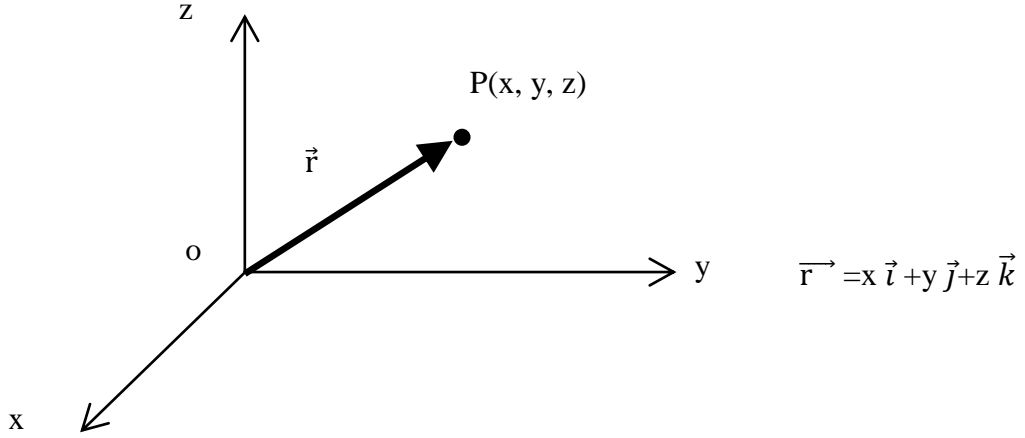


BÖLÜM 2. ÖNEMLİ VEKTÖREL BÜYÜKLÜKLER

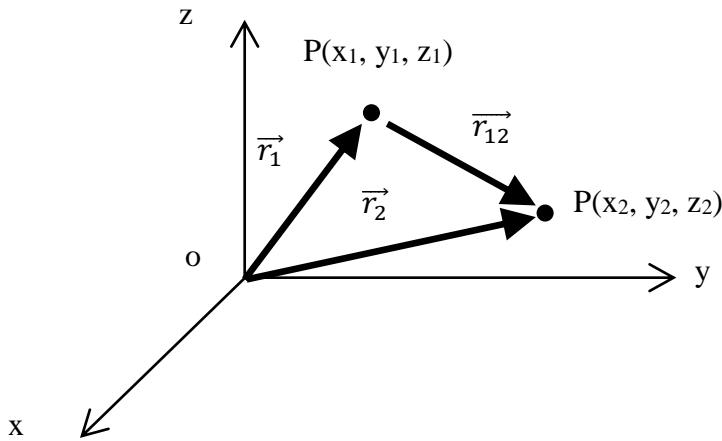
2.1. Yer Vektörü

Bir P noktasının yer vektörü başlangıç noktası O'yu P'ye birleştiren yönlenmiş doğru parçasıdır.



Şekil 2.1.

2.1.1. Yer Değiştirme Vektörü

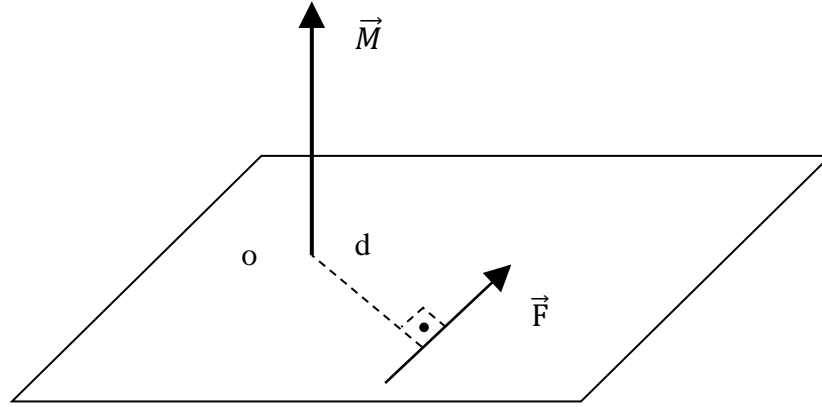


Şekil 2.2.

