Olasılık Kavramı

Mühendislikte İstatistik Metotlar

Çukurova Üniversitesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

1

OLASILIK KAVRAMI

KÜME KAVRAMI

- Birlikte ele alınan belirli nesneler topluluğuna **küme**,
- Kümede içerilen nesnelere de **eleman**, **öğe** veya **üye** denir.
- Kümenin elemanları (öğeleri, üyeleri) kesin bir şekilde tanımlanmış olmalıdır.

- S = {s : Türkçe'deki sesli harf} S = {a, e, ı, i, o, ö, u, ü}
- $a \in S$ (a, S kümesinin bir öğesidir)
- $b \notin S$ (a, S kümesinin bir öğesi değildir)

2

OLASILIK KAVRAMI

- Z = {z : Zar atışı sırasında görülen sayıların kümesi}
- Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

- $1 \in Z$ (1, Z kümesinin bir öğesidir)
- $7 \notin Z$ (7, Z kümesinin bir öğesi değildir)

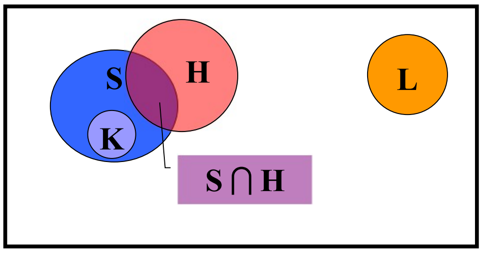
OLASILIK KAVRAMI

KÜME KAVRAMI

- Hiç bir elemanı olmayan küme **boş küme** olarak adlandırılır ve **Ø** işareti ile gösterilir.
- Bir kümenin bütün elemanları diğer bir kümenin de elemanları ise ilk küme ikinci kümenin bir **alt kümesi** 'dir denir ve $\subset$ işareti ile gösterilir.
- İki kümenin her ikisinde de bulunan elemanların oluşturduğu küme bu iki kümenin **arakesiti (kesişimi)** dir ve $\cap$ işareti ile gösterilir.
- İki kümenin ortak elemanı yoksa bu kümelere **ayrık kümeler** denilir ve boş küme **$L \cap S = Ø$** ile gösterilir.
- İki kümeden en az birinde bulunan elemanlardan oluşan kümeye bu iki kümenin **bileşimi** denir ve $\cup$ ile gösterilir.

KÜME KAVRAMI

- Kümeler arası ilişkiler **Venn Diyagramı** ile gösterilir:

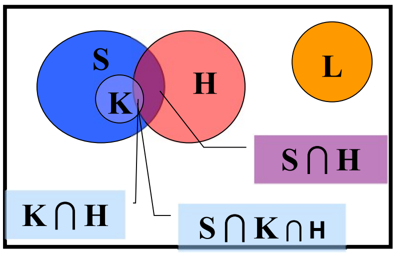


- **K ⊂ S L ⋂ S = Ø H ⊄ S S ⋂ H**

KÜME KAVRAMI

- S = {s : Türkçe'deki sesli harf} S = {a, e, ı, i, o, ö, u, ü}
- K = {k : Türkçe'deki kalın sesli harfler} K = {a, ı, o, u}
- H = {h : Türkçe'deki ilk 6 harf} H = {a, b, c, ç, d, e}
- L = {l : Türkçe'deki son 3 harf } L = {v, y, z}

- **L ⋂ S = Ø**
- **K ⊂ S**
- **H ⊄ S**
- **K ⋂ H = {a}**
- **S ⋂ H = {a, e}**
- **S ⋃ H = {a, e, ı, i, o, ö, u, ü, b, c, ç, d**



OLASILIK KAVRAMI

- Olasılık teorisinde bir rastgele olayın meydana gelmesi şansı **olasılık** (**ihtimal**) olarak adlandırılır.
- Rastgele değişken **X** ile, rastgele değişkenin bir gözlem sırasında aldığı değeri **x** ile gösterirsek, $X = x_i$ rastgele olayının olasılığı p_i olur.

