İMZ-205
Dinamik

İÇİNDEKİLER

GENEL BİLGİLER

* Eğitim öğretim süresi 15 haftadır.
* Dersler blok halinde yapılacaktır.
* Lütfen derse geç gelmeyin.
* Başarı Notu=0,4*Ara sınav notu + 0,6* Dönem sonu sınav notu
* Derse gelen sevgi değer arkadaşlardan sessizce dersi dinlemeleri, etraftaki diğer sevgi değer arkadaşlarla sohbet etmemeleri beklenmektedir. Espiri yapılıp gülünecekse sınıfta birlik beraberliği sağlamak adına hep beraber gülünmesi tercih edilmelidir.
* Ders notları ve çözülen örneklere ek olarak kaynak kitaplardan da faydalanmanız gerekmektedir.
* Kaynak Kitaplar

    Beer and Johnston Dinamik kitabı

    Hibbeler Dinamik kitabı

    Meriam-Kraige Dinamik kitabı

    Kütüphaneden, abilerinizden veya ablalarınızdan bulabileceğiniz herhangi bir dinamik kitabı

* Sınavlardan birkaç gün önce öğrenci listesi ve sınav salonu listesi ilan edilecektir. Farklı salonda sınava girilmesi durumunda sınav notundan 10 puan düşülecektir.
* Eğer "sınav stresim var başarılı olamıyorum" diyorsanız üzülmeyin bununda çözümü var. İstediğiniz bir dinamik kitabındaki tüm problemleri çözün "AA" notunuz hazır. Ancak, kitaptan rastgele seçeceğim 4 adet problemi yanımda çözmeniz gerektiğini de aklınızda bulundurun.
* Başarılar
* UNUTMAYIN! Başarı dilemekle başarılı olunmuyor. Derslerinize günlük çalışmalı, verilen örnekleri ve ödevleri çözmeli, kaynak kitaplardan en verimli şekilde faydalanmalısınız.

Facebook: emka2003@gmail.com Tel: 0.535.325 69 15 (Lütfen mesai saatleri içinde arayınız)

Prof.Dr. H. Murat ARSLAN

Çukurova Üniversitesi

İnşaat Mühendisliği Bölümü

BÖLÜM 1. MADDESEL NOKTALARIN KİNEMATİĞİ

1.1. Dinamiğe Giriş

Statikte hareketsiz cisimlerin incelenmesine karşın dinamikte hareket eden cisimlerin incelenmesi ana amaç olup hareketsiz cisimler özel durum olarak karşımıza çıkar. Statik ile ilgili çalışmalar yunan filozoflarından başladığı halde dinamik üzerinde ilk önemli buluş Galileo tarafında (1564-1642) tarafından yapılmıştır.

Galileo'nun hareketli düzgün cisimler üzerindeki deneyleri Newton'un (1642-1729) hareketin temel kanunlarını kurmağa yöneltmiştir.

Dinamik 2 kısma ayrılır

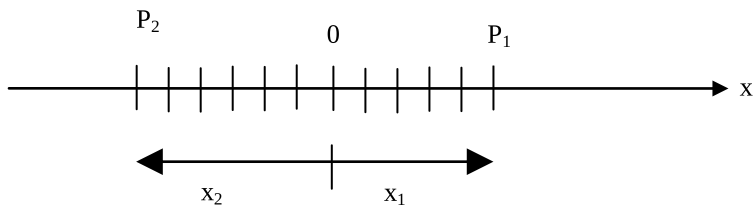
1-Kinematik : Hareketin geometrisini inceler

2-Kinetik : Cisme etkiyen kuvvetler ile cismin kütlesi ve hareketi arasındaki bağıntıları kurar

Kinematik yerdeğiştirme, hız, ivme ve zaman arasındaki bağıntıları inceler. Kinetik belirli bir hareketi doğuran kuvvetleri veya belirli kuvvetlerin doğuracağı hareketi araştırır. İlk dört bölümde *maddesel noktaların dinamiği* incelenecektir. Burada cisimlerin çok küçük olması gerekmez. Belki bir kamyon bile ele alınabilir. Ancak, maddesel nokta kabulü ile kütle merkezi etrafındaki dönme ya yoktur yada ihmal edilir. (ötelenme hareketi yaptığı düşünülür). Cisimlerin kütle merkezi etrafındaki dönme hareketini hesaba katan *rijit cisimlerin dinamiği* konusudur.

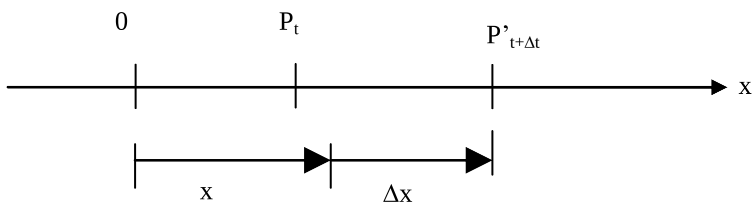
1.2. Maddesel Noktaların Doğrusal Hareketi ; Yer, Hız ve İvme

Bir doğrunun üzerinde hareket eden bir maddesel noktanın doğrusal hareket yaptığı söylenir.



Şekil 1.1.

x_1 işareti ile beraber P_1 noktasının yer koordinatını gösterir. x_2 ise işareti ile P_2 noktasının yer koordinatını gösterir (x_1= +5 m, x_2=-2 m). Her t zamanı için x koordinatı biliniyorsa hareket belirlidir denir. x-t ilişkisi ya $x=6t^2-t^3$ gibi bir fonksiyon olarak veya grafiklerle verilir. x ve t genellikle m (metre) ve sn (saniye) ile gösterilir.



Şekil 1.2.

Δt sürede, P noktasından yandaki bir P' noktasına gidiş sırasındaki hız,

Ortalama hız = $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (m/sn)

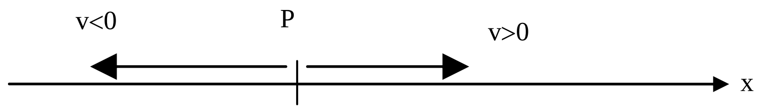
Δx yer değiştirmesi pozitif yada negatif olabilir. Δx ve Δt çok küçültülerek ani hız elde edilir.

Ani hız = v = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (m/sn)

Tanım gereğince bu x'in t'ye göre türevi olup

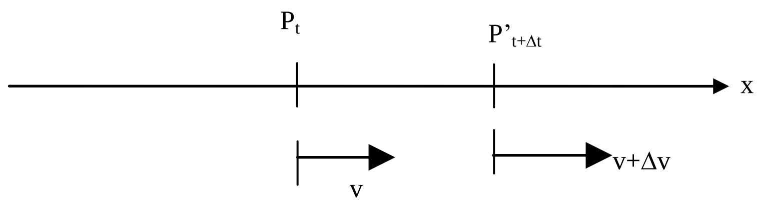
v = $\frac{dx}{dt}$ (m/sn) (vektörün şiddeti)

Gerçekte hızın doğrultusu da olduğundan vektörel bir büyüklüktür. Bu bölümün 1.7. kısmında hızın vektörel özelliğini açıklayacağız.



Şekil 1.3.

v yönüne göre (+) veya (-) olabilir.



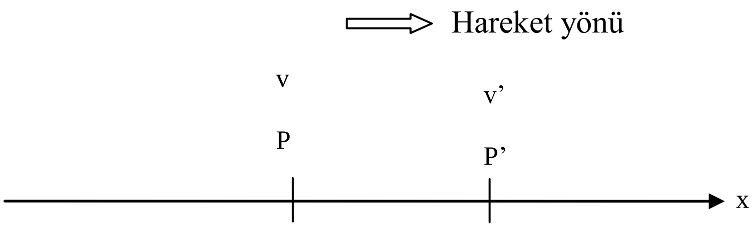
Şekil 1.4.

Ortalama ivme = $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ (m/sn^2)

Δv ve Δt küçüldükçe

Ani ivme = a = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (m/sn^2)

$a = \frac{dv}{dt}$ ya da $a = \frac{d^2x}{dt^2}$



(v’-v)>0 ise a>0

(v’-v)< 0 ise a<0

Şekil 1.5.

$a = \frac{dv}{dt}$ $\qquad dt = \frac{dv}{a}$

$v = \frac{dx}{dt}$ $\qquad dt = \frac{dx}{v}$

$\frac{dv}{a} = \frac{dx}{v}$ $\qquad a = v\frac{dv}{dx}$

x, v, a’nın t’ye bağlı değişimleri grafik olarak eğrilerle verilir. Cebirden bilinen y(x), y’(x), y’’(x) eğrilerinin benzerleridir.

<u>ÖRNEK</u>

Bir maddesel noktanın hareketi $x=t^3-9t^2+15t+5$ bağıntısı ile tanımlanmıştır. Denklemde x metre t saniye olarak alınacaktır.

a) Hızın sıfır olduğu zamanı

b) ivmenin sıfır olduğu zamanı ve bu andaki yeri ve gidilen toplam yolu bulunuz

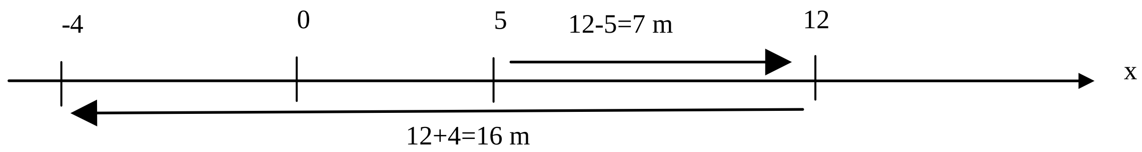
a) $\frac{dx}{dt} = v = 3t^2 - 18t + 15 = 0$ t=1sn t=5sn

b) $\frac{dv}{dt} = a = 6t - 18 = 0$ t=3sn

konum : $x(3)=3^3-9(3)^2+15(3)+5= -4m$

alınan yol : t=1 sn hız sıfır olmuş yön değiştirmiş

x(0)=+5m x(1)=12m x(3)= -4m



Şekil 1.6.

Alınan toplam yol: 7+16=23 m

1.3. Maddesel Noktanın Hareketinin Belirtilmesi

Hareket koşulları maddesel noktanın sahip olduğu ivmenin tipi ile belirli olur. Örneğin serbest düşmedeki bir cisim aşağı doğru ve 9,81 m/sn^2 değerinde sabit bir ivmeye sahiptir. Bir yaya bağlanmış bir kütle çekildiği zaman yayın denge konumundan o anki uzaklığı ile orantılı bir ivmesi bulunur. Genel olarak maddesel noktanın ivmesi x, v ve t değişkenlerinden bir veya birkaçının fonksiyonu olarak ifade edilir. Çok kullanılan 3 hareket sınıfını inceleyeceğiz.

1) a=a(t)

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \qquad dv = a(t)dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)dt \qquad v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Buradan v'yi t cinsinden elde ederiz. Daha sonra:

$\frac{dx}{dt} = v(t)$ $\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$ $x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$ x=x(t) bulunur

2) a=a(x)

Daha önce $a = v\frac{dv}{dx}$ bulunmuştu.

$a(x)dx = vdv$

$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = \int_{v_0}^{v} vdv$ $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a(x)dx$

Buradan v=v(x) bulunur daha sonra

$v = \frac{dx}{dt}$ $dt = \frac{dx}{v}$

$\int_{0}^{t} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$ $t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$ $t = t(x)$bulunur

3) a=a(v) 2 yol vardır.

i) $a = \frac{dv}{dt}$ $a(v) = \frac{dv}{dt}$ $dt = \frac{dv}{a(v)}$

t ile v bağlantısı elde edilir. Daha sonra

$v = \frac{dx}{dt}$ ile x bulunur

ii) $a = v\frac{dv}{dx}$ idi $a(v) = v\frac{dv}{dx}$ $dx = \frac{v\,dv}{a(v)}$

x-v bağıntısı bulunur

$v = \frac{dx}{dt}$ $t - x$ bağıntısı bulunur.

ÖRNEK

Bir maddesel noktanın ivmesi a=-5 m/sn^2 ile verilmiştir. t=0 iken v=20 m/sn ve x=0 olduğuna göre t=6 sn iken hızı, yeri ve gidilen toplam yolu bulunuz.

$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = -5$ ise $\mathrm{v} = -5\mathrm{t} + \mathrm{c}_1$

$20 = -5 * 0 + c_1 \qquad c_1 = 20 \qquad \mathrm{v} = -5\mathrm{t} + 20$

$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -5\mathrm{t} + 20$ ise $\mathrm{x} = \frac{-5\mathrm{t}^2}{2} + 20\mathrm{t} + \mathrm{c}_2$

$0 = 0 + 0 + \mathrm{c}_2 \qquad \mathrm{c}_2 = 0 \qquad \mathrm{x} = \frac{-5\mathrm{t}^2}{2} + 20\mathrm{t}$

t=6 iken v=-5(6)+20=-10 m/sn ve x=30m

Toplam yol v=0 0=20-5t t=4sn

t=4 x=40m $(\Delta x)_{0\text{-}4}$=40-0=40m

$(\Delta x)_{4\text{-}6}$=30-40=-10m yol: 40+10=50m

ÖRNEK

Salınım yapan bir maddesel noktanın ivmesi a=-kx ile verilmiştir. k'nın değerini öyle belirtiniz ki x=0 iken v=15 cm/sn ve v=0 iken x=3 cm olsun

$\mathrm{a} = \mathrm{v}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}} \Longrightarrow -\mathrm{kx} = \mathrm{v}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dx}}$

v dv=-kx dx $\Longrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 = -\mathrm{k}\frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{c}$

x=0 v=15 $\Longrightarrow$ c=225/2 $\frac{1}{2}\mathrm{v}^2 = -\mathrm{k}\frac{\mathrm{x}^2}{2} + \frac{225}{2}$

v=0 x=3 $\Longrightarrow$ $0 = -k\frac{3^2}{2} + \frac{225}{2}$ $\Longrightarrow$ $k = 25\ sn^{-2}$

ÖRNEK

Bir maddesel noktanın ivmesi a=-20v ile a(m/sn^2) ve v(m/sn) olarak verilmiştir. t=0 iken x=0 ve v=200m/sn ise

a) Durunca kadar maddesel noktanın konumu
b) Duruncaya kadar geçen zamanı
c) Hızın ilk hızın %1 ine inmesine kadar geçen zamanı bulunuz.

a)

$a = v\frac{dv}{dx}$ $\Longrightarrow$ $-20v = v\frac{dv}{dx}$

dv=-20 dx v=-20x+c_1

v=200m/sn x=0 $\Longrightarrow$ 200=-20x+c_1 $c_1 = 200$ v=-20x+200

durunca v=0 x=10m

b)

$a = \frac{dv}{dt} = -20v$ $\Longrightarrow$ $t = -\int\frac{dv}{20v} + c_2$ $\Longrightarrow$ $t = -\frac{1}{20}\ln v + c_2$

$t = 0 \quad v = 200$ $\Longrightarrow$ $0 = -\frac{1}{20}\ln 200 + c_2$ $\Longrightarrow$ $c_2 = \frac{1}{20}\ln 200$

$$t = -\frac{1}{20}\ln v + \frac{1}{20}\ln 200 = \frac{1}{20}\ln\frac{200}{v} = \frac{1}{20}\ln\frac{v_0}{v}$$

Durunca v=0 $t = \frac{1}{20}\ln\frac{200}{0}$ $\Longrightarrow$ $t = \infty$

c)

v=0.01 v_0 $\Longrightarrow$ $t = \frac{1}{20}\ln\frac{v_0}{0.01v_0} = \frac{1}{20}\ln 100 = 0{,}23\ sn$

1.4. Düzgün Doğrusal Hareket

Çok görülen bir durum olup her t için a=0 durumudur.

