## REEL SAYILAR

* Ondalıklı olarak gösterilebilen sayılara «Reel Sayılar» denir.

ÖRNEK:

$$5 = 5{,}0000\ldots$$

$$-\frac{3}{4} = -0{,}750000\ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$

$$\pi = 3.14159\ldots$$

* $\mathbb{R}$ : Reel Sayılar Kümesi

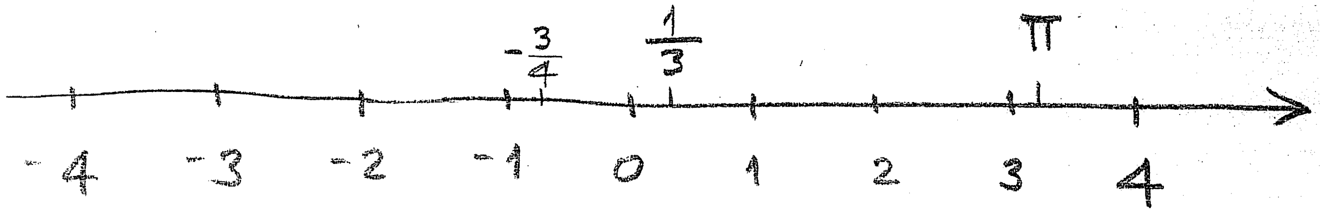
* Reel Sayılar Kümesi; sayma sayılar, doğal sayılar, tamsayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerini kapsar.

## REEL SAYILAR EKSENİ

* Üzerinde reel sayıların gösterildiği sayı eksenine « Reel Sayılar Ekseni » (RSE) denir

* Reel Sayılar Ekseni, bir O başlangıç noktası, pozitif yön ve uzunluk birimi seçilmiş bir doğrudur.

* Genellikle yatay olarak alınır ve soldan sağa gidiş, pozitif yön olarak seçilir.




## REEL SAYILARDA SIRALAMA

* $a$ ve $b$ reel sayılar ve $a \neq b$ olsun ($a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq b$)

* Eğer, RSE üzerinde, $b$, $a$'nın sağında yer alıyorsa, bu durumda, « $a$ küçüktür $b$ » denir ve $a < b$ ile gösterilir. (Veya « $b$ büyüktür $a$ » denir ve $b > a$ ile gösterilir).

* Eğer $a < b$ veya $a = b$ ise « $a$ küçük-eşit $b$ » denir ve

$$a \leq b$$

şeklinde gösterilir.

* Sayılar arasında "$\leq$", "$>$" veya "$<$" simgelerinden birinin kullanılmış olduğu bir ifadeye "eşitsizlik" denir

## EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ BAZI KURALLAR

* a, b, c reel sayılar olsun
  ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2) $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3) $a < b$ ve $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4) $a < b$ ve $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
5) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
6) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

   (payda büyüdükçe sayı küçülür)

ARALIK

* a ve b herhangi iki reel sayı ve $a<b$ olsun ($a, b \in \mathbb{R}$ ve $a<b$). a ve b arasındaki tüm reel sayılardan oluşan, reel sayılar kümesinin bir alt kümesine bir "aralık" denir.

* Burada, a ve b sayılarına aralığın "sınır noktaları" denir. a sayısına, aralığın "sol sınır noktası", b sayısına ise aralığın "sağ sınır noktası" denir.

* Geometrik olarak aralık, bir doğru parçasıdır.

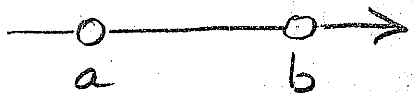
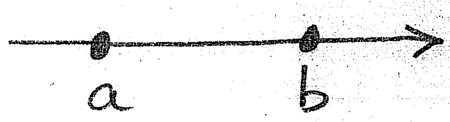
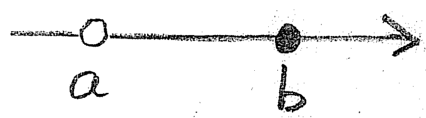
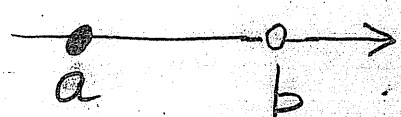
* Sınır noktalarının aralığı oluşturan kümede bulunup bulunmamasına bağlı olarak, aralıklara çeşitli isimler verilir.

* Herhangi bir aralığın sınır noktalarının hiç biri, aralığı oluşturan kümenin elemanı değilse, bu aralığa "açık aralık" denir.

* Herhangi bir aralığın sınır noktalarının her ikisi de, aralığı oluşturan kümenin

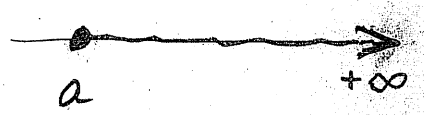
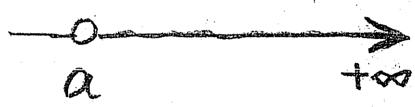
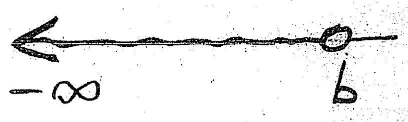
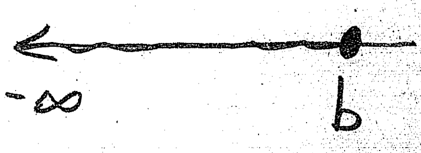
elemanı ise, bu aralığa « kapalı aralık » denir.

* Herhangi bir aralığın sınır noktalarından yanlızca biri, aralığı oluşturan kümenin bir elemanı ise, bu aralığa « yarı-açık aralık » denir.

| Küme Yazılışı | Gösterilişi | Okunuşu | Geometrik Model |
|---|---|---|---|
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ | $(a, b)$ | a, b açık aralığı |  |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ | $[a, b]$ | a, b kapalı aralığı |  |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ | $(a, b]$ | a, b yarı-açık aralığı |  |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ | $[a, b)$ | a, b yarı-açık aralığı |  |

* Herhangi bir aralığın sınır noktalarından biri ya da her ikisi sonsuz ise, bu aralığa, « sonsuz aralık » denir.

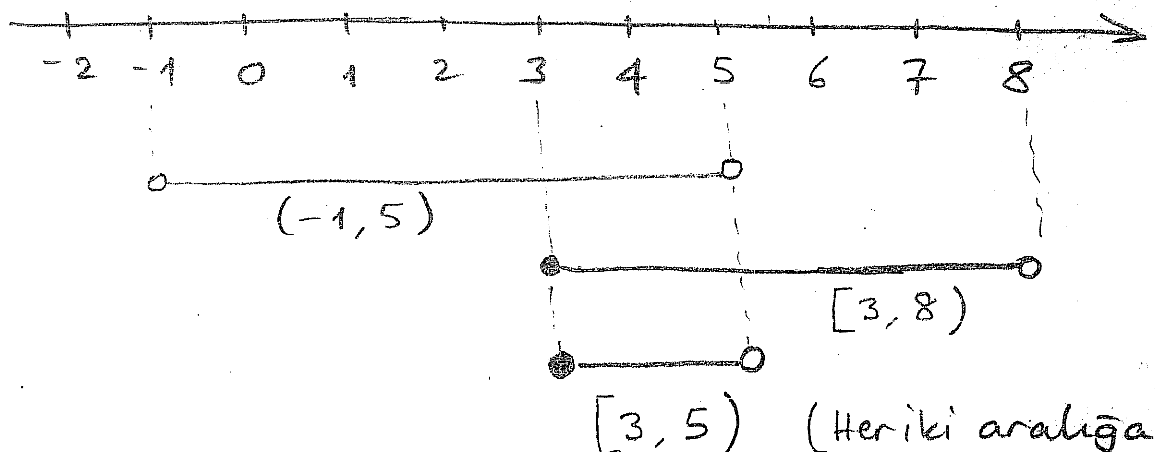
## Sonsuz Aralıklar:

| Küme Yazılışı | Gösterilişi | Okunuşu | Geometrik Model |
|---|---|---|---|
| $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ | $[a, +\infty)$ | soldan a ile sınırlı, sağdan sınırsız, sonsuz aralık |  |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ | $(a, +\infty)$ | soldan a ile sınırlı, sağdan sınırsız, sonsuz aralık |  |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ | $(-\infty, b)$ | soldan sınırsız, sağdan b ile sınırlı sonsuz aralık |  |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ | $(-\infty, b]$ | soldan sınırsız, sağdan b ile sınırlı sonsuz aralık |  |

* Aralıklar reel sayılar kümesinin alt kümeleri oldukları için, aralıklarda da küme işlemleri geçerlidir.

ÖRNEK:

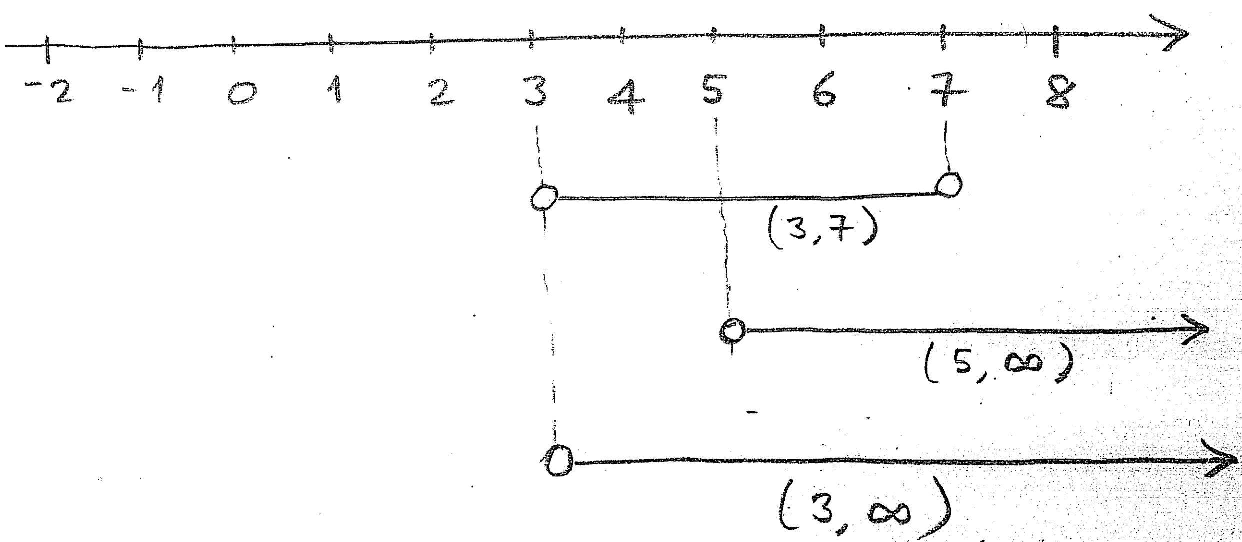
$$[3,8) \cap (-1,5) = [3,5)$$




(Her iki aralığa ait elemanlar)

ÖRNEK:

$$(3,7) \cup (5,+\infty) = (3,+\infty)$$



**ÖRNEK:** $\dfrac{2}{x-1} \geq 5$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinden oluşan aralığı bulunuz ve RSE üzerinde gösteriniz.

**ÇÖZÜM:** $\dfrac{2}{x-1} \geq 5$ (iki tarafı x−1 ile çarpmak istiyoruz)

$\Rightarrow$ iki durum göz önüne alınmalıdır:

1. Durum: $x-1 > 0$

2. Durum: $x-1 < 0$

$\Rightarrow$ **1. Durum:**

$$x-1 > 0 \Rightarrow \underline{x > 1}$$

$$\frac{2}{x-1} \geq 5 \Rightarrow 2 \geq 5x-5$$

$$\Rightarrow 7 \geq 5x$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{7}{5} \geq x}$$

$\Rightarrow$ çözüm aralığı (ç.a.): $\left(1, \dfrac{7}{5}\right]$

(1. Durum için)

$\Rightarrow$ 2. Durum:

$x-1<0 \Rightarrow \underline{x<1}$ (1)

$\frac{2}{x-1} \geq 5 \Rightarrow 2 \leq 5x-5$

$\Rightarrow 7 \leq 5x$

$\Rightarrow \underline{\frac{7}{5} \leq x}$ (2)

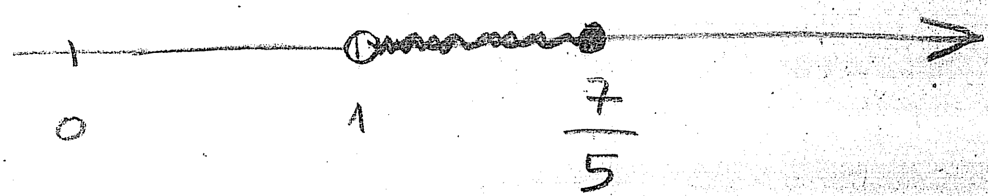
$\Rightarrow$ (1) ve (2) yi sağlayan sayı yok!

$\Rightarrow$ 1. Durum geçerli

$\Rightarrow$ problemin çözümü, 1. Durum için bulunan ç.a. dır.

$\Rightarrow$ ç.a: $\left(1, \frac{7}{5}\right]$

$\Rightarrow$



**ÖRNEK:** $x^2 - 5x + 6 < 0$ eşitsizliğini sağlayan $x$ değerlerinden oluşan aralığı bulunuz ve RSE üzerinde gösteriniz.

**ÇÖZÜM:**

$x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) < 0$

$\Rightarrow$ $(x-2)$ veya $(x-3)$'ten yanlızça biri sıfırdan küçük olabilir

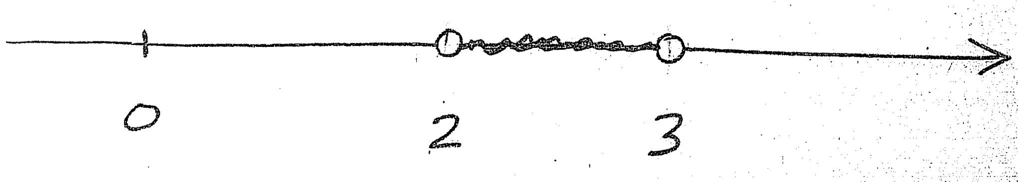
$x-3 < x-2$ olduğunu biliyoruz

$\Rightarrow$ $x-3 < 0$ VE $x-2 > 0$ olmalıdır

$\Rightarrow$ $x < 3$ VE $x > 2$

$\Rightarrow$ Ç.a.: $(2, 3)$

$\Rightarrow$



**ÖRNEK:** $2x^2 + 1 > 4x$ eşitsizliğini sağlayan $x$ değerlerinden oluşan aralığı bulunuz ve RSE üzerinde gösteriniz.

Çözüm:

$$2x^2+1 > 4x \Rightarrow 2x^2-4x+1 > 0$$
$$(Ax^2+Bx+C)$$

$$\Rightarrow \left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

$\Rightarrow$ Her ikisi negatif VEYA Her ikisi pozitif olmalıdır.

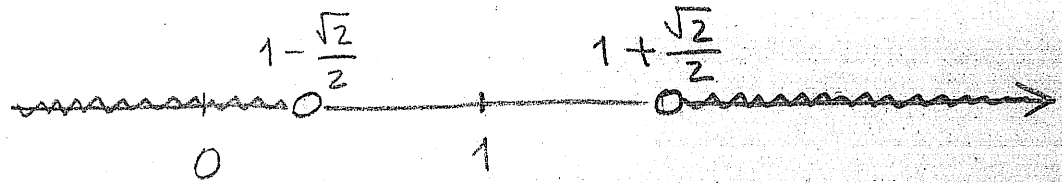
$\Rightarrow$ Her ikisi negatif:

$$\left.\begin{array}{l} x-1+\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \Rightarrow x < 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x-1-\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \Rightarrow x < 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x < 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$ Her ikisi pozitif:

$$\left.\begin{array}{l} x-1+\frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow x > 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x-1-\frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow x > 1+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x > 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{ç.a.}: \left(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$$

$\Rightarrow$ 

ÖRNEK: $\dfrac{3}{x-1} < -\dfrac{2}{x}$ eşitsizliğini sağlayan $x$ değerlerinden oluşan aralığı bulunuz ve RSE üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x} \Rightarrow \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$$

$\Rightarrow \dfrac{5x-2}{x(x-1)} < 0 \Rightarrow$ pay ve payda zıt işaretli olmalıdır.

$\Rightarrow$ 1. Durum: $5x-2 > 0$ VE $x(x-1) < 0$

$\Rightarrow x > \dfrac{2}{5}$ VE $0 < x < 1$

$\Rightarrow$ ç.a.: $\left(\dfrac{2}{5}, 1\right)$ (1. Durum için)

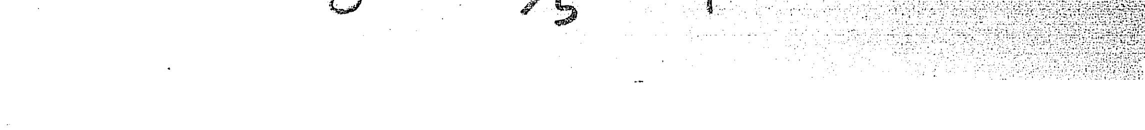
$\Rightarrow$ 2. Durum: $5x-2 < 0$ VE $x(x-1) > 0$

$\Rightarrow x < \dfrac{2}{5}$ VE ($x < 0$ VEYA $x > 1$)

$\Rightarrow$ ç.a.: $(-\infty, 0)$ (2. Durum için)

$\Rightarrow$ problemin çözümü: 1. Durum $\cup$ 2. Durum

$\Rightarrow (-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{5}, 1\right)$

$\Rightarrow$ 

# BİR REEL SAYININ MUTLAK DEĞERİ

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a$ sayısının sıfıra olan uzaklığına, $a$ sayısının "mutlak değeri" veya "büyüklüğü" denir ve $|a|$ ile gösterilir.

$$\Rightarrow \quad |a| = \begin{cases} a, & a > 0 \text{ ise} \\ 0, & a = 0 \text{ ise} \\ -a, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

yazılabilir.

ÖRNEK:

$$|2| = 2$$
$$|3| = 3$$
$$|-5| = 5$$
$$|0| = 0$$

$\Rightarrow$ Yukarıdaki tanıma göre, bütün $x$ reel sayıları için:

$$x \leq |x| \quad , \quad |x| \geq 0$$

eşitsizlikleri;

ve $x = 0$ için ise: $|x| = 0$

eşitliği yazılabilir.

## MUTLAK DEĞERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

a ve b herhangi iki reel sayı olsun.
($a, b \in \mathbb{R}$ olsun)

1) $|-a| = |a|$ , $|-b| = |b|$

2) $-|a| \leq a \leq |a|$

3) $|a-b| = |b-a|$

4) $|a+b| \leq |a| + |b|$

5) $|a-b| \geq |a| - |b|$

6) $|ab| = |a||b|$

7) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

ÖRNEK: $|2x+5| = 3$ denklemini çözünüz ($x = ?$)

ÇÖZÜM:

(Mutlak Değer içeren ifadeler için her zaman iki durum gözönüne alınmalıdır)

$\Rightarrow |2x+5| = 3$

$\Rightarrow$ 1. Durum:

$2x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow |2x+5| = 2x+5$

$\Rightarrow 2x+5 = 3 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$\Rightarrow$ 2. Durum:

$2x+5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow |2x+5| = -2x-5$

$\Rightarrow -2x-5 = 3 \Rightarrow \boxed{x=-4}$

$\Rightarrow$ İki çözüm var:

$\boxed{x=-1 \text{ veya } x=-4}$

ÖRNEK: $|3x-2| \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan $x$ değerlerinden oluşan aralığı bulunuz ve RSE üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM: (İki durum göz önüne alınarak çözülecek)

<u>1. Durum:</u> $3x-2 \geq 0 \Rightarrow \underline{x \geq \frac{2}{3}}$

$\Rightarrow |3x-2| = 3x-2$

$\Rightarrow 3x-2 \leq 1 \Rightarrow \underline{x \leq 1}$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 1$

$\Rightarrow$ ç.a.: $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ (1. Durum için)

<u>2. Durum:</u> $3x-2 < 0 \Rightarrow \underline{x < \frac{2}{3}}$

$\Rightarrow |3x-2| = -3x+2$

$\Rightarrow -3x+2 \leq 1 \Rightarrow \underline{x \geq \frac{1}{3}}$

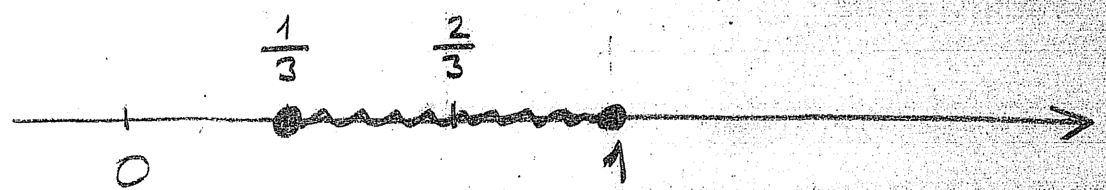
$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ ç.a: $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (2. Durum için)

$\Rightarrow$ problemin çözümü: 1. Durum $\cup$ 2. Durum

$\Rightarrow \left[\frac{2}{3}, 1\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$ ç.a.: $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

$\Rightarrow$



ÖRNEK: $\left|5-\frac{2}{x}\right| < 3$ eşitsizliğini sağlayan $x$ değerlerinden oluşan aralığı bulunuz ve RSE üzerinde gösteriniz.

Çözüm:

1. Durum:

$$5-\frac{2}{x} \geq 0 \quad \text{VE} \quad 5-\frac{2}{x} < 3$$

$$\Rightarrow 5 \geq \frac{2}{x} \quad \text{VE} \quad -\frac{2}{x} < -2$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{2}{5} \quad \text{VE} \quad x < 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \leq x < 1$$

$$\Rightarrow \text{ç.a.}: \left[\frac{2}{5}, 1\right) \quad \text{(1. Durum için)}$$

2. Durum:

$$5-\frac{2}{x} < 0 \quad \text{VE} \quad -5+\frac{2}{x} < 3$$

$$\Rightarrow 5 < \frac{2}{x} \quad \text{VE} \quad 5-\frac{2}{x} > -3$$

$$\Rightarrow x < \frac{2}{5} \quad \text{VE} \quad x > \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{2}{5}$$

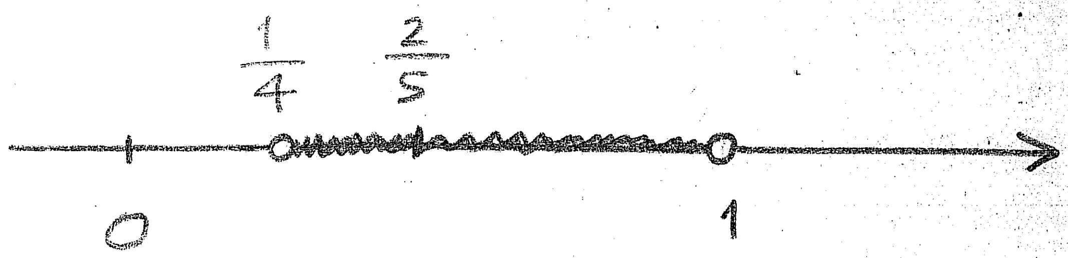
$$\Rightarrow \text{ç.a.}: \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right) \text{ (2. Durum için)}$$

$\Rightarrow$ problemin çözümü : 1. Durum $\cup$ 2. Durum

$$\Rightarrow \left[\frac{2}{5}, 1\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

$$\Rightarrow \text{ç.a.}: \left(\frac{1}{4}, 1\right)$$

$\Rightarrow$



ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan x değerlerini aralık ya da aralık birleşimi olarak gösteriniz.

1) $x \geq 0$ VE $x \leq 5$

2) $x < 2$ VE $x \geq -3$

3) $x > -5$ VEYA $x < -6$

4) $x \leq -1$

5) $x > -2$

6) $x < 4$ VEYA $x \geq 2$

7) $-2x > 4$

8) $3x + 5 \leq 8$

9) $5x - 3 \leq 7 - 3x$

10) $\dfrac{6-x}{4} \geq \dfrac{3x-4}{2}$

11) $3(2-x) < 2(3+x)$

12) $\dfrac{1}{2-x} < 3$

13) $\dfrac{x+1}{x} \geq 2$

14) $x^2 - 2x \leq 0$

15) $6x^2 - 5x \leq -1$

16) $x^2 - x \leq 2$

17) $x^3 > 4x$

18) $\dfrac{x}{2} \geq 1 + \dfrac{4}{x}$

19) $\dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2}{x+1}$

B) Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1) $|x| = 3$

2) $|x-3| = 7$

3) $|2x+5| = 4$

4) $|1-x| = 1$

5) $|8-3x| = 9$

6) $\left|\dfrac{x}{2} - 1\right| = 1$

C) Aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan aralıkları bulunuz.

1) $|x| < 2$

2) $|x| \leq 2$

3) $|x-1| \leq 2$

4) $|x+2| < 1$

5) $|3x-7| < 2$

6) $|2x+5| < 1$

7) $\left|\dfrac{x}{2} - 1\right| \leq 1$

8) $\left|2 - \dfrac{x}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$

## KOORDİNAT EKSENLERİ

* Düzlemde bulunan herhangi bir noktanın yeri, birbirine dik olarak çizilen ve O başlangıç noktalarında kesişen iki adet RSE yardımıyla belirlenebilir.

* Genellikle yatay ve düşey olarak çizilen bu eksenlere "koordinat eksenleri" denir.

* İki eksenin kesiştiği noktaya (O başlangıç noktası) «orijin» denir ve «O» ile gösterilir.

* Yatay olarak çizilen eksene, genellikle, x-ekseni denir ve bu eksen üzerindeki sayıların sağa doğru arttığı kabul edilir.

* Düşey olarak çizilen eksene ise, genellikle, y-ekseni denir ve bu eksen üzerindeki sayıların yukarı doğru arttığı kabul edilir.

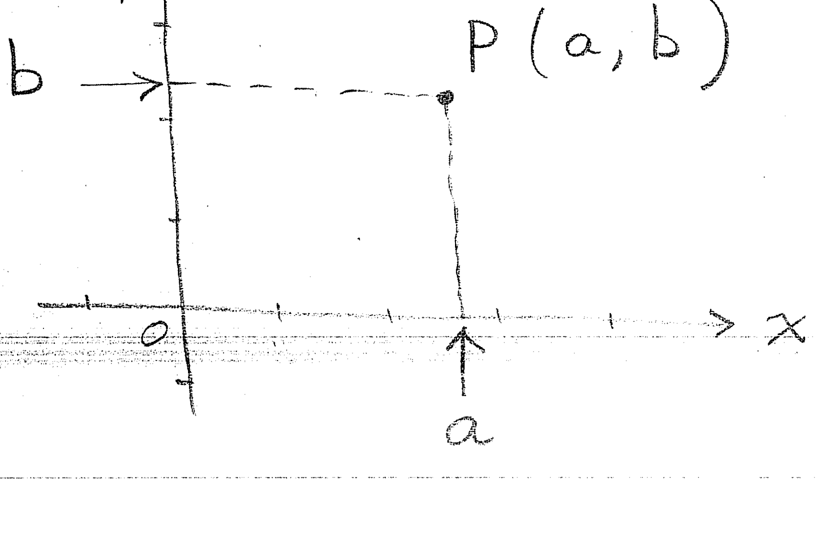
## KARTEZYEN KOORDİNATLAR

* Düzlemde bulunan herhangi bir noktanın yeri, bu noktanın koordinat eksenlerine olan dik uzaklıklarıyla belirlenir. (İşaretleriyle birlikte bu uzaklıklar, noktanın koordinatları olarak adlandırılır)

* Düzlemde bulunan herhangi bir P noktasından x-eksenine dik bir doğru çizildiğinde, bu doğru x-eksenini a noktasında kesiyorsa, bu durumda, «a, P noktasının x koordinatıdır» yada «a, P noktasının apsisidir» denir.

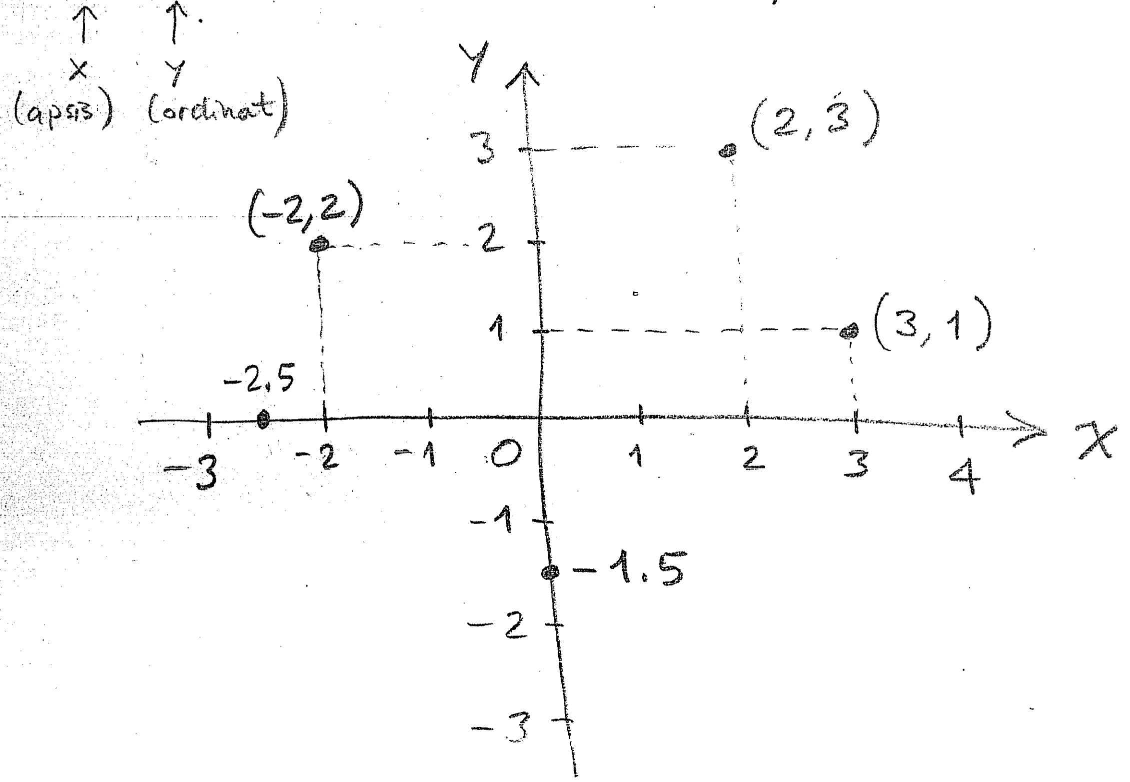
* Benzer şekilde, P noktasından y-eksenine dik bir doğru çizildiğinde, bu doğru y-eksenini b noktasında kesiyorsa, bu durumda, «b, P noktasının y-koordinatıdır» yada «b, P noktasının ordinatıdır» denir.

* Böylece elde edilen a ve b değerlerine «P noktasının koordinat çifti» veya «P noktasının kartezyen koordinatları» denir ve P(a,b) ile gösterilir.

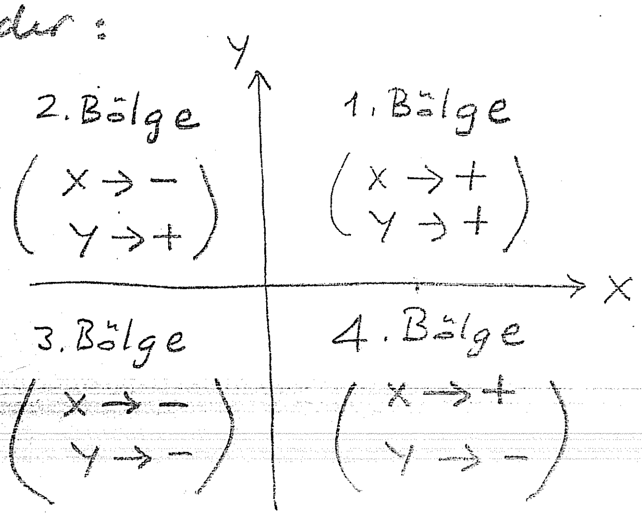


* Düzlemde bulunan her nokta, yanlızca bir koordinat çifti ile gösterilebilir ve her koordinat çifti de yanlızca bir noktayı belirler.

<u>ÖRNEK:</u> $(-2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(0,-1.5)$, $(-2.5, 0)$ koordinat çiftleriyle verilen noktalar:

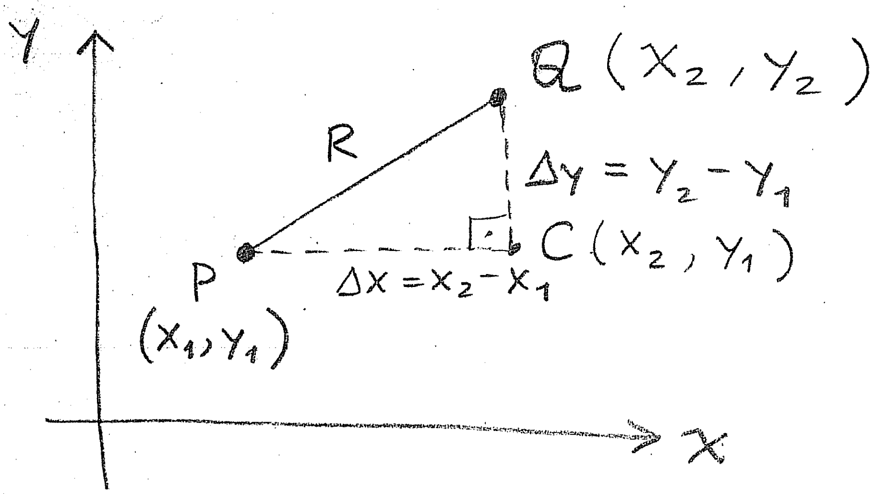



* Koordinat Eksenleri, düzlemi dört bölgeye ayırmaktadır:



# DÜZLEMDE İKİ NOKTA ARASINDAKİ UZAKLIK

* Düzlemde bulunan P ve Q gibi iki noktanın koordinatları, $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ olsun.




⇒ R : P ve Q noktaları arasındaki uzaklık

⇒ PCQ → dik üçgen

⇒ R → hipotenüs

⇒ $$R = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

⇒ $$R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Düzlemde bulunan noktalar için "uzaklık formülü"

**ÖRNEK:** $A(3,-3)$ ve $B(-1,2)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$R=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$x_1=3$, $x_2=-1$, $y_1=-3$, $y_2=2$

$$\Rightarrow R=\sqrt{(-1-3)^2+(2-(-3))^2}$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(5)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R=\sqrt{41}}$$

**ÖRNEK:** $O(0,0)$ ve $P(x,y)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz

**ÇÖZÜM:** $x_1=0$, $x_2=x$, $y_1=0$, $y_2=y$

$$\Rightarrow R=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R=\sqrt{x^2+y^2}}$$

Herhangi bir noktanın orijine olan uzaklığını veren formül.

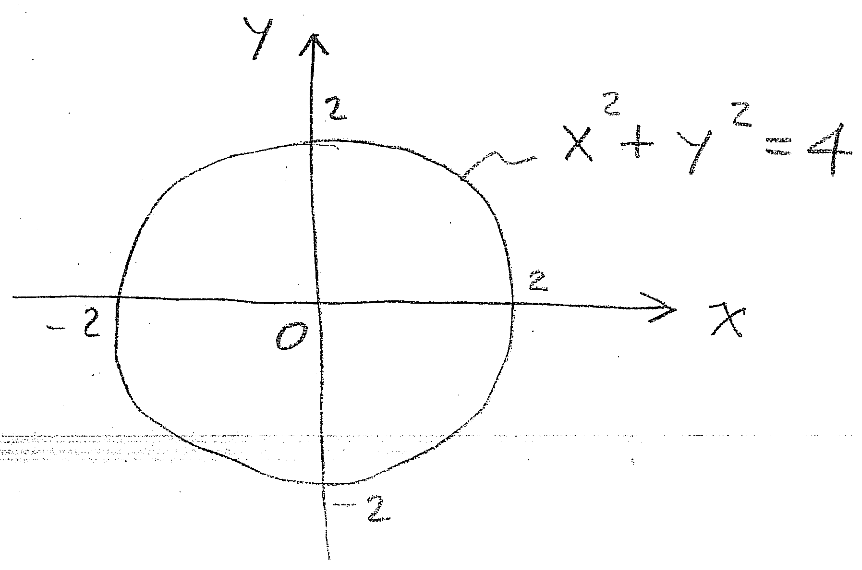
## BİR DENKLEMİN YA DA EŞİTSİZLİĞİN GRAFİĞİ

* $x$ ve $y$ değişkenlerini içeren bir denklem ya da eşitsizlik verilmiş ise; koordinatları bu denklem ya da eşitsizliği sağlayan bütün $P(x,y)$ noktalarının kümesine, verilen denklemin ya da eşitsizliğin grafiği denir.

**ÖRNEK:** $x^2+y^2=4$ denklemini göz önüne alalım.

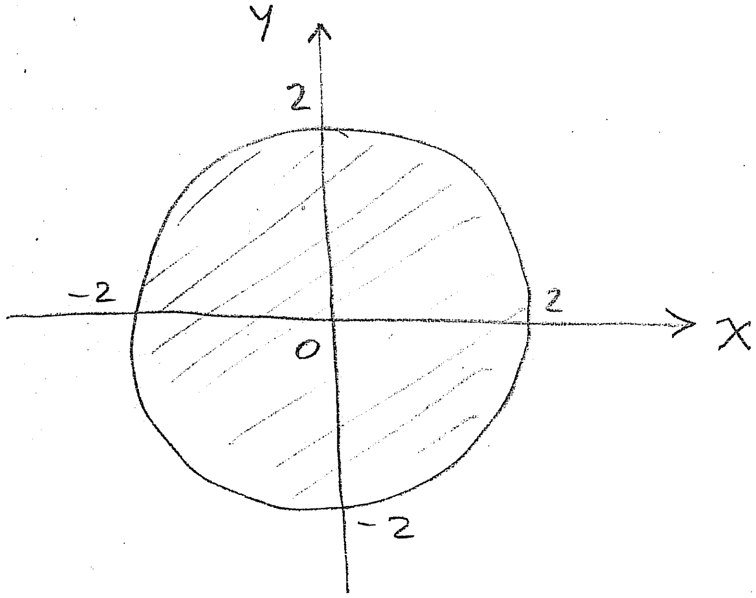
$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4} = 2$$

$\Rightarrow$ Bu denklem, orijine uzaklığı 2 olan bütün $P(x,y)$ noktalarını temsil etmektedir. Bu noktalar, merkezi orijinde ve yarıçapı 2 olan bir çember üzerindeki noktalardır. Bu çember, $x^2+y^2=4$ denkleminin GRAFİĞİ dir.



ÖRNEK: $x^2+y^2 \leq 4$ eşitsizliğini göz önüne alalım.

$\Rightarrow$ Koordinatları bu eşitsizliği sağlayan $P(x,y)$ noktalarının orijine uzaklığı $\leq 2$ olacaktır. Bu durumda verilen eşitsizliğin grafiği, merkezi orijinde ve yarıçapı 2 olan bir daire şeklinde olacaktır.



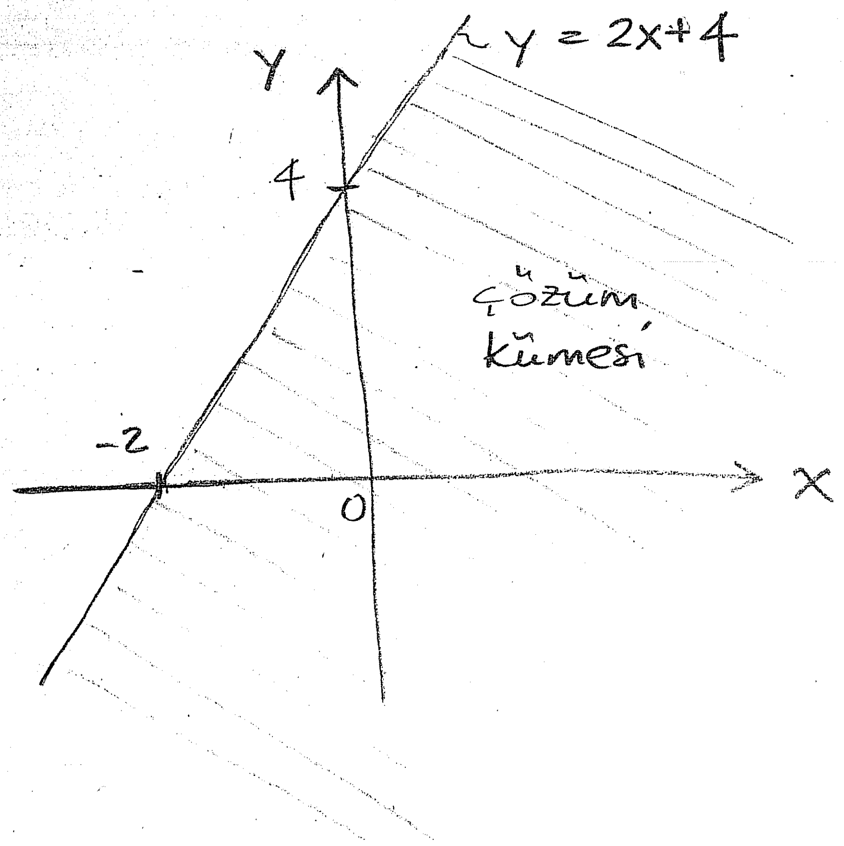

ÖRNEK: $y \leq 2x+4$ eşitsizliğinin grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM:

$\Rightarrow$ Öncelikle $y=2x+4$ doğrusu çizilir.

$\Rightarrow$ $x=0 \Rightarrow y=4$, $y=0 \Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow$




$\Rightarrow x=0, y=0 \Rightarrow 0 \leq 2*0+4 \Rightarrow 0 \leq 4$ ✓

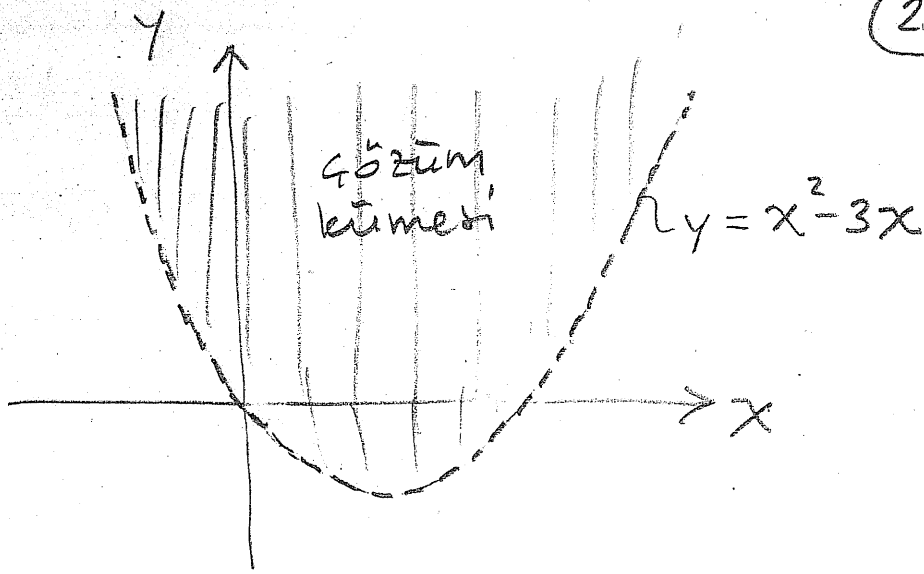
$\Rightarrow (0,0)$ noktası çözüm kümesinde

ÖRNEK: $y - x^2 + 3x > 0$ eşitsizliğinin grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM:

$\Rightarrow$ Öncelikle $y = x^2 - 3x$ parabolunun grafiği çizilir.
(Kesik kesik çizilecek)

$\Rightarrow$

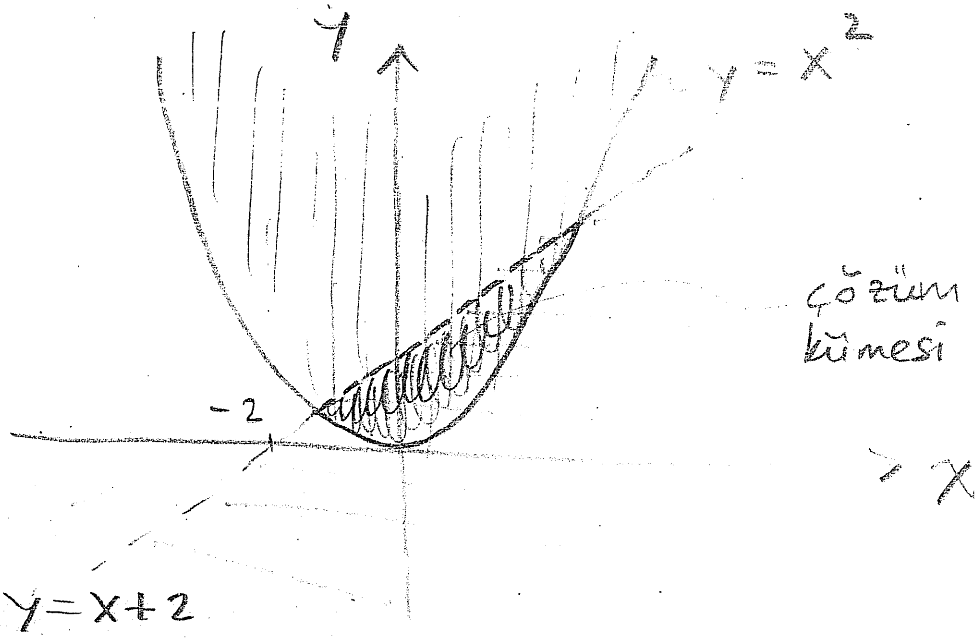



ÖRNEK: $y - x^2 \geq 0$ ve $y - x < 2$ eşitsizliğinin grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM:

$\Rightarrow$ $y \geq x^2$ ve $y < x + 2$

$\Rightarrow$



## FONKSİYONLAR

**ÖRNEK:** Yarıçapı r olan bir dairenin alanı:

$\Rightarrow$ $A = \pi r^2$

eşitliği ile hesaplanır.

* Bu örnekte dairenin alanı, yarıçapına bağlı olarak hesaplanmaktadır. Verilen bir yarıçapa karşılık bir ve yanlız bir alan hesaplanabilir.

$\Rightarrow$ Bu durumda, "dairenin alanı, yarıçapın bir fonksiyonudur" denir.

$\Rightarrow$ r yarıçapının alabileceği değerlerin oluşturduğu kümeye, "fonksiyonun tanım kümesi" denir.

$\Rightarrow$ A alanının alabileceği değerlerden oluşan kümeye ise, "fonksiyonun değer (görüntü) kümesi" denir.

⟹ $A = \pi r^2$ eşitliği, yarıçapı verilen bir dairenin alanının nasıl hesaplanacağının kuralını göstermektedir.

⟹ Yukarıdaki örnek yardımıyla, fonksiyonun tanımı şöyle yapılabilir:

## Fonksiyon:

* D ve S gibi iki küme arasında, D kümesinin her elemanına karşılık, S kümesinin bir ve yanlız bir elemanını belirleyen kurala, «D kümesinden S kümesine bir fonksiyon» denir ve $y = f(x)$ ile gösterilir.
Burada $x$, D kümesinin bir elemanı ve $y$, $x$ değerine karşılık gelen S kümesinin elemanıdır. $f$ ise $x$ değerine karşılık gelen $y$ değerini belirleyen kuraldır.

* D kümesine «fonksiyonun tanım kümesi» ve S kümesine de «fonksiyonun değer kümesi» denir.

* $y = f(x)$ şeklinde yazılan bir fonksiyonda, $x$'e «bağımsız değişken» ve $y$'ye ise,

"bağımlı değişken" denir.

* Bir fonksiyonun belirli olabilmesi için,
1) Tanım kümesinin, 2) Değer kümesinin,
3) Kuralının,
bilinmesi gerekir.

* Yukarıdaki örnekte, dairenin alanını veren fonksiyon, $A = f(r)$ şeklinde yazılabilir.

⟹ Dairenin alanı ve yarıçapı negatif sayılar olamayacağından, fonksiyonun tanım kümesi ve değer kümesi, negatif olmayan reel sayılar olacaktır. Bu da $[0, \infty)$ aralığıdır.

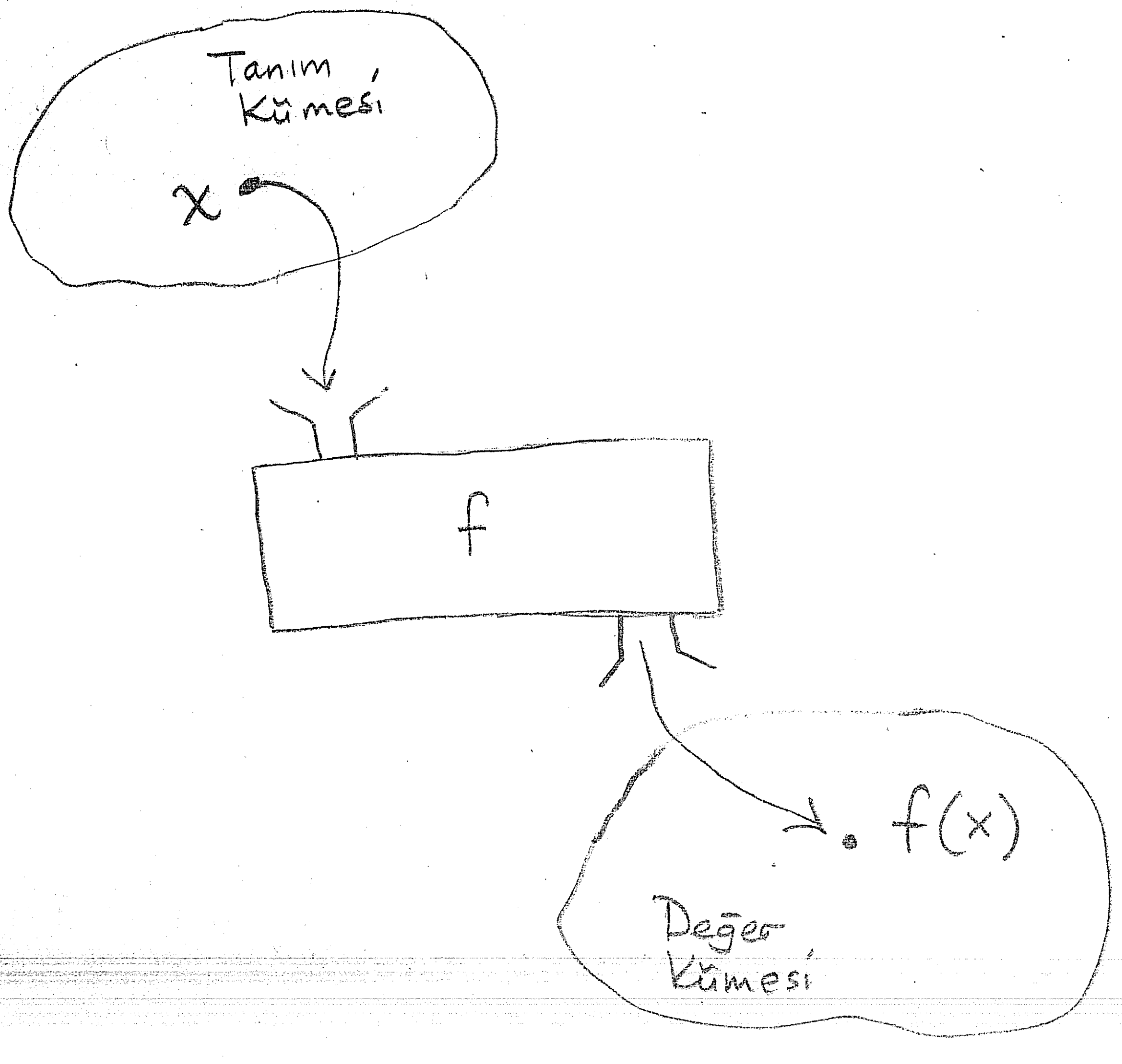
⟹ Fonksiyonun kuralı ise $f = \pi r^2$ şeklindedir.

* Bazı durumlarda, fonksiyonun kuralı ve bağımlı değişken için aynı sembolün kullanılması uygun olmaktadır.

ÖRNEK: $A = f(r) = \pi r^2$ yerine
$A = A(r) = \pi r^2$ yazılabilir.

* Fonksiyonun daha basit bir tanımı şöyle yapılabilir: Herhangi bir y değişkeni, x değişkeninin değerlerine bağlı olarak değişiyorsa, «y, x'in bir fonksiyonudur» denir.

* Herhangi bir fonksiyon, verilen bir x değerine karşılık, f(x) değerini üreten bir makineye benzetilebilir:



ÖRNEK: Bir $F$ fonksiyonu, $F(t) = 2t + 3$ şeklinde tanımlandığına göre, $t = 0$, $t = 2$, $t = x + 2$ ve $t = F(2)$ için $F(t)$'yi bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$F(0) = 2*0+3 \Rightarrow F(0) = 3$$

$$F(2) = 2*2+3 \Rightarrow F(2) = 7$$

$$F(x+2) = 2(x+2)+3 \Rightarrow F(x+2) = 2x+7$$

$$F(F(2)) = F(7) = 2*7+3 \Rightarrow F(F(2)) = 17$$

## BİR FONKSİYONUN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ

$y = f(x)$ şeklinde bir fonksiyon verilmiş olsun. Bu durumda $f(x) \in \mathbb{R}$ koşulunu sağlayan bütün $x$ reel sayılarından oluşan kümeye, bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi denir ve $E$ ile gösterilir.

(Eğer fonksiyonun tanım kümesi verilmemiş ise, tanım kümesinin en geniş tanım kümesi olduğu kabul edilir).

ÖRNEK: $h(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$

şeklinde verilen fonksiyonun en geniş tanım kümesi (aksi belirtilmemiş ise tanım kümesi), $x=2$ ve $x=-2$ dışındaki bütün reel sayılardır.

$\Rightarrow$ aralıklarla göstermek istersek:

$$E = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$$

ÖRNEK: $s(t) = \sqrt{1-t^2}$

şeklinde verilen fonksiyonun en geniş tanım kümesi (ya da tanım kümesi),

$$1-t^2 \geqslant 0$$

eşitsizliğini sağlayan $t$ reel sayılarından oluşan aralıktır.

$$\Rightarrow t^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow E = [-1, 1]$$

# FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ

* Bir $f$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ şeklindeki bir denklemin grafiği demektir. Bu grafik, koordinatları $(x, y)$ olan noktalardan oluşmaktadır. Bu noktalarda, $x$ koordinatı, $f$ fonksiyonunun tanım kümesinin bir elemanını ve $y$ koordinatı ise, $x$'e karşılık fonksiyonun aldığı değeri göstermektedir.

* Herhangi bir fonksiyonun grafiğini çizmek için, fonksiyonun tanım kümesinde bulunan çeşitli $x$ değerlerine karşılık, $(x, f(x))$ koordinat çiftleri oluşturulur. Bu koordinat çiftlerinin temsil ettikleri noktaların yeri düzlemde belirlenir. Daha sonra bu noktaların birleştirilmesiyle, fonksiyonun grafiği çizilmiş olur.

