BÖLÜM 1. MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ

1.1. Dinamiğe Giriş

Statikte hareketsiz cisimlerin incelenmesine karşın dinamikte hareket eden cisimlerin incelenmesi ana amaç olup hareketsiz cisimler özel durum olarak karşımıza çıkar. Statik ile ilgili çalışmalar yunan filozoflarından başladığı halde dinamik üzerinde ilk önemli buluş Galileo tarafında (1564-1642) tarafından yapılmıştır.

Galileo'nun hareketli düzgün cisimler üzerindeki deneyleri Newton'un (1642-1729) hareketin temel kanunlarını kurmağa yöneltmiştir.

Dinamik 2 kısma ayrılır

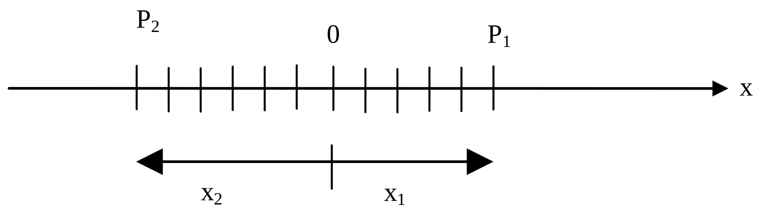
1-Kinematik : Hareketin geometrisini inceler

2-Kinetik : Cisme etkiyen kuvvetler ile cismin kütlesi ve hareketi arasındaki bağıntıları kurar

Kinematik yerdeğiştirme, hız, ivme ve zaman arasındaki bağıntıları inceler. Kinetik belirli bir hareketi doğuran kuvvetleri veya belirli kuvvetlerin doğuracağı hareketi araştırır. İlk dört bölümde *maddesel noktaların dinamiği* incelenecektir. Burada cisimlerin çok küçük olması gerekmez. Belki bir kamyon bile ele alınabilir. Ancak, maddesel nokta kabulü ile kütle merkezi etrafındaki dönme ya yoktur yada ihmal edilir. (ötelenme hareketi yaptığı düşünülür). Cisimlerin kütle merkezi etrafındaki dönme hareketini hesaba katan *rijit cisimlerin dinamiği* konusudur.

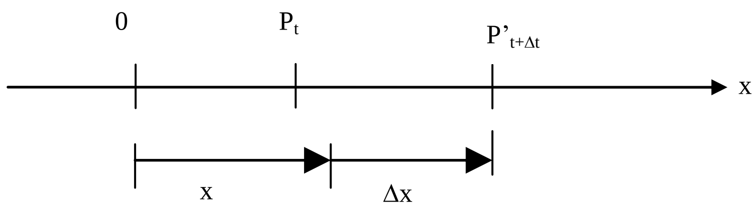
1.2. Maddesel Noktaların Doğrusal Hareketi ; Yer, Hız ve İvme

Bir doğrunun üzerinde hareket eden bir maddesel noktanın doğrusal hareket yaptığı söylenir.



Şekil 1.1.

x_1 işareti ile beraber P_1 noktasının yer koordinatını gösterir. x_2 ise işareti ile P_2 noktasının yer koordinatını gösterir (x_1= +5 m, x_2=-2 m). Her t zamanı için x koordinatı biliniyorsa hareket belirlidir denir. x-t ilişkisi ya $x=6t^2-t^3$ gibi bir fonksiyon olarak veya grafiklerle verilir. x ve t genellikle m (metre) ve sn (saniye) ile gösterilir.



Şekil 1.2.

Δt sürede, P noktasından yandaki bir P' noktasına gidiş sırasındaki hız,

Ortalama hız = $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (m/sn)

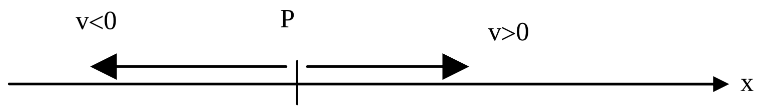
Δx yer değiştirmesi pozitif yada negatif olabilir. Δx ve Δt çok küçültülerek ani hız elde edilir.

Ani hız = v = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (m/sn)

Tanım gereğince bu x'in t'ye göre türevi olup

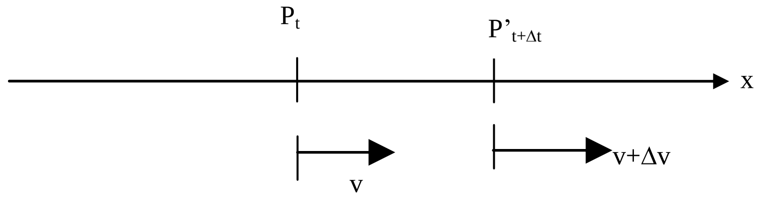
v = $\frac{dx}{dt}$ (m/sn) (vektörün şiddeti)

Gerçekte hızın doğrultusu da olduğundan vektörel bir büyüklüktür. Bu bölümün 1.7. kısmında hızın vektörel özelliğini açıklayacağız.



Şekil 1.3.

v yönüne göre (+) veya (-) olabilir.



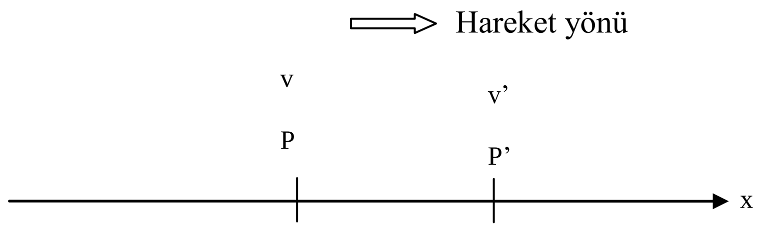
Şekil 1.4.

Ortalama ivme = $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ (m/sn^2)

Δv ve Δt küçüldükçe

Ani ivme = a = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (m/sn^2)

a = $\frac{dv}{dt}$ ya da a = $\frac{d^2x}{dt^2}$



(v'-v)>0 ise a>0

(v'-v)< 0 ise a<0

Şekil 1.5.

$a = \frac{dv}{dt}$ $\qquad$ $dt = \frac{dv}{a}$

$v = \frac{dx}{dt}$ $\qquad$ $dt = \frac{dx}{v}$

$\frac{dv}{a} = \frac{dx}{v}$ $\qquad$ $a = v\frac{dv}{dx}$

x, v, a'nın t'ye bağlı değişimleri grafik olarak eğrilerle verilir. Cebirden bilinen y(x), y'(x), y''(x) eğrilerinin benzerleridir.

ÖRNEK

Bir maddesel noktanın hareketi $x=t^3-9t^2+15t+5$ bağıntısı ile tanımlanmıştır. Denklemde x metre t saniye olarak alınacaktır.

a) Hızın sıfır olduğu zamanı

b) ivmenin sıfır olduğu zamanı ve bu andaki yeri ve gidilen toplam yolu bulunuz

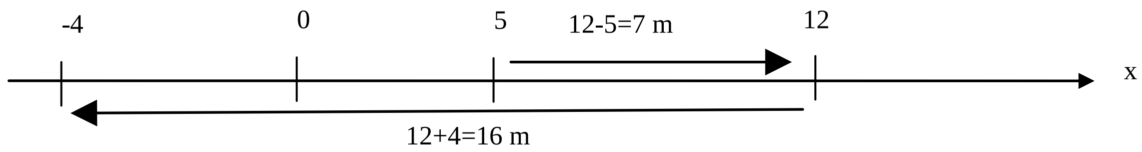
a) $\frac{dx}{dt} = v = 3t^2 - 18t + 15 = 0$ $\qquad$ t=1sn t=5sn

b) $\frac{dv}{dt} = a = 6t - 18 = 0$ t=3sn

konum : x(3)=3^3-9$(3)^2$+15(3)+5= -4m

alınan yol : t=1 sn hız sıfır olmuş yön değiştirmiş

x(0)=+5m x(1)=12m x(3)= -4m



Şekil 1.6.

Alınan toplam yol: 7+16=23 m

1.3. Maddesel Noktanın Hareketinin Belirtilmesi

Hareket koşulları maddesel noktanın sahip olduğu ivmenin tipi ile belirli olur. Örneğin serbest düşmedeki bir cisim aşağı doğru ve 9,81 m/sn^2 değerinde sabit bir ivmeye sahiptir. Bir yaya bağlanmış bir kütle çekildiği zaman yayın denge konumundan o anki uzaklığı ile orantılı bir ivmesi bulunur. Genel olarak maddesel noktanın ivmesi x, v ve t değişkenlerinden bir veya birkaçının fonksiyonu olarak ifade edilir. Çok kullanılan 3 hareket sınıfını inceleyeceğiz.

1) a=a(t)

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \qquad dv = a(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \qquad v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Buradan v'yi t cinsinden elde ederiz. Daha sonra:

$\frac{dx}{dt} = v(t)$ $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$ $x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$ x=x(t) bulunur

2) a=a(x)

Daha önce $a = v\frac{dv}{dx}$ bulunmuştu.

$a(x)dx = vdv$

$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = \int_{v_0}^{v} vdv$ $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a(x)dx$

Buradan v=v(x) bulunur daha sonra

$v = \frac{dx}{dt}$ $dt = \frac{dx}{v}$

$\int_{0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$ $t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$ $t = t(x)$bulunur

3) a=a(v) 2 yol vardır.

i) $a = \frac{dv}{dt}$ $a(v) = \frac{dv}{dt}$ $dt = \frac{dv}{a(v)}$

t ile v bağlantısı elde edilir. Daha sonra

$v = \frac{dx}{dt}$ ile x bulunur

ii) $a = v\frac{dv}{dx}$ idi $a(v) = v\frac{dv}{dx}$ $dx = \frac{v\,dv}{a(v)}$

x-v bağıntısı bulunur

$v = \frac{dx}{dt}$ $t - x$ bağıntısı bulunur.

ÖRNEK

Bir maddesel noktanın ivmesi a=-5 m/sn^2 ile verilmiştir. t=0 iken v=20 m/sn ve x=0 olduğuna göre t=6 sn iken hızı, yeri ve gidilen toplam yolu bulunuz.