$\frac{dx}{dt} = v: \text{sabit} \Longrightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v dt$

$x\text{-}x_0=vt \Longrightarrow x=x_0+v\,t$

1.5. Düzgün Değişen Doğrusal Hareket

$\frac{dv}{dt} = a: \text{Sabit} \Longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt \Longrightarrow v = v_0 + a\,t$

$v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow v_0 + at = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

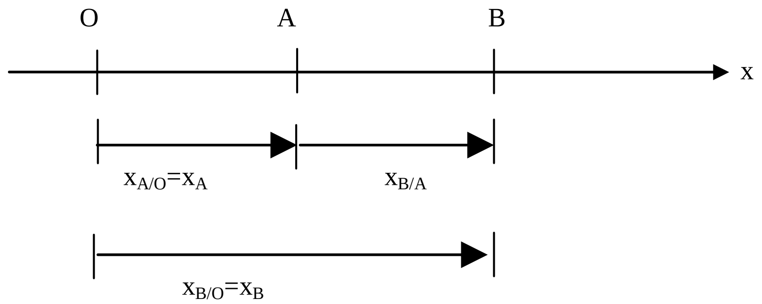
Ayrıca $a = v\frac{dv}{dx} \Longrightarrow vdv = adx \Longrightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{x_0}^{x} adx$

$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a(x - x_0) \Longrightarrow v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Serbest düşmede de aynı formüller kullanılır. Ancak serbest düşmede hareket düşey doğrultuda olduğu için ivme, aşağıya doğru, a=g=9,81 m/sn^2 dir.

1.6. Çok Sayıda Maddesel Noktanın Hareketi

Aynı doğru üzerinde 2 yada daha çok sayıda maddesel nokta hareket ederse hepsinin hareketi ayrı ayrı incelenebilir. Aynı t ve x başlangıç noktalarını seçmek problemin çözümünü kolaylaştırır.



Şekil 1.7.

B noktasının A noktasına göre bağıl yer koordinatı diye $x_{B/A}=x_B-x_A$ değerine denir. (-) iken Bnoktası A noktasına göre solda, (+) iken B noktası A noktasına göre sağdadır. $x_{B/A}$ nın değişme hızı B noktasının A noktasına göre bağıl hızıdır.

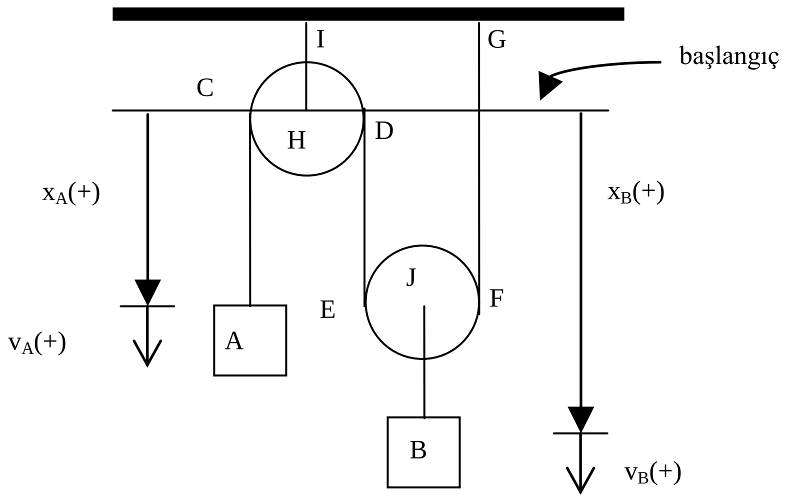
$\frac{dx_{B/A}}{dt}=\frac{dx_B}{dt}-\frac{dx_A}{dt}$ $v_{B/A}=v_B-v_A$ yada $v_B=v_A+v_{B/A}$

$v_{B/A}$ nın değişme hızı da B noktasının A noktasına göre bağıl ivmesidir.

$\frac{dv_{B/A}}{dt}=\frac{dv_B}{dt}-\frac{dv_A}{dt}$ $a_{B/A}=a_B-a_A$ yada $a_B=a_A+a_{B/A}$

Bağımlı Hareketler :

Bazı sistemlerde iki maddesel noktanın yerleri birbirine göre bağımlı olur.

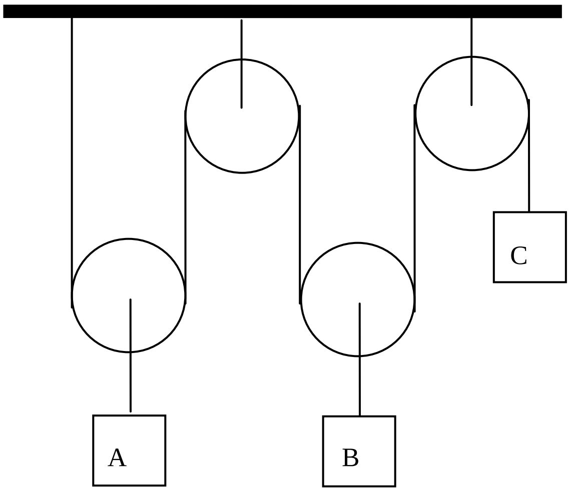


Şekil 1.8.

İpin boyu, HI, JB, CD, EF:sabit

x_A+2x_B=sabit ⟹ $v_A+2v_B=0$ ⟹ $v_A=-2v_B$

Bir yer koordinatı serbest seçilebileceğinden bir serbestlik derecesi var denir.



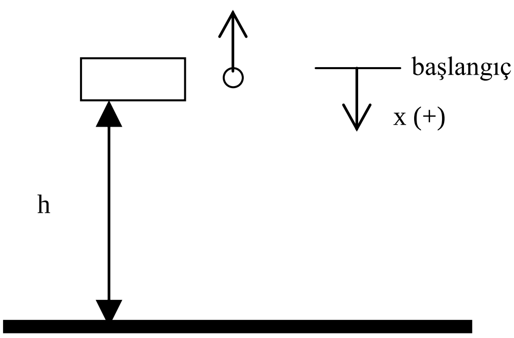
2 serbestlik derecesi vardır.

Şekil 1.9.

ÖRNEK:

5 m/sn hızla yukarı doğru hareket eden bir asansörden bir taş bırakılıyor ve taş 3 sn sonra asansör boşluğunun tabanına vuruyor.

a) Taş bırakıldığında asansör ne kadar yüksekteymiş
b) Taş yere hangi hızla vurur



$a=g=9{,}81\ m/sn^2$

Şekil 1.10.

a) $x=x_0+v_0\ t+(1/2)\ a\ t^2$ $\quad$ $h=0-5t+(1/2)\ 9.81\ t^2$ $\quad$ $h=-5*3+(1/2)\ 9{,}81*3^2=29{,}14m$

b) $v=v_0+a\ t$ $\quad$ $v=-5+9{,}81t=-5+9{,}81(3)=24{,}43m/sn$ (aşağıya doğru)

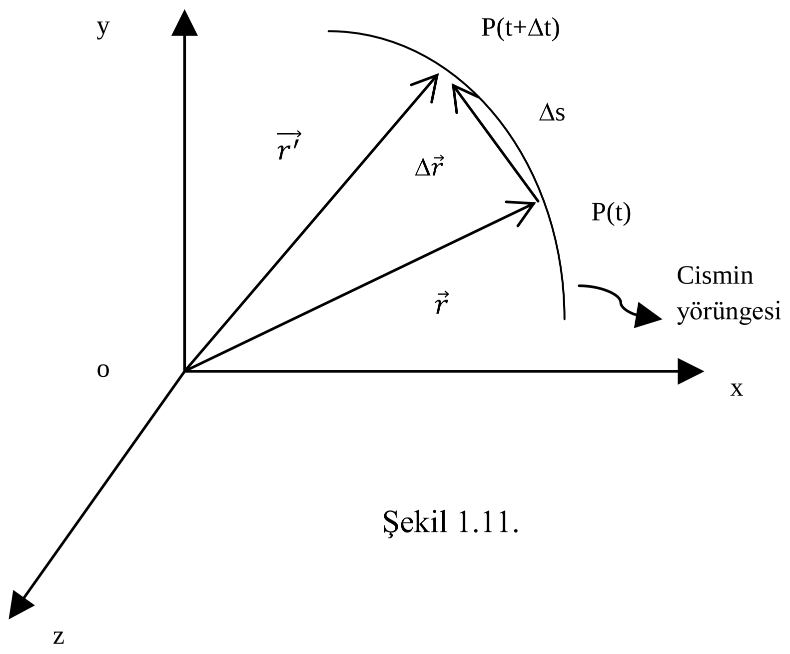
Kontrol : $v^2=v^2_0+2\ a\ (x-x_0)$ $\quad$ $24{,}43^2=(-5)^2+2\ (9{,}81)(29{,}14)$ $\quad$ $597=597$

<u>Grafik Bağıntılar:</u>

1. İvme-zaman grafiğinin altında kalan alan hız değişimine eşittir.
2. Hız-zaman grafiğinin altında kalan alan konum değişimine eşittir.
3. Konum-zaman grafiğindeki eğim o anki hıza eşittir.
4. Hız-zaman grafiğindeki eğim o anki ivmeye eşittir.

1.7. Maddesel Noktaların Eğrisel Hareketi: Yer Vektörü, Hız, İvme

Bir maddesel noktanın doğrusal olmayan hareketine eğrisel hareket denir.

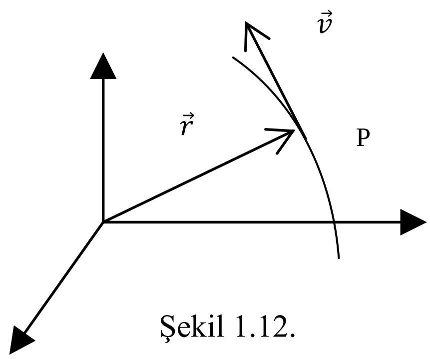


Şekil 1.11.

$\vec{r}$ vektörü x, y, z'ye göre noktanın yer vektörü denir.

ortalama hız $= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ (P'den geçer, $\Delta\vec{r}$ ile aynı doğrultuda ve yöndedir)

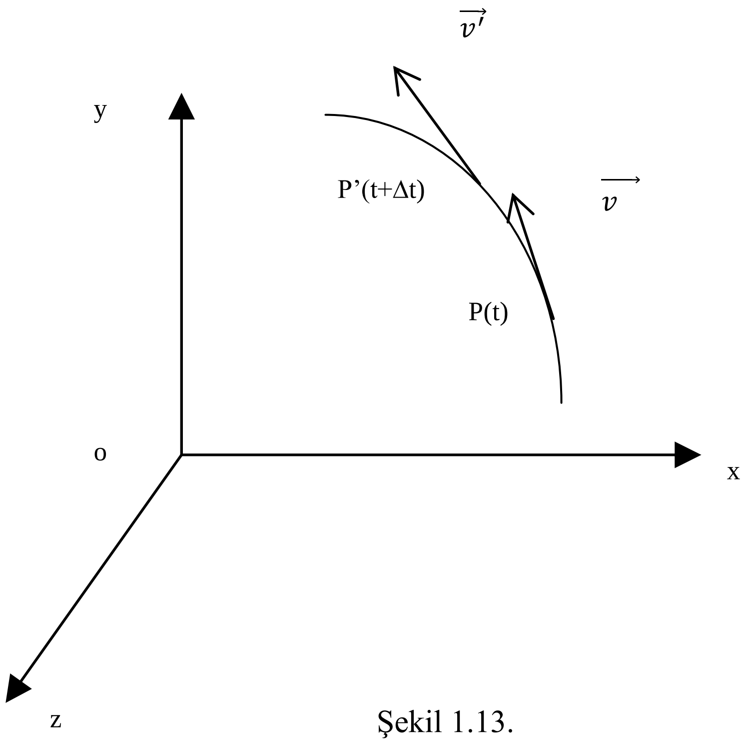
Ani hız $= \vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (eğriye teğet)



Şekil 1.12.

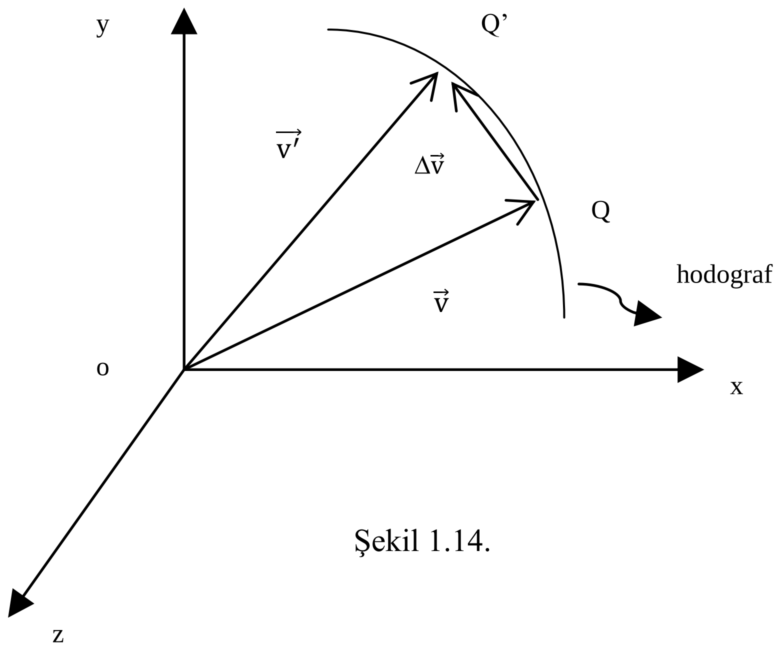
$|\vec{v}|$ yörünge hızı denir

$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$ Δt azaldıkça Δs Δr'ye yaklaşır dolayısı ile anlık hızın şiddeti $\frac{ds}{dt}$ ile de bulunur.