**ÖRNEK:** $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

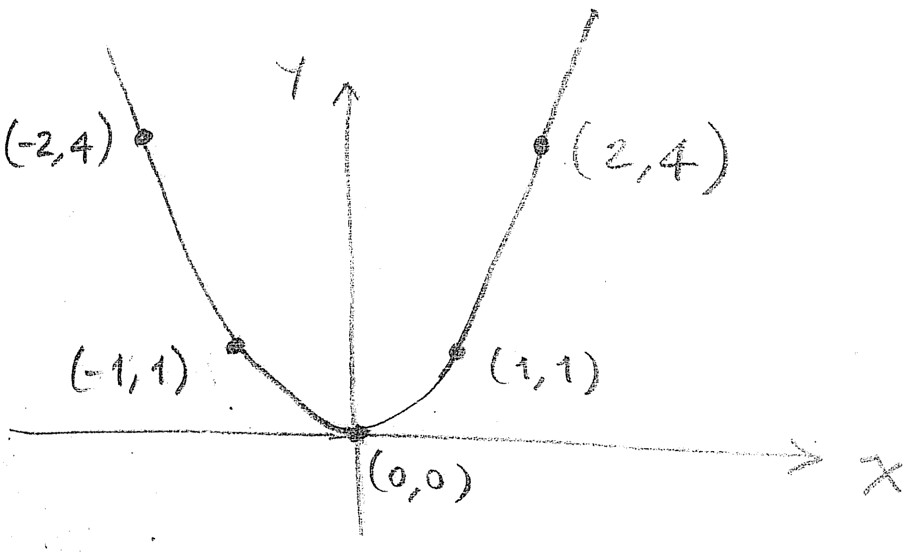
**ÇÖZÜM:** Tanım kümesinde bulunan çeşitli $x$ değerlerine karşılık, $y = f(x) = x^2$ eşitliğini sağlayan $(x, y)$ koordinat çiftleri oluşturulacak!

$\Rightarrow$ Tanım Kümesi : $(-\infty, \infty)$

$\Rightarrow$ tablo yapılabilir :

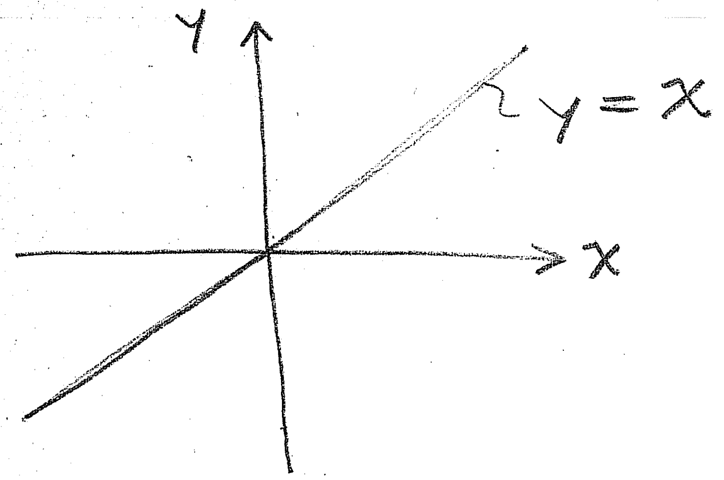
| $x$ | $y = f(x)$ |
|---|---|
| $-2$ | $4$ |
| $-1$ | $1$ |
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $1$ |
| $2$ | $4$ |

$\Rightarrow$

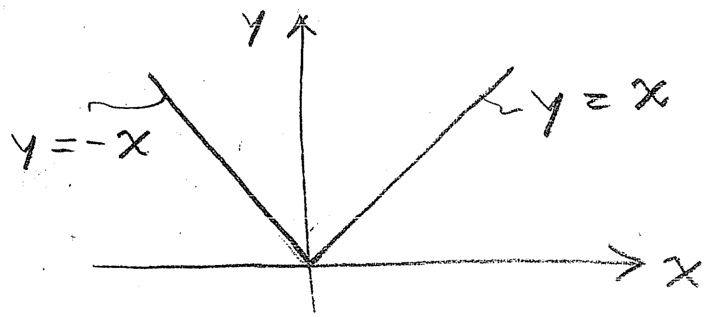



$y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği

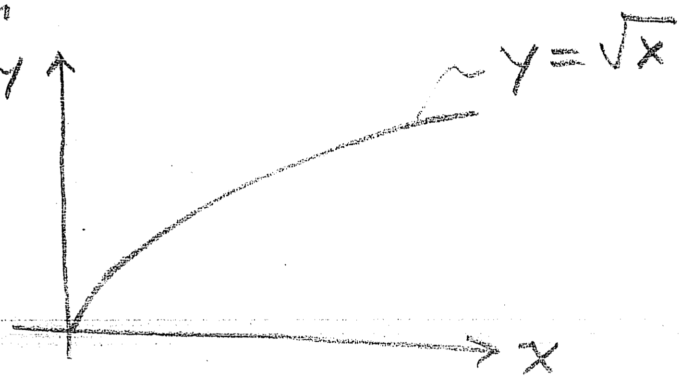
ÖRNEK: $y = f(x) = x$ fonksiyonunun grafiği



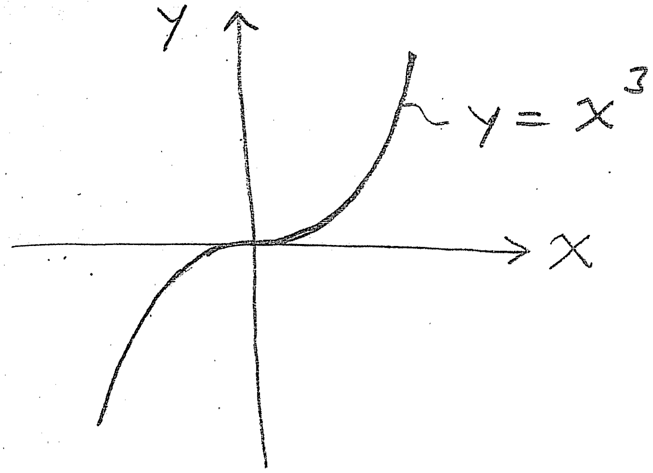

ÖRNEK: $y = f(x) = |x|$ fonksiyonunun grafiği



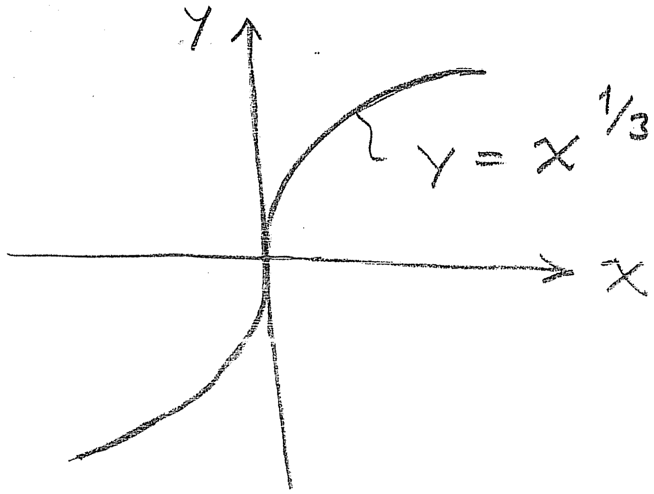

ÖRNEK: $y = f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiği



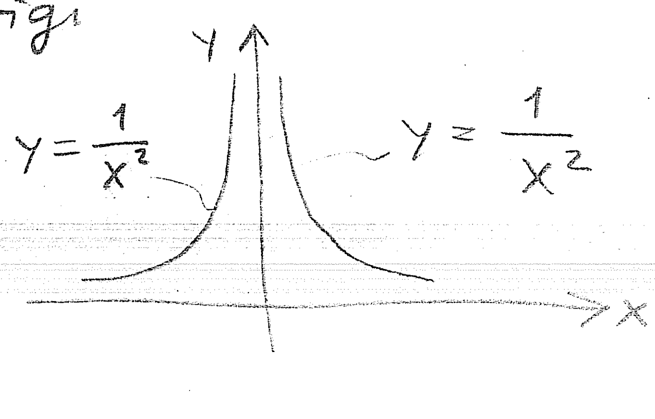
**ÖRNEK:** $y=f(x)=x^3$ fonksiyonunun grafiği



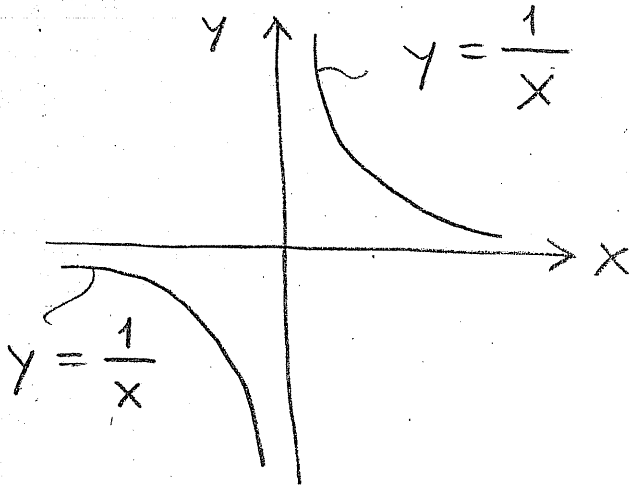

**ÖRNEK:** $y=f(x)=x^{1/3}$ fonksiyonunun grafiği



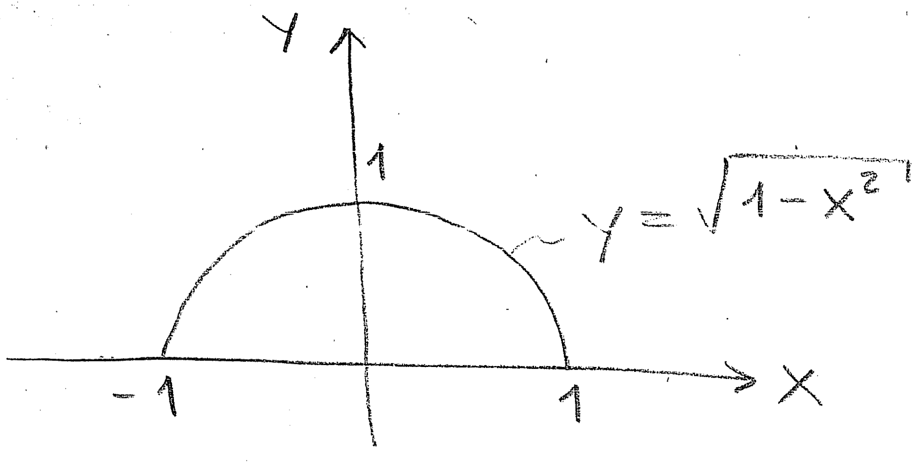

**ÖRNEK:** $y=f(x)=\frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun grafiği



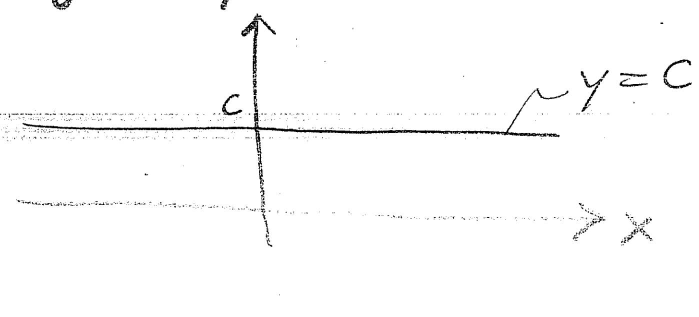
**ÖRNEK:** $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği




**ÖRNEK:** $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun grafiği

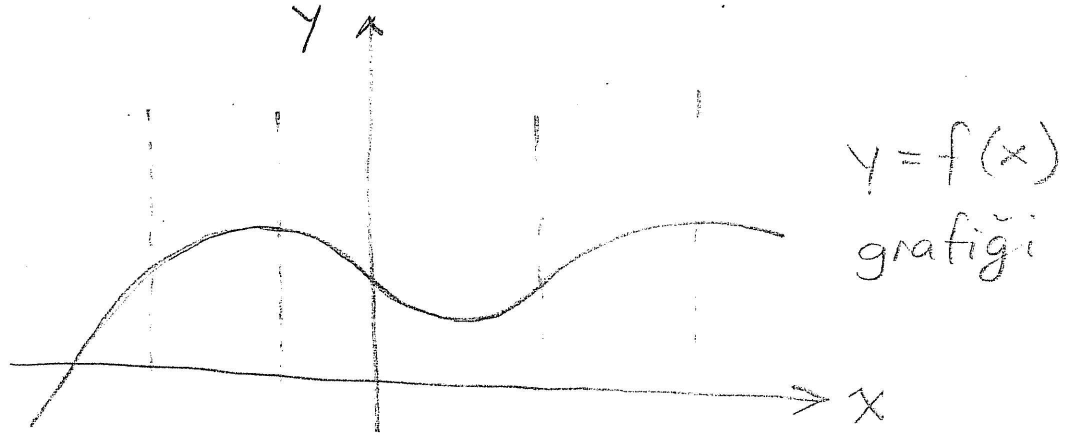


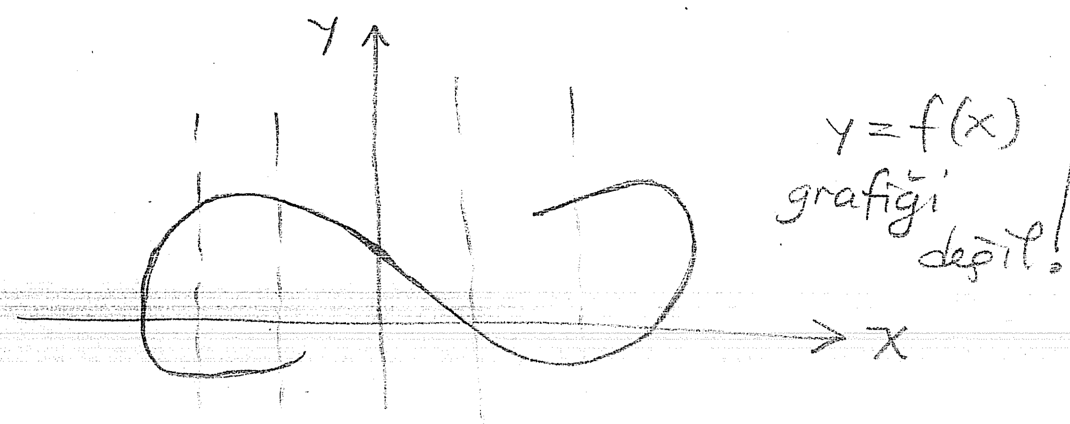

**ÖRNEK:** $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun grafiği



NOT:

Düzlemde çizilebilecek her eğri, bir fonksiyonun grafiği değildir. Düzlemde çizilen herhangi bir eğrinin bir f fonksiyonunun grafiği olabilmesi için, f'nin tanım kümesindeki her noktadan y-eksenine paralel çizilen her doğru, verilen eğriyi en fazla bir noktada kesmelidir. y-eksenine paralel çizilen bu doğrulardan en az biri grafiği iki yada daha fazla noktada kesiyorsa, bu eğri bir $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği olamaz.



## TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan bütün $x$ değerleri için $(-x)$ değerleri de tanım kümesinin elemanı olsun.

⇒ Eğer $f(x)$ fonksiyonunda $x$ yerine $-x$ konulduğunda, fonksiyon değişmiyorsa, yani $f(-x) = f(x)$ oluyorsa, bu fonksiyona «çift fonksiyon» denir.

⇒ Eğer $f(x)$ fonksiyonunda $x$ yerine $-x$ konulduğunda, fonksiyonun işareti değişiyorsa, yani $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa, bu fonksiyona «tek fonksiyon» denir.

ÖRNEK:

$$y = x^4 - 3x^2 + 1$$

$$y = \cos x$$

$$y = x^2 + 1$$

fonksiyonları, çift fonksiyondur.

**ÖRNEK:**

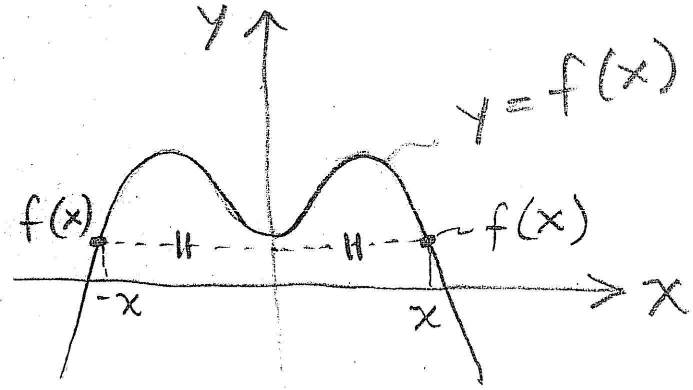
$$y = x^5$$

$$y = \sin x$$

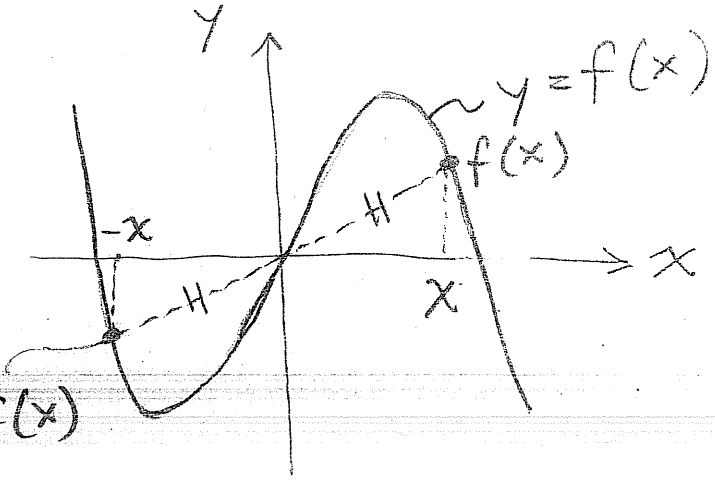
$$y = \tan x$$

fonksiyonları, tek fonksiyondur.

* Çift fonksiyonların grafiği, y-eksenine göre simetriktir.




* Tek fonksiyonların grafiği, orijine göre simetriktir.



* Genel olarak, herhangi bir fonksiyon, çift ve tek fonksiyon olmayabilir.

ÖRNEK:

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f(x) = x^3 + 1$$

fonksiyonları ne çift ne de tek fonksi_ fonksiyonlardır.

* Fonksiyonların toplamı, farkı, çarpımı ya da bölümü, yeni bir fonksiyon tanımlar.

⇒ f ve g iki fonksiyon, x ise her iki fonksiyonun da tanım kümelerinin elemanı olsun.

⇒ Bu durumda:

1) İki fonksiyonun toplamı (toplam fonksiyon):

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

2) İki fonksiyonun farkı (fark fonksiyonu):

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

3) İki fonksiyonun çarpımı (çarpım fonksiyonu):

$$(f*g)(x) = f(x)*g(x)$$

4) İki fonksiyonun bölümü (bölüm fonksiyonu):

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \left(g(x) \neq 0\right)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

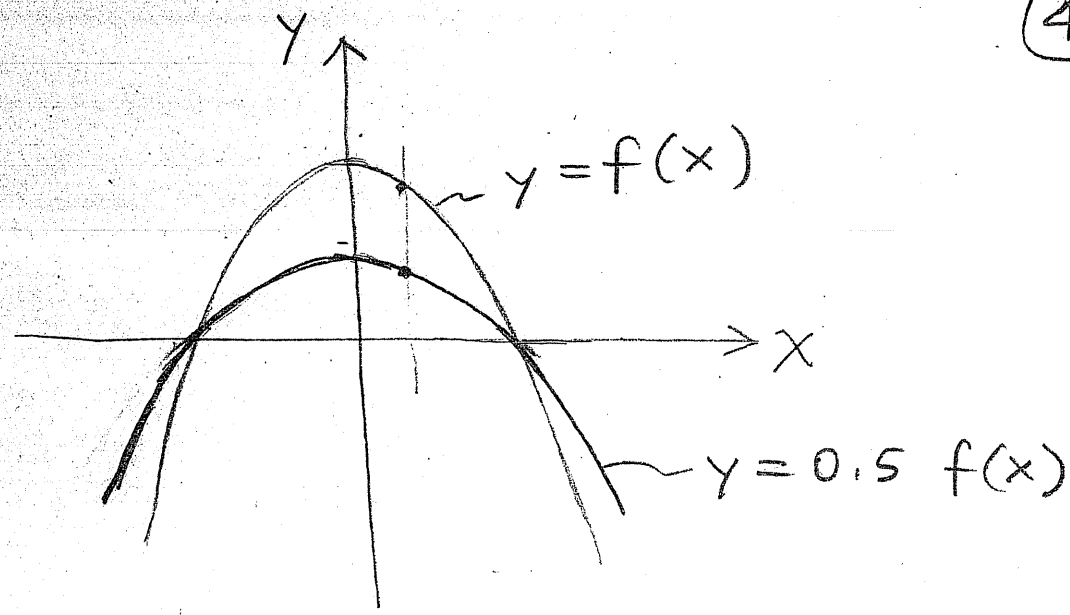
* c, herhangi bir reel sayı olmak üzere (sabit bir sayıyla çarpım fonksiyonu):

$$(c*f)(x) = c\,f(x)$$

yazılabilir.

<u>ÖRNEK:</u> $f(x) = 2-x^2$

ve $g(x) = 0.5\,f(x)$ olsun.




**ÖRNEK:** f ve g fonksiyonları:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ve} \quad g(x) = \sqrt{1-x}$$

olarak verildiğine göre,

a) $(3f)(x)$, b) $(f+g)(x)$, c) $(f-g)(x)$,

d) $(f*g)(x)$, e) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, f) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

fonksiyonlarını bulunuz ve bu fonksiyonların en geniş tanım kümelerini gösteriniz.

**ÇÖZÜM:**

$\Rightarrow$ f'nin en geniş tanım kümesi: $[0, \infty)$

$\Rightarrow$ g'nin en geniş tanım kümesi: $(-\infty, 1]$

a) $(3f)(x) = 3 * f(x)$

$\Rightarrow (3f)(x) = 3\sqrt{x} \Rightarrow E = [0, \infty)$

b) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\Rightarrow (f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow E = [0, 1]$

c) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$\Rightarrow (f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \Rightarrow E = [0, 1]$

d) $(f*g)(x) = f(x) * g(x)$

$\Rightarrow (f*g)(x) = \sqrt{x(1-x)} \Rightarrow E = [0, 1]$

e) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow E = [0, 1)$

f) $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

$\Rightarrow \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \Rightarrow E = (0, 1]$

# BİLEŞİK FONKSİYON

* $f$ ve $g$ gibi iki fonksiyon verilmiş olsun.

$\Rightarrow$ $$f \circ g(x) = f(g(x))$$

şeklinde tanımlanan $f \circ g$ fonksiyonuna «bileşik fonksiyon» denir.
(Bileşke fonksiyon, fonksiyon fonksiyonu)

$\Rightarrow$ Herhangi bir $x$ değerinin $f \circ g$ fonksiyonunun tanım kümesinde olabilmesi için:

1) $x$'in, $g$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunması, ve,
2) $x$'e karşılık elde edilen $g(x)$ değerinin de $f$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunması

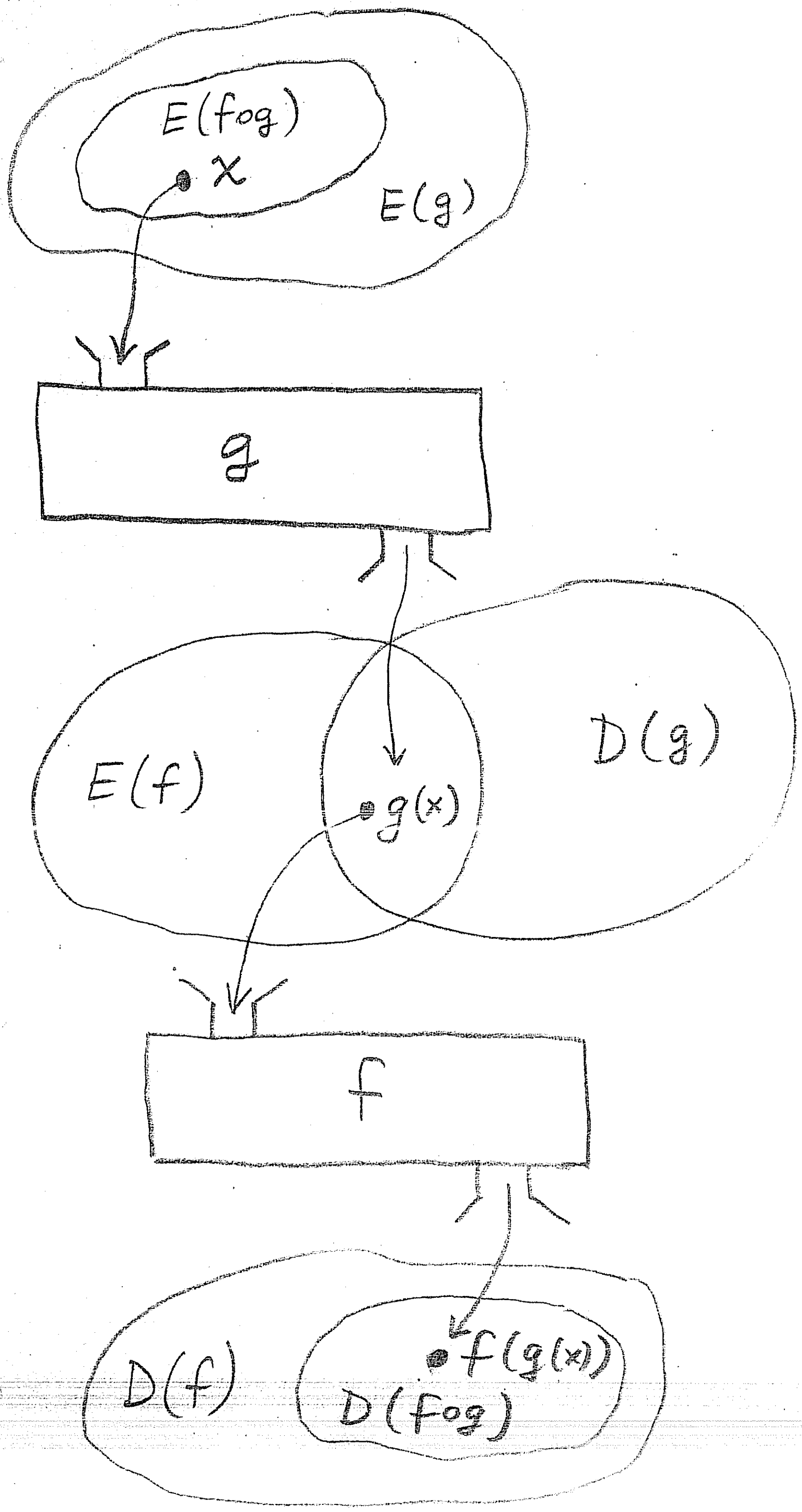
gereklidir.

$\Rightarrow$ $f \circ g(x) = f(g(x))$ fonksiyonunda, önce $g(x)$ değeri hesaplanır ve bu değer $f$ fonksiyonunda yerine konarak $f \circ g(x)$ elde edilmiş olur. Burada önce hesaplanan $g$ fonksiyonuna «iç fonksiyon» ve $f$ fonksiyonuna da «dış fonksiyon» denir.

$\Rightarrow$ $gof(x) = g(f(x))$ şeklinde tanımlanan bileşik fonksiyonda ise:

$f \rightarrow$ iç fonksiyon
$g \rightarrow$ dış fonksiyon

olur.



ÖRNEK: $f(x)=\sqrt{x}$ ve $g(x)=x+1$

olarak verildiğine göre,
a) $fog(x)$, b) $gof(x)$, c) $fof(x)$ ve d) $gog(x)$
bileşik fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow E=[0,\infty)$$
$$g(x)=x+1 \Rightarrow E=(-\infty,\infty)$$

a) $fog(x)=f(g(x))=f(x+1)$
$$\Rightarrow fog(x)=\sqrt{x+1} \Rightarrow E=[-1,\infty)$$

b) $gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})$
$$\Rightarrow gof(x)=\sqrt{x}+1 \Rightarrow E=[0,\infty)$$

c) $fof(x)=f(f(x))=f(\sqrt{x})$
$$\Rightarrow fof(x)=\sqrt{\sqrt{x}}=x^{1/4} \Rightarrow E=[0,\infty)$$

d) $gog(x)=g(g(x))=g(x+1)$
$$\Rightarrow gog(x)=x+2 \Rightarrow E=(-\infty,\infty)$$

ÖRNEK: $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

şeklinde verildiğine göre, $fof(x)$ fonksiyonunu ve bu fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$fof(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$\Rightarrow fof(x) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}}$$

$$= \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x}$$

$$\Rightarrow \boxed{fof(x) = x} \Rightarrow E \neq \mathbb{R}!$$

$\Rightarrow$ $x=-1$ değeri $f$'nin tanım kümesinde yok!

$$\Rightarrow E = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$$

# PARÇALI FONKSİYONLAR

* Bir fonksiyonun kuralı, tanım kümesinin bazı elemanları için farklı olarak tanımlanıyorsa, bu fonksiyona "parçalı tanımlı fonksiyon" ya da kısaca "parçalı fonksiyon" denir.

**ÖRNEK:** Mutlak Değer Fonksiyonu parçalı fonksiyondur. Çünkü:

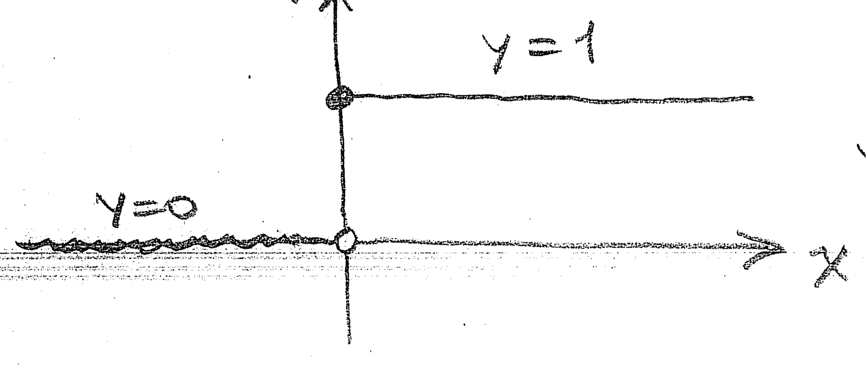
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

**ÖRNEK:** Adım Fonksiyonu, parçalı fonksiyondur. Çünkü:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 0, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.




$y = H(x)$

50-51

## ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki denklem ya da eşitsizliklerin grafiğini çiziniz.

a) $x^2+y^2=1$ b) $x^2+y^2=2$ c) $x^2+y^2\le 1$

d) $x^2+y^2=0$ e) $y\ge x^2$ f) $y<x^2$

2) Köşe noktaları A(2,1), B(6,4), ve C(5,-3) olan üçgeninin ikizkenar olduğunu gösteriniz.

3) Köşe noktaları A(0,0), B(1,$\sqrt{3}$), ve C(2,0) olan üçgeninin eşkenar olduğunu gösteriniz.

4) Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümesini ve değer kümesini bulunuz.

a) $f(x)=1+x^2$ b) $f(x)=1-\sqrt{x}$ c) $G(x)=\sqrt{8-2x}$

d) $F(x)=\dfrac{1}{x-1}$ e) $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$ f) $g(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x-2}}$

5) Aşağıdaki fonksiyonların tek ya da çift olup olmadığını belirleyiniz.

a) $f(x)=x^2+1$ b) $f(x)=x^3+x$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{x+4}$

g) $f(x)=x^2-6x$ h) $f(x)=x^3-2$ i) $f(x)=|x^3|$

j) $f(x)=\sqrt{2x}$

6) Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

a) $f(x)=-x^2$ b) $f(x)=(x-1)^2$ c) $f(x)=\sqrt{x}+1$

d) $f(x)=-|x|$

7) Aşağıdaki fonksiyonlar için f+g, f-g, f*g, f/g ve g/f fonksiyonlarının en geniş tanım kümesini belirleyiniz.

a) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x-1}$ b) $f(x)=\sqrt{1-x}$ , $g(x)=\sqrt{1+x}$

8) $f(x)=x+5$ ve $g(x)=x^2-3$ olduğuna göre, aşağıdakileri bulunuz.

a) fog(0) b) g(f(0)) c) f(g(x)) d) gof(x)

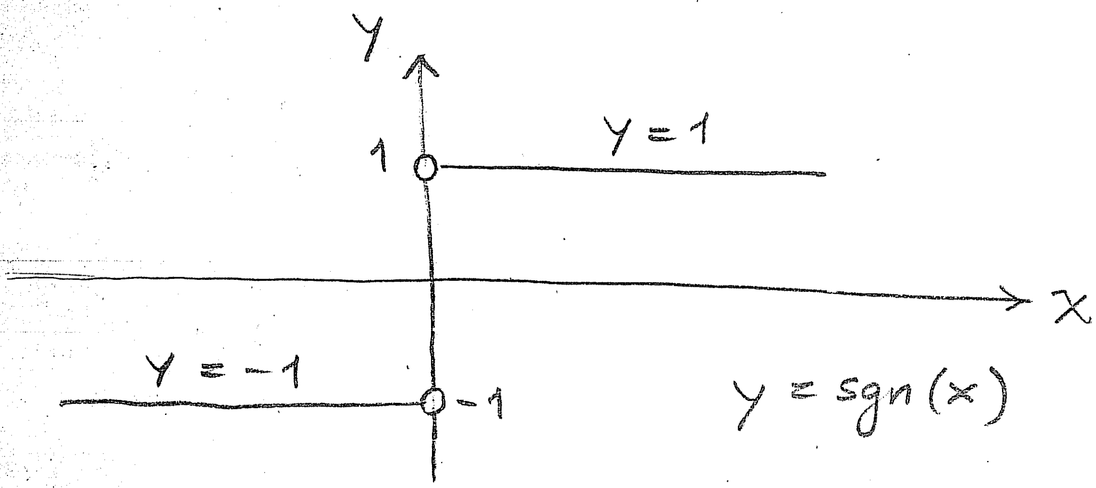
e) fof(-5) f) g(g(2)) g) f(f(x)) h) gog(x)

9) Aşağıdaki fonksiyonlar için fof(x), fog(x), gof(x) ve gog(x) bileşik fonksiyonlarını ve bu fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x)=\dfrac{2}{x}$ , $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ , $g(x)=\sqrt{x-1}$

ÖRNEK: İşaret Fonksiyonu, parçalı fonksiyondur.

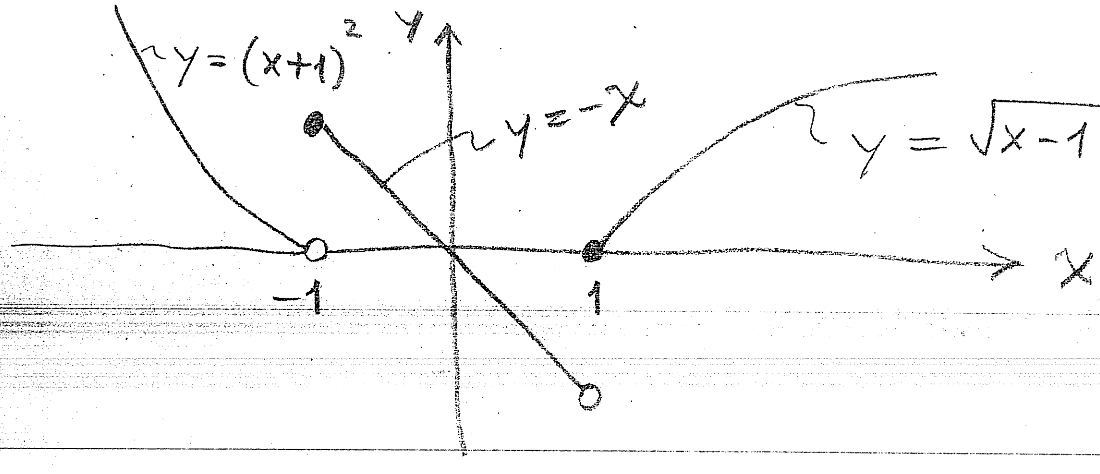
$$\Rightarrow \quad sgn(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ ise} \\ -1, & x < 0 \text{ ise} \\ \text{tanımsız}, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$




ÖRNEK:

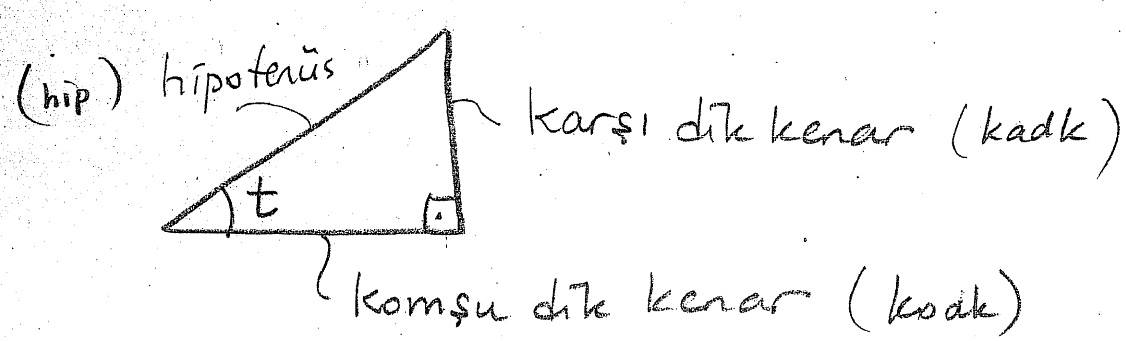
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x < -1 \text{ ise} \\ -x, & -1 \leq x < 1 \text{ ise} \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde verilen parçalı fonksiyonun grafiği:



# TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

## Dar Açılar için sin ve cos fonksiyonları:




$$\Rightarrow \quad \cos t = \frac{\text{kodk}}{\text{hip}}$$

$$\sin t = \frac{\text{kadk}}{\text{hip}}$$

## Bütün reel sayılar için sin ve cos fonksiyonları:

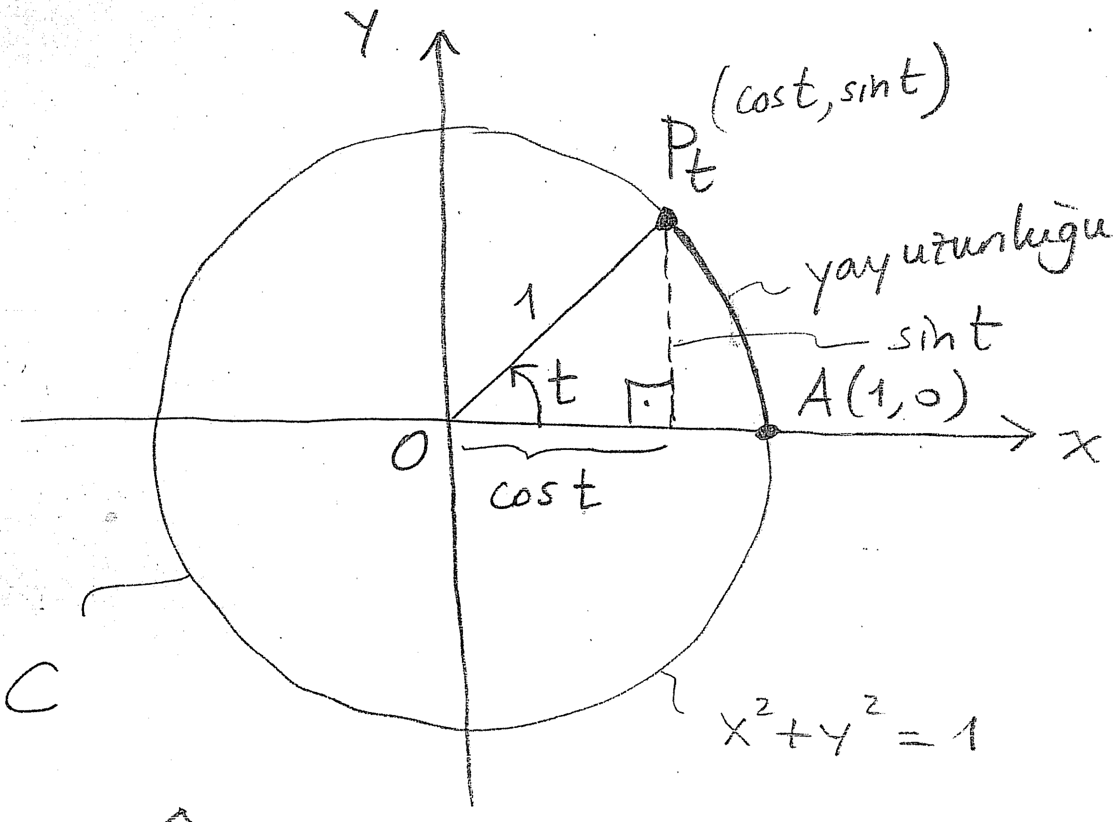
* Merkezi orijinde, yarıçapı 1 olan bir C çemberini gözönüne alalım.

$\Rightarrow$ Çemberin denklemi : $x^2 + y^2 = 1$

* C üzerinde A noktası $\rightarrow$ $A(1,0)$ olsun.

* Herhangi bir $t$ reel sayısı için, A noktasına uzaklığı $|t|$ olan noktayı $P_t$ ile gösterelim.

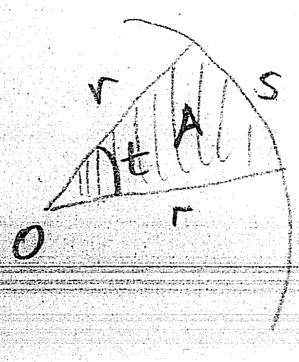
$\Rightarrow$ Burada $|t|$ uzaklığı, A noktasından itibaren C boyunca ölçülen yayın uzunluğudur. Eğer $t>0$ ise bu uzaklık, A noktasından saat akrebinin tersi yönünde; eğer $t<0$ ise saat akrebi yönünde ölçülmektedir.




$$\Rightarrow \widehat{AOP_t} = t \text{ radyan}$$

---

HATIRLA: tüm çember : $2\pi$ radyan




$2\pi$ radyan $\rightarrow$ $2\pi r$ ise

$t$ radyan $\rightarrow$ $s$

$$\Rightarrow s = \frac{2\pi r t}{2\pi} \Rightarrow s = rt \text{ birim}$$

$2\pi$ radyanın alanı : $\pi r^2$

$t$ " " : $A$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi r^2 t}{2\pi} \Rightarrow A = \frac{r^2 t}{2} \text{ birim}^2$$

* Böylece, pozitif yada negatif, herhangi bir $t$ reel sayısı için $P_t$ noktası bulunabilir. Bu durumda, $P_t$ noktasının koordinatları, $\cos t$ ve $\sin t$ olacaktır. Yani:

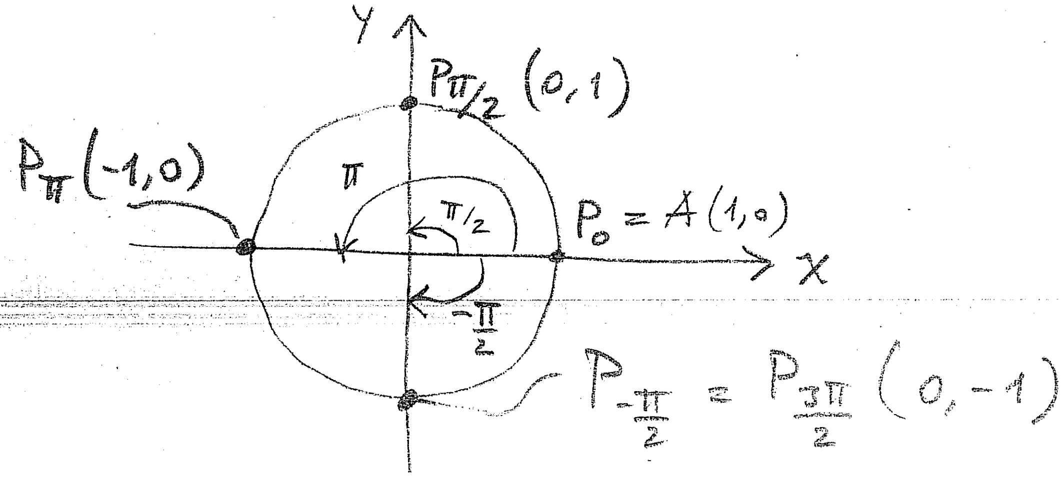
$$\cos t = P_t \text{'nin } x \text{ koordinatı}$$
$$\sin t = P_t \text{'nin } y \text{ koordinatı}$$

* Bu şekilde $\cos t$ ve $\sin t$ fonksiyonları bütün reel sayılar için tanımlanmış olur. Yani, $\cos t$ ve $\sin t$ fonksiyonlarının tanım kümeleri bütün reel sayılardır ve bütün reel sayılar için bu fonksiyonların değer kümeleri:

$$-1 \leq \cos t \leq 1$$
$$-1 \leq \sin t \leq 1$$

şeklindedir.

ÖRNEK: $\overset{(1,0)}{P_0 = A}$, $P_{\frac{\pi}{2}}$, $P_\pi$ ve $P_{-\frac{\pi}{2}} = P_{\frac{3\pi}{2}}$ noktalarının koordinatları:



$\Rightarrow \cos 0 = 1, \ \sin 0 = 0, \ \cos\frac{\pi}{2} = 0, \ \sin\frac{\pi}{2} = 1,$

$\cos\pi = -1, \ \sin\pi = 0, \ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARDA
BAZI ÖNEMLİ EŞİTLİKLER

* $P_t$ noktasının, $x = \cos t$ ve $y = \sin t$ koordinatları çemberin denklemini sağlamalıdır. Bu nedenle, bütün $t$ reel sayıları için:

$$\boxed{\cos^2 t + \sin^2 t = 1}$$

(Pisagor eşitliği) Pythagorean

$\left(\cos^2 t = (\cos t)^2 \neq \cos(\cos t)\right)$

* Bütün $t$ reel sayıları için $(t \in \mathbb{R})$:

$\cos(t + 2\pi) = \cos t$ ve $\sin(t + 2\pi) = \sin t$

(2π periyotlu periyodik fonksiyonlar) $(P_{t+2\pi} = P_t)$

* $\cos(-t) = \cos t$, $\sin(-t) = -\sin t$

$\Rightarrow$ cos → çift fonksiyon, sin → tek fonksiyon

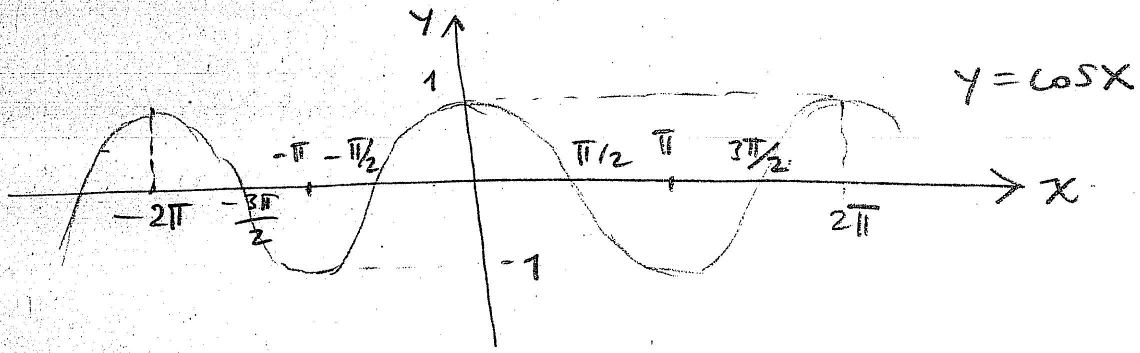
* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

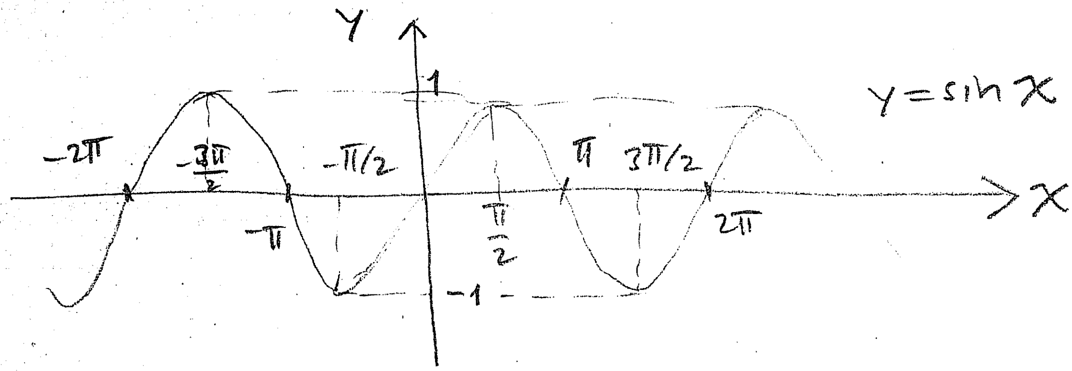
(tümleyen açılar)

* $\cos(\pi - t) = -\cos t$, $\sin(\pi - t) = \sin t$

(bütünleyen açılar)

* $y=\cos x$ ve $y=\sin x$ fonksiyonlarının grafiği: 




## TOPLAMA FORMÜLLERİ

$(s, t \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$

$\sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$

(*) $\cos(s-t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t$

$\sin(s-t) = \sin s \cos t - \cos s \sin t$

İSPAT: $s, t \in \mathbb{R}$

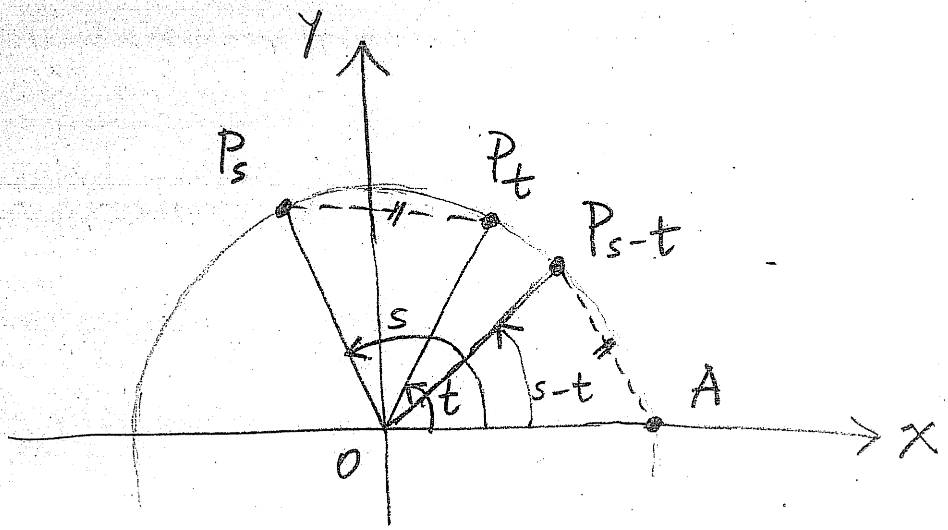
$\Rightarrow$ $P_t = (\cos t, \sin t)$

$P_s = (\cos s, \sin s)$

$P_{s-t} = (\cos(s-t), \sin(s-t))$

$A = (1, 0)$

noktalarını göz önüne alalım.




$\Rightarrow \quad \widehat{P_t O P_s} = s-t$ radyan $= \widehat{A O P_{s-t}}$

$\overline{P_s P_t} = \overline{P_{s-t} A} \Rightarrow (P_s P_t)^2 = (P_{s-t} A)^2$

$\Rightarrow$ Koordinatlar cinsinden:

$$(\cos s - \cos t)^2 + (\sin s - \sin t)^2 = (\cos(s-t) - 1)^2 + (\sin(s-t))^2$$

$$\Rightarrow \cos^2 s - 2\cos s \cos t + \cos^2 t + \sin^2 s - 2\sin s \sin t + \sin^2 t = \cos^2(s-t) - 2\cos(s-t) + 1 + \sin^2(s-t)$$

$$\Rightarrow 1 + 1 - 2\cos s \cos t - 2\sin s \sin t = 1 - 2\cos(s-t) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(s-t) = \cos s \cos t + \sin s \sin t}$$

$\Rightarrow$ t yerine $(-t)$ yaz: $(\cos(-t) = \cos t,\ \sin(-t) = -\sin t)$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t}$$

$\Rightarrow$ tümleyen açılar:

$$\sin(s+t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s+t)\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-s\right)-t\right)$$

$$= \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)}_{\sin s}\cos t + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}-s\right)}_{\cos s}\sin t$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(s+t) = \sin s\cos t + \cos s\sin t}$$

$\Rightarrow$ $t$ yerine $(-t)$ yaz $\Rightarrow$ $\sin(s-t)$ bulunur.

**ÖRNEK:** $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos 15° = ?$ (Hesap makinesi yok!)

**ÇÖZÜM:**

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ çift açı formülleri:

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 t$$

$\Rightarrow$ yarım açı formülleri:

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

## DİĞER TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

* Tanjant (tan), kotanjant (cot), Sekant (sec) ve Kosekant (csc) fonksiyonları, cos ve sin fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlanmaktadır.

$$\Rightarrow \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(\frac{\text{kadk}}{\text{kodk}}\right)$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \qquad \left(\frac{\text{kodk}}{\text{kadk}}\right)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$\Rightarrow$

| | |
|---|---|
| (sin) (S) $\sin \to +$, $\cos \to -$, $\tan \to -$ | $\sin \to +$, $\cos \to +$, $\tan \to +$ (A) (All) |
| (T) (tan) $\sin \to -$, $\cos \to -$, $\tan \to +$ | $\sin \to -$, $\cos \to +$, $\tan \to -$ (C) (cos) |

**ÖRNEK:** $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ ve $\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \sin\theta$ ve $\tan\theta$ ?

**ÇÖZÜM:** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin\theta = \mp\sqrt{\frac{8}{9}}$$

$\searrow$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

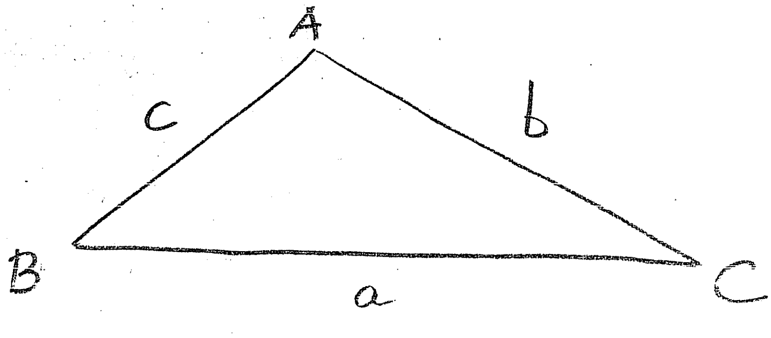
$\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin \to$ negatif olmalıdır

$$\Rightarrow \boxed{\sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = 2\sqrt{2}}$$

## HERHANGİ BİR ÜÇGENDE SINUS VE COSINUS KURALI

Herhangi bir ABC üçgeni:




sinüs kuralı: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

cosinüs kuralı:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

ÖRNEK: Bir ABC üçgeninde, $a=2$, $b=3$ ve $\hat{C}=40^\circ$ olduğuna göre, c kenarını ve B açısının sinüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM:

cosinüs kuralı: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$$= 4 + 9 - 12\cos 40^\circ$$

$$= 13 - 12 * 0.766\ldots$$

$$\Rightarrow c^2 = 3.808$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1.951 \text{ birim}}$$

sinüs kuralı: $\dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$

$$\Rightarrow \sin B = b\,\frac{\sin C}{c} = \frac{3 * 0.6428\ldots}{1.951}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin B = 0.988}$$

ÖRNEK: Bir ABC üçgeninde, $b=2$, $c=3$ ve $\hat{B}=30^\circ$ olduğuna göre a kenarını bulunuz

ÇÖZÜM:

cosinüs kuralı: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

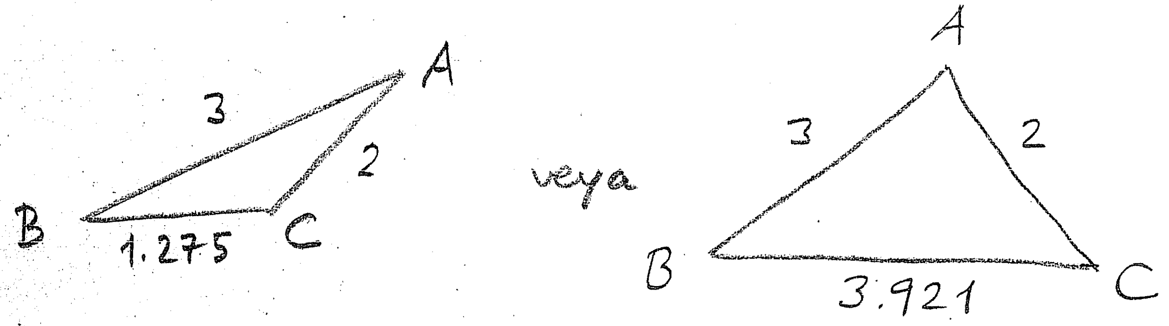
$$\Rightarrow \quad 4 = a^2 + 9 - 6a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 3\sqrt{3}\,a + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27-20}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = 1.275.. \quad \text{veya} \quad a = 3.921...}$$

$\Rightarrow$ iki üçgen çizilebilir:




$\Rightarrow$ verilen bilgilerle iki adet üçgen çizilebilir

* Aşağıdaki durumlarda, verilen bilgilerle, yanlızca bir üçgen çizilebilir:

1) üçgenin iki kenarı ve bu iki kenar arasında kalan açı verilirse,

2) üçgenin üç kenarı verilirse ve bu kenarlardan hiç birisi, diğer iki kenarın toplamından büyük olmuyorsa,

3) üçgenin iki açısı ve bir kenarı verilirse,

4) bir dik üçgenin hipotenüsü ve bir dik kenarı verilirse.