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

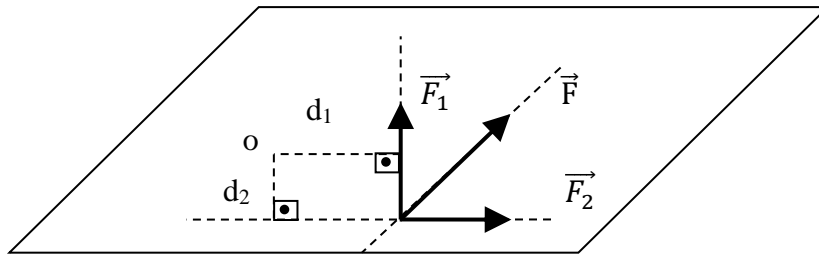
2.2. Bir Kuvvetin Bir Noktaya Göre Momenti



Şekil 2.3.

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| * d$$

\vec{M} vektörü (O, \vec{F}) düzlemine dik olup sağ el kuralına göre yönlenmiştir.

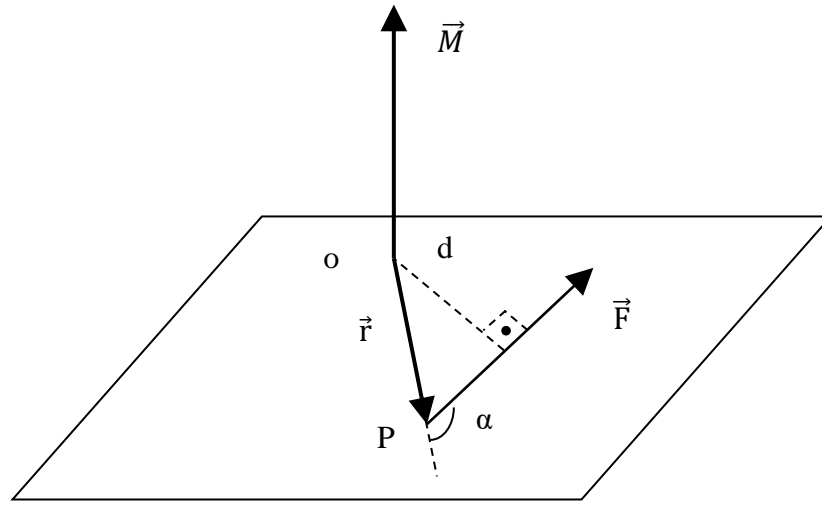


Şekil 2.4.

Varignon teoremine göre

$$|\vec{M}| = |\vec{F}| * d = |\vec{F}_1| * d_1 + |\vec{F}_2| * d_2$$

Bir noktada kesişen çok sayıda kuvvetin bileşkesinin bir O noktasına göre momenti kuvvetlerin O noktasına göre momentleri toplamına eşittir. Momentin vektörel ifadesi de şöyle gösterilebilir.

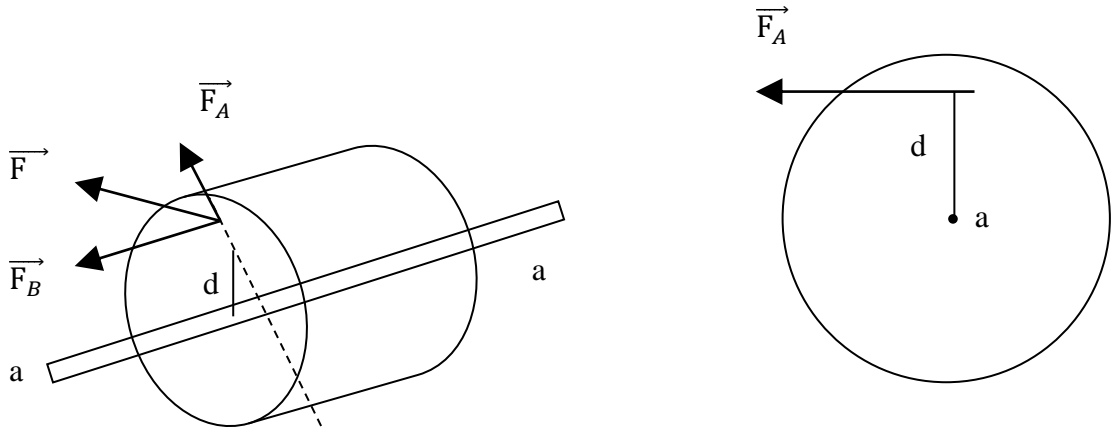


Şekil 2.5.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad |\vec{M}| = |\vec{r}| * |\vec{F}| * \sin\alpha \quad (\underline{r : \text{yer vektörü moment alınan noktadan başlar kuvvetin uygulama noktasında biter)})$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \vec{M} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