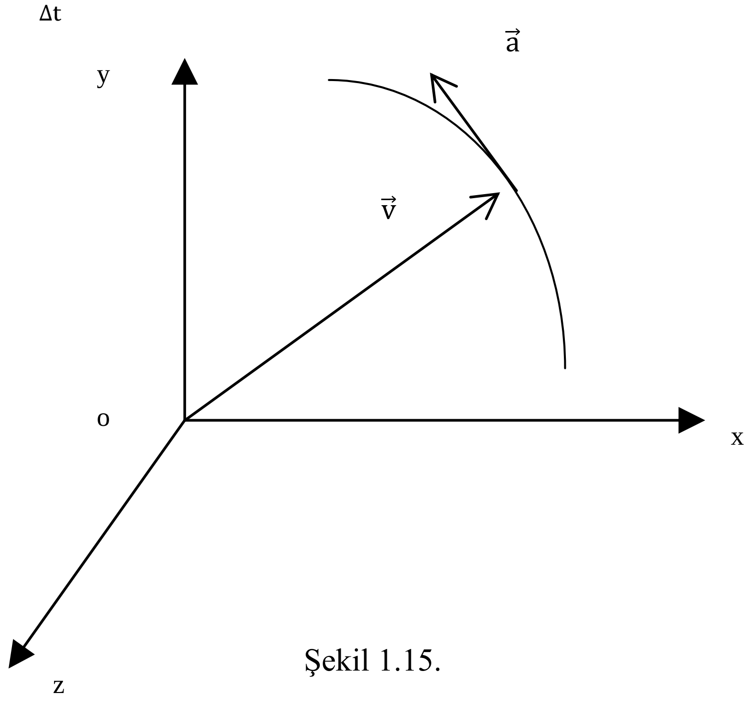
Şekil 1.13.

$\overrightarrow{v}$ ve $\overrightarrow{v'}$ hızlarını aynı başlangıç noktasına alalım uçlarını birleştiren eğriye hodograf denir.



Şekil 1.14.

ortalama ivme $= \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$



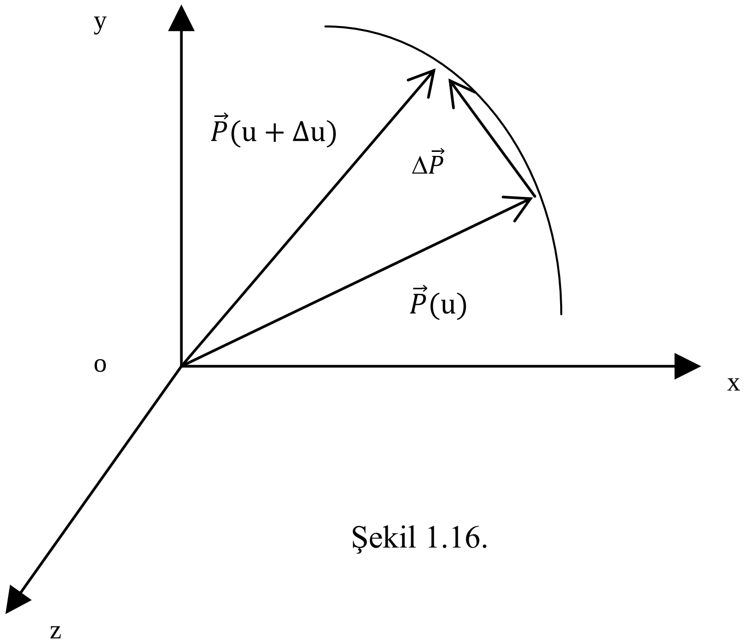
Şekil 1.15.

Ani ivme $= \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Yani $\vec{a}$ ivmesi $\vec{v}$ hızlarının uçlarının çizdiği <u>hodograf denen eğriye teğettir. Fakat maddesel noktaların yörüngesine teğet değildir.</u>

1.8. Vektör Fonksiyonlarının Türevleri

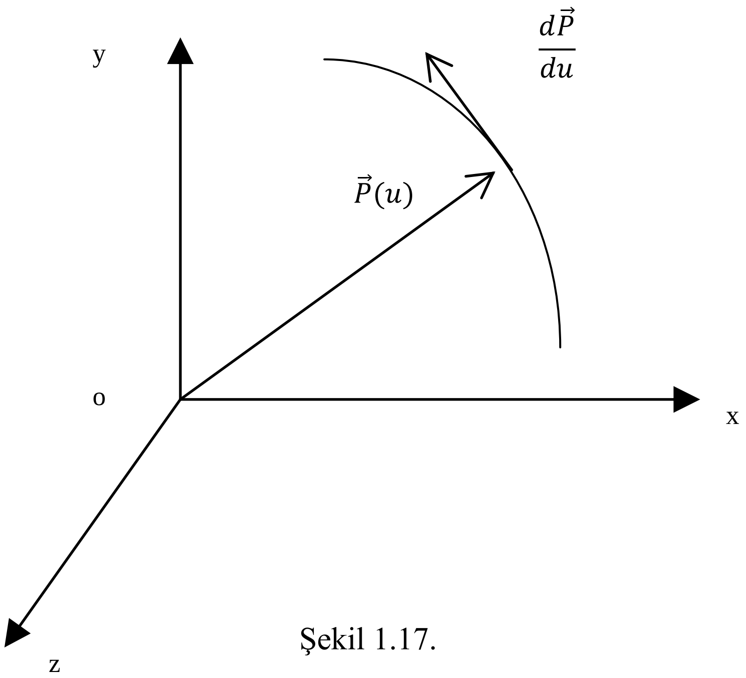
Bir vektör fonksiyon, $\vec{P}$, u gibi bir skalerin fonksiyonu olsun



Şekil 1.16.

$\Delta\vec{P} = \vec{P}(u + \Delta u) - \vec{P}(u)$

$\Delta\vec{P}$ yi (Δu) ya bölüp (Δu) yu sıfıra yaklaştırırsak



Şekil 1.17.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{P}(u+\Delta u)-\vec{P}(u)}{\Delta u}=\frac{d\vec{P}}{du}$$

Denklemdeki $\frac{d\vec{P}}{du}$ türevi $\vec{P}(u)$ nun ucunun çizdiği eğriye teğettir. Toplam ve çarpımla ilgili türev ifadelerini bulalım.

$$\frac{d(\vec{P}+\vec{Q})}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta(\vec{P}+\vec{Q})}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta u}+\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta u}\right)$$

Toplamın limiti limitlerin toplamına eşittir.

$$\frac{d(\vec{P}+\vec{Q})}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta u}\right)+\lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{Q}}{\Delta u}\right)=\frac{d\vec{P}}{du}+\frac{d\vec{Q}}{du}$$

Toplam ve çarpımın bilinen özelliklerinden

$$\frac{d(f\vec{P})}{du}=\frac{df}{du}\vec{P}+f\frac{d\vec{P}}{du}\ \ (f=f(u))$$

Skaler çarpım $\frac{d(\vec{P}\circ\vec{Q})}{du}=\frac{d\vec{P}}{du}\circ\vec{Q}+\vec{P}\circ\frac{d\vec{Q}}{du}$

Vektörel çarpım $\frac{d(\vec{P}\times\vec{Q})}{du}=\frac{d\vec{P}}{du}\times\vec{Q}+\vec{P}\times\frac{d\vec{Q}}{du}$

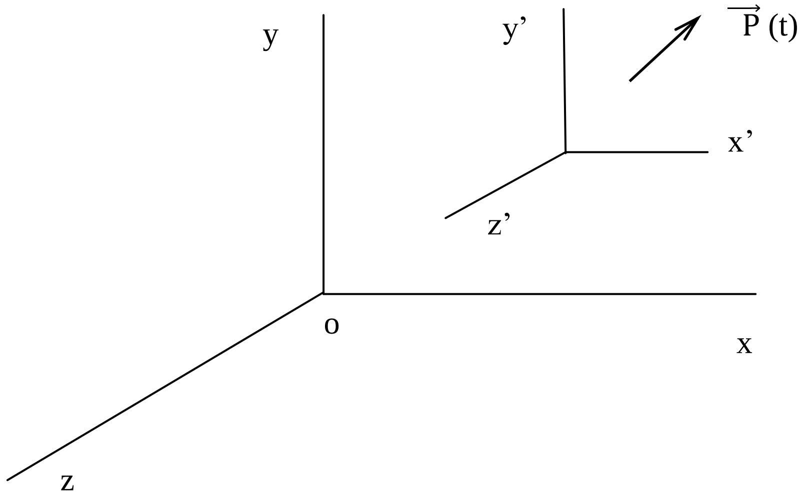
Bu ifadeleri kullanarak dik Kartezyen koordinatlarında $\vec{P}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}$ gibi bir vektör tanımlayalım

$$\frac{d\vec{P}}{du}=\frac{dP_x}{du}\vec{i}+\frac{dP_y}{du}\vec{j}+\frac{dP_z}{du}\vec{k}$$

Yani bir $\vec{P}(u)$ vektör fonksiyonunun $\frac{d\vec{P}}{du}$ türevinin dik skaler bileşenleri $\vec{P}$ nin karşıt skaler bileşenlerinin türevlerini alarak elde edilir.

Bir $\vec{P}$ vektörü zamana bağlı ise $\vec{P}=\vec{P}(t)$ nin değişim hızı :

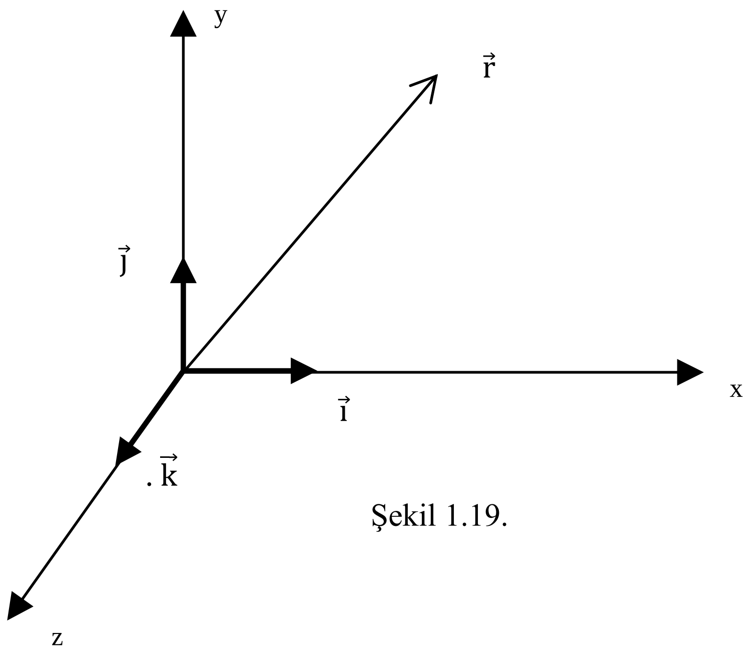
$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{dP_x}{dt}\vec{i}+\frac{dP_y}{dt}\vec{j}+\frac{dP_z}{dt}\vec{k}$$



Şekil 1.18.

Ötelenme yapan bir dik koordinat takımında (x′ , y′ , z′) türevler aynıdır. Bir vektörün sabit bir takıma göre <u>değişim hızı</u> ile ötelenme yapan bir takıma göre <u>değişim hızı</u> aynıdır.

1.9. Hız ve İvmenin Dik Bileşenleri



Şekil 1.19.

Bir maddesel noktanın x, y, z dik koordinatları zamana bağlı verilmişse hız ve ivmede kolaylıkla zamana bağlı olarak bulunabilir.

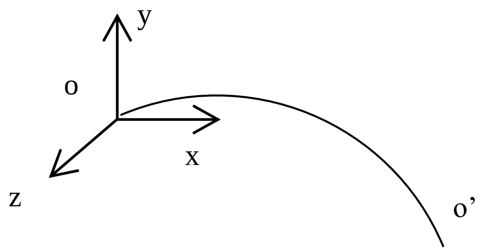
$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (x=x(t) , y=y(t) , z=z(t))

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ ($\dot{x}$ x'in zamana göre türevi)

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ ya da $v_x=\dot{x}$ $v_y=\dot{y}$ $v_z=\dot{z}$

$a_x=\ddot{x}$ $a_y=\ddot{y}$ $a_z=\ddot{z}$

Örneğin bir merminin hareket probleminde :



Şekil 1.20.

$a_x=\ddot{x} = 0$ $a_y=\ddot{y} = -g$ $a_z=\ddot{z} = 0$

Silahın koordinatları (x_0 , y_0 , z_0) ve merminin ilk hızı $(v_x)_0$, $(v_y)_0$, $(v_z)_0$ ise :

$v_x = (v_x)_0$, $v_y = (v_y)_0 - g*t$, $v_z=(v_z)_0$

$x= x_0 + (v_x)_0 * t$

$y= y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g * t^2$

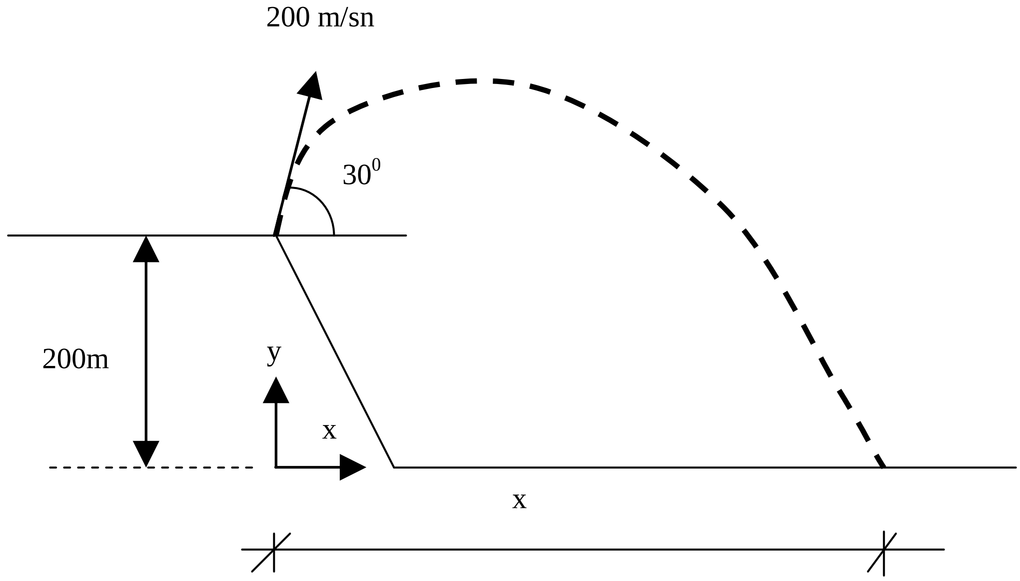
$z= z_0 + (v_z)_0 * t$

Eğer hareket x-y düzleminde ise :

$x_0= y_0= z_0=0$ ve $(v_z)_0=0$ olduğundan

$x=(v_x)_0 t$, $y=(v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ dir.