62-63

ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdakileri hesap makinesi kullanmadan bulunuz.

a) $\cos\dfrac{3\pi}{4}$ b) $\sin\dfrac{2\pi}{3}$ c) $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ d) $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ e) $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

2) Aşağıdakileri (sin x) ve (cos x) cinsinden ifade ediniz.

a) $\cos(\pi+x)$ b) $\sin(2\pi-x)$ c) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$ d) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)$

3) Aşağıdakileri hesap makinesi kullanmadan bulunuz.

a) $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ ve $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ olduğuna göre, $\cos\theta$ ve $\tan\theta$ nedir?

b) $\tan\theta=2$ ve $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ olduğuna göre, $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ nedir?

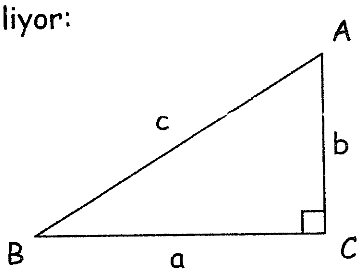
c) $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ ve $\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ olduğuna göre, $\sin\theta$ ve $\tan\theta$ nedir?

d) $\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$ ve $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ olduğuna göre, $\sin\theta$ ve $\tan\theta$ nedir?

e) $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ ve $\theta\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ olduğuna göre, $\cos\theta$ ve $\tan\theta$ nedir?

f) $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ ve $\theta\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ olduğuna göre, $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ nedir?

4) Aşağıdaki dik üçgen veriliyor:




a) $c=2$ ve $\hat{B}=\dfrac{\pi}{3}$ olduğuna göre a ve b kenarlarını bulunuz.

b) $b=2$ ve $\hat{B}=\dfrac{\pi}{3}$ olduğuna göre a ve c kenarlarını bulunuz.

c) $a=5$ ve $\hat{B}=\dfrac{\pi}{6}$ olduğuna göre b ve c kenarlarını bulunuz.

d) a kenarını, A açısı ve c kenarı cinsinden yazınız.
e) a kenarını, A açısı ve b kenarı cinsinden yazınız.
f) a kenarını, B açısı ve c kenarı cinsinden yazınız.
g) a kenarını, B açısı ve b kenarı cinsinden yazınız.
h) c kenarını, A açısı ve a kenarı cinsinden yazınız.

i) c kenarını, A açısı ve b kenarı cinsinden yazınız.
j) (sin A) yı, a ve c cinsinden yazınız.
k) (sin A) yı, b ve c cinsinden yazınız.
l) (sin A) yı, a ve b cinsinden yazınız.

5) Herhangi bir ABC üçgeninde,

a) $a = 4$, $b = 3$ ve $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ olduğuna göre, (sin B) nedir?
b) $a = 2$, $b = 2$ ve $c = 3$ olduğuna göre, (cos A) nedir?
c) $a = 2$, $b = 3$ ve $c = 4$ olduğuna göre, (sin B) nedir?
d) $a = 2$, $b = 3$ ve $\hat{C} = \frac{\pi}{4}$ olduğuna göre, c nedir?
e) $c = 3$, $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ ve $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ olduğuna göre, a nedir?

## LİMİT VE SÜREKLİLİK

* Matematiğin en çok kullanılan kavramları olan türev ve integral kavramları, limit kavramı üzerine inşa edilmişlerdir. Bu nedenle limit kavramı, matematiğin en temel kavramlarından birisidir.
* Fiziksel olaylar → diferansiyel denklem

  Diferansiyel denklem → türev

  Türev → Limit

* Süreklilik: Limit kavramı ile çok yakından ilgili diğer önemli bir kavramdır.

* Fonksiyonlarda, bazı durumlarda, $x$ bağımsız değişkeni belirli bir sayıya yaklaşırken, $y=f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını, yaklaşıyorsa hangi sayıya yaklaştığını bilmek problemi ile karşılaşılabilir. Bu probleme, limit kavramı ile çözüm bulunabilmektedir.

* Limit kavramını anlayabilmek için, gereksiz ve sıkıcı ayrıntılar içeren kesin matematiksel yaklaşım yerine sezgisel yaklaşım tercih edilmelidir.

* ~~Daha çok matematikçileri~~ ilgilendiren teorik yaklaşımlara gerek yok!

ÖRNEK:

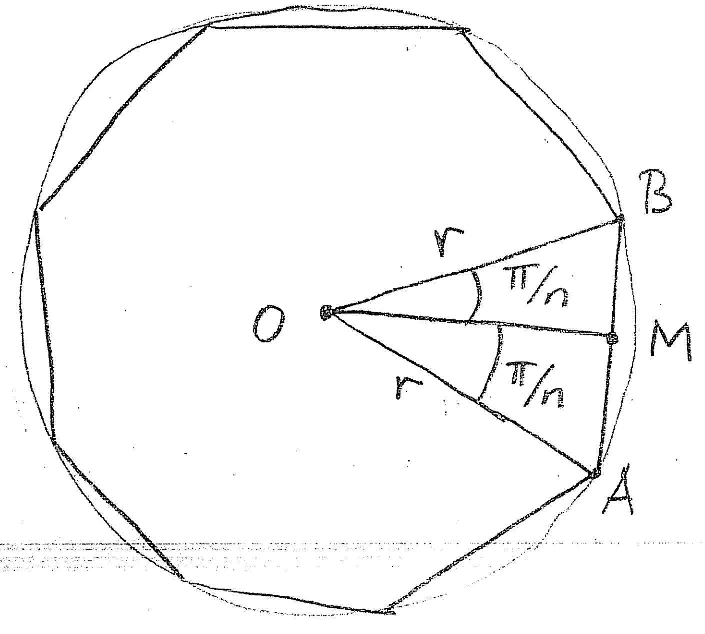
* Herhangi bir dairenin çevresinin çapına oranı sabittir. Yarıçapı r olan bir dairenin çevresi C ile gösterilirse,

$$\pi = \frac{C}{2r} \quad \text{veya} \quad C = 2\pi r$$

eşitlikleri yazılabilir.

⇒ Dairenin çevresini veren formül (ya da $\pi$ sayısının tanımı) yardımıyla dairenin alanını veren formülü ($\pi r^2$) bulalım.

⇒ r yarıçaplı bir dairenin içinde bulunan n adet kenarı olan bir düzgün çokgen gözönüne alalım.



* n-kenarlı düzgün çokgenin çevresi $P_n$ ve alanı da $A_n$ olsun.

⟹ Dairenin çevresi $C$ ve alanı da $A$ ile gösterilirse,

$$\Rightarrow \quad P_n < C \quad \text{ve} \quad A_n < A$$

olur.

⟹ $n$ sayısı büyüdükçe $P_n$ değeri $C$'ye ve $A_n$ değeri de $A$'ya yaklaşacaktır.

* n-kenarlı düzgün çokgen, tepe noktaları çokgenin $O$ merkezinde kesişen $n$-adet üçgenin birleşimi olarak düşünülebilir.

⟹ Bu üçgenlerden biri şekilde görülen $OAB$ üçgeni olur.

⟹ $O$ noktasının çevresinde toplam açı $2\pi$ olduğundan, $AOB$ açısı $2\pi/n$ radyandır.

⟹ $AB$ kenarının orta noktası $M$ ile gösterilirse $OM$ doğrusu $AOB$ açısını ikiye böler.

⟹ $AB$ kenarı:

$$|AB| = 2\,|BM| = 2r\sin\frac{\pi}{n} \quad \text{olur.}$$

$\Rightarrow$ OAB üçgeninin alanı $A_{OAB}$ ile gösterilirse,

$$\Rightarrow A_{OAB} = \frac{1}{2}|AB|\,|OM| \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow A_{OAB} = \frac{1}{2}\left(2r\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(r\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

$$\Rightarrow A_{OAB} = r^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

* AB kenarının boyu $n$ ile çarpılırsa, $n$-kenarlı çokgenin çevresi ($P_n$) bulunabilir.

$$\Rightarrow P_n = n * |AB|$$

$$\Rightarrow P_n = 2rn\sin\frac{\pi}{n} \quad \dots (1)$$

* OAB üçgeninin alanı $n$ ile çarpılırsa, $n$-kenarlı düzgün çokgenin alanı ($A_n$) bulunabilir.

$$\Rightarrow A_n = n * A_{OAB}$$

$$\Rightarrow A_n = r^2 n \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} \quad \dots (2)$$

$$(1) \Rightarrow rn\sin\frac{\pi}{n} = \frac{P_n}{2} \quad \dots\dots (3)$$

$$(3) \to (2) \Rightarrow A_n = \frac{P_n}{2}\, r\cos\frac{\pi}{n}$$

⇒ $n$ sayısının çok büyük olması durumunda, AOM açısı $(\pi/n)$ sıfıra yaklaşacak ve dolayısıyla,

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{|OM|}{|OA|}$$

oranı da 1 değerine yaklaşacaktır.

Ayrıca, $n$ sayısı büyüdükçe, $P_n$ değeri C'ye $(2\pi r)$ yaklaşır. Bu durumda $A_n$ alanı,

$$\frac{2\pi r}{2} * r * 1 = \pi r^2$$

değerine yaklaşacaktır. Bu da dairenin alanını veren formüldür!

BİR DEĞİŞKENİN VERİLEN BİR SAYIYA YAKLAŞMASI

* $x$ değişken, $a$ sabit olmak üzere $x$ ve $a$ reel sayılarını göz önüne alalım.

⇒ Eğer, $x$ değişkeni, $a$'dan farklı ve $a$ sayısına istenildiği kadar yakın değerler alıyorsa, $x$ değişkeni $a$ sayısına yaklaşıyor denir ve

$$x \to a$$

şeklinde gösterilir.

⟹ Eğer $x$ değişkeni $a$ sayısına $a$'dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma denir ve

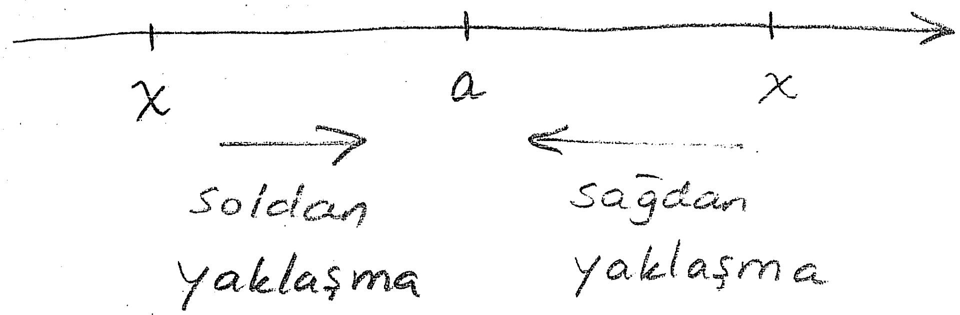
$$x \to a+$$

şeklinde gösterilir.

⟹ Eğer $x$ değişkeni $a$ sayısına $a$'dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa, bu durumda da $x$ değişkeni $a$'ya soldan yaklaşıyor denir ve

$$x \to a-$$

şeklinde gösterilir.




( $a$'dan büyük sayılar, reel sayılar ekseni üzerinde, $a$'nın sağında ; $a$'dan küçük sayılar ise, reel sayılar ekseni üzerinde, $a$'nın solunda bulunmaktadır ).

| $x$ | $x$ | $x$ |
|---|---|---|
| $-3$ | $4$ | $3$ |
| $-2$ | $3$ | $1$ |
| $-1$ | $2$ | $-1$ |
| $-0.5$ | $1$ | $-0.2$ |
| $-0.1$ | $0.5$ | $0.1$ |
| $-0.01$ | $0.2$ | $0.01$ |
| $-0.001$ | $0.1$ | $-0.01$ |
| $-0.0001$ | $0.001$ | $0.0001$ |
| $\vdots$ | $0.00001$ | $-0.001$ |
| | $\vdots$ | $0.00001$ |
| | | $\vdots$ |
| $x \to 0-$ | $x \to 0+$ | $x \to 0$ |

($x$ değişkeninin $0$ sayısına, soldan, sağdan ve heriki yönden yaklaşması)

⇒ PROBLEM → $x$ bağımsız değişkeni, tanım kümesi içinde kalarak belirli bir $a$ sayısına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir $L$ sayısına yaklaşıp yaklaşmadığını araştırmak.

⇒ $a$ sayısına yaklaşan $x$ değerlerinin fonksiyonun tanım kümesinde olması gerekmektedir. Yani $a$ sayısı olarak, ancak tanım kümesindeki elemanlarla istenildiği kadar yaklaşılabilen sayıların alınması zorunludur.

**ÖRNEK:** $f(x) = 2x-3$ şeklinde tanımlanan fonksiyonda, $x$ değişkeni 2'ye yaklaşırken $f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını inceleyelim.

⇒ Tablo yapılabilir:

| $x$ | $f(x)=2x-3$ |
|---|---|
| 0 | −3 |
| 1 | −1 |
| 1.5 | 0 |
| 1.7 | 0.4 |
| 1.9 | 0.8 |
| 1.99 | 0.98 |
| 1.999 | 0,998 |
| 1.9999 | 0.9998 |
| ⋮ | ⋮ |
| $x \to 2^-$ | $f(x) \to 1$ |

| $x$ | $f(x)=2x-3$ |
|---|---|
| 4 | 5 |
| 3 | 3 |
| 2.5 | 2 |
| 2.2 | 1.4 |
| 2.1 | 1.2 |
| 2,01 | 1.02 |
| 2,001 | 1,002 |
| 2,0001 | 1,0002 |
| 2,00001 | 1.00002 |
| ⋮ | ⋮ |
| $x \to 2^+$ | $f(x) \to 1$ |

⇒ hem $x \to 2^-$ için ve hem de $x \to 2^+$ için fonksiyon değerleri 1'e yaklaşmaktadır.

⇒ $x$'e 2'ye yaklaşan başka örnek değerler vererek, fonksiyon değerlerinin 1'e yaklaştığı görülebilir.

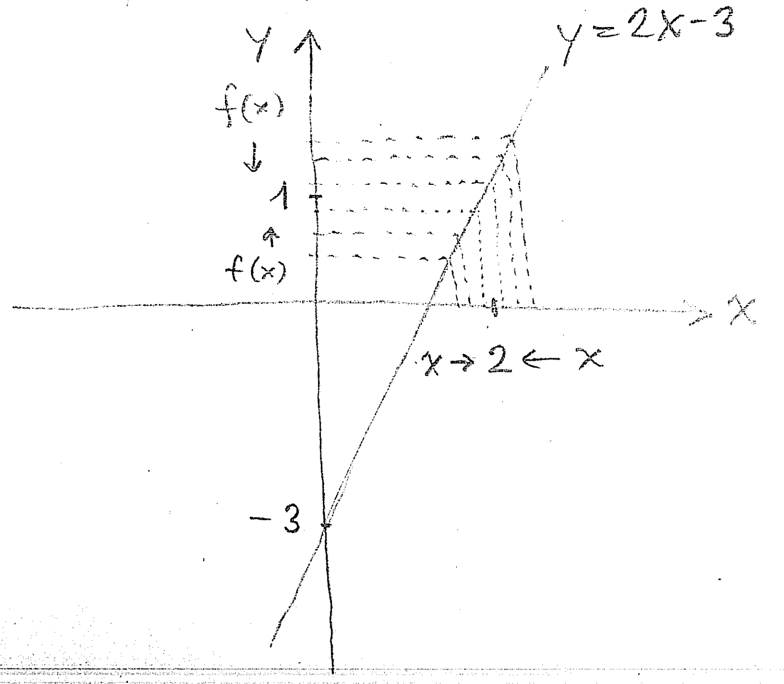
⇒ x'e 2'den farklı ve 2'ye yaklaşan ne kadar değer verilirse verilsin, fonksiyon değerlerinin hep 1 sayısına yaklaştığı görülür. Bu 1 sayısına, $f(x) = 2x-3$ fonksiyonunun 2 noktasındaki limiti denir ve sembolik olarak,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x-3) = 1$$

şeklinde gösterilir.

Bu durum bazen $x \to 2$ için $f(x) \to 1$ şeklinde de yazılır. Bunun anlamı, x değişkeni 2'ye (2'den farklı değerlerle) yaklaşırken, fonksiyon değerleri 1'e yaklaşır demektir.

⇒ Grafik çizilebilir:




* $x \to 2$ ⇒ x, her zaman için 2'den farklı

**ÖRNEK:** $f(x) = (x+2)^2$ fonksiyonunu $x$'in 0'a yaklaşması durumunda inceleyelim.

⇒ Tablo yapılabilir:

| $x$ | $f(x)=(x+2)^2$ |
|---|---|
| 3 | 25 |
| 2 | 16 |
| 1 | 9 |
| 0.5 | 6.25 |
| 0.1 | 4.41 |
| 0.01 | 4.0401 |
| 0.001 | 4.00400 |
| 0.0001 | 4.00040 |
| 0.00001 | 4.00004 |
| ⋮ | ⋮ |
| $x \to 0+$ | $f(x) \to 4$ |

| $x$ | $f(x)=(x+2)^2$ |
|---|---|
| −3 | 1 |
| −2 | 0 |
| −1 | 1 |
| −0.5 | 2.25 |
| −0.1 | 3.61 |
| −0.01 | 3.9601 |
| −0.001 | 3.9960 |
| −0.0001 | 3.9996 |
| ⋮ | ⋮ |
| $x \to 0-$ | $f(x) \to 4$ |

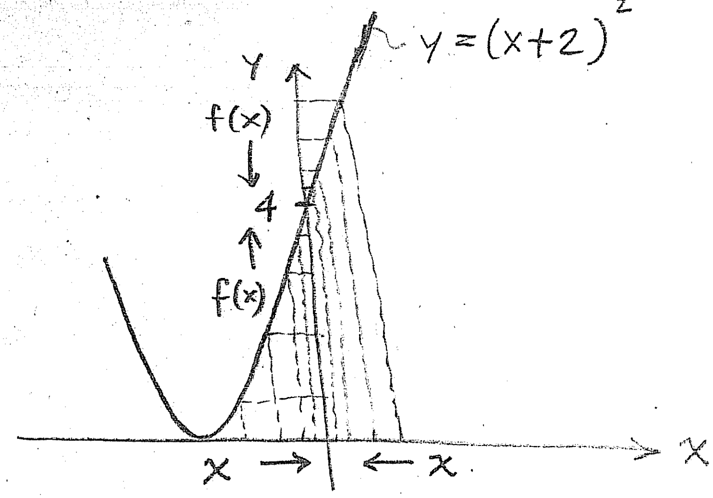
⇒ $x$ değerleri 0'a nasıl yaklaşırsa yaklaşsın (ister sağdan, ister soldan), fonksiyon değerleri 4'e yaklaşmaktadır.

⇒ $f(x) = (x+2)^2$ fonksiyonunun 0 noktasındaki limiti 4 tür denir ve,

$$\lim_{x \to 0} (x+2)^2 = 4$$

şeklinde gösterilir.

$\Rightarrow$ Grafik çizilebilir:




$\Rightarrow \quad (x \to 0 \Rightarrow f(x) \to 4)$

<u>ÖRNEK:</u>

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \text{ ise} \\ x^2, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde verilen fonksiyonu, $x \to 0$ için inceleyelim. (Dikkat! parçalı fonksiyon)

$\Rightarrow$ Tablo yapılabilir:

| $x$ | $f(x) = x+1$ |
|---|---|
| $-2$ | $-1$ |
| $-1$ | $0$ |
| $-0.5$ | $0.5$ |
| $-0.1$ | $0.9$ |
| $-0.01$ | $0.99$ |
| $-0.001$ | $0.999$ |
| $-0.0001$ | $0.9999$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x \to 0-$ | $f(x) \to 1$ |

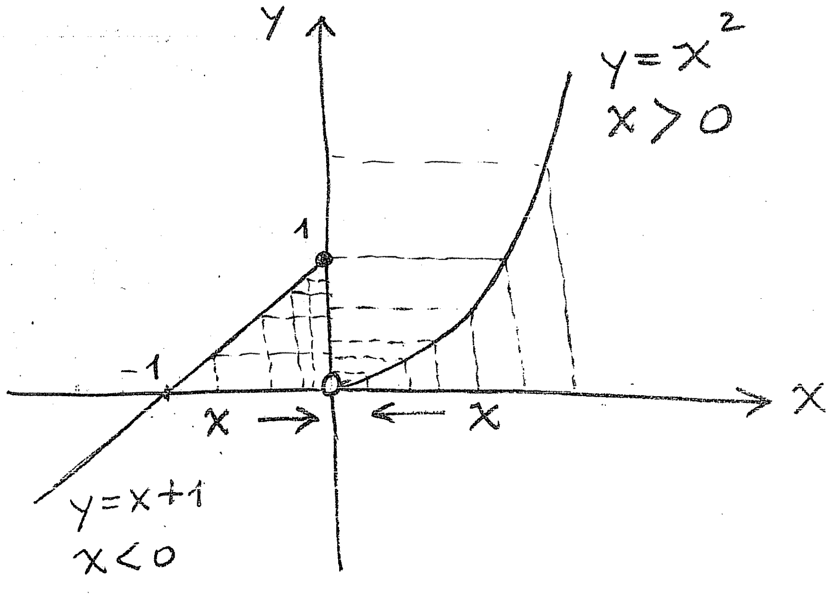
| $x$ | $f(x) = x^2$ |
|---|---|
| $2$ | $4$ |
| $1$ | $1$ |
| $0.5$ | $0.25$ |
| $0.1$ | $0.01$ |
| $0.01$ | $0.0001$ |
| $0.001$ | $0,000001$ |
| $0.0001$ | $0.00000001$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x \to 0+$ | $f(x) \to 0$ |

$\Rightarrow$ $x \to 0-$ için $f(x) \to 1$ olurken,
$x \to 0+$ için $f(x) \to 0$ olmaktadır.

$\Rightarrow$ $x$'in 0'a yaklaşan değerlerine karşılık, fonksiyon değerleri tek bir sayıya yaklaşmamaktadır.

$\Rightarrow$ Bu durumda $x \to 0$ için fonksiyonun limiti yoktur denir. Yani: $\lim_{x \to 0} f(x)$ yoktur.

$\Rightarrow$ Grafik çizilebilir:




$\Rightarrow$ Başka noktalarda limit bulunabilir.

Grafik incelenirse:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

olduğu görülebilir!

* Yukarıdaki örneklerde, $\lim_{x\to 2}(2x-3)=1$, $\lim_{x\to 0}(x+2)^2=4$ bulunmuştu.

⇒ Bu örneklerde, fonksiyon ifadesinde $x$ yerine $x$'in yaklaştığı sayının yazılmasıyla limitin bulunabileceği görülmektedir ($2*2-3=1$, $(0+2)^2=4$).

⇒ Bu durum, diğer bazı fonksiyonlar için de geçerli olmakla birlikte, yukarıdaki son örnekte olduğu gibi, bazı durumlarda geçerli değildir. Sözü edilen son örnekte, fonksiyonun 0'daki değeri 1 olmasına karşılık, fonksiyonun $x\to 0$ için limiti yoktur.

ÖRNEK: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ fonksiyonunun $x\to -2$ için limitini inceleyelim.

⇒ Fonksiyonun tanım kümesi:

$(-\infty,-2)\cup(-2,\infty)$

⇒ $x=-2$ için fonksiyon tanımsızdır. Ancak $x$ değişkeni, tanım kümesindeki elemanlarla, $-2$ sayısına istenildiği kadar yaklaştırılabilir.

⇒ Fonksiyon, $x=-2$ noktasında tanımlı olmadığı halde, bu noktada limitinden söz edilebilir.

$\Rightarrow$ $x \to -2$ için $x \neq -2$ demektir. Bu durumda, $x \neq -2$ olmak üzere $f(x)$ ifadesi sadeleştirilebilir:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x-2) = -4 \quad \text{bulunur.}$$

NOT:

Yukarıdaki örnekler yardımıyla:

1) Herhangi bir fonksiyon, bir noktada tanımlı olmadığı halde, o noktada limiti bulunabilir,

2) Herhangi bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması durumunda, fonksiyonun bu noktadaki değeri ile bu noktada limitinin varlığı ve varsa limitin değeri arasında doğrudan bir ilişki yoktur,

denilebilir.

NOT:

Tablo yada grafik kullanmadan limit hesabı yapılabilmelidir. Bunun için limitin tanımı ve özellikleri bilinmelidir.

* Yukarıdaki örnekler yardımıyla limit kavramı şu şekilde tanımlanabilir:

TANIM:

Bir $f(x)$ fonksiyonu, herhangi bir $a$ sayısının yakınındaki ($a$'nın sağındaki ve solundaki) bütün $x$ değerleri için tanımlı olsun ($x=a$ için, $f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olup olmaması önemli değil).

Eğer $x$ bağımsız değişkeni, $a$'dan farklı değerlerle, $a$ sayısına istenildiği kadar yaklaşırken, $f(x)$ fonksiyon değerleri tek bir $L$ sayısına yaklaşıyorsa, $f$ fonksiyonunun $a$ noktasında limiti $L$ dir denir ve,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

$$x \to a \text{ için } f(x) \to L$$

şekillerinde gösterilir.

$\Rightarrow$ "$x$ $a$'ya yaklaşırken, $f$ fonksiyonu $L$ limit değerine yaklaşır"

$\Rightarrow$ "$x$ $a$'ya yaklaşırken, $f$ fonksiyonunun limiti $L$ dir"

$\Rightarrow$ "$f$ fonksiyonunun $a$ noktasında limiti $L$ dir"

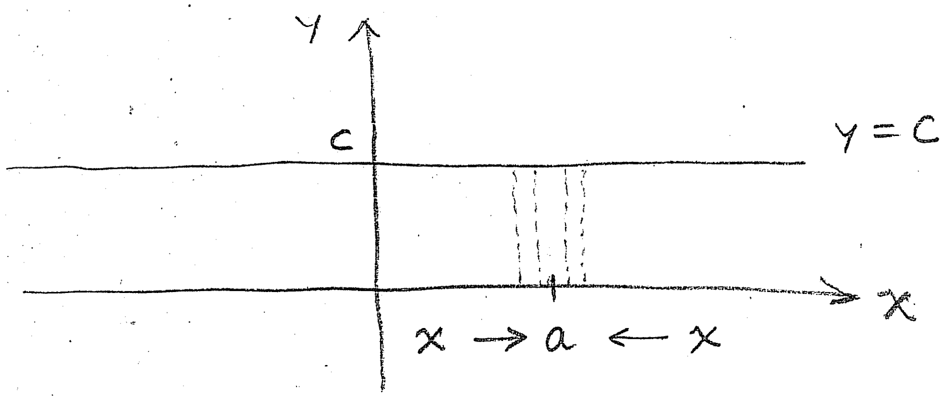
ÖRNEK: $c$ sabit bir sayı olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to a} c$ limitini bulunuz

ÇÖZÜM: « $x$ $a$'ya yaklaşırken, $c$ nereye yaklaşır? »

$\Rightarrow$ $c$ sabit bir sayı olduğundan, $x$ ne olursa olsun $c$ değişmez

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} c = c \quad \text{olur.}$$




ÖRNEK: $\lim\limits_{x \to a} x$ limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: « $x$ $a$'ya yaklaşırken, $x$ nereye yaklaşır? »

$\Rightarrow$ cevabı sorunun içinde!

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} x = a \quad \text{olur.}$$

**ÖRNEK:** $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = ?$

**ÇÖZÜM:** $x=-2$ için tanımsızdır.

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6} = \lim_{x \to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+3}$$

$\Rightarrow$ $x=-2$ yazılırsa:

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{-2-1}{-2+3} = -3$$ olur.

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = ?$$

**ÇÖZÜM:** $x=a$ için tanımsızdır.

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{a-x}{ax}}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{-\cancel{(x-a)}}{ax\cancel{(x-a)}} = \lim_{x \to a} -\frac{1}{ax}$$

$\Rightarrow$ $x = a$ yazılabilir:

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} -\frac{1}{ax} = -\frac{1}{a^2} \quad \text{bulunur.}$$

**ÖRNEK:** $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = ?$

**ÇÖZÜM:** $x = 4$ için tanımsızdır.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x^2 - 16)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{x - 4}}{\cancel{(x - 4)}(x + 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x + 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$\Rightarrow$ $x = 4$ yazılabilir:

$$\Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x + 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{(4 + 4)(2 + 2)}$$

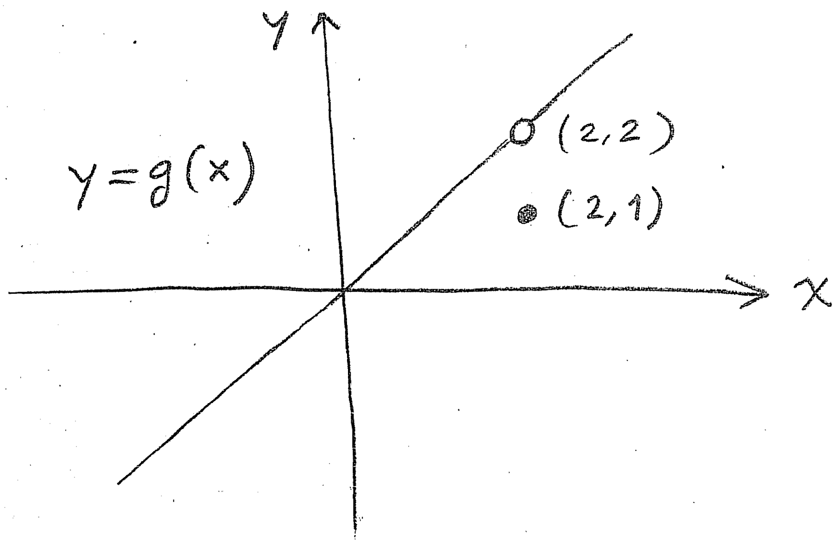
$$= \frac{1}{32} \quad \text{olur.}$$

**ÖRNEK:**

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \text{ ise} \\ 1, & x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $g(x)$ fonksiyonu için $\lim_{x \to 2} g(x)$ limitini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**




⇒ $x = 2$ için fonksiyonun değeri:

$$g(2) = 1$$

⇒ $x$, 2'ye yaklaşırken fonksiyonun limiti:

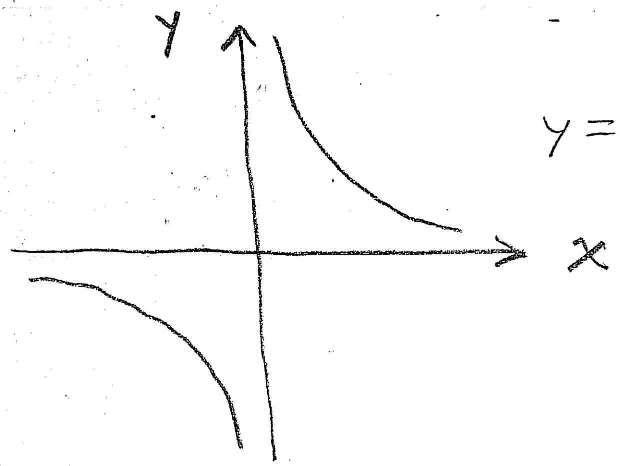
$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} x = 2$$ olmaktadır.

⇒ **SONUÇ:**

Bazı durumlarda $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ için tanımlı olduğu halde, $x$ $a$'ya yaklaşırken $f(x)$'in limiti $f(a)$'ya eşit olmayabilir.

**ÖRNEK:** $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x\to 0$ için limitini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**




$\Rightarrow$ x sıfıra yaklaşırken, $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun yaklaştığı belirli bir L değeri yoktur.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ limiti yoktur.

$\Rightarrow$ **SONUÇ:**

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu, $x$'in $a$'ya yakın değerleri ($a$'nın sağındaki ve solundaki değerleri) için tanımlı olduğu halde, bu fonksiyonun $x$ $a$'ya yaklaşırken limiti bulunmayabilir.

$\Rightarrow$ **NOT:**

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limitinin bulunabilmesi, $f(a)$'nın tanımlı olup olmadığına bağlı değildir. $f(a)$'nın tanımlı olması durumunda da bu limit $f(a)$'ya bağlı olmayacaktır. Bu limit, $x$'in $a$'ya yakın değerleri ($a$'nın sağındaki ve solundaki değerleri) için $f(x)$'in alacağı değerlere bağlıdır.

## TEK YÖNLÜ LİMİTLER

Bazı durumlarda, x değişkeninin a sayısına sadece a'dan büyük değerlerle yaklaşması veya sadece a'dan küçük değerlerle yaklaşması mümkün olabilmektedir.

⇒ Böyle durumlarda, tek yönlü limit söz konusu olmaktadır.

### SAĞDAN LİMİT

a'dan büyük reel sayılar için tanımlı olan bir f(x) fonksiyonunda, eğer x değişkeni a'nın sağ tarafından a'ya yaklaştığında, f(x) fonksiyonu bir L değerine yaklaşıyorsa, bu durumda, "f(x) fonksiyonunun x=a'da sağdan limiti L dir" denir ve

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

### SOLDAN LİMİT

a'dan küçük reel sayılar için tanımlı olan bir f(x) fonksiyonunda, eğer x değişkeni a'nın sol tarafından a'ya yaklaştığında f(x) fonksiyonu bir L değerine yaklaşıyorsa, bu durumda, « f(x) fonksiyonunun x=a'da soldan limiti L dir » denir ve

$$\lim_{x \to a-} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

TEOREM:

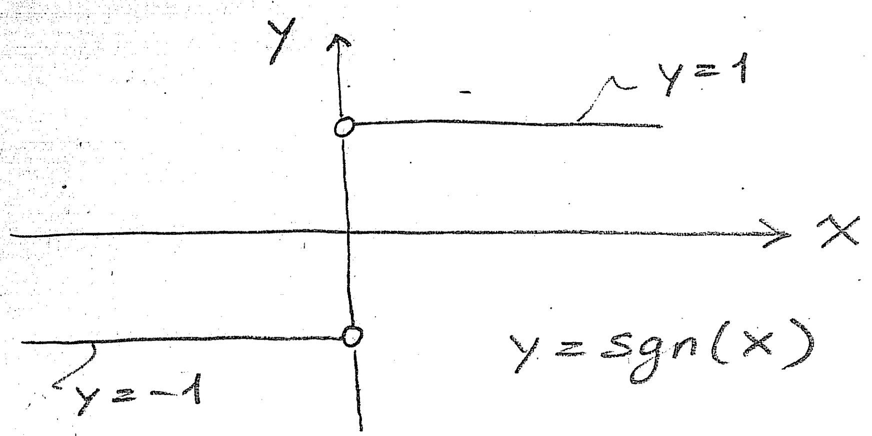
Herhangi bir f(x) fonksiyonunun bir a noktasında limitinin olabilmesi için, fonksiyonun bu noktada sağdan ve soldan limitinin birbirine eşit olması gerekir. Karşıt olarak, herhangi bir f(x) fonksiyonunun bir a noktasında limiti varsa, bu noktada hem sağdan hem de soldan limit vardır ve bu limitler birbirine eşittir.

⇒ Sembolik olarak:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = L}$$

şeklinde yazılabilir.

**ÖRNEK:** İşaret fonksiyonu




$$\Rightarrow \lim_{x \to 0-} sgn(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} sgn(x) = 1$$

$\Rightarrow$ sağdan ve soldan limitler eşit olmadığından,

$\lim_{x \to 0} sgn(x)$ limiti yoktur.

**ÖRNEK:**

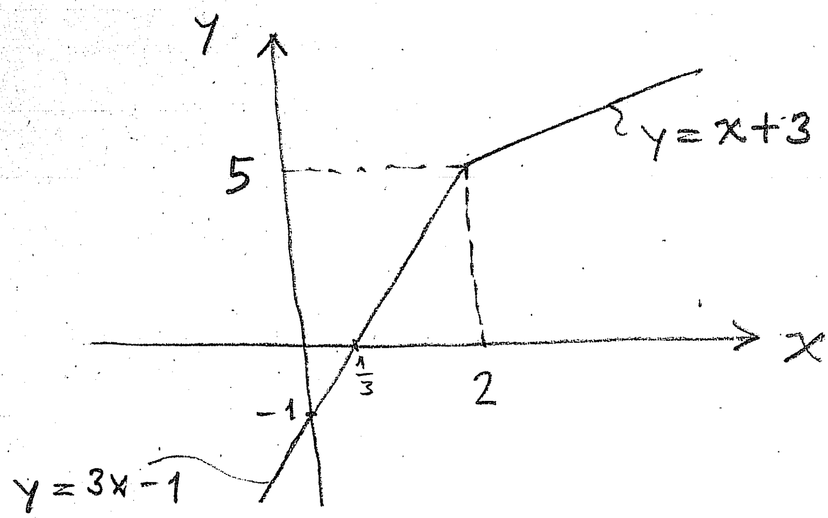
$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \leq 2 \text{ ise} \\ x+3, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu için,

$\lim_{x \to 2-} f(x)$, $\lim_{x \to 2+} f(x)$ ve $\lim_{x \to 2} f(x)$

limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:




$\Rightarrow \quad x \to 2^- \quad \Rightarrow \quad x < 2$ demektir

$\Rightarrow f(x) = 3x-1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x-1) = 3*2-1 = 5$$

$\Rightarrow \quad x \to 2^+ \quad \Rightarrow \quad x > 2$ demektir

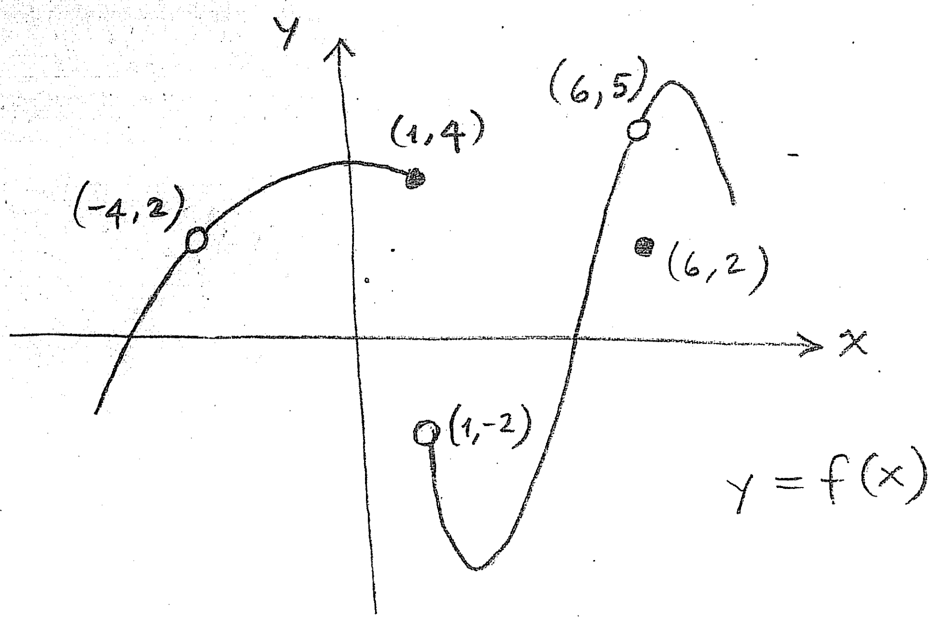
$\Rightarrow f(x) = x+3$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x+3) = 2+3 = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = 5$$ olur.

ÖRNEK:




Grafiği görülen f(x) fonksiyonu için,

a) $f(-4)$ b) $\lim_{x \to -4^-} f(x)$ c) $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ d) $\lim_{x \to -4} f(x)$

e) $f(1)$ f) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ g) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ h) $\lim_{x \to 1} f(x)$

i) $f(6)$ j) $\lim_{x \to 6^-} f(x)$ k) $\lim_{x \to 6^+} f(x)$ l) $\lim_{x \to 6} f(x)$

değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $f(-4)$ : tanımsız b) $\lim_{x \to -4^-} f(x) = 2$

c) $\lim_{x \to -4^+} f(x) = 2$ d) $\lim_{x \to -4} f(x) = 2$

e) $f(1) = 4$

f) $\lim_{x \to 1-} f(x) = 4$

g) $\lim_{x \to 1+} f(x) = -2$

h) $\lim_{x \to 1} f(x)$ limiti yok!

i) $f(6) = 2$

j) $\lim_{x \to 6-} f(x) = 5$

k) $\lim_{x \to 6+} f(x) = 5$

l) $\lim_{x \to 6} f(x) = 5$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+x-6}$$

olarak verildiğine göre,

$\lim_{x \to 2-} f(x)$, $\lim_{x \to 2+} f(x)$ ve $\lim_{x \to 2} f(x)$

limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$x > 2 \Rightarrow |x-2| = x-2$$

$$x < 2 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$$

$\Rightarrow$ $x \to 2- \Rightarrow x < 2$

$x \to 2+ \Rightarrow x > 2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2-} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2-} f(x) \neq \lim_{x\to 2+} f(x)$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)$ limiti yoktur.

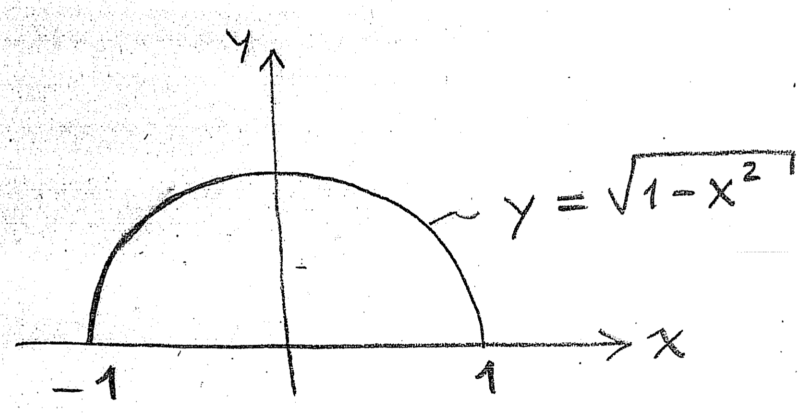
ÖRNEK: $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

olduğuna göre,

$\lim_{x\to -1} g(x)$ ve $\lim_{x\to 1} g(x)$

limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM: $g(x)$'in tanım kümesi: $[-1, 1]$

$\Rightarrow$ 


$\Rightarrow$ $g(x)$ fonksiyonu yanlızca $x=-1$'in sağında ve $x=1$'in solunda tanımlıdır.

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to -1^+} g(x) = 0$ , $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 0$

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to -1^-} g(x)$ ve $\lim_{x \to 1^+} g(x)$ limitleri yoktur.

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to -1} g(x)$ ve $\lim_{x \to 1} g(x)$ limitleri de yoktur!

## LİMİT KURALLARI

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ , $\lim_{x \to a} g(x) = M$ ,

k : sabit bir sayı olsun.

1) Toplama Kuralı :

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M \text{ dir}$$

(toplamın limiti, limitler toplamına eşit)

2) Fark Kuralı:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = L - M \text{ dir.}$$

(farkın limiti; limitler farkına eşit)

3) Çarpım Kuralı:

$$\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = LM \text{ dir.}$$

(çarpımın limiti, limitler çarpımına eşit)

4) Sabit Bir Sayıyla Çarpma Kuralı:

$$\lim_{x \to a} k f(x) = kL \text{ dir.}$$

(sabit bir sayıyla çarpımın limiti, limitin sabit sayıyla çarpımına eşit)

5) Bölüm Kuralı:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ dir.}$$ ($M \neq 0$ olmalı)

(bölümün limiti, payda sıfır olmamak şartıyla, limitlerin bölümüne eşit)

6) Sıralama Kuralı:

a'yı içeren bir aralıkta, $f(x) \leq g(x)$ ise, $L \leq M$ olur.

(küçük olan fonksiyonun limiti de küçüktür)

7) Kuvvet Kuralı:

$m$ herhangi bir tamsayı ve $n$ de pozitif bir tamsayı olsun. Ayrıca, $n$ çift ise $L>0$ ve $m<0$ ise $L\neq 0$ şartları da sağlansın.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n} \text{ dir.}$$

(kuvvetin limiti, limitin kuvvetine eşit)

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2+x+4}{x^3-2x^2+7} = ?$$

ÇÖZÜM:

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2+x+4}{x^3-2x^2+7} = \frac{\lim\limits_{x\to a} x^2 + \lim\limits_{x\to a} x + \lim\limits_{x\to a} 4}{\lim\limits_{x\to a} x^3 - \lim\limits_{x\to a} 2x^2 + \lim\limits_{x\to a} 7}$$

$$= \frac{a^2+a+4}{a^3-2a^2+7}$$

($a^3-2a^2+7\neq 0$ olmak şartıyla geçerlidir).

ÖRNEK: $\lim_{x \to 2} \sqrt{2x+1} = ?$

ÇÖZÜM:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{2x+1} = \lim_{x \to 2} (2x+1)^{1/2}$$

$$= \left( \lim_{x \to 2} (2x+1) \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\lim_{x \to 2} (2x+1)}$$

$$= \sqrt{2 * 2 + 1} = \sqrt{5}$$

POLİNOM VE RASYONEL FONKSİYON

Polinom:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklinde $x$ değişkenine bağlı olarak tanımlanan bir $P(x)$ fonksiyonuna "$n$-inci dereceden bir polinom" denir. Burada $n$, negatif olmayan bir tamsayıdır. $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ ve $a_0$ sabit sayılardır ve $a_n \neq 0$ dır.

ÖRNEK:

$3$ : sıfırıncı dereceden bir polinom

$1-x$ : birinci dereceden bir polinom

$2x^3-17x+1$ : üçüncü dereceden bir polinom

Rasyonel Fonksiyon:

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom olsun.

$\Rightarrow$ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ oranına "rasyonel fonksiyon" denir.

$\Rightarrow$ Bu tanımlamalar ve limit kuralları yardımıyla, $a$ herhangi bir reel sayı olmak üzere, polinomların ve rasyonel fonksiyonların limiti,

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

ve

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \quad \left( Q(a)\neq 0 \text{ olmak şartıyla} \right)$$

şeklinde bulunur.

## TEOREM:

$f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları $a$ değerini içeren bir aralıkta tanımlı olsun ($x=a$ için tanımlı olup olmaması önemli değil). Ayrıca, bu aralıkta,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

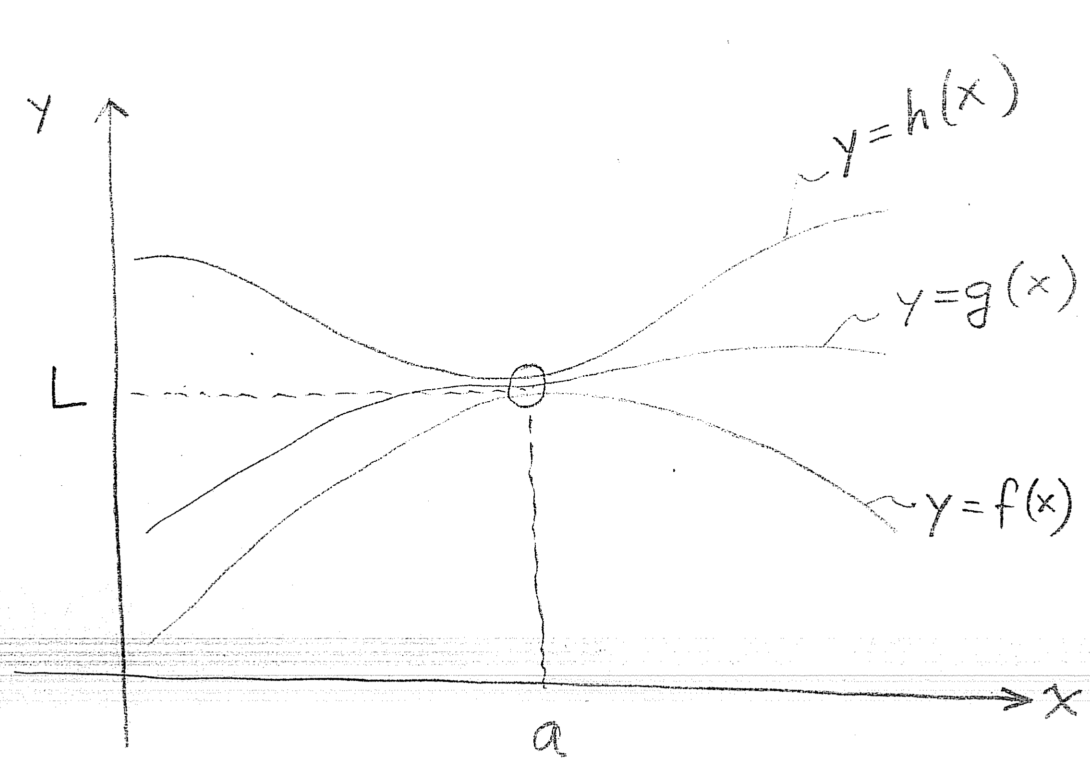
olsun. Bu durumda, eğer,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

oluyorsa,

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = L$$

olur. Benzer ifadeler, sağdan ve soldan limitler içinde yazılabilir.



**ÖRNEK:** $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ limitini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $x=0$ için tanımsızdır.

$\Rightarrow$ Herhangi bir sadeleştirme yada basitleştirme yapılamıyor.

$x$ herhangi bir reel sayı olmak üzere,

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

yazılabilir (görmüştük).

$\Rightarrow$ $x \neq 0$ için:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

yazılabilir.

($x \to 0$ için $x \neq 0$ diyebiliriz)

$\Rightarrow$ bütün terimler $x^2$ ile çarpılırsa,

$$\Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

elde edilir.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} x^2 = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

$\Rightarrow$ Teorem yardımıyla:

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{olur.}$$

SONSUZ LİMİT

* Herhangi bir f(x) fonksiyonunda, x değişkeni bir a sayısına yaklaştırılarak, f(x) fonksiyonu istenildiği kadar büyütülebiliyorsa,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

yazılabilir.

* Benzer şekilde, herhangi bir f(x) fonksiyonunda, x değişkeni bir a sayısına yaklaştırılarak, f(x) fonksiyonu, negatif olarak, istenildiği kadar büyütülebiliyorsa (yada istenildiği kadar küçültülebiliyorsa),

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

yazılabilir.

⇒ Bu tanımlar, tek yönlü limitler için de geçerlidir.

(Sonsuz, aslında sınırsız demektir. Burada, limitin sonsuz olması, yani "sınırın sınırsız olması" çelişki gibi görülebilir. Ancak burada amaç, x = a yakınındaki (sağdan ve soldan) değerler için fonksiyonun davranışını tanımlamaktır).

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

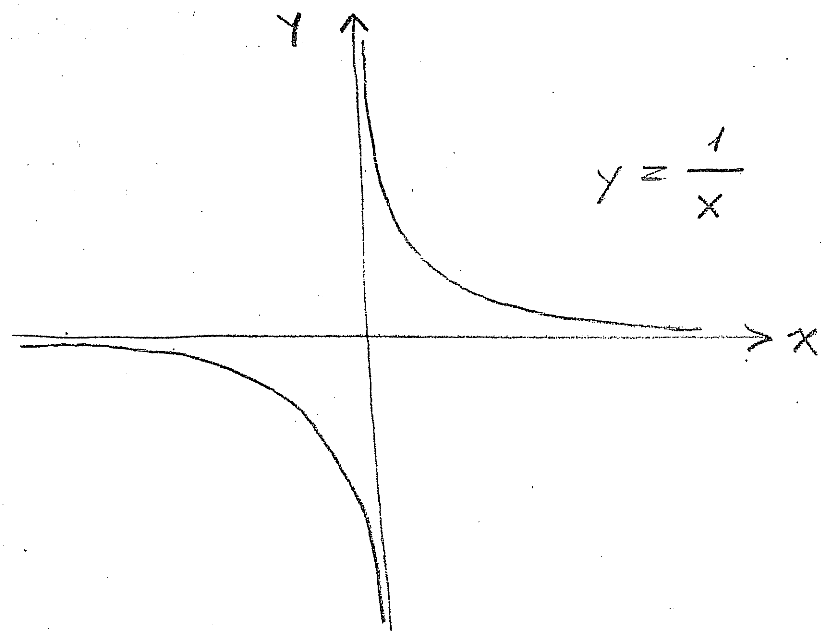
limitlerini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

| $x$ | $\frac{1}{x}$ |
|---|---|
| $-0.1$ | $-10$ |
| $-0.01$ | $-100$ |
| $-0.001$ | $-1000$ |
| $-0.0001$ | $-10000$ |

| $x$ | $\frac{1}{x}$ |
|---|---|
| $0.1$ | $10$ |
| $0.01$ | $100$ |
| $0.001$ | $1000$ |
| $0.0001$ | $10000$ |

$\Rightarrow$ Grafik de çizilebilir:




$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

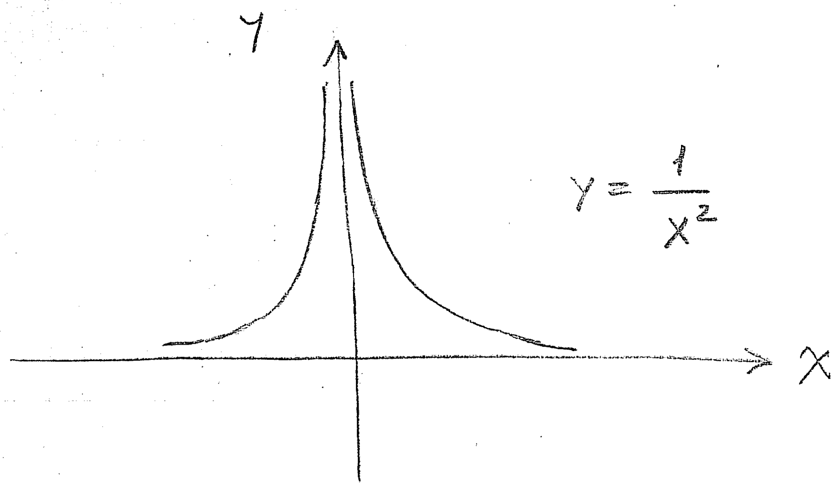
$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ limiti yoktur.}$$

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} \text{ ve } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

limitlerini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**




$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

yazılabilir.