2.3. Bir Kuvvetin Bir Eksene Göre Momenti



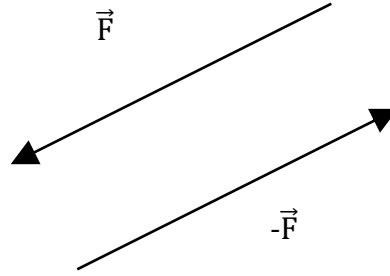
Şekil 2.6.

\vec{F}_A : \vec{F} kuvvetinin a eksenine dik bileşeni

\vec{F}_B : \vec{F} kuvvetinin a eksenine paralel bileşeni

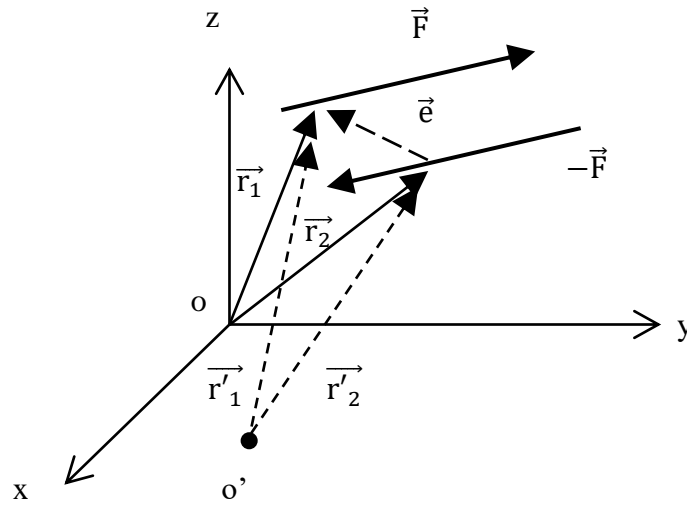
$$|\vec{M}_{aa}| = d * |\vec{F}_A|$$

2.4. Kuvvet Çifti Momenti



Şekil 2.7.

Ters yönde eşit şiddette paralel iki kuvvet bir kuvvet çifti oluşturur. Bunun hiç itme çekme etkisi yoktur. Yalnız döndürme etkisi vardır. Bu etkiye kuvvet çifti momenti denir.



Şekil 2.8.

$$\vec{r}_2 + \vec{e} = \vec{r}_1 \quad \vec{e} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

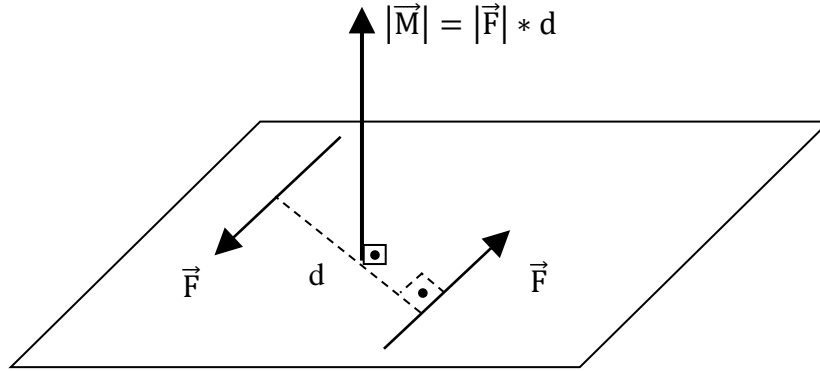
$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{e} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}'_2 + \vec{e} = \vec{r}'_1 \quad \vec{e} = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$$

$$\vec{M}_{0'} = \vec{r}'_1 \times \vec{F} + \vec{r}'_2 \times (-\vec{F}) = \vec{r}'_1 \times \vec{F} - \vec{r}'_2 \times \vec{F} = (\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2) \times \vec{F} = \vec{e} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_{0'} = \vec{M}_0$$