$a = \frac{dv}{dt} = -5$ ise $v = -5t + c_1$

$20 = -5 * 0 + c_1 \qquad c_1 = 20 \qquad v = -5t + 20$

$v = \frac{dx}{dt} = -5t + 20$ ise $x = \frac{-5t^2}{2} + 20t + c_2$

$0 = 0 + 0 + c_2 \qquad c_2 = 0 \qquad x = \frac{-5t^2}{2} + 20t$

t=6 iken v=-5(6)+20=-10 m/sn ve x=30m

Toplam yol v=0 0=20-5t t=4sn

t=4 x=40m $(\Delta x)_{0-4}$=40-0=40m

$(\Delta x)_{4-6}$=30-40=-10m yol: 40+10=50m

ÖRNEK

Salınım yapan bir maddesel noktanın ivmesi a=-kx ile verilmiştir. k'nın değerini öyle belirtiniz ki x=0 iken v=15 cm/sn ve v=0 iken x=3 cm olsun

$a = v\frac{dv}{dx} \Longrightarrow -kx = v\frac{dv}{dx}$

v dv=-kx dx $\Longrightarrow \frac{1}{2}v^2 = -k\frac{x^2}{2} + c$

x=0 v=15 $\Longrightarrow$ c=225/2 $\qquad \frac{1}{2}v^2 = -k\frac{x^2}{2} + \frac{225}{2}$

v=0 x=3 $\Longrightarrow$ $0 = -k\frac{3^2}{2} + \frac{225}{2}$ $\Longrightarrow$ $k = 25\ sn^{-2}$

ÖRNEK

Bir maddesel noktanın ivmesi a=-20v ile a(m/sn^2) ve v(m/sn) olarak verilmiştir. t=0 iken x=0 ve v=200m/sn ise

a) Durunca kadar maddesel noktanın konumu
b) Duruncaya kadar geçen zamanı
c) Hızın ilk hızın %1 ine inmesine kadar geçen zamanı bulunuz.

a)

$a = v\frac{dv}{dx}$ $\Longrightarrow$ $-20v = v\frac{dv}{dx}$

dv=-20 dx v=-20x+c_1

v=200m/sn x=0 $\Longrightarrow$ 200=-20x+c_1 $c_1 = 200$ v=-20x+200

durunca v=0 x=10m

b)

$a = \frac{dv}{dt} = -20v$ $\Longrightarrow$ $t = -\int \frac{dv}{20v} + c_2$ $\Longrightarrow$ $t = -\frac{1}{20}\ln v + c_2$

$t = 0 \quad v = 200$ $\Longrightarrow$ $0 = -\frac{1}{20}\ln 200 + c_2$ $\Longrightarrow$ $c_2 = \frac{1}{20}\ln 200$

$$t = -\frac{1}{20}\ln v + \frac{1}{20}\ln 200 = \frac{1}{20}\ln\frac{200}{v} = \frac{1}{20}\ln\frac{v_0}{v}$$

Durunca v=0 $t = \frac{1}{20}\ln\frac{200}{0}$ $\Longrightarrow$ $t = \infty$

c)

v=0.01 v_0 $\Longrightarrow$ $t = \frac{1}{20}\ln\frac{v_0}{0.01v_0} = \frac{1}{20}\ln 100 = 0{,}23\ sn$

1.4. Düzgün Doğrusal Hareket

Çok görülen bir durum olup her t için a=0 durumudur.

$$\frac{dx}{dt} = v: \text{sabit} \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v dt$$

$$x - x_0 = vt \Longrightarrow x = x_0 + v\,t$$

1.5. Düzgün Değişen Doğrusal Hareket

$$\frac{dv}{dt} = a: \text{Sabit} \Longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt \Longrightarrow v = v_0 + a\,t$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow v_0 + at = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

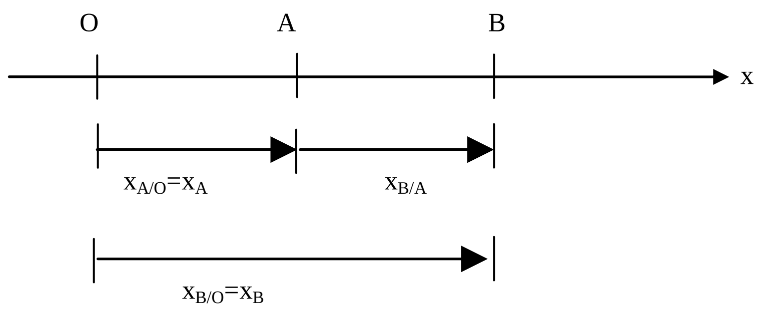
Ayrıca $a = v\frac{dv}{dx} \Longrightarrow vdv = adx \Longrightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a(x - x_0) \Longrightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Serbest düşmede de aynı formüller kullanılır. Ancak serbest düşmede hareket düşey doğrultuda olduğu için ivme, aşağıya doğru, $a=g=9{,}81\ m/sn^2$ dir.

1.6. Çok Sayıda Maddesel Noktanın Hareketi

Aynı doğru üzerinde 2 yada daha çok sayıda maddesel nokta hareket ederse hepsinin hareketi ayrı ayrı incelenebilir. Aynı t ve x başlangıç noktalarını seçmek problemin çözümünü kolaylaştırır.



Şekil 1.7.

B noktasının A noktasına göre bağıl yer koordinatı diye $x_{B/A}=x_B-x_A$ değerine denir. (-) iken Bnoktası A noktasına göre solda, (+) iken B noktası A noktasına göre sağdadır. $x_{B/A}$ nın değişme hızı B noktasının A noktasına göre bağıl hızıdır.

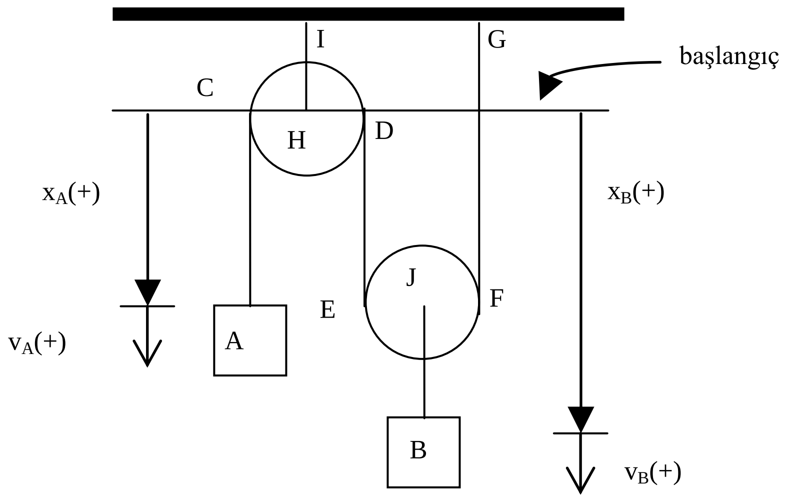
$\frac{dx_{B/A}}{dt}=\frac{dx_B}{dt}-\frac{dx_A}{dt}$ $v_{B/A}=v_B-v_A$ yada $v_B=v_A+v_{B/A}$

$v_{B/A}$ nın değişme hızı da B noktasının A noktasına göre bağıl ivmesidir.

$\frac{dv_{B/A}}{dt}=\frac{dv_B}{dt}-\frac{dv_A}{dt}$ $a_{B/A}=a_B-a_A$ yada $a_B=a_A+a_{B/A}$

Bağımlı Hareketler :

Bazı sistemlerde iki maddesel noktanın yerleri birbirine göre bağımlı olur.

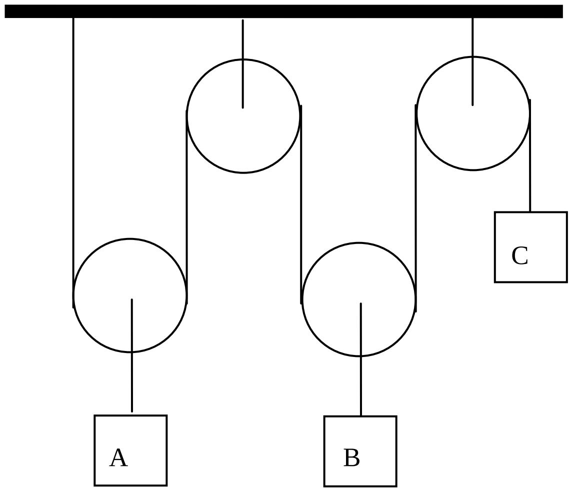


Şekil 1.8.

İpin boyu, HI, JB, CD, EF:sabit

$x_A+2x_B=$sabit $\Longrightarrow$ $v_A+2v_B=0$ $\Longrightarrow$ $v_A=-2v_B$

Bir yer koordinatı serbest seçilebileceğinden bir serbestlik derecesi var denir.



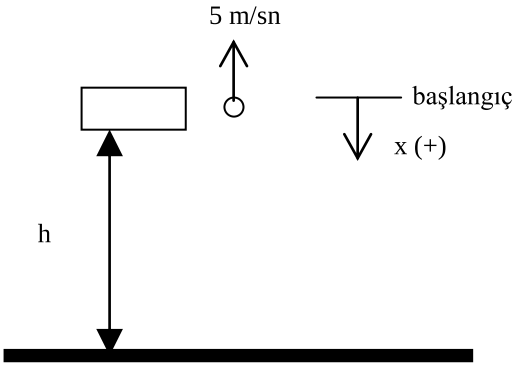
2 serbestlik derecesi vardır.

Şekil 1.9.