ÖRNEK

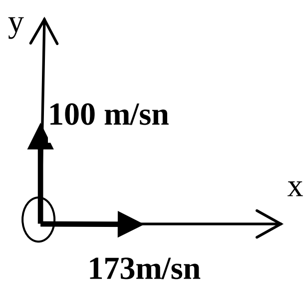


Şekil 1.22.

Bir mermi 200 m'lik bir uçurumun kenarından 30^0 lik açıyla 200 m/sn hızla atılmıştır.

a) x = ?
b) Maksimum yükseklik = ?

NOT: CİSİM HAVADA KALDIĞI SÜRECE HAREKET EDER , $g=9,81\ m/sn^2$



Şekil 1.23.

$V= V_0+at$

$0=100-9,81*t$

$t=10,19$ sn (max. Yükseklige çıkış süresi)

$y = y_0+(v_y)_0*t+ \frac{1}{2}a*t^2$

$y = 200+100*10,19 - \frac{1}{2}*9,81*(10,19)^2 = 709,68$ metre

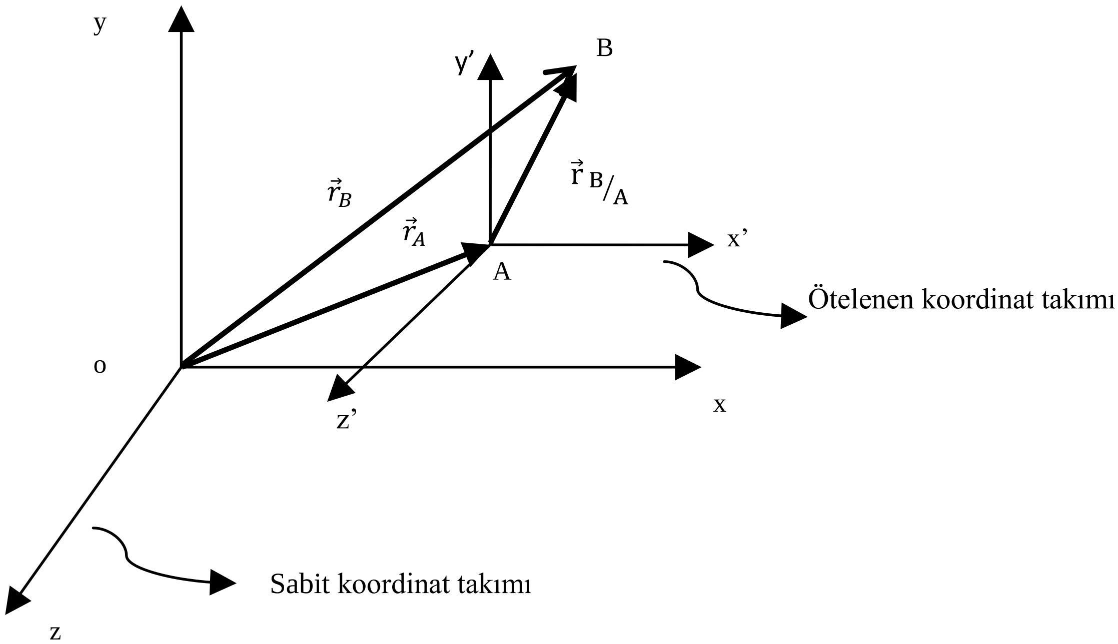
Düşüş süresi : $h=\frac{1}{2}*g*t^2$ $709,68=\frac{1}{2}*9,81*t^2$ $t=12,03$ sn

Toplam uçuş: 10,19+12,03=22,22 saniye

x=22,22*173= 3843,81 metre

1.10. Ötelenme Yapan Bir Takıma Göre Bağıl Hareket

Herhangi bir hareket bir takım yerine 2 yada daha fazla takım ile gözlenebilir. Bu takımlar birbirine göre ötelenme hareketi yapıyorlarsa bunlardan birini sabit takım diye adlandırabiliriz.



Şekil 1.21.

A ve B gibi 2 nokta alalım A'da $x^{'}, y^{'}, z^{'}$ gibi bir ötelenme yapan takım olsun

$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$

$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ B'nin A'ya göre bağıl yer vektörü denir.

Türevi alınırsa :

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ B'nin A'ya göre bağıl hızı. Türevi alınırsa :

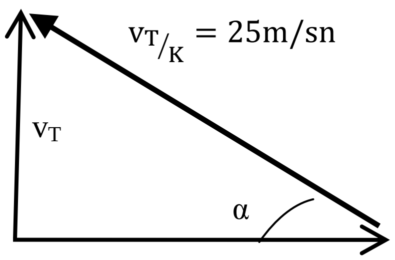
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$ B'nin A'ya göre bağıl ivmesi

ÖRNEK

Hareketli bir kamyondan kamyona göre 25 m/sn 'lik yatay bir bağıl hızla önünden geçtiği anda bir direğe doğru bir taş atılıyor. Kamyonun hızı 50 km/sa ise :

a) Taşın fırlatılması gereken doğrultuyu
b) Taşın yere göre yatay hızını hesaplayınız



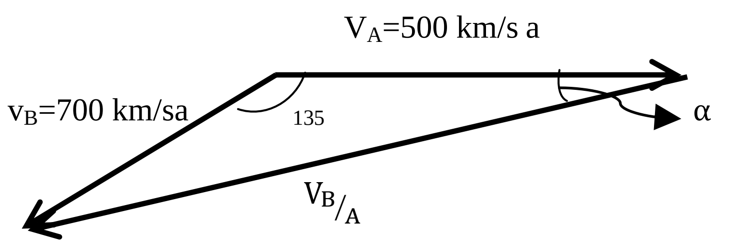
v_k=50 km/sa=13,89m/sn

Şekil 1.24.

a) Cosα=$\frac{13,89}{25}$=0,556 $\Longrightarrow$ α=56,20^0
b) v_T = 25*sin56,20^0 = 20,8 m/sn Kontrol: 25*cos56,20^0 =13,889 m/sn

ÖRNEK

A ve B gibi iki uçaktan her biri sabit 1000 m yükseklikte uçmaktadır. B uçağı güney-batıya doğru sabit 700 km/sa hız ile ve A ise doğuya doğru sabit 500km/sa hız ile uçmaktadır. 2 dakika içinde A'ya göre B'nin konumundaki değişikliği bulunuz.



Şekil 1.25.

Cosinüs Teoremi: $(V_{B/A})^2 = 700^2+500^2 - 2*500*700*\cos135=1111$ km/sa

$\frac{\sin\alpha}{700} = \frac{\sin135}{1111} \Longrightarrow \quad \alpha = 26{,}46^0$

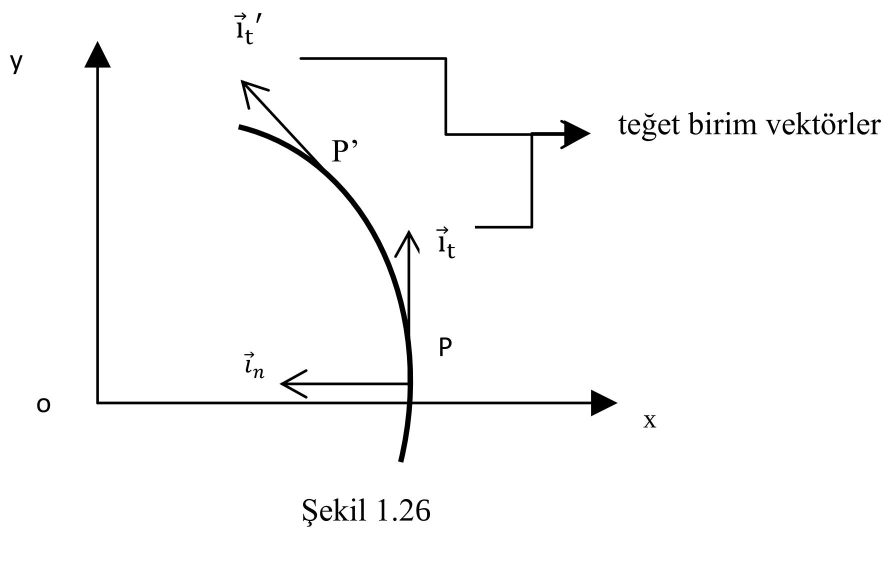
t= 2 dakika sonra :

$S_{B/A} = (V_{B/A}) * t = 1111*\frac{2}{60}=37{,}0$ km

1.11. Teğetsel ve Normal Bileşenler

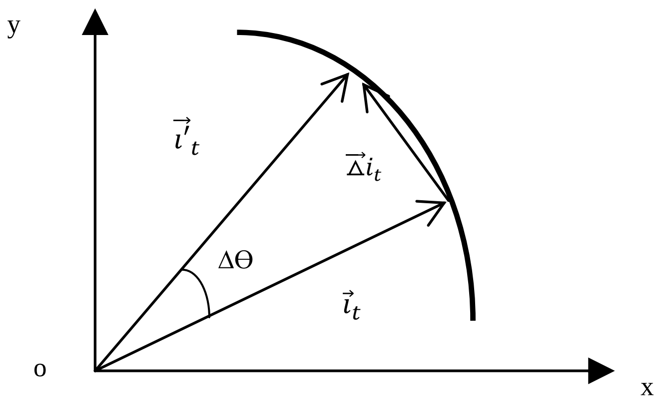
Bir maddesel noktanın hızı yörüngesine teğettir. İvmesi için öyle bir koşul yoktur. İvmede bazı durumlarda yörüngeye teğet ve normal bileşenlerine ayrılır.

Maddesel Noktanın Düzlemsel Hareketi



Şekil 1.26

x-y düzlemi hareket düzlemi olsun



Şekil 1.27

Her iki teğet birim vektörünü ($\vec{\imath}_t$ ve $\vec{\imath'}_t$) aynı başlangıç noktasına taşıyarak

$\Delta\vec{\imath}_t = \vec{\imath'}_t - \vec{\imath}_t$ Vektörünü elde edelim

$\vec{\imath'}_t$ ve $\vec{\imath}_t$ birim vektörler oldukları için şiddetleri 1 birimdir ve 1 birim yarıçaplı daire oluştururlar. İki vektör arasındaki açı $\Delta\theta$ ise $\Delta\vec{\imath}_t$' nin değeri 2sin(ΔΘ/2) olur.

$\Delta\vec{\imath}_t$ vektörü $\Delta\theta$ sıfıra yaklaştıkça çembere teğet olur.

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\vec{\imath}_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{(\Delta\theta/2)} = 1$$

Demek ki limitte yörüngeye normal $\vec{\imath}_t$ 'nin döndüğü yönde bir birim vektör elde edilir. Buna $\vec{\imath}_n$ diyelim.

$$\vec{\imath}_n = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\vec{\imath}_t}{\Delta\theta} \quad \to \vec{\imath}_n = \frac{d\vec{\imath}_t}{d\theta}$$ (Türevin tanımından)

Maddesel noktanın hızının şiddeti v olup $\vec{v} = v\vec{\imath}_t$ dir.İvmeyi bulmak için hızın türevini alırız

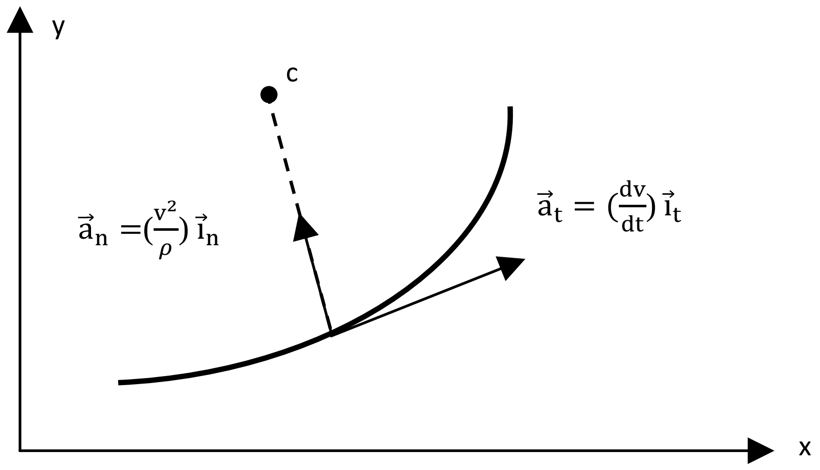
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\imath}_t + v\frac{d\vec{\imath}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\imath}_t}{dt} = \overset{\vec{\imath}_n}{\left(\frac{d\vec{\imath}_t}{d\theta}\right)} * \overset{1/\rho}{\left(\frac{d\theta}{ds}\right)} * \overset{v}{\left(\frac{ds}{dt}\right)}$$

ρ: Yörüngenin eğrilik yarıçapı

$$\vec{a} = \left(\frac{dv}{dt}\right)\vec{\imath}_t + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)\vec{\imath}_n \qquad \vec{a} = a_t * \vec{\imath}_t + a_n * \vec{\imath}_n$$

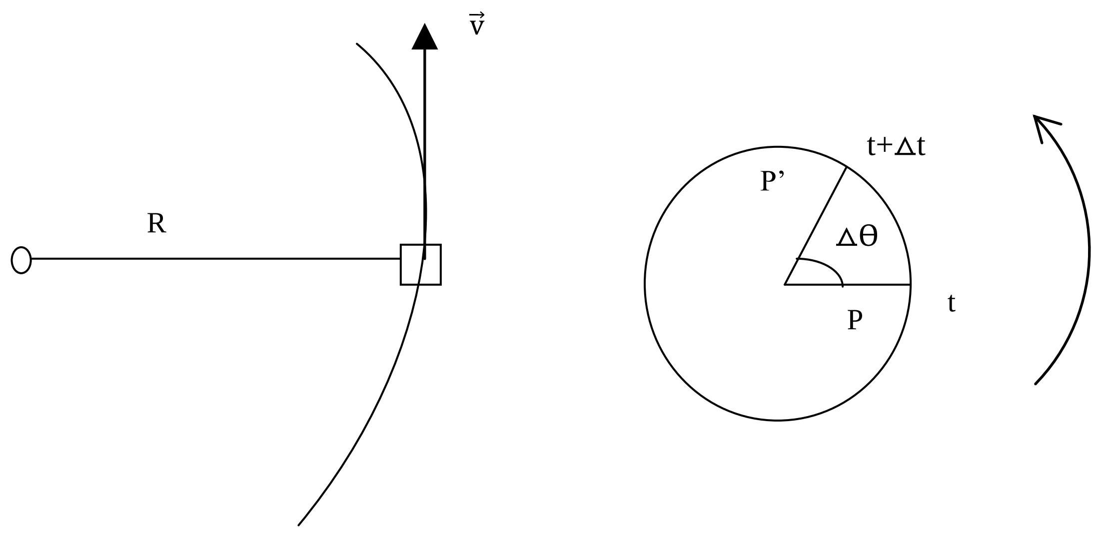
a_t hızda artış varsa pozitif aksi halde negatiftir. a_n her zaman eğrilik merkezine doğrudur.



