Çukurova Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

İMZ217
DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Prof. Dr. Hüseyin R. YERLİ

İMZ217
DİFERANSİYEL DENKLEMLER

BÖLÜM 1
GİRİŞ

HATIRLATMALAR

Fonksiyonlar: **Değişkenler arasındaki ilişkileri temsil eden eşitliklerdir.**

$\boldsymbol{x}$ **: Bağımsız değişken**

$\boldsymbol{y}$ **: Bağımlı değişken**

Eğer bir fonksiyon, $\boldsymbol{F(x,y)=0}$ **şeklinde yazılıyor ise bu ifadeye** $\boldsymbol{y}$**'nin kapalı fonksiyonu denir.**

Eğer $\boldsymbol{F(x,y)=0}$ **ifadesi,** $\boldsymbol{y=f(x)}$ **şeklinde yazılırsa bu ifadeye de** $\boldsymbol{y}$**'nin açık fonksiyonu denir.**

Fonksiyonun Türevleri

$y = f(x)$ şeklindeki tek değişkenli fonksiyonlarda türevler aşağıdaki gibidir.

$$\underbrace{y' = \frac{dy}{dx}}_{\text{1. türev}} \qquad \underbrace{y'' = \frac{d^2y}{dx^2}}_{\text{2. türev}} \qquad \underbrace{y''' = \frac{d^3y}{dx^3}}_{\text{3. türev}} \qquad \cdots$$

Tek değişkenli fonksiyonların türevlerine "Adi Türev" denir.

$z = f(x, y)$ şeklindeki çok değişkenli fonksiyonlarda türevler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad \cdots$$

Çok değişkenli fonksiyonların türevlerine "Kısmi Türev" denir.

Bağımlı bir değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre n'ninci türevine, n'ninci mertebe türev denir.

$$\frac{d^3y}{dx^3} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} \quad \rightarrow$$ **3. mertebe türevler**

TANIMLAR

Diferansiyel Denklem

Bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini de içeren ifadelere "diferansiyel denklem" denir.

Diferansiyel denklemler, türevlerin türüne bağlı olarak 2 gruba ayrılırlar.

1) **Adi Diferansiyel Denklemler**

2) **Kısmi Diferansiyel Denklemler**

1) Adi Diferansiyel Denklem

Diferansiyel denklemin içerdiği türevler adi türevler ise (tek değişkenli fonksiyonların türevi), bu denkleme "Adi Diferansiyel Denklem" denir.

ÖRNEK:

$$2\,x\,y'' + (y')^2 = \frac{1}{y} + 2\,x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - y^3 = Tan(x)$$

$$\left(\frac{d^4s}{dt^4}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^5 + \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 = 0$$

2) Kısmi Diferansiyel Denklem

Denklemin içerdiği türevler kısmi türevler ise (çok değişkenli fonksiyonların türevi), bu denkleme "Kısmi Diferansiyel Denklem" denir.

ÖRNEK:

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} - 3\,x\,y + 4\,z\,Sec(y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Diferansiyel Denklemin Mertebesi

Denklemdeki en yüksek mertebeli türevin mertebesine eşittir.

Diferansiyel Denklemin Derecesi

Denklemdeki türevler, eğer varsa, kökten çıkarıldıktan sonra, içerdiği en yüksek mertebeden türevin üssüne (derecesine) eşittir. Bununla birlikte, her diferansiyel denklemin derecesi olmayabilir.

ÖRNEK:

$(y'')^2 + (y')^3 + 3\,y = x^2$ ⇨ **2. Mertebe, 2. Derece Adi D.D.**

$y''' + 2(y'')^2 + y' = Cos(x)$ ⇨ **3. Mertebe, 1. Derece Adi D.D.**

ÖRNEK:

$$\left.\begin{aligned}(y'')^{2/3} &= 1 + y' \\ (y'')^{2} &= (1 + y')^{3}\end{aligned}\right\}$$ **2. Mertebe, 2. Derece Adi D.D.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow$$ **2. Mertebe, 1. Derece Kısmi D.D.**

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^6 = x \quad \Rightarrow$$ **4. Mertebe, 1. Derece Kısmi D.D.**

$$y'' + (y')^2 = Ln(y'') \quad \Rightarrow$$ **2. Mertebe Adi D.D.**
Derecesi belirsiz !!!!

Lineer ve Nonlineer Diferansiyel Denklem: Bir diferansiyel denklemde

1) Bağımlı değişken ve türevleri birinci dereceden ise,

2) Bağımlı değişken ile türevlerinin birbirleriyle çarpımı yok ise,

"Lineer" aksi halde "Nonlineer (Lineer Olmayan)" diferansiyel denklem denir.

ÖRNEK:

$x\,y'' + 2y' + 3y - 6e^{x} = 0$ ⇨ Lineer Adi D.D.

$y' = 1 + x\,y^{2}$ ⇨ Nonlineer Adi D.D.

$(y')^{2} - x\,y' + y = 0$ ⇨ Nonlineer Adi D.D.

$y' \cdot y'' + 8y = x^{2}$ ⇨ Nonlineer Adi D.D.

$\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}} + y\,\dfrac{dy}{dx} = 1$ ⇨ Nonlineer Adi D.D.

BÖLÜM 2
DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bir diferansiyel denklemin çözümünü bulmak, denklemin mertebesi kadar türevi alınabilen, açık veya kapalı bir fonksiyon bulmak demektir.

Çözüm olarak bulunan fonksiyon ve türevleri diferansiyel denklemde yerine konduğunda eşitlik sağlanmalıdır.

Diferansiyel denklemin, birisi "Genel Çözüm" diğeri de "Özel Çözüm" olmak üzere iki çözümü bulunmaktadır.

GENEL ÇÖZÜM: Bir diferansiyel denklemin sonsuz sayıda çözümü olabilir. Bu çözüm, denklemin mertebesi kadar integrasyon sabiti içeren bir formül ile temsil edilir. Bu formüle "Diferansiyel Denklemin Genel Çözümü" denir.

$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ şeklindeki n'ninci mertebe bir diferansiyel denklemin genel çözümü, $F(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0$ kapalı fonksiyonu veya $y = f(x, C_1, \cdots, C_n)$ açık fonksiyonu şeklinde n adet integrasyon sabiti içerir.

ÖRNEK: $y'' = 20\,x^3 \Rightarrow y' = 5\,x^4 + C_1 \Rightarrow y = x^5 + C_1\,x + C_2$

ÖZEL ÇÖZÜM: Diferansiyel denklemin genel çözümünde yer alan integrasyon sabitlerine (C_i) sayısal değerler verilerek elde edilen ifadelere, "Diferansiyel Denklemin Özel Çözümü" denir.

ÖRNEK: $y' = Cos(x)$ diferansiyel denklemi göz önüne alınmış olsun.

Diferansiyel denklemin genel çözümü $y = Sin(x) + C_1$ şeklinde elde edilir.

Bu durumda diferansiyel denklemin özel çözümleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$C_1 = 1 \Rightarrow y = Sin(x) + 1$$

$$C_1 = 2 \Rightarrow y = Sin(x) + 2$$

$$\vdots$$

ÖRNEK: $y' = y$ diferansiyel denklemi göz önüne alınmış olsun.

Diferansiyel denklemin genel çözümü $y = C_1\, e^x$ şeklinde elde edilir.

Bu durumda diferansiyel denklemin özel çözümleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$C_1 = 1 \Rightarrow y = e^x$

$C_1 = 2 \Rightarrow y = 2\, e^x$

$C_1 = -1 \Rightarrow y = -e^x$

$C_1 = -2 \Rightarrow y = -2\, e^x$

$\vdots$

GENEL ÇÖZÜMÜN KONTROLÜ

Bir diferansiyel denklemin genel çözümünün doğruluğunu kontrol etmek için, bulunan genel çözüm ifadesi diferansiyel denklemde yerine konur. Eğer denklem sağlanırsa, bulunan çözümün doğru olduğuna kanaat getirilir.

ÖRNEK: $y'' - 4\,y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünün,
$y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-2x}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$y' = 2\,C_1\,e^{2x} - 2\,C_2\,e^{-2x} \;\Rightarrow\; y'' = 4\,C_1\,e^{2x} + 4\,C_2\,e^{-2x}$$

Yukarıda görülen y ve y'' diferansiyel denklemde yerine yazılacaktır.

$$y'' - 4\,y = 0 \;\Rightarrow\; \left(4\,C_1\,e^{2x} + 4\,C_2\,e^{-2x}\right) - 4\left(C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-2x}\right) \overset{?}{=} 0$$

$$4\,C_1\,e^{2x} + 4\,C_2\,e^{-2x} - 4\,C_1\,e^{2x} - 4\,C_2\,e^{-2x} \overset{?}{=} 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0$$

$y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-2x}$ ifadesi $y'' - 4\,y = 0$ denkleminin genel çözümüdür.

ÖRNEK: $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ diferansiyel denkleminin genel çözümünün,
$y = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} + x$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $y' = C_1\, e^{x} + 2\, C_2\, e^{2x} + 1 \Rightarrow y'' = C_1\, e^{x} + 4\, C_2\, e^{2x}$

Yukarıda görülen y , y' ve y'' diferansiyel denklemde yerine yazılacaktır.

$$\left(C_1 e^{x} + 4C_2 e^{2x}\right) - 3\left(C_1 e^{x} + 2C_2 e^{2x} + 1\right) + 2\left(C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + x\right) \overset{?}{=} 2x - 3$$

$$3\, C_1\, e^{x} + 6\, C_2\, e^{2x} - 3C_1\, e^{x} - 6\, C_2\, e^{2x} + 2\, x - 3 \overset{?}{=} 2x - 3$$

$$2\, x - 3 = 2x - 3$$

$y = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} + x$ ifadesi diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

ÖRNEK: $y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünün,

$y = C_1\, Cos(x) + C_2\, Sin(x)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$y' = -C_1\, Sin(x) + C_2\, Cos(x) \Rightarrow y'' = -C_1\, Cos(x) - C_2\, Sin(x)$$

Yukarıda görülen y ve y'' diferansiyel denklemde yerine yazılacaktır.

$$(-C_1\, Cos(x) - C_2\, Sin(x)) + (C_1\, Cos(x) + C_2\, Sin(x)) \overset{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

$y = C_1\, Cos(x) + C_2\, Sin(x)$ ifadesi diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

ÖZEL ÇÖZÜMÜN (İNTEGRASYON SABİTLERİNİN) BULUNMASI

Özel çözüm, genel çözümde bulunan integrasyon sabitlerinin sayısı kadar, "başlangıç" ya da "sınır" şartlarının bilinmesiyle hesaplanmaktadır.

BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ

$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ **şeklindeki n'ninci mertebe diferansiyel denklemin, aşağıda verilen şartları sağlayan sadece bir adet** $y = f(x)$ **çözümü vardır.**

$$x = x_0 \ \text{için} \qquad \left.\begin{aligned} y &= y_0 \\ y' &= y'_0 \\ y'' &= y''_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \text{Başlangıç Şartları}$$

Bu tür problemlere "Başlangıç Değer Problemi" denir.

ÖRNEK: $y' - y = 2(1 - x)$ diferansiyel denkleminin genel çözümü, $y = 2\,x + C_1\,e^x$ olarak bilinmektedir. Başlangıç şartı $y(0) = 3$ olduğuna göre diferansiyel denklemin özel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

Verilmiş olan $y(0) = 3$ ($x = 0$ için $y = 3$) başlangıç şartının, diferansiyel denklemin genel çözümünü sağlaması gerekmektedir.

$$y = 2\,x + C_1\,e^x \quad \Rightarrow \quad 3 = \underbrace{2\,(0)}_{0} + C_1\,\underbrace{e^0}_{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 3}$$

Sonuç olarak diferansiyel denklemin özel çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$y = 2\,x + C_1\,e^x \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2\,x + 3\,e^x}$$

ÖRNEK: $y'' = Sin(x)$ şeklindeki 2. mertebe diferansiyel denklemin başlangıç şartları $y(0) = 4$ ve $y'(0) = 2$ olduğuna göre, diferansiyel denklemin $y(x)$ özel çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM: Diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$y'' = Sin(x) \Rightarrow y' = -Cos(x) + C_1 \Rightarrow \boxed{y = -Sin(x) + C_1 x + C_2}$$

Başlangıç şartlarının genel çözümü sağlaması gerekmektedir.

$$y(0) = 4 \Rightarrow 4 = -Sin(0) + C_1(0) + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 4}$$

$$y'(0) = 2 \Rightarrow 2 = -Cos(0) + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 3}$$

Özel çözüm $\Rightarrow$ $\boxed{y = -Sin(x) + 3x + 4}$

SINIR DEĞER PROBLEMİ

İntegrasyon sabitlerinin bulunmasında, en çok kullanılan yollardan biri de $a \leq x \leq b$ şeklindeki çözüm aralığının başında ($x = a$ noktasında) ve sonunda ($x = b$ noktasında) verilen belirli "sınır şartlarının" kullanılmasıdır.