$$P\ (X = x_i) = p_i \qquad\qquad 0 \leq p_i \leq 1$$

- p_i olasılığının değeri **0** ile **1** arasında değişir.
- Olasılığın **0** olması sözkonusu olayın hiçbir zaman meydana gelmeyeceğini, **1** olması ise kesinlikle (her gözlemde) meydana geleceğini gösterir.
- Olasılık **0** dan **1** e doğru arttıkça gözlemler sırasında o olayın görülme şansı artar, yani olayla saha sık karşılaşılır.

OLASILIK KAVRAMI

- Örnek: Bir zar atışında 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 sayılarından herbirinin görülme olasılığı 1/6 dır.

$$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = 1/6$$

$$P(X=0) = P(X=7) = 0$$

- **1** ile **6** arasında herhangi bir sayı görülmesi olasılığı **1** dir.

$$P(X=1 \cup X=2 \cup X=3 \cup X=4 \cup X=5 \cup X=6) = 6(1/6) = 1$$

OLASILIK KAVRAMI

- 3 veya daha büyük bir sayı görülmesi olasılığı:
- **Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**
- **Z = {**1, 2, **3, 4, 5, 6}**

P(X ≥ 3) = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3 veya

P(X ≥ 3) = 4(1/6)= 4/6 = 2/3 dır.

- 3 ten küçük bir sayının görülmesi olasılığı:
- **Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**
- **Z = {1, 2,** 3, 4, 5, 6**}**

P(X < 3) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3 veya **P(X < 3) = 2(1/6)= 2/6 = 1/3** dır.

OLASILIK KAVRAMI

- Hileli bir zarda çift sayı gelmesi olasılığı, tek sayı gelmesi olasılığının iki katı ise:
- **Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6}**

P(X =1) = P(X =3) = P(X =5) = p

P(X =2) = P(X =4) = P(X =6) =2 p

3(p) + 3(2p) = 1 ⇒ 3p + 6p = 1 ⇒ p = 1/9

P(X =1) = P(X =3) = P(X =5) = 1/9

P(X =2) = P(X =4) = P(X =6) =2/9

OLASILIK KAVRAMI

- Bir olayın olasılığı, gözlem sayısının sonsuza gitmesi halinde frekansının limit değeri olarak hesaplanır.

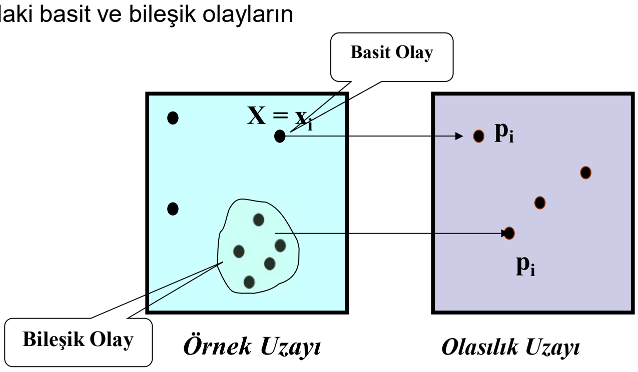
$$p_i = \lim_{N \to \infty} \frac{n_i}{N}$$

- Örneğin, **1500** gün boyunca yapılan gözlemlerde **600** gün yağış düşmediği gözlenmişsse, bu ölçekte günlük yağış yüksekliğinin **0** olması olasılığı:

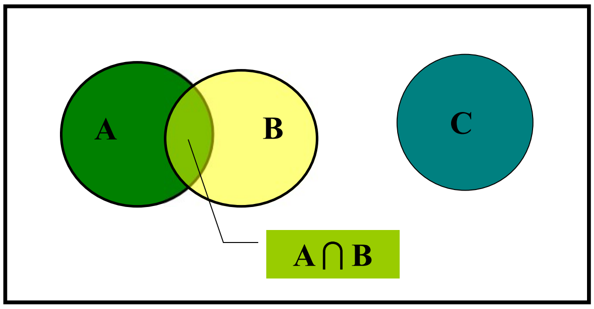
$$\mathbf{P\,(\,X = 0\,) = 600\,/\,1500 = 0.40 = \%\;40}$$