Şekil 1.28.

İvmenin teğet bileşeni hızdaki değişim ile ilgilidir. Normal bileşen eğrilikle ilgilidir. Dönüm noktasında veya düz yolda yeni eğriliğin sıfır olduğu (Eğrilik Yarıçapı =∞) noktalarda normal bileşen sıfır olur. İvmenin normal bileşeninin yörüngeye bağlı olması maddesel noktanın izlediği yörünge hakkında bilgi verir.

Dairesel Harekette Açısal Hız ve Çizgisel Hız



Şekil 1.29.

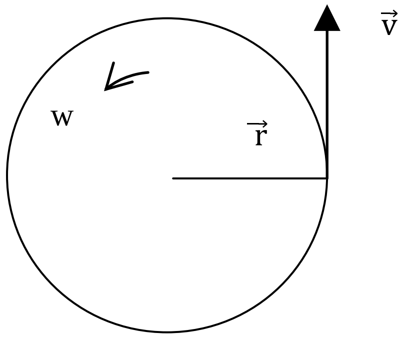
Açısal hız = $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ = w $\Longrightarrow$ [w] = $\frac{\text{açı birimi}}{\text{zaman birimi}}$ = rad/sn

w: Dönüş hızı

v: teğet hızı

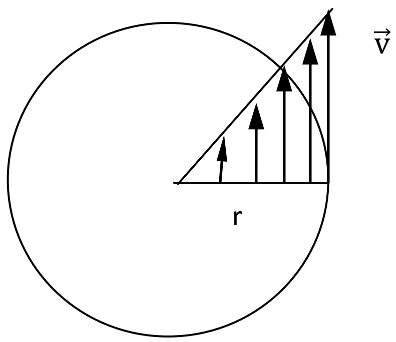
w vektörel bir büyüklük olup sağ el kuralı ile bulunur.

anlık açısal hız = $\frac{d\theta}{dt}$



Şekil 1.30.

$|\vec{v}| = |\vec{w}| * |\vec{r}| \Longrightarrow v = w*r$

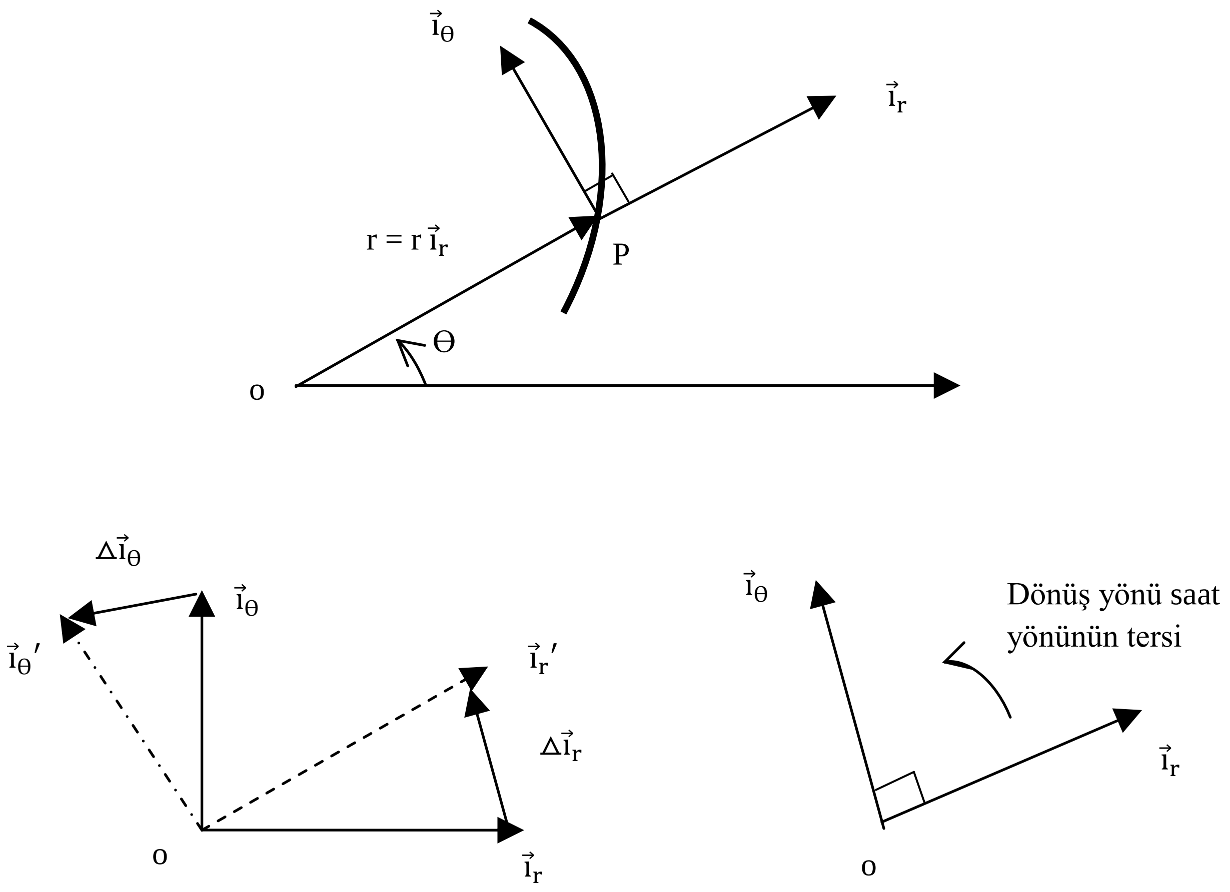


Şekil 1.31

v (yol/zaman) idi. Aynı zamanda en dıştaki çok yol alır. (çevresi en geniş) içteki az yol alır. Dolayısıyla merkeze yaklaştıkça çizgisel hız azalır merkezde sıfır olur.

1.12. Kutupsal Koordinatlarda Bileşenler

Düzlemsel hareketli bazı problemlerde P maddesel noktasının yeri r ve Θ kutupsal koordinatları yardımıyla tanımlanır. O zaman maddesel noktanın hızını ve ivmesini de radyal ve radyale dik (enine) bileşenlere ayırmak uygun olur .



Şekil 1.32.

Daha önce $\vec{i}_t$ birim vektörünün türevini ($\vec{i}_n$) bulmakta kullandığımız yöntemi kullanırsak:

$$\frac{d\vec{i}_r}{d\theta} = \vec{i}_\theta \qquad \frac{d\vec{i}_\theta}{d\theta} = -\,\vec{i}_r$$

$$\vec{r} = r\,\vec{i}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\vec{i}_r + r\frac{d\,\vec{i}_r}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{i}_r + r * \underbrace{\frac{d\,\vec{i}_r}{d\theta}}_{\vec{i}_\theta} * \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}$$

$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{i}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{i}_\theta$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\vec{i}_r + \dot{r}\frac{d\vec{i}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + r(\ddot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{\theta}\frac{d\vec{i}_\theta}{dt})$

$\vec{a} = \ddot{r}\ \vec{i}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{i}_\theta - r(\dot{\theta})^2\,\vec{i}_r$

$\vec{a} = (\ \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2\ )\ \vec{i}_r + (\ r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\ )\ \vec{i}_\theta$ yada

$v_r = \dot{r}$ $\quad v_\theta = r\dot{\theta}$

$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$ $\quad a_{\theta} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

O merkezli bir daire için : r: Sabit, $\dot{r}$: 0, $\ddot{r}$: 0 olur

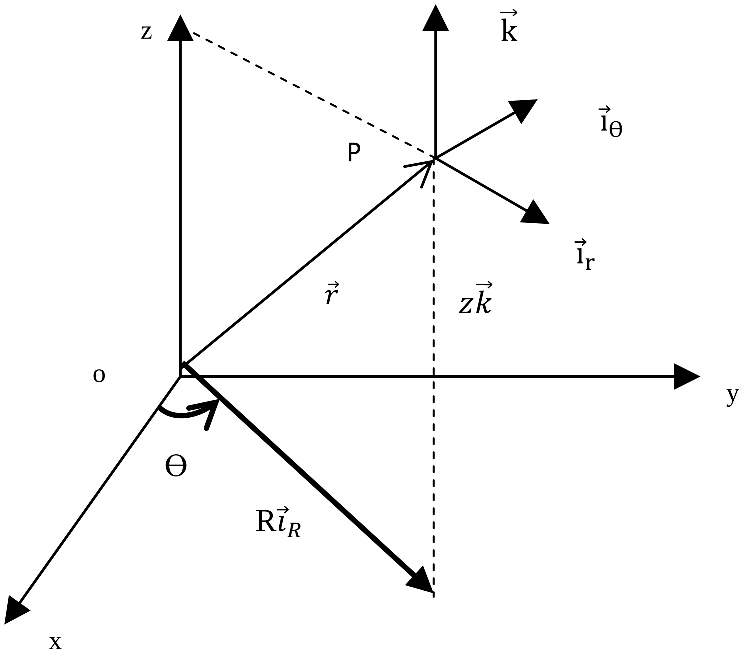
$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{i}_\theta$

$a = -\,r\,(\dot{\theta})^2\,\vec{i}_r + r\,\ddot{\theta}\,\vec{i}_\theta$

1.13. Maddesel Noktanın Uzay Hareketine Genişletme (silindirik koordinatlar)

Bir maddesel noktanın uzaydaki bir yeri bazen R , Θ , z silindirik koordinatları yardımıyla tanımlanır. Bu durumda birim vektörler $\vec{i}_r$, $\vec{i}_\theta$, $\vec{k}$ diye seçilir ve :

$\vec{r} = R\,\vec{i}_r + z\vec{k}$



Şekil 1.33.

$v = \dot{R}\vec{i}_r + R\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{z}\vec{k}$

$\vec{a} = \ddot{R}\,\vec{i}_r + \dot{R}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + \dot{R}\dot{\theta}\vec{i}_\theta + R\ddot{\theta}\vec{i}_\theta - R(\dot{\theta})^2\vec{i}_r + \ddot{z}\vec{k}$

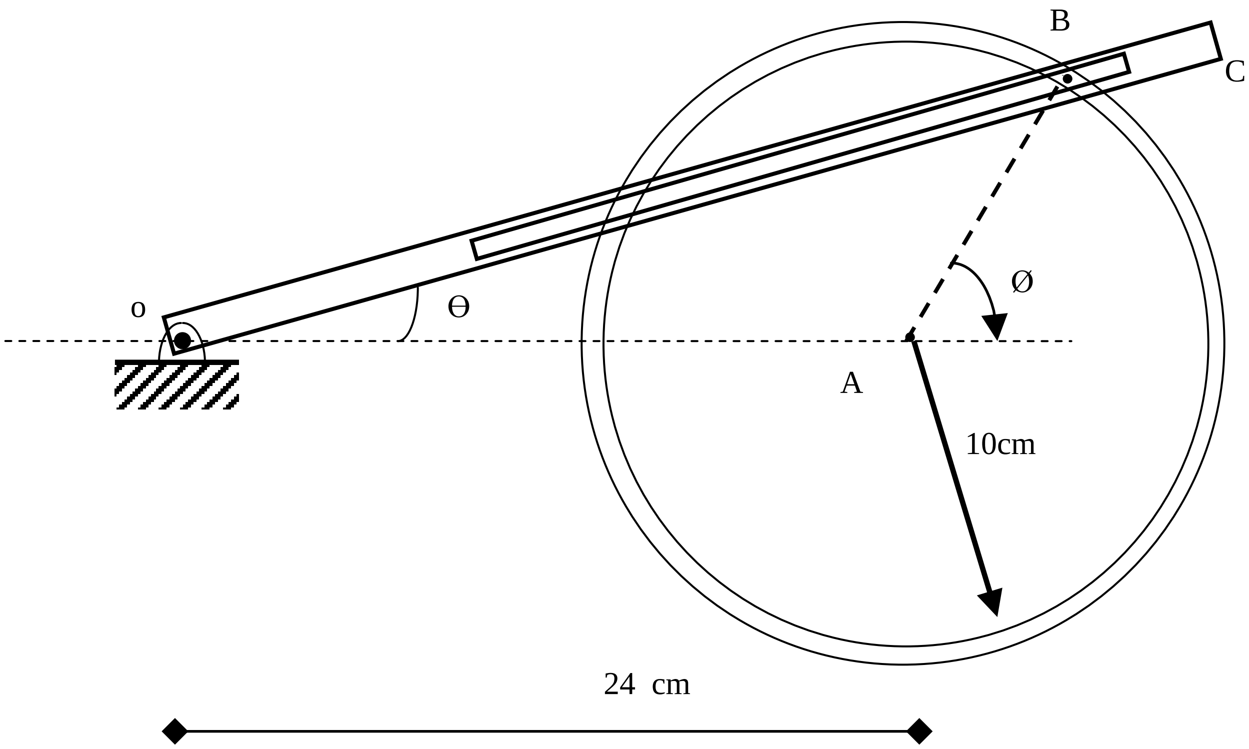
$a = (\ddot{R} - R(\dot{\theta})^2)\,\vec{i}_r + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\,\vec{i}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$

ÖRNEK

B pimi dairesel yarık ile dönen OC çubuğunun içerisinde serbestçe kayabilmektedir. B pimi dairesel yarık içerisinde saat ibresinin tersine sabit v_o hızı ile kayarsa

a) $\varnothing = 0^0$ b) $\varnothing = 90^0$

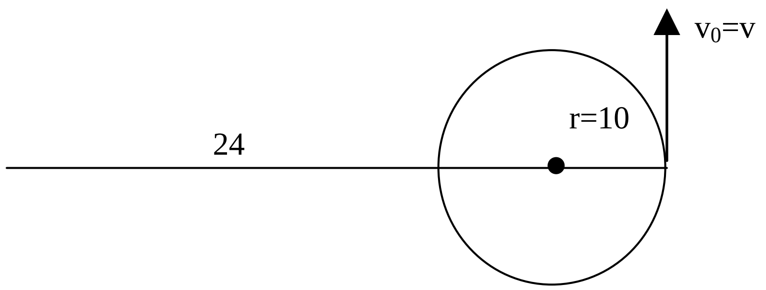
İçin OC çubuğunun $\frac{d\theta}{dt}$ dönme hızını ve B piminin hızının v_r radyal bileşenini bulunuz.