- **Bu tür problemlere "Sınır Değer Problemi" denir.**
- **Sınır şartlarının sayısına göre, bir veya sonsuz sayıda çözüm bulunabilir.**
- **Sınır şartlarının sayısı integrasyon sabitlerinin sayısına eşit ise, sadece bir çözüm bulunmaktadır.**

ÖRNEK: $f(x, y, y', y'') = 0$ **2. mertebe diferansiyel denklemi ele alındığında,**

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 \quad \text{için} \quad y = y_0 \\ x = x_1 \quad \text{için} \quad y = y_1 \end{array}\right\}$$

2 adet sınır şartını sağlayan bir $y(x)$ çözümü bulunur.

ÖRNEK: $y'' + y = 0$ şeklindeki 2. mertebeden diferansiyel denklemin sınır şartları $y(0) = 1$ ve $y(1) = 1$ olduğuna göre, diferansiyel denklemin $y(x)$ özel çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM: Diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıda verildiği gibidir.

$$\boxed{y = C_1\, Cos(x) + C_2\, Sin(x)}$$

Sınır şartlarının genel çözümü sağlaması gerekmektedir.

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 \underbrace{Cos(0)}_{1} + C_2 \underbrace{Sin(0)}_{0} \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = C_1 \underbrace{Cos(1)}_{0.54} + C_2 \underbrace{Sin(1)}_{0.84} \Rightarrow \boxed{C_2 = 0.55}$$

Özel çözüm $\Rightarrow$ $\boxed{y = Cos(x) + 0.55\, Sin(x)}$

ÖRNEK: $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$ şeklindeki 2. mertebeden diferansiyel denklemin sınır şartları $y(0) = 0$ ve $y(1) = 0$ olduğuna göre, diferansiyel denklemin $y(x)$ özel çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM: Diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıda verildiği gibidir.

$$\boxed{y = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} + x}$$

Sınır şartlarının genel çözümü sağlaması gerekmektedir.

$$\left.\begin{aligned} y(0) = 0 \;&\Rightarrow\; C_1 + C_2 = 0 \\ y(1) = 0 \;&\Rightarrow\; C_1\, e + C_2\, e^2 = -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\boxed{C_1 = \frac{1}{e^2 - e} = 0.214} \\ &\boxed{C_2 = -\frac{1}{e^2 - e} = -0.214} \end{aligned}$$

Özel çözüm $\Rightarrow$ $\boxed{y = 0.214\left(e^{x} - e^{2x}\right) + x}$

MÜHENDİSLİK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNDE İZLENEN AŞAMALAR

1) Matematiksel modelleme ile problemin formülasyonu,

⇓

Diferansiyel denklemin bulunması

2) Elde edilen diferansiyel denklemin genel çözümünün bulunması,

3) Verilen başlangıç veya sınır şartlarına göre özel çözümün bulunması,

4) Çözümün kontrol edilmesi.

DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Diferansiyel denklemler, genel olarak, 3 farklı şekilde çözülebilmektedir.

1) **Grafik çözüm**
2) **Analitik çözüm**
3) **Sayısal çözüm**

Analitik çözüm, diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini bulmaktadır. Bu nedenle, diğer yöntemlere göre önemli üstünlükleri bulunmaktadır.

Sayısal Çözüm ise kesin çözümlerin bulunamadığı durumlarda diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasını sağlamaktadır.

BÖLÜM 3
DEĞİŞKENLERİ AYRILABİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde 1. mertebe ve 1. derece Adi Diferansiyel Denklemlerin çözümünün nasıl hesaplanacağı incelenecektir.

Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklemler, x ve y değişkenlerini içeren terimlerin birbirinden gruplar halinde ayrılmış olarak yazılabildiği diferansiyel denklemlerdir.

Bu tür diferansiyel denklemlerin genel çözümleri, değişkenleri ayrıldıktan sonra bir defa integral alınmasıyla bulunmaktadır.

Diferansiyel denklemler, öncelikle aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\mathbf{M}(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

İçerisinde sadece x değişkeni görünen tüm ifadeler dx teriminin yanında ve içerisinde sadece y değişkeni görünen tüm ifadeler dy teriminin yanında yazıldığında, diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılmış olur.

$$f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemde, eşitliğin her iki tarafının bir defa integrali alınarak diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur.

$$\int f(x)\, dx + \int g(y)\, dy = C_1$$

$$\boxed{F(x, y, C_1) = 0} \quad \text{veya} \quad \boxed{y = f(x, C_1)}$$

ÖRNEK: $y' = \dfrac{x+1}{y}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y} \Rightarrow (x+1)\,dx - y\,dy = 0$$

Böylece diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılmış olur. Daha sonra yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın integrali alınacaktır.

$$\int (x+1)\,dx - \int y\,dy = \int 0 \Rightarrow \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \frac{y^2}{2} = C_1$$

$$x^2 + 2x - y^2 = C_1 \Rightarrow y^2 = x^2 + 2x + C_1$$

$$\boxed{y = \left(x^2 + 2x + C_1\right)^{1/2}}$$ veya $$\boxed{y = \sqrt{x^2 + 2x + C_1}}$$

ÖRNEK: $y' = y$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $\dfrac{dy}{dx} = y \Rightarrow dx - \dfrac{1}{y} dy = 0$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int dx - \int \frac{1}{y} dy = \int 0 \Rightarrow x - Ln(y) = C_1$$

$$Ln(y) = C_1 + x \Rightarrow e^{Ln(y)} = e^{(C_1 + x)}$$

$$y = e^{C_1} \cdot e^x \Rightarrow \boxed{y = C_1\, e^x}$$

ÖRNEK: $y' = -2\,x\,y$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $\dfrac{dy}{dx} = -2\,x\,y \quad \Rightarrow \quad 2\,x\,dx + \dfrac{1}{y}\,dy = 0$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$2\int x\,dx + \int \frac{1}{y}\,dy = \int 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,\frac{x^2}{2} + Ln(y) = C_1$$

$$Ln(y) = C_1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad e^{Ln(y)} = e^{(C_1 - x^2)}$$

$$y = e^{C_1} \cdot e^{(-x^2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1\,e^{(-x^2)}}$$

ÖRNEK: $y' = -\dfrac{4x}{9y}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{9y} \Rightarrow \dfrac{4}{9}x\,dx + y\,dy = 0$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\frac{4}{9}\int x\,dx + \int y\,dy = \int 0 \Rightarrow \frac{4}{9}\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

Eşitliğin iki tarafı 2 ile çarpılıp düzenlenirse $\Rightarrow y^2 = -\dfrac{4}{9}x^2 + C_1$

$$\boxed{y = \left(-\frac{4}{9}x^2 + C_1\right)^{1/2}} \quad \text{veya} \quad \boxed{y = \sqrt{-\frac{4}{9}x^2 + C_1}}$$

ÖRNEK: $y' = \dfrac{y^2}{x^3}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x^3}\,dx - \frac{1}{y^2}\,dy = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int \frac{1}{x^3}\,dx - \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 0 \Rightarrow \int x^{-3}dx - \int y^{-2}dy = \int 0$$

$$\frac{x^{-2}}{-2} - \frac{y^{-1}}{-1} = C_1 \Rightarrow -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{y} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{y} = C_1 + \frac{1}{2x^2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{C_1 + \frac{1}{2x^2}}}$$

veya

$$\boxed{y = \frac{2x^2}{C_1x^2 + 1}}$$

ÖRNEK: $y' = 1 + y^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Rightarrow dx - \frac{1}{1+y^2}\,dy = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int dx - \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int 0$$

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,ArcTan\left(\frac{u}{a}\right)}$$

$$x - ArcTan(y) = C_1 \Rightarrow ArcTan(y) = x + C_1$$

$$\boxed{y = Tan(x + C_1)}$$

ÖRNEK: $$\frac{dy}{dx}=\frac{3\,x+x\,y^2}{y+x^2\,y}$$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $$\frac{dy}{dx}=\frac{x\,(3+y^2)}{y\,(1+x^2)} \Rightarrow x\,(3+y^2)\,dx-y\,(1+x^2)\,dy=0$$

$$\frac{x}{x^2+1}\,dx-\frac{y}{y^2+3}\,dy=0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\int\frac{y}{y^2+3}\,dy=\int 0$$

$$x^2+1=u \quad\rightarrow\quad 2\,x\,dx=du$$

$$y^2+3=v \quad\rightarrow\quad 2\,y\,dy=dv$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}\,du-\frac{1}{2}\int\frac{1}{v}\,dv=C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}Ln(u)-\frac{1}{2}Ln(v)=C_1$$

$$\frac{1}{2}Ln(u)-\frac{1}{2}Ln(v)=C_1 \Rightarrow \frac{1}{2}Ln\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}Ln\left(y^2+3\right)=C_1$$

Eşitliğin iki tarafı -2 ile çarpılırsa $\Rightarrow$ $Ln\left(y^2+3\right)-Ln\left(x^2+1\right)=C_1$

$$Ln\left(\frac{y^2+3}{x^2+1}\right)=C_1 \Rightarrow e^{Ln\left(\frac{y^2+3}{x^2+1}\right)}=e^{C_1} \Rightarrow \frac{y^2+3}{x^2+1}=C_1$$

$$y^2+3=C_1\left(x^2+1\right) \Rightarrow y^2=C_1\left(x^2+1\right)-3$$

$$\boxed{y=\left(C_1\left(x^2+1\right)-3\right)^{1/2}}$$ **veya** $$\boxed{y=\sqrt{C_1(x^2+1)-3}}$$

ÖRNEK: $x^3 dx + (y+1)^2 dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int x^3 dx + \int (y+1)^2 dy = \int 0$$

$y + 1 = u$ denirse
$dy = du$ olur

$$\int x^3 dx + \int u^2 du = \int 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4}{4} + \frac{u^3}{3} = C_1$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{(y+1)^3}{3} = C_1 \quad \Rightarrow \quad 3\,x^4 + 4\,(y+1)^3 = C_1$$

$$(y+1)^3 = \frac{C_1 - 3\,x^4}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \left(\frac{C_1 - 3\,x^4}{4}\right)^{1/3} - 1}$$

ÖRNEK: $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} - x\,y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $x\,y\,dx - (x^2-1)\,dy = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2-1}\,dx - \dfrac{1}{y}\,dy = 0$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int \frac{x}{x^2-1}\,dx - \int \frac{1}{y}\,dy = \int 0 \qquad x^2-1=u \;\Rightarrow\; 2\,x\,dx = du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{dy}{y} = \int 0 \Rightarrow \frac{1}{2}Ln(u) - Ln(y) = C_1$$

$$Ln(x^2-1) - 2\,Ln(y) = C_1 \Rightarrow Ln(y^2) = Ln(x^2-1) + C_1$$

$$e^{Ln(y^2)} = e^{(Ln(x^2-1)+C_1)} \Rightarrow y^2 = C_1(x^2-1)$$

$$\boxed{y = C_1(x^2-1)^{1/2}} \quad \text{veya} \quad \boxed{y = C_1\sqrt{(x^2-1)}}$$

ÖRNEK: $x^2\,(y+1)\,dx + y^2\,(x-1)\,dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $$\frac{x^2}{x-1}\,dx + \frac{y^2}{y+1}\,dy = 0$$ Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklem

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{y^2}{y+1} = \frac{y^2 - 1 + 1}{y+1} = \frac{(y-1)(y+1)+1}{y+1} = y-1+\frac{1}{y+1}$$

Bu ifadeler diferansiyel denklemde yerine yazıldıktan sonra integral alınacaktır.

$$\int \left(x + 1 + \frac{1}{x - 1} \right) dx + \int \left(y - 1 + \frac{1}{y + 1} \right) dy = \int 0$$

$$\frac{x^2}{2} + x + Ln(x - 1) + \frac{y^2}{2} - y + Ln(y + 1) = C_1$$

$$x^2 + 2x + 2\,Ln(x - 1) + y^2 - 2y + 2\,Ln(y + 1) = C_1$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 2y + Ln\left((x - 1)^2\right) + Ln\left((y + 1)^2\right) = C_1$$

$$\boxed{x^2 + 2x + y^2 - 2y + Ln\left((x - 1)^2 \cdot (y + 1)^2\right) + C_1 = 0}$$

ÖRNEK: $y\,dx + \left(x^2 - 4x\right)dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $$\frac{1}{x^2 - 4x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy = 0$$ Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklem

$$\frac{1}{x\,(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} = \frac{Ax - 4A + Bx}{x\,(x-4)} = \frac{(A+B)x - 4A}{x\,(x-4)}$$

$$\frac{0 \cdot x + 1}{x\,(x-4)} = \frac{(A+B)x - 4A}{x\,(x-4)} \Rightarrow \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -4A = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{1}{4} \end{array}$$

$$\frac{1}{x\,(x-4)} = \frac{1}{4(x-4)} - \frac{1}{4\,x}$$ Diferansiyel denklemde yerine yazıldıktan sonra integral alınacaktır.