ÖRNEK:

5 m/sn hızla yukarı doğru hareket eden bir asansörden bir taş bırakılıyor ve taş 3 sn sonra asansör boşluğunun tabanına vuruyor.

a) Taş bırakıldığında asansör ne kadar yüksekteymiş
b) Taş yere hangi hızla vurur



$a=g=9{,}81\ m/sn^2$

Şekil 1.10.

a) $x=x_0+v_0\ t+(1/2)\ a\ t^2$ $h=0-5t+(1/2)\ 9.81\ t^2$ $h=-5*3+(1/2)\ 9{,}81*3^2=29{,}14m$

b) $v=v_0+a\ t$ $v=-5+9{,}81t=-5+9{,}81(3)=24{,}43m/sn$ (aşağıya doğru)

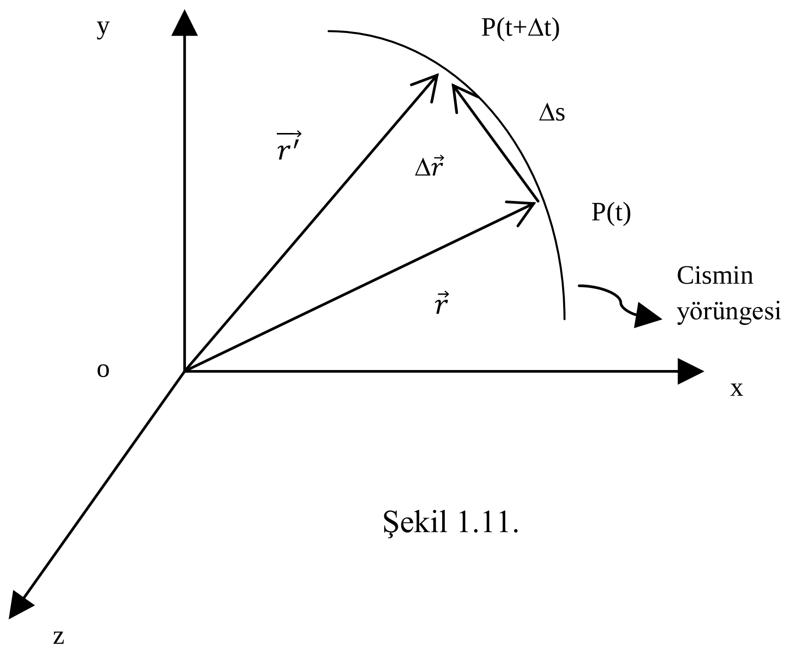
Kontrol : $v^2=v^2_0+2\ a\ (x-x_0)$ $24{,}43^2=(-5)^2+2\ (9{,}81)(29{,}14)$ $597=597$

Grafik Bağıntılar:

1. İvme-zaman grafiğinin altında kalan alan hız değişimine eşittir.
2. Hız-zaman grafiğinin altında kalan alan konum değişimine eşittir.
3. Konum-zaman grafiğindeki eğim o anki hıza eşittir.
4. Hız-zaman grafiğindeki eğim o anki ivmeye eşittir.

1.7. Maddesel Noktaların Eğrisel Hareketi: Yer Vektörü, Hız, İvme

Bir maddesel noktanın doğrusal olmayan hareketine eğrisel hareket denir.

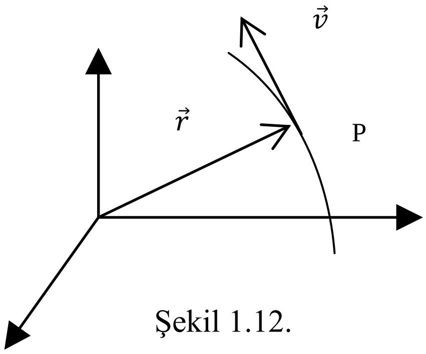


Şekil 1.11.

$\vec{r}$ vektörü x, y, z'ye göre noktanın yer vektörü denir.

ortalama hız $= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ (P'den geçer, $\Delta\vec{r}$ ile aynı doğrultuda ve yöndedir)

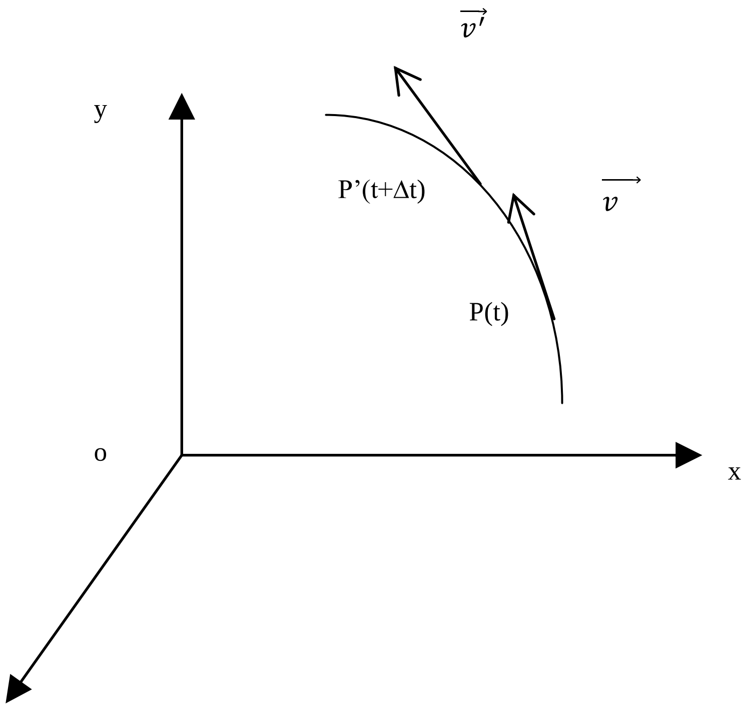
Ani hız $= \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (eğriye teğet)



Şekil 1.12.

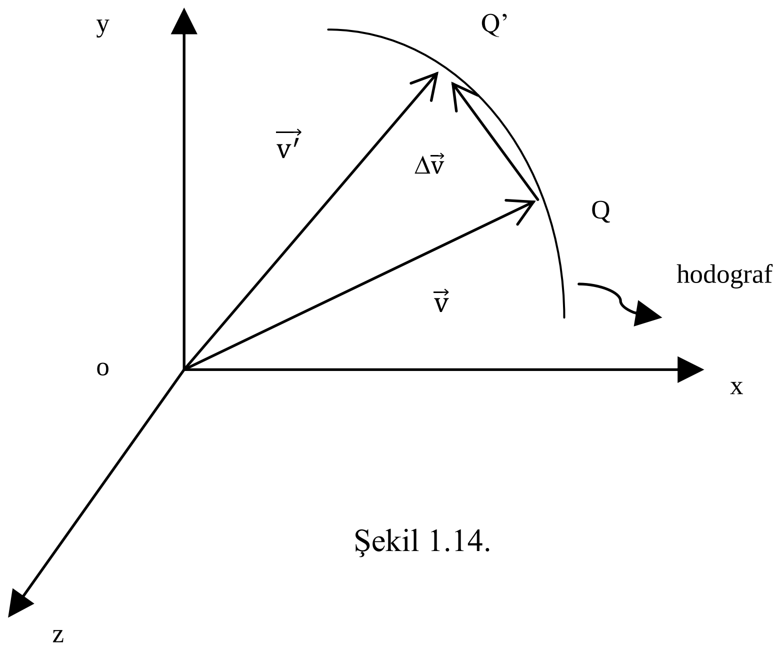
$|\vec{v}|$ yörünge hızı denir

$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ Δt azaldıkça Δs Δr'ye yaklaşır dolayısı ile anlık hızın şiddeti $\frac{ds}{dt}$ ile de bulunur.



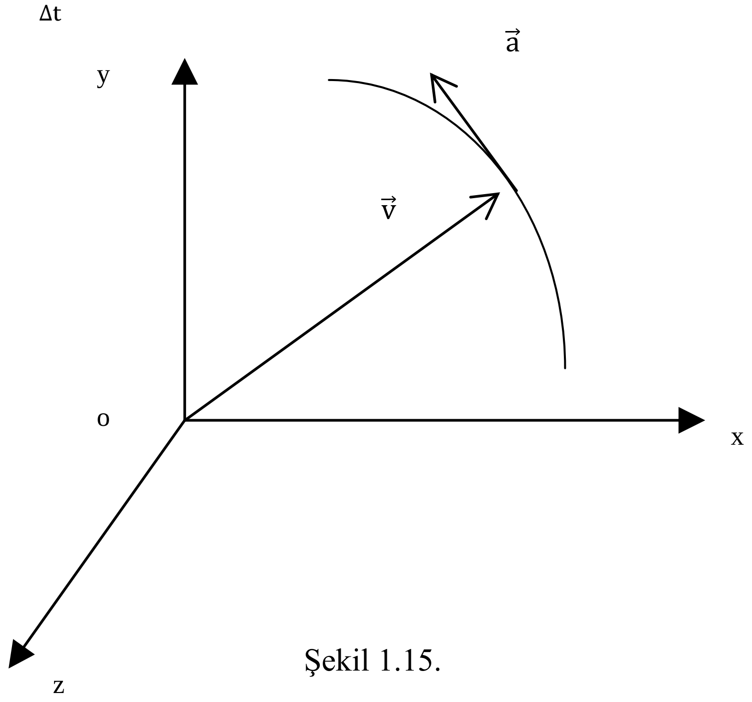
Şekil 1.13.

$\overrightarrow{v}$ ve $\overrightarrow{v'}$ hızlarını aynı başlangıç noktasına alalım uçlarını birleştiren eğriye hodograf denir.



Şekil 1.14.

ortalama ivme $= \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$



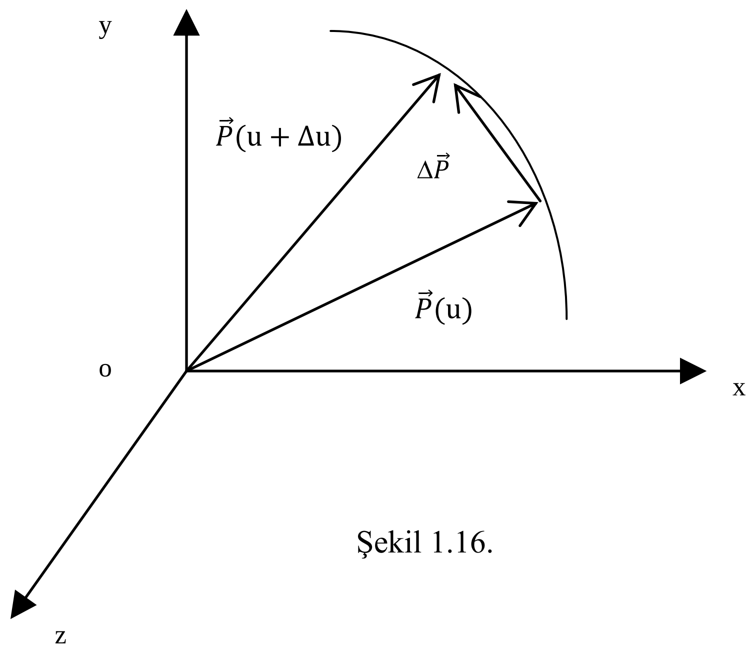
Şekil 1.15.