Şekil 1.34.

Kutupsal koordinatlarda :

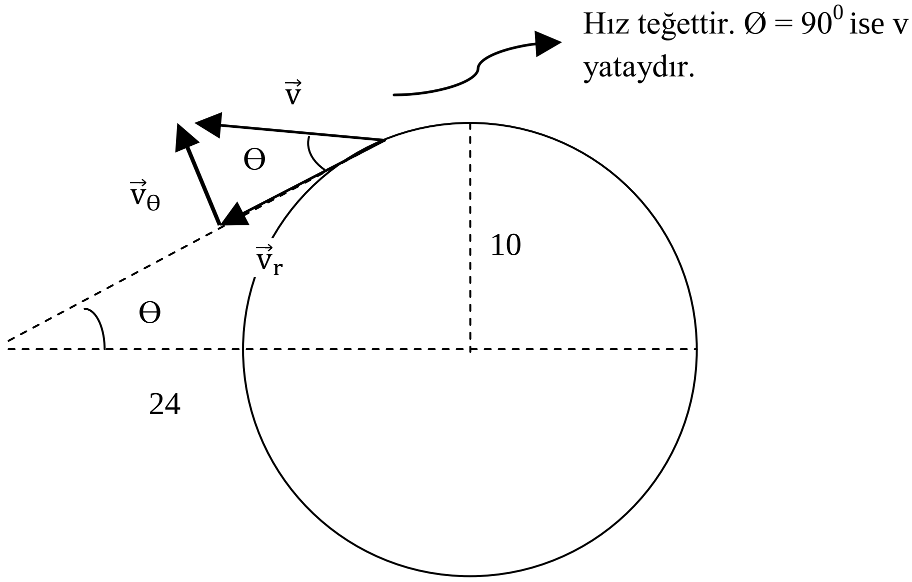
$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{i}_r + r\,\dot{\theta}\vec{i}_\theta$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2)\vec{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{i}_\theta$



Şekil 1.35.

a) $Ø = 0^0$ $v_\theta = v_0$ (m/sn) $V_r = 0$

$v_{\Theta} = r\,\frac{d\Theta}{dt} = v_0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{v_0}{r} = \frac{v_0}{0{,}34}$



Şekil 1.36.

OB= $\sqrt{(0{,}24^2 + 0{,}1^2\,)}$ = 0,26

$v_r = -v_0 * \cos\Theta = -\,\frac{0{,}24}{0{,}26} * v_0$

$\vec{v}_r = -\,\frac{12}{13}\,v_0\,\vec{i}_r$

$v_{\Theta} = r\,\frac{d\Theta}{dt} = v_0 \sin\Theta \quad \Longrightarrow \quad 0{,}26\ \frac{d\Theta}{dt} = v_{\Theta} * \frac{0{,}1}{0{,}26} \qquad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{5}{3{,}38}\,v_0$

<u>ÖRNEK</u>

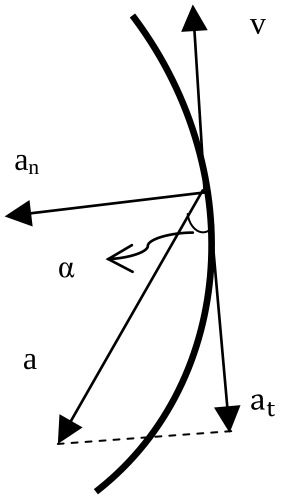
Bir tren 1000 m yarıçaplı bir kurbda 144 km/sa hızla hareket etmektedir. Ani olarak fren yapılıyor trenin hızı düzgün olarak azalıyor ve 6 saniye sonra hız 90 km/sa iniyor. Frene basıldıktan hemen sonra bir vagonun ivmesini bulunuz.

144 km/sa = 40 m/sn

90 km/sa = 25 m/sn

$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{25-40}{6}$ = - 2,5 m/sn^2

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{40^2}{1000}$ = 1,6 m/sn^2



Şekil 1.37.

$\tan\alpha = \frac{1,6}{2,5} = 0,64$ $\alpha = 32,6$

$a = \sqrt{2,5^2 + 1,6^2}$ = 2,97 m/sn^2

ÖRNEK

Bir şoför 120 m yarıçaplı bir kurb üzerinde dururken harekete başlıyor ve hızı düzgün a_t = 1 m/sn^2 ivmesi ile artıyor. Toplam ivmesi 2 m/sn^2 olana kadar otomobilin alacağı yolu hesaplayınız

a = 2 m/sn^2 a_t = 1 m/sn^2 $a^2 = a_t^2 + a_n^2$ $2^2 = 1^2 + a_n^2$

a_n = 1,73 m/sn^2

$a_n = \frac{v^2}{120}$ $1,73 = \frac{V^2}{120}$ v = 14,4 m/sn

$v^2 = v_0^2 + 2*a*\Delta x$ $14,4^2 = 0 + 2*1*\Delta x$ Δx = 103,9 metre

ÖRNEK

Yarıçapı 200 metre olan bir kurb üzerinde 70 km/sa hızla yol alan bir otomobilin hızı 150 m içerisinde düzgün olarak 95 km/saat'e kadar artıyor. Otomobil kurbta 100m yol aldıktan sonra toplam ivmesi ne olur ?

70 km/sa = 19,44 m/sn

95 km/sa = 26,39 m/sn

$v^2 = v_0^2 + 2*a*\Delta x \quad \Longrightarrow \quad 26,39^2 = 19,44^2 + 2*a_t*150 \qquad a_t = 1,062 \text{ m/sn}^2$

S = 100m $\quad v^2 = v_0^2 + 2*a*\Delta x$

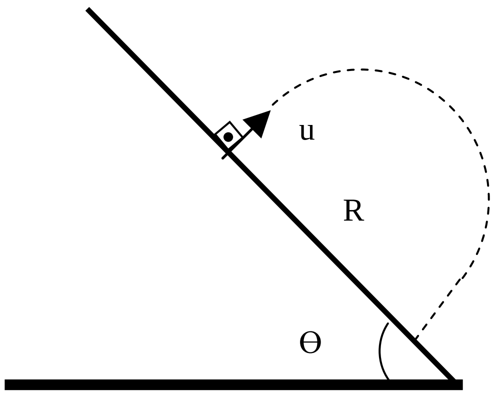
$v^2 = 19,44^2 + 2 * 1,062 * 100 = 590,3$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{590,3}{200} = 2,95 \text{ m/sn}^2$

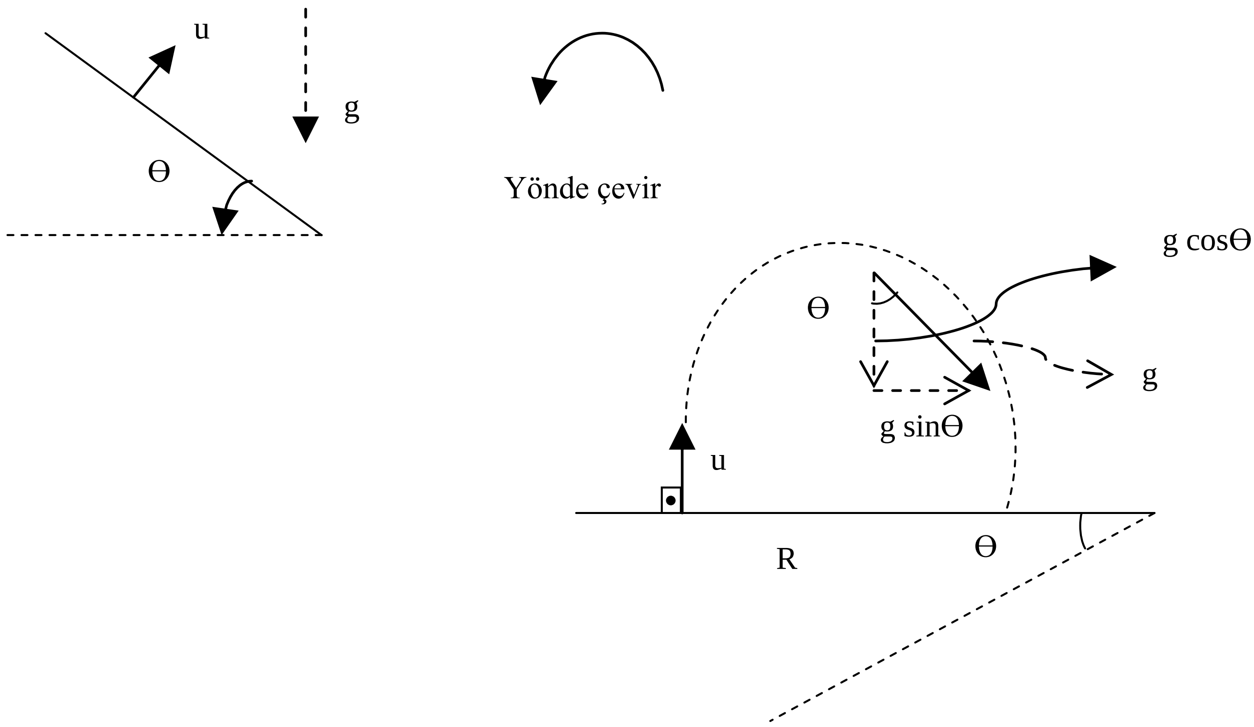
$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{1,062^2 + 2,95^2} = 3,14 \text{ m/sn}^2$

ÖRNEK

u hızı ile eğik düzleme dik fırlatılan bir taş R uzaklığına düşüyor. R mesafesinin R= $\frac{2U^2}{g}$*tanϴ*secϴ olduğunu gösteriniz.



Şekil 1.38.



Şekil 1.39.

Çıkış süresi $\Longrightarrow$ $v = v_0 + a*t$ $\Longrightarrow$ $0 = u - g*\cos\Theta*t$ $\Longrightarrow$ $t = \frac{u}{g*\cos\theta}$

Uçuş süresi $\Longrightarrow$ $2*t = \frac{2*u}{g*\cos\theta}$

Yatayda bu süre boyunca g*sinΘ ivmesi ile yol alacak

$x = x_0 + v_0*t + \frac{1}{2}*a*t^2$ $\Longrightarrow$ $R = 0 + 0*t + \frac{1}{2}g*\sin\Theta * \frac{4*u^2}{g^2*\cos^2\theta}$

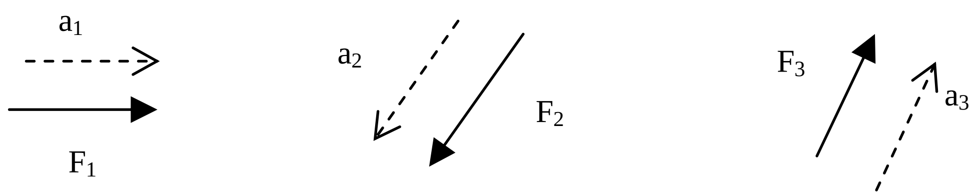
$R = \frac{2*u^2}{g} * \tan\Theta * \sec\Theta$

BÖLÜM 2. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ KUVVET, KÜTLE, İVME

2.1. Newton'un 2. Hareket Kanunu

Newton'un birinci ve üçüncü hareket kanunları dengedeki cisimlerin kuvvetler altındaki durumlarını incelemeye yetmiştir. Ancak cisimlerin ivmeli hareketleri ile ilgili olan problemlerde ise 2. kanuna gerek vardır. Cisimlerin hızlarının şiddet ve/veya doğrultusu değişiyorsa ivme vardır ve cismin hareketi ile etkiyen kuvvetler arasında bir ilişki kurulur.

Newton'un ikinci kanunu: Bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet sıfır değilse maddesel nokta bileşke kuvvetin şiddeti ile orantılı ve bu bileşke kuvvetin doğrultusunda ve yönünde bir ivme kazanır. Bir cisme farklı yönlerde kuvvetler uygulanarak uygulanan her kuvvet için cismin ivmesi ölçülürse,



Şekil 2.1.

$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3}$ = Sabit Bu değer bir cisim için sabit olup "m" kütle değerini verir.

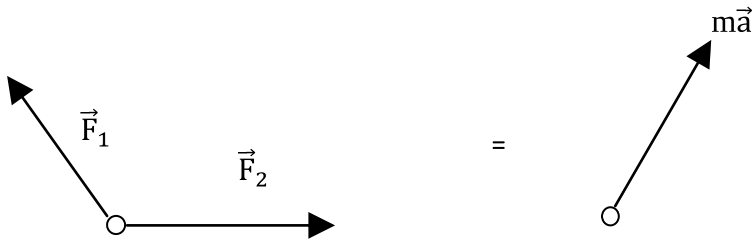
Demek ki: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ Birden fazla kuvvet varsa $\Sigma\vec{F}=m\,\vec{a}$ dır.

2.2. Birim sistemleri

$\vec{F} = m\,\vec{a}$ denklemini kullanırken birimleri gelişi güzel seçemeyiz. kütle, kuvvet, uzunluk ve zaman birimlerinden üçü seçilirse dördüncüsü bu denklemi sağlayacak şekilde seçilmelidir. Bu durumda seçilen birimlere kinetik bakımdan uyuşan birimler denir.