BASİT VE BİLEŞİK RASTGELE OLAYLARIN OLASILIKLARI

- Bir rastgele değişkenin gözlemlerde alabileceği değerlerin tümünden oluşan küme o değişkenin ***örnek uzayı'***nı oluşturur.
- Sadece bir gözlem sırasında rastgele bir değişkenin belirli bir değeri alması ***basit rastgele olay***'dır.
- Birden fazla rastgele olayın bileşiminden oluşanlar ise ***bileşik rastgele olaylar'***dır.
- Örnek uzayındaki basit ve bileşik olayların



BASİT VE BİLEŞİK RASTGELE OLAYLARIN OLASILIKLARI

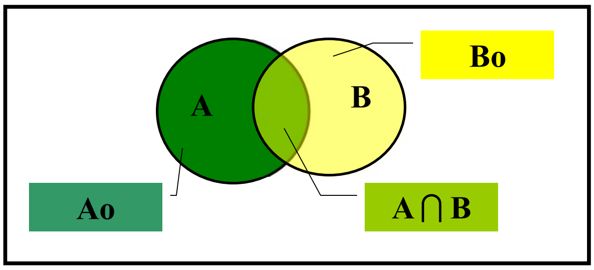


Ayrık iki olayın olasılığı: $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

Ayrık olmayan olayların bileşiminin olasılığı:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

BASİT VE BİLEŞİK RASTGELE OLAYLARIN OLASILIKLARI



Ayrık olmayan olayların bileşiminin olasılığı:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A_0) \qquad P(B) = P(A \cap B) + P(B_0)$$

$$P(A \cup B) = P(A_0) + P(B_0) + P(A \cap B)$$

İKİ BOYUTLU VE KOŞULLU ÖRNEK UZAYI

- **X** ve **Y** gibi iki rastgele değişken bir arada düşünülürse iki boyutlu örnek uzayından söz edilebilir.
- Bir gözlemde **X** rastgele değişkeni için $\mathbf{X = x_i}$ olayı meydana gelirken aynı gözlemde **Y** rastgele değişkeni için $\mathbf{Y = y_j}$ olayı görülüyorsa ($\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_j}$) gözlem çifti iki boyutlu örnek uzayında bir noktayı ifade eder.
- Koşullu örnek uzayı, verilen bir $\mathbf{Y=y_j}$ olayının meydana gelmesi koşuluyla gözlenen $\mathbf{X = x_i}$ olayları yeni bir tek boyutlu örnek uzayı oluşturur, bu koşullu örnek uzayıdır. Buradaki olaylar ($\mathbf{X=x_i \mid Y=y_j}$) şeklinde ifade edilir.

İKİ BOYUTLU VE KOŞULLU ÖRNEK UZAYI

Koşullu örnek uzayının hesabı:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0 \text{ için}$$

Denklem yeniden düzenlenirse:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$$

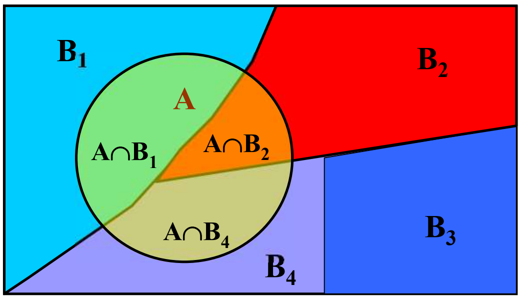
Denklem 3 veya daha fazla olay için yazılırsa:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C) \times P(B \mid C) \times P(C)$$

A ve B olayları olasılık açısından bağımsız ise denklem:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