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x\to 4+} \frac{3}{(4-x)^3}, \quad \lim_{x\to 4-} \frac{3}{(4-x)^3} \text{ ve } \lim_{x\to 4} \frac{3}{(4-x)^3}$$

limitlerini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** Önce sağdan limite bakalım:

$\Rightarrow \quad x > 4 \quad \Rightarrow \quad 4 - x < 0$

$\Rightarrow \quad (4-x)^3 < 0$

$\Rightarrow$ pozitif bir sayı (yani 3), negatif olarak büyüyen (ya da küçülen) bir sayıya bölünüyor.

$\Rightarrow$ sağdan limit $-\infty$ olur.

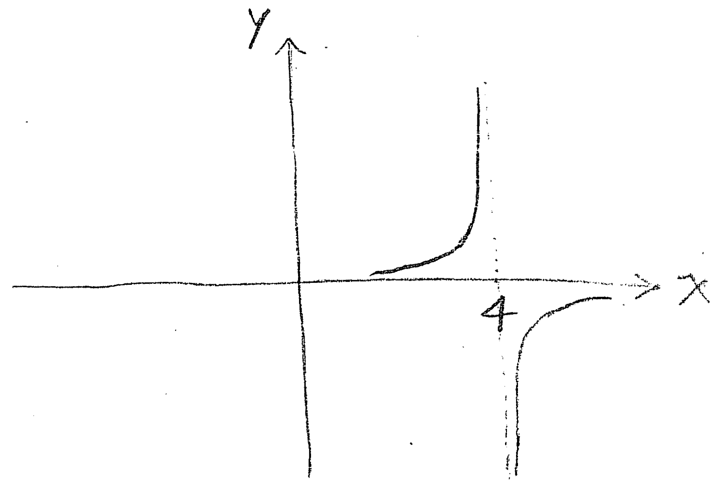
Şimdi de soldan limite bakalım:

$\Rightarrow \quad x < 4 \quad \Rightarrow \quad 4 - x > 0$

$\Rightarrow \quad (4-x)^3 > 0$

$\Rightarrow$ pozitif bir sayı (yani 3), pozitif olarak küçülen bir sayıya bölünüyor.

$\Rightarrow$ Soldan limit $\infty$ olur.




$$\Rightarrow \lim_{x\to 4+} \frac{3}{(4-x)^3} = -\infty, \quad \lim_{x\to 4-} \frac{3}{(4-x)^3} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{3}{(4-x)^3} \text{ limiti yoktur!}$$

TANIM: Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ veya $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ yada $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

limitlerinden biri varsa, $x=a$ doğrusuna, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin "düşey asimptotu" denir.

⇒ yukarıdaki örneklerde, $x=0$ doğrusu ve $x=4$ doğrusu, düşey asimptot olmaktadır.

SONSUZDA LİMİT

* Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunda, $x$ değişkeni istenildiği kadar büyük seçilerek (yada $x$ değişkeni sonsuza yaklaştırılarak), $f(x)$ fonksiyonu bir $L$ değerine yaklaştırılabiliyorsa,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

yazılabilir.

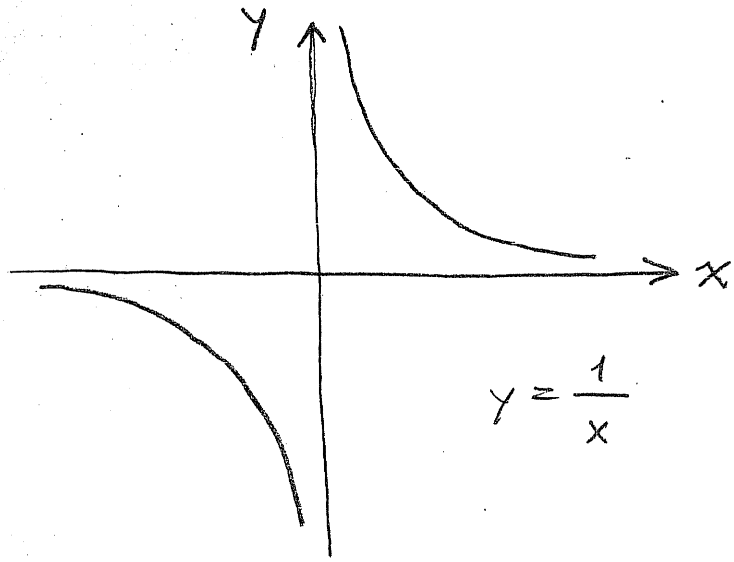
* Benzer şekilde, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunda, $x$ değişkeni negatif olarak istenildiği kadar büyük seçilerek (yada $x$ değişkeni eksi sonsuza yaklaştırılarak), $f(x)$ fonksiyonu bir $L$ değerine yaklaştırılabiliyorsa,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

yazılabilir.

⇒ Bu tanımlarda limit, belli bir $L$ değeri olabileceği gibi, $\infty$ veya $-\infty$ da olabilir

ÖRNEK: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu:




$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ , $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow$ $n$ pozitif bir tamsayı olmak üzere, çarpım kuralı yardımıyla,

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

yazılabilir.

ÖRNEK: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

olarak verildiğine göre,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \text{ ve } \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$(\sqrt{x^2}=|x|)$

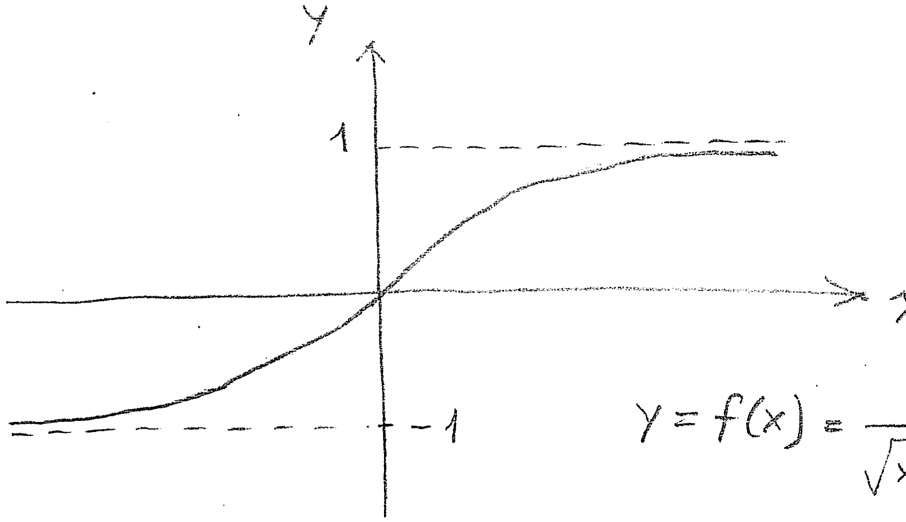
$$=\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\Rightarrow x\to\pm\infty \Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\to 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\operatorname{sgn} x = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{sgn} x = -1$$

bulunur.




$$Y=f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\Rightarrow$ grafikten de görüldüğü gibi,

$$x\to\infty\Rightarrow f(x)\to 1 \text{ ve } x\to-\infty\Rightarrow f(x)\to -1$$

TANIM: Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = M$$

limitleri varsa, $y=L$ veya $y=M$ doğrularına, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin « yatay asimptotları » denir.

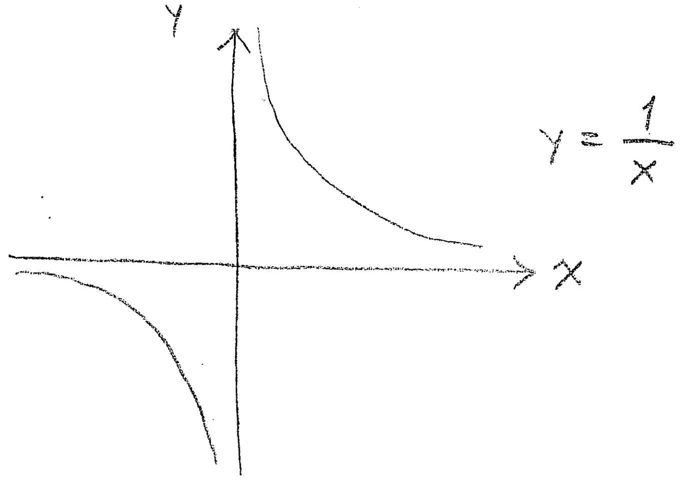
$\Rightarrow$ yukarıdaki örneklerde, $y=0$, $y=1$ ve $y=-1$ doğruları, yatay asimptot olmaktadır.

NOT:

Genel olarak, herhangi bir eğri orijinden uzaklaştıkça, bir doğruya yaklaşıyorsa, bu doğruya, « eğrinin asimptotu » denir.

NOT:

Herhangi bir eğrinin hem yatay hemde düşey asimptotu bulunabilir.




$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow x=0$ doğrusu düşey asimp.

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y=0$ doğrusu yatay asimptot.

ÖRNEK: $\lim\limits_{x \to \infty} 2x^4 - x^2 - 8x$ limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: $(\infty - \infty - \infty) \Rightarrow$ belirsiz!

$\Rightarrow$ verilen ifade, en yüksek dereceli $x$ parantezine alınabilir

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} 2x^4 - x^2 - 8x = \lim_{x \to \infty} x^4\left(2 - \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right)$$

$$(\text{çarpım kuralı}) = \left(\lim_{x \to \infty} x^4\right)\left(\lim_{x \to \infty}\left(2 - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0} - \underbrace{\frac{8}{x^3}}_{0}\right)\right)$$

$$= (\infty)(2) = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} 2x^4 - x^2 - 8x = \infty \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK: $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1}{3}t^5 + 2t^3 - t^2 + 8$ limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: ($\Rightarrow$ en yüksek dereceli $t$ parantezine al!)

$$\Rightarrow \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{3}t^5 + 2t^3 - t^2 + 8 = \lim_{t \to -\infty} t^5\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^3} + \frac{8}{t^5}\right)$$

$$= \left(\lim_{t \to -\infty} t^5\right)\left(\lim_{t \to -\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^3} + \frac{8}{t^5}\right)\right)$$

$$= (-\infty)\left(\frac{1}{3}\right) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to -\infty} \frac{1}{3}t^5 + 2t^3 - t^2 + 8 = -\infty$$ bulunur.

**SONUÇ:**

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ şeklinde tanımlanan $n$-inci dereceden bir polinomun sonsuzda limiti, bu polinomun en yüksek dereceli teriminin sonsuzdaki limitine eşittir.
Yani:

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x\to -\infty} P(x) = \lim_{x\to -\infty} a_n x^n$$

yazılabilir.

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 8x}{-5x^4 + 7}$$ limitini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $(\infty/-\infty) \Rightarrow$ belirsiz!

$\Rightarrow$ payı ve paydayı, paydadaki en yüksek dereceli $x$ parantezine al!

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 8x}{-5x^4 + 7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}\right)}{x^4\left(-5 + \frac{7}{x^4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3}}{-5 + \frac{7}{x^4}} = \frac{2 + 0 + 0}{-5 + 0} = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 - x^2 + 8x}{-5x^4 + 7} = -\frac{2}{5}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x}$$ limitini bulunuz.

ÇÖZÜM: payı ve paydayı $x$ parantezine al!

$\Rightarrow$ Karekökün içini $x^2$ parantezine al!

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3 + \frac{6}{x^2}\right)}}{x\left(\frac{5}{x} - 2\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{3 + \frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x} - 2\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{|x|\sqrt{3 + \frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x} - 2\right)}$$

$$\left(x \to \infty \Rightarrow |x| = x\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{3 + \frac{6}{x^2}}}{x\left(\frac{5}{x} - 2\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{6}{x^2}}}{\frac{5}{x}-2} = \frac{\sqrt{3+0}}{0-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+6}}{5-2x} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{bulunur.}$$

$\Rightarrow$ $x \to -\infty$ olsaydı, sonuç $\frac{\sqrt{3}}{2}$ olurdu!
(herzaman geçerli değil!)

**ÖRNEK:**

$$\lim_{z\to-\infty} \frac{4z^2+z^6}{1-5z^3} \quad \text{limitini bulunuz.}$$

**ÇÖZÜM:** payı ve paydayı $z^3$ parantezine al!

$$\Rightarrow \lim_{z\to-\infty} \frac{4z^2+z^6}{1-5z^3} = \lim_{z\to-\infty} \frac{z^3\left(\frac{4}{z}+z^3\right)}{z^3\left(\frac{1}{z^3}-5\right)}$$

$$= \lim_{z\to-\infty} \frac{\frac{4}{z}+z^3}{\frac{1}{z^3}-5} = \frac{-\infty}{-5} = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to-\infty} \frac{4z^2+z^6}{1-5z^3} = \infty \quad \text{bulunur.}$$

$\Rightarrow$ $z \to \infty$ olsaydı sonuç $-\infty$ olacaktı!

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki limitleri türev kullanmadan bulunuz.

1) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+1)$
2) $\lim\limits_{x\to -1}(1+x+x^2+x^3)$
3) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+3)(3x-1)$

4) $\lim\limits_{x\to 2}3(1-x)(2-x)$
5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+6}$
6) $\lim\limits_{t\to -4}\dfrac{t^2}{4-t}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$
8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$
9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

10) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$
11) $\lim\limits_{t\to -5}\dfrac{t^2+3t-10}{t+5}$
12) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2+3t-10}{t^2-4}$

13) $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{1}{4-h^2}$
14) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h+4h^2}{h^2-h^3}$
15) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

16) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$
17) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{(x-\pi)^2}{\pi x}$
18) $\lim\limits_{x\to -2}|x-2|$

19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|}{x-2}$
20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$
21) $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2-1}{t^2-2t+1}$

22) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4-4x+x^2}}{x-2}$
23) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sqrt{4+t}-\sqrt{4-t}}$
24) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$

25) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2+3t}{(t+2)^2-(t-2)^2}$
26) $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{(s+1)^2-(s-1)^2}{s}$
27) $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-4\sqrt{y}+3}{y^2-1}$

28) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$
29) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}$
30) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^{2/3}-4}{x^{1/3}-2}$

31) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2+16x+5}$
32) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2+16x+5}$
33) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}$

34) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+1|}{x+1}$
35) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^2+\dfrac{1}{x}-5\right)$
36) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+10}$

37) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^2-5x}{2-x}$
38) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2-5x}{2-x}$
39) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-4x^2+x}{2x-3}$

**ÖRNEK:**

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2-5t-9}{2t^4+3t^3}$$ limitini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** payı ve paydayı $t^4$ parantezine al!

$$\Rightarrow \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2-5t-9}{2t^4+3t^3} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^4\left(\frac{1}{t^2}-\frac{5}{t^3}-\frac{9}{t^4}\right)}{t^4\left(2+\frac{3}{t}\right)}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{1}{t^2}-\frac{5}{t^3}-\frac{9}{t^4}}{2+\frac{3}{t}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2-5t-9}{2t^4+3t^3} = 0$$ bulunur.

---

Rasyonel fonksiyonların sonsuzda limiti:

1) payın derecesi paydanın derecesine eşit ise, en yüksek dereceli terimlerin katsayıları oranı,

2) payın derecesi paydanın derecesinden küçük ise, sıfır,

3) payın derecesi paydanın derecesinden büyük ise, $\infty$ veya $-\infty$

---

## SÜREKLİLİK

Herhangi bir f(x) fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan bir c noktasında,

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

oluyorsa, « f(x) fonksiyonu, c noktasında süreklidir » denir.

$$\lim_{x \to c} f(x) \text{ limiti yoksa veya } \lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$

ise, « f(x) fonksiyonu, c noktasında süreksizdir » denir.

⇒ Eğer herhangi bir f(x) fonksiyonu c noktasında sürekli ise,

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c), \quad \lim_{x \to c-} f(x) = f(c) \text{ ve } \lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$$

demektir.

## SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

Herhangi bir f(x) fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan bir c noktasında,

$$\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$$

oluyorsa, « f(x) fonksiyonu c noktasında sağdan süreklidir » denir.

$$\lim_{x \to c-} f(x) = f(c)$$

oluyorsa, « f(x) fonksiyonu c noktasında soldan süreklidir » denir.

## SINIR NOKTALARINDA SÜREKLİLİK

$[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, bir $f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$\Rightarrow$ $a$ : sol sınır noktası
$b$ : sağ sınır noktası olur.

$\Rightarrow$ Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $a$ noktasında sağdan sürekli ise, yani,

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

oluyorsa, « $f(x)$ fonksiyonu, $a$ noktasında süreklidir » denir.

$\Rightarrow$ Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $b$ noktasında soldan sürekli ise, yani,

$$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

oluyorsa, « $f(x)$ fonksiyonu, $b$ noktasında süreklidir » denir.

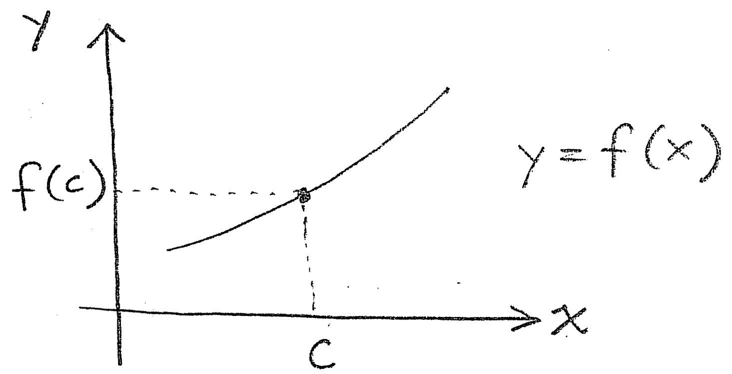
## BİR ARALIKTA SÜREKLİLİK

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığının bütün noktalarında sürekli oluyorsa, « $f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında süreklidir » denir.

## SÜREKLİ FONKSİYON

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu, tanım kümesinde bulunan bütün noktalar için sürekli oluyorsa, bu durumda, "$f(x)$ fonksiyonu, sürekli bir fonksiyondur" denir.

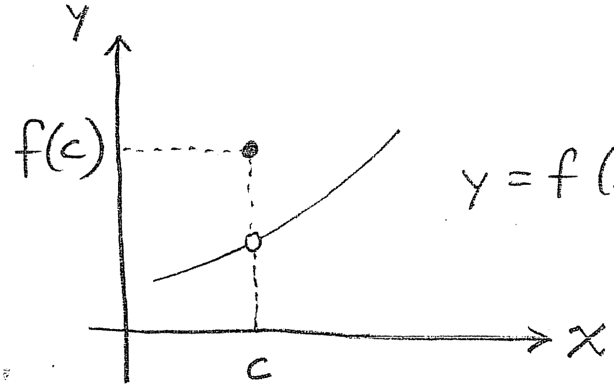
**ÖRNEK:**




$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu, $c$ noktasında süreklidir.

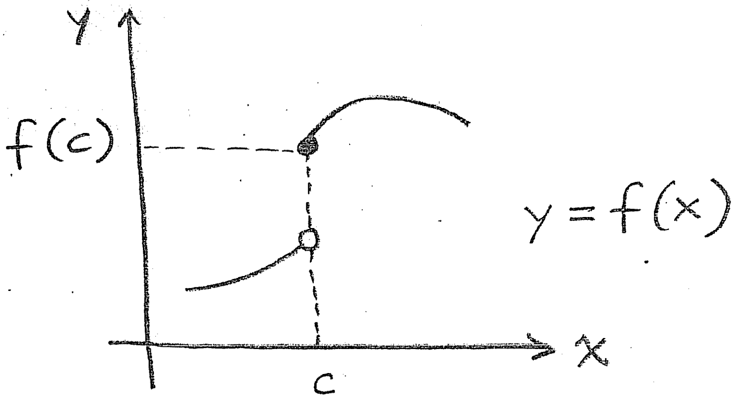
**ÖRNEK:**




$$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu, $c$ noktasında süreksizdir.

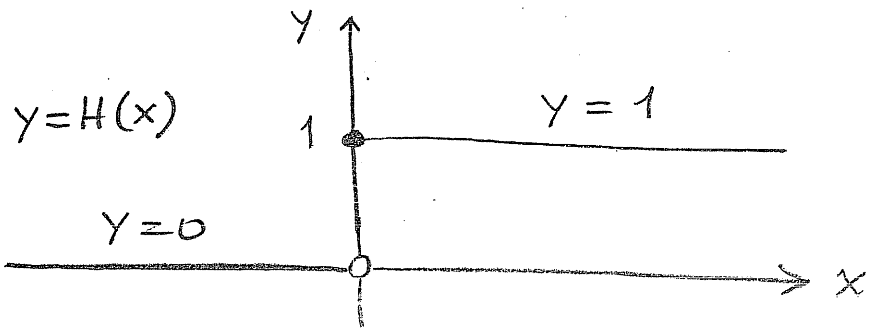
ÖRNEK:




$\Rightarrow \lim_{x \to c} f(x)$ limiti yoktur.

$\Rightarrow f(x)$ fonksiyonu $c$ noktasında süreksizdir.

ÖRNEK: Adım fonksiyonu



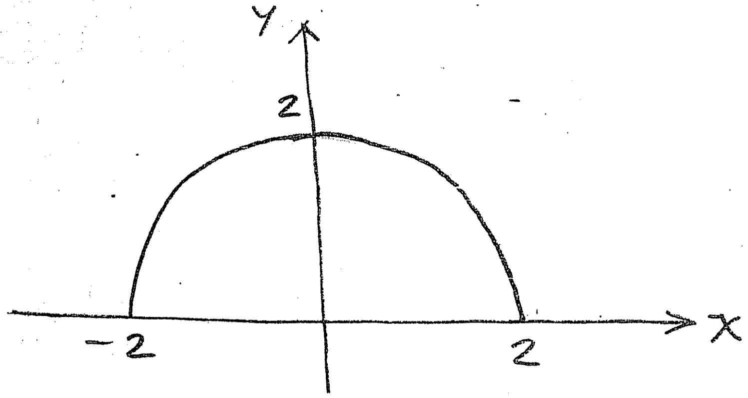

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ 0, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} H(x) = 1 = H(0) \Rightarrow H(x)$ fonksiyonu $0$ noktasında sağdan süreklidir

$\lim_{x \to 0-} H(x) = 0 \neq H(0) \Rightarrow H(x)$ fonksiyonu $0$ noktasında soldan süreksizdir

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} H(x)$ limiti yoktur $\Rightarrow H(x)$ fonksiyonu $0$ noktasında süreksizdir.

ÖRNEK: $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ fonksiyonu



$\Rightarrow$ Tanım kümesi : $[-2, 2]$ aralığıdır.

$\Rightarrow$ $-2$ : sol sınır noktasıdır

$2$ : sağ sınır noktasıdır

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0 = f(-2)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu $-2$ noktasında sağdan süreklidir.

$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu $-2$ noktasında süreklidir.

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 = f(2)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu $2$ noktasında soldan süreklidir.

$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu $2$ noktasında süreklidir.

$\Rightarrow$ $-2 < c < 2$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \sqrt{4-c^2} = f(c)$ $\Rightarrow$ sürekli fonksiyon!

ÖRNEK: $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu, sürekli bir fonksiyondur.

$\Rightarrow$ Tanım kümesi : $[0, \infty)$ aralığıdır.

$\Rightarrow$ 0 : sol sınır noktasıdır

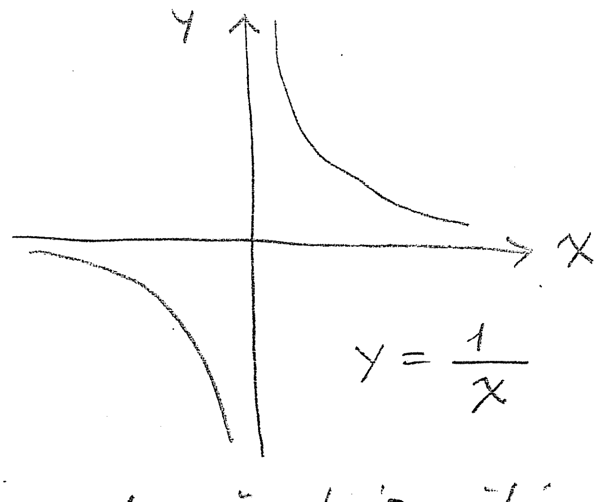
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0 = f(0)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu 0 noktasında süreklidir.

$\Rightarrow 0 < c < \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = \sqrt{c} = f(c)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur.

ÖRNEK: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu, sürekli bir fonksiyondur.




$\Rightarrow$ $x = 0$ noktasında süreksiz gibi görülüyor ama $x = 0$ noktası tanım kümesinde bulunmadığından, bu noktada süreklilik ya da süreksizlikten söz edilemez.

TEOREM:

f ve g fonksiyonları, c noktasında sürekli ve k, sabit bir sayı olsun.

Bu durumda; $(f+g)$, $(f-g)$, $(f*g)$, $(k*f)$, $\left(\frac{f}{g}\right)$ ve $(f(x))^{1/n}$ fonksiyonları da c noktasında süreklidir.

NOT:

Aşağıdaki fonksiyonlar, tanım kümelerinin bütün noktalarında sürekli olduklarından, sürekli fonksiyonlardır:

1) Polinomlar
2) Rasyonel Fonksiyonlar
3) Köklü Fonksiyonlar $\left(x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}\right)$
4) Trigonometrik Fonksiyonlar
5) Mutlak Değer Fonksiyonu $(|x|)$

ÖRNEK:

$$f(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2-4},$$

$$f(x) = |x^2 - 1|, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, \quad f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{|x+2|}}$$

fonksiyonları, sürekli fonksiyonlardır.

**TEOREM:** (maksimum-minimum teoremi)

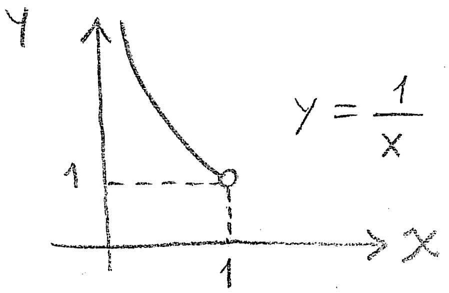
Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve bu aralıkta sürekli olsun. Bu durumda, $[a,b]$ kapalı aralığında bulunan bütün $x$ değerleri için $(x \in [a,b])$, bu aralıkta,

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \text{ve} \quad f(x) \leq f(x_2)$$

olacak şekilde en az birer $x_1$ ve $x_2$ değeri $(x_1, x_2 \in [a,b])$ vardır.

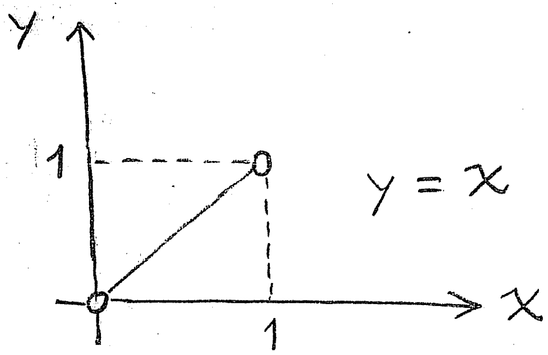
Burada $f(x_1)$ değerine, $f(x)$ fonksiyonunun «mutlak minimum değeri» ya da «en küçük değeri» denir. $f(x_2)$ değerine ise, $f(x)$ fonksiyonunun «mutlak maksimum değeri» ya da «en büyük değeri» denir.

**ÖRNEK:** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu, $(0,1)$ açık aralığında süreklidir.



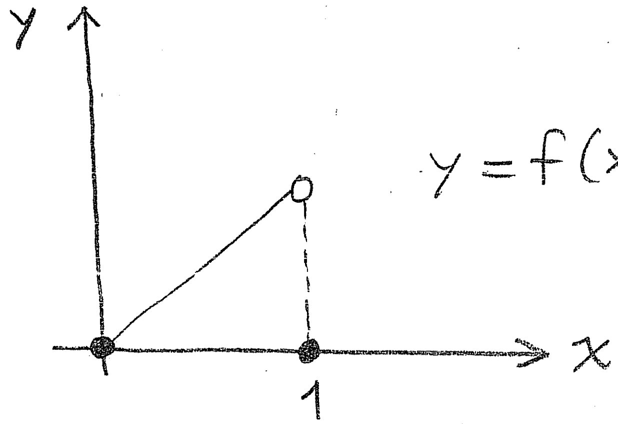

$\Rightarrow$ $(0,1)$ aralığı açık bir aralık olduğundan, fonksiyonun bu aralıkta en küçük ve en büyük değeri yoktur.

**ÖRNEK:** $f(x) = x$ fonksiyonu, $(0,1)$ açık aralığında süreklidir.



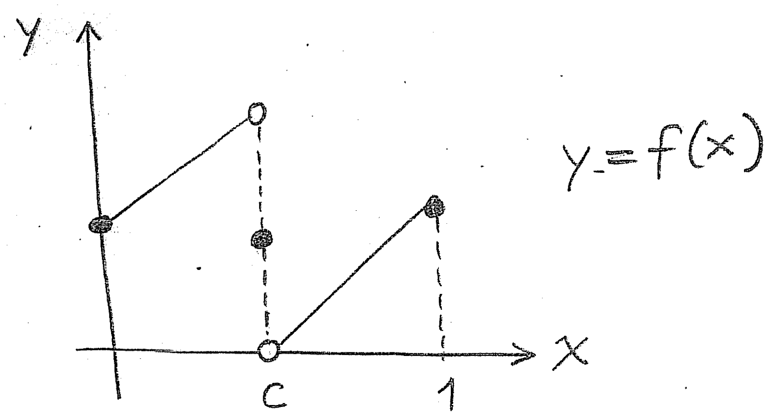

$\Rightarrow$ $(0,1)$ aralığı açık bir aralık olduğundan, fonksiyonun bu aralıkta en küçük ve en büyük değeri yoktur.

**ÖRNEK:**




$\Rightarrow$ $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlıdır. Ancak $x=1$ sınır noktasında süreksiz olduğundan, fonksiyonun en küçük değeri olmasına rağmen, en büyük değeri yoktur.

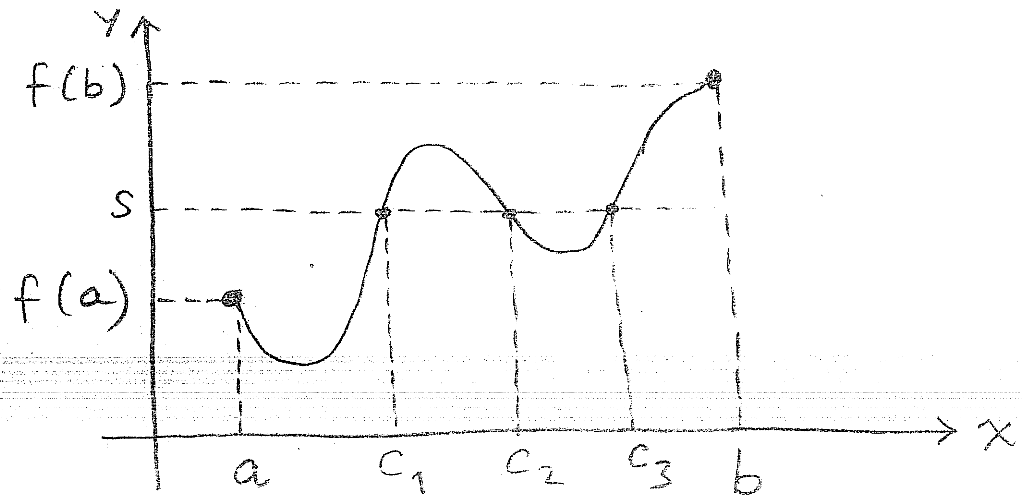
ÖRNEK:




⇒ f(x) fonksiyonu, [0,1] kapalı aralığının bir elemanı olan c noktasında süreksiz olduğundan, bu aralıkta fonksiyon süreksizdir. Bu aralıkta, fonksiyonun en küçük ve en büyük değeri yoktur.

TEOREM: (ara değer teoremi)

Herhangi bir f(x) fonksiyonu, [a,b] kapalı aralığında tanımlı ve bu aralıkta sürekli olsun. Eğer s, f(a) ile f(b) arasında, fonksiyonun aldığı bir değer ise, bu durumda [a,b] aralığında f(c)=s şartını sağlayan en az bir adet c değeri vardır.



⟹ Ara Değer Teoremine göre, tanım kümesi kapalı bir aralık olan ve bu aralıkta sürekli bir fonksiyonun, en küçük değeri m ve en büyük değeri de M ise, bu fonksiyon m ile M arasındaki bütün değerleri alacak demektir. Diğer bir deyişle bu fonksiyonun değer kümesi $[m, M]$ kapalı aralığı olacaktır.

NOT:

$[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve bu aralıkta sürekli olan bir $f(x)$ fonksiyonunda, $f(a) * f(b) < 0$ ise, yani $f(x)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığının sınır noktalarında farklı işaretli değerler alıyorsa, $(a,b)$ aralığında $f(c)=0$ şartını sağlayan en az bir adet c değeri vardır $\left(f(c)=0,\ c\in(a,b)\right)$. Diğer bir deyişle, $f(x)=0$ denkleminin $(a,b)$ aralığında en az bir adet kökü vardır.

ÖRNEK: $3x^3-4x^2+2x-1=0$ denkleminin $[0,2]$ aralığında kökü var mıdır?

ÇÖZÜM: $f(x)=0 \Rightarrow f(x)=3x^3-4x^2+2x-1$

$\Rightarrow f(x) \rightarrow$ polinom $\Rightarrow$ bütün reel sayılar için süreklidir

$\Rightarrow [0,2]$ aralığında da süreklidir.

$\Rightarrow f(0)=-1$ ve $f(2)=11 \Rightarrow f(0) * f(2) < 0$

⟹ verilen denklemin $[0,2]$ aralığında en az bir kökü vardır.

# TÜREV

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur.

⇒ Herhangi bir $x$ değeri için $f'(x)$ fonksiyonu tanımlı ise (yani limit varsa), $f$ fonksiyonuna, "$x$ noktasında türevlenebilir fonksiyon" denir.

* Herhangi bir $x$ değerinin $f'(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunabilmesi için,

  1) $x$ değerinin $f$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunması, ve,

  2) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ limitinin varolması

gereklidir.

* $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan herhangi bir $x$ noktasında, $f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon değilse (yani $f'(x)$ tanımlı değilse), bu $x$ noktasına, $f(x)$ fonksiyonunun «tekil noktası» denir.

* Herhangi bir fonksiyonun türevinin hesaplanması işlemine, «diferansiyel hesap» denir.

## SINIR NOKTALARINDA TÜREV

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı olsun.

$\Rightarrow$ $a \to$ sol sınır noktası

$b \to$ sağ sınır noktası olur.

$\Rightarrow$ Bu durumda,

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

limiti varsa, bu limite, $f$ fonksiyonunun $a$ noktasındaki türevi denir.

$\Rightarrow$ Benzer şekilde,

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

limiti varsa, bu limite, $f$ fonksiyonunun $b$ noktasındaki türevi denir.

* Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığının her noktasında türevi varsa, bu durumda $f(x)$ fonksiyonuna "$[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir fonksiyon" denir.

**ÖRNEK:** Türevin tanımını kullanarak,

$$f(x) = ax+b \quad (a,b \text{ sabit})$$

şeklinde verilen bir fonksiyon için,

$$f'(x) = a$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)+b - (ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = a}$$

ÖRNEK: Türevin tanımını kullanarak, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

$$= 2x$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 2x}$$

**ÖRNEK:** Türevin tanımını kullanarak, $g(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(x) = -\frac{1}{x^2}}$$

($x = 0$ noktası tekil nokta değil)

**ÖRNEK:** Türevin tanımını kullanarak, $k(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$k'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

($x=0$ noktası $k$'nın bir tekil noktasıdır)

**ÖRNEK:** $f(x) = |x|$ olduğuna göre,

$f'(x) = \dfrac{x}{|x|} = sgn(x)$ olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜM:**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x>0$, $x=0$, $x<0$ için türev bulunmalıdır.

$$x=0 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} sgn\, h$$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0+} \operatorname{sgn} h = 1 \ , \ \lim_{h\to 0-} \operatorname{sgn} h = -1$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \operatorname{sgn} h$ limiti yoktur.

$\Rightarrow$ $x=0$ için türev tanımsızdır!

$\Rightarrow \ x>0 \Rightarrow f(x) = x$

$\Rightarrow f'(x) = 1 \quad (f(x)=ax+b, \ a=1)$

$\Rightarrow \ x<0 \Rightarrow f(x) = -x$

$\Rightarrow f'(x) = -1 \quad (f(x)=ax+b, \ a=-1)$

$\Rightarrow$ Bulunan bu sonuçlar bir arada yazılırsa:

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \text{ ise} \\ -1, & x<0 \text{ ise} \\ \text{tanımsız}, & x=0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x}{|x|} = \operatorname{sgn}(x) \quad \text{olur.}$$

$\Rightarrow$ $x=0$ noktası, $f(x)=|x|$ fonksiyonunun bir tekil noktasıdır.

(Çünkü, $x=0$ noktası, $|x|$ fonksiyonunun tanım kümesindedir fakat fonksiyon bu noktada türevlenebilir değildir).

ÖRNEK:

$$f(x) = c \quad (c: \text{sabit})$$

şeklinde verilen bir fonksiyon için

$$f'(x) = 0$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

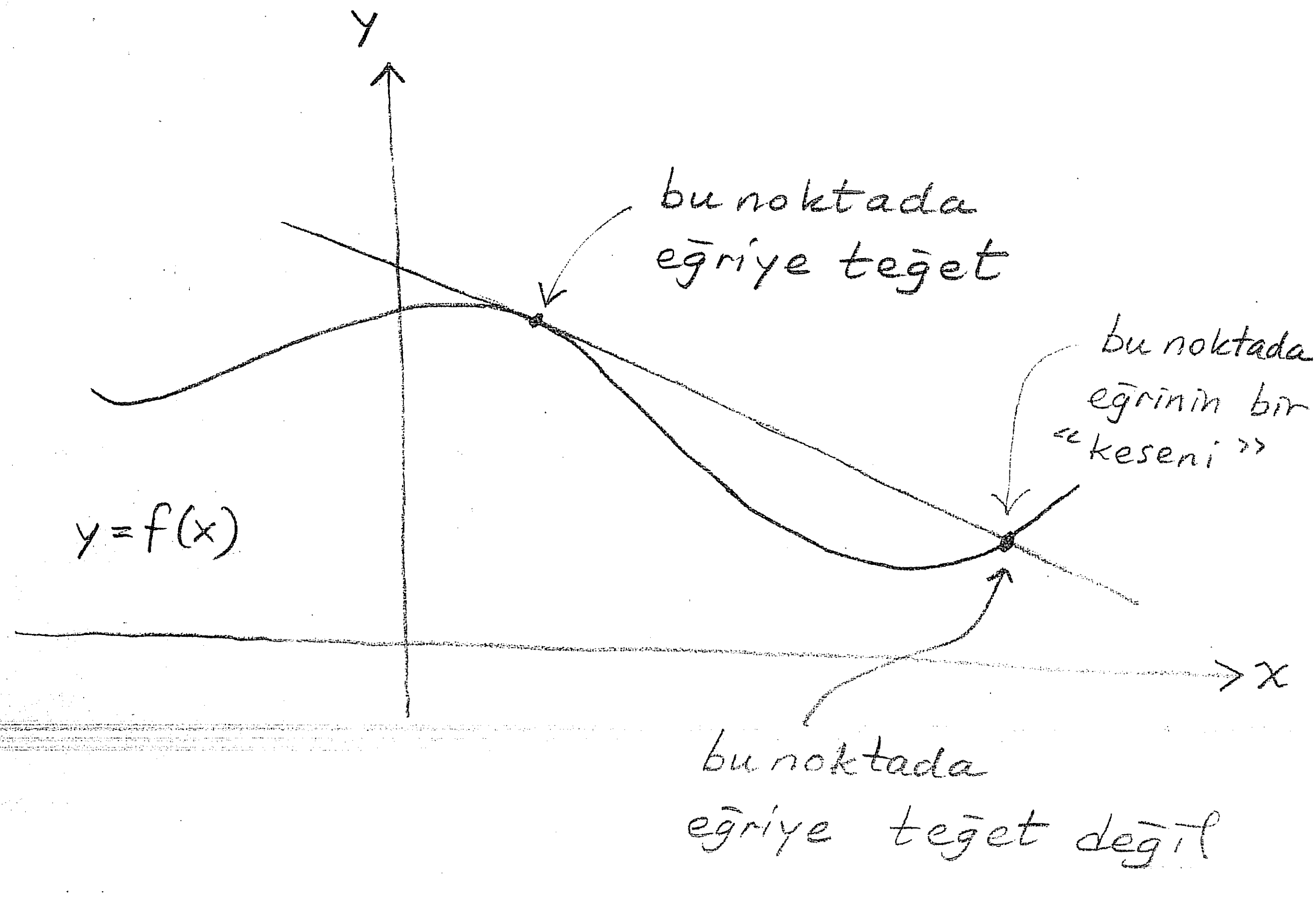
$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 0}$$

## TEĞET DOĞRU VE ANLIK HIZ PROBLEMİ

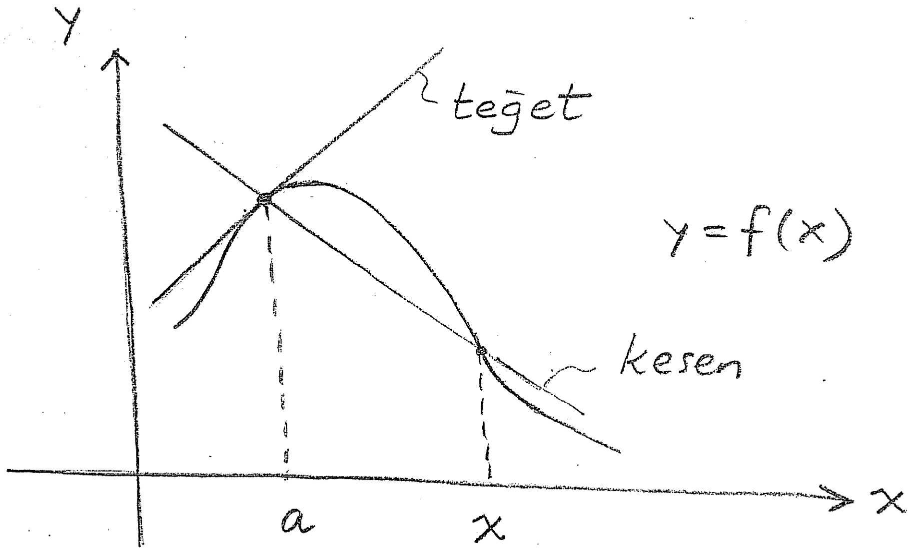
Türev kavramı, bir fonksiyonun grafiği olan eğrinin bir noktadaki teğet doğrusunun (yada kısaca, teğetinin) bulunması ile, hareket halindeki bir cismin anlık hızının bulunması problemlerinden ortaya çıkmıştır.

## TEĞET DOĞRULAR

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiği olan eğrinin $x=a$ noktasındaki teğet doğrusu (yada kısaca, teğeti), tam bu noktada eğri ile çakışan ve bu noktada eğriye "paralel" olan (yada bu noktada eğri ile aynı doğrultuda hareket eden) bir doğrudur.



⇒ Eğrinin $x=a$ noktasındaki teğetinin bulunabilmesi için, öncelikle eğrinin $x=a$ noktasında bir keseni çizilebilir.




⇒ teğetin denkleminin bulunabilmesi için, bir noktasının ve eğiminin bilinmesi, yada iki noktasının bilinmesi gerekir.

⇒ teğetin bir noktası biliniyor : $(a, f(a))$

⇒ başka nokta bilinmediği için, eğimini bulmaya çalışalım!

⇒ önce, kesenin eğimi $(m_k)$ :

$$m_k = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

şeklinde yazılabilir.

( $x$, $a$'nın solunda da olabilir )

⇒ $x$, a'ya yaklaştırılarak (a'nın sağından ve solundan), kesenin eğiminin ($m_k$) belli bir değere yaklaşıp yaklaşmadığı kontrol edilebilir. Eğer $x \to a$ için $m_k$ ifadesinin bir limiti varsa, bu limit, teğetin eğimine ($m_t$) eşit olur. Yani,

$$m_t = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

yazılabilir.

⇒ Bu durumda, $x = a$ noktasındaki teğetin denklemi (bir noktası ve eğimi bilinen doğru):

$$y_t = f(a) + m_t\,(x - a)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Şimdi, $x$ yerine, $a$ noktasına uzaklığı $h$ olan bir nokta seçtiğimizi düşünelim. Yani,

$x = a + h$ olsun.

⇒ $h > 0$ ise $x$, a'nın sağında
$h < 0$ ise $x$, a'nın solunda

olacaktır.

⇒ $x = a + h$ ⇒ $h = x - a$ olur.

$\Rightarrow x \to a \Rightarrow h \to 0$ demektir.

$\Rightarrow$ Bu durumda, teğetin eğimi ($m_t$) yeniden yazılırsa,

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

elde edilir. Bu ifade, $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki türevi olarak tanımlanmıştır.

Diğer bir deyişle, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki türevi, geometrik olarak, bu fonksiyonun grafiğinin $x=a$ noktasındaki teğetinin eğimine eşittir.

ÖRNEK: $y = x^2$ eğrisinin, $x = 1$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM: $y_t = f(a) + m_t (x - a)$

$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(a) = f(1) = 1^2 = 1 \Rightarrow (1,1)$ noktası

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

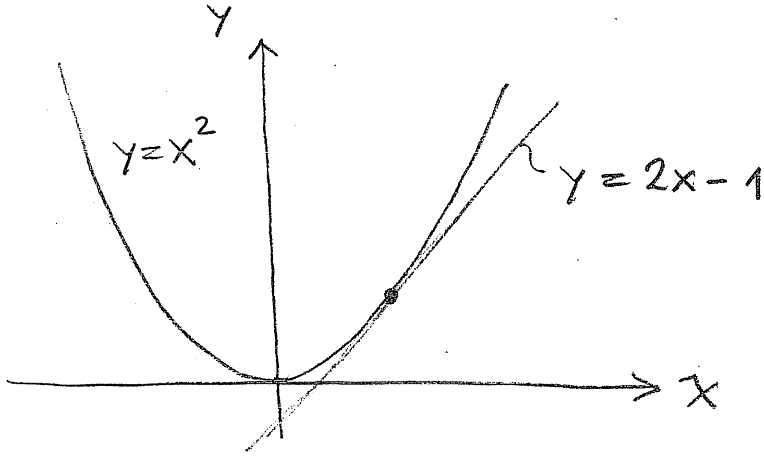
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2+h \Rightarrow \boxed{m_t = 2}$$

$$\Rightarrow y_t = 1 + 2(x-1) \Rightarrow \boxed{y_t = 2x-1}$$

$\Rightarrow$




NOT:

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x=a$ noktasında bir teğeti varsa, bu noktada teğete dik olan bir doğruya, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $x=a$ noktasındaki "normali" denir. Buna göre $x=a$ noktasındaki normalin eğimi $(m_n)$,

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$ olacaktır.

<u>ÖRNEK:</u> $y = x^2$ eğrisinin $(1,1)$ noktasındaki normalinin denklemini bulunuz.

<u>ÇÖZÜM:</u>

$$y_n = f(a) + m_n (x-a)$$

$$f(a) = 1 \, , \quad m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y_n = 1 - \frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_n = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}}$$

## ANLIK HIZ

Hareket halindeki bir cismin belirli bir zaman aralığındaki ortalama hızı, bu zaman aralığında, cismin konumundaki değişim miktarının, zaman aralığının uzunluğuna oranı olarak tanımlanmaktadır.

Buna göre, hareket halindeki bir cismin aldığı yol, $t$ zamanına bağlı olarak, $f(t)$ fonksiyonu ile verilmiş ise, $[a, t]$ aralığında cismin ortalama hızı, $(V_{ort})$,

$$V_{ort} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

şeklinde yazılabilmektedir.

⇒ $t=a$ anındaki "anlık hızı" bulabilmek için $t$, $a$'ya yaklaştırılarak ($a$'nın sağından ve solundan), ortalama hızın belirli bir değere yaklaşıp yaklaşmadığı kontrol edilebilir. Eğer $t \to a$ için $V_{ort}$ ifadesinin bir limiti varsa, bu limit, cismin $t=a$ anındaki anlık hızına ($V_a$) eşit olacaktır.

Yani :

$$V_a = \lim_{t \to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

yazılabilir.

⇒ $t = a+h$ olsun ⇒ $h = t-a$ olur

$h > 0$ ⇒ $t$, $a$'nın sağında

$h < 0$ ⇒ $t$, $a$'nın solunda

olacaktır.

⇒ $t \to a$ ⇒ $h \to 0$ demektir.

⇒ Anlık hız ifadesini buna göre düzenlersek:

$$V_a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

elde edilir. Bu ifade, $f(t)$ fonksiyonunun $t=a$ noktasındaki türevidir !

## ORTALAMA VE ANLIK DEĞİŞİM ORANI

Teğet doğru ve anlık hız problemlerinde, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ oranının limiti incelenmiştir.

Genel olarak, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunda, $x$ bağımsız değişkeni bir $a$ noktasından $a+h$ noktasına değiştiğinde ($h>0$ veya $h<0$ olabilir), fonksiyon değerlerinde meydana gelen değişiklik miktarı $f(a+h)-f(a)$ olur. Bu durumda,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

oranına, fonksiyonun $[a, a+h]$ aralığında $x$'e göre ortalama değişim oranı denir.

$h$ sıfıra yaklaşırken ($h \to 0$) bu oranın bir limiti varsa, bu limite, $x=a$ noktasında fonksiyonun $x$'e göre anlık değişim oranı (yada kısaca, değişim oranı) denir.

Diğer taraftan bu limitin, fonksiyonun $x=a$ noktasındaki türevi olduğu bilinmektedir. Yani,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \quad \text{dır.}$$

Buna göre, $f'(a)$ türevi, $x=a$ noktasında, $f(x)$ fonksiyonunun $x$'e göre değişim oranını göstermektedir.

**ÖRNEK:** Yarıçapı 5 m olan bir dairenin alanının yarıçapına göre değişim oranını bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$A = f(r) = \pi r^2$$

$$\Rightarrow f'(r) = \lim_{h \to 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\pi (r+h)^2 - \pi r^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\pi r^2 + 2\pi r h + \pi h^2 - \pi r^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\pi r h + \pi h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2\pi r + \pi h = 2\pi r$$

$$\Rightarrow f'(r) = 2\pi r$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(5) = 10\pi \ m^2/m}$$

$\Rightarrow$ Bu oran sabit olsaydı, yarıçap 1m arttığında, alan $10\pi \ m^2$ artardı. Ancak, yarıçap değiştikçe bu oran değişmektedir.

<u>ÖRNEK:</u> Bir balonun içindeki havanın hacmi, zamana bağlı olarak, $V(t) = t^3 - 6t^2 + 35$ ifadesi ile verilmektedir ($t$: saat, $V$: $cm^3$). Buna göre, $t = 5$ saat için, havanın hacminin zamana göre değişim oranını bulunuz.

<u>ÇÖZÜM:</u>

$$V'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{V(5+h) - V(5)}{h}$$

$\Rightarrow V'(5) = 15\ cm^3/saat$ bulunur.

$\Rightarrow$ tam $t=5$ anında haçim $15\ cm^3/saat$ oranında değişmektedir. Yani, "eğer bu oran sabit olsaydı, 1 saat sonra hacim $15\ cm^3$ artacaktı" demektir. Ancak, genellikle bu oran sabit olmamaktadır.

$\Rightarrow V(5) = 10,\ V(6) = 35 \Rightarrow 35 - 10 = 25 \neq 15$

$\Rightarrow t = 5$ için hacmin zamana göre değişimi pozitif olduğundan ($V'(5) > 0$), bu noktada hacmin artmakta olduğu söylenebilir.

$\Rightarrow t = 5$ dışındaki bazı noktalardaki değişim oranına bakılarak, bu noktalarda hacmin nasıl değiştiği incelenebilir.

Örnek olarak: $t = 4 \Rightarrow V'(4) = 0$, $t = 3 \Rightarrow V'(3) = -9$

$\Rightarrow t = 4$ noktasında hacim değişmiyor, $t = 3$ noktasında hacim azalıyor.

$\Rightarrow t = 5$ noktasında hacim daha hızlı değişiyor!

ÖRNEK: Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin aldığı yol (y), zamanın (t) fonksiyonu olarak, t(s), y(m) olmak üzere,

$$y(t) = 20t + 3t^2$$

eşitliği ile verildiğine göre,

a) cismin $t = 2s$ ile $t = 10s$ arasındaki ortalama hızını bulunuz

b) cismin $t = 2s$'de (anlık) hızını bulunuz

ÇÖZÜM:

a) $t = 2$ sn $\Rightarrow y(2) = 52$ m

$t = 10$ sn $\Rightarrow y(10) = 500$ m

$\Rightarrow$ $[2,10]$ zaman aralığında ortalama hız ($V_o$):

$$V_o = \frac{y(10) - y(2)}{10-2} = \frac{500-52}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_o = 56 \ m/s}$$

b) $t=2$ s'de (anlık) hız ($V_a$):

$$V_a = \lim_{h \to 0} \frac{y(2+h) - y(2)}{h}$$

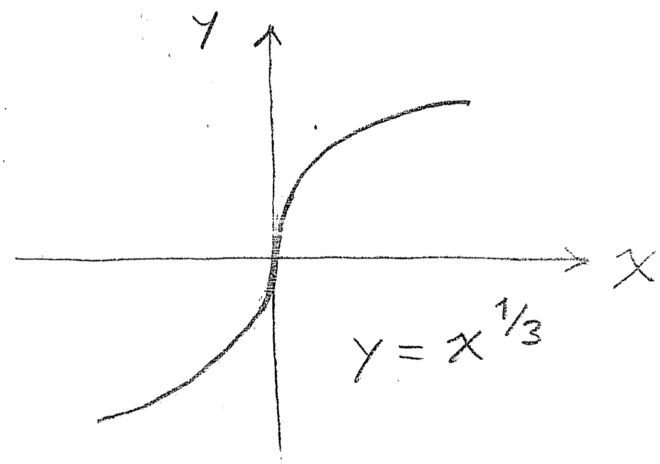
$$= \lim_{h \to 0} \frac{20(2+h) + 3(2+h)^2 - 52}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{32h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 32 + 3h = 32$$

$$\Rightarrow \boxed{V_a = 32 \, m/s}$$

$\Rightarrow$ $t = 2$ s'de, $y(t)$ fonksiyonunun zamana göre (anlık) değişim oranı $32 \, m/s$ dir.

ÖRNEK: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ fonksiyonunun, $x = 0$ noktasındaki teğeti




( y ekseni, orijinde eğriye teğet )

$\Rightarrow$ $x = 0$ noktasındaki teğetin eğimi $(m_t)$:

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow m_t = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}}$$

$$\Rightarrow m_t = \infty$$

$\Rightarrow$ teğet, düşey bir doğrudur $\Rightarrow$ y ekseni demektir.

## EĞRİNİN EĞİMİ

Herhangi bir C eğrisinin üzerindeki bir P noktasında teğeti varsa, bu teğetin eğimi, C eğrisinin P noktasındaki eğimidir.

ÖRNEK: $y = \dfrac{x}{3x+2}$ eğrisinin $x=-2$ noktasındaki eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM: Eğimi m ile gösterirsek,

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \quad \text{olur}$$

$$\Rightarrow m = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-2+h}{3(-2+h)+2} - \dfrac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4+2h-(-6+3h+2)}{2(-6+3h+2)\,h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2(-4+3h)} \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{8}}$$

## KUVVET KURALI

$$\boxed{f(x) = x^r \Rightarrow f'(x) = r x^{r-1}}$$

(ispatı sonra yapılacak)

* Kuvvet Kuralı, $x^{r-1}$ terimini reel sayı yapan bütün $r$ ve $x$ reel sayıları için geçerlidir.