	Salt birim sistemi (SI)	Çekimsel birim sistem(Teknik metrik sistem)
Uzunluk (L)	metre (m)	metre (m)
Kütle (m)	kilogram(kg)	$\frac{\text{kgf} * \text{sn}^2}{\text{m}}$
Zaman (t)	saniye (sn)	saniye (sn)
Kuvvet (F)	Newton $(\text{kg.}\,\text{m}/\text{sn}^2)$	kgf

2.3. Hareket denklemleri (Dinamik Denge)



Şekil 2.2

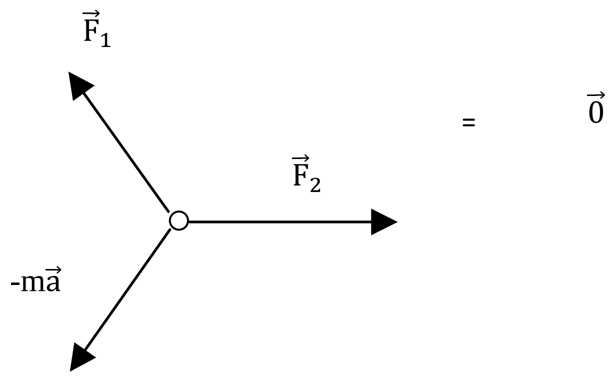
$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$

$\Sigma(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$

$\Sigma F_x = ma_x$

$\Sigma F_y = ma_y$

$\Sigma F_z = ma_z$



$\Sigma\,\vec{F} = m\vec{a}$

$\Sigma\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$

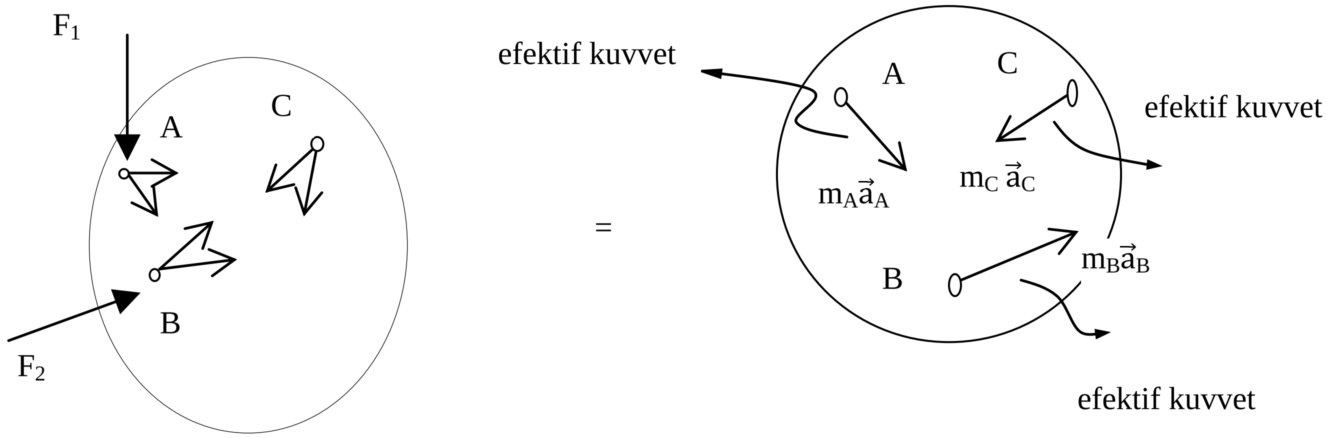
Şekil 2.3.

$-m\vec{a}$: Atalet kuvveti veya atalet vektörü olarak adlandırılır.

$\Sigma\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$ denklemi bir denge denklemi olduğu için bu denkleme dinamik denge denklemi denir.

2.4. Maddesel Noktalar Sistemi (D'alembert ilkesi)

Newton denklemi maddesel nokta sistemine tek tek de uygulanabilir yada her maddesel noktaya sistemin diğer noktalarından gelen iç kuvvetler ve sistemin dışından gelen dış kuvvetler diye 2 kısımdan oluşan kuvvetlerden söz edilebilir. Bütün kuvvetlerin toplamı $m\vec{a}$ ya eşit bir vektördür. Buna maddesel noktaya gelen efektif kuvvet denir. Şimdi bütün noktaları birden göz önüne alalım.

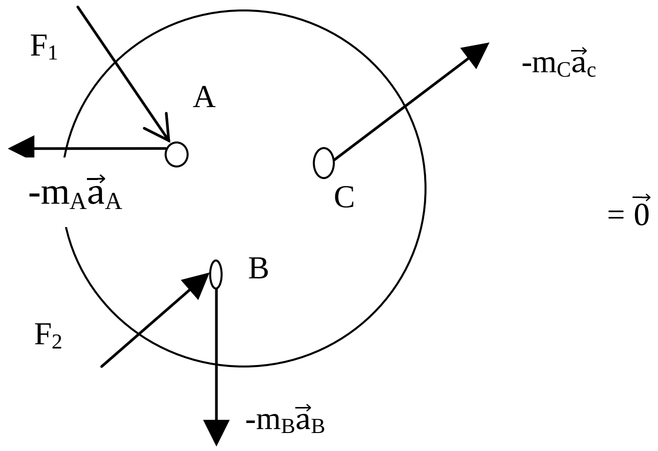


Şekil 2.4.

Yazılan bağıntı her bir maddesel nokta için geçerlidir. Sisteme etkiyen dış ve iç kuvvetlerin bileşkesi bütün noktalara etkiyen efektif kuvvetlerin bileşkesine eşit olur. Eğer iç kuvvetler Newton'un üçüncü kanunu gereğince eşit ve zıt çiftler oluşturuyorsa yok olurlar. Bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetler sistemin çeşitli noktalarına etkiyen efektif kuvvetler sistemine eşdeğerdir. Bu önemli hüküm Fransız matematikçisi Jean Le Rond D'alembert'e (1717-1783) izafeten D'alembert ilkesi adını almıştır.

Yer vektörlerine $\vec{r}$ dersek ; $\Sigma\vec{F}_{dış} = \Sigma(m\vec{a})$ $\Sigma(M_o)_{dış} = \Sigma(\vec{r} x m\vec{a})$

Ya da dış kuvvetlere atalet vektörleri eklenerek sıfıra eşdeğer bir sistem elde edilir.



$\Sigma F_{dış} = \Sigma m_i a_i$

Efektif kuvvetler toplamı (D'alembert prensibi)

Şekil 2.5.

2.5. Bir maddesel Noktalar sisteminin Kütle Merkezinin Hareketi

Bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi şöyle gösterilebilir. $\vec{r}_G = \frac{\Sigma M\vec{r}}{\Sigma M}$

Skaler olarak :

$X_G = \frac{\Sigma Mx}{\Sigma M}$, $Y_G = \frac{\Sigma My}{\Sigma M}$, $Z_G = \frac{\Sigma Mz}{\Sigma M}$

Ağırlık merkezi ile kütle merkezi aynı değildir. Çünkü yerçekimi doğrultusu her noktada tam paralel değildir. Ancak İnşaat Mühendisliğinde ağırlık merkezi ile kütle merkezi aynı kabul edilir.

t'ye göre türev alınırsa : $\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\Sigma(M\frac{d\vec{r}}{dt})}{\Sigma M}$ $\frac{d\vec{r}_G}{dt} = \vec{v}_G$ =Kütle merkezi hızı

$\vec{v}_G = \frac{\Sigma m\vec{v}}{\Sigma m}$ bir daha türev alınırsa

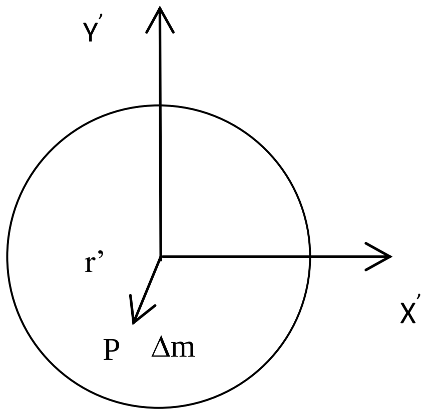
$\vec{a}_G = \frac{\Sigma m\vec{a}}{\Sigma m}$

$\Sigma\vec{F}_{dış} = \Sigma(m\vec{a})$ idi (D'alembert ilkesi)

$\vec{a}_G = \frac{\Sigma\vec{F}dış}{\Sigma m}$ $\Sigma\vec{F}_{dış} = (\Sigma m)\,\vec{a}_G$

Bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi, sistemin bütün kütlesi ve bütün dış kuvvetleri bu noktada toplanmış gibi Newton'un ikinci kanununa göre hareket eder.

<u>BİLGİ:</u>



Şekil 2.6.

Parçaların toplamı

$$r_G = \frac{\Sigma(mr)}{\Sigma m}$$

Toplam kütle

Kütle merkezi

$r_G'm = \Sigma(mr')$

r'_G :orjinde olduğu için sıfıra eşittir.

$r_G'\Sigma m=0$

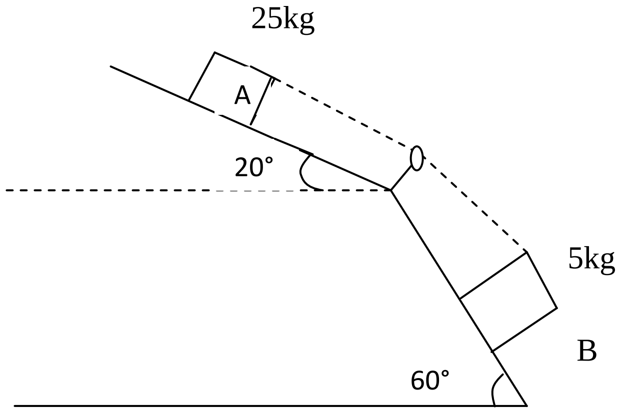
$\Sigma(mr')=0$

2.6. Maddesel Noktanın Doğrusal Hareketi

Dış kuvvetler etkisinde bir noktanın bir doğru üzerinde hareket ettiğini düşünürsek ;

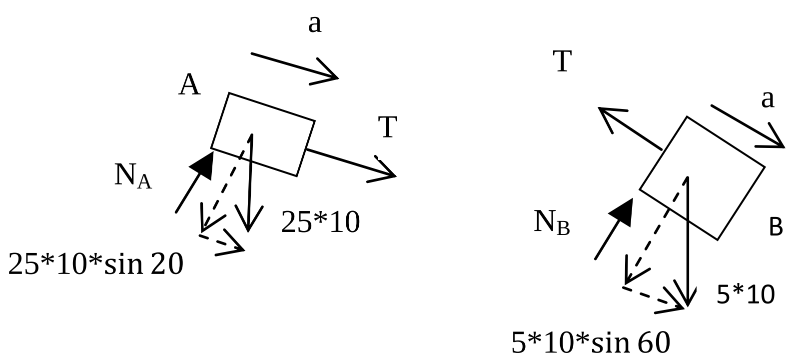
$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$ olur

<u>ÖRNEK</u>



Sürtünmeyi ihmal ederek ve ikisi birden serbest bırakılırsa şekildeki kütleler 3sn'de ne kadar yol alır $g=10 m/sn^2$.

Şekil 2.7.



Şekil 2.8.

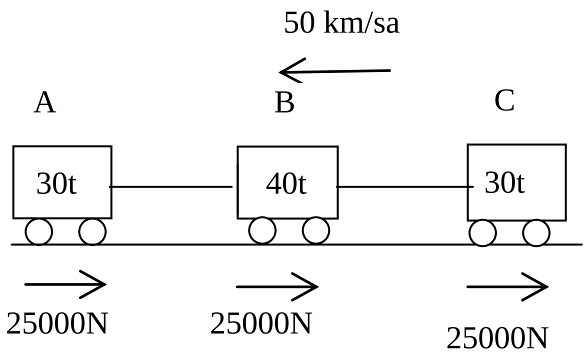
$\Sigma F = ma$

T+25*10*sin 20 =25a

-T+5*10*sin 60 =5a

30a=128,8 a= 4,29 m/sn^2 $d=at^2/2 = 19,32$ m

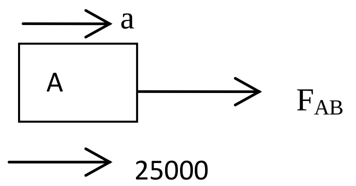
ÖRNEK



Şekil 2.9.

Şekildeki tren 50 km/sa hızla yol almaktadır. Fren yapılınca birbirlerine bağlanma yerlerinde ne kadar kuvvet iletilir. Vagon başına fren kuvveti 25000 N dur. ($g=10\ m/sn^2$)

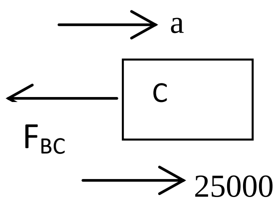
$\Sigma F = (\Sigma m)a$ $\quad\quad$ $3*25000=100000*a$ $\quad\quad$ $a=0,75\ m/sn^2$



$25000+F_{AB} = 30000*(0,75)$

$F_{AB} = -2500$ N

Şekil 2.10.

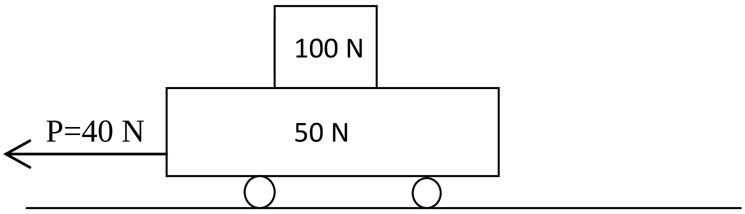


$25000-F_{BC} = 30000*(0,75)$

$F_{BC} = 2500$ N

Şekil 2.11.

ÖRNEK

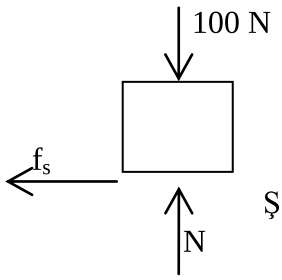


Şekil 2.12.

100 N'luk sandık ile 50 N'luk araba arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları sırası ile $\mu_s = 0{,}25$ ve $\mu_k = 0{,}15$ dir. P=40 N (tekerleklerde sürtünme yok)

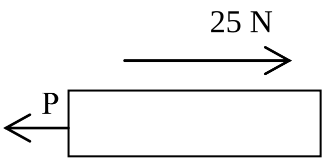
a) Arabanın ivmesi
b) Sandığın ivmesi
c) Arabanın sandığa göre ivmesini bulunuz.

Statik durumda :



en fazla $f_s = \mu_s * N = 0{,}25*100 = 25$ N

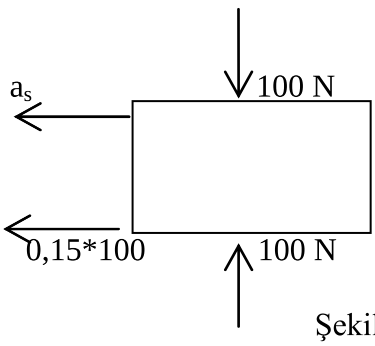
Şekil 2.13.



$\Sigma F = 0$ $\quad$ $P-25 = 0$ $\quad$ $P=25<40$ olduğundan sandık hareket eder.

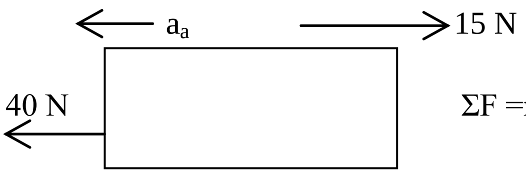
Şekil 2.14.

