array}$$

$a_D\vec{i} = -266{,}7\,\vec{j} + \alpha_{CD}\vec{k} \times (20\vec{i}) + 4\vec{k} \times (4\vec{k} \times 20\vec{i}) = -320\,\vec{i}$ cm/sn^2 $\quad a_D = -320$ cm/sn^2

$0 = -266{,}7 + 20\alpha_{CD} \rightarrow \alpha_{CD} = 13{,}33$ rad/sn^2