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-4}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{y}\,dy = \int 0$$

$$\frac{1}{4}Ln(x-4) - \frac{1}{4}Ln(x) + Ln(y) = C_1$$

$$Ln(x-4) - Ln(x) + 4\,Ln(y) = C_1$$

$$Ln\left[\frac{(x-4)\,y^4}{x}\right] = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-4)\,y^4}{x} = C_1$$

$$y^4 = C_1\,\frac{x}{x-4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1\left(\frac{x}{x-4}\right)^{1/4}}$$

ÖRNEK: $4\,y\,dx - x\,(y-3)\,dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $$\frac{4}{x}\,dx - \frac{y-3}{y}\,dy = 0$$ Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklem

$$\frac{4}{x}\,dx - \left(1 - \frac{3}{y}\right)dy = 0 \Rightarrow$$ Her iki tarafın integrali alınacak

$$\int \frac{4}{x}\,dx - \int \left(1 - \frac{3}{y}\right)dy = \int 0 \Rightarrow 4\,Ln(x) - y + 3\,Ln(y) = C_1$$

$$Ln(x^4) + Ln(y^3) - y + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{Ln(x^4 y^3) - y + C_1 = 0}$$

ÖRNEK: $$\frac{dy}{dx} = \frac{x\,Cos(y)}{e^x\,Sin(y)}$$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $$x\,Cos(y)dx - e^x\,Sin(y)dy = 0$$

$$\frac{x}{e^x}\,dx - \frac{Sin(y)}{Cos(y)}\,dy = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int x\,e^{-x}\,dx - \int \frac{Sin(y)}{Cos(y)}\,dy = \int 0$$

Kısmi integrasyon ⇨ $$\boxed{\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du}$$

$$u = x \quad dv = e^{-x}\,dx \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad v = -e^{-x}$$

$$\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}$$

$$Cos(y) = s \quad \Rightarrow \quad -Sin(y)dy = ds$$

$$-\int \frac{Sin(y)}{Cos(y)}\,dy = \int \frac{1}{s}\,ds = Ln(s) = Ln\big(Cos(y)\big)$$

$$-(x+1)\,e^{-x} + Ln\big(Cos(y)\big) = C_1 \quad \Rightarrow \quad Ln\big(Cos(y)\big) = C_1 + (x+1)\,e^{-x}$$

$$Cos(y) = C_1\,e^{\left((x+1)e^{-x}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = ArcCos\left(C_1 e^{\left((x+1)e^{-x}\right)}\right)}$$

ÖRNEK: $\frac{1}{x}dx - \frac{1-y}{y^2+2y+2}dy = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1-y}{(y+1)^2+1}dy = \int 0$$

$y+1=u$ denirse
$dy=du$ olur

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{2-u}{u^2+1}\,du = \int 0$$

$$\frac{2-u}{u^2+1} = \frac{2}{u^2+1} - \frac{u}{u^2+1}$$

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{2}{1+u^2}\,du + \int \frac{u}{u^2+1}\,du = \int 0$$

$u^2+1=v$ denirse
$2u\,du = dv$ olur

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{2}{1+u^2}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,dv = \int 0$$

$$\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2}{1+u^2} du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{v} dv = \int 0 \quad \Rightarrow \quad v = u^2 + 1$$

$$Ln(x) - 2\, ArcTan(u) + \frac{1}{2} Ln\left(u^2 + 1\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad u = y + 1$$

$$Ln(x) - 2\, ArcTan(y+1) + \frac{1}{2} Ln\left(y^2 + 2y + 2\right) = C_1$$

$$2\, Ln(x) - 4\, ArcTan(y+1) + Ln\left(y^2 + 2y + 2\right) = C_1$$

$$\boxed{Ln\left(x^2\left(y^2 + 2y + 2\right)\right) - 4\, ArcTan(y+1) + C_1 = 0}$$

ÖRNEK: $(4x + xy^2)\,dx + (y + x^2y)\,dy = 0$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü ve $y(1) = 2$ şartını sağlayan özel çözümünü bulunuz.**

ÇÖZÜM: $$x\,(4 + y^2)\,dx + y\,(1 + x^2)\,dy = 0$$

$$\frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{y}{4+y^2}\,dy = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{y}{4+y^2}\,dy = \int 0$$

$$1 + x^2 = u \quad \rightarrow \quad 2x\,dx = du$$

$$4 + y^2 = v \quad \rightarrow \quad 2y\,dy = dv$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,dv = \int 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}Ln(u) + \frac{1}{2}Ln(v) = C_1$$

$$Ln(u) + Ln(v) = C_1 \quad \Rightarrow \quad Ln(u \cdot v) = C_1 \quad \Rightarrow \quad u \cdot v = C_1$$

$u \cdot v = C_1 \Rightarrow$ $u = 1 + x^2$ ile $v = 4 + y^2$ yerine yazılacaktır.

$$(1 + x^2)(4 + y^2) = C_1 \Rightarrow 4 + y^2 = \frac{C_1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{y = \left(\frac{C_1}{1 + x^2} - 4\right)^{1/2}} \Rightarrow \text{Genel Çözüm}$$

$y(1) = 2$ başlangıç şartının genel çözümü sağlaması gerekmektedir.

$$2 = \left(\frac{C_1}{1 + 1^2} - 4\right)^{1/2} \Rightarrow 4 = \frac{C_1}{2} - 4 \Rightarrow \frac{C_1}{2} = 8$$

$$\boxed{C_1 = 16} \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{16}{1 + x^2} - 4\right)^{1/2}} \Rightarrow \text{Özel Çözüm}$$

ÖRNEK: $y' + 3\,y = 8$ ve $y(0) = 2$ şeklinde verilen problemi çözünüz (genel ve özel çözüm bulunacak). Sonra, bulunan özel çözümü kontrol ediniz.

ÇÖZÜM: $\dfrac{dy}{dx} = (8 - 3\,y) \Rightarrow (8 - 3\,y)dx - dy = 0$

$$dx - \frac{1}{8 - 3\,y}\,dy = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int dx - \int \frac{1}{8 - 3\,y}\,dy = \int 0 \qquad 8 - 3\,y = u \;\rightarrow\; -3\,dy = du$$

$$\int dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \int 0 \;\Rightarrow\; x + \frac{1}{3}Ln(u) = C_1$$

$$3x + Ln(u) = C_1 \;\Rightarrow\; 3x + Ln(8 - 3y) = C_1$$

$$Ln(8 - 3y) = C_1 - 3x \;\Rightarrow\; 8 - 3y = C_1\,e^{-3x}$$

$$3y = 8 - C_1\, e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{8 - C_1\, e^{-3x}}{3}} \quad \Rightarrow$$ **Genel Çözüm**

$y(0) = 2$ **başlangıç şartının genel çözümü sağlaması gerekmektedir.**

$$2 = \frac{8 - C_1\, e^{0}}{3} \quad \Rightarrow \quad 6 = 8 - C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 2}$$

$$\boxed{y = \frac{8 - 2\, e^{-3x}}{3}} \quad \Rightarrow$$ **Özel Çözüm**

Kontrol için bulunan özel çözüm diferansiyel denklemde yerine yazılacaktır.

$$y' + 3\,y = 8 \quad \Rightarrow \quad 2\, e^{-3x} + 3\, \frac{8 - 2\, e^{-3x}}{3} \overset{?}{=} 8 \quad \Rightarrow \quad 8 = 8$$

ÖRNEK: $x^2 + y^2 = r^2$ çemberlerini dik kesen eğrilerin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: Çemberleri dik kesen eğriler arandığına göre, eğimlerinin çarpımı -1 olmalıdır. Eğim ise geometrik olarak 1. türeve eşittir.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(r^2\right) \Rightarrow 2\,x + 2\,y\,y' = 0$$

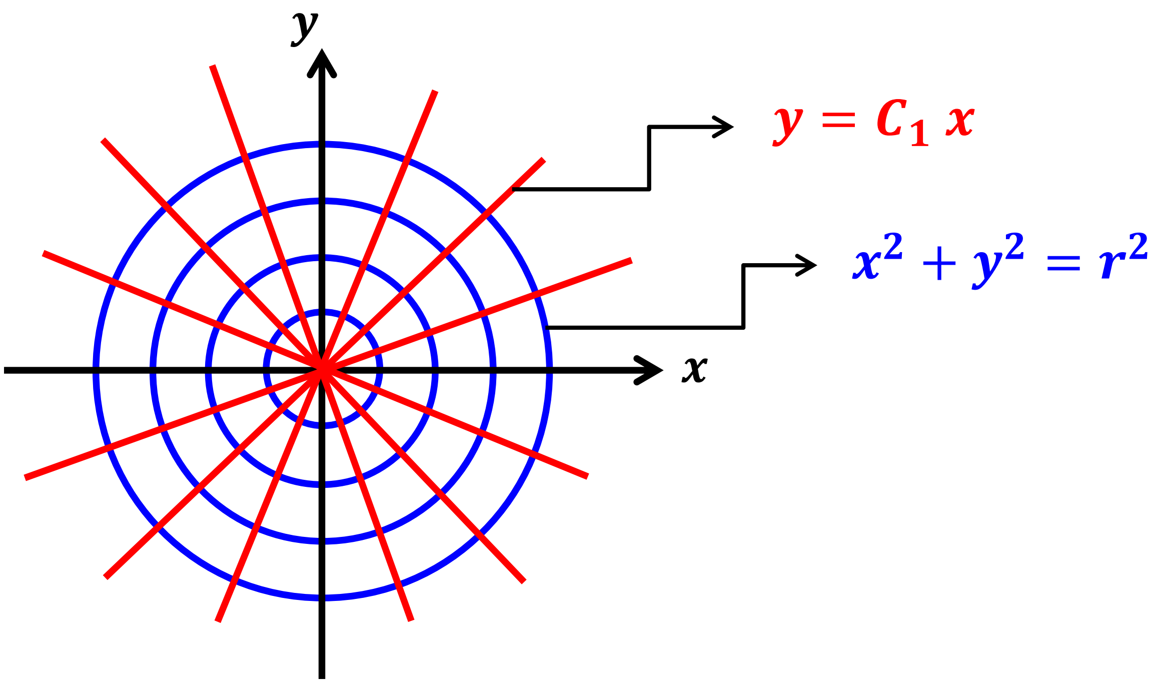
$$x + y\,y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow$$ Çemberin eğimi

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow$$ Çemberleri dik kesen eğrilerin eğimi (çözülecek diferansiyel denklem)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow y\,dx - x\,dy = 0 \Rightarrow \frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy = 0$$

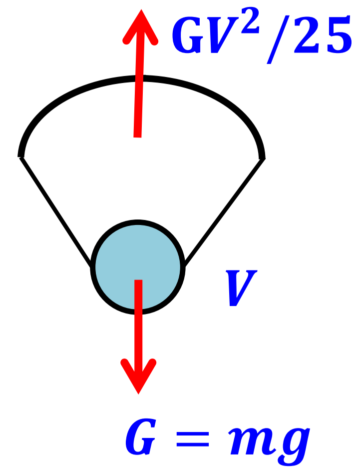
$$\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{y}\,dy = \int 0 \quad \Rightarrow \quad Ln(x) - Ln(y) = C_1$$

$$Ln\left(\frac{x}{y}\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1\,x}$$



ÖRNEK: Bir paraşütçü, paraşütü açıldığında $55\ m/s$ hızla aşağıya düşmektedir. Hava direnci, paraşütçünün $"V"$ hızına bağlı olarak $GV^2/25\ N$'dur. Buna göre, paraşütün açıldıktan sonraki hızını $"t"$ zamanının fonksiyonu olarak bulunuz.