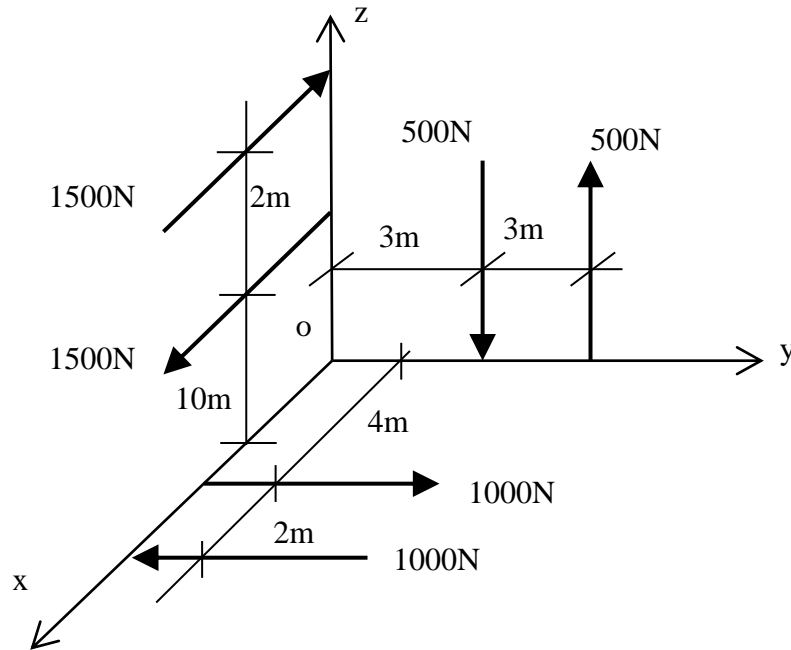
SONUÇ: Kuvvet çifti moment vektörü rijit cisim mekaniğinde serbest vektördür.



Şekil 2.9.

Kuvvet çiftlerini toplamak için kuvvet çifti momentlerini serbest vektör olarak toplamak yeterlidir.

ÖRNEK



Şekil 2.10.

Verilen sistemin kuvvet çifti momentini bulunuz. C(3, 4, 2) noktasına göre momenti nedir? Bu kuvvet sisteminin $\vec{r}_C = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ yer vektörü etrafındaki momenti nedir? Toplam kuvvet nedir?

$$\vec{M} = (500 * 3)\vec{i} - (1500 * 2)\vec{j} - (1000 * 2)\vec{k} = 1500\vec{i} - 3000\vec{j} - 2000\vec{k} \text{ (N.m)}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_c$$

Bir kuvvetin bir eksen etrafındaki moment vektörünün şiddetini bulmak için kuvvetin o eksen üzerindeki herhangi bir noktaya göre momenti alınır ve bu sonuç eksen doğrultusundaki birim vektör ile skaler çarpılır. Moment vektörü ise şiddet ile birim vektörün çarpımı ile bulunur.

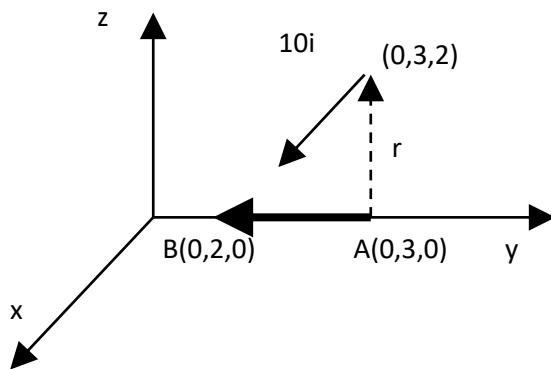
$$\vec{M}_c \text{ bulunmuştu.} \quad |\vec{M}_r| = \vec{u}_r \circ \vec{M}_c$$

$$|\vec{M}_r| = \left(\frac{3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}} \right) \circ (1500\vec{i} - 3000\vec{j} - 2000\vec{k}) = -\frac{11500}{\sqrt{29}} \text{ (N.m)}$$

$$\vec{M}_r = -\frac{11500}{\sqrt{29}} \left(\frac{3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}} \right) = -\frac{11500}{29} (3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) \text{ (N.m)}$$