TOPLAM OLASILIK KURALI



A olayının olasılığı: $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap Bn)$

A ve **B** olayları ayrık olaylar olduğundan: $P(A \cap B_i) = P(A \mid B_i) \times P(B_i)$

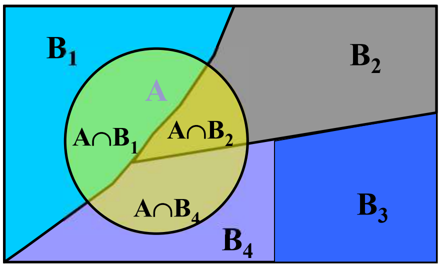
Bu ifadeler önceki denklemde yerine konursa:

$$P(A) = P(A \mid B_1) \times P(B_1) + P(A \mid B_2) \times P(B_2) + ... + P(A \mid B_n) \times P(Bn) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \times P(B_i)$$

TOPLAM OLASILIK KURALI VE BAYES TEOREMİ

Toplam Olasılık Kuralı:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \times P(B_i)$$



Toplam olasılık teoremi kullanılarak, rastgele değişkene ait olayların olasılıkları için önceki deneyimlerimize dayanarak yaptığımız tahminleri daha sonra yapılan gözlemlerin sonuçlarına göre düzeltmekte kullanılan ***Bayes kuralı*** tanımlanabilir:

Bayes Teoremi:

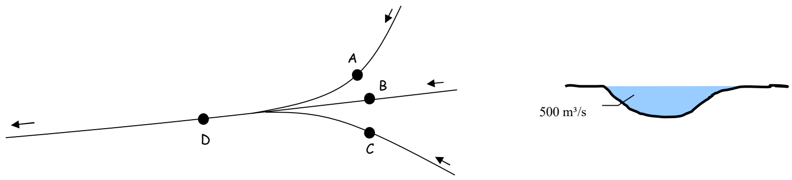
$$P(B_k \mid A) = \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \times P(B_i)}$$

ÖRNEK 1)

Bir akarsuyun 3 kolunun (A, B, C) birleştiği noktanın aşağısındaki bir D kesitinde, taşkın olayının kollardan herhangi birinde debinin 500 m^3/s 'yi aşması durumunda meydana geldiği kabul edilmektedir. Akarsuyun kollarındaki akışlar birbirleriyle bağımlı olup;

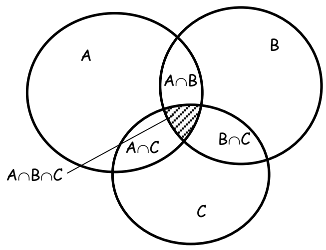
- A, B, C kollarında debinin 500 m^3/s 'yi aşması olasılıkları sırası ile %20, %30 ve %40;
- debinin hem A hem de B de 500 m^3/s 'yi aşması olasılığı %10;
- debinin hem A hem de C de 500 m^3/s 'yi aşması olasılığı %15;
- debinin hem B hem de C de 500 m^3/s 'yi aşması olasılığı %20 ve
- debinin hem her üç kolda 500 m^3/s 'yi aşması olasılığı ise %5 tir.

D Kesitinde taşkın görülmesi olasılığını hesaplayınız.



ÇÖZÜM 1)

P(A) = 0.20
P(B) = 0.30
P(C) = 0.40
P(A∩B) = 0.10
P(B∩C) = 0.20
P(A∩C) = 0.15
P(A∩B∩C) = 0.05

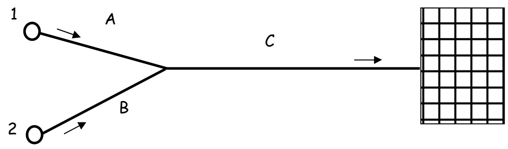


$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cup B \cup C) = 0.20 + 0.30 + 0.40 - 0.10 - 0.20 - 0.15 + 0.05 = 0.50 =$ **%50**

ÖRNEK 2)

Bir şehire 1 ve 2 gibi iki kaynaktan su iletilmektedir. A, B, C borularında arıza görülmesi olasılıkları sırası ile % 15, % 10 ve %2 dir. Şehrin tamamen susuz kalması olasılığını hesaplayınız.