ÇÖZÜM: Newton'un 2. hareket kanunu



$$\sum F = m\,a$$

$$G - \frac{G\,V^2}{25} = \frac{G}{g}\frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{25 - V^2}{25} = \frac{1}{g}\frac{dV}{dt}$$

$$\frac{g}{25}dt = \frac{dV}{25 - V^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V^2 - 25}\,dV + 0.3924\,dt = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int \frac{1}{V^2-25}\, dV + 0.3924 \int dt = \int 0$$

$$\frac{1}{V^2-25} = \frac{A}{V-5} + \frac{B}{V+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{V^2-25} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{V-5} - \frac{1}{V+5}\right)$$

$$\frac{1}{10}\int \frac{1}{V-5} dV - \frac{1}{10}\int \frac{1}{V+5} dV + 0.3924 \int dt = \int 0$$

$$\frac{1}{10} Ln(V-5) - \frac{1}{10} Ln(V+5) + 0.3924\, t = C_1$$

$$Ln(V-5) - Ln(V+5) = C_1 - 3.924\, t$$

$$\boxed{Ln\left(\frac{V-5}{V+5}\right) = C_1 - 3.924\, t} \quad \Rightarrow \quad \text{Genel Çözüm}$$

$t = 0$ için $V = 55\ m/s$ şartının genel çözümü sağlaması gerekmektedir.

$$Ln\left(\frac{55-5}{55+5}\right) = C_1 - 3.924\ (0) \Rightarrow \boxed{C_1 = -0.182}$$

Genel çözümde yerine yazılacak

$$Ln\left(\frac{V-5}{V+5}\right) = -0.182 - 3.924\ t \Rightarrow \frac{V-5}{V+5} = 0.834\ e^{-3.924\ t}$$

$$V - 5 = 0.834\ e^{-3.924\ t}\ V + 4.17\ e^{-3.924\ t}$$

$$V - 0.834\ e^{-3.924\ t}\ V = 5 + 4.17\ e^{-3.924\ t}$$

$$V\left(1 - 0.834\ e^{-3.924\ t}\right) = 5 + 4.17\ e^{-3.924\ t}$$

$$\boxed{V = \frac{5 + 4.17\ e^{-3.924\ t}}{1 - 0.834\ e^{-3.924\ t}}} \Rightarrow$$

Özel Çözüm ("V" hızının "t" zamanı ile değişimi)

BÖLÜM 4
DEĞİŞKENLERİ AYRILABİLEN TÜRE DÖNÜŞEBİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$\boldsymbol{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$ **şeklinde ve değişkenleri ayrılamayan bir diferansiyel denklem, uygun değişken dönüşümü yapılarak değişkenleri ayrılabilen türe dönüşebilmektedir.**

Bu tür diferansiyel denklemler 3 farklı grup olarak incelenecektir.

1) **Homojen diferansiyel denklemler**

2) $\boldsymbol{M(x,y)}$ **ve** $\boldsymbol{N(x,y)}$ **lineer fakat homojen olmayan denklemler**

3) $\boldsymbol{M(x,y) = y \cdot f(x,y)}$ **ve** $\boldsymbol{N(x,y) = x \cdot g(x,y)}$ **şeklindeki denklemler**

TANIM

Bir $f(x, y)$ fonksiyonu,

Bütün $t > 0$ değerleri ile $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ için

$f(tx\,, ty) = t^n\, f(x, y)$ şeklinde yazılabiliyorsa,

bu fonksiyona, "n. derece homojen" fonksiyon denir.

ÖRNEK: $f(x\,,y) = x^3 + 2\,x^2y - 3\,x\,y^2 + y^3$

$$f(tx\,,ty) = (tx)^3 + 2\,(tx)^2(ty) - 3\,(tx)\,(ty)^2 + (ty)^3$$

$$f(tx\,,ty) = t^3x^3 + 2\,t^3x^2y - 3\,t^3x\,y^2 + t^3\,y^3$$

$$f(tx\,,ty) = t^3\,\underbrace{\left(x^3 + 2\,x^2y - 3\,x\,y^2 + y^3\right)}_{f(x\,,y)}$$

$$f(tx\,,ty) = t^3\,f(x\,,y)$$

$f(x\,,y) \;\rightarrow\;$ **"3. derece homojen" fonksiyondur.**

ÖRNEK: $f(x\,,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 8\,x\,y}$

$$f(tx\,,ty) = \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2 - 8\,(tx)\,(ty)}$$

$$f(tx\,,ty) = \sqrt{t^2\,(x^2 + y^2 - 8\,x\,y)}$$

$$f(tx\,,ty) = t\,\underbrace{\sqrt{(x^2 + y^2 - 8\,x\,y)}}_{f(x\,,y)}$$

$$f(tx\,,ty) = t\,f(x\,,y)$$

$f(x\,,y) \rightarrow$ **"1. derece homojen" fonksiyondur.**

ÖRNEK: $$f(x\,,y) = \frac{x^2 + 2\,y^2}{8\,x\,y + 4\,y^2}$$

$$f(tx\,,ty) = \frac{(tx)^2 + 2\,(ty)^2}{8(tx)(ty) + 4\,(ty)^2}$$

$$f(tx\,,ty) = \frac{t^2\left(x^2 + 2\,y^2\right)}{t^2(8\,x\,y + 4\,y^2)}$$

$$f(tx\,,ty) = \frac{x^2 + 2\,y^2}{8\,x\,y + 4\,y^2} \quad \Rightarrow \quad f(tx\,,ty) = f(x\,,y)$$

$$f(tx\,,ty) = 1 \cdot f(x\,,y) = t^0\, f(x\,,y)$$

$f(x\,,y) \rightarrow$ **"0. derece homojen" fonksiyondur.**

ÖRNEK: $$f(x,y) = e^{\left(\frac{y}{x}\right)} + Tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f(tx,ty) = e^{\left(\frac{ty}{tx}\right)} + Tan\left(\frac{ty}{tx}\right)$$

$$f(tx,ty) = \underbrace{e^{\left(\frac{y}{x}\right)} + Tan\left(\frac{y}{x}\right)}_{f(x,y)}$$

$$f(tx,ty) = f(x,y) = t^0\, f(x,y)$$

$f(x,y) \rightarrow$ **"0. derece homojen" fonksiyondur.**

ÖRNEK: $$\boldsymbol{f(x, y) = 1 + x^2 + y^2}$$

$$\boldsymbol{f(tx, ty) = 1 + (tx)^2 + (ty)^2}$$

$$\boldsymbol{f(tx, ty) = 1 + t^2x^2 + t^2y^2}$$

$\boldsymbol{f(x, y)} \rightarrow$ **Homojen olmayan fonksiyon**

ÖRNEK: $$f(x\,,y) = x^2 + Sin(x)\,Cos(y)$$

$$f(tx\,,ty) = (tx)^2 + Sin(tx)\,Cos(ty)$$

$$f(tx\,,ty) = t^2\,x^2 + Sin(tx)\,Cos(ty)$$

$f(x\,,y) \rightarrow$ **Homojen olmayan fonksiyon**

1) HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ denkleminde, $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları aynı dereceden homojen ise, bu diferansiyel denkleme "Homojen Diferansiyel Denklem" denir.

Homojen diferansiyel denklemde, $y = u\,x$ değişken dönüşümü yapılır.

$$y = u\,x \quad \Rightarrow \quad dy = u\,dx + x\,du$$

Bu ifadeler diferansiyel denklemde yazıldığında, aşağıda görüldüğü formda değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denkleme dönüşür.

$$P(x,u)\,dx + Q(x,u)\,du = 0$$

Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılıp bir defa integral alındıktan sonra, u yerine y/x yazılarak, x ve y cinsinden genel çözümü elde edilir.

ÖRNEK: $(x^2 - x\,y + y^2)\,dx + x^2\,dy = 0$ **diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

ÇÖZÜM:

$M(x,y) = x^2 - x\,y + y^2$ ⇨ **"2. derece homojen" fonksiyon**

$N(x,y) = x^2$ ⇨ **"2. derece homojen" fonksiyon**

Yukarıda verilmiş olan denklem, homojen diferansiyel denklemdir.

$y = u\,x$ **değişken dönüşümü** ⇨ $dy = u\,dx + x\,du$

$$\left(\,x^2 - x\,(ux) + (u\,x)^2\,\right) dx + x^2\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$\left(1-u+u^2\right)x^2dx+u\,x^2dx+x^3du=0$$

$$\left(1-u+u^2+u\right)x^2dx+x^3du=0$$

$$\left(1+u^2\right)x^2dx+x^3\,du=0$$ ⇨ **Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem**

$$\frac{\left(1+u^2\right)x^2}{\left(1+u^2\right)x^3}\,dx+\frac{x^3}{\left(1+u^2\right)x^3}\,du=0$$

$$\frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{1+u^2}\,du=0$$ ⇨ **Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacak**

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \int 0$$

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\,ArcTan\left(\frac{u}{a}\right)}$$

$$Ln(x) + ArcTan(u) = C_1 \Rightarrow ArcTan(u) = C_1 - Ln(x)$$

$$u = Tan(C_1 - Ln(x)\,) \Rightarrow y = u\,x \Rightarrow u = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} = Tan(C_1 - Ln(x)\,) \Rightarrow \boxed{y = x\,Tan(C_1 - Ln(x)\,)}$$

ÖRNEK: $x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,y' = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,\dfrac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \left(x^2 - y^2\right) dx + 2\,x\,y\,dy = 0$

$M(x, y) = x^2 - y^2 \;\Rightarrow$ "2. derece homojen" fonksiyon

$N(x, y) = 2\,x\,y \;\Rightarrow$ "2. derece homojen" fonksiyon

Yukarıda verilmiş olan denklem, homojen diferansiyel denklemdir.

$y = u\,x$ değişken dönüşümü $\Rightarrow$ $dy = u\,dx + x\,du$

$$\left(\, x^2 - (u\,x)^2 \,\right) dx + 2\,x\,(u\,x)\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$\left(1 - u^2 \right) x^2 \, dx + 2\, u^2 x^2 dx + 2\, u\, x^3 du = 0$$

$$\left(1 - u^2 + 2\, u^2 \right) x^2 \, dx + 2\, u\, x^3 du = 0$$

$$\left(1 + u^2 \right) x^2 \, dx + 2\, u\, x^3 du = 0 \quad \Rightarrow$$

Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem

$$\frac{\left(1 + u^2\right) x^2}{\left(1 + u^2\right) x^3} \, dx + \frac{2\, u\, x^3}{\left(1 + u^2\right) x^3} \, du = 0$$

$$\frac{1}{x} \, dx + \frac{2\, u}{1 + u^2} \, du = 0 \quad \Rightarrow$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacak

$$\int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{2\, u}{1 + u^2} \, du = \int 0 \qquad 1 + u^2 = v \quad \rightarrow \quad 2\, u\, du = dv$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{v}\,dv = \int 0 \;\Rightarrow\; Ln(x) + Ln(v) = C_1$$

$$Ln(x\,v) = C_1 \;\Rightarrow\; v = 1 + u^2 \;\Rightarrow\; Ln\big(x\,(1+u^2)\big) = C_1$$

$$x\left(1+u^2\right) = C_1 \;\Rightarrow\; u = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = C_1$$

$$x\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = C_1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2+y^2}{x} = C_1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = C_1\,x$$

$$y^2 = C_1\,x - x^2 \;\Rightarrow\; \boxed{y = \left(C_1 x - x^2\right)^{1/2}}$$

ÖRNEK: $\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx = x\,dy$ **denkleminin genel çözümünü bulunuz.**

ÇÖZÜM: $$\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx - x\,dy = 0$$

$M(x,y) = y+\sqrt{x^2-y^2}$ ⇨ **"1. derece homojen" fonksiyon**

$N(x,y) = -x$ ⇨ **"1. derece homojen" fonksiyon**

Yukarıda verilmiş olan denklem, homojen diferansiyel denklemdir.

$y = u\,x$ **değişken dönüşümü** ⇨ $dy = u\,dx + x\,du$

$$\left((u\,x)+\sqrt{x^2-(u\,x)^2}\right)dx - x\,(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$\left(u\,x+\sqrt{x^2-u^2x^2}\right)dx-u\,x\,dx-x^2\,du=0$$

$$\left(u\,x+x\,\sqrt{1-u^2}-u\,x\right)dx-x^2\,du=0$$

$$x\,\sqrt{1-u^2}\,dx-x^2du=0$$ ⇨ **Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem**

$$\frac{x\,\sqrt{1-u^2}}{x^2\,\sqrt{1-u^2}}dx-\frac{x^2}{x^2\,\sqrt{1-u^2}}du=0$$

$$\frac{1}{x}dx-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du=0$$ ⇨ **Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacak**

$$\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int 0$$

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = ArcSin\left(\frac{u}{a}\right)}$$

$$Ln(x) - ArcSin(u) = C_1 \Rightarrow ArcSin(u) = Ln(x) + C_1$$

$$u = Sin(Ln(x) + C_1) \Rightarrow y = u\,x \Rightarrow u = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} = Sin(Ln(x) + C_1) \Rightarrow \boxed{y = x\,Sin(Ln(x) + C_1)}$$

ÖRNEK: $$\left(2\,x\,Sinh\left(\frac{y}{x}\right)+3\,y\,Cosh\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx-3\,x\,Cosh\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$M(x,y)=2\,x\,Sinh\left(\frac{y}{x}\right)+3\,y\,Cosh\left(\frac{y}{x}\right)$$ ⇨ **"1. derece homojen"**

$$N(x,y)=-3\,x\,Cosh\left(\frac{y}{x}\right)$$ ⇨ **"1. derece homojen"**

Yukarıda verilmiş olan denklem, homojen diferansiyel denklemdir.