**ÖRNEK:** (önceki örnekler)

* $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{R})$

* $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

* $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

**ÖRNEK:**

$$f(x) = x^{5/3} \Rightarrow r = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} \quad (x \in \mathbb{R})$$

**ÖRNEK:**

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2} \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g'(t) = -\frac{1}{2} t^{-3/2} \quad (t > 0)$$

## KUVVET KURALININ İSPATI (r: POZİTİF TAMSAYI)

$f(x) = x^n$ ve $n$ pozitif bir tamsayı olsun.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad \text{olur.}$$

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

yazılabilir

EA: Çarparak göster!

$$\left.\begin{array}{l} a \to x+h \\ b \to x \end{array}\right\} \Rightarrow a-b = h$$

$$\Rightarrow (x+h)^n - x^n = h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \underbrace{(x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1})}_{n\text{-adet terim}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = n x^{n-1}}$$

## TÜREVİN FARKLI GÖSTERİLİŞLERİ

$y=f(x)$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyonun türevi,

$$\boxed{f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\big(f(x)\big) = \frac{d}{dx}(y)}$$

şekillerinde gösterilebilir.

⇒ $y'$ dışındaki gösterilişlerde, $x$ bağımsız değişkeni görülmektedir.

⇒ "$y$'nin $x$'e göre türevi" yada "$f(x)$'in $x$'e göre türevi" anlamına gelmektedir.

⇒ Herhangi bir ifadenin $x$'e göre türevi, ifadenin önüne $\frac{d}{dx}$ yazılarak gösterilebilir.

⇒ $\frac{d}{dx}$ terimine "türev operatörü" denir ve $x$'e göre türev anlamına gelir.

**ÖRNEK:**

$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d}{dt}t^{100} = 100t^{99}$$

NOT:

Herhangi bir fonksiyonun türevinin belirli bir $a$ noktasındaki değeri de farklı şekillerde gösterilebilir:

$$\boxed{f'(a) = y'\Big|_{x=a} = \frac{df}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}}$$

Burada $\Big|_{x=a}$ işaretinin önünde olduğu ifade, $x=a$ noktasında hesaplanacak demektir.

$\Big|_{x=a}$ → «hesaplama sembolü» de denir.

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx}x^4\Big|_{x=-1} = 4x^3\Big|_{x=-1}$$

$$= 4*(-1)^3 = -4$$

($x^4$'ün $x$'e göre türevinin $-1$ noktasındaki değeri $-4$ tür).

ÖRNEK: Türevin tanımını kullanarak,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\Big|_{x=2}$$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM: (İki farklı yolla yapılabilir; önce türev bulunup $x=2$ yazılabilir yada $x=2$ için türev bulunur).

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\Big|_{x=2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2+h}{(2+h)^2+1} - \frac{2}{2^2+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2+h}{5+4h+h^2} - \frac{2}{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(2+h) - 2(5+4h+h^2)}{5(5+4h+h^2)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h - 2h^2}{5(5+4h+h^2)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3-2h}{5(5+4h+h^2)} = -\frac{3}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\Big|_{x=2} = -\frac{3}{25}$$

NOT:

$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow$ fonksiyon

$\frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=a} \rightarrow$ fonksiyonun $a$ noktasındaki değeri

TEOREM:

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $x=a$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ise, bu fonksiyon $x=a$ noktasında süreklidir (Tersi doğru değil!).

İSPAT:

$f(x)$ fonksiyonu, $x=a$ noktasında türevlenebilir ise,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{demektir.}$$

$$x \neq a \Rightarrow f(x)-f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

yazılabilir.

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \left(f(x)-f(a)\right) = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)\right]$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x \to a}(x-a)$$

$$= f'(a) * 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \left(f(x)-f(a)\right) = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Diğer taraftan,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[f(x)+f(a)-f(a)\right]$$

yazılabilir.

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left[ f(a) + f(x) - f(a) \right]$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to a} f(a)}_{f(a)} + \underbrace{\lim_{x\to a} \left[ f(x) - f(a) \right]}_{0 \text{ (bulunmuştu)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) + 0 = f(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$$ $f(x)$ fonksiyonu $a$ noktasında süreklidir!

TEOREM:

$f$ ve $g$ fonksiyonları $x$ noktasında türevlenebilir fonksiyonlar ve $c$ sabit bir sayı ise, $f+g$, $f-g$ ve $c*f$ fonksiyonları da $x$ noktasında türevlenebilir fonksiyonlardır ve,

$$\boxed{\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (f-g)'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ (cf)'(x) &= c\,f'(x) \end{aligned}}$$

tir.

(Toplamın türevi, farkın türevi ve sabit bir sayı ile çarpımın türevi)

İSPAT:

Türevin tanımından:

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \text{ dır.}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big(f(x+h) + g(x+h)\big) - \big(f(x) + g(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)}$$ (Toplamın türevi, türevler toplamıdır)

(ikiden fazla fonksiyon için de geçerlidir)

(fark için de benzer ispat yapılabilir)

Türevin tanımından:

$$(cf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

yazılabilir.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h}$$

$$= c \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{(cf)'(x) = c\,f'(x)}$$

(sabit bir sayıyla çarpımın türevi, türevin sabit sayıyla çarpımına eşit)

ÖRNEK:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 7$$

olduğuna göre, $\frac{d}{dx} f(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 - 5x^2 + 4x + 7\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(-5x^2) + \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(7)$$

$$= 2(3x^2) - 5(2x) + 4(1) + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} f(x) = 6x^2 - 10x + 4}$$

ÖRNEK: $$f(x) = 5\sqrt{x} + \frac{3}{x} - 18$$

olduğuna göre, $f'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(5\sqrt{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x}\right) - \frac{d}{dx}(18)$$

$$= 5\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}}$$

ÖRNEK: $$y = \frac{1}{7}t^4 - 3t^{7/3}$$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dt}$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{7}t^4\right) - \frac{d}{dt}\left(3t^{7/3}\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(4t^3\right) - 3\left(\frac{7}{3}t^{4/3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{4}{7}t^3 - 7t^{4/3}}$$

**ÖRNEK:** $y = f(x) = \dfrac{3x^3 - 4}{x}$ eğrisine $x = -2$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

Teğetin Denklemi : $y_t = f(a) + f'(a)(x-a)$

$$a = -2 \Rightarrow f(a) = f(-2) = \frac{3*(-2)^3 - 4}{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(a) = 14}$$

$$f'(a) = f'(-2) = \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=-2}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(3x^2 - \frac{4}{x}\right)\Big|_{x=-2}$$

$$= \left(6x + \frac{4}{x^2}\right)\Big|_{x=-2}$$

$$= 6*(-2) + \frac{4}{(-2)^2} = -12 + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(a) = -11}$$

$$\Rightarrow y_t = 14 - 11(x - (-2)) = 14 - 11(x+2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y_t = -11x - 8}$$

TEOREM:

$f$ ve $g$ fonksiyonları $x$ noktasında türevlenebilir fonksiyonlar ise, $f*g$ fonksiyonu da $x$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyondur ve,

$$\boxed{(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$ tir.

(Birincinin türevi çarpı ikinci, ARTI, ikincinin türevi çarpı birinci)

(Türevlerin çarpımı DEĞİL!)

İSPAT:

Türevin tanımından:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\big(f(x+h) - f(x)\big)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} f(x+h)\right)}_{f(x)} \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}_{g'(x)} + \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} g(x)\right)}_{g(x)} \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)}_{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx}\left((x^2+1)(x^3+4)\right)$$

türevini, a) çarpım kuralını kullanarak
b) çarpım kuralını kullanmadan

bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $$\frac{d}{dx}\left((x^2+1)(x^3+4)\right) = \left(\frac{d}{dx}(x^2+1)\right)(x^3+4) + \left(\frac{d}{dx}(x^3+4)\right)(x^2+1)$$

$$= 2x(x^3+4) + 3x^2(x^2+1)$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 8x$$

b) $$\frac{d}{dx}\left((x^2+1)(x^3+4)\right) = \frac{d}{dx}\left(x^5+x^3+4x^2+4\right)$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 8x$$

**ÖRNEK:**

$$y = \sqrt[3]{x^2}\,(2x - x^2)$$

olduğuna göre, $y'$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow y = x^{2/3}\,(2x - x^2)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}(2x - x^2) + x^{2/3}(2 - 2x)$$

$$= \frac{4}{3}x^{2/3} - \frac{2}{3}x^{5/3} + 2x^{2/3} - 2x^{5/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{10}{3}x^{2/3} - \frac{8}{3}x^{5/3}}$$

**ÖRNEK:**

$$f(x) = (6x^3 - x)(10 - 20x)$$

olduğuna göre, $f'(x)$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow f'(x) = (18x^2 - 1)(10 - 20x) + (6x^3 - x)(-20)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -480x^3 + 180x^2 + 40x - 10}$$

**NOT:**

Bu örneklerde de önce çarpım yapılıp sonra türev alına bilirdi. Daha karmaşık durumlarda çarpım kuralı gerekebilir

NOT:

Çarpım kuralı, ikiden fazla fonksiyonun çarpımı için de yazılabilir:

$$\Rightarrow (fgh)' = f'gh + \underbrace{fg'h + fgh'}_{f\underbrace{(g'h+gh')}_{(gh)'}}$$

(EA?)

$$\Rightarrow (fghk)' = \underbrace{f'ghk + fg'hk}_{hk\underbrace{(f'g+fg')}_{(fg)'}} + \underbrace{fgh'k + fghk'}_{fg\underbrace{(h'k+hk')}_{(hk)'}}$$

(EA?)

**ÖRNEK:**

$u$ ve $v$ iki fonksiyon ve $y = uv$ olarak veriliyor. $u(2) = 2$; $u'(2) = -5$

$v(2) = 1$; $v'(2) = 3$

olduğuna göre, $y'(2)$ nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$y = uv \Rightarrow y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$\Rightarrow y'(2) = u'(2)v(2) + u(2)v'(2)$$

$$= -5 * 1 + 2 * 3 = -5 + 6 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y'(2) = 1.}$$

**TEOREM:**

$f$ fonksiyonu $x$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ve $f(x) \neq 0$ ise, $\frac{1}{f}$ fonksiyonu da $x$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyondur ve,

$$\boxed{\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}} \text{ dir.}$$

**İSPAT:**

Türevin tanımından:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h\, f(x+h) f(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left( \frac{-1}{f(x+h) f(x)} \right) * \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left( \frac{-1}{\underbrace{f(x+h)}_{f(x)} f(x)} \right) * \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)}$$

$$= -\frac{1}{(f(x))^2} * f'(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\right) = -\frac{\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} = -\frac{1-\frac{1}{t^2}}{\left(\frac{t^2+1}{t}\right)^2}$$

$$= -\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{(t^2+1)^2}{t^2}} = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$$

NOT:

Bu teorem yardımıyla, negatif tamsayılar için kuvvet kuralı ispatlanabilir.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^{-n} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = -\frac{\frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2}$$

$$= -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} x^{-n} = -n x^{-n-1}}$$

ÖRNEK:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x+1}{x^3}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}\right)$$

$$= -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4}$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

TEOREM:

f ve g fonksiyonları x noktasında türevlenebilir fonksiyonlar ve $g(x) \neq 0$ ise, $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilir bir fonksiyondur ve,

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$$ dir.

(payın türevi çarpı payda, eksi, paydanın türevi çarpı pay; BÖLÜ, paydanın karesi) (Türevlerin bölümü DEĞİL!)

İSPAT:

Türevin tanımından:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)\,g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left( \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} + \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left( g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{g(x)} \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x)}_{g(x)}} \left( \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} g(x)\right)}_{g(x)} \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)}_{f'(x)} - \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} f(x)\right)}_{f(x)} \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)}_{g'(x)} \right)$$

$$= \frac{1}{g(x)g(x)} \left( g(x)f'(x) - f(x)g'(x) \right)$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}}$$

## KOLAY İSPAT

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)$$

$$= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$$

## ÖRNEK:

$y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ olduğuna göre, $\dfrac{dy}{dx}$ nedir?

## ÇÖZÜM:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{d}{dx}(1-x^2)\right)(1+x^2) - \left(\frac{d}{dx}(1+x^2)\right)(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2x(1+x^2) - (2x)(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x-2x^3-2x+2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \frac{4}{x^6} \Rightarrow f'(x) = \frac{(0)(x^6) - 4(6x^5)}{(x^6)^2}$$

$$= \frac{-24x^5}{x^{12}} = -\frac{24}{x^7}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x^{-6} \Rightarrow f'(x) = -24x^{-7} = -\frac{24}{x^7}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{x^6}{5} \Rightarrow y' = \frac{(6x^5)(5) - (0)(x^6)}{25}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{6}{5}x^5$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{5}x^6 \Rightarrow y' = \frac{6}{5}x^5$$

ÖRNEK:

$h(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{x^2-2}$ olduğuna göre, $h'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$h'(x) = \frac{4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x^2-2) - 4\sqrt{x}\,(2x)}{(x^2-2)^2}$$

$$= \frac{2x^{3/2} - 4x^{-1/2} - 8x^{3/2}}{(x^2-2)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h'(x) = \frac{-6x^{\frac{3}{2}} - 4x^{-\frac{1}{2}}}{(x^2-2)^2}}$$

## ALIŞTIRMALAR

160 - 161

1) Aşağıdaki fonksiyonların x=1 noktasında sürekli olup olmadığını belirleyiniz.

a) $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x<1 \text{ ise}\\ 0, & x=1 \text{ ise}\\ x+1, & x>1 \text{ ise}\end{cases}$ b) $h(x)=\dfrac{|x-1|}{x+1}$ c) $k(x)=\sqrt{x+1}$ d) $m(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

2) $f(x)=\begin{cases}3mx+2n, & x<2 \text{ ise}\\ \dfrac{n}{2}+18, & x=2 \text{ ise}\\ 4nx-2m, & x>2 \text{ ise}\end{cases}$

şeklinde tanımlanan f(x) fonksiyonunun x=2 noktasında sürekli olabilmesi için n kaç olmalıdır?

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}, & x>1 \text{ ise}\\ \dfrac{x^2+m}{x+1}, & x\le 1 \text{ ise}\end{cases}$

şeklinde tanımlanan f(x) fonksiyonu x=1 için sürekli olduğuna göre, m kaçtır?

4) Aşağıdaki fonksiyonların türevini, <u>türevin tanımını kullanarak</u> bulunuz.

a) $y=x^2-3x$ b) $f(x)=1+4x-5x^2$ c) $f(x)=x^3$ d) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x$

e) $g(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$ f) $f(x)=\dfrac{1}{3+4x}$ g) $f(s)=\sqrt{2s+1}$ h) $f(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt{2-x}$

i) $y=x+\dfrac{1}{x}$ j) $z(x)=\dfrac{x}{1+x}$ k) $h(t)=\dfrac{1+\sqrt{t}}{t}$ l) $y=\dfrac{1}{x^2}$

m) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ n) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5) Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $y=3x^2-5x-7$ b) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x$ c) $f(x)=Ax^2+Bx+C$ d) $y=\dfrac{x^5-x^3}{15}$

e) $g(x)=x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{4}}+3x^{\frac{1}{5}}$ f) $y=3\sqrt[3]{t^2}-\dfrac{2}{\sqrt{t^3}}$ g) $f(x)=(3x-2)(1-5x)$

h) $y=\sqrt{x}\left(5-x-\dfrac{x^2}{3}\right)$ i) $y=\dfrac{1}{x^2+5x}$ j) $f(t)=\dfrac{\pi}{2-\pi t}$ k) $f(x)=\dfrac{1-4x^2}{x^3}$

l) $y=\dfrac{2+x+x^2}{\sqrt{x}}$ m) $f(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)$ n) $y=\dfrac{(x^2+1)(x^3+2)}{(x^2+2)(x^3+1)}$

**ÖRNEK:**

$$V(t) = \frac{6\sqrt[3]{t}}{4t+1}$$ olduğuna göre, $V'(8)$ nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow \quad V'(t) = \frac{2t^{-\frac{2}{3}}(4t+1) - 6t^{\frac{1}{3}}(4)}{(4t+1)^2}$$

$$= \frac{-16t^{1/3} + 2t^{-2/3}}{(4t+1)^2}$$

$$= \frac{-16t^{1/3} + \frac{2}{t^{2/3}}}{(4t+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad V'(8) = \frac{-16(8)^{1/3} + \frac{2}{8^{2/3}}}{(4*8+1)^2}$$

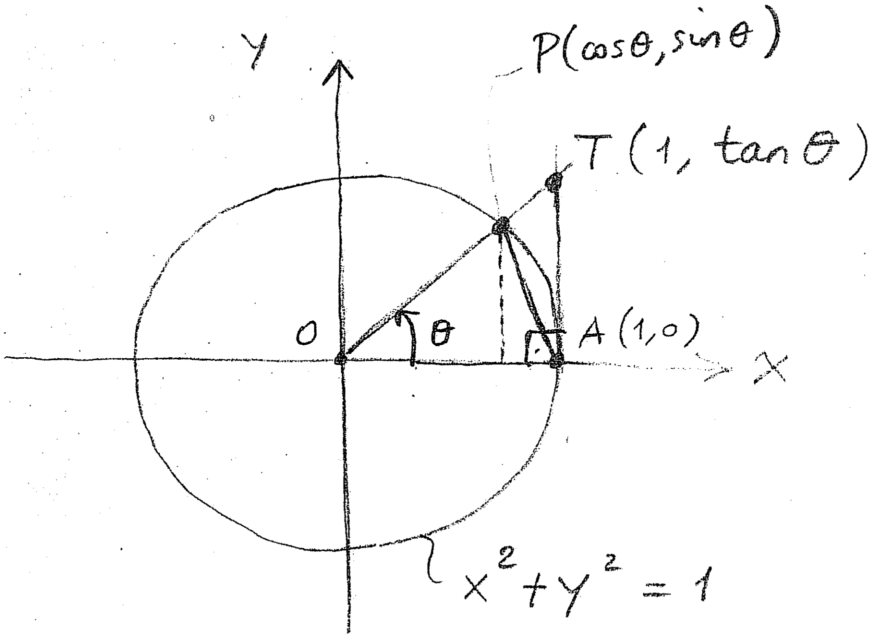
$$= \frac{-16(2) + \frac{2}{4}}{(33)^2} = -\frac{63}{2178} = -\frac{7}{242}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V'(8) = -\frac{7}{242}}$$

## BAZI ÖNEMLİ LİMİTLER

1) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$  2) $\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$

1) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$




$\Rightarrow$ OAP üçgeninin alanı : $A_1$
OAP daire diliminin alanı : $A_2$
OAT üçgeninin alanı : $A_3$
olsun.

$$\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) \Rightarrow A_1 = \frac{\sin\theta}{2}$$

$$A_2 = \frac{\theta}{2} \quad (\text{daire dilimi})$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) \Rightarrow A_3 = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

$\Rightarrow \quad A_1 < A_2 < A_3$ yazılabilir.

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\sin\theta}{2\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1 \, , \quad \lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ olduğundan,

limit özellikleri hatırlanırsa,

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1}$$ bulunur.

2) $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$

---

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{(\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \frac{-\sin\theta}{\cos\theta + 1}$$

$$= \underbrace{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}}_{1} \underbrace{\lim_{\theta \to 0} \frac{-\sin\theta}{\cos\theta + 1}}_{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0} \text{ bulunur.}$$

TEOREM:

$\sin x$ fonksiyonunun türevi $\cos x$ tir. Yani,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sin x = \cos x} \text{ tir.}$$

İSPAT:

Türevin tanımından:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{h \to 0} \sin x\right)}_{\sin x} \underbrace{\left(\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right)}_{0} + \underbrace{\left(\lim_{h \to 0} \cos x\right)}_{\cos x} \underbrace{\left(\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right)}_{1}$$

$$= 0 + \cos x = \cos x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} \sin x = \cos x}$$ bulunur.

<u>TEOREM:</u>

$\cos x$ fonksiyonunun türevi $-\sin x$ tir. Yani,

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x}$$ tir.

<u>İSPAT:</u>

Türevin tanımından:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \cos x\right)}_{\cos x} \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}\right)}_{0} - \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \sin x\right)}_{\sin x} \underbrace{\left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right)}_{1}$$

$$= 0 - \sin x = -\sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x}$$

ÖRNEK:

$f(x) = x^2 \sin x$ olduğuna göre,

$\frac{d}{dx} f(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = \left(\frac{d}{dx}(x^2)\right)(\sin x) + \left(\frac{d}{dx}(\sin x)\right)(x^2)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x}$$

ÖRNEK:

$f(x) = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ ise, $\frac{d}{dx} f(x)$ nedir?

Çözüm:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)(1-\sin x) - \left(\frac{d}{dx}(1-\sin x)\right)(\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{(-\sin x)(1-\sin x) - (0-\cos x)(\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1-\sin x}}$$ bulunur.

NOT:

Diğer trigonometrik fonksiyonlar $\sin x$ ve $\cos x$ cinsinden yazılabileceği için, bu fonksiyonların türevi, türev kuralları yardımıyla bulunabilir.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x}$$ (EA)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x} \quad (EA)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x}$$

ÖRNEK:

$$g(x) = 3\sec x - 10\cot x$$

$$\Rightarrow g'(x) = 3\sec x \tan x - 10\left(-\csc^2 x\right)$$

$$= 3\sec x \tan x + 10\csc^2 x$$

ÖRNEK:

$$h(x) = 3x^{-4} - x^2 \tan x$$

$$\Rightarrow h'(x) = -12x^{-5} - \left(2x\tan x + x^2\sec^2 x\right)$$

$$= -12x^{-5} - 2x\tan x - x^2\sec^2 x$$

ÖRNEK:

$$y = 5\sin x \cos x + 4\csc x$$

$$\Rightarrow y' = 5\cos x \cos x + 5\sin x(-\sin x) - 4\csc x \cot x$$

$$= 5\cos^2 x - 5\sin^2 x - 4\csc x \cot x$$

ÖRNEK:

$$P(t) = \frac{\sin t}{3 - 2\cos t}$$

$$\Rightarrow \quad P'(t) = \frac{\cos t\,(3 - 2\cos t) - \sin t\,(2\sin t)}{(3 - 2\cos t)^2}$$

$$= \frac{3\cos t - 2\cos^2 t - 2\sin^2 t}{(3 - 2\cos t)^2}$$

$$= \frac{3\cos t - 2(\cos^2 t + \sin^2 t)}{(3 - 2\cos t)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P'(t) = \frac{3\cos t - 2}{(3 - 2\cos t)^2}}$$

ÖRNEK:

$$f(t) = \sin t \cos t$$

$$\Rightarrow \quad f'(t) = \cos t \cos t + \sin t(-\sin t)$$

$$= \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f'(t) = \cos 2t}$$

TEOREM:

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda, $fog(x) = f(g(x))$ şeklinde tanımlanan bileşik fonksiyonun türevi,

$$\boxed{(fog)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)}$$

şeklinde hesaplanır.
(İspatı yapılabilir ama verilmeyecek!)

$\Rightarrow$ $f \rightarrow$ dış fonksiyon (sonra hesaplanan)
$g \rightarrow$ iç fonksiyon (önce hesaplanan)

$\Rightarrow$ $f'(g(x)) \rightarrow$ dış fonksiyonun türevi
$g'(x) \rightarrow$ iç fonksiyonun türevi

$\Rightarrow$ Bileşik fonksiyonun türevi = Dış fonksiyonun türevi çarpı, iç fonksiyonun türevi

ÖRNEK:

$$R(x) = \sqrt{5x - 8}$$

olarak verildiğine göre $R'(x)$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \quad g(x) = 5x - 8$$

$$\Rightarrow \quad R(x) = f(g(x)) \Rightarrow R'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g'(x) = 5$$

($f \to$ dış fonksiyon, $g \to$ iç fonksiyon)

$$\Rightarrow \quad R'(x) = f'(5x-8)\,g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5x-8}}\,(5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x-8}}}$$

ÖRNEK:

$$F(x) = \sin(3x^2 + x)$$

olduğuna göre, $F'(x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = 3x^2 + x$$

$$\Rightarrow \quad F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$f'(x) = \cos x, \quad g'(x) = 6x + 1$$

($f \to$ dış fonksiyon, $g \to$ iç fonksiyon)

$$\Rightarrow \quad F'(x) = f'(3x^2+x)\, g'(x)$$

$$= \cos(3x^2+x)\,(6x+1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F'(x) = (6x+1)\cos(3x^2+x)}$$

ÖRNEK:

$y = \dfrac{1}{x^2-4}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x))\, g'(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x^2-4$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad g'(x) = 2x$$

$$\Rightarrow \quad y' = f'(x^2-4)\, g'(x)$$

$$= -\frac{1}{(x^2-4)^2}\,(2x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}}$$

**ÖRNEK:**

$$f(t) = \left(2t^3 + \cos(t)\right)^{50}$$

olduğuna göre $f'(t)$ nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$f'(t) = 50\left(2t^3 + \cos(t)\right)^{49}\left(6t^2 - \sin(t)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(t) = 50\left(6t^2 - \sin(t)\right)\left(2t^3 + \cos(t)\right)^{49}}$$

**ÖRNEK:**

$$\frac{d}{dx}\left(\sin|x|\right) = \left(\cos|x|\right)\frac{d}{dx}\left(|x|\right)$$

$$= \left(\cos|x|\right)\left(\operatorname{sgn} x\right)$$

$$= \frac{x\cos|x|}{|x|}$$

**ÖRNEK:**

$$\frac{d}{dx}\left(|\sin x|\right) = \left(\operatorname{sgn}(\sin x)\right)\left(\cos x\right)$$

$$= \frac{\sin x \cos x}{|\sin x|}$$

$\left(|x| \rightarrow \text{dış fonksiyon}, \quad \sin x \rightarrow \text{iç fonksiyon}\right)$

NOT:

* $y=f(u)$ ve $u=g(x)$ seklinde tanımlanan bir $y$ fonksiyonunun türevi,

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}}$$

şeklinde yazılabilir. ⇒ «Zincir Kuralı»

* $y=f(u)$, $u=g(s)$, $s=h(x)$ olsun. Bu durumda, $y$'nin $x$'e göre türevi,

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{ds}\,\frac{ds}{dx}}$$ olur.

( ⇒ içiçe fonksiyonlar varsa, en dıştan içe doğru gidiliyor! )

ÖRNEK:

$$f(t)=\sqrt{5t+\sec^2 t}$$

olarak verildiğine göre, $f'(t)$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{5t+\sec^2 t}}*\frac{d}{dt}\left(5t+\sec^2 t\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5t+\sec^2 t}}\left(5 + 2\sec t \sec t \tan t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(t) = \frac{5 + 2\sec^2 t \tan t}{2\sqrt{5t+\sec^2 t}}}$$

ÖRNEK:

$$f(y) = \sqrt{2y + (3y+4y^2)^3}$$

şeklinde verilen fonksiyon için $f'(y)$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{2y+(3y+4y^2)^3}} * \frac{d}{dy}\left(2y + (3y+4y^2)^3\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2y+(3y+4y^2)^3}}\left(2 + 3(3y+4y^2)^2(3+8y)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2y+(3y+4y^2)^3}}\left(2 + (9+24y)(3y+4y^2)^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(y) = \frac{2+(9+24y)(3y+4y^2)^2}{2\sqrt{2y+(3y+4y^2)^3}}}$$

ÖRNEK:

f fonksiyonu bütün reel sayılar için türevlenebilir bir fonksiyon olduğuna göre,

a) $f(3x)$, b) $f(x^2)$, c) $f(\pi f(x))$

d) $[f(3-2f(x))]^4$

fonksiyonlarının türevlerini $f$ ve $f'$ cinsinden ifade ediniz.

ÇÖZÜM:

a) $\frac{d}{dx} f(3x) = f'(3x) * 3 = 3f'(3x)$

b) $\frac{d}{dx} f(x^2) = (f'(x^2))(2x) = 2x\, f'(x^2)$

c) $\frac{d}{dx} f(\pi f(x)) = (f'(\pi f(x)))(\pi f'(x))$

$= \pi f'(x)\, f'(\pi f(x))$

d)
$$\frac{d}{dx}[f(3-2f(x))]^4 = 4[f(3-2f(x))]^3 f'(3-2f(x))(-2f'(x))$$

$$= -8f'(x)f'(3-2f(x))[f(3-2f(x))]^3$$

## ZİNCİR KURALININ BAZI TÜREV FORMÜLLERİNE UYGULANMASI

$u=u(x)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

* $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}\sqrt{u}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}u^r=ru^{r-1}\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}|u|=\operatorname{sgn}u\,\frac{du}{dx}=\frac{u}{|u|}\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\,\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\,\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\,\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\,\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\,\frac{du}{dx}$
* $\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cot u\,\frac{du}{dx}$

## KAPALI FONKSİYONLAR

$F(x,y)=0$ şeklinde verilen bir denkleme, $x$ ve $y$'ye bağlı, bir kapalı fonksiyon denir. Burada $F(x,y)$, $x$ ve $y$ değişkenlerini içeren bir ifadedir.

$\Rightarrow$ $F(x,y)=0$ denklemi, düzlemde bir eğri gösterir.

$\Rightarrow$ Kapalı fonksiyonları, bazı durumlarda, $y$'ye göre çözerek, $y=f(x)$ şeklinde, bir yada birden fazla, açık fonksiyon haline getirmek mümkün olabilir.

ÖRNEK:

$$x^2+y^2-25=0$$

denklemi, $F(x,y)=0$ şeklinde bir kapalı fonksiyondur. Burada, $F(x,y)=x^2+y^2-25$ olmaktadır ve bu denklem, düzlemde, merkezi orijinde ve yarıçapı 5 olan bir çember gösterir.

$\Rightarrow$ Bu denklem $y$'ye göre çözülürse,

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-25=0$$

$$\Rightarrow \quad y^2=25-x^2$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x)=\sqrt{25-x^2}\,, \quad y_2(x)=-\sqrt{25-x^2}$$

bulunur. Böylece, bu örnekte, $F(x,y)=0$ şeklinde verilen bir kapalı fonksiyon, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ gibi iki adet açık fonksiyon haline getirilebilir.

ÖRNEK:

$$xy - 1 = 0$$

denklemi, $F(x,y) = 0$ şeklinde bir kapalı fonksiyondur. Burada, $F(x,y) = xy - 1$ dir.

$\Rightarrow$ Bu denklem $y$'ye göre çözülürse,

$$\Rightarrow xy - 1 = 0 \Rightarrow xy = 1$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x}$$

bulunur. Böylece, $F(x,y) = 0$ şeklinde verilmiş olan bir kapalı fonksiyon, $y(x)$ gibi bir açık fonksiyon haline getirilmiş olur.

* Bazı durumlarda, $F(x,y) = 0$ şeklinde verilen bir kapalı fonksiyonun, $y$'ye göre çözülmesi mümkün olmaz.

ÖRNEK:

$$* \; y^6 - y - x^2 = 0$$

$$* \; y - x - \frac{1}{4}\sin y = 0$$

$$* \; x^3y^5 - 8y^3 + 3x - 1 = 0$$

$$* \; x^2\tan y + y^{10}\sec x - 2x = 0$$

şeklinde tanımlanan kapalı fonksiyonlar, açık fonksiyon haline getirilemezler.

## KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$y=f(x)$ şeklinde açık fonksiyon haline getirilemeyen kapalı fonksiyonların türevi, $y$'nin $x$'e bağlı bir fonksiyon olduğu dikkate alınarak, bulunabilir.

Bunun için, $F(x,y)=0$ şeklinde verilen eşitliğin her iki tarafının türevi bulunur. Bu türevler bulunurken, $y$'nin $x$'e bağlı bir fonksiyon olduğu unutulmamalıdır. Daha sonra, eşitliğin iki tarafının türevinin bulunmasıyla elde edilen denklemden $y'$ çözülür. Böylece kapalı fonksiyonun türevi bulunmuş olur.

ÖRNEK:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

şeklinde verilen kapalı fonksiyon için $y'$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$(y(x))^6 - y(x) - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6(y(x))^5 (y'(x)) - y'(x) - 2x = 0$$

(zincir kuralı!)

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}}$$

**ÖRNEK:**

$$(x^2+y^2)^2 = 3a^2(x^2-y^2) \quad (a: \text{sabit})$$

şeklinde verilen kapalı fonksiyon için $y'$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** (iki tarafın türevi alınır)

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 3a^2(2x-2yy')$$

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2)x + 2(x^2+y^2)yy' = 3a^2x - 3a^2yy'$$

$$\Rightarrow y(3a^2+2x^2+2y^2)y' = x(3a^2-2x^2-2y^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{x(3a^2-2x^2-2y^2)}{y(3a^2+2x^2+2y^2)}}$$

**ÖRNEK:**

$$x^3y^5 + 3x = 8y^3 + 1$$

olduğuna göre, $y'$ türevi nedir?

**ÇÖZÜM:** (iki tarafın türevi alınır)

$$\Rightarrow 3x^2y^5 + 5x^3y^4y' + 3 = 24y^2y'$$

$$\Rightarrow 3x^2y^5 + 3 = 24y^2y' - 5x^3y^4y'$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2y^5 + 3 = (24y^2 - 5x^3y^4)\,y'$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{3x^2y^5 + 3}{24y^2 - 5x^3y^4}}$$

ÖRNEK:

$$y \sin x = x^3 + \cos y$$

olarak verildiğine göre, $\frac{dy}{dx}$ nedir ?

ÇÖZÜM: (iki tarafın türevi alınır)

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(y \sin x) = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(\cos y)$$

$$\Rightarrow \quad (\sin x)\frac{dy}{dx} + y\cos x = 3x^2 - (\sin y)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad (\sin x + \sin y)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - y\cos x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y\cos x}{\sin x + \sin y}}$$

ÖRNEK:

$$x^2 \tan y + y^{10} \sec x = 2x$$

olduğuna göre $y'$ türevini bulunuz.

<u>ÇÖZÜM:</u> (iki tarafın türevi alınır)

$$\Rightarrow 2x\tan y + x^2(\sec^2 y)y'$$

$$+ 10y^9 y'(\sec x) + y^{10}\sec x\tan x = 2$$

$$\Rightarrow \left(x^2\sec^2 y + 10y^9\sec x\right)y' = 2 - y^{10}\sec x\tan x - 2x\tan y$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{2 - y^{10}\sec x\tan x - 2x\tan y}{x^2\sec^2 y + 10y^9\sec x}}$$

<u>ÖRNEK:</u>

$x^2 + xy + 2y^3 = 4$ eğrisine $(-2, 1)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

<u>ÇÖZÜM:</u> Teğetin eğimini bulabilmek için $y'$ türevi belirlenmelidir.

$$\Rightarrow 2x + y + xy' + 6y^2y' = 0$$

$$x=-2,\ y=1 \Rightarrow -4 + 1 - 2y' + 6y' = 0$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y_t = \frac{3}{4}(x+2) + 1 \quad \Rightarrow \boxed{y_t = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}}$$

**ÖRNEK:**

$$x^2+y^2=25$$

denklemiyle verilen çemberin $(3,-4)$ noktasındaki eğimini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$x^2+y^2=25 \quad \text{(iki tarafın türevini al)}$$

$$\Rightarrow \quad 2x+2yy'=0 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{x}{y}$$

$\Rightarrow$ $(3,-4)$ noktasındaki eğim:

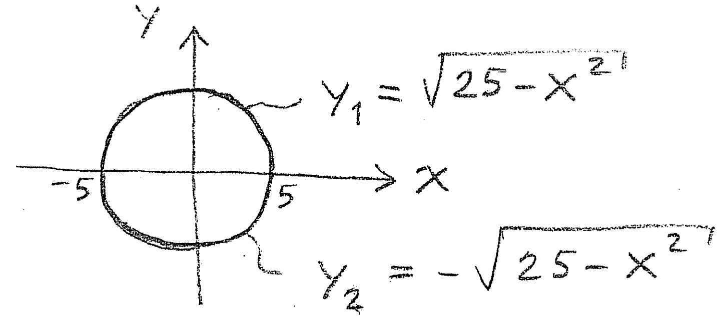
$$y'\Big|_{(3,-4)} = -\frac{x}{y}\Big|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

**2. Yol:**

$$x^2+y^2-25=0 \quad \Rightarrow \quad y^2=25-x^2$$

$$\Rightarrow \quad y_1=\sqrt{25-x^2}, \quad y_2=-\sqrt{25-x^2}$$

$\Rightarrow$




$\Rightarrow$ $(3,-4)$ noktasındaki eğimi bulabilmek için $y_2$ fonksiyonunun türevi bulunmalıdır.

$$\Rightarrow \quad y_2'\Big|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\Big|_{x=3} = -\frac{-6}{2\sqrt{25-9}} = \frac{3}{4}$$

## YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

* Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $f'(x)$ fonksiyonu, $x$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon ise, $f'(x)$ fonksiyonunun türevi bulunabilir. Bu durumda, $f'(x)$ fonksiyonunun türevine, « $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi » yada kısaca, « $f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi » denir.

* $y=f(x)$ şeklindeki bir fonksiyonun ikinci mertebeden türevi,

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x),\ \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

şekillerinde gösterilebilir.

* Benzer şekilde, üçüncü, dördüncü, ve genel olarak, n-inci mertebeden türevler tanımlanabilir.

⇒ Genel olarak, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun $(n-1)$inci mertebeden türevinin türevine, « $f(x)$ fonksiyonunun n-inci mertebeden türevi » yada kısaca, « $f(x)$ fonksiyonunun n-inci türevi » denir.

* $y=f(x)$ şeklindeki bir fonksiyonun n-inci türevi,

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^n}{dx^n}f(x)$$ şekillerinde gösterilebilir.

**ÖRNEK:**

$$y = x^5 \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \quad y' = 5x^4 \Rightarrow y'' = 20x^3$$

$$\Rightarrow \quad y''' = 60x^2 \Rightarrow y^{(4)} = 120x$$

$$\Rightarrow \quad y^{(5)} = 120 \Rightarrow y^{(6)} = 0$$

$\Rightarrow$ Daha yüksek mertebeden bütün türevler sıfırdır.

**NOT:**

$y^{(n)} \Rightarrow$ n-inci türev

$y^n \Rightarrow$ n-inci kuvvet

!

**ÖRNEK:**

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x}$$

olarak verildiğine göre, $f^{(4)}(x)$ türevi nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3x^2(1-x) + x^3}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(6x-6x^2)(1-x)^2 + 2(1-x)(3x^2-2x^3)}{(1-x)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{(6x^2-12x+6)(1-x)^3 + 3(1-x)^2(2x^3-6x^2+6x)}{(1-x)^6}$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \qquad (\text{EA?})$$

$$\Rightarrow f^{(4)}(x) = \frac{4(1-x)^3 * 6}{(1-x)^8} = \frac{24}{(1-x)^5}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(4)}(x) = \frac{4!}{(1-x)^5}}$$

ÖRNEK:

A, B ve k sabit sayılar, ve,

$$y(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt)$$

olduğuna göre, $\dfrac{d^2y}{dt^2} + k^2 y = 0$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$y(t) = A\cos(kt) + B\sin(kt)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -Ak\sin(kt) + Bk\cos(kt)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -Ak^2\cos(kt) - Bk^2\sin(kt)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\underbrace{\left(A\cos(kt) + B\sin(kt)\right)}_{y}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0}$$

ÖRNEK:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

olarak verildiğine göre, $f^{(4)}(x)$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$f(x) = (x^2+1)^{1/2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2} * (2x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = x\,(x^2+1)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = (x^2+1)^{-1/2} + x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+1)^{-3/2} * (2x)$$

$$= (x^2+1)^{-3/2}\,(x^2+1-x^2)$$

$$\Rightarrow f''(x) = (x^2+1)^{-3/2}$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x) = -\frac{3}{2}(x^2+1)^{-5/2} * (2x)$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(x) = -3x\,(x^2+1)^{-5/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(4)}(x) = 3(4x^2-1)(x^2+1)^{-7/2}} \qquad (EA?)$$

## KAPALI FONKSİYONLARDA YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

$F(x,y)=0$ şeklindeki kapalı fonksiyonun $y'$ türevi elde edildikten sonra, ikinci ve daha yüksek mertebeden türevleri de bulunabilir. Hesap sırasında ortaya çıkacak olan $y'$ türevi yerine, daha önce bulunan değeri konulmalıdır.

ÖRNEK:

$$xy + y^2 = 2x$$

olduğuna göre, $y''$ türevini kısmi türev kullanmadan bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$xy + y^2 = 2x \quad \text{.........} \quad (1)$$

$$\Rightarrow y + xy' + 2yy' = 2 \Rightarrow y' = \frac{2-y}{x+2y} \quad \text{.........} \quad (2)$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{(x+2y)(-y') - (2-y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{y-2-(x+4)y'}{(x+2y)^2}$$

$$(2) \Rightarrow \quad y'' = \frac{y-2-(x+4)\dfrac{2-y}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$= \frac{(y-2)(x+2y)-(x+4)(2-y)}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{2xy+2y^2-4x-8}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{2(xy+y^2)-4x-8}{(x+2y)^3}$$

$$(1) \Rightarrow 2(xy+y^2) = 4x \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'' = \frac{-8}{(x+2y)^3}}$$

ÖRNEK:

$$x^2+y^4=10$$

olduğuna göre $y''$ türevini, kısmi türev kullanmadan, bulunuz.

ÇÖZÜM: (iki tarafın türevi alınır)

$$x^2+y^4=10$$

$$\Rightarrow 2x+4y^3y'=0$$

$$\Rightarrow y'=-\frac{x}{2y^3}$$

$$\Rightarrow y''=\left(-\frac{x}{2y^3}\right)'$$

$$=-\frac{2y^3-x(6y^2y')}{(2y^3)^2}$$

$$=-\frac{2y^3-6xy^2y'}{4y^6}=-\frac{y-3xy'}{2y^4}$$

$$=-\frac{y-3x\left(-\frac{x}{2y^3}\right)}{2y^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y''=-\frac{y+\frac{3}{2}x^2y^{-3}}{2y^4}}$$

**ÖRNEK:** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (a, b sabit)

olarak verildiğine göre, $y''$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** (iki tarafın türevi alınır)

$$\Rightarrow \quad 2b^2x + 2a^2yy' = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = -\frac{a^2b^2y - a^2b^2xy'}{a^4y^2}$$

$$= -b^2\,\frac{y - x\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{a^2y^2}$$

$$= -b^2\,\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^4y^3}$$

$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ (verilmişti)

$$\Rightarrow \quad y'' = -\frac{a^2b^4}{a^4y^3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

**ÖRNEK:**

$$y = \sin(x+y)$$

olduğuna göre, $y''$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow \quad y' = (1+y')\cos(x+y)$$

$$\Rightarrow \quad (1-\cos(x+y))\,y' = \cos(x+y)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = \frac{-(1+y')(\sin(x+y))(1-\cos(x+y)) - (1+y')\sin(x+y)\cos(x+y)}{(1-\cos(x+y))^2}$$

$$= \frac{-(1+y')\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^2}$$

$$= -\frac{\left(1+\dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}\right)\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y'' = -\frac{\sin(x+y)}{(1-\cos(x+y))^3}}$$

# KUVVET KURALININ İSPATI

$y = x^{m/n}$, $m$ ve $n$ tamsayılar ve $n \neq 0$ olsun.

$$y = x^{m/n} \Rightarrow y^n = x^m \text{ olur.}$$

$\Rightarrow$ $y^n = x^m$ ifadesinin iki tarafının $x$'e göre türevi alınırsa:

$$n y^{n-1} \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{m-1} y^{1-n}$$

$$= \frac{m}{n} x^{m-1} x^{(m/n)(1-n)}$$

$$= \frac{m}{n} x^{m-1+(m/n)-m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}}$$

## ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $f(x) = \cos(2-3x)$  b) $f(x) = \sin 3x \cos 3x$  c) $y = \tan x + \cot x$  d) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

e) $y = \cos 3x$  f) $y = x\sin x + \cos x$  g) $y = \sec x - \csc x$  h) $y = \cot(4-3x)$

i) $y = \tan \pi x$  j) $y = \sin(2x) - \cos(2x)$  k) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$  l) $y = \cos\dfrac{2x}{\pi}$

m) $y = \tan(3x)\cot(3x)$

2) Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $y = (2x+3)^6$  b) $y = \cos(5x)$  c) $f(x) = (4-x^2)^{10}$  d) $f(t) = \left(2+\dfrac{3}{t}\right)^{-10}$

e) $y = \dfrac{3}{5-4x}$  f) $y = \left(1-\dfrac{x}{3}\right)^{99}$  g) $y = \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$  h) $y = \sqrt{1-3x^2}$

i) $y = \left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$  j) $y = \left(1-2x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$  k) $y = \cos(\sqrt{x})$  l) $y = \sin(\pi x^2)$

m) $y = \sqrt{1+\cos x}$  n) $f(x) = \cos(x+\sin x)$  o) $u = \sin^3\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$  p) $y = \left|1-x^2\right|$

3) Aşağıdaki fonksiyonların türevini f ve f′ cinsinden ifade ediniz.

a) $f(2x+3)$  b) $f(5x-x^2)$  c) $\left[f\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)\right]^3$  d) $\sqrt{3+2f(x)}$

e) $f(\sqrt{3+2x})$  g) $f(2-3f(4-5x))$

4) $y = \sqrt{1+2x^2}$ eğrisinin $x = 2$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

5) $y = \left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ eğrisinin $x = -1$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

6) $y = (ax+b)^8$ eğrisinin $x = \dfrac{b}{a}$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz (a ve b sabit sayılar)

7) $y = \dfrac{1}{(x^2-x+3)^{\frac{3}{2}}}$ eğrisinin $x = -2$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

8) Aşağıdaki fonksiyonlar için $y'$, $y''$ ve $y^{(3)}$ türevlerini bulunuz.

a) $y = (3-2x)^7$  b) $y = \dfrac{6}{(x-1)^2}$  c) $y = x^{1/3} - x^{-1/3}$  d) $y = (x^2+3)\sqrt{x}$

e) $y = \tan x$  f) $y = \cos(x^2)$  g) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$  h) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$

9) $y = \tan kx$ olarak verildiğine göre, $y'' = 2k^2 y(1+y^2)$ olduğunu gösteriniz (k sabit sayı).

10) $y = \sec kx$ olarak verildiğine göre, $y'' = k^2 y(2y^2-1)$ olduğunu gösteriniz (k sabit sayı).

11) Aşağıdaki kapalı fonksiyonların türevini, kısmi türev kullanmadan, bulunuz.

a) $xy - x + 2y = 1$ b) $x^2 + xy = y^3$ c) $x^2y^3 = 2x - y$ d) $x^3 + y^3 = 1$

e) $x^3y + xy^5 = 2$ f) $x^2 + 4(y-1)^2 = 4$

12) $2x^2 + 3y^2 = 5$ eğrisinin (1, 1) noktasındaki teğetinin denklemini, kısmi türev kullanmadan, bulunuz.

13) $\frac{x}{y} + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2$ eğrisinin (-1, -1) noktasındaki teğetinin denklemini, kısmi türev kullanmadan, bulunuz.

14) $x\sin(xy - y^2) = x^2 - 1$ eğrisinin (1, 1) noktasındaki teğetinin denklemini, kısmi türev kullanmadan, bulunuz.

15) Aşağıdaki kapalı fonksiyonlar için y'' türevini, kısmi türev kullanmadan, bulunuz.

a) $xy = x + y$ b) $x^2 + 4y^2 = 4$

16) $x^2 + y^2 = a^2$ olarak verildiğine göre, $y'' = -\frac{a^2}{y^3}$ olduğunu, kısmi türev kullanmadan, gösteriniz.

## BİREBİR FONKSİYONLAR

Herhangi bir fonksiyonun değer kümesinin bir elemanı, tanım kümesinin yanlızca bir elemanına karşılık geliyorsa, bu fonksiyona "birebir fonksiyon" denir.

⇒ Buna göre, herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan $x_1$ ve $x_2$ değerleri için,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

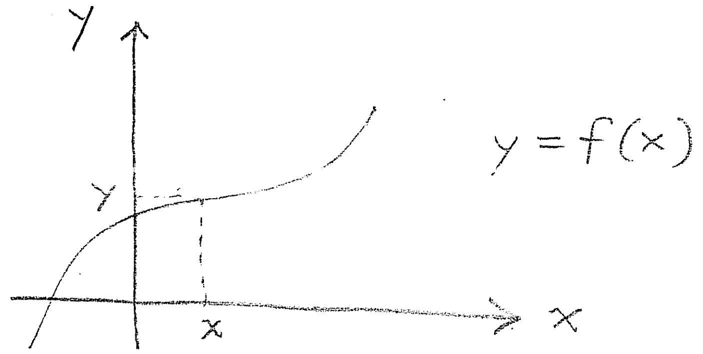
veya

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonu birebir fonksiyondur.

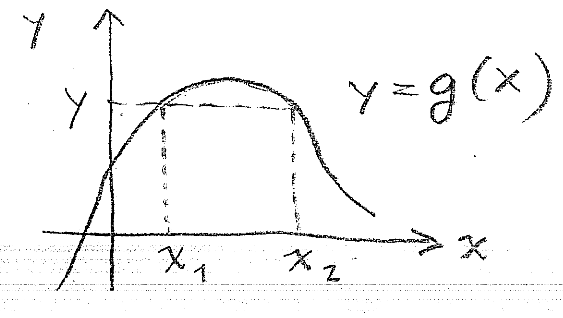
⇒ Yatay bir doğru, birebir fonksiyonun grafiğini tek bir noktada keser!

ÖRNEK:




$f(x) \rightarrow$ birebir fonksiyon!

ÖRNEK:




$g(x) \rightarrow$ birebir değil!

**ÖRNEK:**

* $f(x) = x^3$, $f(x) = 3x-2$ fonksiyonları birebir fonksiyonlardır.

* $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$ fonksiyonları birebir değildir.

**TERS FONKSİYONLAR**

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları birebir fonksiyonlar olsun. Eğer, $(fog)(x) = x$ veya $(gof)(x) = x$ oluyorsa, bu durumda, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları birbirinin tersidir denir.

Diğer bir deyişle, "$g(x)$ fonksiyonu, $f(x)$ fonksiyonunun tersidir» denir ve $g(x) = f^{-1}(x)$ şeklinde gösterilir. Yada, «$f(x)$ fonksiyonu, $g(x)$ fonksiyonunun tersidir» denir ve $f(x) = g^{-1}(x)$ ile gösterilir.

**ÖRNEK:**

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^{1/3}$$

$$g(x) = x^{1/3} \Rightarrow g^{-1}(x) = x^3$$

**ÖRNEK:**

$$f(x) = 3x-2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

$$g(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow g^{-1}(x) = 3x-2$$

* $f^{-1}(x)$ fonksiyonunda $x$ değerine karşılık, $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan tek bir $y$ değeri bulunabilir.

$$\boxed{y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y)}$$

* $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$ (karıştırma!)

$\dfrac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$ yazılabilir!

## BİREBİR FONKSİYONUN TERSİNİN BULUNMASI

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu birebir fonksiyon ise, bu fonksiyonun bir ters fonksiyonu vardır ve bu ters fonksiyon $f^{-1}(x)$ ile gösterilir.

Verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulabilmek için:

1) $f(x)$ yerine $y$ yazılır.

2) Elde edilen ifadede, $y$ yerine $x$, $x$ yerine de $y$ yazılır.

3) İkinci adımda elde edilen denklem $y$ için çözülür.

4) $y$ yerine $f^{-1}(x)$ yazılır.

5) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ veya $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ olup olmadığı kontrol edilir.

**ÖRNEK:**

$$f(x) = 2x - 1$$

fonksiyonunun birebir olduğunu gösteriniz ve $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

**ÇÖZÜM:** (tanım kümesi bütün reel sayılardır)

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
oluyorsa, birebir fonksiyondur.

$f(x_1) = 2x_1 - 1$ , $f(x_2) = 2x_2 - 1$

$$2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow$ birebir fonksiyon
$\Rightarrow$ ters fonksiyonu bulunabilir.

$$\Rightarrow \quad f(x) = 2x - 1 \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$\Rightarrow \quad x = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}}$$

**ÖRNEK:** $f(x) = x^3 \Rightarrow y = x^3$

$$\Rightarrow x = y^3 \Rightarrow y = x^{1/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = x^{1/3}}$$

# TERS FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

1) $y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$

2) $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi, $f(x)$ fonksiyonunun değer kümesidir.

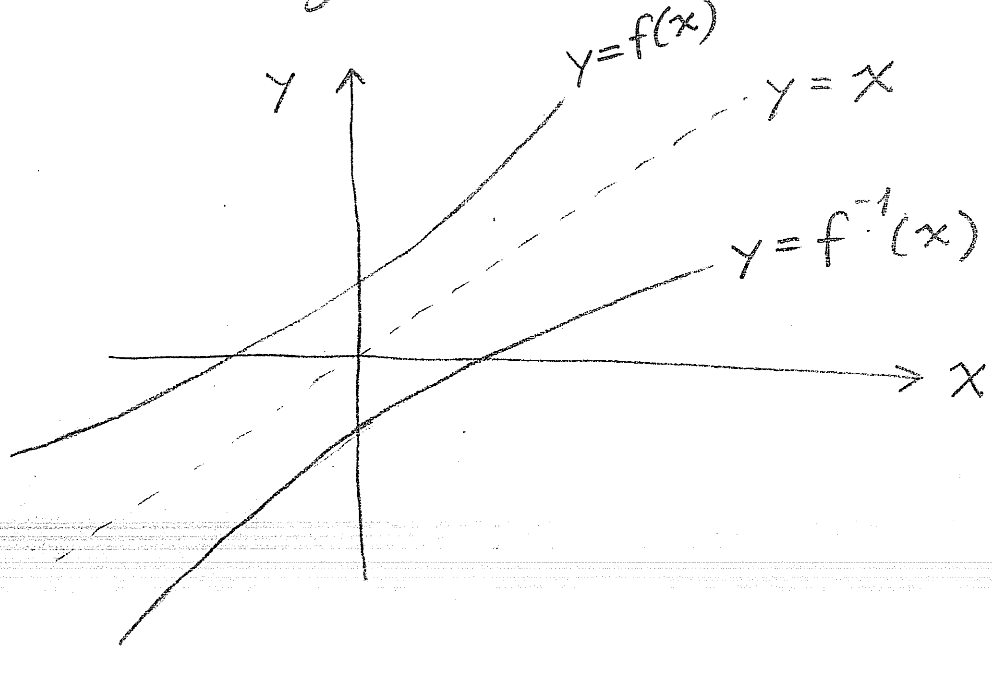
3) $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun değer kümesi, $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesidir.

4) $f^{-1}(f(x)) = x$

5) $f(f^{-1}(x)) = x$

6) $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

7) $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = x$ doğrusuna göre birbirinin simetriğidir.