ÇÖZÜM 2)

Şehrin tamamen susuz kalması için ya A ve B borulularının ikisi de arızalanmalı ya da C borusu arızalanmalıdır.

A => $(A \cap B)$ B => $P(C)$

$P((A \cap B) \cup C) = ?$

$P(A \cap B) = 0.15 \times 0.10 = 0.015$ (bağımsız olaylar oldukları için)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

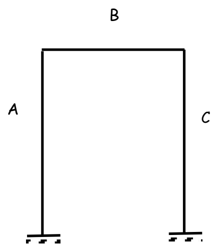
$P((A \cap B) \cup C) = P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap B) \cap C)$

$P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B) \times P(C) = 0.015 \times 0.02 = 0.0003$

$P((A \cap B) \cup C) = 0.015 + 0.02 - 0.0003 = 0.0347 \cong \%\ 3{,}5$

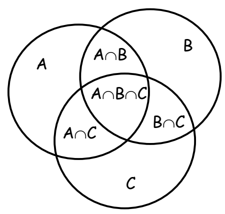
ÖRNEK 3)

Bir çerçeve A,B,C gibi 3 elemandan oluşmaktadır. Bu elemanların tahrip olma olasılıkları sırası ile %5, % 4, ve %3 tür. Çerçevenin çökme olasılığını hesaplayınız.



ÇÖÜM 3)

P(A) = 0.05
P(B) = 0.04
P(C) = 0.03



- Elemanların hasar görme olasılıkları birbirinden bağımsızdır.
- Elemanlardan herhangi biri çöktüğünde çerçeve çökmüş sayılır.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ÇÖZÜM 3)

Olaylar bağımsız olduğundan;

$P(A \cap B) = 0.05 \times 0.04 = 0.002$
$P(A \cap C) = 0.05 \times 0.03 = 0.0015$
$P(B \cap C) = 0.04 \times 0.03 = 0.0012$
$P(A \cap B \cap C) = 0.05 \times 0.04 \times 0.03 = 0.00006$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A \cup B \cup C) = 0.05 + 0.04 + 0.03 - 0.002 - 0.0015 - 0.0012 + 0.00006 = 0.116 =$ **% 12**

ÖRNEK 4)

Bir sınıftaki öğrencilerin % 25 i matematik, % 15 i kimya, % 10 u da hem matematik hem de kimya derslerinden kalmışlardır.

a) Öğrencinin kimyadan kalmış ise matematikten de kalma olasılığını,
b) Öğrencinin matematikten kalmış ise kimyadan da kalma olasılığını,
c) Öğrencinin matematikten ya da kimyadan kalma olasılığını hesaplayınız

ÇÖZÜM 4)

M = {matematikten kalan öğrenciler} K = {kimyadan kalan öğrenciler}

$P(M) = 0.25$
$P(K) = 0.15$
$P(M \cap K) = 0.10$

a) $P(M \mid K) = \dfrac{P(M \cap K)}{P(K)} = \dfrac{0.10}{0.15} = 0.67 \cong \%67$

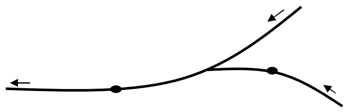
b) $P(K \mid M) = \dfrac{P(M \cap K)}{P(M)} = \dfrac{0.10}{0.25} = 0.40 \cong \%40$

c) $P(M \cup K) = P(M) + P(K) - P(M \cap K) = 0.25 + 0.15 - 0.10 = 0.30 = \% 30$

ÖRNEK 5)

Bir akarsuyun yan kolundaki su seviyesinin çeşitli değerlerinde akarsuyun kendisindeki debinin alacağı değerlerin olasılıkları aşağıda verilmiştir. Akarsudaki debinin 200 – 300 m^3/s arasında kalması olasılığını hesaplayınız.