Toplam kuvvet=0

ÖRNEK

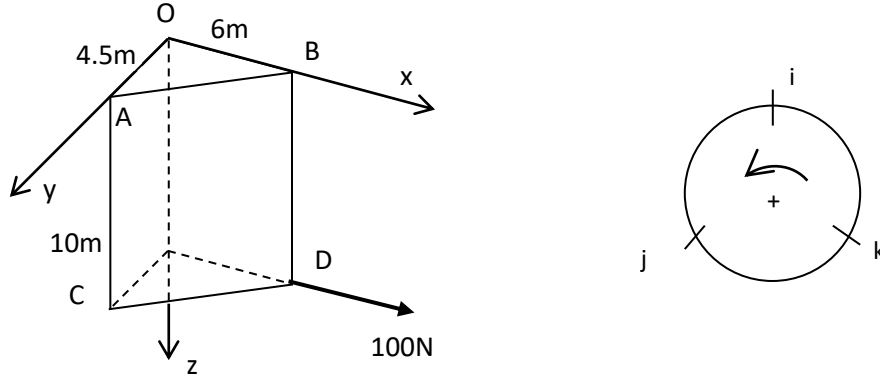


A-B eksenini etrafındaki moment ?

$$M_A = 2k \times 10i = 20j$$

$$M_{A-B} = (20j) \circ (-j) = -20$$

$$M_A = -20(-j) = 20j$$

ÖRNEK

Şekil 2.11.

100 Newton luk kuvvetin AB eksenine etrafındaki momenti nedir?

$$A(0, 4.5, 0) \quad B(6, 0, 0)$$

$$\vec{F} = 100\vec{i} \text{ N}$$

$$\vec{r}_{BD} = 10\vec{k} \text{ m (B'ye göre konum vektörü)}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{BD} \times \vec{F} = 10\vec{k} \times 100\vec{i} = 1000\vec{j} \text{ (N.m) (B'ye göre moment vektörü)}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{6\vec{i} - 4.5\vec{j}}{\sqrt{6^2 + (-4.5)^2}} = 0.8\vec{i} - 0.6\vec{j} \quad |\vec{M}_{AB}| = (0.8\vec{i} - 0.6\vec{j}) \cdot 1000\vec{j} = -600 \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_{AB} = -600 * (0.8\vec{i} - 0.6\vec{j}) = -480\vec{i} + 360\vec{j} \text{ N.m}$$

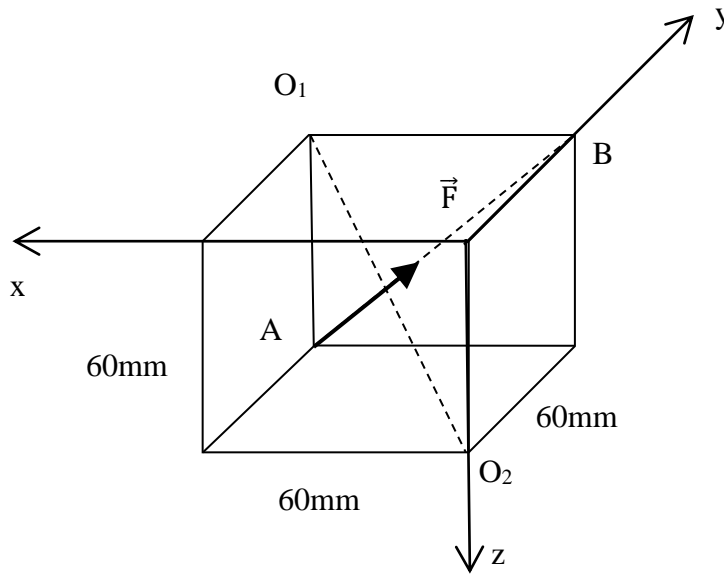
II. yol

A'ya göre moment

$$\vec{M}_A = (6\vec{i} - 4.5\vec{j} + 10\vec{k}) \times 100\vec{i} = 1000\vec{j} + 450\vec{k}$$

$$|\vec{M}_{AB}| = (0.8\vec{i} - 0.6\vec{j}) \cdot (1000\vec{j} + 450\vec{k}) = -600 \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_{AB} = -600 * (0.8\vec{i} - 0.6\vec{j}) = -480\vec{i} + 360\vec{j} \text{ N.m}$$

ÖRNEK

Şekil 2.12.