ÖRNEK:

$f(x) = 3x - 2$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

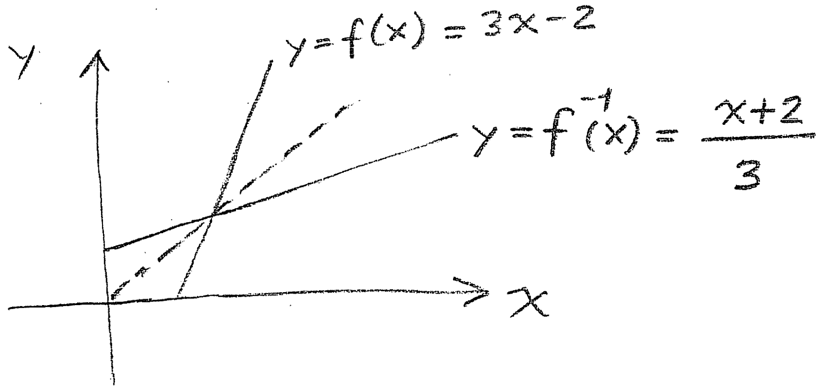
$$f(x) = 3x - 2 \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$\Rightarrow y = 3x - 2 \Rightarrow x = 3y - 2$$

$$\Rightarrow x = 3y - 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}}$$

$\Rightarrow$




ÖRNEK:

$g(x) = \sqrt{2x+1}$ olduğuna göre, $g^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

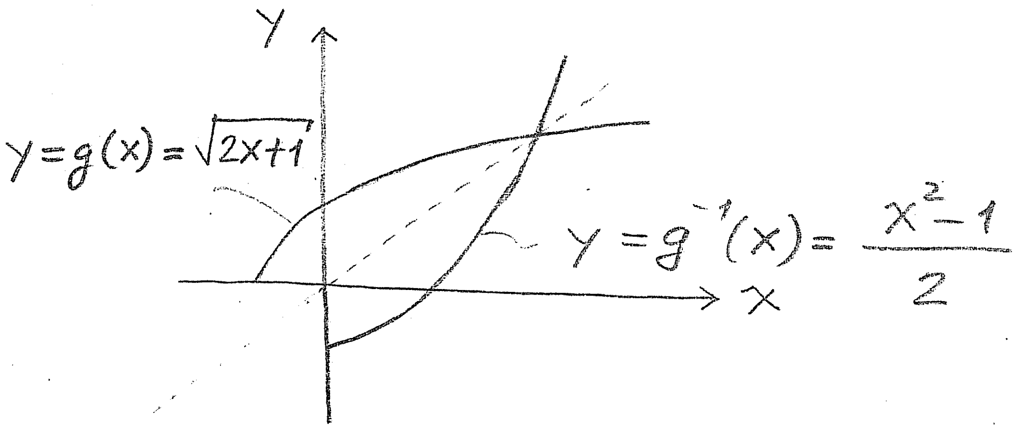
$$g(x) = \sqrt{2x+1} \Rightarrow y = \sqrt{2x+1}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{2x+1} \Rightarrow x = \sqrt{2y+1}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{2y+1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2-1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{2}}$$

$\Rightarrow$




**ÖRNEK:**

$g(x) = \sqrt{x-3}$ olduğuna göre, $g^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

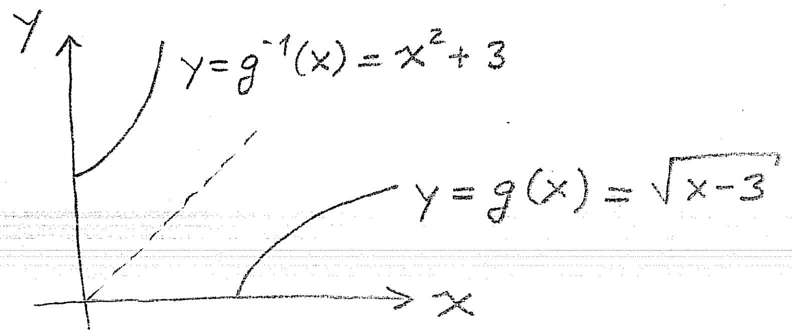
$$g(x) = \sqrt{x-3} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x-3}$$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{x-3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y-3}$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{y-3} \quad \Rightarrow \quad y = x^2+3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g^{-1}(x) = x^2+3}$$

$\Rightarrow$



## BİREBİR OLMAYAN FONKSİYONUN TERSİNİN BULUNMASI

Bazı fonksiyonlar tanım kümelerinde birebir fonksiyon olmadığı halde, bu fonksiyonların tersinin bulunması gerekebilmektedir (örneğin trigonometrik fonksiyonlar).

Bu durumda, fonksiyonu birebir yapan tanım kümesi bulunur ve bu tanım kümesi için ters fonksiyon elde edilir.

**ÖRNEK:**

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun tanım kümesi bütün reel sayılardır ve bu fonksiyon tanım kümesinde birebir değildir.

$\Rightarrow$ herhangi bir $a$ değeri için:

$$f(-a) = f(a) \Rightarrow \text{birebir değil !}$$

$\Rightarrow$ Şimdi aynı fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında tanımladığımızı düşünelim

$\Rightarrow$ $F(x) = x^2$ ve $0 \leq x < \infty$ olsun.

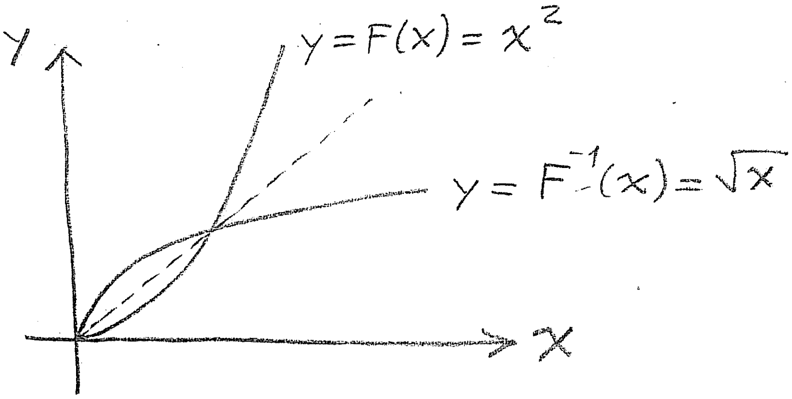
$\Rightarrow$ $F(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında birebir fonksiyondur ve tersi bulunabilir.

$\Rightarrow \quad F(x) = x^2 \Rightarrow \quad y = x^2$

$\Rightarrow \quad y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = y^2$

$\Rightarrow \quad x = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x}$

$\Rightarrow \quad \boxed{F^{-1}(x) = \sqrt{x}}$

$\Rightarrow$ 


## TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

### arcsin x Fonksiyonu:

$$y = \sin x \quad \text{ve} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu göz önüne alalım.

$\Rightarrow$ fonksiyonun tanım kümesi : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dir.

$\Rightarrow$ fonksiyonun değer kümesi : $[-1, 1]$ dir.

$\Rightarrow$ tanım kümesinde birebir fonksiyondur ve tersi bulunabilir.

$\Rightarrow$ Bulunan ters fonksiyonun tanım kümesi $[-1,1]$ ve değer kümesi ise, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olacaktır.

$\Rightarrow$ Bu ters fonksiyon,

$$\boxed{y = \arcsin x}$$

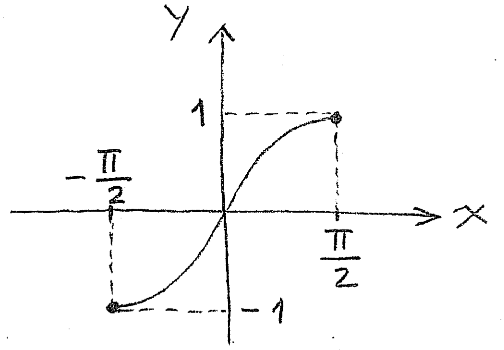
şeklinde gösterilir.

$$\boxed{y = \arcsin x \iff x = \sin y}$$

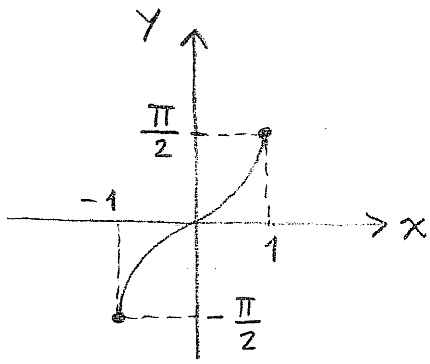
$$(-1 \le x \le 1) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ $y = \arcsin x$ → « sinüsü $x$ olan açı $y$ dir »

→ « $y$ açısı, $-\frac{\pi}{2}$ ile $\frac{\pi}{2}$ arasında, sinüsü $x$ olan açıdır »




$y = \sin x$ ve $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$




$y = \arcsin x$ ve $-1 \le x \le 1$

* $\arcsin(\sin x) = x \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

* $\sin(\arcsin x) = x \Rightarrow -1 \le x \le 1$

ÖRNEK:

* $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\left( \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \right)$

* $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $\left( \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ ve } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} \right)$

* $\arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ $\left( \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ve } -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \right)$

* $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ $\left( \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \right)$

* $\arcsin 2$ = tanımsız (sinüsü 2 olan açı yok!)

ÖRNEK:

$\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5}$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \arcsin \frac{3}{5} \\ \beta = \arcsin \frac{4}{5} \end{array}\right\} \text{ olsun.}$$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5}$ , $\sin\beta = \frac{4}{5}$ demektir.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$\sin\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{5}$ olur.

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5} * \frac{3}{5} + \frac{4}{5} * \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}}$$

**ÖRNEK:**

$* \sin(\arcsin 0{,}7) = 0{,}7$

$* \arcsin(\sin 0.3) = 0.3$

$* \arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\right)$

$\left(\frac{4\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) \qquad = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$

**ÖRNEK:**

$\cos(\arcsin 0.6)$ değerini bulunuz.

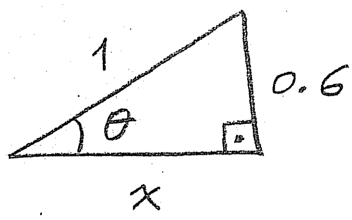
**ÇÖZÜM:**

« sinüsü 0.6 olan açının kosinüsü nedir? »

$\Rightarrow$ $\theta = \arcsin 0.6$ olsun

$\Rightarrow$ sinüsü 0.6 olan açı $\theta$ olsun.

$\Rightarrow$ $\sin\theta = 0.6$ olsun.

$\Rightarrow$ 


$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{1-(0.6)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0.8}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\arcsin 0.6) = \cos\theta = 0.8$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos(\arcsin 0.6) = 0.8}$$

<u>ÖRNEK:</u>

$\tan(\arcsin x)$ nedir?

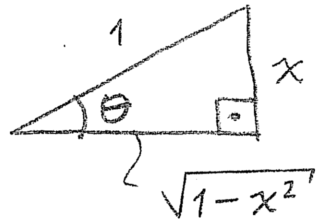
<u>ÇÖZÜM:</u>

" sinüsü $x$ olan açının tanjantı nedir? "

$\Rightarrow$ $\theta = \arcsin x$ olsun

$\Rightarrow$ sinüsü $x$ olan açı $\theta$ olsun

$\Rightarrow$ $\sin\theta = x$ olsun

$\Rightarrow$ 


$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

## arcsin x fonksiyonunun türevi

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y$$

$\Rightarrow \; x = \sin y \Rightarrow$ heriki tarafın türevi alınırsa:

$$\Rightarrow \; 1 = \cos y \; y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\Rightarrow \; \sin y = x \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{y = \arcsin u \;\; (u = u(x)) \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

**ÖRNEK:**

$$y = (\arcsin x)(\arcsin 2x)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

**ÖRNEK:**

$$y = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \arcsin u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}}$$

**ÖRNEK:** ($\cos x > 0$ olmak üzere)

$$y = \arcsin(\sin x) \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin u$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y' = 1$$

$$\Rightarrow \quad y = \arcsin(\sin x) = x \quad \Rightarrow \quad y' = 1$$

**ÖRNEK:**

$$y = \frac{x-3}{2}\sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-3}{3}$$

olduğuna göre $y'$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\sqrt{6x-x^2} + \frac{x-3}{2}\,\frac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}} + \frac{9}{2}\,\frac{\dfrac{1}{3}}{\sqrt{1-\dfrac{(x-3)^2}{9}}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\sqrt{6x-x^2} + \frac{(x-3)(3-x)}{2\sqrt{6x-x^2}} + \frac{9}{2\sqrt{6x-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6x-x^2} + \frac{6x-x^2-9+9}{2\sqrt{6x-x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \sqrt{6x-x^2}} \qquad (EA?)$$

## arccos x Fonksiyonu :

$$y = \cos x \quad \text{ve} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu göz önüne alalım.

$\Rightarrow$ fonksiyonun tanım kümesi : $[0, \pi]$ dir.

$\Rightarrow$ fonksiyonun değer kümesi : $[-1, 1]$ dir.

$\Rightarrow$ tanım kümesinde birebir fonksiyondur ve tersi bulunabilir.

$\Rightarrow$ Bulunan ters fonksiyonun tanım kümesi $[-1, 1]$ ve değer kümesi ise, $[0, \pi]$ olacaktır.

$\Rightarrow$ Bu ters fonksiyon,

$$\boxed{y = \arccos x}$$

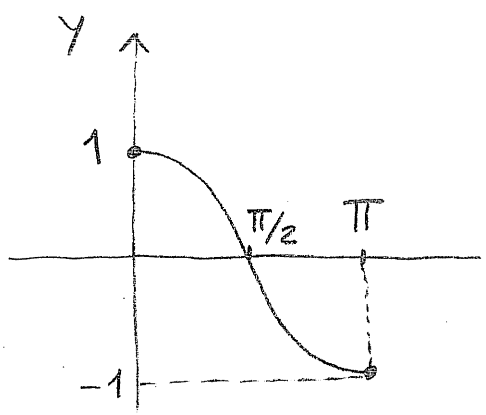
şeklinde gösterilir.

$$\boxed{y = \arccos x \iff x = \cos y}$$

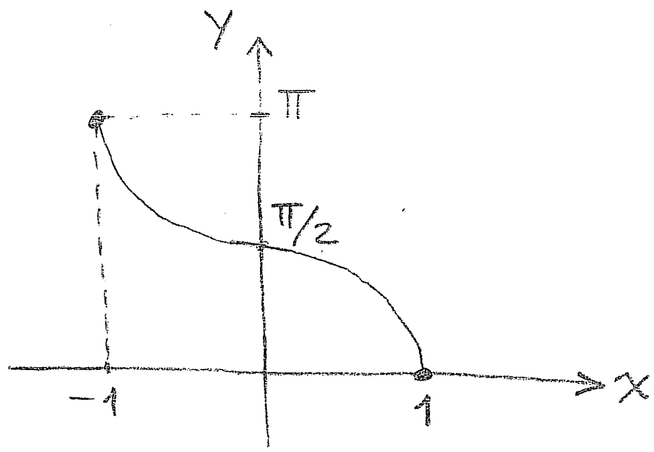
$(-1 \leq x \leq 1)$ $\qquad$ $(0 \leq y \leq \pi)$

$\Rightarrow$ $y = \arccos x$ → « kosinüsü $x$ olan açı $y$ dir »

→ « $y$ açısı, $0$ ile $\pi$ arasında, kosinüsü $x$ olan açıdır »




$y = \cos x$ ve $0 \leq x \leq \pi$




$y = \arccos x$ ve $-1 \leq x \leq 1$

$*$ $\arccos(\cos x) = x \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi$

$*$ $\cos(\arccos x) = x \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

ÖRNEK:

* $\arccos 1 = 0 \quad (\cos 0 = 1)$

* $\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6} \quad \left(\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ ve } 0 \leq \dfrac{\pi}{6} \leq \pi\right)$

* $\arccos \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4} \quad \left(\cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ve } 0 \leq \dfrac{\pi}{4} \leq \pi\right)$

ÖRNEK:

$\cos(2\arccos x)$ nedir?

ÇÖZÜM:

« Kosinüsü $x$ olan açının iki katının kosinüsü nedir? »

$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos x$ olsun.

$\Rightarrow$ Kosinüsü $x$ olan açı $\alpha$ olsun.

$\Rightarrow \quad \cos \alpha = x$ olsun.

$\Rightarrow \quad \cos(2\arccos x) = \cos 2\alpha$ olur.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$
$$= 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1}$$

## arccosx fonksiyonunun türevi

$$y = \arccos x \iff x = \cos y$$

$\Rightarrow$ $x = \cos y \Rightarrow$ her iki tarafın türevi alınırsa:

$$\Rightarrow \quad 1 = -\sin y \; y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin y}$$

$$\Rightarrow \quad \cos y = x \Rightarrow \sin y = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{y = \arccos u \;\; (u = u(x)) \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$$

**ÖRNEK:**

$$y = \arccos \frac{3x}{4}$$

$$\Rightarrow y = \arccos u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$u = \frac{3x}{4} \Rightarrow u' = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{3/4}{\sqrt{1-\frac{9x^2}{16}}} \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{3}{\sqrt{16-9x^2}}}$$

## arctan x Fonksiyonu

$$y = \tan x \quad \text{ve} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonu gözönüne alalım.

⇒ fonksiyonun tanım kümesi : $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

⇒ fonksiyonun değer kümesi : $(-\infty, \infty)$

⇒ tanım kümesinde birebir fonksiyondur ve tersi bulunabilir

⇒ Bulunan ters fonksiyonun tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ ve değer kümesi ise, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olacaktır.

⇒ Bu ters fonksiyon,

$$\boxed{y = \arctan x}$$

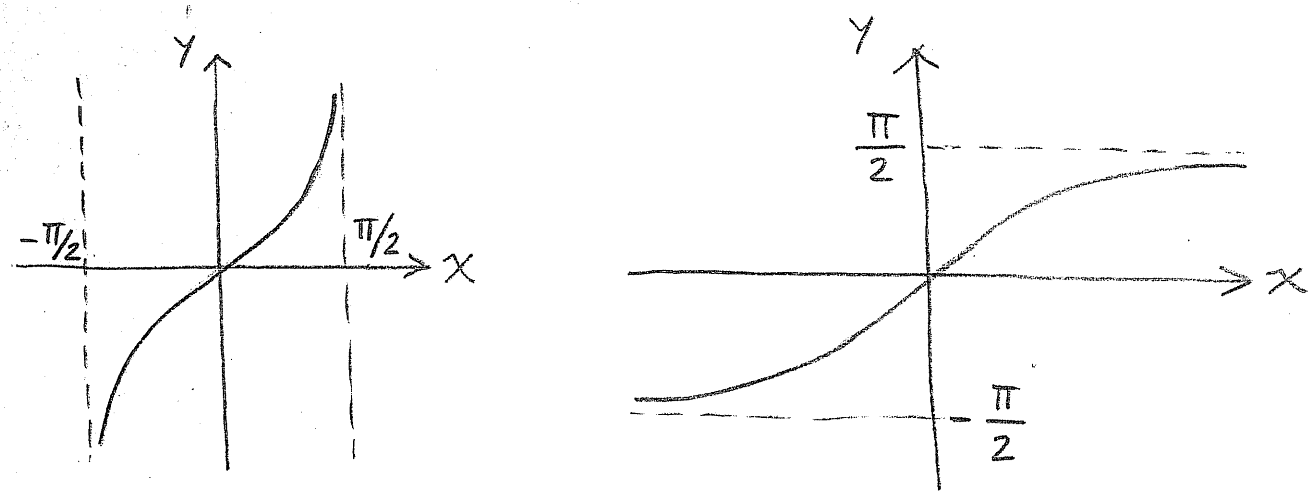
şeklinde gösterilir.

$$\boxed{y = \arctan x \iff x = \tan y}$$

$$(-\infty < x < \infty) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow \quad y = \arctan x$ → "tanjantı x olan açı y dır"

→ "y açısı, $-\frac{\pi}{2}$ ile $\frac{\pi}{2}$ arasında, tanjantı x olan açıdır"




$y = \tan x$ ve $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $y = \arctan x$ ve $-\infty < x < \infty$

* $\arctan(\tan x) = x \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
* $\tan(\arctan x) = x \quad \Rightarrow \quad -\infty < x < \infty$

<u>ÖRNEK:</u>

* $\arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \left( \tan\frac{\pi}{4} = 1 \text{ ve } -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \right)$
* $\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \quad \left( \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \text{ ve } -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \right)$
* $\tan(\arctan 3) = 3$
* $\arctan\left(\underbrace{\tan\frac{3\pi}{4}}_{(\tan(3\pi/4 - \pi))}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

**ÖRNEK:**

cos(arctan 2) nedir?

**ÇÖZÜM:**

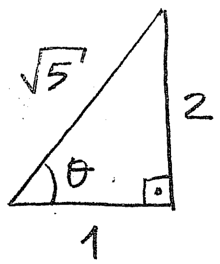
« tanjantı 2 olan açının kosinüsü nedir? »

$\Rightarrow$ $\theta = \arctan 2$ olsun.

$\Rightarrow$ tanjantı 2 olan açı $\theta$ olsun.

$\Rightarrow$ $\tan\theta = 2$ olsun.

$\Rightarrow$




$\Rightarrow$ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\arctan 2) = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

**ÖRNEK:**

sin(2 arctan x) nedir?

**ÇÖZÜM:**

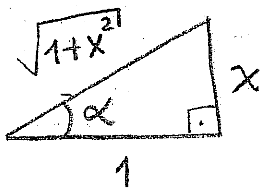
« tanjantı x olan açının iki katının sinüsü nedir? »

$\Rightarrow$ $\alpha = \arctan x$ olsun.

$\Rightarrow$ tanjantı x olan açı $\alpha$ olsun.

$\Rightarrow \tan\alpha = x$ olsun.

$\Rightarrow$




$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,, \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Rightarrow \sin(2\arctan x) = \sin 2\alpha$ olur

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(2\arctan x) = \frac{2x}{1+x^2}}$$

## $\arctan x$ fonksiyonunun türevi

$$y = \arctan x \iff x = \tan y$$

$\Rightarrow x = \tan y \Rightarrow$ her iki tarafın türevi alınırsa:

$$\Rightarrow 1 = (1+\tan^2 y)\, y' \Rightarrow y' = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$\Rightarrow \tan y = x$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2} \quad (u = u(x))}$$

ÖRNEK:

$$y = \arctan x^2$$

$$\Rightarrow y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{2x}{1+x^4}}$$

ÖRNEK:

$$y = \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

olduğuna göre, $y'$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2}$$

$(\tan \frac{x}{2} > 0$ ise$)$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \tan \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = \arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{1}{2}}$$

ÖRNEK:

$$y = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x}$$

olduğuna göre, $y'$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}$$

$$= \frac{1+x-1}{\sqrt{x}\,(1+x)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{\sqrt{x}}{1+x}}$$

ÖRNEK:

$$y = \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a\text{: sabit})$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\,\frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{a}{a^2+x^2}}$$

# DİĞER TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

* $\boxed{\operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)}$

(secantı $x$ olan açı = cosinüsü $\frac{1}{x}$ olan açı)

* $\boxed{\operatorname{arccsc} x = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}$

(cosecantı $x$ olan açı = sinüsü $\frac{1}{x}$ olan açı)

* $\boxed{\operatorname{arccot} x = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$

(kotanjantı $x$ olan açı = tanjantı $\frac{1}{x}$ olan açı)

⇒ Türevler de aynı mantıkla bulunabilir:

* $\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{d}{dx}\left(\arccos\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$

* $\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{arccsc} x) = \frac{d}{dx}\left(\arcsin\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$

* $\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot} x) = \frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}}$

## ÜSTEL FONKSİYON

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere,

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyona, üstel fonksiyon denir.

$\Rightarrow$ $a \rightarrow$ 1'den farklı, pozitif bir sayı (sabit)

$\Rightarrow$ $x \rightarrow$ değişken

( $f(x) = x^a$ ile karıştırma ! )

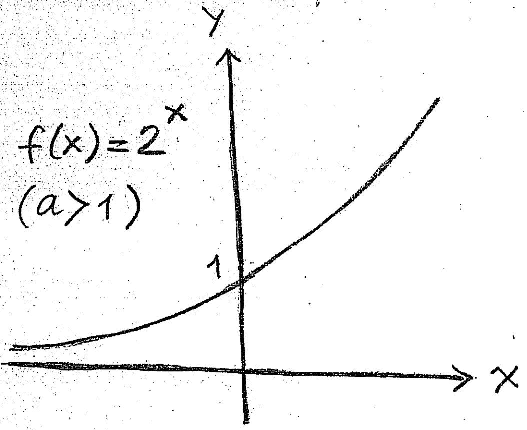
ÖRNEK:

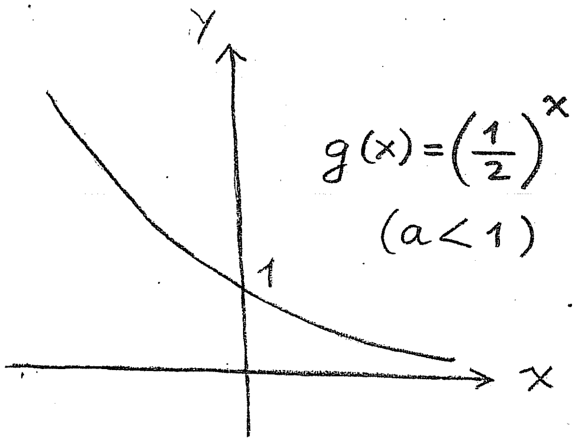
$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar, üstel fonksiyonlardır.

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|
| $-2$ | $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ | $g(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ |
| $-1$ | $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ | $g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ |
| $\Rightarrow$ $0$ | $f(0) = 2^0 = 1$ | $g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ |
| $1$ | $f(1) = 2^1 = 2$ | $g(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ |
| $2$ | $f(2) = 2^2 = 4$ | $g(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ |

$\Longrightarrow$




$f(x) = a^x$ fonksiyonunun bazı özellikleri:

1) Fonksiyonun tanım kümesi, $(-\infty, \infty)$ aralığıdır.

2) Fonksiyonun değer kümesi, $(0, \infty)$ aralığıdır.

3) $a > 1$ olması durumunda:

i) $x > 0 \Rightarrow f(x) > 1$ dir.

ii) $x < 0 \Rightarrow f(x) < 1$ dir.

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ dır.

iv) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ dur.

4) $0 < a < 1$ olması durumunda:

i) $x > 0 \Rightarrow f(x) < 1$ dir.

ii) $x < 0 \Rightarrow f(x) > 1$ dir.

iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ dur.

iv) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ dır.

5) $x = 0 \Rightarrow f(x) = 1$ dir.

6) $f(x) \neq 0$ (Hiç bir zaman 0 olmaz)

## ÜSTEL FONKSİYONUN KURALLARI

$a > 0$, $b > 0$, $x$ ve $y$ reel sayılar olsun.

1) $a^0 = 1$

2) $n$ pozitif bir tamsayı ise:

$$a^n = \underbrace{a * a * a * \cdots * a}_{n\text{-adet}}$$

3) $a^{x+y} = a^x a^y$

4) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

5) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

6) $(a^x)^y = a^{xy}$

7) $(ab)^x = a^x b^x$

DOĞAL ÜSTEL FONKSİYON

$e = 2,718281828459 05.....$

olmak üzere,

$$f(x) = e^x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, doğal üstel fonksiyon denir.

$e > 1 \Rightarrow \quad x \to \infty \Rightarrow e^x \to \infty$

$\qquad\qquad x \to -\infty \Rightarrow e^x \to 0$

LOGARİTMA FONKSİYONU

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, $f(x) = a^x$ fonksiyonu birebir fonksiyondur ve ters fonksiyonu vardır.

$\Rightarrow$ $a > 0$ ve $a \neq 1$ için $a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonuna, $a$ tabanına göre logaritma fonksiyonu denir ve,

$\log_a x$ (a tabanına göre $x$'in logaritması)

şeklinde gösterilir.

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \log_a x \iff x = a^y}$$

$(a > 0, \quad a \neq 1)$

$\Rightarrow$ $y = \log_a x$ fonksiyonunun tanım kümesi, $(0, \infty)$ aralığı olacaktır.

$$\Rightarrow \quad \log_a (a^x) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \quad a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0)$$

ÖRNEK:

* $y = \log_2 16 \Rightarrow 16 = 2^y \Rightarrow \log_2 16 = 4$
* $y = \log_4 16 \Rightarrow 16 = 4^y \Rightarrow \log_4 16 = 2$
* $y = \log_2 8 \Rightarrow 8 = 2^y \Rightarrow \log_2 8 = 3$
* $y = \log_5 625 \Rightarrow 625 = 5^y \Rightarrow \log_5 625 = 4$

* $y = \log_{\frac{1}{6}} 36 \Rightarrow 36 = \left(\frac{1}{6}\right)^y \Rightarrow \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

* $y = \log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8} \Rightarrow \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^y \Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} \frac{27}{8} = 3$

## LOGARİTMA KURALLARI

$a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 1$ olsun.

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

4) $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

5) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

6) $\log_a (x^y) = y \log_a x$

7) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (taban değiştirme)

ÖRNEK: $\log_2 10 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 \frac{10 * 12}{15}$

$= \log_2 8 = 3$

ÖRNEK:

$$\log_{a^2} a^3 = 3\log_{a^2} a = \frac{3}{2}\log_{a^2} a^2$$
$$= \frac{3}{2}$$

ÖRNEK:

$$\log_3\left(\frac{9x^4}{\sqrt{y}}\right) = \log_3 9x^4 - \log_3 y^{1/2}$$
$$= \log_3 9 + \log_3 x^4 - \log_3 y^{1/2}$$
$$= 2 + 4\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 y$$

ÖRNEK:

$$\log_{10}\left(\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}\right) = \log_{10}(x^2+y^2) - \log_{10}(x-y)^3$$

$$= \log_{10}(x^2+y^2) - 3\log_{10}(x-y)$$

## DOĞAL LOGARİTMA FONKSİYONU

e tabanına göre tanımlanan logaritma fonksiyonuna, doğal logaritma fonksiyonu denir.

$$y = e^x \iff x = \log_e y$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \ln y}$$

* e sayısının tanımı:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2.718281828459 05 \ldots$$

(başka tanımları da var)

ÖRNEK:

$3^{x-1} = 2^x$ denklemini çözünüz.

ÇÖZÜM: ($x$ bulunacak)

$\Rightarrow$ iki tarafın logaritması alınırsa:

$$\Rightarrow \log_a 3^{x-1} = \log_a 2^x$$

$$\Rightarrow (x-1) \log_a 3 = x \log_a 2$$

$$\Rightarrow (\log_a 3 - \log_a 2)\, x = \log_a 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log_a 3}{\log_a 3 - \log_a 2} = \frac{\log_a 3}{\log_a \left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2.7095 \ldots}$$

ÖRNEK:

$7 + 15e^{1-3x} = 10$ olduğuna göre, $x$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$7 + 15e^{1-3x} = 10$$

$$\Rightarrow 15e^{1-3x} = 3 \Rightarrow e^{1-3x} = \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow e^{1-3x} = \frac{1}{5} \longrightarrow$ iki tarafın ln'i alınırsa:

$$\Rightarrow \ln\left(e^{1-3x}\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow (1-3x)\underbrace{\ln e}_{1} = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 1-3x = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow -3x = -1 + \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3}\left(-1 + \ln\left(\frac{1}{5}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0.8698126372}$$

ÖRNEK:

$10^{t^2-t} = 100$ olduğuna göre, $t$ nedir?

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \log_{10} 10^{t^2-t} = \log_{10} 100$$

$$\Rightarrow t^2 - t = 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = 2 \ , \ t_2 = -1}$$

**ÖRNEK:**

$$3 + 2\ln\left(\frac{x}{7} + 3\right) = -4$$

olduğuna göre $x$ nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow 2\ln\left(\frac{x}{7}+3\right) = -7 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{7}+3\right) = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{x}{7}+3\right)} = e^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow \frac{x}{7} + 3 = e^{-\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{7} = -3 + e^{-\frac{7}{2}} \Rightarrow x = 7\left(-3 + e^{-\frac{7}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -20.78861832}$$

**ÖRNEK:**

$$2\ln(\sqrt{x}) - \ln(1-x) = 2$$

olduğuna göre $x$ nedir?

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow \ln\left((\sqrt{x})^2\right) - \ln(1-x) = 2 \Rightarrow \ln(x) - \ln(1-x) = 2$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = e^2 \Rightarrow x = e^2(1-x)$$

$$\Rightarrow x = e^2 - e^2 x \Rightarrow x(1+e^2) = e^2 \Rightarrow x = \frac{e^2}{1+e^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0.8807970780}$$

# ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONLARININ TÜREVİ

* $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

* $$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$$

* $$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}}$$

* $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

* $y = a^u$, $u = u(x)$

$$\Rightarrow \boxed{y' = a^u u' \ln a}$$

* $y = e^u$, $u = u(x)$

$$\Rightarrow \boxed{y' = e^u u'}$$

* $y = \log_a u, \quad u = u(x)$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{u'}{u \ln a}}$$

* $y = \ln u, \quad u = u(x)$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{u'}{u}}$$

ÖRNEK:

$$y = 10^{-x^2} \Rightarrow y = a^u \Rightarrow y' = a^u u' \ln a$$

$$\Rightarrow y' = 10^{-x^2}(-2x) \ln 10$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -2x\, 10^{-x^2} \ln 10}$$

ÖRNEK:

$$y = e^{1/x} \Rightarrow y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}}$$

ÖRNEK:

$$y = \log_{10} \sin \frac{x}{a} \Rightarrow y = \log_{10} u$$

$$\Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln 10}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sin\frac{x}{a} \Rightarrow u' = \frac{1}{a}\cos\frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\frac{1}{a}\cos\frac{x}{a}}{\sin\frac{x}{a}\,\ln 10} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{\cot\frac{x}{a}}{a\ln 10}}$$

ÖRNEK:

$$y = \ln(2x+5)^3 \Rightarrow y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{3(2x+5)^2 * 2}{(2x+5)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{6}{2x+5}}$$

ÖRNEK:

$$y = \ln\sqrt[5]{\frac{(1-x^2)^3}{(1+x^2)^4}}$$ olduğuna göre, $y'$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(\frac{(1-x^2)^3}{(1+x^2)^4}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{(1-x^2)^3}{(1+x^2)^4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{5}\left[\ln(1-x^2)^3 - \ln(1+x^2)^4\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{5}\left[3\ln(1-x^2) - 4\ln(1+x^2)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{1}{5}\left[\frac{-6x}{1-x^2} - \frac{8x}{1+x^2}\right]}$$

ÖRNEK:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$ olduğuna göre, $y'$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\left[\ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{1-\cos x} - \frac{-\sin x}{1+\cos x}\right]$$

$$= \frac{\sin x(1+\cos x) + \sin x(1-\cos x)}{2(1-\cos^2 x)}$$

$$= \frac{\sin x + \sin x\cos x + \sin x - \sin x\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{1}{\sin x}}$$

ÖRNEK:

$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ olduğuna göre, $y'$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \quad y = \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{u}\,u'$$

$$u = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad u' = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} * \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

ÖRNEK:

$$y = \log_a\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \log_a u$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{u \ln a}, \quad u = e^x + e^{-x} \Rightarrow u' = e^x - e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{e^x - e^{-x}}{\ln a\left(e^x + e^{-x}\right)}}$$

ÖRNEK:

$$y = e^{e^x} \Rightarrow y = e^u \Rightarrow y' = u' e^u$$

$$\Rightarrow u = e^x \Rightarrow u' = e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = e^x e^{e^x}}$$

ÖRNEK:

$$y = (e^e)^x \Rightarrow y = a^x \quad (e^e = a \text{ olsa})$$

$$\Rightarrow y' = a^x \ln a \Rightarrow y' = e^{ex} \ln e^e$$

$$\Rightarrow y' = e^{ex} e \Rightarrow \boxed{y' = e^{ex+1}}$$

ÖRNEK:

$$y = e^{x^e} \Rightarrow y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$$

$$\Rightarrow u = x^e \Rightarrow u' = e x^{e-1}$$

$$\Rightarrow y' = e^{x^e} (e x^{e-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = x^{e-1} e^{x^e + 1}}$$

**ÖRNEK:**

$$y = e^{x^2-3x} \Rightarrow y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$$

$$\Rightarrow u = x^2 - 3x \Rightarrow u' = 2x - 3$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = (2x-3)\, e^{x^2-3x}}$$

**ÖRNEK:**

$$y = \sqrt{1+e^{2x}} \Rightarrow y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow u = 1 + e^{2x} \Rightarrow u' = 2e^{2x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}$$

**ÖRNEK:**

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ olduğuna göre, $y'$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\Rightarrow u = e^x - e^{-x} \Rightarrow u' = e^x - (-e^{-x}) \Rightarrow u' = e^x + e^{-x}$$

$$\Rightarrow v = e^x + e^{-x} \Rightarrow v' = e^x + (-e^{-x}) \Rightarrow v' = e^x - e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{(e^{x}+e^{-x})(e^{x}+e^{-x}) - (e^{x}-e^{-x})(e^{x}-e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}}$$

**ÖRNEK:** $f(t) = e^{at}$ (a: sabit) olduğuna göre, $f^{(n)}(t)$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow f'(t) = a e^{at} \quad \Rightarrow f''(t) = a^2 e^{at}$$

$$\Rightarrow f'''(t) = a^3 e^{at} \; \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f^{(n)}(t) = a^n e^{at}}$$

---

**NOT:**

* $\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$ (Kuvvet Kuralı)

* $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$ (üstel fonksiyonun türevi)

(Karıştırma!)

---

## LOGARİTMİK TÜREV

$u=u(x)$ ve $v=v(x)$ olmak üzere, $y=u^v$ şeklinde tanımlanan $y$ fonksiyonunun türevi, logaritmik türev yardımıyla bulunabilir.

$\Rightarrow \quad y=u^v \rightarrow$ (iki tarafın ln'i alınırsa)

$\Rightarrow \quad \ln y = v \ln u \rightarrow$ (iki tarafın türevi alınırsa)

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{u'}{u} v$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\boxed{y=u^v \Rightarrow y' = u^v\left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v\right)}}_{\text{logaritmik türev !}}$$

**ÖRNEK:** $y=x^x$ olduğuna göre, $y'$ türevini bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $y=x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x} x = \ln x + 1$$

$$\Rightarrow \quad y' = y(\ln x + 1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = x^x(\ln x + 1)}$$

ÖRNEK:

$y = (\sin x)^{e^x}$ olarak verildiğine göre, $y'$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$y = (\sin x)^{e^x} \Rightarrow \ln y = e^x \ln \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = e^x \ln \sin x + e^x \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\Rightarrow y' = y e^x(\ln \sin x + \cot x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = (\sin x)^{e^x} e^x(\ln \sin x + \cot x)}$$

ÖRNEK:

$f(t) = (\sin t)^{\ln t}$ olduğuna göre, $f'(t)$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$y = f(t) \Rightarrow y = (\sin t)^{\ln t}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln t \ln \sin t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}\ln\sin t + \frac{\cos t}{\sin t}\ln t$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = y\left(\frac{\ln\sin t}{t} + \cot t \ln t\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = f'(t) = (\sin t)^{\ln t}\left(\frac{\ln\sin t}{t} + \cot t \ln t\right)}$$

ÖRNEK:

$$y = \frac{(1-x^2)^{3/2}(2+x)^{3/2}}{(8-x^3)^{3/4}}$$

olarak verildiğine göre, $y'$ türevini logaritmik türev yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \ln y = \frac{3}{2}\ln(1-x^2) + \frac{3}{2}\ln(2+x) - \frac{3}{4}\ln(8-x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3}{2}\,\frac{-2x}{1-x^2} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4}\,\frac{-3x^2}{8-x^3}.$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-3x}{1-x^2} + \frac{3}{2(2+x)} + \frac{9x^2}{4(8-x^3)}$$

$$\Rightarrow \quad y' = y\left[-\frac{3x}{1-x^2}+\frac{3}{2(x+2)}+\frac{9x^2}{4(8-x^3)}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{(1-x^2)^{3/2}(2+x)^{3/2}}{(8-x^3)^{3/4}}\left[-\frac{3x}{1-x^2}+\frac{3}{2(x+2)}+\frac{9x^2}{4(8-x^3)}\right]}$$

ÖRNEK:

$$u = \sqrt{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$$

olduğuna göre, $\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \quad \ln u = \frac{1}{2}\left(\ln(x+1)+\ln(x^2+1)+\ln(x^3+1)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3x^2}{x^3+1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3x^2}{x^3+1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u\Big|_{x=1} = \sqrt{2*2*2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = 3\sqrt{2}}$$

## HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

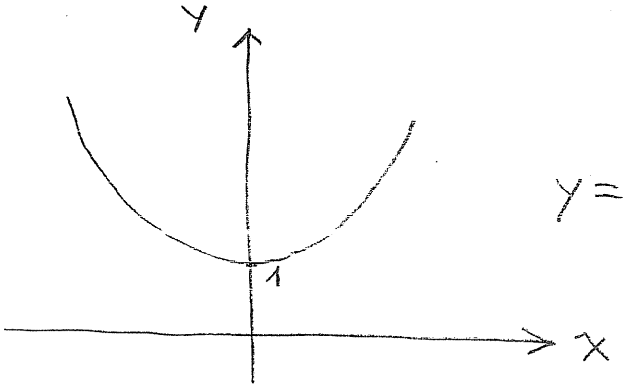
$x$ herhangi bir reel sayı olmak üzere, $(x \in \mathbb{R})$, sinüshiperbolik ve kosinüshiperbolik fonksiyonları,

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}} \quad (\text{sinüshiperbolik } x)$$

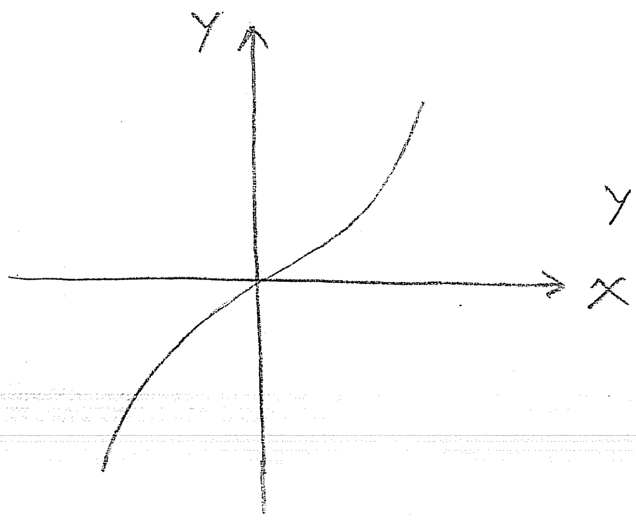
$$\Rightarrow \quad \boxed{\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}} \quad (\text{kosinüshiperbolik } x)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$\Rightarrow$ Trigonometrik fonksiyonlarla çok benzerlikleri var.




$y = \cosh x$




$y = \sinh x$

ÖRNEK:

$t$ herhangi bir reel sayı olmak üzere,

$\boxed{\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t} - \left(e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2+2) = 1$$

* $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarına benzer şekilde:

$\Rightarrow$ $\cosh 0 = 1$, $\cosh(-x) = \cosh x$

$\Rightarrow$ $\sinh 0 = 0$, $\sinh(-x) = -\sinh x$

ÖRNEK:

| |
|---|
| $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ |
| $\dfrac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$ |

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{e^x+e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$= \sinh x$$

$$\Rightarrow \quad y=\cosh u,\ u=u(x) \Rightarrow y'=\sinh u\, u'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\,\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$= \frac{e^x-e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$= \cosh x$$

$$\Rightarrow \quad y=\sinh u,\ u=u(x) \Rightarrow y'=\cosh u\, u'$$

* $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarına benzer şekilde:

$$\Rightarrow \quad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\Rightarrow \quad \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\Rightarrow \quad \cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x$$

$$= 2\cosh^2 x - 1$$

$$\Rightarrow \quad \sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$

* Trigonometrik fonksiyonlara benzer şekilde:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x}+e^{-x}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x}-e^{-x}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x}$$

ÖRNEK:

$$\sinh x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$$

$$= 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cosh x = \frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \Rightarrow \boxed{\tanh x = -\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\coth x = -\frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sech} x = \frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{csch} x = -\frac{4}{3}}$$

ÖRNEK:

* $y = \cosh(2x-1) \Rightarrow \boxed{y' = 2\sinh(2x-1)}$

* $y = \cosh^3 3x \Rightarrow y = u^3 \Rightarrow y' = 3u^2 u'$

$$u = \cosh 3x \Rightarrow u' = 3\sinh 3x$$

$$\Rightarrow y' = 3\left(\cosh^2 3x\right) 3\sinh 3x$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = 9\cosh^2 3x \sinh 3x}$$

* $y = e^{-x}\cosh x \Rightarrow y' = e^{-x}\sinh x - e^{-x}\cosh x$

$$\Rightarrow \boxed{y' = e^{-x}(\sinh x - \cosh x)}$$

* $y = \sinh^2(1-x) \Rightarrow y = u^2 \Rightarrow y' = 2uu'$

$$u = \sinh(1-x) \Rightarrow u' = -\cosh(1-x)$$

$$\Rightarrow y' = 2\sinh(1-x)(-\cosh(1-x))$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -2\sinh(1-x)\cosh(1-x)}$$

* $y = \arctan(\sinh x) \Rightarrow y = \arctan u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$$u = \sinh x \Rightarrow u' = \cosh x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x} = \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \operatorname{sech} x}$$

* $y = \ln(\tanh^2 3x) \Rightarrow y = 2\ln(\tanh 3x)$

$$\Rightarrow y = 2\ln u \Rightarrow y' = 2\frac{u'}{u}, \; u = \tanh 3x \Rightarrow u' = \frac{3}{\cosh^2 3x}$$

$$\Rightarrow y' = 2\,\frac{\frac{3}{\cosh^2 3x}}{\tanh 3x} = \frac{6}{\cosh^2 3x \tanh 3x} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{12}{\sinh 6x}}$$

* $y = \arcsin(\tanh x) \Rightarrow y = \arcsin u$

$$\Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} , \quad u = \tanh x \Rightarrow u' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{\cosh^2 x}}{\sqrt{1-\tanh^2 x}} = \frac{1}{\cosh^2 x \, \frac{1}{\cosh x}} = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \operatorname{sech} x}$$

## TERS HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

### argsinh x fonksiyonu

$y = \sinh x$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında birebir fonksiyondur ve ters fonksiyonu bulunabilir. Bu ters fonksiyon :

$$\boxed{y = \operatorname{argsinh} x}$$

şeklinde gösterilir.

$$\Rightarrow \boxed{y = \operatorname{argsinh} x \Longleftrightarrow x = \sinh y}$$

* $x = \sinh y \Rightarrow x = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \dfrac{(e^y)^2 - 1}{2e^y}$

$$\Rightarrow \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} \Rightarrow e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+1} > x$ ve $e^y$ negatif olamayacağından:

$$\Rightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

(hiperbolik fonksiyonlarda $e$'li ifadeler vardı. Terslerinde de $\ln$'li ifadeler var)

argsinhx fonksiyonunun türevi

$$y = \operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{u}$$

$$\Rightarrow \quad u = x + \sqrt{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad u' = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \operatorname{argsinh} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \operatorname{argsinh} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}}$$

<u>ÖRNEK:</u>

$$* \quad \operatorname{argsinh}\sqrt{2} = \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{1+2}\right)$$

$$= \ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$$

$$* \quad y = \operatorname{argsinh}(\tan x) \Rightarrow y = \operatorname{argsinh} u$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}, \quad u = \tan x \Rightarrow u' = \sec^2 x$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \sec x}$$

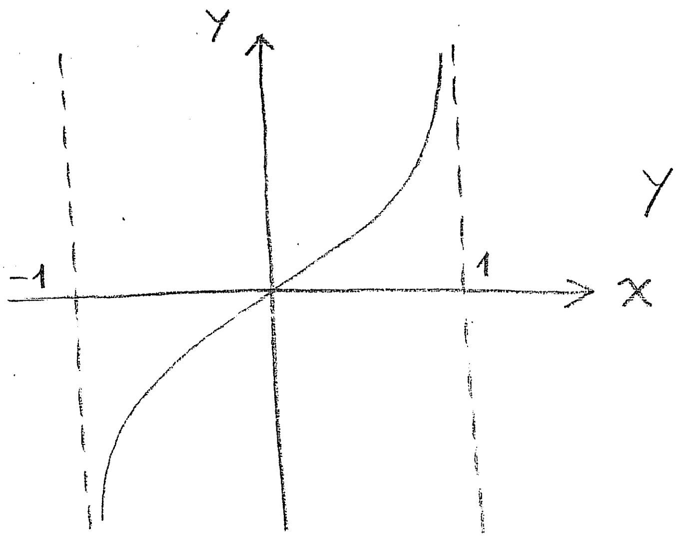
## argtanh x fonksiyonu

$y = \tanh x$ fonksiyonu, $(-\infty, \infty)$ aralığında bire-bir fonksiyondur ve ters fonksiyonu bulunabilir. Bu ters fonksiyon:

$$\boxed{y = \operatorname{arg\,tanh} x}$$

şeklinde gösterilir.

$$\boxed{y = \operatorname{arg\,tanh} x \iff x = \tanh y}$$




$y = \operatorname{arg\,tanh} x$

$$* \quad x = \tanh y \Rightarrow x = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

$$\Rightarrow x e^{2y} + x = e^{2y} - 1 \Rightarrow e^{2y} = \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

<u>argtanhx fonksiyonunun türevi</u>

$$y = \operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \ln u \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} \frac{u'}{u}$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{1+x}{1-x} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{1-x}{1+x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{1}{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{argtanh} x \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{1-x^2} \\ \hline y = \operatorname{argtanh} u \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{u'}{1-u^2} \end{array}}$$

ÖRNEK:

* $\operatorname{argtanh}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{argtanh}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\ln \sqrt{3}}$$

* $y = x^{-1} \operatorname{argtanh} x^2$

$$\Rightarrow y' = -x^{-2} \operatorname{argtanh} x^2 + x^{-1} \frac{2x}{1-x^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = -x^{-2} \operatorname{argtanh} x^2 + \frac{2}{1-x^4}}$$

## argcosh x fonksiyonu

$y = \cosh x$ ve $x \geq 0$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun tanım kümesi: $[0, \infty)$ aralığı, ve değer kümesi ise: $[1, \infty)$ aralığı olacaktır.

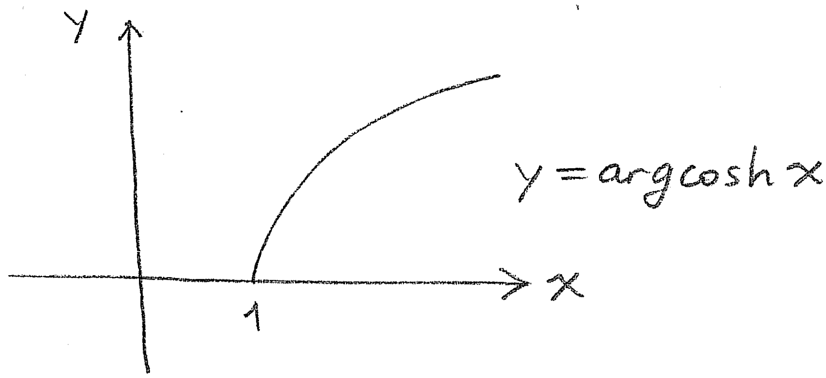
$\Rightarrow$ Tanım kümesinde birebir fonksiyondur ve ters fonksiyonu bulunabilir. Bu ters fonksiyon:

$$\boxed{y = \operatorname{argcosh} x}$$

şeklinde gösterilir.

$$\boxed{y = \operatorname{argcosh} x \iff x = \cosh y}$$

$(x \geq 1 \ , \ y \geq 0)$




$*$ argsinh x fonksiyonuna benzer şekilde:

$$\boxed{\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}$$ bulunur.

$(x \geq 1)$

<u>argcosh x fonksiyonunun türevi</u>

$$y = \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\Rightarrow y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$\Rightarrow u = x + \sqrt{x^2-1} \Rightarrow u' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \operatorname{argcosh} x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} y = \operatorname{argcosh} u \\ (u = u(x)) \end{array} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}}$$

ÖRNEK:

$$* \ \operatorname{argcosh} \frac{5}{4} = \ln\left(\frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16}-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{argcosh} \frac{5}{4} = \ln 2}$$

$$* \quad y = x^2 \operatorname{argcosh} 3x$$

$$\Rightarrow \quad y' = 2x \operatorname{argcosh} 3x + x^2 \frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y' = 2x \operatorname{argcosh} 3x + \frac{3x^2}{\sqrt{9x^2-1}}}$$

# ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı olsun. Eğer $[a,b]$ aralığında bulunan her $x_1$ ve $x_2$ değeri için,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna, $[a,b]$ aralığında monoton artan (veya azalmayan) fonksiyon denir. Eğer $[a,b]$ aralığında bulunan her $x_1$ ve $x_2$ değeri için,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna, $[a,b]$ aralığında kesin artan fonksiyon denir.

Benzer şekilde, $[a,b]$ aralığında bulunan her $x_1$ ve $x_2$ değeri için,

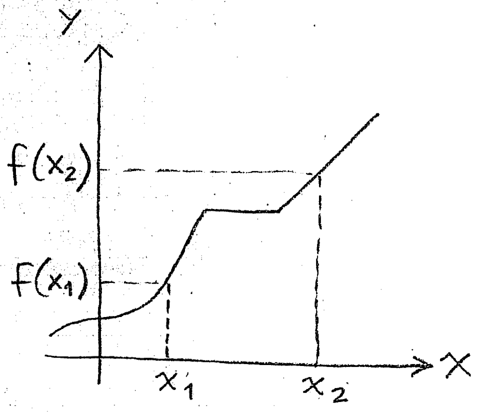
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna, $[a,b]$ aralığında monoton azalan (veya artmayan) fonksiyon denir. Eğer $[a,b]$ aralığında bulunan her $x_1$ ve $x_2$ değeri için,

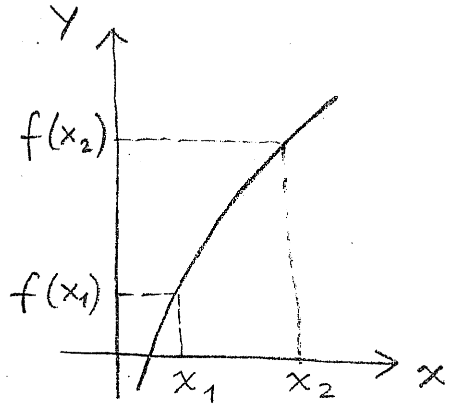
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna, $[a,b]$ aralığında kesin azalan fonksiyon denir.

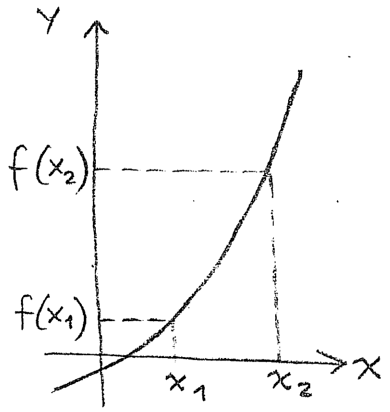
⇒ Bir aralıkta monoton artan veya kesin artan olan fonksiyona, kısaca, « artan fonksiyon » denir. Monoton azalan veya kesin azalan fonksiyona da, kısaca, « azalan fonksiyon » denir.



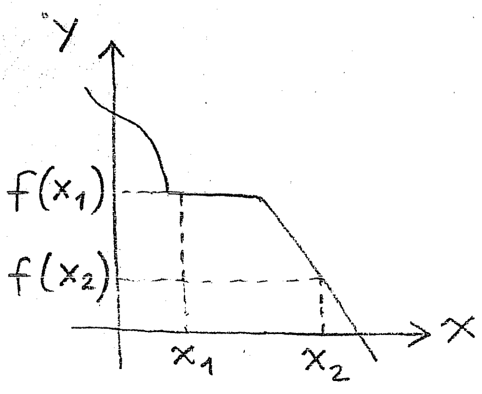

monoton artan



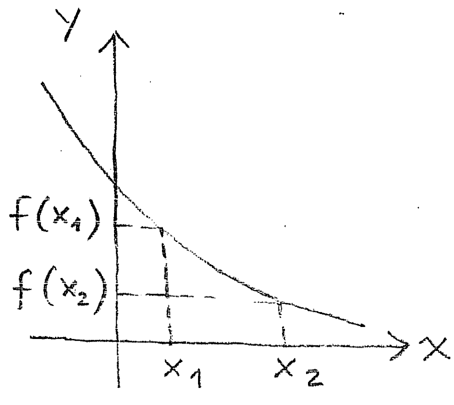

kesin artan



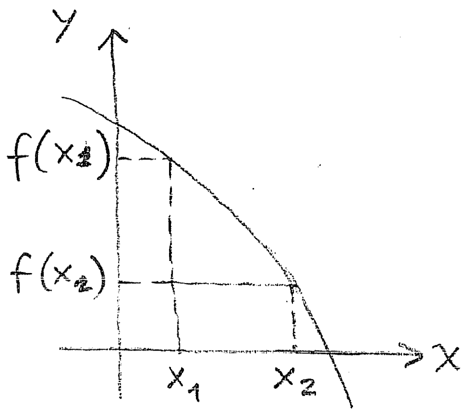

kesin artan




monoton azalan




kesin azalan




kesin azalan

* Bir aralıkta türevlenebilen bir fonksiyonun türevinin işaretine bakılarak, fonksiyonun bu aralıkta artan veya azalan olup olmadığına karar verilebilir.