Koldaki		Akarsudaki Debi (m^3/s) ve olasılığı			
Su Seviyesi	Olasılığı	0 – 100	100 - 200	200 – 300	>300
0 – 1.5	0.10	0.50	0.35	0.15	0
1.5 – 2. 5	0.20	0.40	0.30	0.25	0.05
2.5 – 3.5	0.30	0.25	0.30	0.35	0.10
3.5 – 4.5	0.25	0.10	0.25	0.45	0.20
> 4.5	0.15	0	0.10	0.40	0.50



ÇÖZÜM 5)

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B)$$

$P(200 \le Q \le 300 \cap 0 \le h \le 1.5) = P(200 \le Q \le 300 \mid 0 \le h \le 1.5) \times P(0 \le h \le 1.5) = 0.15 \times 0.10 = 0.02$

$P(200 \le Q \le 300 \cap 1.5 \le h \le 2.5) = P(200 \le Q \le 300 \mid 1.5 \le h \le 2.5) \times P(1.5 \le h \le 2.5) = 0.25 \times 0.20 = 0.05$

$P(200 \le Q \le 300 \cap 2.5 \le h \le 3.5) = P(200 \le Q \le 300 \mid 2.5 \le h \le 3.5) \times P(2.5 \le h \le 3.5) = 0.35 \times 0.30 = 0.11$

$P(200 \le Q \le 300 \cap 3.5 \le h \le 4.5) = P(200 \le Q \le 300 \mid 3.5 \le h \le 4.5) \times P(3.5 \le h \le 4.5) = 0.45 \times 0.25 = 0.11$

$P(200 \le Q \le 300 \cap >4.5) = P(200 \le Q \le 300 \mid h>4.5) \times P(h>4.5) = 0.40 \times 0.15 = 0.06$

$P(200 \le Q \le 300) = 0.02 + 0.05 + 0.11 + 0.11 + 0.06 = 0.35 =$ **% 35**

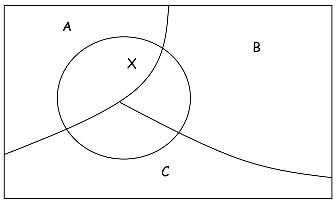
ÖRNEK 6)

Bir tuğla fabrikasının A,B ve C gibi üç farklı üretim ünitesi vardır. Tuğla fabrikasında üretilen tuğlaların % 50 'si A, % 30 'si B ve % 20 'si C ünitesinde üretilmektedir. Bu üniteler sırasıyla %3, %4 ve %5 oranında kalitesiz ürün vermektedir.

a) Rastgele seçilen bir tuğlanın kalitesiz olma olasılığı nedir.
b) Rastgele seçilen kalitesiz tuğlanın A ünitesinde üretilmiş olma olasılığı nedir.

ÇÖZÜM 6)

X = {Tuğlanın kalitesiz olması}



ÇÖZÜM 6)

a)

Toplam olasılık kuralına göre

P(X) = P(A) × P(X|A) + P(B) × P(X|B) + P(C) × P(X|C)

P(X) = (0.50×0.03) + (0.30×0.04) + (0.20×0.05) = 0.037 = **% 37**

b)

Bayes kuralına göre;

$$P(A|X) = \frac{P(A)\times P(X|A)}{P(A)\times P(X|A) + P(B)\times P(X|B) + P(C)\times P(X|C)}$$

$$P(A|X) = \frac{0.50\times 0.03}{0.037} = 0.41 \cong \%\ 41$$

ÖRNEK 7)

Bir taş ocağından alınan malzemenin iyi kaliteli olması olasılığı **%70**, düşük kaliteli olması olasılığı ise **% 30** olarak önceden tahmin edilmiştir. Daha önce yapılan bu tahminleri güvenilir hale getirmek için ocaktan bir örnek alınarak kalitesinin belirlenmesine karar verilmiştir. Ancak kalite testi tam güvenilir değildir. Daha önceki deneyimlere göre iyi kaliteli bir örneğin testi geçme olasılığı **% 80**, düşük kaliteli bir örneğin testi geçme olasılığı **% 10** dur.