Ani ivme $= \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Yani $\vec{a}$ ivmesi $\vec{v}$ hızlarının uçlarının çizdiği hodograf denen eğriye teğettir. Fakat maddesel noktaların yörüngesine teğet değildir.

1.8. Vektör Fonksiyonlarının Türevleri

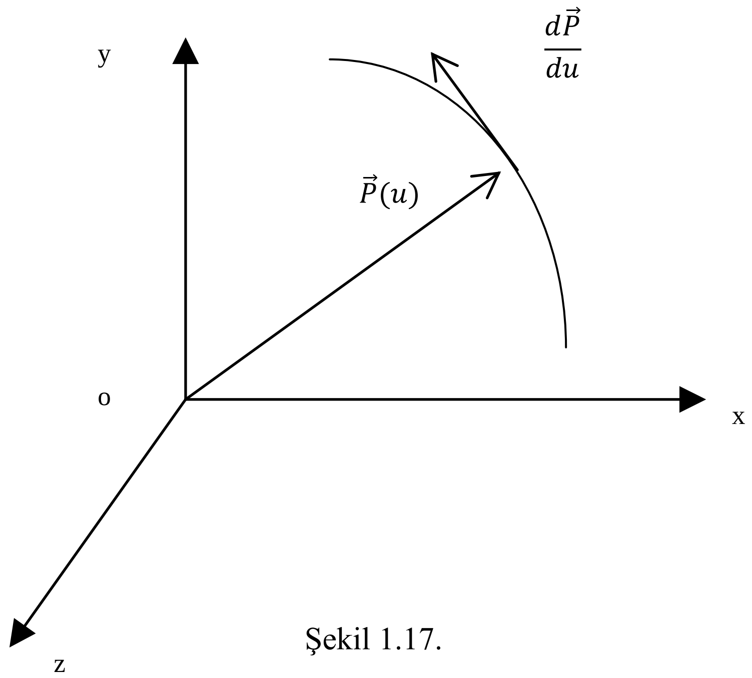
Bir vektör fonksiyon, $\vec{P}$, u gibi bir skalerin fonksiyonu olsun



Şekil 1.16.

$\Delta\vec{P} = \vec{P}(u + \Delta u) - \vec{P}(u)$

$\Delta\vec{P}$ yi (Δu) ya bölüp (Δu) yu sıfıra yaklaştırırsak



Şekil 1.17.

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{P}(u+\Delta u)-\vec{P}(u)}{\Delta u} = \frac{d\vec{P}}{du}$$

Denklemdeki $\frac{d\vec{P}}{du}$ türevi $\vec{P}(u)$ nun ucunun çizdiği eğriye teğettir. Toplam ve çarpımla ilgili türev ifadelerini bulalım.

$$\frac{d(\vec{P}+\vec{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta(\vec{P}+\vec{Q})}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} + \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta u}\right)$$

Toplamın limiti limitlerin toplamına eşittir.

$$\frac{d(\vec{P}+\vec{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u}\right) + \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta u}\right) = \frac{d\vec{P}}{du} + \frac{d\vec{Q}}{du}$$

Toplam ve çarpımın bilinen özelliklerinden

$$\frac{d(f\vec{P})}{du} = \frac{df}{du}\vec{P} + f\frac{d\vec{P}}{du} \quad (f = f(u))$$

Skaler çarpım $\frac{d(\vec{P}\circ\vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du}\circ\vec{Q} + \vec{P}\circ\frac{d\vec{Q}}{du}$

Vektörel çarpım $\frac{d(\vec{P}\times\vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du}\times\vec{Q} + \vec{P}\times\frac{d\vec{Q}}{du}$

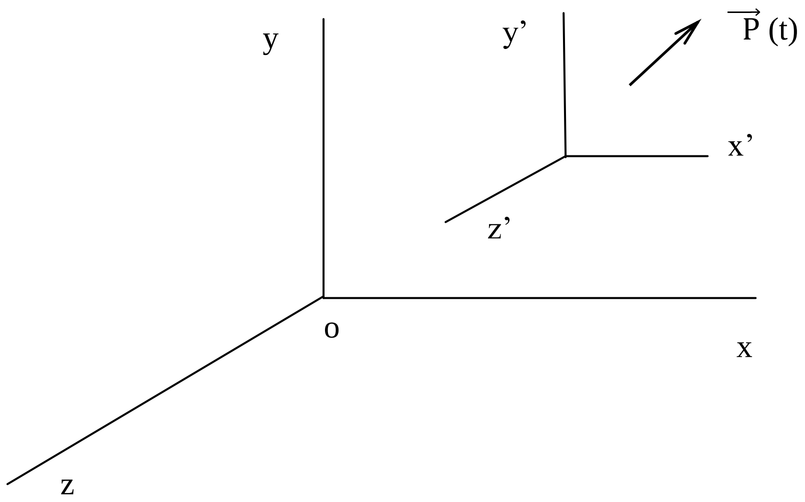
Bu ifadeleri kullanarak dik Kartezyen koordinatlarında $\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}$ gibi bir vektör tanımlayalım

$$\frac{d\vec{P}}{du} = \frac{dP_x}{du}\vec{i} + \frac{dP_y}{du}\vec{j} + \frac{dP_z}{du}\vec{k}$$

Yani bir $\vec{P}(u)$ vektör fonksiyonunun $\frac{d\vec{P}}{du}$ türevinin dik skaler bileşenleri $\vec{P}$ nin karşıt skaler bileşenlerinin türevlerini alarak elde edilir.

Bir $\vec{P}$ vektörü zamana bağlı ise $\vec{P}=\vec{P}(t)$ nin değişim hızı :

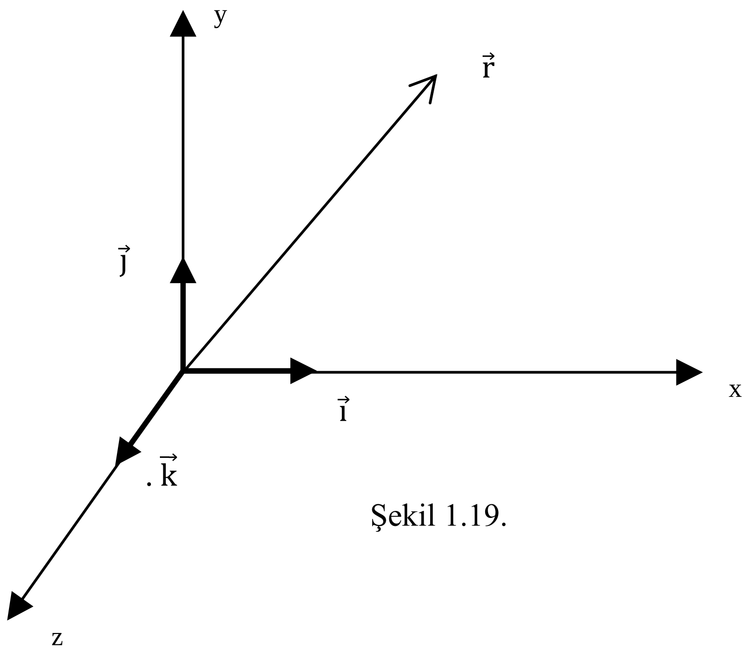
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\vec{i} + \frac{dP_y}{dt}\vec{j} + \frac{dP_z}{dt}\vec{k}$$



Şekil 1.18.

Ötelenme yapan bir dik koordinat takımında (x' , y' , z') türevler aynıdır. Bir vektörün sabit bir takıma göre <u>değişim hızı</u> ile ötelenme yapan bir takıma göre <u>değişim hızı</u> aynıdır.

1.9. Hız ve İvmenin Dik Bileşenleri



Şekil 1.19.

Bir maddesel noktanın x, y, z dik koordinatları zamana bağlı verilmişse hız ve ivmede kolaylıkla zamana bağlı olarak bulunabilir.

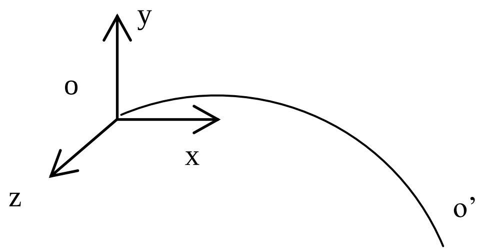
$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (x=x(t) , y=y(t) , z=z(t))

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ ($\dot{x}$ x'in zamana göre türevi)

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ ya da $v_x=\dot{x}$ $v_y=\dot{y}$ $v_z=\dot{z}$

$a_x=\ddot{x}$ $a_y=\ddot{y}$ $a_z=\ddot{z}$

Örneğin bir merminin hareket probleminde :



Şekil 1.20.