⇒ Bir $[a,b]$ aralığında türevlenebilen bir $f(x)$ fonksiyonunda, $[a,b]$ aralığında bulunan bütün $x$ değerleri için $f'(x) \leq 0$ oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna [a,b] aralığında monoton azalan fonksiyon; $f'(x)<0$ oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna, [a,b] aralığında kesin azalan fonksiyon denir.

$\Rightarrow$ Eğer [a,b] aralığında bulunan bütün $x$ değerleri için $f'(x) \geq 0$ oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna, [a,b] aralığında monoton artan fonksiyon; $f'(x)>0$ oluyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna, [a,b] aralığında kesin artan fonksiyon denir.

**ÖRNEK:** $f(x)=x^2$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$f(x)=x^2$ fonksiyonu her noktada türevlenebilir bir fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonun türevinin işareti incelenerek, bu aralıklar bulunabilir.

$$\Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow \begin{array}{l} x>0 \Rightarrow f'(x)>0 \\ x<0 \Rightarrow f'(x)<0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $(0,\infty)$ aralığında fonksiyon artandır.

$\Rightarrow$ $(-\infty,0)$ aralığında fonksiyon azalandır

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

**ÖRNEK:** $f(x) = x^3 - 12x + 1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$

$\Rightarrow f'(x) = 3(x-2)(x+2)$

$\Rightarrow x < -2$ veya $x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0$

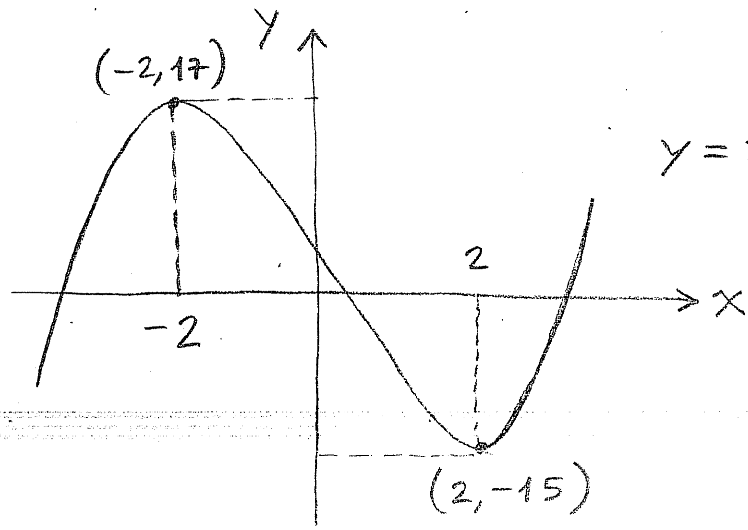
$\Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0$

$\Rightarrow (-\infty, -2)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu artandır.

$\Rightarrow (2, \infty)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu artandır.

$\Rightarrow (-2, 2)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu azalandır.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |




$y = x^3 - 12x + 1$

NOT:

Bir (a,b) aralığında türevlenebilen bir f(x) fonksiyonu için bu aralıkta,

$$f'(x) > 0 \quad \text{yada} \quad f'(x) < 0$$

oluyorsa, f(x) fonksiyonu (a,b) aralığında birebir fonksiyondur.

BİR FONKSİYONUN EKSTREMUM DEĞERLERİ

* Herhangi bir fonksiyonun alabileceği en büyük değere, bu fonksiyonun "mutlak maksimum değeri" yada "global maksimum değeri" denir.

* Herhangi bir fonksiyonun alabileceği en küçük değere, bu fonksiyonun "mutlak minimum değeri" ve-ya "global minimum değeri" denir

* Herhangi bir fonksiyonun en fazla bir mutlak maksimum değeri ve en fazla bir mutlak minimum değeri bulunabilir. Ancak bu değerler, fonksiyonun tanım kümesinde bulunan birden fazla elemana karşılık gelebilmektedir.

ÖRNEK: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun mutlak maksimum değeri 1 dir ve,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (n: \text{tamsayı})$$

değerleri için fonksiyon mutlak maksimum değerini almaktadır.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonunun mutlak minimum değeri $-1$ dir ve,

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad (n: \text{tamsayı})$$

değerleri için fonksiyon mutlak minimum değerini almaktadır.

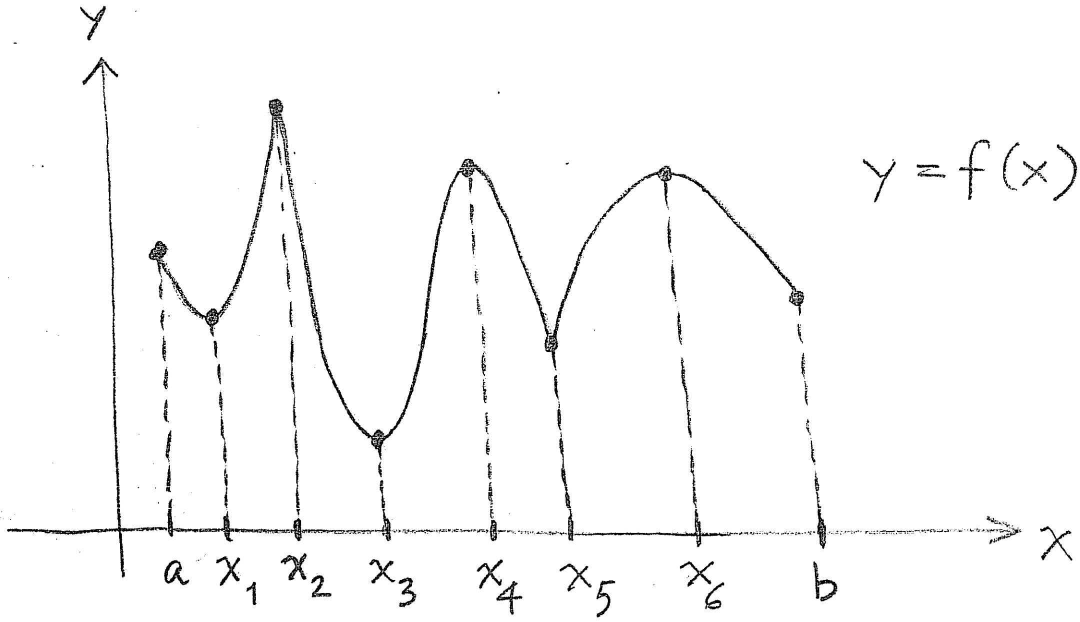
* Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan bir $x_0$ noktasında aldığı değer $(f(x_0))$, bu noktanın yakınındaki noktalarda aldığı değerlerden büyük oluyorsa, $f(x_0)$ değerine, fonksiyonun bir "yerel maksimum değeri" denir. Eğer $f(x_0)$ değeri $x_0$ noktasının yakınındaki noktalarda fonksiyonun aldığı değerlerden küçük oluyorsa, $f(x_0)$ değerine, fonksiyonun bir "yerel minimum değeri" denir.

* Herhangi bir fonksiyonun bir veya birden fazla yerel maksimum ve yerel minimum değeri bulunabilir.

* Herhangi bir fonksiyonun yerel maksimum değerlerinin en büyüğü mutlak maksimum değeri; ve yerel minimum değerlerin en küçüğü ise, mutlak minimum değeri olur.

* Herhangi bir fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerine « mutlak ekstremum değerleri » ; yerel maksimum ve yerel minimum değerlerine ise, « yerel ekstremum değerleri » denir.

ÖRNEK:




$\Rightarrow$ $f(a)$, $f(x_2)$, $f(x_4)$ ve $f(x_6)$ değerleri, $f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum değerleridir.

$\Rightarrow$ $f(x_2)$ değeri, $f(x)$ fonksiyonunun mutlak maksimum değeridir (yerel maksimum değerlerin en büyüğü).

$\Rightarrow$ $f(x_1)$, $f(x_3)$, $f(x_5)$ ve $f(b)$ değerleri, $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum değerleridir.

$\Rightarrow$ $f(x_3)$ değeri, $f(x)$ fonksiyonunun mutlak minimum değeridir (yerel minimum değerlerin en küçüğü).

## KRİTİK NOKTALAR VE TEKİL NOKTALAR

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $D$ olsun.

$\Rightarrow$ $x \in D$ ve $f'(x) = 0$, şartını sağlayan $x$ değerlerine, $f(x)$ fonksiyonunun "kritik noktaları" denir.

$\Rightarrow$ $x \in D$ ve $f'(x) =$ tanımsız, şartını sağlayan $x$ değerlerine, $f(x)$ fonksiyonunun "tekil noktaları" denir.

**ÖRNEK:**

Önceki örnekteki grafiğe göre;

$x_1$, $x_3$, $x_4$ ve $x_6$ $\rightarrow$ kritik noktalar,

$x_2$ ve $x_5$ $\rightarrow$ tekil noktalar,

a ve b $\rightarrow$ sınır noktaları, olur.

**TEOREM:**

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinde bulunan bir $x_0$ noktasında bir yerel maksimum ya da bir yerel minimum değeri varsa, bu durumda $x_0$ noktası,

1) $f(x)$ fonksiyonunun bir kritik noktası $(f'(x_0)=0)$, veya,

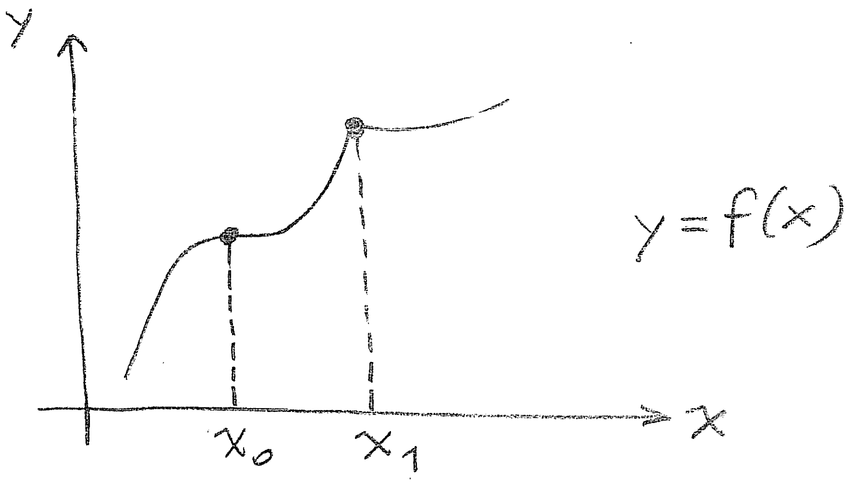
2) $f(x)$ fonksiyonunun bir tekil noktası ($f'(x_0)$ = tanımsız), ya da,

3) $f(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının bir sınır noktasıdır.

⇒ Herhangi bir fonksiyonun ekstremum değerlerini bulabilmek için, bu fonksiyonun kritik noktalarında, tekil noktalarında ve sınır noktalarındaki değerleri hesaplanmalıdır.

* Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani, kritik nokta, tekil nokta ya da sınır noktasında yerel maksimum ya da yerel minimum değeri olması gerekmez.

ÖRNEK:




⇒ $x_0$ noktası, fonksiyonun bir kritik noktasıdır ama, bu noktada yerel maksimum ya da yerel minimum değer yoktur.

⇒ $x_1$ noktası, fonksiyonun bir tekil noktasıdır ama, bu noktada da yerel maksimum yada yerel minimum değer yoktur.

ÖRNEK:

$[0,4]$ aralığında tanımlı olan $f(x)=3x-x^2$ fonksiyonunun mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$\Rightarrow$ Fonksiyonun kritik noktalarında, tekil noktalarında ve sınır noktalarındaki değerleri bulunmalıdır.

$\Rightarrow$ Kritik noktalar, $f'(x)=0$ şartını sağlayan $x$ değerleridir.

$$\Rightarrow \quad f'(x)=0 \quad \Rightarrow 3-2x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\in[0,4]$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{2} \text{ kritik noktadır.}$$

$\Rightarrow$ Tekil noktalar $f'(x)$ türevini tanımsız yapan $x$ değerleridir.

$\Rightarrow$ $[0,4]$ aralığında $f'(x)$ türevini tanımsız yapan bir $x$ değeri bulunmadığından, $f(x)$ fonksiyonunun tekil noktası yoktur.

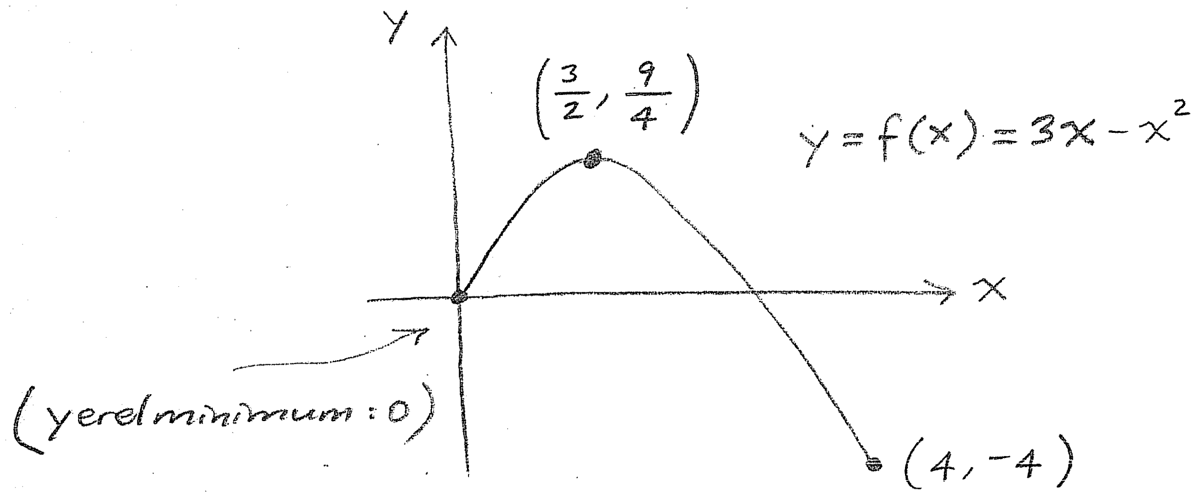
$\Rightarrow$ Sınır Noktaları : $x=0$ ve $x=4$ tür.

$\Rightarrow$ $x=\frac{3}{2}$, $x=0$ ve $x=4$ için fonksiyon hesaplanmalıdır.

$\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ , $f(0)=0$ , $f(4)=-4$

$\Rightarrow$ mutlak maksimum değer : $\frac{9}{4}$

$\Rightarrow$ mutlak minimum değer : $-4$




ÖRNEK :

$[-2,2]$ aralığında tanımlı olan,

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

fonksiyonunun mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM :

$\Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$\Rightarrow$ türevi sıfır yapan $x$ değerleri :

$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$\Rightarrow \; 3(x+1)(x-3) = 0$

$\Rightarrow \; x=-1$ ve $x=3$ için türev sıfır olur.

$\Rightarrow \; 3 \notin [-2,2] \Rightarrow x=3$ kritik nokta değil!

$\Rightarrow \; -1 \in [-2,2] \Rightarrow x=-1$ kritik noktadır.

$\Rightarrow \; [-2,2]$ aralığında $g'(x)$ türevini tanımsız yapan bir $x$ değeri yoktur.

$\Rightarrow$ tekil nokta yok.

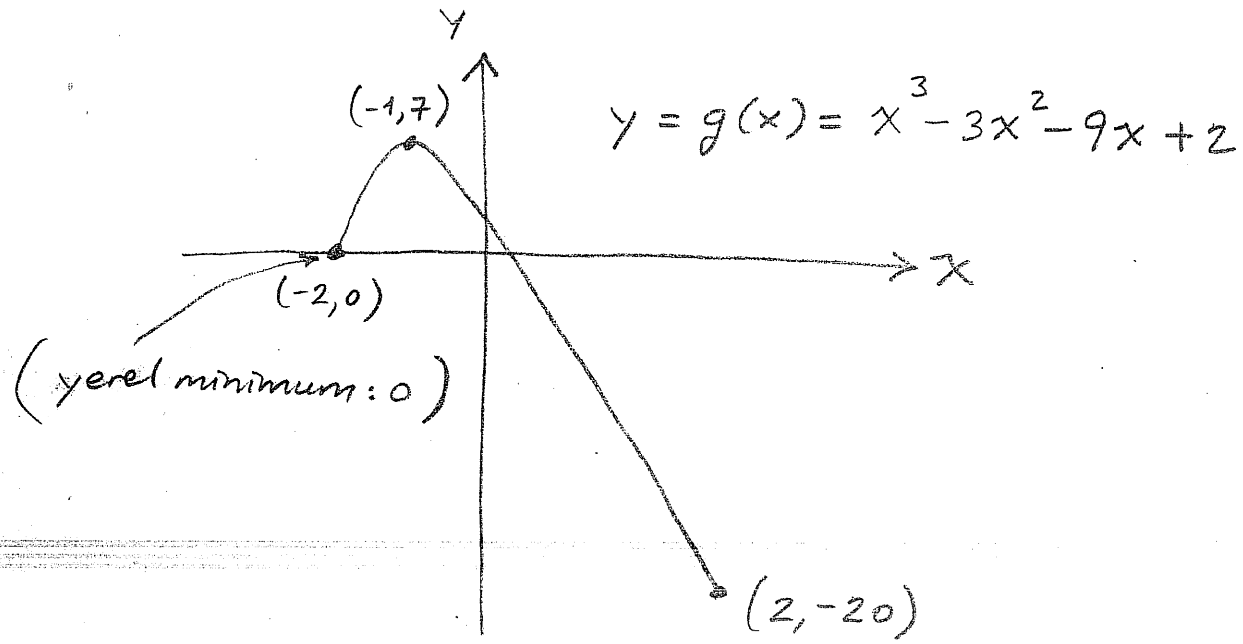
$\Rightarrow$ Sınır noktaları: $x=-2$ ve $x=2$ dir.

$\Rightarrow \; x=-1, \; x=-2$ ve $x=2$ için fonksiyon hesaplanır.

$\Rightarrow \; g(-1)=7, \; g(-2)=0, \; g(2)=-20$

$\Rightarrow$ mutlak maksimum değer : 7

$\Rightarrow$ mutlak minimum değer : $-20$



ÖRNEK:

$[-1, 1]$ aralığında tanımlı olan,

$$h(x) = 3x^{2/3} - 2x$$

fonksiyonunun mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$\Rightarrow \quad h'(x) = 3 * \frac{2}{3} x^{-1/3} - 2$

$\Rightarrow \quad h'(x) = 2\left(x^{-1/3} - 1\right)$

$\Rightarrow \quad x = 0 \Rightarrow h'(x) =$ tanımsız

$\Rightarrow \quad x = 0$ tekil noktadır.

$\Rightarrow \quad x = 1 \Rightarrow h'(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$ kritik nokta (aynı zamanda sınır noktası)

$\Rightarrow \quad x = -1$ ve $x = 1$ sınır noktaları

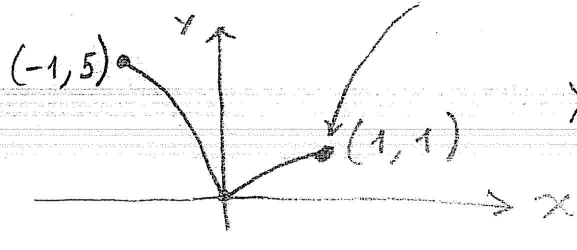
$\Rightarrow \quad x = 0,\ x = 1$ ve $x = -1$ için fonksiyon hesaplanır.

$\Rightarrow \quad h(1) = 1,\ h(0) = 0,\ h(-1) = 5$

$\Rightarrow \quad$ mutlak maksimum değer : 5

$\Rightarrow \quad$ mutlak minimum değer : 0

(yerel maksimum : 1)




$y = h(x) = 3x^{2/3} - 2x$

## BİRİNCİ TÜREV TESTİ

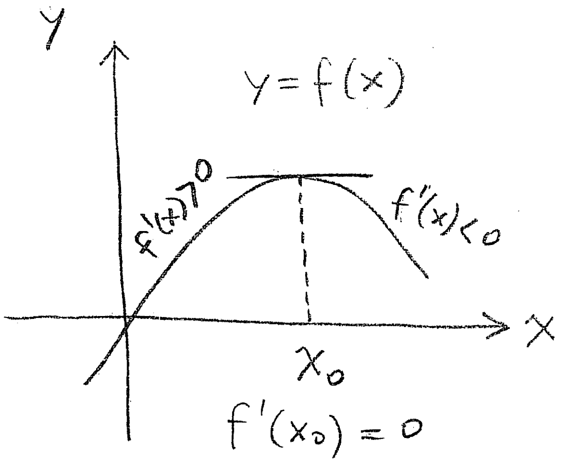
Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon ise, $f'(x)$ türevinin işaret değiştirdiği noktalar, $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarıdır. Bu noktaların yerel maksimum ya da yerel minimum noktası olduklarına, $f'(x)$ türevinin işaretinin değişimi incelenerek karar verilebilir.

**1. Durum:**

$f(x)$ fonksiyonu $a < x_0 < b$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun.

a) Eğer, $x \in (a, x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$ ve $x \in (x_0, b) \Rightarrow f'(x) < 0$ oluyorsa, $x_0$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

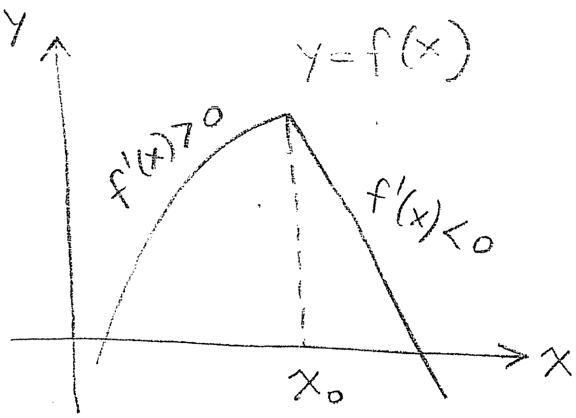
b) Eğer, $x \in (a, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$ ve $x \in (x_0, b) \Rightarrow f'(x) > 0$ oluyorsa, $x_0$ noktası yerel minimum noktasıdır




$f'(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ $x_0$ yerel maksimum noktası

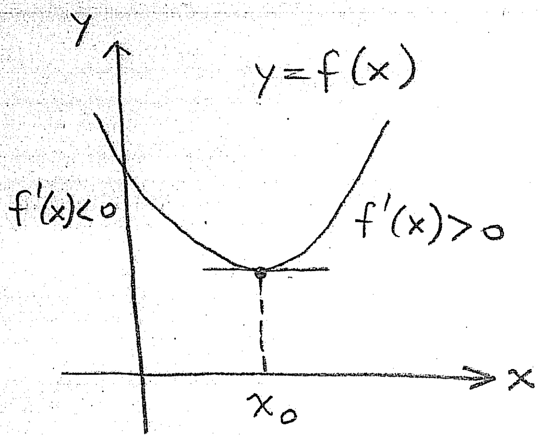
| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |




$f'(x_0)$ tanımsız !

$\Rightarrow$ $x_0$ yerel maksimum noktası

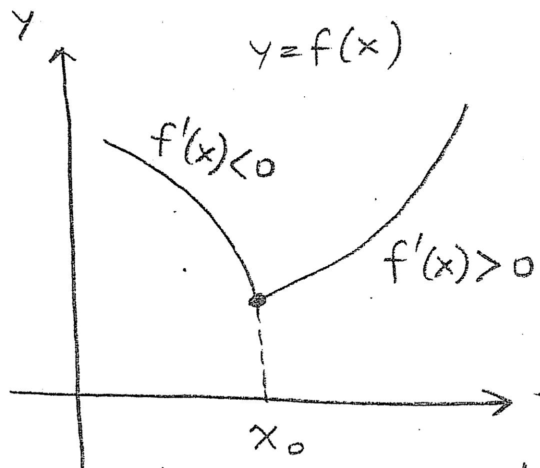
| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | − |




$f'(x_0)=0$

$\Rightarrow$ $x_0$ yerel minimum noktası

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |




$f'(x_0)$ tanımsız !

$\Rightarrow$ $x_0$ yerel minimum noktası

| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ |

## 2. Durum:

$x_0$ noktası, $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinin sol sınır noktası olsun ve bu noktada $f(x)$ fonksiyonu sağdan sürekli olsun.

a) Eğer $x \in (x_0, b) \Rightarrow f'(x) > 0$ oluyorsa, $x_0$ noktası yerel minimum noktasıdır.

b) Eğer $x \in (x_0, b) \Rightarrow f'(x) < 0$ oluyorsa, $x_0$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

## 3. Durum:

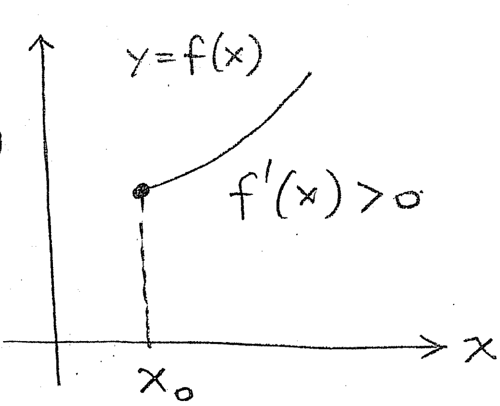
$x_0$ noktası, $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinin sağ sınır noktası olsun ve bu noktada $f(x)$

fonksiyonu soldan sürekli olsun.

a) Eğer $x \in (a, x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$ oluyorsa, $x_0$ noktası yerel maksimum noktasıdır.

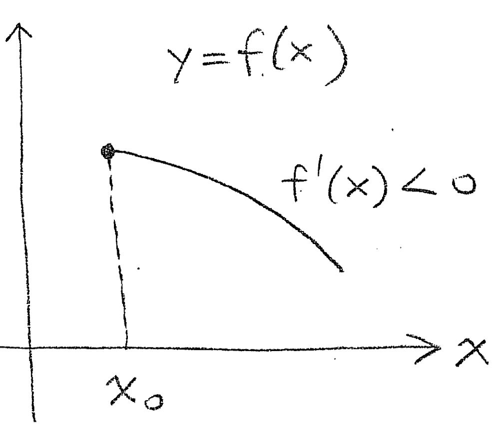
b) Eğer $x \in (a, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$ oluyorsa, $x_0$ noktası yerel minimum noktasıdır

(2-a)



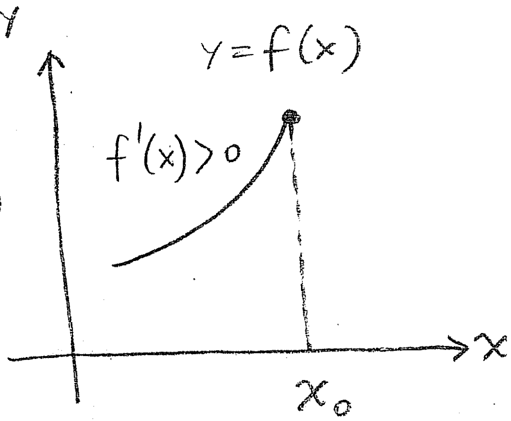

$\Rightarrow$ $x_0$ yerel minimum noktası

(2-b)



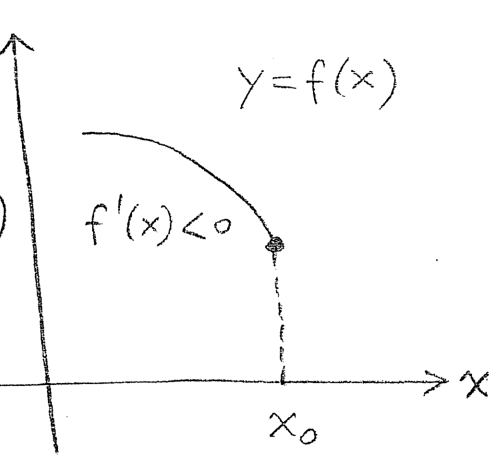

$\Rightarrow$ $x_0$ yerel maksimum noktası

(3-a)




$\Rightarrow$ $x_0$ yerel maksimum noktası

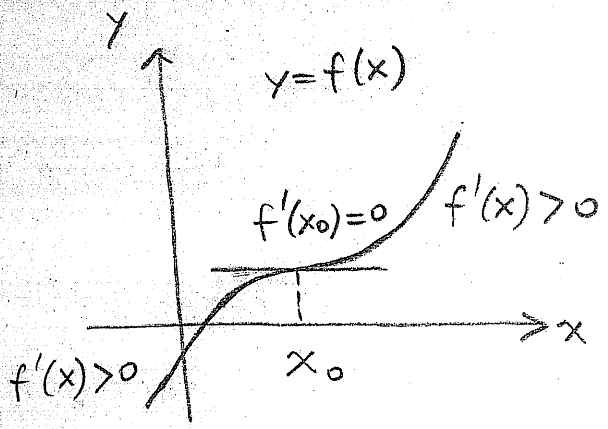
(3-b)




$\Rightarrow$ $x_0$ yerel minimum noktası

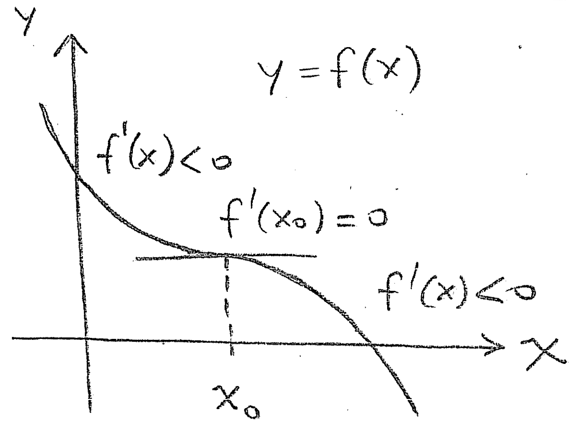
NOT:

Türevin işaret değiştirmediği nokta, yerel ekstremum noktası değildir.




| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |

$\Rightarrow$ $x_0$ yerel ekstremum noktası değil




| $x$ | | $x_0$ | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $-$ |

$\Rightarrow$ $x_0$ yerel ekstremum noktası değil

**ÖRNEK:**

$[-2,2]$ aralığında tanımlı olan,

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$$

fonksiyonunun mutlak ve yerel ekstremum değerlerini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\,(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 4x\,(x-1)\,(x+1)$$

$\Rightarrow$ $x=0$, $x=1$ ve $x=-1$ için birinci türev sıfırdır.

$\Rightarrow$ $0 \in [-2,2] \Rightarrow x=0$ kritik nokta

$1 \in [-2,2] \Rightarrow x=1$ kritik nokta

$-1 \in [-2,2] \Rightarrow x=-1$ kritik nokta

⇒ $[-2,2]$ aralığında $f'(x)$ türevini tanımsız yapan bir $x$ değeri bulunmadığından $f(x)$ fonksiyonunun tekil noktası yoktur.

⇒ Sınır noktaları : $x=-2$ ve $x=2$ dir.

⇒ Kritik noktalarda ve sınır noktalarında fonksiyon hesaplanırsa:

$$f(0)=-3,\quad f(1)=-4,\quad f(-1)=-4$$

$$f(-2)=5,\quad f(2)=5$$

⇒ mutlak maksimum değer : 5
mutlak minimum değer : $-4$

⇒ $f'(x)$ türevinin işareti incelenirse:

| $x$ | $-2$ (SN) | | $-1$ (KN) | | $0$ (KN) | | $1$ (KN) | | $2$ (SN) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-24$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $24$ |
| $f(x)$ | $5$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $-3$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $5$ |
| | yerel maksimum | | yerel minimum | | yerel maksimum | | yerel minimum | | yerel maksimum |

⇒ yerel maksimum değerler : $-3$, $5$
yerel minimum değer : $-4$
(mutlak maksimum değer, yerel maksimumların en büyüğü)

# AÇIK ARALIKTA TANIMLI FONKSİYONLARIN EKSTREMUM DEĞERLERİ

$(a, b)$ aralığında tanımlı olan $f(x)$ fonksiyonu, bu aralıkta sürekli ve,

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to b-} f(x) = M$$

olsun. Bu durumda:

1) $(a, b)$ aralığında,

$$f(c) > L \quad \text{ve} \quad f(c) > M$$

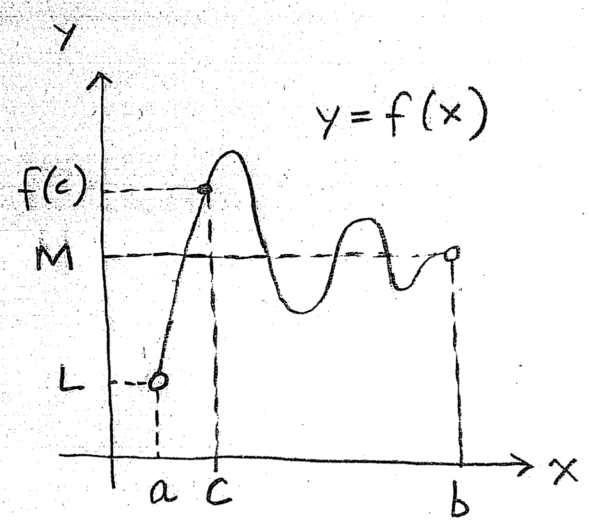
şartını sağlayan bir $c$ değeri varsa, $f(x)$ fonksiyonunun $(a, b)$ aralığında mutlak maksimum değeri vardır.

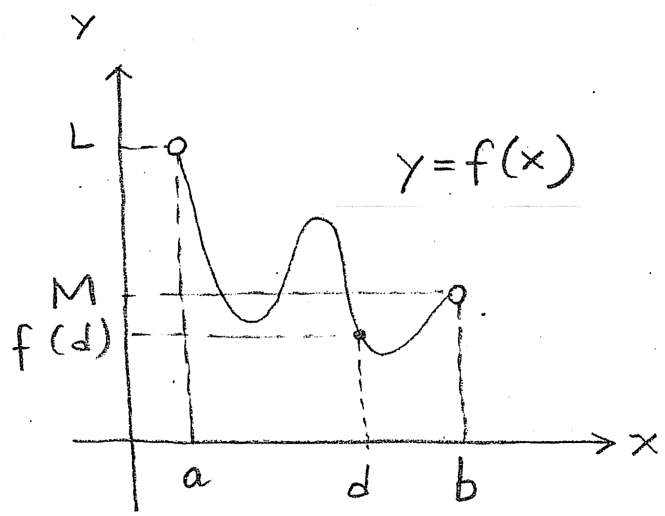
2) $(a, b)$ aralığında,

$$f(d) < L \quad \text{ve} \quad f(d) < M$$

şartını sağlayan bir $d$ değeri varsa, $f(x)$ fonksiyonunun $(a, b)$ aralığında mutlak minimum değeri vardır.

* Yukarıdaki ifadeler, $a$ yerine $-\infty$ veya $b$ yerine $\infty$ yazılması durumunda da geçerlidir (sonsuz aralıkta tanımlı fonksiyon). Böyle bir durumda, $\lim\limits_{x\to a+}$ yerine $\lim\limits_{x\to -\infty}$, veya $\lim\limits_{x\to b-}$ yerine $\lim\limits_{x\to \infty}$ yazılmalıdır. Ayrıca, $L$ ve $M$ değerleri de $-\infty, \infty$ olabilir




$\Rightarrow$ Açık aralıkta ya da sonsuz aralıkta tanımlı olan fonksiyonlarda sınır noktaları bulunmadığından, ekstremum değerleri bulabilmek için, fonksiyonun kritik ve tekil noktalarındaki değerleri hesaplanmalıdır.

**ÖRNEK:**

$(0, \infty)$ aralığında tanımlı olan,

$f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ fonksiyonunun, bu aralıkta mutlak minimum değeri olduğunu gösteriniz ve bu değeri bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty \qquad (= L)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad (= M)$$

Örneğin, $1 \in (0, \infty) \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 5 < \infty$

$\Rightarrow (0, \infty)$ aralığında mutlak minimum değeri vardır.

$\Rightarrow$ Bu değeri bulabilmek için fonksiyonun kritik noktalarda ve tekil noktalarda alacağı değerlere bakılmalıdır.

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$

$\Rightarrow$ $x=2$ ve $x=-2$ için birinci türev sıfırdır

$\Rightarrow$ $-2 \notin (0,\infty)$, $2 \in (0,\infty)$ $\Rightarrow$ $x=2$ kritik nokta!

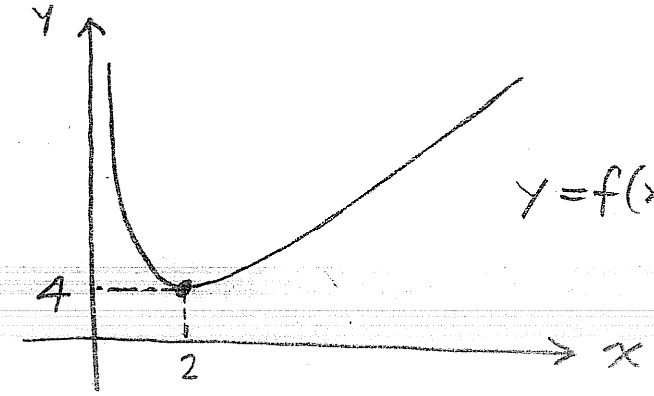
$\Rightarrow$ $(0,\infty)$ aralığında türevi tanımsız yapan bir $x$ değeri bulunmadığından, $f(x)$ fonksiyonunun tekil noktası yoktur.

$\Rightarrow$ Mutlak minimum değer kritik noktadadır.

$\Rightarrow$ $f(2)$ değeri mutlak minimum değerdir.

$$\Rightarrow \quad f(2) = 2 + \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(2) = 4}$$

$\Rightarrow$ Mutlak minimum değer : 4




$$y = f(x) = x + \frac{4}{x}$$

**ÖRNEK:**

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

olduğuna göre, g(x) fonksiyonunun mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

g(x) fonksiyonunun tanım kümesi : $(-\infty, \infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

(payın derecesi < paydanın derecesi)

Örneğin, $2 \in (-\infty, \infty) \Rightarrow x = 2 \Rightarrow g(2) = \frac{2}{5} > 0$

Örneğin, $-2 \in (-\infty, \infty) \Rightarrow x = -2 \Rightarrow g(-2) = -\frac{2}{5} < 0$

$\Rightarrow$ g(x) fonksiyonunun $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak maksimum ve mutlak minimum değeri vardır.

$\Rightarrow$ Bu değerleri bulabilmek için fonksiyonun kritik noktalarda ve tekil noktalarda alacağı değerlere bakılmalıdır.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(1)(x^2+1) - (2x)(x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

$\Rightarrow$ $x=1$ ve $x=-1$ için birinci türev sıfırdır.

$\Rightarrow$ $x=1$ ve $x=-1$ kritik noktalardır.

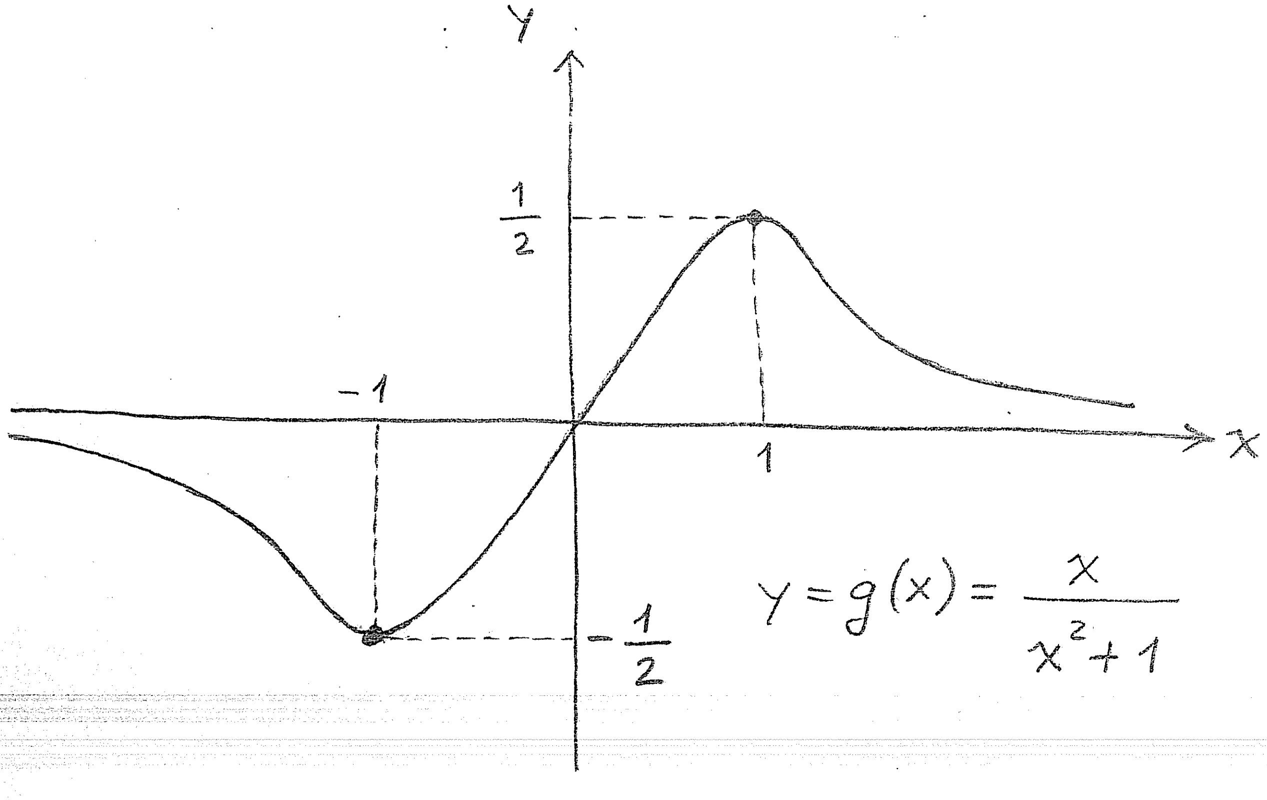
$\Rightarrow$ $(-\infty,\infty)$ aralığında türevi tanımsız yapan bir $x$ değeri bulunmadığından, fonksiyonun tekil noktası yoktur.

$\Rightarrow$ Mutlak maksimum ve mutlak minimum değerler kritik noktalarda olur.

$\Rightarrow$ $g(1)=\frac{1}{2}$ , $g(-1)=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Mutlak maksimum değer : $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Mutlak minimum değer : $-\frac{1}{2}$



## İKİNCİ TÜREV TESTİ

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktalarındaki yerel ekstremum değerlerinin, yerel maksimum ya da yerel minimum oldukları, $f''(x)$ türevinin işaretinin incelenmesiyle belirlenebilir.

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu $(a,b)$ aralığında tanımlı olsun. $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere, $x_0$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun bir kritik noktası olsun $\left(f'(x_0)=0\right)$.

Bu durumda:

1) $f''(x_0) > 0$ ise, $x_0$ noktası bir yerel minimum noktasıdır.

2) $f''(x_0) < 0$ ise, $x_0$ noktası bir yerel maksimum noktasıdır.

* Eğer $f''(x_0) = 0$ ise, ikinci türev testi ile sonuç alınamaz, birinci türev testi uygulanır.

**ÖRNEK:** $f(x) = x^2 e^{-x}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

**ÇÖZÜM:** $\Rightarrow f'(x) = (2x - x^2)\,e^{-x} = x(2-x)\,e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x(2-x)\,e^{-x} = 0$

$\Rightarrow x = 2$ ve $x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow x = 2$ ve $x = 0$ kritik noktalardır

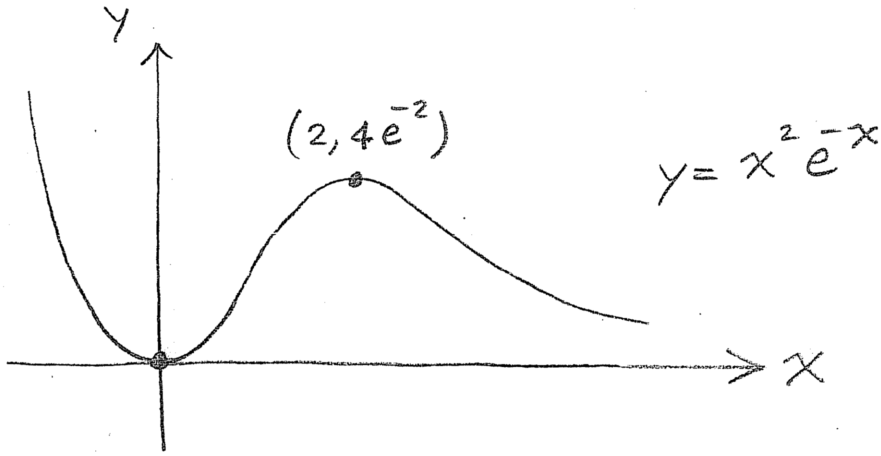
$\Rightarrow f''(x) = (2 - 4x + x^2)\,e^{-x}$

$$\Rightarrow f''(0) = 2 \Rightarrow f''(0) > 0$$

$\Rightarrow x = 0$ yerel minimum noktasıdır

$$\Rightarrow f''(2) = -2e^{-2} \Rightarrow f''(2) < 0$$

$\Rightarrow x = 2$ yerel maksimum noktasıdır.




ÖRNEK: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 4x(x-1)(x-2) = 0$$

$\Rightarrow x = 0$, $x = 1$ ve $x = 2$ için birinci türev sıfırdır.

$\Rightarrow$ $x=0$, $x=1$ ve $x=2$ kritik noktalardır.

$\Rightarrow$ $f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$

$\Rightarrow$ $f''(0) = 8 \Rightarrow f''(0) > 0$

$\Rightarrow$ $x=0$ yerel minimum noktasıdır.

$\Rightarrow$ $f''(1) = -4 \Rightarrow f''(1) < 0$

$\Rightarrow$ $x=1$ yerel maksimum noktasıdır.

$\Rightarrow$ $f''(2) = 8 \Rightarrow f''(2) > 0$

$\Rightarrow$ $x=2$ yerel minimum noktasıdır.

## BİR FONKSİYONUN BÜKEYLİĞİ

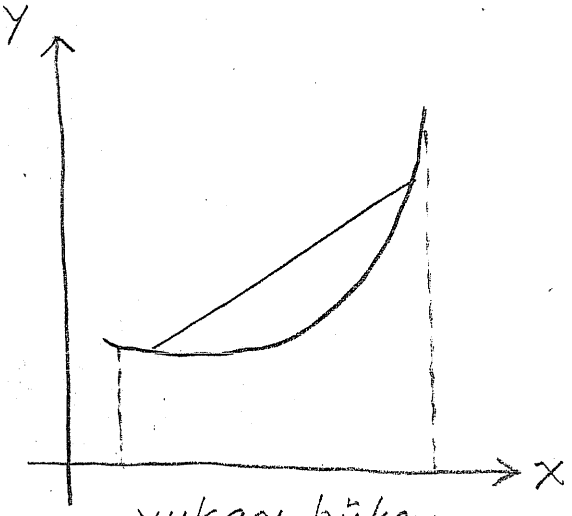
$f(x)$ fonksiyonu, ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda:

1) Herhangi bir aralıkta $f''(x) > 0$ oluyorsa, bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna "yukarı bükey fonksiyon" veya "Konveks fonksiyon" denir.

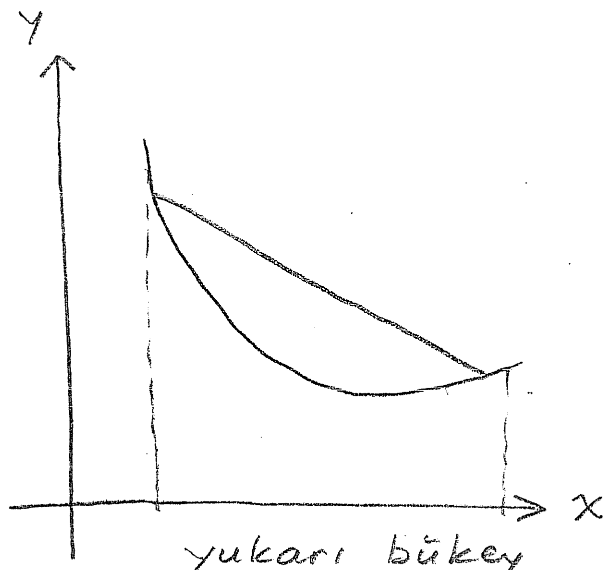
2) Herhangi bir aralıkta $f''(x) < 0$ oluyorsa, bu aralıkta $f(x)$ fonksiyonuna "aşağı bükey fonksiyon" veya "konkav fonksiyon" denir.

$\Rightarrow$ Bir fonksiyonun yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıkları bulmak için, fonksiyonun ikinci türevinin işareti incelenir.

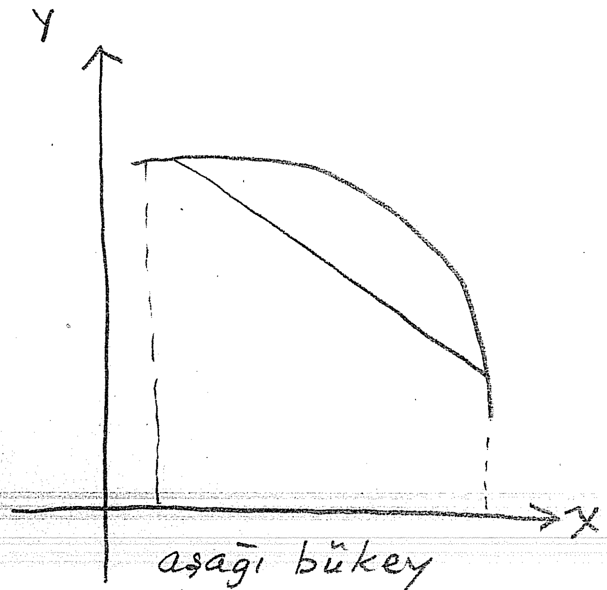
⇒ Geometrik olarak, f(x) fonksiyonunun grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren kiriş, daima grafiğin üstünde kalıyorsa, f(x) fonksiyonuna yukarı bükey veya konveks fonksiyon denir. Eğer kiriş, daima grafiğin altında kalıyorsa, f(x) fonksiyonuna aşağı bükey veya konkav fonksiyon denir.



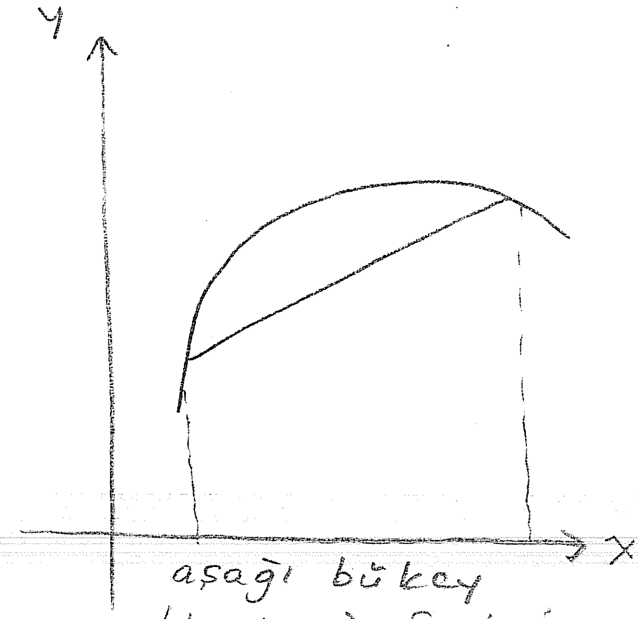

yukarı bükey
(konveks) fonksiyon




yukarı bükey
(konveks) fonksiyon




aşağı bükey
(konkav) fonksiyon




aşağı bükey
(konkav) fonksiyon

## BÜKÜM NOKTALARI

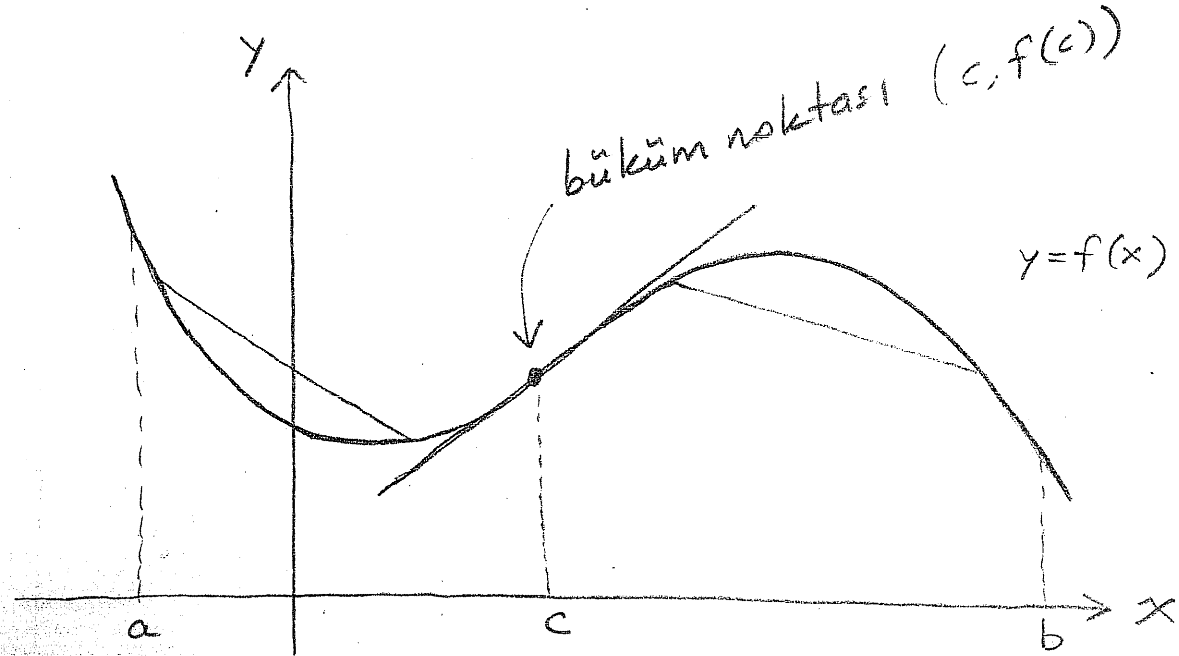
Bir fonksiyonun bükeyliğinin değiştiği noktaya "büküm noktası" denir.