A'dan B'ye giden A noktasındaki 100 N'luk kuvvetin O_1 - O_2 eksenini etrafındaki momenti nedir?

$$\vec{F} = 100 \frac{-\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{r}_{O_1} = 60\vec{k} \text{ (O}_1\text{'e göre konum vektörü)}$$

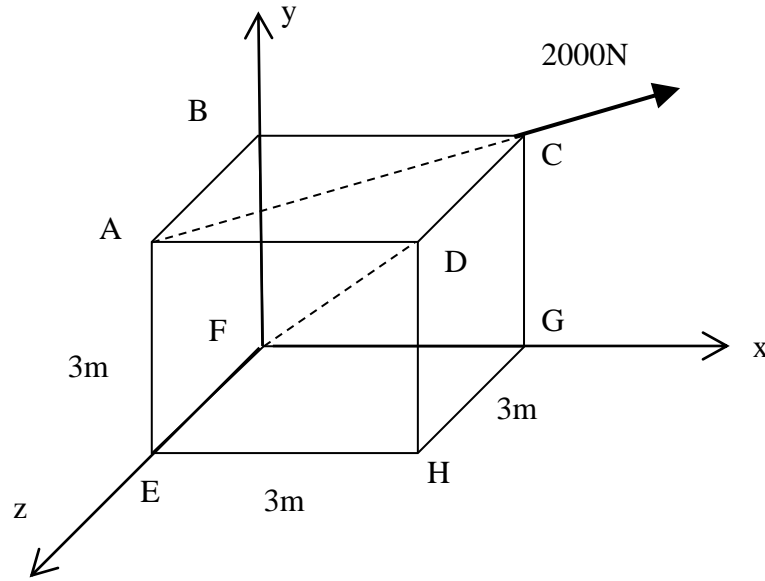
$$\vec{u}_{O_1-O_2} = \frac{-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{r}_{O_1} \times \vec{F} \text{ O}_1\text{'e göre moment vektörü}$$

$$|\vec{M}_{O_1-O_2}| = \vec{u}_{O_1-O_2} \circ \vec{M}_{O_1} = \vec{u}_{O_1-O_2} \circ (\vec{r}_{O_1} \times \vec{F}) \text{ (3 lü çarpım)}$$

$$|\vec{M}_{O_1-O_2}| = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 60 \\ -\frac{100}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{100}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{100}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 60 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2449,5 \text{ N.mm}$$

$$\vec{M}_{O_1-O_2} = |\vec{M}_{O_1-O_2}| * \vec{u}_{O_1-O_2} = 2449,5 \left(\frac{-\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{2449,5\vec{i}}{\sqrt{3}} - \frac{2449,5\vec{j}}{\sqrt{3}} + \frac{2449,5\vec{k}}{\sqrt{3}} \text{ N.mm}$$

ÖRNEK

Şekil 2.13.y

2000 N'luk kuvvetin F-D eksenini etrafındaki momentini bulunuz

$$\vec{F} = 2000 \frac{\vec{i} - \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{r}_{FC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} \text{ (F'e göre konum vektörü)}$$

$$\vec{u}_{FD} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{M}_F = \vec{r}_{FC} \times \vec{F} \text{ F'ye göre moment vektörü}$$

$$|\vec{M}_{FD}| = \vec{u}_{FD} \cdot \vec{M}_F = \vec{u}_{FD} \cdot (\vec{r}_{FC} \times \vec{F}) \text{ (3 lü çarpım)}$$

$$|\vec{M}_{FD}| = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 3 & 3 & 0 \\ \frac{2000}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2000}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{2000}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1000\sqrt{6} \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_{FD} = |\vec{M}_{FD}| \vec{u}_{FD} = -1000\sqrt{2} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -1000\sqrt{2} \vec{i} - 1000\sqrt{2} \vec{j} - 1000\sqrt{2} \vec{k} \text{ N.m}$$