$a_x=\ddot{x} = 0$ $a_y=\ddot{y} = -g$ $a_z=\ddot{z} = 0$

Silahın koordinatları (x_0, y_0, z_0) ve merminin ilk hızı $(v_x)_0$, $(v_y)_0$, $(v_z)_0$ ise :

$v_x = (v_x)_0$, $v_y= (v_y)_0 - g*t$, $v_z=(v_z)_0$

$x= x_0 + (v_x)_0 * t$

$y= y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g*t^2$

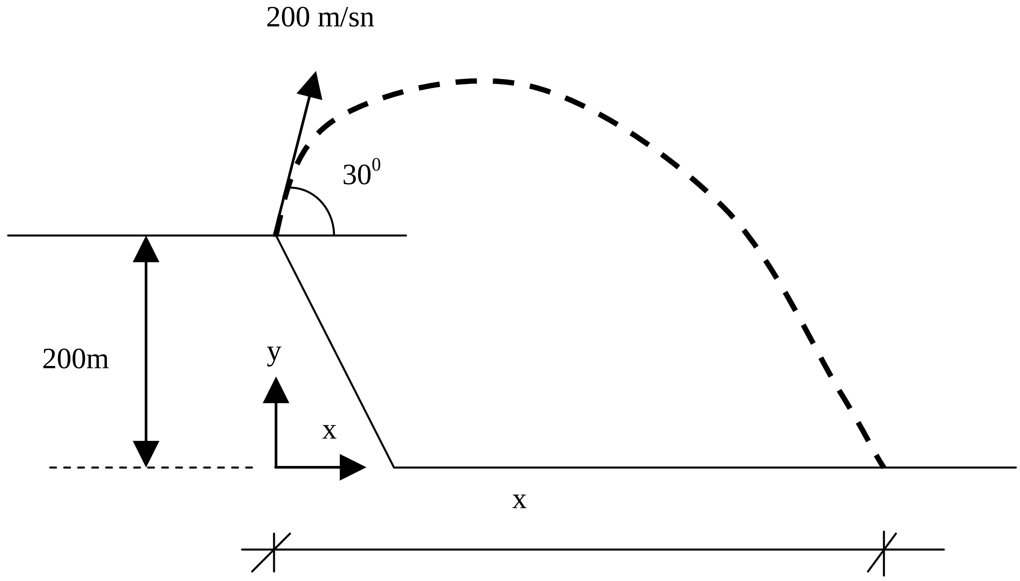
$z= z_0 + (v_z)_0 * t$

Eğer hareket x-y düzleminde ise :

$x_0= y_0= z_0=0$ ve $(v_z)_0=0$ olduğundan

$x=(v_x)_0 t$, $y=(v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ dir.

ÖRNEK

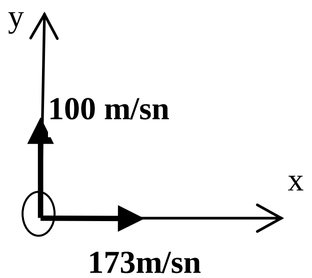


Şekil 1.22.

Bir mermi 200 m'lik bir uçurumun kenarından 30^0 lik açıyla 200 m/sn hızla atılmıştır.

a) x = ?
b) Maksimum yükseklik = ?

NOT: CİSİM HAVADA KALDIĞI SÜRECE HAREKET EDER , $g=9,81\ m/sn^2$



Şekil 1.23.

$V = V_0 + at$

$0 = 100 - 9,81*t$

$t = 10,19$ sn (max. Yüksekliğe çıkış süresi)

$y = y_0 + (v_y)_0 * t + \frac{1}{2} a * t^2$

$y = 200 + 100*10,19 - \frac{1}{2}*9,81*(10,19)^2 = 709,68$ metre

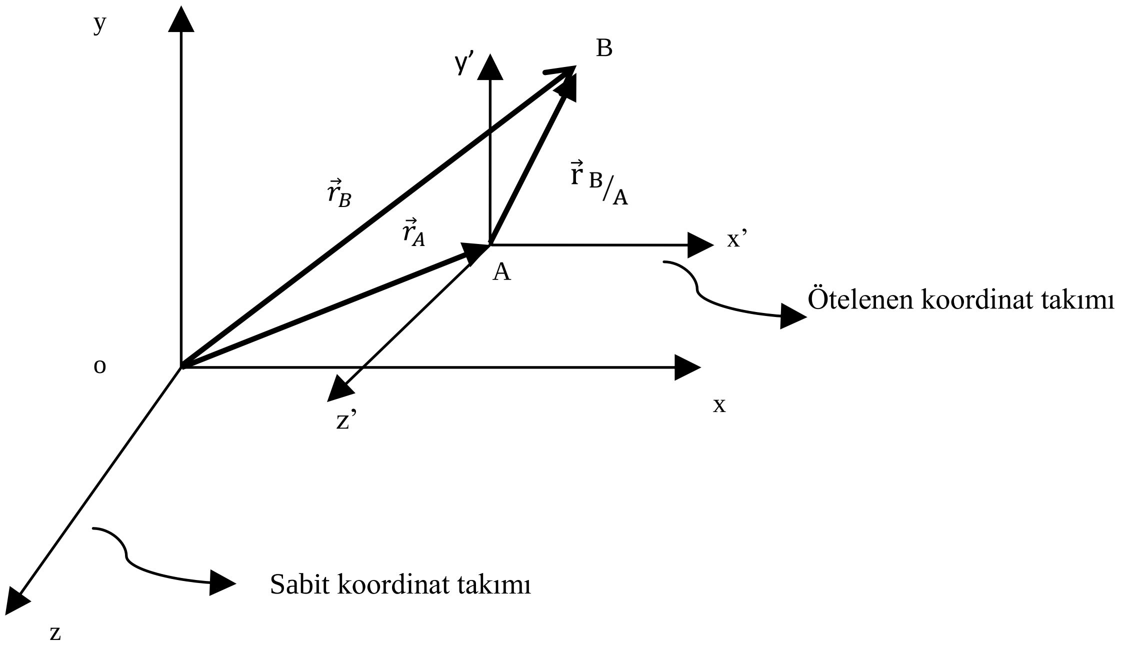
Düşüş süresi : $h = \frac{1}{2}*g*t^2$ $709,68 = \frac{1}{2}*9,81*t^2$ $t = 12,03$ sn

Toplam uçuş: 10,19+12,03=22,22 saniye

x=22,22*173= 3843,81 metre

1.10. Ötelenme Yapan Bir Takıma Göre Bağıl Hareket

Herhangi bir hareket bir takım yerine 2 yada daha fazla takım ile gözlenebilir. Bu takımlar birbirine göre ötelenme hareketi yapıyorlarsa bunlardan birini sabit takım diye adlandırabiliriz.



Şekil 1.21.

A ve B gibi 2 nokta alalım A'da x', y', z' gibi bir ötelenme yapan takım olsun

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ B'nin A'ya göre bağıl yer vektörü denir.

Türevi alınırsa :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ B'nin A'ya göre bağıl hızı. Türevi alınırsa :

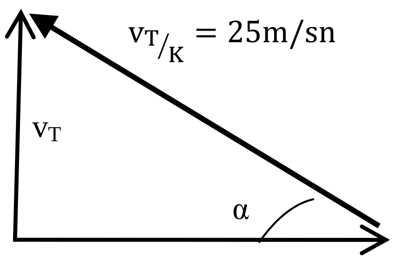
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$ B'nin A'ya göre bağıl ivmesi

ÖRNEK

Hareketli bir kamyondan kamyona göre 25 m/sn 'lik yatay bir bağıl hızla önünden geçtiği anda bir direğe doğru bir taş atılıyor. Kamyonun hızı 50 km/sa ise :

a) Taşın fırlatılması gereken doğrultuyu
b) Taşın yere göre yatay hızını hesaplayınız

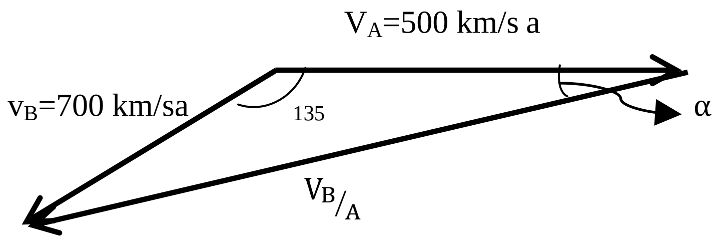


Şekil 1.24.

a) $\cos\alpha = \frac{13,89}{25} = 0,556 \Longrightarrow \alpha = 56,20^0$
b) $v_T = 25 * \sin 56,20^0 = 20,8$ m/sn Kontrol: $25 * \cos 56,20^0 = 13,889$ m/sn

ÖRNEK

A ve B gibi iki uçaktan her biri sabit 1000 m yükseklikte uçmaktadır. B uçağı güney-batıya doğru sabit 700 km/sa hız ile ve A ise doğuya doğru sabit 500km/sa hız ile uçmaktadır. 2 dakika içinde A'ya göre B'nin konumundaki değişikliği bulunuz.



Şekil 1.25.

Cosinüs Teoremi: $(V_{B/A})^2 = 700^2+500^2-2*500*700*\cos135=1111$ km/sa

$\frac{\sin\alpha}{700} = \frac{\sin135}{1111} \Longrightarrow \alpha = 26{,}46^0$

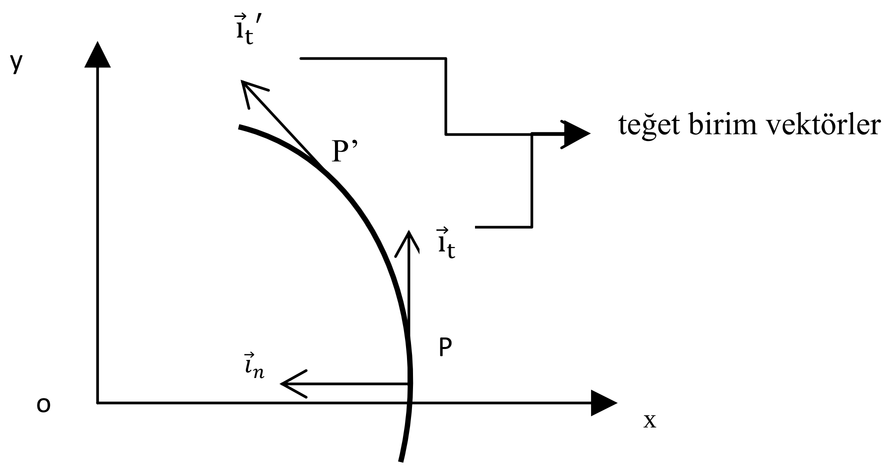
t= 2 dakika sonra :

$S_{B/A} = (V_{B/A}) * t = 1111*\frac{2}{60}=37{,}0$ km

1.11. Teğetsel ve Normal Bileşenler

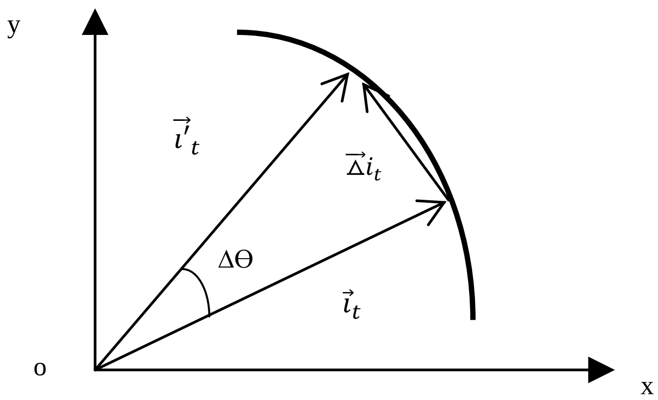
Bir maddesel noktanın hızı yörüngesine teğettir. İvmesi için öyle bir koşul yoktur. İvmede bazı durumlarda yörüngeye teğet ve normal bileşenlerine ayrılır.