$y=f(x)$ eğrisi üzerinde bulunan bir $(x_0, f(x_0))$ noktasının, $f(x)$ fonksiyonunun bir büküm noktası olabilmesi için,

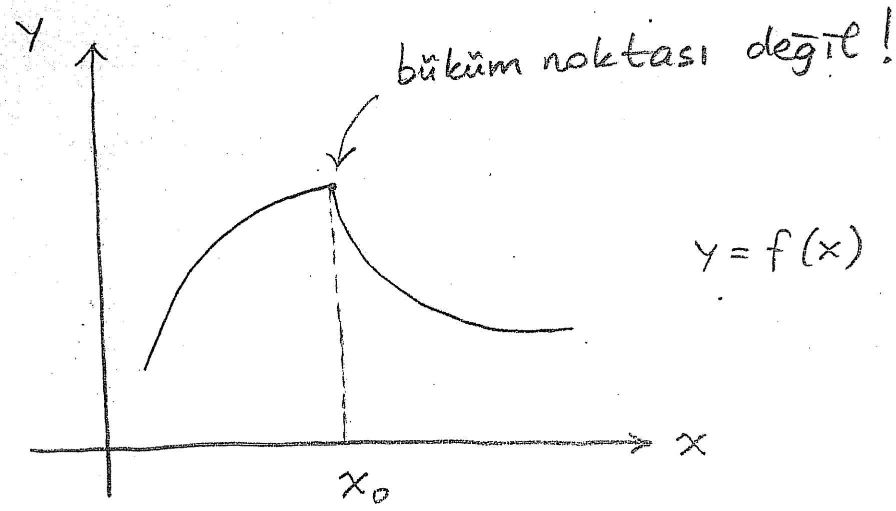
1) $y=f(x)$ eğrisinin $x_0$ noktasında bir teğetinin olması, ve,

2) $f(x)$ fonksiyonunun bükeyliğinin, $x_0$ noktasının sağında ve solunda, birbirinin tersi olması, diğer bir deyişle, $(x_0, f(x_0))$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun bükeyliğinin değişiyor olması

gerekmektedir.




⇒ $x=c$ noktasının sağında ve solunda bükeylik birbirinin tersidir ve $x=c$ noktasında bir teğet vardır.




$\Rightarrow$ $x = x_o$ noktasının sağında ve solunda bükeylik birbirinin tersidir, ancak, $x = x_o$ noktasında bir teğet olmadığından, $(x_o, f(x_o))$ noktası büküm noktası değildir.

NOT:

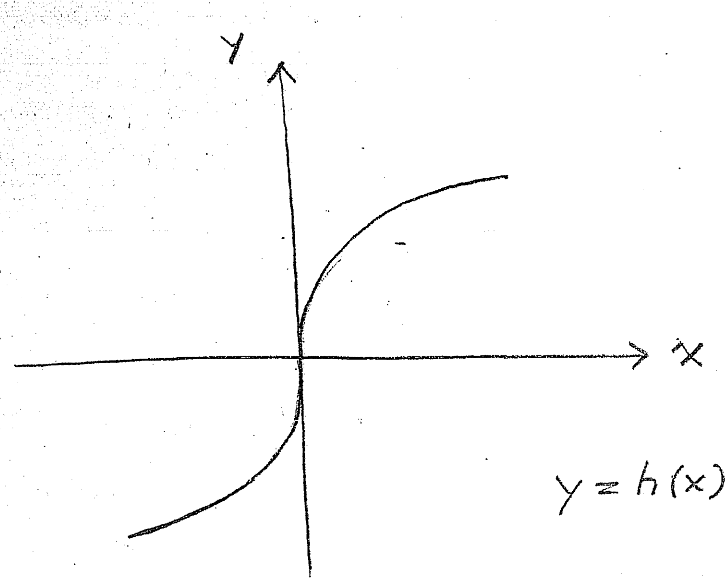
Büküm noktası, eğri üzerinde bir noktadır. $(x_o, f(x_o))$ gibi.

## BÜKÜM NOKTASI – İKİNCİ TÜREV İLİŞKİSİ

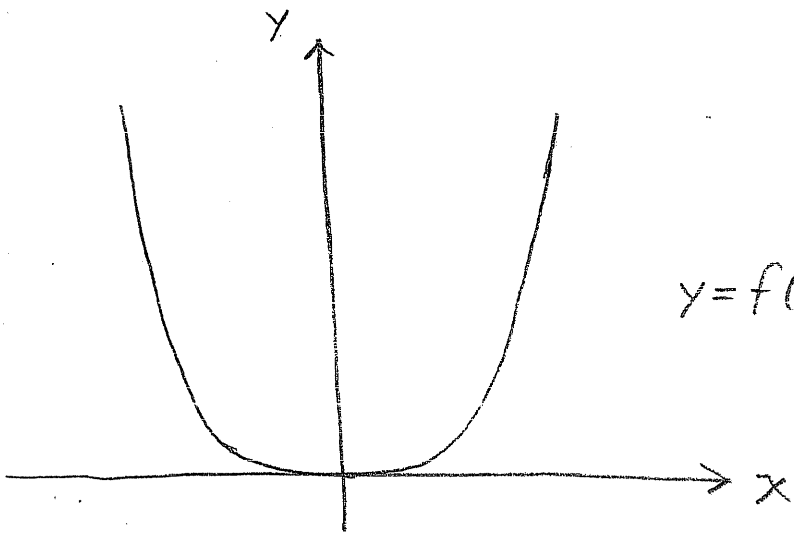
Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun, $x = x_o$ için bir büküm noktası varsa ve $f(x)$ fonksiyonu $x_o$ noktasında ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon ise (yani $f''(x_o)$ tanımlı ise), bu durumda,

$$f''(x_o) = 0$$

olur. Bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani $f''(x_o) = 0$ olduğunda $x = x_o$'da büküm noktası olmayabilir.




$\Rightarrow$ $x=0$ için $h''(0)$ tanımsız olduğu halde, $x=0$'da büküm noktası var




$\Rightarrow$ $f''(0) = 0$ olduğu halde, $x=0$'da büküm noktası yok !

ÖRNEK: $f(x) = x^6 - 10x^4$

şeklinde verilen fonksiyonun, yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıkları ve büküm noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$\Rightarrow f'(x) = 6x^5 - 40x^3$

$\Rightarrow f''(x) = 30x^4 - 120x^2$

$\Rightarrow f''(x) = 30x^2(x-2)(x+2)$

$\Rightarrow \quad x \in (-\infty, -2) \Rightarrow f''(x) > 0$

$\Rightarrow \quad x \in (2, \infty) \Rightarrow f''(x) > 0$

$\Rightarrow \quad x \in (-2, 2) \Rightarrow f''(x) < 0$

$\Rightarrow$ $(-\infty, -2)$ ve $(2, \infty)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu yukarı bükey fonksiyondur.

$\Rightarrow$ $(-2, 2)$ aralığında $f(x)$ fonksiyonu aşağı bükey fonksiyondur.

$\Rightarrow$ $x = -2$, $x = 0$ ve $x = 2$ için ikinci türev sıfırdır.

$\Rightarrow$ $x = 0$ noktasında $f''(x)$ işaret değiştirmediğinden, $x = 0$'da büküm noktası yoktur.

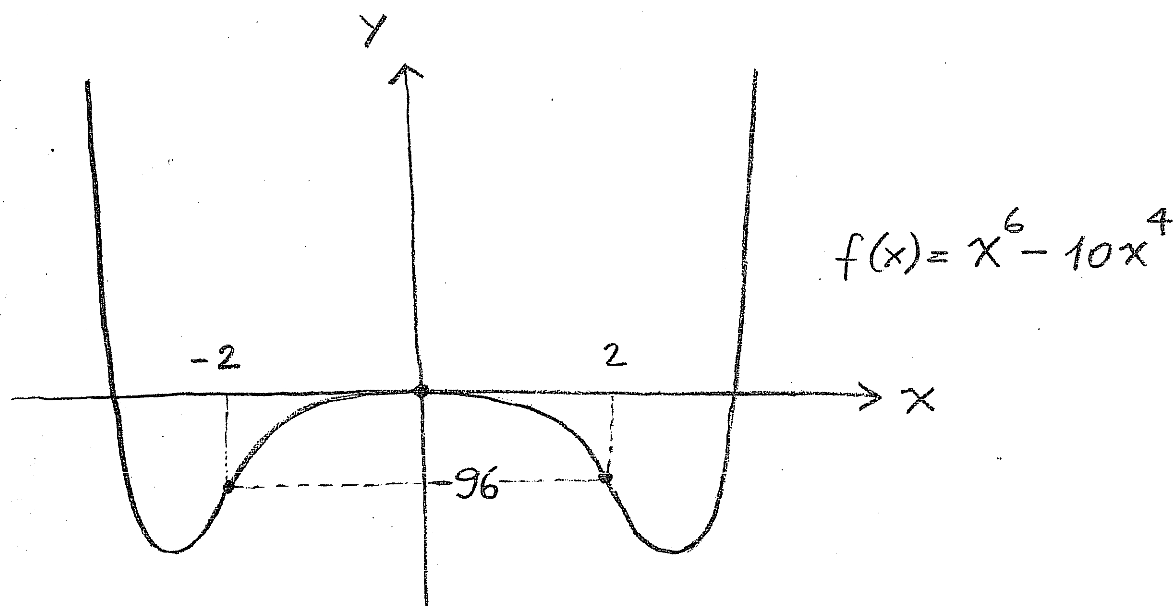
$\Rightarrow$ $x = -2$ ve $x = 2$ noktalarında $f''(x)$ işaret değiştirdiğinden, $(-2, f(-2))$ ve $(2, f(2))$ noktaları büküm noktası olacaktır.

$\Rightarrow$ $f(-2) = -96 \Rightarrow (-2, -96) \rightarrow$ büküm noktası olur.

$f(2) = -96 \Rightarrow (2, -96) \rightarrow$ büküm noktası olur.

$\Rightarrow$ Tablo yaparsak:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\cup$ | BN | $\cap$ | | $\cap$ | BN | $\cup$ | |




ÖRNEK:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$$

şeklinde verilen fonksiyonun, artan ve azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremum değerlerini, yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıkları ve büküm noktalarını bulunuz. Bu bilgilerden yararlanarak $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM:

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$$

$\Rightarrow x=0$ ve $x=\frac{3}{2}$ için birinci türev sıfırdır.

$\Rightarrow x=0$ ve $x=\frac{3}{2}$ kritik noktalardır.

$\Rightarrow x\in(-\infty,0) \Rightarrow f'(x)<0$

$\Rightarrow x\in\left(0,\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f'(x)<0$

$\Rightarrow (-\infty,0)$ ve $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ aralığında azalandır.

$\Rightarrow x\in\left(\frac{3}{2},\infty\right) \Rightarrow f'(x)>0$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2},\infty\right)$ aralığında artandır.

$\Rightarrow f(0)=1,\ f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{11}{16}$

$\Rightarrow$ $x=0$'da birinci türev işaret değiştirmediğinden bu noktada yerel ekstremum değeri yoktur.

$\Rightarrow$ $x=\frac{3}{2}$'de, birinci türevin işareti $(-)$den $(+)$ya değiştiği için, $-\frac{11}{16}$ yerel minimum değerdir.

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 (KN) | | $\frac{3}{2}$ (KN) | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | 1 | $\searrow$ | $-\frac{11}{16}$ yerel minimum | $\nearrow$ | |

$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

$\Rightarrow$ $x=0$ ve $x=1$ için ikinci türev sıfırdır.

$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f''(x) > 0$

$\Rightarrow x \in (0,1) \Rightarrow f''(x) < 0$

$\Rightarrow x \in (1,\infty) \Rightarrow f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ $(-\infty, 0)$ aralığında yukarı bükey

$\Rightarrow$ $(0,1)$ aralığında aşağı bükey

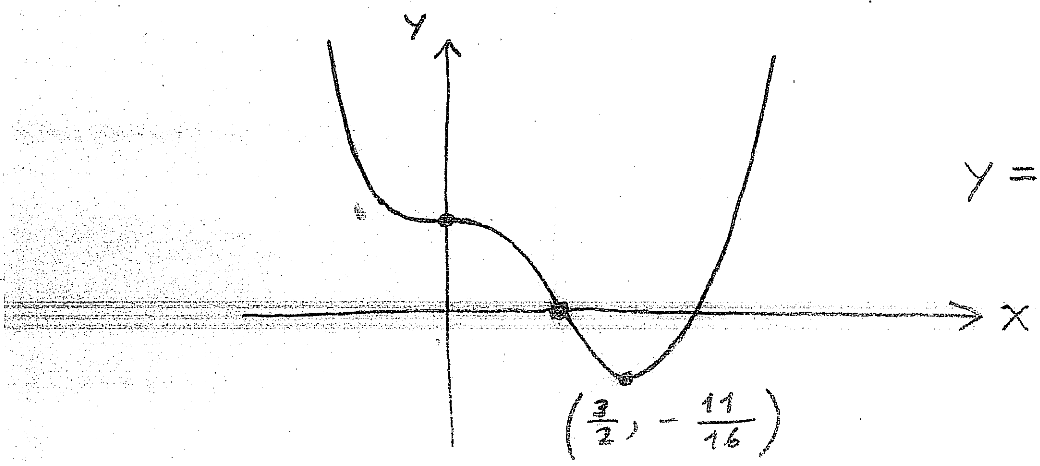
$\Rightarrow$ $(1,\infty)$ aralığında yukarı bükey

$\Rightarrow f(0) = 1, \quad f(1) = 0$

$\Rightarrow$ $x=0$'da ve $x=1$'de ikinci türev işaret değiştirdiğinden, $(0,1)$ ve $(1,0)$ noktaları büküm noktasıdır.

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\smile$ | $1$ (BN) | $\frown$ | $0$ (BN) | $\smile$ | |




$y = x^4 - 2x^3 + 1$

## EĞİK ASİMPTOT

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0 \quad \text{ya da} \quad \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$$

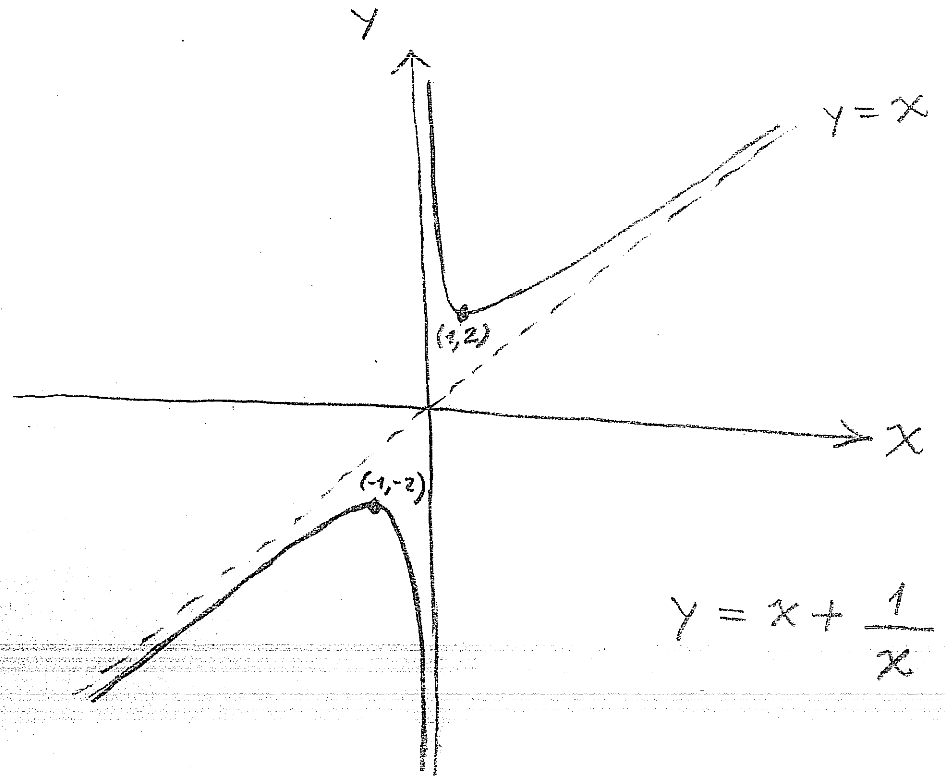
oluyorsa, $y=ax+b$ ($a,b$ sabit ve $a\neq 0$) doğrusuna, $y=f(x)$ eğrisinin «eğik asimptotu» denir.

**ÖRNEK:**

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x} \quad \text{olsun.}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

olduğundan, $y=x$ doğrusu, $y=f(x)$ eğrisinin eğik asimptotudur.



**NOT:**

$$f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad \begin{array}{l}\longrightarrow m\text{-inci derece polinom}\\ \longrightarrow n\text{-inci derece polinom}\end{array}$$

şeklinde tanımlanan $f(x)$ rasyonel fonksiyonunu gözönüne alalım.

$\Rightarrow$ Eğer $m=n+1$ ise, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin $y=ax+b$ şeklinde bir eğik asimptotu vardır.

$$\Rightarrow \quad m=n+1 \Rightarrow f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x} = ax+b+\frac{R(x)}{Q_n(x)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $R(x)$, derecesi en çok $(n-1)$ olan bir polinomdur. Bu durumda,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$$

olacağından, $y=ax+b$ doğrusu, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin eğik asimptotu olur.

$\Rightarrow$ Eğer $m>n+1$ ise, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin eğik ya da yatay asimptotu yoktur.

**ÖRNEK:** $y=f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ olsun $(m=n+1)$.

$$\Rightarrow \quad y=\frac{x^3}{x^2+x+1} \Rightarrow y=x-1+\frac{1}{x^2+x+1}$$

$\Rightarrow$ $y=x-1$ doğrusu, $y=f(x)$ eğrisinin eğik asimptotudur.

## GRAFİK ÇİZİMİ

$y=f(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonun grafiğini çizebilmek için, aşağıdaki işlemler yapılmalıdır:

1) Fonksiyonun tanım kümesi verilmemişse, öncelikle tanım kümesi belirlenir.

2) Fonksiyonun tanım kümesini oluşturan aralıkların uç noktalarında, varsa fonksiyon değerleri, yoksa fonksiyonun bu noktalardaki limitleri bulunur.

3) Varsa, grafiğin asimptotları (yatay, düşey, eğik) bulunur.

4) Grafiğin koordinat eksenlerini kestiği noktalar ile, bilinen başka noktalar varsa, bu noktaların yeri belirlenir.

5) Birinci türev $(f'(x))$ ve ikinci türev $(f''(x))$ elde edilir.

6) Elde edilen birinci ve ikinci türevler yardımıyla, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar, ekstremum noktaları, bükeyliği ve büküm noktaları belirlenir.

7) Elde edilen bilgiler bir tabloda toplanır.

8) Tabloya uygun grafik çizilir.

---

NOT: Elde edilen bilgilerle grafik arasında bir uyumsuzluk varsa, bir hata yapılmış demektir (örneğin düşey asimptotun sağında sonsuza yaklaşan bir fonksiyonun azalan ve aşağı bükey olması mümkün değil!).

---

**ÖRNEK:** $y = f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**ÇÖZÜM:**

$\Rightarrow$ Fonksiyonun tanım kümesi: $(-\infty, \infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \left( \frac{x^4}{4} - x^3 \right) = \infty , \quad \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x^4}{4} - x^3 \right) = \infty$$

$\Rightarrow$ asimptot yok!

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \frac{x^4}{4} - x^3 = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{4}(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 , \quad x = 4$$

$\Rightarrow$ eksenleri kestiği noktalar: $(0,0)$ ve $(4,0)$

$$\Rightarrow f'(x) = x^3 - 3x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 , \quad x = 3$$

$\Rightarrow$ $x = 0$, $x = 3$ kritik noktalar

$$\Rightarrow f(0) = 0 , \quad f(3) = -\frac{27}{4}$$

$\Rightarrow$ tekil nokta yok!

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty, 3) \Rightarrow f'(x) < 0$ , $x \in (3, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0$

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{27}{4}$ | $\nearrow$ | $\infty$ |

$\Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 6x$

$\Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$

$\Rightarrow f(2) = -4$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f''(x) > 0$

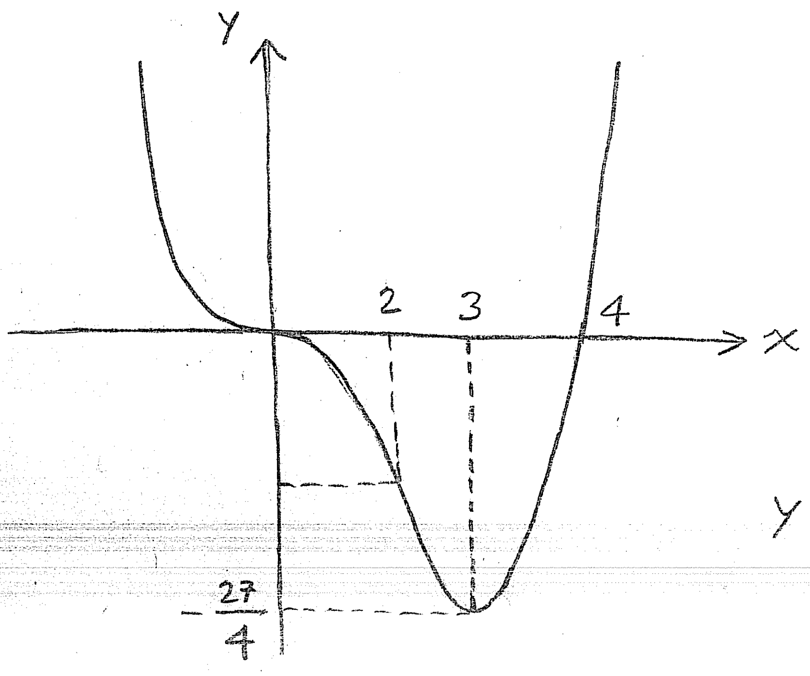
$\Rightarrow x \in (0, 2) \Rightarrow f''(x) < 0\ ,\ x \in (2, \infty) \Rightarrow f''(x) > 0$

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ (BN) | | $2$ (BN) | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\smile$ | $0$ | $\frown$ | $-4$ | $\smile$ | |

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ (BN) | | $2$ (BN) | | $3$ | | $4$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $\underset{\smile}{+}$ | $0$ | $\underset{\frown}{-}$ | $0$ | $\underset{\smile}{+}$ | | $\underset{\smile}{+}$ | | $\underset{\smile}{+}$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-4$ | $\searrow$ | $-\frac{27}{4}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\infty$ |




$y = \frac{x^4}{4} - x^3$

**ÖRNEK:** $y = \dfrac{x^2+2x+4}{2x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**ÇÖZÜM:**

$\Rightarrow$ Fonksiyonun tanım kümesi : $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$\Rightarrow$ $y = \dfrac{x^2+2x+4}{2x} = \dfrac{x}{2} + 1 + \dfrac{2}{x}$ yazılabilir.

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0+} y = \infty$ , $\lim\limits_{x \to 0-} y = -\infty$

$\Rightarrow$ $x=0$ doğrusu, düşey asimptottur.

$\Rightarrow$ $y - \left(\dfrac{x}{2}+1\right) = \dfrac{2}{x}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{x} = 0$

$\Rightarrow$ $y = \dfrac{x}{2} + 1$ doğrusu, eğik asimptottur.

$\Rightarrow$ $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 \geq 3$ olduğundan, fonksiyon hiçbir zaman sıfır olamaz. Bu nedenle fonksiyonun grafiğinin $x$ eksenini kestiği nokta yoktur.

$\Rightarrow$ Fonksiyon, $x=0$ için tanımsız olduğundan, grafiğinin $y$ eksenini kestiği nokta yoktur.

$\Rightarrow$ $y' = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{2x^2}$

$\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-4}{2x^2} = 0 \Rightarrow x=-2,\ x=2$

$\Rightarrow x=-2$ ve $x=2$ kritik noktalar

$\Rightarrow y(-2) = -1,\ y(2) = 3$

$\Rightarrow x=0$ için $y'$ tanımsız, ancak, $x=0$ değeri tanım kümesinde bulunmadığından, tekil nokta yok

$\Rightarrow x \in (-\infty,-2) \Rightarrow y' > 0,\ x \in (-2,2) \Rightarrow y' < 0,$
$x \in (2,\infty) \Rightarrow y' > 0$

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | (KN) $-2$ | | (AS) $0$ | | (KN) $2$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ yerel maksimum | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $\infty$ | $\searrow$ | $3$ yerel minimum | $\nearrow$ | $\infty$ |

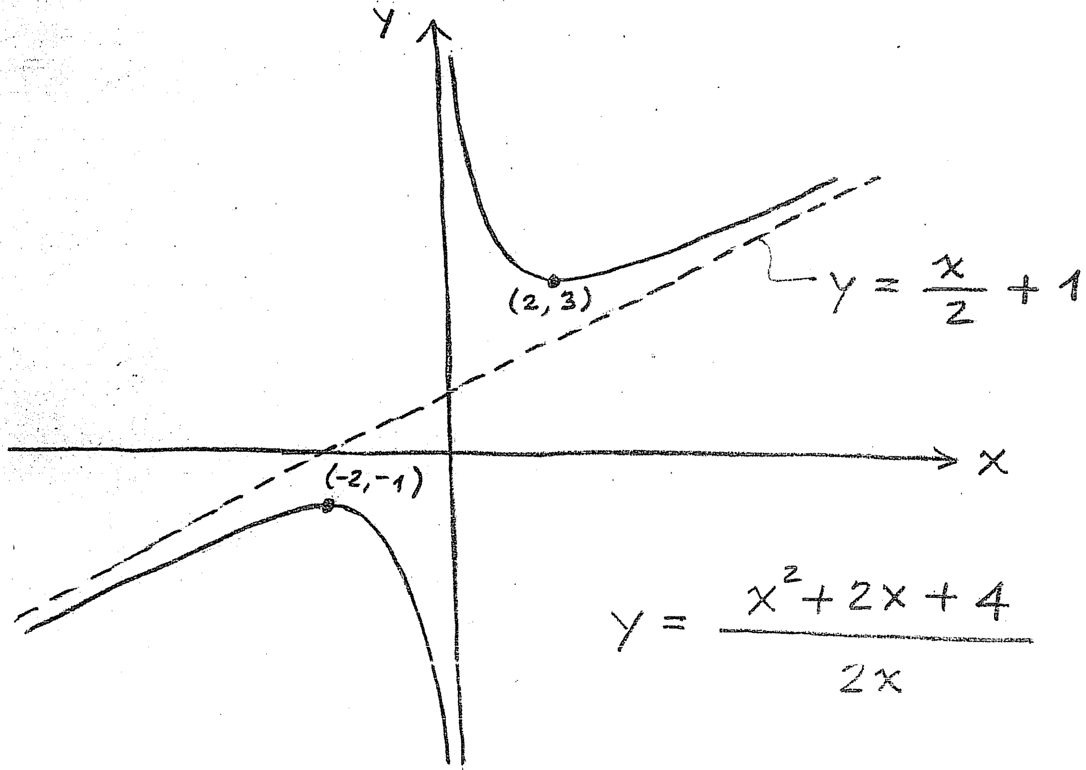
$\Rightarrow y'' = \dfrac{4}{x^3} \Rightarrow x=0$ için tanımsız, $y''=0$ yapan herhangi bir $x$ değeri yoktur.

$\Rightarrow x \in (-\infty,0) \Rightarrow y'' < 0,\ x \in (0,\infty) \Rightarrow y'' > 0$

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | (AS) $0$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $y$ | | $\frown$ | ‖ | $\smile$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ (KN) | | $0$ (AS) | | $2$ (KN) | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y''$ | | $-$ | $-\frac{1}{2}$ | $-$ | ‖ | $+$ | $\frac{1}{2}$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ yerel maksimum | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $\infty$ | $\searrow$ | $3$ yerel minimum | $\nearrow$ | $\infty$ |




**ÖRNEK:**

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**ÇÖZÜM:**

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x+2)}$$

$\Rightarrow$ Fonksiyonun tanım kümesi : $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$

$\Rightarrow \lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty$ , $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$

$\Rightarrow$ $x = -2$ ve $x = 2$ doğruları düşey asimptot!

$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ doğrusu, yatay asimptot!

$\Rightarrow$ Eğik asimptot yok!

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{4}$ , $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$\Rightarrow$ Eksenleri kestiği noktalar : $\left(0, \frac{1}{4}\right), (-1, 0), (1, 0)$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2-4)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-6x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ $x = 0$ kritik noktadır.

$\Rightarrow f(0) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ $x = -2$ ve $x = 2$ için $f'(x)$ tanımsızdır, ancak bu noktalarda fonksiyon tanımsız olduğundan, tekil nokta yoktur.

$\Rightarrow x \in (-\infty, -2) \Rightarrow f'(x) > 0$, $x \in (-2, 0) \Rightarrow f'(x) > 0$,

$x \in (0, 2) \Rightarrow f'(x) < 0$, $x \in (2, \infty) \Rightarrow f'(x) < 0$

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ (AS) | | $0$ (KN) | | $2$ (AS) | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ yerel maksimum | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $\infty$ | $\searrow$ | $1$ |

$$\Rightarrow \quad f''(x) = \frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

$\Rightarrow$ $x=-2$ ve $x=2$ için $f''(x)$ tanımsızdır,

$f''(x)=0$ yapan herhangi bir $x$ değeri yok!

$\Rightarrow$ $x \in (-\infty,-2) \Rightarrow f''(x)>0$, $x \in (-2,2) \Rightarrow f''(x)<0$,

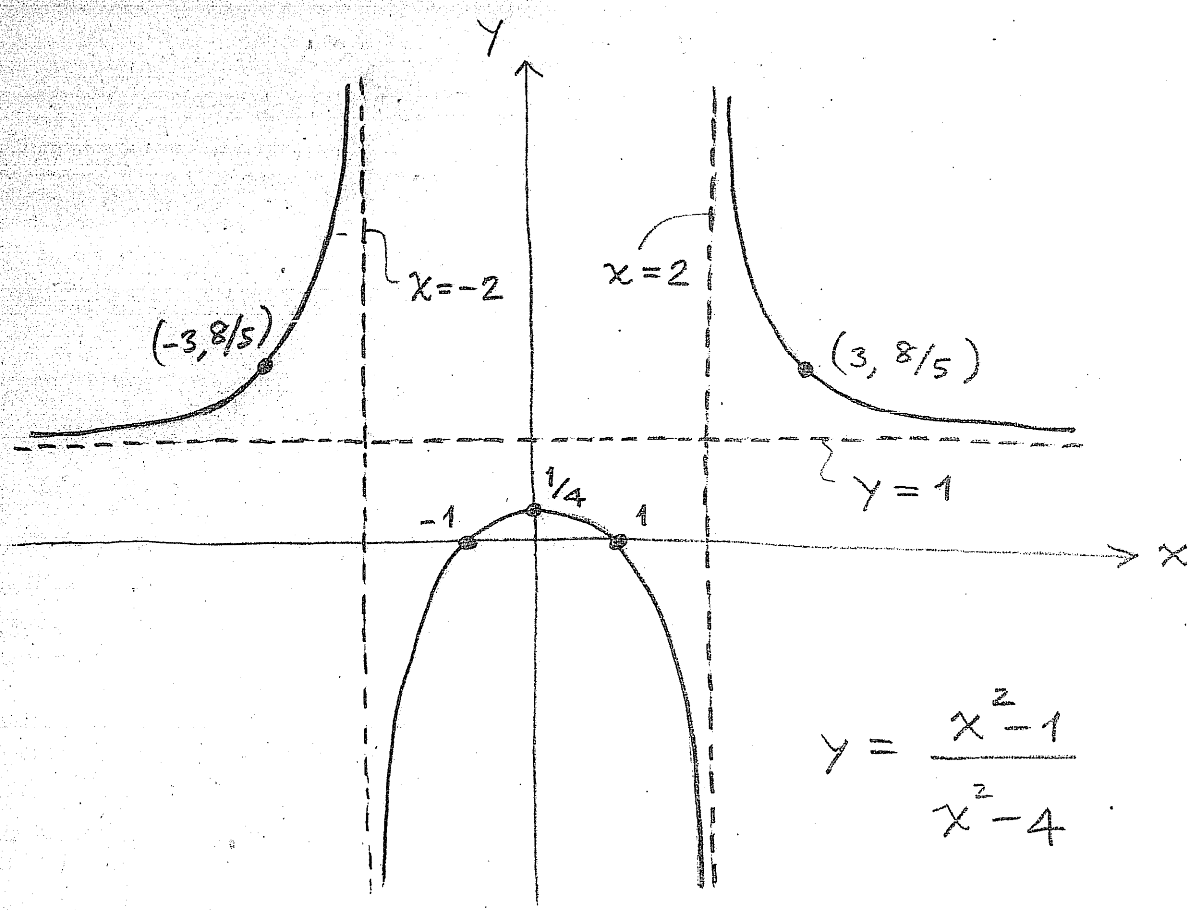
$x \in (2,\infty) \Rightarrow f''(x)>0$

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ (AS) | | $2$ (AS) | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\cup$ | ‖ | $\cap$ | ‖ | $\cup$ | |

$\Rightarrow$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ (AS) | | $0$ (KN) | | $2$ (AS) | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ $\cup$ | ‖ | $-$ $\cap$ | $-\frac{3}{8}$ | $-$ $\cap$ | ‖ | $+$ $\cup$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{4}$ yerel maksimum | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $\infty$ | $\searrow$ | $1$ |




## MAKSİMUM VE MİNİMUM PROBLEMLERİ

Değişken bir büyüklüğün maksimum ve minimum değerlerinin bulunması, uygulamada çokça karşılaşılan bir durumdur (örneğin, mühendislikte, maksimum emniyet veya minimum maliyet gibi).

Maksimum ve minimum problemlerini çözebilmek için, öncelikle, maksimum veya minimum olması istenen büyüklük, yanlızca bir değişkene bağlı olarak ifade edilir. Daha sonra bu ifadeyi maksimum ve minimum yapan değerler bulunur.

(Bir kaç basit örnek verilecek. Daha karmaşık olabilir)

**ÖRNEK:** Toplamları 10 ve çarpımları maksimum olan ve negatif olmayan iki sayı bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

Sayılardan biri $x$ olsun.

$\Rightarrow$ Diğer sayı $10-x$ olur.

$\Rightarrow$ İki sayının çarpımı $A$ olsun. $\Rightarrow A(x) = x(10-x)$

$$\Rightarrow A(x) = 10x - x^2$$

$\Rightarrow A(x)$ ifadesini maksimum yapan $x$ bulunmalıdır.

$\Rightarrow A(x)$ fonksiyonunun sınır noktalarında, tekil noktalarında ve kritik noktalarındaki değeri bulunacak.

$\Rightarrow$ sayılar negatif olamayacağından,

$0 \leq x \leq 10$ demektir

$\Rightarrow$ $x=0$ ve $x=10$ sınır noktalarıdır.

$\Rightarrow A'(x) = 10-2x \Rightarrow$ tekil nokta yok.

$\Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 10-2x = 0 \Rightarrow x = 5$

$\Rightarrow 5 \in [0,10] \Rightarrow x=5$ kritik noktadır.

$\Rightarrow A(0) = 0, \; A(10) = 0, \; A(5) = 25$

$\Rightarrow x=5$ için çarpım maksimumdur.

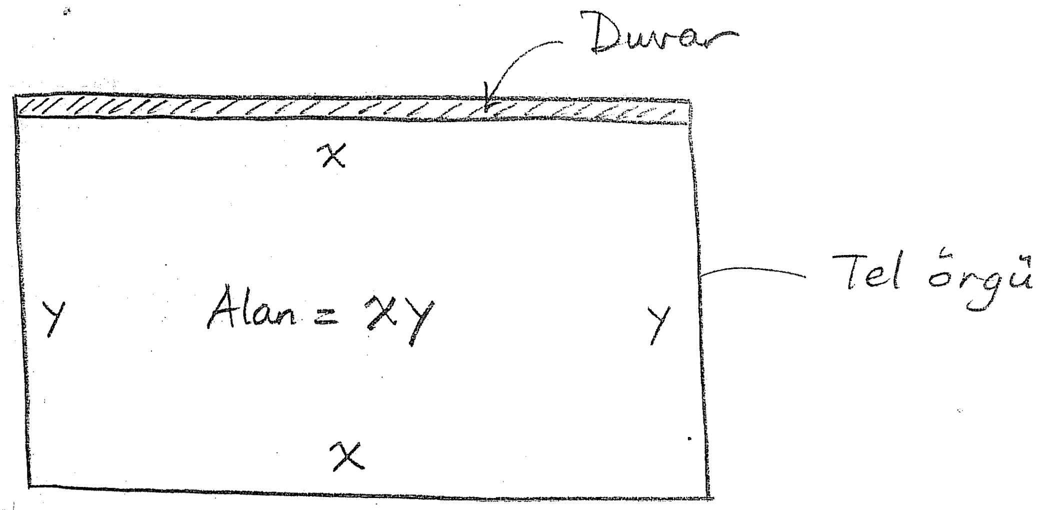
$\Rightarrow$ aranan sayılar 5 ve 5 olur

NOT: $A''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ aşağı bükey

$\Rightarrow$ maksimum

ÖRNEK: Bir kenarı duvar örülü olan dikdörtgen şeklindeki bir arsanın diğer üç kenarı tel örgüyle çevrilecektir. Buna göre, 100 m'lik tel örgü kullanılarak çevrilebilecek maksimum alanı bulunuz.

ÇÖZÜM: (şekil çizilebilir)




$\Rightarrow$ 100 m tel örgü $\Rightarrow$ $x + 2y = 100$

$\Rightarrow$ Alan = A $\Rightarrow$ $A = xy$ $\Rightarrow$ tek değişkene bağlı olarak ifade edilmeli!

$\Rightarrow$ $x + 2y = 100 \Rightarrow x = 100 - 2y$

$\Rightarrow$ $A = A(y) = (100 - 2y)y$

$\Rightarrow$ $A(y) = 100y - 2y^2$

$\Rightarrow$ $x > 0$ ve $y > 0$ olmalıdır.

$\Rightarrow$ $x > 0 \Rightarrow y < 50$ olmalıdır

$\Rightarrow$ $A(y)$'nin tanım kümesi $(0, 50)$ olur.

$\Rightarrow \lim_{y \to 0+} A(y) = 0 \quad , \quad \lim_{y \to 50-} A(y) = 0$

$\Rightarrow$ $(0,50)$ aralığında, bir minimum değer yoktur.

$\Rightarrow y \in (0,50) \Rightarrow A(y) > 0$

$\Rightarrow$ $(0,50)$ aralığında, bir maksimum değer vardır.

$\Rightarrow$ Kritik noktada ve tekil noktada fonksiyonun değerlerine bakılmalıdır (sınır noktası yok).

$\Rightarrow A'(y) = 100 - 4y \Rightarrow$ tekil nokta yok!

$\Rightarrow A'(y) = 0 \Rightarrow 100 - 4y = 0 \Rightarrow y = 25$

$\Rightarrow 25 \in (0,50) \Rightarrow y = 25$ kritik nokta!

$\Rightarrow$ maksimum değer, kritik noktadadır.

$\Rightarrow A_{maks} = A(25) = 100 * 25 - 2 * 625$

$\Rightarrow \boxed{A_{maks} = 1250 \ m^2}$

ÖRNEK: Dik bir dairesel silindir şeklinde $3 m^3$ su alacak, üst kısmı açık bir su deposu yapılacaktır. Deponun tabanında kullanılacak malzemenin $m^2$'si, yanal yüzeyinde kullanılacak malzemenin $m^2$'sinin iki katı fiyatta olduğuna göre, deponun en ekonomik boyutlarını hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$\Rightarrow$ En ekonomik boyutlar $\Rightarrow$ Maliyet minimum olmalıdır.

$\Rightarrow$ Deponun boyutları → Taban yarıçapı : $r$
→ yüksekliği : $h$

$\Rightarrow$ Deponun hacmi : $V$ $\Rightarrow$ $V = \pi r^2 h = 3m^3$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 3 \Rightarrow h = \frac{3}{\pi r^2}$$

$\Rightarrow$ yanal yüzeyde kullanılacak malzemenin $m^2$'si $a$ olsun.

$\Rightarrow$ tabanda kullanılacak malzemenin $m^2$'si $2a$ olur.

$\Rightarrow$ Deponun maliyeti $M$ olsun.

$$\Rightarrow M = 2a * \pi r^2 + a * 2\pi r h$$

$$= 2a\pi r^2 + a\, 2\pi r \frac{3}{\pi r^2}$$

$$\Rightarrow M = M(r) = 2\pi a r^2 + \frac{6a}{r}$$

$\Rightarrow$ $M$'yi minimum yapacak olan $r$ değeri bulunmalıdır.

$\Rightarrow$ $r > 0$ olmalıdır.

$\Rightarrow$ $M(r)$'nin tanım kümesi $(0, \infty)$ olur.

$\Rightarrow \lim_{r \to 0^+} M(r) = \infty$ , $\lim_{r \to \infty} M(r) = \infty$

$\Rightarrow$ $(0, \infty)$ aralığında bir maksimum değer yoktur.

$\Rightarrow$ $r \in (0, \infty) \Rightarrow M(r) < \infty$

$\Rightarrow$ $(0, \infty)$ aralığında bir minimum değer var!

$\Rightarrow$ Kritik noktada ve tekil noktada fonksiyon hesaplanmalıdır (sınır noktası yok).

$\Rightarrow M'(r) = 4\pi a r - \frac{6a}{r^2}$ $\Rightarrow$ tekil nokta yok!

$\Rightarrow M'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi a r - \frac{6a}{r^2} = 0$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$$

$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}} \in (0, \infty) \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$ kritik noktadır.

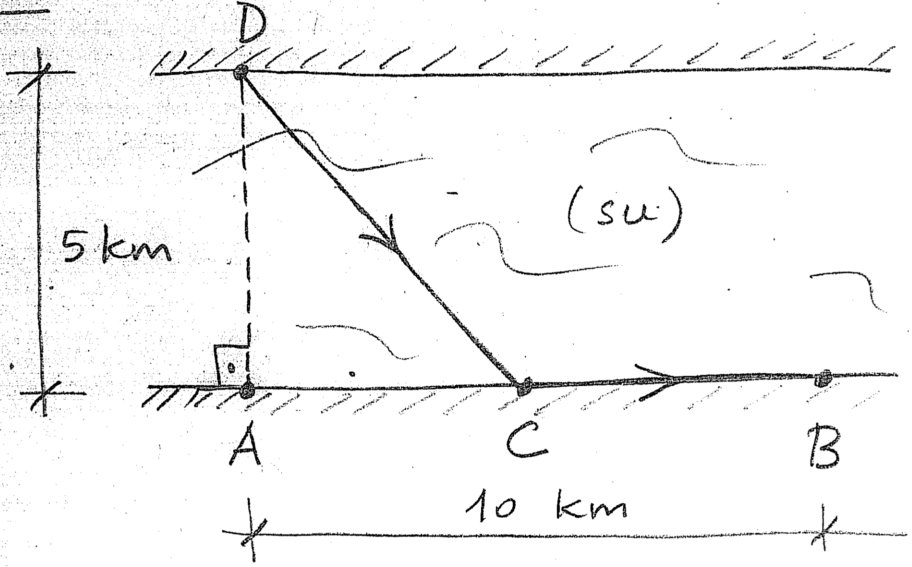
$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$ değeri için maliyet minimum olur.

$$\Rightarrow 4\pi a r - \frac{6a}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 3$$

$$\Rightarrow h = \frac{3}{\pi r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{3}{\pi h} \Rightarrow 2\pi r \frac{3}{\pi h} = 3$$

$\Rightarrow \boxed{h = 2r}$ — en ekonomik boyut!

ÖRNEK:



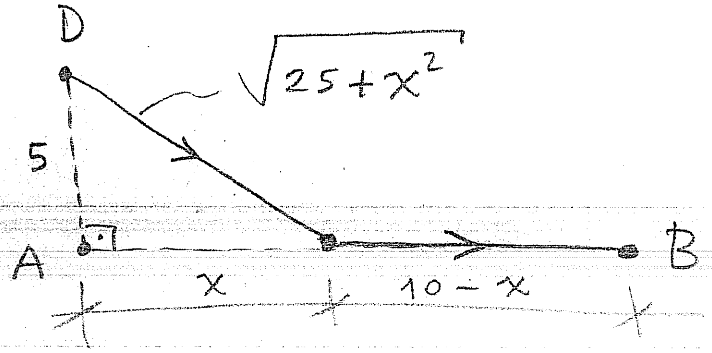

D noktasından B noktasına kablo döşenecektir. Kablonun, önce C noktasına kadar suyun altından geçmesi gerekmektedir. Kablonun suyun altından döşenmesinin Km'si 5000 TL'ye mal olmaktadır. C–B arasında ise kablonun Km'si 3000 TL'ye döşenmektedir. Buna göre:

a) Toplam maliyeti minimum yapabilmek için C noktası nerede seçilmelidir?

b) A–B arası 3 km olursa, C noktası nerede seçilmelidir?

ÇÖZÜM:

a)



$\Rightarrow$ Toplam Maliyet : $T$ olsun.

$\Rightarrow T = T(x) = 5000 * \sqrt{25+x^2} + 3000 * (10-x)$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 10$ olmalıdır.

$\Rightarrow T(x)$'in tanım kümesi $[0,10]$ olur.

$\Rightarrow T(x)$ fonksiyonu, kapalı aralıkta tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olduğundan, bu aralıkta bir minimum değeri vardır.

$\Rightarrow$ Sınır noktalarında, tekil noktalarda ve kritik noktalarda, fonksiyon hesaplanmalıdır.

$$\Rightarrow T'(x) = \frac{5000x}{\sqrt{25+x^2}} - 3000 \Rightarrow \text{tekil nokta yok}$$

$$\Rightarrow T'(x) = 0 \Rightarrow 5000x = 3000\sqrt{25+x^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{225}{16} \Rightarrow x = \pm \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{15}{4} \notin [0,10] \Rightarrow x = \frac{15}{4} \text{ kritik noktadır.}$$

$\Rightarrow$ $T(0) = 55000$ TL (sınır noktası)

$T(10) \cong 55902$ TL (sınır noktası)

$T\left(\frac{15}{4}\right) = 50000$ TL (Kritik nokta)

$\Rightarrow T\left(\frac{15}{4}\right)$ değeri, minimum maliyeti verir.

$\Rightarrow x = \frac{15}{4} = 3.75$ Km olmalıdır.

b) A-B arası 3 km olursa toplam maliyet,

$T(x) = 5000 * \sqrt{25+x^2} + 3000 * (3-x)$ olur.

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 3$ olmalıdır.

$\Rightarrow T(x)$'in tanım kümesi $[0,3]$ olur.

$\Rightarrow T'(x) = \frac{5000x}{\sqrt{25+x^2}} - 3000$ (a şıkkı ile aynı)

$\Rightarrow$ tekil nokta yoktur.

$\Rightarrow \pm \frac{15}{4} \notin [0,3]$

$\Rightarrow$ kritik nokta yok!

$\Rightarrow$ sınır noktalarında hesap yapılırsa:

$\Rightarrow T(0) = 34000$ TL

$T(3) \cong 29155$ TL

$\Rightarrow T(3)$ değeri minimum maliyettir.

($\Rightarrow$ D'den B'ye direkt döşenir)

## BELİRSİZ ŞEKİLLER

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu, $x=a$ için:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0*\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$$

şekillerinden biri oluyorsa, "$f(x)$ fonksiyonu, $x=a$ için belirsiz şekildedir" denir. Bu durumda $x=a$'da $f(x)$ fonksiyonunun gerçek değeri, $x\to a$ için fonksiyonun limitine eşit olur.

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad (\text{bulunmuştu})$$

$$\Rightarrow x=0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}$$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu, $x=0$ için, $\frac{0}{0}$ tipinde, belirsiz şekildedir.

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun $x=0$'da gerçek değeri 1 dir

($\Rightarrow$ Belirsiz şekillerin limitini bulmaya çalışacağız!)

* $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ tipindeki belirsiz şekillerin limiti, bazı durumlarda sadeleştirmeler yoluyla bulunabilmektedir. Örneğin,

$$\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x}=k,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=0$$

gibi.

ÖRNEK: (Limitleri sadeleştirmeler yoluyla bulunamayan bazı belirsiz şekiller)

* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\cot(x^2)}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

* $\lim\limits_{x \to 0+} x * \ln \dfrac{1}{x}$ $(0 * \infty)$

* $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)-} \left(\tan x - \dfrac{1}{\pi - 2x}\right)$ $(\infty - \infty)$

* $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$ $(0^0)$

* $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)-} (\tan x)^{\cos x}$ $(\infty^0)$

* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ $(1^\infty)$

## L'HOSPITAL KURALI

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Eğer,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{veya} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

oluyorsa, bu limitler,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $a$, bir reel sayı olabileceği gibi, $\infty$ veya $-\infty$ da olabilir.

Bu kurala, L'Hospital kuralı denir ve $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz şekillerin limitinin bulunmasında kullanılır.

($\Rightarrow$ L'Hospital kuralında, türevlerin bölümü bulunuyor. Bölümün türevi değil! Karıştırma!)

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{\cos x} = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 3}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \frac{1}{2}}$$

**NOT:**

L'Hospital kuralı üstüste uygulanabilir.

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2}$$

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad (\alpha, \beta : \text{sabit})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \dfrac{\cos \alpha x}{\sin \alpha x}}{\beta \dfrac{\cos \beta x}{\sin \beta x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\sin \beta x}{\sin \alpha x} \frac{\cos \alpha x}{\cos \beta x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\tan \beta x}{\tan \alpha x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta(1+\tan^2 \beta x)}{\alpha(1+\tan^2 \alpha x)} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)} = 1}$$

<u>ÖRNEK:</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x^3} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}+2x}{e^x+3x^2} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}+2}{e^x+6x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8e^{2x}}{e^x+6} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{16e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} 16e^x = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}+x^2}{e^x+x^3} = \infty}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0}$$

* Diğer belirsiz şekiller $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ şekline getirilerek L'Hospital kuralı uygulanır.

## $0 * \infty$ BELİRSİZLİĞİ

$\lim_{x\to a} \left(f(x) * g(x)\right)$ limiti, $0*\infty$ tipinde belirsiz şeklinde olsun.

$$\Rightarrow f(x) * g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

şeklinde yazılabileceğinden, $0*\infty$ belirsiz şekli, $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz şekillerinden birine dönüştürülmüş olur. Bundan sonra L'Hospital kuralı uygulanır.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a}\left(f(x)*g(x)\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}}$$

<u>ÖRNEK:</u> $\lim_{x\to 0}(\sin x \ln x) \quad (0*\infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(\sin x \ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0} -\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(\sin x \ln x)=0}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to\alpha} (\alpha^2 - x^2)\tan\frac{\pi x}{2\alpha} \qquad (0 * \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\alpha} (\alpha^2 - x^2)\tan\frac{\pi x}{2\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha^2 - x^2}{\cot\frac{\pi x}{2\alpha}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{-2x}{-\frac{\pi}{2\alpha}\csc^2\frac{\pi x}{2\alpha}} = \lim_{x\to\alpha} \frac{-2x\sin^2\frac{\pi x}{2\alpha}}{-\frac{\pi}{2\alpha}}$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \frac{4\alpha x \sin^2\frac{\pi x}{2\alpha}}{\pi} = \frac{4\alpha^2}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\alpha} (\alpha^2 - x^2)\tan\frac{\pi x}{2\alpha} = \frac{4\alpha^2}{\pi}}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x\to 0+} x^a \ln x \qquad (0 * \infty) \qquad (a > 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} x^a \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-a}} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^a}{-a} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0+} x^a \ln x = 0}$$

## $\infty - \infty$ BELİRSİZ ŞEKLİ

$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x))$ limiti, $\infty - \infty$ tipinde belirsiz şeklinde olsun.

$\Rightarrow$ $f(x) - g(x) = \dfrac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$ şeklinde yazılabileceğinden, $\infty - \infty$ belirsiz şekli $\frac{0}{0}$ şekline dönüştürülür.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} \dfrac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}}$$

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x - \sec x) \quad (\infty - \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x - \sec x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x - 1}{\cos x} \right) \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x - \sec x) = 0}$$

ÖRNEK: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)$ $(\infty-\infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x}\right)\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{x^2\cos x+2x\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x\cos x+2\sin x}\right)\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x+2\cos x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)=\frac{1}{3}}$$

ÖRNEK: $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ $(\infty-\infty)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{\cos x+(\cos x-x\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=0}$$

ÖRNEK: $\lim_{x\to\infty}(\operatorname{argsinh} x - \ln x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln x\right) \quad (\infty-\infty)$$

(Türev almadan bulunur)

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=\ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}(\operatorname{argsinh} x - \ln x) = \ln 2}$$

## $1^\infty$, $0^0$, $\infty^0$ BELİRSİZ ŞEKİLLERİ

$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$ limitini gözönüne alalım.

$x=a$ için:

1) $f(a)=1,\ g(a)=\infty \Rightarrow 1^\infty$

2) $f(a)=0,\ g(a)=0 \Rightarrow 0^0$

3) $f(a)=\infty,\ g(a)=0 \Rightarrow \infty^0$

belirsiz şekilleri bulunur.

$\Rightarrow \quad y = (f(x))^{g(x)}$ olsun. İki tarafın ln'i alınırsa:

$$\Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x) \text{ olur.}$$

$\Rightarrow$ $g(x) \ln f(x)$ çarpımı, yukarıdaki üç durum için de, $0 * \infty$ belirsiz şeklindedir.

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \ln y = b \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = e^b$$

olarak bulunur.

ÖRNEK:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (1^\infty)$$

$$\Rightarrow y = (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \ln(\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(\cos x + \sin x) \quad (\infty * 0)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x + \sin x)}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = 1 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} (\cos x + \sin x)^{1/x} = e}$$

<u>ÖRNEK:</u> $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{\sin x} \quad (0^0)$

$$\Rightarrow y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \sin x \ln x \quad (0 * \infty)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x\cos x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} -\frac{2\sin x \cos x}{\cos x - x\sin x}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = 1}$$

ÖRNEK: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(3+2e^{\tan x}\right)^{\pi-2x}$ $(\infty^0)$

$$\Rightarrow y=\left(3+2e^{\tan x}\right)^{\pi-2x} \Rightarrow \ln y=(\pi-2x)\ln\left(3+2e^{\tan x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\ln\left(3+2e^{\tan x}\right) \quad (0*\infty)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(3+2e^{\tan x}\right)}{\frac{1}{\pi-2x}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2\sec^2 x\, e^{\tan x}}{3+2e^{\tan x}}}{\frac{2}{(\pi-2x)^2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-2x)^2 e^{\tan x}}{\cos^2 x\left(3+2e^{\tan x}\right)}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x}}{3+2e^{\tan x}}}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \quad \underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\pi-2x)^2}{\cos^2 x}}_{\left(\frac{0}{0}\right)}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x\, e^{\tan x}}{2\sec^2 x\, e^{\tan x}}}_{\frac{1}{2}} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-4(\pi-2x)}{-2\cos x\sin x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{4(\pi - 2x)}{\sin 2x} \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{2} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-8}{2\cos 2x} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln y = 2 \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y = e^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(3 + 2e^{\tan x}\right)^{\pi - 2x} = e^2}$$

**ÖRNEK:**

$$\lim_{x \to 0+} x^x \quad (0^0)$$

$$\Rightarrow y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} \ln y = \lim_{x \to 0+} x \ln x \quad (0 * \infty)$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0+} -x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0+} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0+} x^x = 1}$$

ÖRNEK:

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\tan x)^{\cos x} \qquad (\infty^0)$$

$$\Rightarrow \quad y = (\tan x)^{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \cos x \ln(\tan x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \ln y = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x \ln(\tan x) \qquad (0 * \infty)$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\ln(\tan x)}{\sec x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\frac{1}{\tan x} \sec^2 x}{\sec x \tan x} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{\sec x}{\tan^2 x}\right)$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \ln y = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} y = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\tan x)^{\cos x} = 1}$$

ÖRNEK: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \sin\frac{3}{x}\right)^{x}$ $\quad (1^{\infty})$

$$\Rightarrow \quad y = \left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^{x} \Rightarrow \ln y = x \ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right) \quad (\infty * 0)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\sin\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\sin\frac{3}{x}}\left(\cos\frac{3}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3\cos\frac{3}{x}}{1+\sin\frac{3}{x}} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln y = 3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^{3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1+\sin\frac{3}{x}\right)^{x} = e^{3}}$$