$y=u\,x$ **değişken dönüşümü** ⇨ $dy=u\,dx+x\,du$

$$\big(2\,x\,Sinh(u) + 3\,(u\,x)\,Cosh(u)\big)dx - 3\,x\,Cosh(u)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$\big(2\,x\,Sinh(u) + 3\,u\,x\,Cosh(u)\big)\,dx$$

$$-3\,u\,x\,Cosh(u)\,dx - 3\,x^2 Cosh(u)\,du = 0$$

$$2\,x\,Sinh(u)\,dx - 3\,x^2 Cosh(u)\,du = 0$$ ⇨ **Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem**

$$\frac{2\,x\,Sinh(u)}{x^2\,Sinh(u)}\,dx - \frac{3\,x^2 Cosh(u)}{x^2\,Sinh(u)}\,du = 0$$

$$\frac{2}{x}\,dx - \frac{3\,Cosh(u)}{Sinh(u)}\,du = 0$$ ⇨ **Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacak**

$$\int \frac{2}{x}\, dx - \int \frac{3\, Cosh(u)}{Sinh(u)}\, du = \int 0$$

$Sinh(u) = v$ denirse
$Cosh(u)\, du = dv$ olur.

$$2 \int \frac{1}{x}\, dx - 3 \int \frac{1}{v}\, dv = \int 0 \quad \Rightarrow \quad 2\, Ln(x) - 3\, Ln(v) = C_1$$

$$Ln(x^2) - Ln(v^3) = C_1 \quad \Rightarrow \quad Ln\left(\frac{x^2}{v^3}\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{v^3} = C_1$$

$$v^3 = C_1\, x^2 \quad \Rightarrow \quad v = C_1\, x^{2/3} \quad \Rightarrow \quad v = Sinh(u) \qquad u = \frac{y}{x}$$

$$Sinh\left(\frac{y}{x}\right) = C_1\, x^{2/3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x\, ArcSinh\left(C_1\, x^{2/3}\right)}$$

ÖRNEK: $\left(1+2\,e^{x/y}\right)dx+2\,e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$M(x,y)=1+2\,e^{x/y}$ ⇨ **"0. derece homojen"**

$N(x,y)=2\,e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)$ ⇨ **"0. derece homojen"**

Yukarıda verilmiş olan denklem, homojen diferansiyel denklemdir.

$y=u\,x$ **değişken dönüşümü** ⇨ $dy=u\,dx+x\,du$

$$\left(1+2\,e^{1/u}\right)dx+2\,e^{1/u}\left(1-\frac{1}{u}\right)(u\,dx+x\,du)=0$$

$$\left(1+2\,e^{1/u}\right)dx+2\,u\,e^{1/u}\left(1-\frac{1}{u}\right)dx+2\,x\,e^{1/u}\left(1-\frac{1}{u}\right)du=0$$

$$\left(1+2\,e^{1/u}\right)dx+2\,u\,e^{1/u}\,dx-2\,e^{1/u}\,dx+2\,x\,e^{1/u}\left(1-\frac{1}{u}\right)du=0$$

$$\left(1+2\,u\,e^{1/u}\right)dx+2\,x\,e^{1/u}\left(1-\frac{1}{u}\right)du=0$$

Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem

$$\frac{\left(1+2\,u\,e^{1/u}\right)}{x\left(1+2\,u\,e^{1/u}\right)}\,dx+\frac{2\,x\,e^{1/u}\left(1-\frac{1}{u}\right)}{x\left(1+2\,u\,e^{1/u}\right)}du=0$$

$$\frac{1}{x}dx+\frac{2\,e^{1/u}\left(1-\frac{1}{u}\right)}{1+2\,u\,e^{1/u}}du=0 \quad \Rightarrow$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacak

$$\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{2\, e^{1/u}\left(1 - {}^{1}/_{u}\right)}{1 + 2\, u\, e^{1/u}}\, du = \int 0$$

$$1 + 2\, u\, e^{1/u} = v$$

$$2\, e^{1/u}\left(1 - \frac{1}{u}\right) du = dv$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{v}\, dv = \int 0 \quad \Rightarrow \quad Ln(x) + Ln(v) = C_1$$

$$Ln(x\, v) = C_1 \quad \Rightarrow \quad x\, v = C_1 \quad \Rightarrow \quad v = 1 + 2\, u\, e^{1/u}$$

$$x\left(1 + 2\, u\, e^{1/u}\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{y}{x}$$

$$x\left(1 + 2\, \frac{y}{x}\, e^{x/y}\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x + 2\, y\, e^{(x/y)} = C_1}$$

2) $M(x, y)$ VE $N(x, y)$ LİNEER FAKAT HOMOJEN OLMAYAN DENKLEMLER

a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 sabit sayılar olmak üzere bu tür diferansiyel denklemlerin genel formu aşağıdaki gibidir.

$$\underbrace{(a_1\, x + b_1\, y + c_1)}_{M(x\,,y)}\, dx + \underbrace{(a_2\, x + b_2\, y + c_2)}_{N(x\,,y)}\, dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} M(x, y) &= a_1\, x + b_1\, y + c_1 \\ N(x, y) &= a_2\, x + b_2\, y + c_2 \end{aligned}\right\}$$

Matris formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} M(x,y) \\ N(x,y) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\underline{A}) = a_1\, b_2 - a_2\, b_1$$

Bu tür diferansiyel denklemlerin genel çözümü $det(\underline{A}) = a_1\, b_2 - a_2\, b_1$ değerine bağlı olarak 2 farklı yolla bulunmaktadır.

1. Yol $\rightarrow$ $a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = 0$ **olduğu durumdur.**

2. Yol $\rightarrow$ $a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \neq 0$ **olduğu durumdur.**

1. YOL

$(a_1\,x + b_1\,y + c_1)\,dx + (a_2\,x + b_2\,y + c_2)\,dy = 0$ **denkleminde**

$$a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = 0$$ **ise,**

$a_1\,x + b_1\,y = t$ **değişken dönüşümü uygulanmaktadır.**

$$y = \frac{t - a_1\,x}{b_1} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dt - a_1\,dx}{b_1}$$

Bu değişken dönüşümü sonucu diferansiyel denklem, form olarak aşağıdaki gibi değişkenleri ayrılabilen hale indirgenmiş olur.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad P(x,t)\,dx + Q(x,t)\,dt = 0$$

2. YOL

$(a_1\,x + b_1\,y + c_1)\,dx + (a_2\,x + b_2\,y + c_2)\,dy = 0$ denkleminde

$$a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \neq 0 \quad \text{ise,}$$

$M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarında görülen $"c_1"$ ve $"c_2"$ sayılarını $"0"$ yaparak **homojen diferansiyel denklem** elde etmek amacıyla aşağıdaki değişken dönüşümü uygulanmaktadır.

$$x = x_1 + h \;\Rightarrow\; dx = dx_1$$

$$y = y_1 + k \;\Rightarrow\; dy = dy_1$$

$$(a_1\,x_1 + b_1\,y_1)\,dx_1 + (a_2\,x_1 + b_2\,y_1)\,dy_1 = 0$$

$"h"$ ve $"k"$ sayılarının nasıl bulunacağını belirlemek amacıyla, $x = x_1 + h$ ve $y = y_1 + k$ ifadeleri $M(x,y)$ ve $N(x,y)$'de yerine yazılacaktır.

$$M(x,y)=a_1x+b_1y+c_1 \Rightarrow M(x,y)=a_1(x_1+h)+b_1(y_1+k)+c_1$$

$$N(x,y)=a_2x+b_2y+c_2 \Rightarrow N(x,y)=a_2(x_1+h)+b_2(y_1+k)+c_2$$

$$M(x,y)=a_1\,x_1+b_1\,y_1+(a_1\,h+b_1\,k+c_1)$$

$$N(x,y)=a_2\,x_1+b_2\,y_1+(a_2\,h+b_2\,k+c_2)$$

Değişken dönüşümünün amacı $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarındaki sabit terimleri yok edip denklemi homojen diferansiyel denkleme dönüştürmektir.

$M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarında "x" yerine"h" ve "y" yerine "k" yazılarak elde edilen denklemlerin ortak çözümünden "h" ve "k" sayıları bulunacaktır.

$$a_1\,h+b_1\,k+c_1=0$$

$$a_2\,h+b_2\,k+c_2=0$$

ÖRNEK: $(x+y)\,dx + (3x+3y-4)\,dy = 0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $M(x,y) = x+y$ $\qquad N(x,y) = 3x+3y-4$

$a_1 = 1 \qquad b_1 = 1 \qquad c_1 = 0 \qquad a_2 = 3 \qquad b_2 = 3 \qquad c_2 = -4$

$a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = (1)(3) - (3)(1) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ **1. YOL**

$x + y = t \Rightarrow y = t - x \Rightarrow dy = dt - dx$

Bu ifadeler diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, aşağıdaki hale gelir.

$$t\,dx + (3x + 3\,(t-x) - 4)\,(dt - dx) = 0$$

$$t\,dx + (3x + 3t - 3x - 4)\,(dt - dx) = 0$$

$$t\,dx + (3t - 4)\,(dt - dx) = 0$$

$$t\,dx + (3t - 4)dt - (3t - 4)dx = 0$$

$$(t - 3t + 4)\,dx + (3t - 4)dt = 0$$

$$(4 - 2t)\,dx + (3t - 4)\,dt = 0$$ ⇨ **Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem**

$$\frac{2(2 - t)}{2 - t}\,dx + \frac{3t - 4}{2 - t}\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad 2dx + \frac{3t - 4}{2 - t}\,dt = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklem elde edilmiş olur

$$\frac{3t-4}{2-t} = A + \frac{B}{2-t} \quad \Rightarrow \quad \frac{3t-4}{2-t} = -3 + \frac{2}{2-t}$$

Bu ifadeler diferansiyel denklemde yerine yazıldıktan sonra integral alınacaktır.

$$2\int dx - 3\int dt + 2\int \frac{1}{2-t}\, dt = \int 0 \qquad 2-t=u \ \rightarrow \ -dt = du$$

$$2\int dx - 3\int dt - 2\int \frac{1}{u}\, du = \int 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3t - 2\,Ln(u) = C_1$$

$$u = 2-t \qquad t = x+y \quad \Rightarrow \quad 2x - 3(x+y) - 2\,Ln(2-x-y) = C_1$$

$2x - 3x - 3y - 2\,Ln(2-x-y) = C_1$ $\Rightarrow$ -1 **ile çarpılıp düzenlenirse**

$$\boxed{x + 3y + 2\,Ln(2-x-y) = C_1}$$

ÖRNEK: $(2x - 5y + 3)\,dx - (2x + 4y - 6)\,dy = 0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $M(x,y) = 2x - 5y + 3 \qquad N(x,y) = -2x - 4y + 6$

$a_1 = 2 \qquad b_1 = -5 \qquad c_1 = 3 \qquad a_2 = -2 \qquad b_2 = -4 \qquad c_2 = 6$

$a_1\, b_2 - a_2\, b_1 = -8 - 10 = -18 \neq 0 \Rightarrow$ **2. YOL**

$$\begin{aligned} x &= x_1 + h \\ y &= y_1 + k \end{aligned} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2\,h - 5\,k + 3 &= 0 \\ -2\,h - 4\,k + 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} h &= 1 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x = x_1 + 1 &\Rightarrow dx = dx_1 \\ y = y_1 + 1 &\Rightarrow dy = dy_1 \end{aligned}\right\}$$ **Diferansiyel denklemde yerine yazılacak**

$$(2x - 5y + 3)\, dx + (-2x - 4y + 6)\, dy = 0 \qquad x = x_1 + 1 \qquad y = y_1 + 1$$

$$(2x_1 + 2 - 5y_1 - 5 + 3)\, dx_1 + (-2x_1 - 2 - 4y_1 - 4 + 6)\, dy_1 = 0$$

$(2x_1 - 5y_1)\, dx_1 + (-2x_1 - 4y_1)\, dy_1 = 0$ ⇨ **Homojen Dif. Denk.**

$y_1 = u\, x_1$ **değişken dönüşümü** ⇨ $dy_1 = u\, dx_1 + x_1\, du$

$$\big(2x_1 - 5\,(u\,x_1)\big)\, dx_1 + \big(-2x_1 - 4\,(u\,x_1)\big)\,(u\, dx_1 + x_1\, du) = 0$$

$$(2 - 5u)\, x_1\, dx_1 + \left(-2u - 4u^2\right) x_1\, dx_1 + (-2 - 4u)\, x_1^2\, du = 0$$

$$\left(2 - 7u - 4u^2\right) x_1\, dx_1 + (-2 - 4u)\, x_1^2\, du = 0$$

Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

$$\frac{\left(2-7u-4u^2\right)x_1}{\left(2-7u-4u^2\right)x_1^2}\,dx_1+\frac{(-2-4u)\,x_1^2}{\left(2-7u-4u^2\right)x_1^2}\,du=0$$

$$\frac{1}{x_1}dx_1+\frac{-2-4u}{2-7u-4u^2}du=0 \Rightarrow \frac{1}{x_1}dx_1+\frac{4u+2}{4u^2+7u-2}du=0$$

$$\frac{1}{x_1}\,dx_1+\frac{4u+2}{(4u-1)(u+2)}\,du=0 \Rightarrow$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklem

$$\frac{4u+2}{(4u-1)(u+2)}=\frac{A}{4u-1}+\frac{B}{u+2} \Rightarrow A=\frac{4}{3} \qquad B=\frac{2}{3}$$

$$\frac{4u+2}{(4u-1)(u+2)}=\frac{4/3}{4u-1}+\frac{2/3}{u+2} \Rightarrow$$

Denklemde yazılıp integral alınacak

$$\int \frac{1}{x_1}\,dx_1 + \int \frac{4/3}{4u-1}\,du + \int \frac{2/3}{u+2}\,du = \int 0$$

$$4u - 1 = v \quad \rightarrow \quad 4\,du = dv \qquad\qquad u + 2 = s \quad \rightarrow \quad du = ds$$

$$\int \frac{1}{x_1}\,dx_1 + \frac{1}{3}\int \frac{1}{v}\,dv + \frac{2}{3}\int \frac{1}{s}\,ds = \int 0$$

$$Ln(x_1) + \frac{1}{3}\,Ln(v) + \frac{2}{3}\,Ln(s) = C_1 \quad \Rightarrow \quad$$ **3 ile çarpılırsa**

$$3\,Ln(x_1) + Ln(v) + 2\,Ln(s) = C_1 \quad \Rightarrow \quad Ln\left(x_1^3\right) + Ln(v) + Ln\left(s^2\right) = C_1$$

$$Ln\left(x_1^3\,v\,s^2\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad x_1^3\,v\,s^2 = C_1 \quad \Rightarrow \quad x_1^3\,(4u-1)(u+2)^2 = C_1$$

$$y_1 = u\,x_1 \;\Rightarrow\; u = \frac{y_1}{x_1} \;\Rightarrow\; x_1^3\left(4\,\frac{y_1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{y_1}{x_1} + 2\right)^2 = C_1$$

$$x_1^3\,\frac{(4y_1 - x_1)}{x_1}\,\frac{(y_1 + 2x_1)^2}{x_1^2} = C_1 \;\Rightarrow\; (4y_1 - x_1)(y_1 + 2x_1)^2 = C_1$$

$$\left.\begin{aligned} x = x_1 + 1 \;&\Rightarrow\; x_1 = x - 1 \\ y = y_1 + 1 \;&\Rightarrow\; y_1 = y - 1 \end{aligned}\right\}$$ **Yukarıda yerine yazılırsa**

$$\big(4\,(y-1) - (x-1)\big)\,\big((y-1) + 2(x-1)\big)^2 = C_1$$

$$\boxed{(4y - x - 3)\,(\,y + 2x - 3)^2 = C_1}$$

ÖRNEK: $(x-y-1)\,dx+(4y+x-1)\,dy=0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $M(x,y)=x-y-1$ $\quad N(x,y)=x+4y-1$

$a_1=1 \quad b_1=-1 \quad c_1=-1 \quad a_2=1 \quad b_2=4 \quad c_2=-1$

$a_1\,b_2-a_2\,b_1=4-(-1)=5\neq 0$ $\Rightarrow$ **2. YOL**

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+h\\ y&=y_1+k\end{aligned}\right. \Rightarrow \left.\begin{aligned} h-k-1&=0\\ h+4\,k-1&=0\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} h&=1\\ k&=0\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x=x_1+1 &\Rightarrow dx=dx_1\\ y=y_1 &\Rightarrow dy=dy_1\end{aligned}\right\}$$ Diferansiyel denklemde yerine yazılacak

$$(x_1 - y_1)\,dx_1 + (x_1 + 4y_1)\,dy_1 = 0$$ ⇨ **Homojen Dif. Denk.**

$y_1 = u\,x_1$ **değişken dönüşümü** ⇨ $dy_1 = u\,dx_1 + x_1\,du$

$$\big(x_1 - (u\,x_1)\big)\,dx_1 + \big(x_1 + 4\,(u\,x_1)\big)\,(u\,dx_1 + x_1\,du) = 0$$

$$(1-u)\,x_1\,dx_1 + \left(u + 4u^2\right)x_1\,dx_1 + (1+4u)\,x_1^2\,du = 0$$

$$\left(4u^2+1\right)x_1\,dx_1 + (4u+1)\,x_1^2\,du = 0$$ ⇨ **Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem**

$$\frac{\left(4u^2+1\right)x_1}{\left(4u^2+1\right)x_1^2}\,dx_1 + \frac{(4u+1)\,x_1^2}{\left(4u^2+1\right)x_1^2}\,du = 0 \quad ⇨ \quad \frac{1}{x_1}\,dx_1 + \frac{4u+1}{4u^2+1}\,du = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklem elde edilmiş olur.

$$\frac{1}{x_1}dx_1 + \frac{4u}{4u^2+1}du + \frac{1}{4u^2+1}du = 0$$ ⇨ İntegrali alınacak

$$\int \frac{1}{x_1}\,dx_1 + \int \frac{4\,u}{4u^2+1}\,du + \int \frac{1}{4u^2+1}\,du = \int 0$$

$4u^2 + 1 = v$
$8\,u\,du = dv$

$$\int \frac{1}{x_1}\,dx_1 + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\,dv + \int \frac{1}{1+(2u)^2}\,du = \int 0$$

$$Ln(x_1) + \frac{1}{2}\,Ln(v) + \frac{1}{2}\,ArcTan(2u) = C_1$$ ⇨ 2 ile çarpılıp $v = 4u^2 + 1$ yazılırsa

$$2\,Ln(x_1) + Ln\left(4u^2+1\right) + ArcTan(2u) = C_1$$

$$Ln\left(x_1^2\,(4u^2+1)\right) + ArcTan(2u) = C_1$$ ⇨ $u = \frac{y_1}{x_1}$

$$Ln\left(x_1^2\left(\frac{4\,y_1^2}{x_1^2}+1\right)\right)+ArcTan\left(\frac{2y_1}{x_1}\right)=C_1$$

$$Ln\left(4y_1^2+x_1^2\right)+ArcTan\left(\frac{2y_1}{x_1}\right)=C_1$$

$$\left.\begin{array}{lll} x=x_1+1 & \Rightarrow & x_1=x-1 \\ y=y_1 & \Rightarrow & y_1=y \end{array}\right\}\ \text{Yukarıda yerine yazılırsa}$$

$$Ln\left(4y^2+(x-1)^2\right)+ArcTan\left(\frac{2y}{x-1}\right)=C_1$$

$$\boxed{Ln\left(4y^2+x^2-2x+1\right)+ArcTan\left(\frac{2y}{x-1}\right)=C_1}$$

3) $M(x,y) = y \cdot f(x,y)$ VE $N(x,y) = x \cdot g(x,y)$ ŞEKLİNDEKİ DENKLEMLER

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad y \cdot f(x,y)\,dx + x \cdot g(x,y)\,dy = 0$$

Bu tür diferansiyel denklemlerde, $x\,y = u$ değişken dönüşümü yapılır.

$$x\,y = u \quad \Rightarrow \quad y = \frac{u}{x} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{x\,du - u\,dx}{x^2}$$

Bu ifadeler diferansiyel denklemde yazıldığında, aşağıda görüldüğü formda değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denkleme dönüşür.

$$P(x,u)\,dx + Q(x,u)\,du = 0$$

Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılıp bir defa integral alındıktan sonra, u yerine $x\,y$ yazılarak, x ve y cinsinden genel çözümü elde edilir.

ÖRNEK: $y\,(x\,y+1)\,dx + x\left(1 + x\,y + x^2y^2\right)dy = 0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x\,y = u$ **değişken dönüşümü** ⇨ $y = \dfrac{u}{x}$ ⇨ $dy = \dfrac{x\,du - u\,dx}{x^2}$

$$\frac{u}{x}\,(u+1)\,dx + x\left(1+u+u^2\right)\frac{x\,du - u\,dx}{x^2} = 0$$

⇨ x **ile çarpılıp düzenlenirse**

$$\left(u^2+u\right)dx + x\left(1+u+u^2\right)du - \left(u+u^2+u^3\right)dx = 0$$

$$\left(u^2+u-u-u^2-u^3\right)dx + x\left(1+u+u^2\right)du = 0$$

$$-u^3dx + x\left(1+u+u^2\right)du = 0$$

⇨ **Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem**

$$\frac{-u^3}{-u^3\,x}dx+\frac{x\left(1+u+u^2\right)}{-u^3\,x}du=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}dx-\frac{\left(1+u+u^2\right)}{u^3}du=0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$\int\frac{1}{x}\,dx-\int\frac{1}{u^3}\,du-\int\frac{1}{u^2}\,du-\int\frac{1}{u}\,du=\int 0$$

$$Ln(x)+\frac{1}{2\,u^2}+\frac{1}{u}-Ln(u)=C_1 \quad \Rightarrow \quad -2u^2 \text{ ile çarpılıp düzenlenirse}$$

$$2\,u^2\,Ln\left(\frac{u}{x}\right)-2\,u-1=C_1\,u^2 \quad \Rightarrow \quad u=x\,y \text{ yerine yazılırsa}$$

$$\boxed{2\,x^2\,y^2\,Ln(y)-2\,x\,y-1=C_1\,x^2\,y^2}$$

ÖRNEK: $\left(y - x\,y^2\right) dx - \left(x + x^2 y\right) dy = 0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: $y\,(1 - x\,y)\,dx - x\,(1 + x\,y)\,dy = 0$

$x\,y = u$ değişken dönüşümü $\Rightarrow$ $y = \dfrac{u}{x}$ $\Rightarrow$ $dy = \dfrac{x\,du - u\,dx}{x^2}$

$$\frac{u}{x}\,(1 - u)\,dx - x\,(1 + u)\,\frac{x\,du - u\,dx}{x^2} = 0$$

$\Rightarrow$ x ile çarpılıp düzenlenirse

$$\left(u - u^2\right) dx - x\,(1 + u)\,du + \left(u + u^2\right) dx = 0$$

$$\left(u - u^2 + u + u^2\right) dx - x\,(1 + u)\,du = 0$$

$2\,u\,dx - x\,(1 + u)\,du = 0$ $\Rightarrow$ Değişkenleri ayrılabilen diferansiyel denklem

$$\frac{2\,u}{u\,x}dx - \frac{x\,(1+u)}{u\,x}du = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{x}dx - \frac{1+u}{u}du = 0$$

Değişkenleri ayrılmış diferansiyel denklemin integrali alınacaktır.

$$2\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{u}du - \int du = \int 0$$

$$2\,Ln(x) - Ln(u) - u = C_1 \quad \Rightarrow \quad Ln\left(\frac{x^2}{u}\right) = C_1 + u$$

$$\frac{x^2}{u} = e^{(C_1+u)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{u} = C_1\,e^{u} \quad \Rightarrow \quad u = x\,y$$ **yerine yazılırsa**

$$\frac{x}{y} = C_1\,e^{(x\,y)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = C_1\,y\,e^{(x\,y)}}$$

BÖLÜM 5
TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

$u = f(x, y)$ şeklindeki iki değişkenli herhangi bir fonksiyonun tam (toplam) diferansiyeli yanda gösterildiği gibidir.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy$$

TANIM

$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ şeklindeki birinci mertebe diferansiyel denklemin sol tarafı, $u(x, y)$ gibi bir fonksiyonun tam diferansiyeli ise, bu denkleme "Tam Diferansiyel Denklem" denir.

Tam diferansiyel denklemin genel çözümü yanda gösterildiği şekildedir.

$$\boxed{u(x, y) = C_1}$$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ diferansiyel denklemi ele alındığında,

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

oluyorsa, bu denklem **Tam Diferansiyel Denklem**dir.

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ şeklindeki bir tam diferansiyel denklemin genel çözümü aşağıda anlatıldığı şekilde bulunabilmektedir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

İntegrasyon fonksiyonu

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)dy + k(x)$$

İntegrasyon fonksiyonu

Yukarıda gösterildiği gibi 2 farklı yolla bulunan $u(x,y)$ ifadeleri birlikte ele alınarak, her birindeki sadece x'e bağlı veya sadece y'ye bağlı olan terimler yardımıyla $k(x)$ ve $k(y)$ ifadeleri belirlenir.

Bulunan $k(x)$ ve $k(y)$ ifadeleri $u(x,y)$ fonksiyonunda yerine yazıldıktan sonra tam diferansiyel denklemin genel çözümü yanda gösterildiği gibi bulunur.

$$\boxed{u(x,y) = C_1}$$

ÖRNEK: $\left(2xy + 3x^2\right) dx + x^2\, dy = 0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2x \\[2ex] \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklemdir.

Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int M(x, y)\, dx + k(y)$$

$$u(x, y) = \int \left(2xy + 3x^2\right) dx + k(y)$$

$$u(x, y) = x^2 y + x^3 + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int N(x, y)\, dy + k(x)$$

$$u(x, y) = \int x^2\, dy + k(x)$$

$$u(x, y) = x^2 y + k(x)$$

$$u(x,y) \Rightarrow x^2y + k(x) = x^2y + x^3 + k(y)$$

$$k(x) + 0 = x^3 + k(y) \Rightarrow k(x) = x^3 \qquad k(y) = 0$$

$$u(x,y) = x^2y + x^3$$

$$u(x,y) = C_1 \Rightarrow x^2y + x^3 = C_1$$

$$x^2y = C_1 - x^3 \Rightarrow \boxed{y = \frac{C_1 - x^3}{x^2}}$$

ÖRNEK: $$\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xy\, e^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2y\, e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2y\, e^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklemdir.

Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int \left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = e^{xy^2} + x^4 + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int \left(2xy\,e^{xy^2} - 3y^2\right)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = e^{xy^2} - y^3 + k(x)$$

$u(x,y) \Rightarrow e^{xy^2} - y^3 + k(x) = e^{xy^2} + x^4 + k(y)$

$k(x) - y^3 = x^4 + k(y) \Rightarrow k(x) = x^4 \qquad k(y) = -y^3$

$u(x,y) = e^{xy^2} - y^3 + x^4$

$u(x,y) = C_1 \Rightarrow \boxed{e^{xy^2} - y^3 + x^4 = C_1}$

ÖRNEK: $(3x^2y+2xy)dx+(x^3+x^2+2y)dy=0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=3x^2+2x\\[2ex]\frac{\partial N}{\partial x}&=3x^2+2x\end{aligned}\right\}\qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklemdir.

Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int M(x, y)\, dx + k(y)$$

$$u(x, y) = \int \left(3x^2y + 2xy\right) dx + k(y)$$

$$u(x, y) = x^3y + x^2y + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int N(x, y)\, dy + k(x)$$

$$u(x, y) = \int \left(x^3 + x^2 + 2y\right) dy + k(x)$$

$$u(x, y) = x^3y + x^2y + y^2 + k(x)$$

$u(x,y) \Rightarrow x^3y + x^2y + y^2 + k(x) = x^3y + x^2y + k(y)$

$k(x) + y^2 = 0 + k(y) \Rightarrow k(x) = 0 \quad k(y) = y^2$

$u(x,y) = x^3y + x^2y + y^2$

$u(x,y) = C_1 \Rightarrow \boxed{x^3y + x^2y + y^2 = C_1}$

ÖRNEK: $\left(xy\,Cos(xy)+Sin(xy)\right)dx+\left(x^2Cos(xy)+e^y\right)dy=0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=2x\,Cos(xy)-x^2y\,Sin(xy)\\ \frac{\partial N}{\partial x}&=2x\,Cos(xy)-x^2y\,Sin(xy)\end{aligned}\right\}\quad\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklemdir.

Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int \big(xy\,Cos(xy) + Sin(xy)\big)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = x\,Sin(xy) + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int \big(x^2 Cos(xy) + e^y\big)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = x\,Sin(xy) + e^y + k(x)$$

$$u(x,y) \Rightarrow x\,Sin(xy) + e^{y} + k(x) = x\,Sin(xy) + k(y)$$

$$k(x) + e^{y} = 0 + k(y) \Rightarrow k(x) = 0 \qquad k(y) = e^{y}$$

$$u(x,y) = x\,Sin(xy) + e^{y}$$

$$u(x,y) = C_1 \Rightarrow \boxed{x\,Sin(xy) + e^{y} = C_1}$$

İNTEGRASYON ÇARPANI İLE TAM DİFERANSİYEL DENKLEME DÖNÜŞTÜRME

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ denklemi tam diferansiyel denklem değilse, integrasyon çarpanı olarak adlandırılan $\mu(x,y)$ gibi bir fonksiyon ile çarpılarak tam diferansiyel denkleme dönüştürülebilmektedir.

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ denkleminin genel çözümü ile, bu denklemin $\mu(x,y)$ fonksiyonuyla çarpılması sonucu elde edilen tam diferansiyel denklemin genel çözümü aynıdır.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\, M(x,y)\,dx + \mu\, N(x,y)\,dy = 0$$

Hem $"x"$ hem de $"y"$ değişkenine bağlı $\mu(x,y)$ gibi bir integrasyon çarpanının bulunması oldukça zordur. Bu nedenle integrasyon çarpanı, ya sadece $"x"$ değişkenine bağlı $\mu(x)$ veya sadece $"y"$ değişkenine bağlı $\mu(y)$ şeklinde bulunacaktır.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$$ **Tam Diferansiyel Denklem değil**

$$f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \Rightarrow \boxed{\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}}$$

$"f"$ fonksiyonu sadece $"x"$ değişkenine bağlı bir ifade olarak çıkmaz ise, aşağıdaki gibi sadece $"y"$ değişkenine bağlı integrasyon çarpanı bulunur.

$$g = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y) \Rightarrow \boxed{\mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}}$$

ÖRNEK: $y\,dx + (3 + 3x - y)\,dy = 0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 1 \\[2ex] \frac{\partial N}{\partial x} &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklem değildir.

İntegrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

Bulunacak olan integrasyon çarpanının, sadece $"x"$ değişkenine veya sadece $"y"$ değişkenine bağlı olup olmadığı belirlenecektir.

$$f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow f = \frac{1-3}{3+3x-y} = \frac{-2}{3+3x-y} \neq f(x)$$

$$g = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow g = \frac{3-1}{y} = \frac{2}{y} = g(y)$$

Sadece $"y"$ değişkenine bağlı bir ifade bulunduğu için, integrasyon çarpanı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mu = e^{\int g(y)\,dy} = e^{\int \frac{2}{y}\,dy} = e^{2\,Ln(y)} = e^{Ln(y^2)} \Rightarrow \boxed{\mu = y^2}$$

$$y\,dx + (3 + 3x - y)\,dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = y^2$ ile çarpılacaktır.

$$y^3\,dx + \left(3y^2 + 3xy^2 - y^3\right)\,dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 3y^2 \\[1em] \frac{\partial N}{\partial x} &= 3y^2 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır.

Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \Rightarrow u(x, y) = \int M(x, y)\, dx + k(y)$$

$$u(x, y) = \int y^3\, dx + k(y) \Rightarrow u(x, y) = y^3 x + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \Rightarrow u(x, y) = \int N(x, y)\, dy + k(x)$$

$$u(x, y) = \int \left(3y^2 + 3xy^2 - y^3\right) dy + k(x)$$

$$u(x, y) = y^3 + xy^3 - \frac{y^4}{4} + k(x)$$

$$u(x,y) \Rightarrow y^3 + xy^3 - \frac{y^4}{4} + k(x) = y^3 x + k(y)$$

$$k(x) + y^3 - \frac{y^4}{4} = 0 + k(y) \Rightarrow k(x) = 0 \qquad k(y) = y^3 - \frac{y^4}{4}$$

$$u(x,y) = y^3 + xy^3 - \frac{y^4}{4}$$

$$u(x,y) = C_1 \Rightarrow \boxed{(x+1)\, y^3 - \frac{y^4}{4} = C_1}$$

ÖRNEK: $\left(x^2+y^2+x\right)dx+xy\,dy=0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y}&=2y\\[2ex]\frac{\partial N}{\partial x}&=y\end{aligned}\right\}\qquad\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklem değildir.

İntegrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

Bulunacak olan integrasyon çarpanının, sadece $"x"$ değişkenine veya sadece $"y"$ değişkenine bağlı olup olmadığı belirlenecektir.

$$f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow f = \frac{(2y - y)}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x)$$

$$g = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow g = \frac{(y - 2y)}{x^2 + y^2 + x} = \frac{-y}{x^2 + y^2 + x} \neq g(y)$$

Sadece $"x"$ değişkenine bağlı bir ifade bulunduğu için, integrasyon çarpanı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mu = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{Ln(x)} \Rightarrow \boxed{\mu = x}$$

$$\left(x^2 + y^2 + x\right) dx + xy\, dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = x$ ile çarpılacaktır.

$$\left(x^3 + xy^2 + x^2\right) dx + x^2 y\, dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2xy \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 2xy \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır.

Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int \left(x^3 + xy^2 + x^2\right) dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int \left(x^2y\right) dy + k(x) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + k(x)$$

$$u(x,y) \Rightarrow \frac{x^2y^2}{2} + k(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + k(y)$$

$$k(x) + 0 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + k(y) \Rightarrow k(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \qquad k(y) = 0$$

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$u(x,y) = C_1 \Rightarrow \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C_1$$

$$3x^4 + 6x^2y^2 + 4x^3 = C_1 \Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{C_1 - 3x^4 - 4x^3}{6x^2}\right)^{1/2}}$$

ÖRNEK: $\left(2xy^4e^y + 2xy^3 + y\right)dx + \left(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\right)dy = 0$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 \\[2ex] \frac{\partial N}{\partial x} &= 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklem değildir.

İntegrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

Bulunacak olan integrasyon çarpanının, sadece $"x"$ değişkenine veya sadece $"y"$ değişkenine bağlı olup olmadığı belirlenecektir.

$$f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow f = \frac{8xy^3e^y + 8xy^2 + 4}{x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x} \neq f(x)$$

$$g = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow g = \frac{-8xy^3e^y - 8xy^2 - 4}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y} = -\frac{4}{y} = g(y)$$

Sadece $"y"$ değişkenine bağlı bir ifade bulunduğu için, integrasyon çarpanı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mu = e^{\int g(y)\,dy} = e^{\int \frac{-4}{y}\,dy} = e^{-4Ln(y)} = e^{Ln(y^{-4})} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{y^4}}$$

$$\left(2xy^4e^y + 2xy^3 + y\right)dx + \left(x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x\right)dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = \dfrac{1}{y^4}$ ile çarpılacaktır.

$$\left(2xe^y + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right)dx + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right)dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2xe^y - \dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{3}{y^4} \\[2ex] \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2xe^y - \dfrac{2x}{y^2} - \dfrac{3}{y^4} \end{array}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır.

Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int \left(2xe^{y} + \frac{2x}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dx + k(y)$$

$$u(x,y) = x^2 e^{y} + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int \left(x^2 e^{y} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}\right) dy + k(x)$$

$$u(x,y) = x^2 e^{y} + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + k(x)$$

$$u(x,y) \Rightarrow x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + k(x) = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} + k(y)$$

$$k(x) + 0 = 0 + k(y) \Rightarrow k(x) = 0 \qquad k(y) = 0$$

$$u(x,y) = x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3}$$

$$u(x,y) = C_1 \Rightarrow \boxed{x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C_1}$$

ÖRNEK:

$$\left(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y\right) dx + \left(2y^3 + 2x^2y + 2x\right) dy = 0$$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 4x^3y + 4x^2 + 4xy + 4xy^3 + 2 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 4xy + 2 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklem değildir.

İntegrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

Bulunacak olan integrasyon çarpanının, sadece *"x"* değişkenine veya sadece *"y"* değişkenine bağlı olup olmadığı belirlenecektir.

$$f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow f = \frac{4x^3y + 4x^2 + 4xy^3}{2\,(y^3 + x^2y + x)} = 2x = f(x)$$

$$g = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow g = \frac{-4x^3y - 4x^2 - 4xy^3}{4x^3y + 4x^2 + 4xy + 4xy^3 + 2} \neq g(y)$$

Sadece *"x"* değişkenine bağlı bir ifade bulunduğu için, integrasyon çarpanı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mu = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int 2x\,dx} \Rightarrow \boxed{\mu = e^{x^2}}$$

$$\left(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y\right) dx + \left(2y^3 + 2x^2y + 2x\right) dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = e^{x^2}$ **ile çarpılacaktır.**

$$\left(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y\right)e^{x^2} dx + \left(2y^3 + 2x^2y + 2x\right)e^{x^2} dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \left(4x^3y + 4x^2 + 4xy + 4xy^3 + 2\right)e^{x^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \left(4x^3y + 4x^2 + 4xy + 4xy^3 + 2\right)e^{x^2} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır. Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int \left(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y\right)e^{x^2}dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \left(\frac{y^4}{2} + x^2y^2 + 2xy\right)e^{x^2} + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int \left(2y^3 + 2x^2y + 2x\right)e^{x^2}dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \left(\frac{y^4}{2} + x^2y^2 + 2xy\right)e^{x^2} + k(x)$$

Bulunan $\boldsymbol{u(x,y)}$ ifadeleri birbirine eşitlenecektir.

$$\left(\frac{y^4}{2}+x^2y^2+2xy\right)e^{x^2}+k(x)=\left(\frac{y^4}{2}+x^2y^2+2xy\right)e^{x^2}+k(y)$$

$$k(x)+0=0+k(y) \quad \Rightarrow \quad k(x)=0 \qquad k(y)=0$$

$$u(x,y)=\left(\frac{y^4}{2}+x^2y^2+2xy\right)e^{x^2}$$

$$u(x,y)=C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(y^4+2x^2y^2+4xy\right)e^{x^2}=C_1}$$

ÖRNEK: Eğimi yanda verilmiş olan ve $(2\,,1)$ noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz. $\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

ÇÖZÜM:

Eğim ⇨ $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ ⇨ $2xy\,dx + \left(y^2 - x^2\right) dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2x \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -2x \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Çözülmesi istenen denklem Tam Diferansiyel Denklem değildir.

İntegrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

Bulunacak olan integrasyon çarpanının, sadece $"x"$ değişkenine veya sadece $"y"$ değişkenine bağlı olup olmadığı belirlenecektir.

$$f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow f = \frac{2x - (-2x)}{y^2 - x^2} = \frac{4x}{y^2 - x^2} \neq f(x)$$

$$g = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow g = \frac{-2x - 2x}{2xy} = \frac{-4x}{2xy} = -\frac{2}{y} = g(y)$$

Sadece $"y"$ değişkenine bağlı bir ifade bulunduğu için, integrasyon çarpanı aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\mu = e^{\int g(y)\,dy} = e^{\int \frac{-2}{y}\,dy} = e^{-2Ln(y)} = e^{Ln(y^{-2})} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{y^2}}$$

$$2xy\,dx + \left(y^2 - x^2\right) dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = \dfrac{1}{y^2}$ ile çarpılacaktır.

$$\frac{2x}{y}\,dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= -\frac{2x}{y^2} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -\frac{2x}{y^2} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır.

Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\, dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int \frac{2x}{y}\, dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y} + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)\, dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) dy + k(x)$$

$$u(x,y) = y + \frac{x^2}{y} + k(x)$$

$$u(x,y) \Rightarrow y+\frac{x^2}{y}+k(x)=\frac{x^2}{y}+k(y)$$

$$k(x)+y=0+k(y) \Rightarrow k(x)=0 \qquad k(y)=y$$

$$u(x,y)=y+\frac{x^2}{y} \Rightarrow u(x,y)=C_1 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=C_1\,y}$$

$(2\,,1)$ noktasından geçen eğrinin denklemi istenmektedir.

$x=2$ için $y=1$ şartını sağlayan özel çözüm bulunacaktır.

$$(2)^2+(1)^2=C_1 \Rightarrow \boxed{C_1=5}$$

Eğrinin denklemi $\Rightarrow$ $\boxed{x^2+y^2=5y}$

BÖLÜM 6
LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

HATIRLATMA

Bir diferansiyel denklemde,

1) Bağımlı değişken ve türevleri birinci dereceden ise,

2) Bağımlı değişken ile türevlerinin birbirleriyle çarpımı yok ise,

"Lineer" diferansiyel denklem denir.

Burada ele alınacak olan "Lineer Diferansiyel Denklem" aşağıdaki gibidir.

$$\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x)}$$

Görüldüğü üzere, diferansiyel denklemde eşitliğin sol tarafı bağımlı değişken "y" ve onun birinci türevine göre lineerdir.

$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$ Lineer diferansiyel denklemi, $Q(x)$ fonksiyonunun değerine göre sınıflandırılmaktadır.

$Q(x) = 0$ ⇨ Homojen (ikinci tarafsız) lineer diferansiyel denklem

$Q(x) \neq 0$ ⇨ Homojen olmayan lineer diferansiyel denklem

GENEL ÇÖZÜMÜN BULUNMASI

Bir $a < x < b$ aralığında $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları sürekli ise, bu aralıkta lineer diferansiyel denklemin çözümü vardır.

A) Homojen Lineer Diferansiyel Denklemin Genel Çözümü

$$y' + P(x) \cdot y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x) \cdot dx$$

$$Ln(y) = -\int P(x)\, dx + C_1 \Rightarrow \boxed{y = C_1\, e^{-\int P(x)\, dx}}$$

B) Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemin Genel Çözümü

$$\frac{dy}{dx} + (P(x) \cdot y - Q(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(P(x) \cdot y - Q(x)\big)\, dx + dy = 0 \qquad (*)$$

$(*)$ denklemi, $\mu(x)$ şeklinde sadece $"x"$ değişkenine bağlı bir integrasyon çarpanı yardımıyla tam diferansiyel denkleme dönüştürülmektedir.

$$\left.\begin{aligned} M(x,y) &= P(x) \cdot y - Q(x) \\ N(x,y) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad f = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = P(x)$$

İntegrasyon Çarpanı $\Rightarrow$ $\boxed{\mu(x) = e^{\int P(x)\, dx}}$

$(*)$ denklemi $\mu(x)$ integrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülüp genel çözümü bulunacaktır.

ÖRNEK: $y' - y = e^{2x}$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: **Denklem, homojen olmayan lineer diferansiyel denklemdir.**

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} \Rightarrow \quad P(x) = -1 \qquad Q(x) = e^{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y + e^{2x} \Rightarrow \quad \left(y + e^{2x}\right) dx - dy = 0$$

Çözülecek denklem Tam Diferansiyel Denklem olmadığı için integrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

$$\mu(x) = e^{\int -1\, dx} \Rightarrow \quad \boxed{\mu = e^{-x}}$$

$$\left(y + e^{2x}\right) dx - dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = e^{-x}$ **ile çarpılacaktır.**

$$\left(y\, e^{-x} + e^{x} \right) dx - e^{-x}\, dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= e^{-x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^{-x} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır. Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\, dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int (\, y\, e^{-x} + e^{x}\,)\, dx + k(y)$$

$$u(x,y) = -y\, e^{-x} + e^{x} + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)\, dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int (-e^{-x})\, dy + k(x) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = -y\, e^{-x} + k(x)$$

Bulunan $u(x,y)$ ifadeleri birbirine eşitlenecektir.

$$-y\,e^{-x} + k(x) = -y\,e^{-x} + e^{x} + k(y)$$

$$k(x) = e^{x} \qquad\qquad k(y) = 0$$

$$u(x,y) = -y\,e^{-x} + e^{x} \;\Rightarrow\; u(x,y) = C_1$$

$$-y\,e^{-x} + e^{x} = C_1 \;\Rightarrow\; y\,e^{-x} = e^{x} + C_1 \;\Rightarrow\; y = \frac{e^{x} + C_1}{e^{-x}}$$

$$y = (e^{x} + C_1)\,e^{x} \;\Rightarrow\; \boxed{y = e^{2x} + C_1\,e^{x}}$$

ÖRNEK: $y' + 2xy = 4x$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: Denklem, homojen olmayan lineer diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad \Rightarrow \quad P(x) = 2x \qquad Q(x) = 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 2xy \quad \Rightarrow \quad (2xy - 4x)\,dx + dy = 0$$

Çözülecek denklem Tam Diferansiyel Denklem olmadığı için integrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

$$\mu(x) = e^{\int 2x\,dx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = e^{x^2}}$$

$$(2xy - 4x)\,dx + dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = e^{x^2}$ ile çarpılacaktır.

$$2x\,e^{x^2}(y-2)dx + e^{x^2}dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= 2x\,e^{x^2} \\[2ex] \frac{\partial N}{\partial x} &= 2x\,e^{x^2} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır. Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int 2x\, e^{x^2}(y-2)dx + k(y)$$

$$u(x,y) = e^{x^2}(y-2) + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int e^{x^2} dy + k(x) \Rightarrow u(x,y) = e^{x^2} y + k(x)$$

Bulunan $u(x,y)$ ifadeleri birbirine eşitlenecektir.

$$e^{x^2}y + k(x) = e^{x^2}y - 2e^{x^2} + k(y)$$

$$k(x) = -2e^{x^2} \qquad k(y) = 0$$

$$u(x,y) = e^{x^2}(y-2) \Rightarrow u(x,y) = C_1$$

$$e^{x^2}y - 2e^{x^2} = C_1 \Rightarrow e^{x^2}y = C_1 + 2e^{x^2} \Rightarrow y = \frac{C_1 + 2e^{x^2}}{e^{x^2}}$$

$$y = \left(C_1 + 2e^{x^2}\right)e^{-x^2} \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{-x^2} + 2}$$

ÖRNEK: $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

şeklinde verilmiş olan diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM: **Denklem, homojen olmayan lineer diferansiyel denklemdir.**

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad P(x) = -\frac{1}{x} \qquad Q(x) = x^2 + 3x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x - 2 + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(x^2 + 3x - 2 + \frac{y}{x}\right)dx - dy = 0$$

Çözülecek denklem Tam Diferansiyel Denklem olmadığı için integrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-Ln(x)} = e^{Ln(x^{-1})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{1}{x}}$$

$$\left(x^2 + 3x - 2 + \frac{y}{x}\right)dx - dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = \dfrac{1}{x}$ ile çarpılacaktır.

$$\left(\frac{x^2 + 3x - 2}{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}\,dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{1}{x^2} \\[2ex] \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}\right\} \qquad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır. Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int \left(x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{y}{x^2}\right) dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\,Ln(x) - \frac{y}{x} + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow u(x,y) = \int N(x,y)\,dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dy + k(x) \Rightarrow u(x,y) = -\frac{y}{x} + k(x)$$

Bulunan $u(x, y)$ ifadeleri birbirine eşitlenecektir.

$$-\frac{y}{x} + k(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\,Ln(x) - \frac{y}{x} + k(y)$$

$$k(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\,Ln(x) \qquad\qquad k(y) = 0$$

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\,Ln(x) - \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; u(x, y) = C_1$$

$$\frac{x^2}{2} + 3x - 2\,Ln(x) - \frac{y}{x} = C_1 \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\,Ln(x) + C_1$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\,Ln(x) + C_1\,x}$$

ÖRNEK: $y' + y\,Tan(x) = Sin(2x) \qquad y(0) = 1$

şeklinde verilmiş olan başlangıç değer problemini çözünüz.

ÇÖZÜM: **Denklem, homojen olmayan lineer diferansiyel denklemdir.**

$$\frac{dy}{dx} + y\,Tan(x) = Sin(2x) \Rightarrow P(x) = Tan(x) \qquad Q(x) = Sin(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = Sin(2x) - y\,Tan(x) \Rightarrow \big(y\,Tan(x) - Sin(2x)\big)dx + dy = 0$$

Çözülecek denklem Tam Diferansiyel Denklem olmadığı için integrasyon çarpanı ile tam diferansiyel denkleme dönüştürülecektir.

$$\mu(x) = e^{\int Tan(x)dx} = e^{-Ln(Cos(x))} = e^{Ln(Cos(x)^{-1})} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{Cos(x)}}$$

$$\big(y\,Tan(x) - Sin(2x)\big)dx + dy = 0$$

Tam diferansiyel olmayan bu denklem, $\mu = \dfrac{1}{Cos(x)}$ ile çarpılacaktır.

$$\left(\frac{y\,Tan(x) - Sin(2x)}{Cos(x)}\right)dx + \frac{1}{Cos(x)}dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{Tan(x)}{Cos(x)} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{Tan(x)}{Cos(x)} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

İntegrasyon çarpanı yardımıyla denklem, Tam Diferansiyel Denklem haline getirilmiştir. Yeni denklem ile ilk denklem birbirinin eşdeğeri olduğundan genel çözümleri aynıdır. Tam diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int M(x,y)\, dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \int \left(\frac{y\, Tan(x) - Sin(2x)}{Cos(x)} \right) dx + k(y)$$

$$u(x,y) = \frac{y}{Cos(x)} + 2\, Cos(x) + k(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int N(x,y)\, dy + k(x)$$

$$u(x,y) = \int \frac{1}{Cos(x)} dy + k(x) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{y}{Cos(x)} + k(x)$$

Bulunan $u(x,y)$ ifadeleri birbirine eşitlenecektir.

$$\frac{y}{Cos(x)} + k(x) = \frac{y}{Cos(x)} + 2\ Cos(x) + k(y)$$

$$k(x) = 2\ Cos(x) \qquad\qquad k(y) = 0$$

$$u(x,y) = \frac{y}{Cos(x)} + 2\ Cos(x) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = C_1$$

$$\frac{y}{Cos(x)} + 2\ Cos(x) = C_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{Cos(x)} = C_1 - 2\ Cos(x)$$

$$\boxed{y = C_1\ Cos(x) - 2\ Cos^2(x)}$$

Verilmiş olan başlangıç şartı için özel çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

Genel Çözüm ⇨ $y = C_1\, Cos(x) - 2\, Cos^2(x)$

Başlangıç Şartı ⇨ $y(0) = 1$ ⇨ $x = 0$ **için** $y = 1$

Başlangıç şartı genel çözümde yerine yazılacaktır.

$$1 = C_1\, \underbrace{Cos(0)}_{1} - 2\, \underbrace{Cos^2(0)}_{1} \;\Rightarrow\; 1 = C_1 - 2 \;\Rightarrow\; \boxed{C_1 = 3}$$

Bulunan integral sabitinin değeri genel çözümde yerine yazılacaktır.

Özel Çözüm ⇨ $\boxed{y = 3\, Cos(x) - 2\, Cos^2(x)}$