<u>Maddesel Noktanın Düzlemsel Hareketi</u>



Şekil 1.26

x-y düzlemi hareket düzlemi olsun



Şekil 1.27

Her iki teğet birim vektörünü ($\vec{\imath}_t$ ve $\vec{\imath}'_t$) aynı başlangıç noktasına taşıyarak

$\Delta\vec{\imath}_t = \vec{\imath}'_t - \vec{\imath}_t$ Vektörünü elde edelim

$\vec{\imath}'_t$ ve $\vec{\imath}_t$ birim vektörler oldukları için şiddetleri 1 birimdir ve 1 birim yarıçaplı daire oluştururlar. İki vektör arasındaki açı $\Delta\theta$ ise $\Delta\vec{\imath}_t$' nin değeri 2sin(ΔΘ/2) olur.

$\Delta\vec{\imath}_t$ vektörü $\Delta\theta$ sıfıra yaklaştıkça çembere teğet olur.

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\vec{\imath}_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} = 1$$

Demek ki limitte yörüngeye normal $\vec{\imath}_t$ 'nin döndüğü yönde bir birim vektör elde edilir. Buna $\vec{\imath}_n$ diyelim.

$$\vec{\imath}_n = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\vec{\imath}_t}{\Delta\theta} \quad \to \vec{\imath}_n = \frac{d\vec{\imath}_t}{d\theta} \qquad \text{(Türevin tanımından)}$$

Maddesel noktanın hızının şiddeti v olup $\vec{v} = v\vec{\imath}_t$ dir.İvmeyi bulmak için hızın türevini alırız

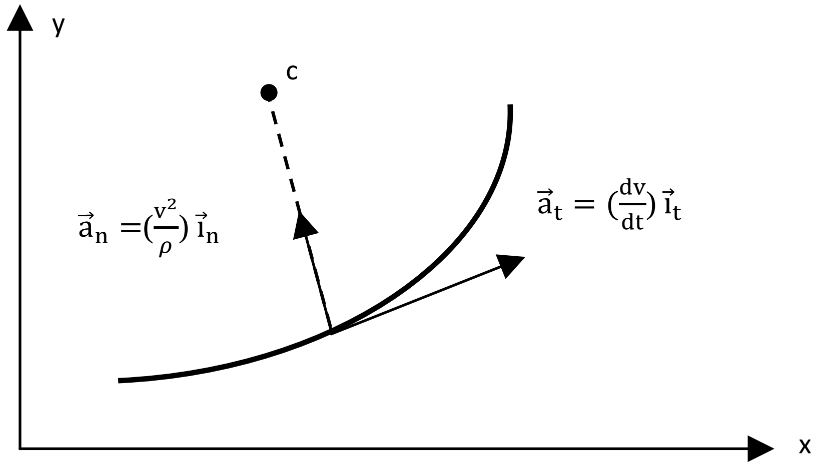
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{\imath}_t + v\frac{d\vec{\imath}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\imath}_t}{dt} = \overbrace{\left(\frac{d\vec{\imath}_t}{d\theta}\right)}^{\vec{\imath}_n} * \overbrace{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)}^{1/\rho} * \overbrace{\left(\frac{ds}{dt}\right)}^{v}$$

ρ: Yörüngenin eğrilik yarıçapı

$$\vec{a} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{\imath}_t + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)\vec{\imath}_n \qquad \vec{a} = a_t * \vec{\imath}_t + a_n * \vec{\imath}_n$$

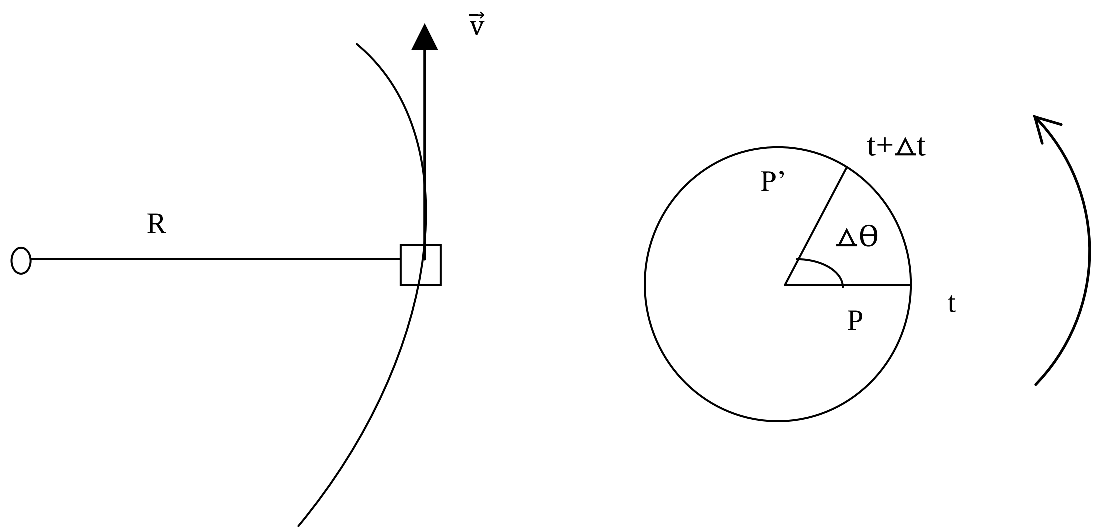
a_t hızda artış varsa pozitif aksi halde negatiftir. a_n her zaman eğrilik merkezine doğrudur.



Şekil 1.28.

İvmenin teğet bileşeni hızdaki değişim ile ilgilidir. Normal bileşen eğrilikle ilgilidir. Dönüm noktasında veya düz yolda yeni eğriliğin sıfır olduğu (Eğrilik Yarıçapı =∞) noktalarda normal bileşen sıfır olur. İvmenin normal bileşeninin yörüngeye bağlı olması maddesel noktanın izlediği yörünge hakkında bilgi verir.

Dairesel Harekette Açısal Hız ve Çizgisel Hız



Şekil 1.29.

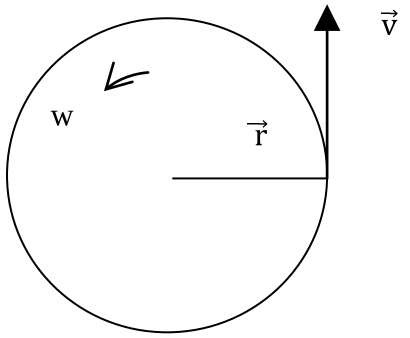
Açısal hız = $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ = w $\Longrightarrow$ [w] = $\frac{\text{açı birimi}}{\text{zaman birimi}}$ = $\text{rad}/_{\text{sn}}$

w: Dönüş hızı

v: teğet hızı

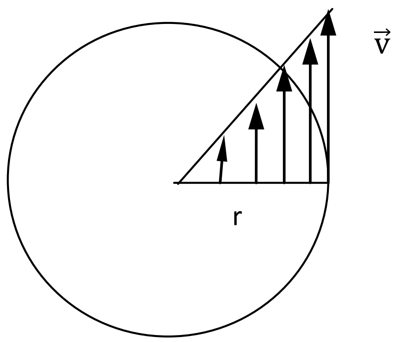
w vektörel bir büyüklük olup sağ el kuralı ile bulunur.

anlık açısal hız = $\frac{d\theta}{dt}$



Şekil 1.30.

$|\vec{v}| = |\vec{w}| * |\vec{r}| \Longrightarrow$ v= w*r

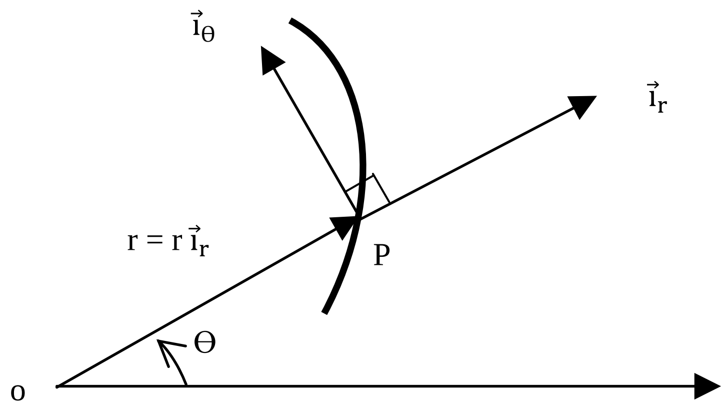


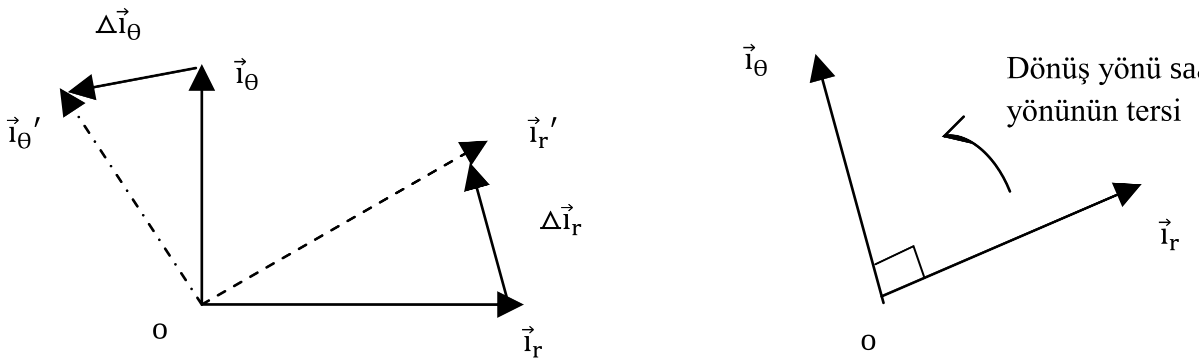
Şekil 1.31

v (yol/zaman) idi. Aynı zamanda en dıştaki çok yol alır. (çevresi en geniş) içteki az yol alır. Dolayısıyla merkeze yaklaştıkça çizgisel hız azalır merkezde sıfır olur.