Rastgele alınan bir örneğin kalite testini geçmesi halinde malzemenin iyi kaliteli olması olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM 7)

B1 = {malzemenin iyi kaliteli olması}
B2 = {malzemenin düşük kaliteli olması}
A = {testi geçmesi}

P(B1) = 0.70
P(B2) = 0.30
P(A|B1) = 0.80
P(A|B2) =0.10

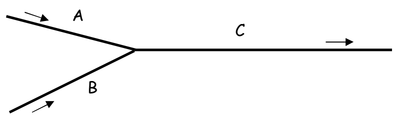
$$P(B1\,|\,A) = \frac{P(A\,|\,B1)\times P(B1)}{P(A\,|\,B1)\times P(B1) + P(A\,|\,B2)\times P(B2)}$$

$$P(B1\,|\,A) = \frac{0.80\times 0.70}{(0.80\times 0.70)+(0.10\times 0.30)} = 0.95 = \%95$$

ÖRNEK 8)

Şekilde verilen yol sisteminde *A* ve B yollarının tıkanma olasılıkları sırayla % 10 ve % 20 dir. Bu yolların tıkanma olasılıkları birbirleriyle bağımlı olup B tıkalı iken *A* nın tıkanması olasılığı % 50, *A* tıkalı iken B nin tıkanma olasılığı % 100 dür. *A* ve B yollarından herhangi biri tıkandığında *C* yolu da tıkanmaktadır. Ayrıca *A* ve B yollarının her ikisinin de açık olması halinde *C* yolunun tıkanması olasılığı % 20 dir.

Bu durumda *C* yolunun tıkanma olasılığı nedir.



ÇÖZÜM 8)

A = {A nın kapalı olması}
$\underline{A}$ = {A nın açık olması}
B = {B nin kapalı olması}
$\underline{B}$ = {B nin açık olması}

$P(A) = 0.10$
$P(B) = 0.20$
$P(A|B) = 0.50$
$P(B|A) = 1.00$
$P(C|A\cap B) = P(C|\underline{A}\cap B) = P(C|A\cap \underline{B}) = 1.00$

Problem Toplam Olasılık Teoremi ile çözülebilir.

Aşağıdaki dört durumdan biri mutlaka gerçekleşir:

ÇÖZÜM 8)

1. A ve B yolları birlikte tıkanabilir.

   $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A) = 0.50 \times 0.20 = 1.00 \times 0.10 = \mathbf{0.10}$

2. A açık B tıkalı olabilir

   $P(\underline{A} \cap B) = P(\underline{A}|B) \times P(B) = (1.00 - 0.50) \times 0.20 = \mathbf{0.10}$

3. A tıkalı B açık olabilir

   $P(A \cap \underline{B}) = P(\underline{B}|A) \times P(A) = (1.00 - 1.00) \times 0.10 = \mathbf{0.00}$

4. A ve B açık olabilir.

   $P(\underline{A} \cap \underline{B}) = 1.00 - (P(A \cap B) + P(\underline{A} \cap B) + P(A \cap \underline{B})) = 1.00 - (0.10 + 0.10 + 0.00) = \mathbf{0.80}$

$P(C) = P(C|A \cap B) \times P(A \cap B) + P(C|\underline{A} \cap B) \times P(\underline{A} \cap B) + P(C|A \cap \underline{B}) \times P(A \cap \underline{B}) + P(C|\underline{A} \cap \underline{B}) \times P(\underline{A} \cap \underline{B})$

$P(C) = (1.00 \times 0.10) + (1.00 \times 0.10) + (1.00 \times 0.00) + (0.20 \times 0.80) = 0.36 = \% 36$