1.12. Kutupsal Koordinatlarda Bileşenler

Düzlemsel hareketli bazı problemlerde P maddesel noktasının yeri r ve Θ kutupsal koordinatları yardımıyla tanımlanır. O zaman maddesel noktanın hızını ve ivmesini de radyal ve radyale dik (enine) bileşenlere ayırmak uygun olur .





Şekil 1.32.

Daha önce $\vec{i}_t$ birim vektörünün türevini ($\vec{i}_n$) bulmakta kullandığımız yöntemi kullanırsak:

$$\frac{d\vec{i}_r}{d\theta} = \vec{i}_\theta \qquad \frac{d\vec{i}_\theta}{d\theta} = -\,\vec{i}_r$$

$$\vec{r} = r\,\vec{i}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{i}_r + r\frac{d\,\vec{i}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{i}_r + r * \underbrace{\frac{d\,\vec{i}_r}{d\theta}}_{\vec{i}_\theta} * \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}$$

$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{i}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{i}_\theta$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{i}_r + \dot{r}\frac{d\vec{i}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + r(\ddot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{\theta}\frac{d\vec{i}_\theta}{dt})$

$\vec{a} = \ddot{r}\ \vec{i}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{i}_\theta - r\left(\dot{\theta}\right)^2\vec{i}_r$

$\vec{a} = (\ \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2\ )\ \vec{i}_r + (\ r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\ )\ \vec{i}_\theta$ yada

$v_r = \dot{r}$ $v_\theta = r\dot{\theta}$

$a_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2$ $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

O merkezli bir daire için : r: Sabit, $\dot{r}$: 0, $\ddot{r}$: 0 olur

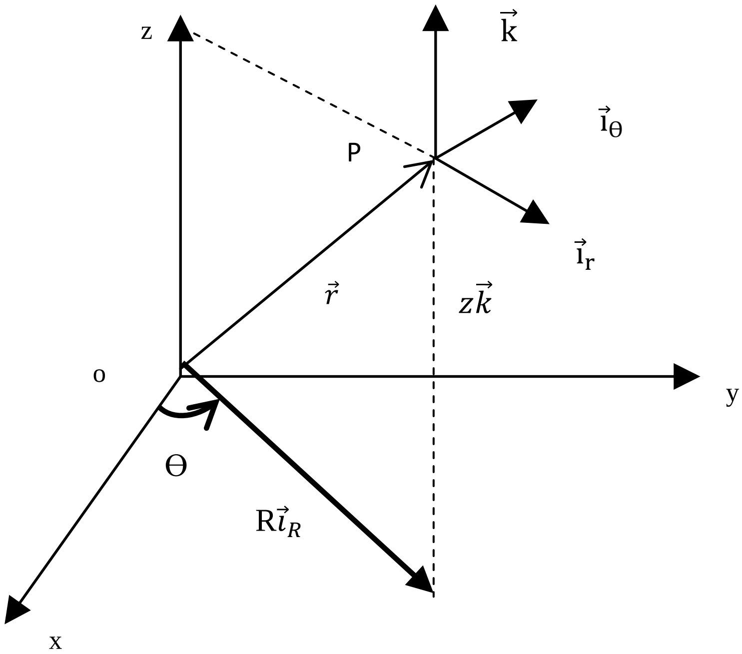
$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{i}_\theta$

$a = -\,r\left(\dot{\theta}\right)^2\vec{i}_r + r\,\ddot{\theta}\,\vec{i}_\theta$

1.13. Maddesel Noktanın Uzay Hareketine Genişletme (silindirik koordinatlar)

Bir maddesel noktanın uzaydaki bir yeri bazen R , Θ , z silindirik koordinatları yardımıyla tanımlanır. Bu durumda birim vektörler $\vec{i}_r$, $\vec{i}_\theta$, $\vec{k}$ diye seçilir ve :

$\vec{r} = R\,\vec{i}_r + z\vec{k}$



Şekil 1.33.

$v = \dot{R}\vec{i}_r + R\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{z}\vec{k}$

$\vec{a} = \ddot{R}\,\vec{i}_r + \dot{R}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{R}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{i}_\theta - R(\dot{\theta})^2\vec{i}_r + \ddot{z}\vec{k}$

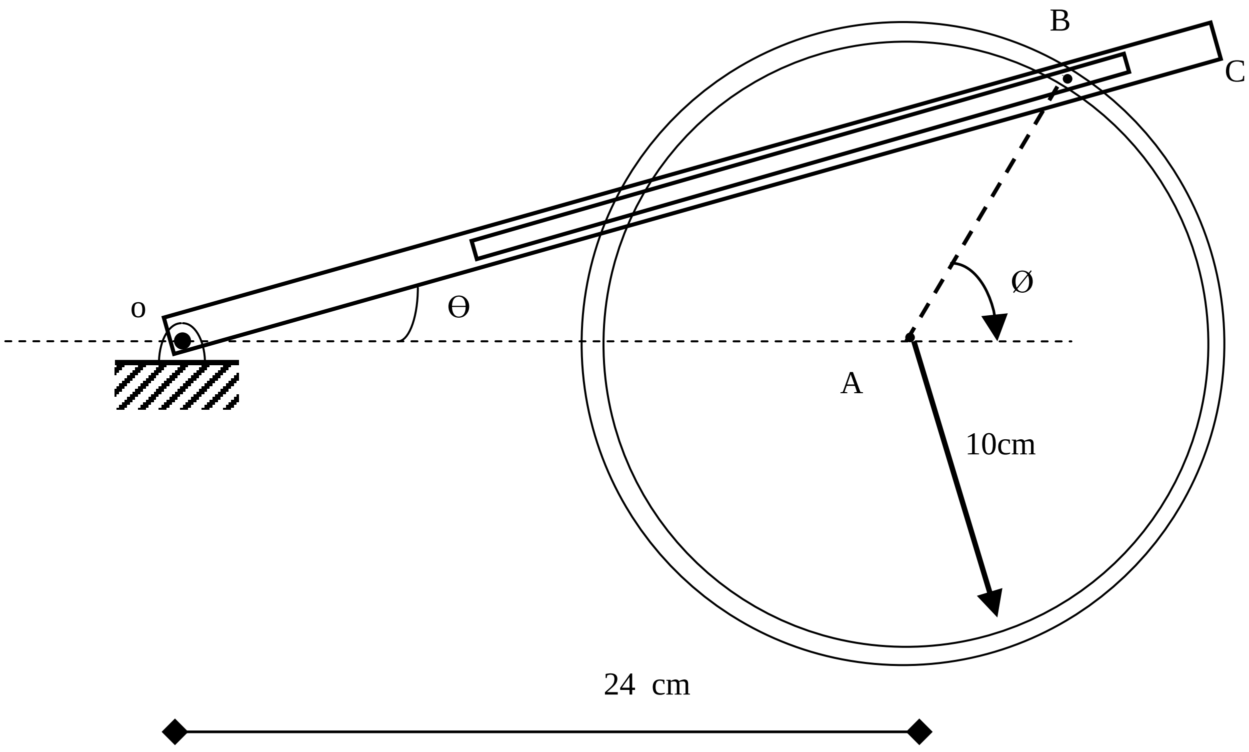
$a = (\ddot{R} - R(\dot{\theta})^2)\,\vec{i}_r + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\,\vec{i}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$

<u>ÖRNEK</u>

B pimi dairesel yarık ile dönen OC çubuğunun içerisinde serbestçe kayabilmektedir. B pimi dairesel yarık içerisinde saat ibresinin tersine sabit v_o hızı ile kayarsa

a) $\emptyset = 0^0$ b) $\emptyset = 90^0$

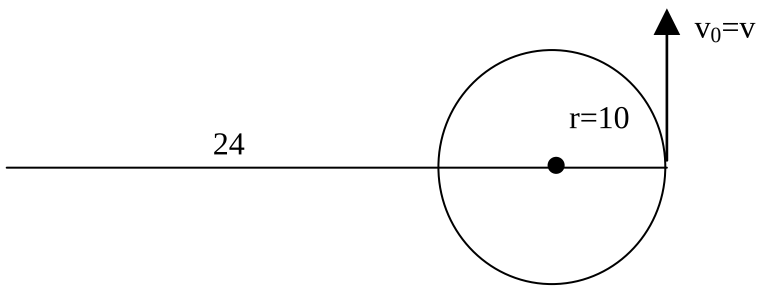
İçin OC çubuğunun $\frac{d\theta}{dt}$ dönme hızını ve B piminin hızının v_r radyal bileşenini bulunuz.



Şekil 1.34.

Kutupsal koordinatlarda :

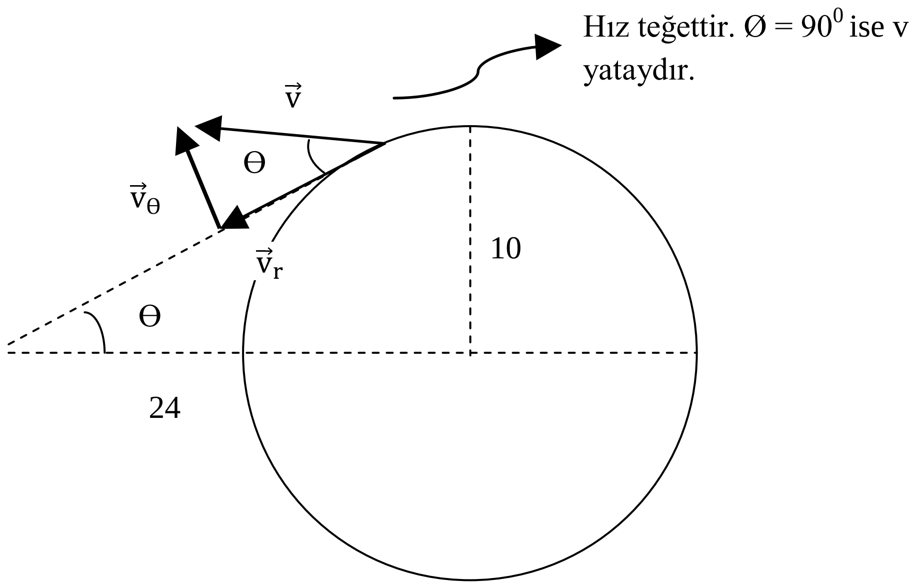
$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{\imath}_r + r\,\dot{\theta}\vec{\imath}_\theta$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\vec{\imath}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{\imath}_\theta$



Şekil 1.35.

a) $Ø = 0^0$ $v_\theta = v_0$ (m/sn) $V_r = 0$

$v_\Theta = r\frac{d\Theta}{dt} = v_0 \Longrightarrow \frac{d\Theta}{dt} = \frac{v_0}{r} = \frac{v_0}{0,34}$



Şekil 1.36.

OB= $\sqrt{(0,24^2 + 0,1^2)} = 0,26$

$v_r = -v_0 * \cos\Theta = -\frac{0,24}{0,26} * v_0$

$\vec{v}_r = -\frac{12}{13} v_0 \vec{i}_r$

$v_\Theta = r\frac{d\Theta}{dt} = v_0 \sin\Theta \Longrightarrow 0,26\ \frac{d\Theta}{dt} = v_\Theta * \frac{0,1}{0,26}$ $\qquad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{5}{3,38} v_0$

ÖRNEK

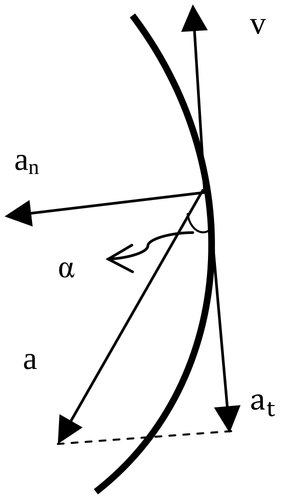
Bir tren 1000 m yarıçaplı bir kurbda 144 km/sa hızla hareket etmektedir. Ani olarak fren yapılıyor trenin hızı düzgün olarak azalıyor ve 6 saniye sonra hız 90 km/sa iniyor. Frene basıldıktan hemen sonra bir vagonun ivmesini bulunuz.

144 km/sa = 40 m/sn

90 km/sa = 25 m/sn

$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25-40}{6} = -2{,}5$ m/sn^2

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{40^2}{1000} = 1{,}6$ m/sn^2



Şekil 1.37.

$\tan\alpha = \frac{1{,}6}{2{,}5} = 0{,}64$ α = 32,6

$a = \sqrt{2{,}5^2 + 1{,}6^2} = 2{,}97$ m/sn^2

<u>ÖRNEK</u>

Bir şoför 120 m yarıçaplı bir kurb üzerinde dururken harekete başlıyor ve hızı düzgün $a_t = 1$ m/sn^2 ivmesi ile artıyor. Toplam ivmesi 2 m/sn^2 olana kadar otomobilin alacağı yolu hesaplayınız

$a = 2$ m/sn^2 $a_t = 1$ m/sn^2 $a^2 = a_t^2 + a_n^2$ $2^2 = 1^2 + a_n^2$

$a_n = 1{,}73$ m/sn^2

$a_n = \frac{v^2}{120}$ $1{,}73 = \frac{V^2}{120}$ v = 14,4 m/sn

$v^2 = v_0^2 + 2*a*\Delta x$ $14{,}4^2 = 0 + 2*1*\Delta x$ $\Delta x = 103{,}9$ metre

ÖRNEK

Yarıçapı 200 metre olan bir kurb üzerinde 70 km/sa hızla yol alan bir otomobilin hızı 150 m içerisinde düzgün olarak 95 km/saat'e kadar artıyor. Otomobil kurbta 100m yol aldıktan sonra toplam ivmesi ne olur ?

70 km/sa = 19,44 m/sn

95 km/sa = 26,39 m/sn

$v^2 = v_0^2 + 2*a*\Delta x \quad \Longrightarrow \quad 26{,}39^2 = 19{,}44^2 + 2*a_t*150 \qquad a_t = 1{,}062\ m/sn^2$

S = 100m $\quad v^2 = v_0^2 + 2*a*\Delta x$

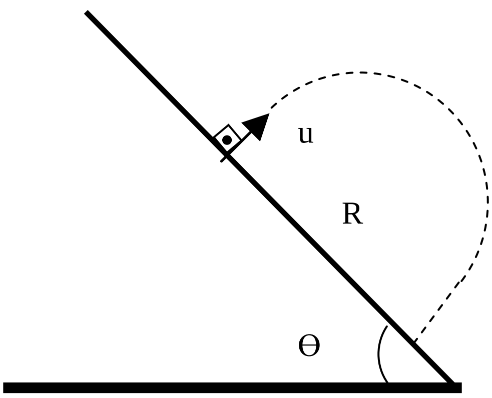
$v^2 = 19{,}44^2 + 2 * 1{,}062 * 100 = 590{,}3$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{590{,}3}{200} = 2{,}95\ m/sn^2$

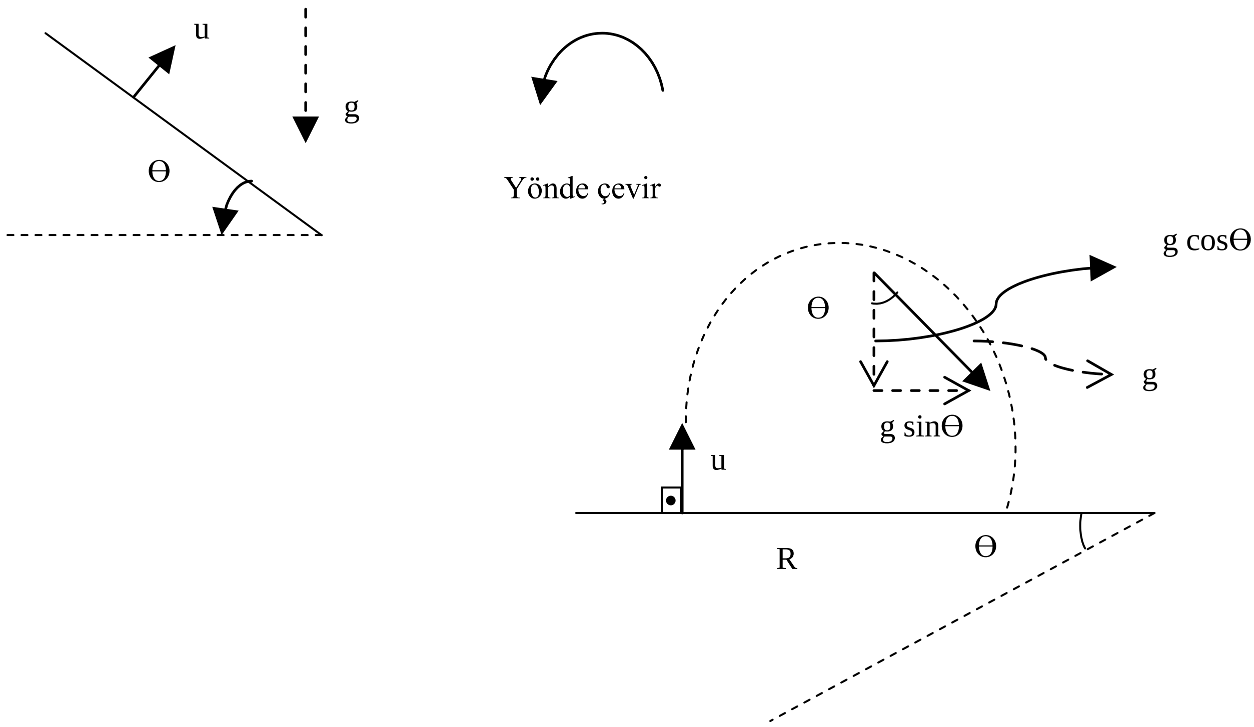
$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{1{,}062^2 + 2{,}95^2} = 3{,}14\ m/sn^2$

ÖRNEK

u hızı ile eğik düzleme dik fırlatılan bir taş R uzaklığına düşüyor. R mesafesinin R= $\frac{2U^2}{g}$*tanϴ*secϴ olduğunu gösteriniz.



Şekil 1.38.



Şekil 1.39.

Çıkış süresi ⟹ $v = v_0 + a*t$ ⟹ $0 = u - g*\cos\Theta*t$ ⟹ $t = \frac{u}{g*\cos\theta}$

Uçuş süresi ⟹ $2*t = \frac{2*u}{g*\cos\theta}$

Yatayda bu süre boyunca g*sinΘ ivmesi ile yol alacak

$x = x_0 + v_0*t + \frac{1}{2}*a*t^2$ ⟹ $R = 0 + 0*t + \frac{1}{2}g*\sin\Theta * \frac{4*u^2}{g^2*\cos^2\theta}$

$R = \frac{2*u^2}{g} * \tan\Theta * \sec\Theta$