Sandığın arabaya göre ivmesi sıfır olduğu için ($\mu = \mu_d = 0{,}15$)



$\Sigma F = ma$ $\quad$ $0{,}15*100 = (100\, a_s)/g$ $\quad$ $a_s = 0{,}15*g = 1{,}47 \text{ m/sn}^2$

Şekil 2.15.



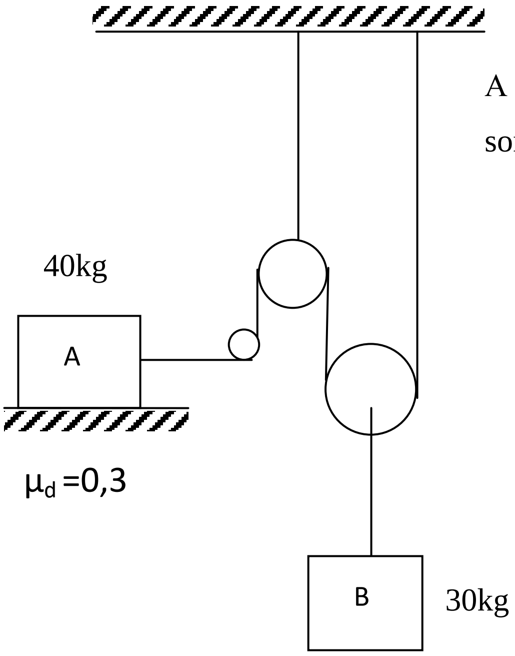
$\Sigma F = ma$ $\quad$ $40-15 = (50\, a_a)/g$ $\quad$ $a_a = 4{,}8 \text{ m/sn}^2$

Bağıl ivme = $4{,}8-1{,}47 = 3{,}43 \text{ m/sn}^2$

Şekil 2.16.

ÖRNEK

A ve B kütleleri aynı anda serbest bırakılırsa 1 sn sonra B'nin hızı ne olur. (g=10 m/sn^2)

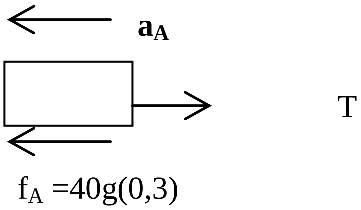


Şekil 2.17.

$2S_B + S_A = L$

$2a_B + a_A = 0$

$a_A = -2a_B$



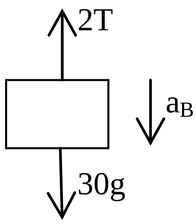
Şekil 2.18.

$\Sigma F = ma$

$-T+40g(0,3)=40a_A$

$-T+40g(0,3)=40(-2a_B)$

$T - 40g(0,3)=80a_B$…………..1



Şekil 2.19.

$\Sigma F = ma$

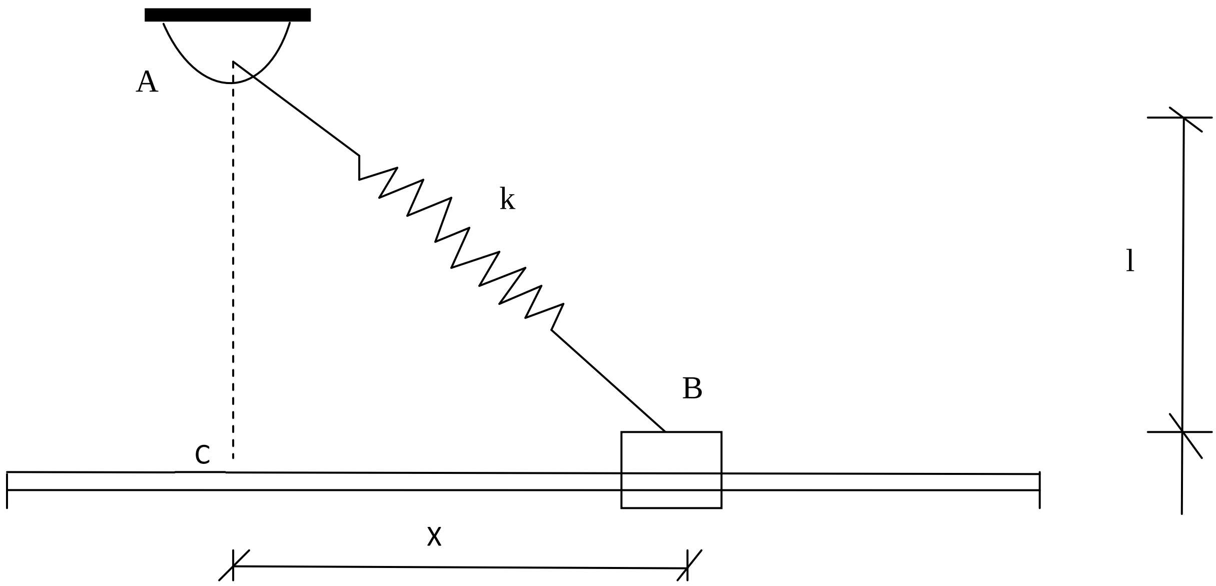
$-2T + 30g = 30a_B$…………2

1 ve 2 denklemlerinin ortak çözümünden $a_B = 0{,}3095 m/sn^2$

$V_B = 0{,}3095$ m/sn

ÖRNEK

Katsayısı “k” olan bir AB yayı A ucundan bir mafsala B ucundan ise w ağırlığındaki bir bileziğe bağlıdır. Kuvvet sıfırken yayın boyu l ise bileziğin ivmesini x uzaklığının fonksiyonu olarak ifade ediniz. Sürtünme ihmal.



Şekil 2.20.

$\Sigma F = ma$

Yay kuvvetinin yatay bileşeni

$F_{yay} = k * \Delta l$ Δl=son boy-ilk boy

Son boy $=\sqrt{l^2 + x^2}$, $\Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l$

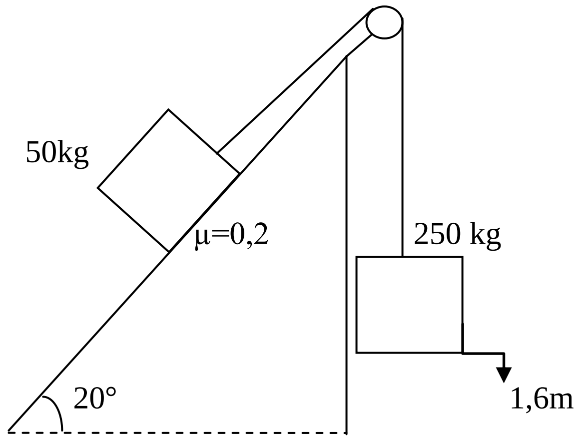
$F_{yay} = k\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right)$

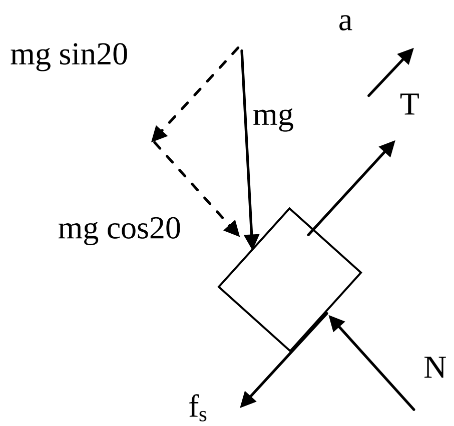
Yatay bileşeni $=k\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right)\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}$

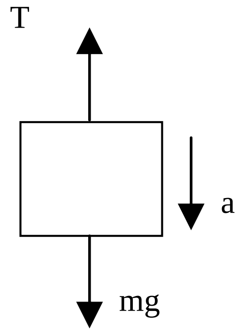
$a=F/m$ $a=(g*k)/w\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right)\frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}$

ÖRNEK

Sistem serbest bırakılınca sistemin ivmesi ve ipteki gerilme ne olur? 250 kg lık cisim 1,6 m aşağıya indiğinde hızı ne olur (g=10 m7sn^2)







D’lambert prensibi

250*10-50*10*sin20-0,2*50*10*cos20=250*a+50*a

2500-171,01-93,97=300*a a=2235,04/300=7,45 m/sn^2

250 kg cisim:

-T+250*10=250*7,45 T=637,5 N

Kontrol:

T-mgsin20-0,2mgcos20=ma T-500sin20-0,2*500*cos20=50*7,45

637,5-171,01-93,97=50*7,45 372,5=372,5

Hız: $v^2=v_0^2+2*a*x$ $v^2=2*7,45*1,6$ v=4,88 m/sn (sayfa 67)

2.7. Maddesel Noktaların Eğrisel Hareketi

Eğrisel hareket yapan bir maddesel noktanın ivmesi daha önceki 3 tür bileşenlerden (dik bileşenler, teğetsel ve normal bileşenler, kutupsal bileşenler) herhangi birine göre ayrılır ve her doğrultu için Newton denklemi skaler olarak yazılır.

Dik bileşenler :

$\Sigma F_x = ma_x$ $\Sigma F_y = ma_y$ $\Sigma F_z = ma_z$

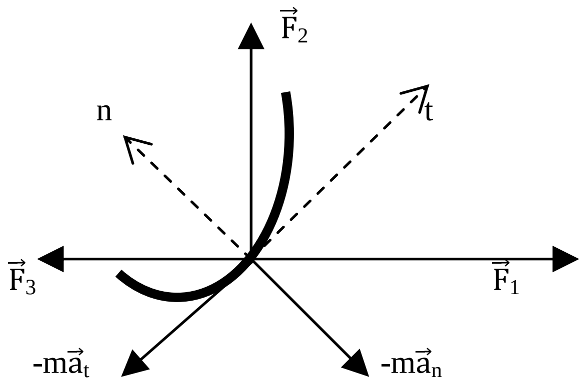
$\Sigma F_x = m\ddot{x}$ $\Sigma F_y = m\ddot{y}$ $\Sigma F_z = m\ddot{z}$

Teğetsel ve normal bileşenleri :

$\vec{i}_t$ ve $\vec{i}_n$ doğrultularında $\Sigma F_t = ma_t$ $\Sigma F_n = ma_n$

yada, $\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt}$ $\Sigma F_n = m\,\frac{V^2}{R} = m\,w^2\,R = m\,v\,\omega$ ω: açısal hız

Dinamik denge:



Şekil 2.21.

Newton denklemini uygulamak yerine atalet vektörünü dış kuvvetlere ekleyerek denge denklemini yazmakta bir yöntem olarak kullanılır.

2.8. Newtonun Çekim Kanunu

Newton'un evrensel çekim kanununa göre "m ve M" kütleleri olan r uzaklıkta iki maddesel nokta birbirini

$F=G\frac{Mm}{r^2}$

şiddetinde kuvvetler ile çeker.

G:yer çekim sabiti, $G=(6,673\pm0,003)*10^{-11}\ m^3/(kg*san^2)$ (SI)

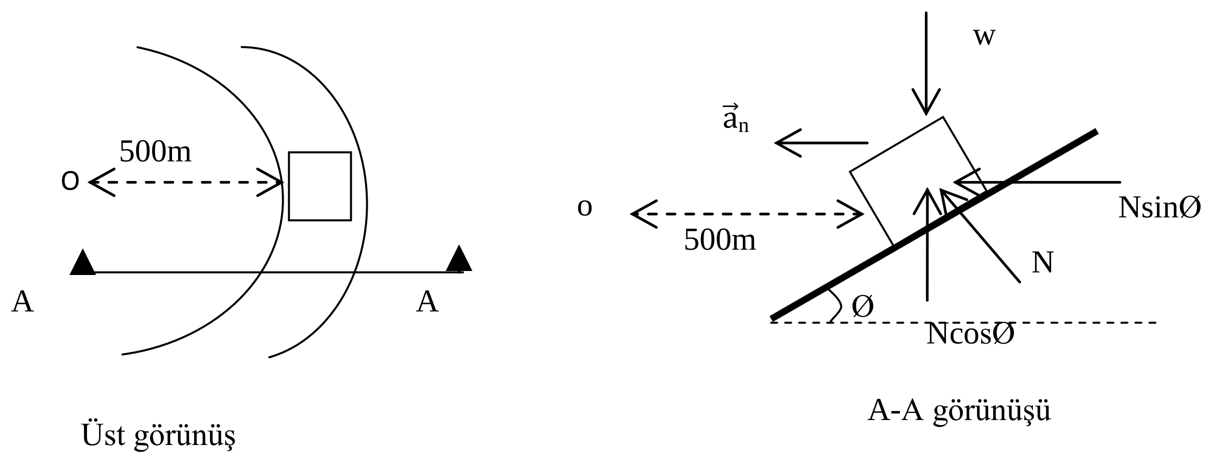
Yeryüzü ile cisim arasındaki çekim kuvveti cismin ağırlığıdır.

$w = m\ g = G\frac{Mm}{r^2}$ $g = \frac{GM}{r^2}$ r:dünya merkezine uzaklık

r değiştikçe g değişir yani kutuplar ile ekvatordaki g'ler aynı değildir.

<u>ÖRNEK</u>

Bir otomobil 500 m yarıçaplı deverli bir yolda 55km/sa hızla gidiyor. Hiç sürtünme olmadığına göre otomobilin kaymaması için dever açısı ne olmalı.



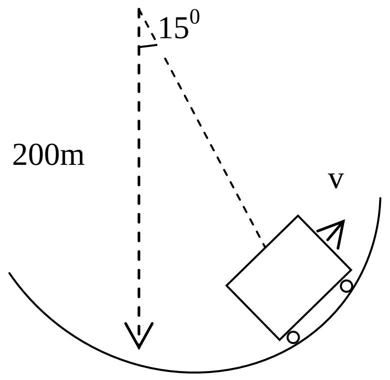
Şekil 2.22.

55 km/sa=15,28 m/sn Düşey doğrultu: $\Sigma F = ma$ w= NcosØ…………..1

Normal doğrultu: $\Sigma F_n = m\frac{V^2}{R}$ $N \sin Ø = \frac{w}{g}\,\frac{15{,}28^2}{500}$…….2

2/1 tanØ =0,0461 Ø =2,72°

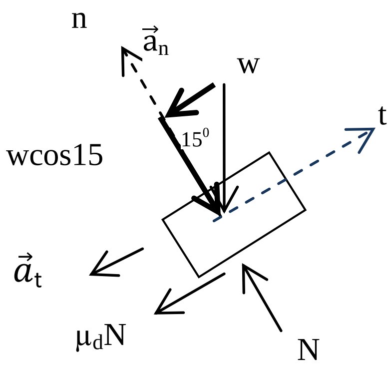
ÖRNEK



Şekil 2.23.

20 kN ağırlığındaki bir otomobil v=60 km/sa hız ile 200 m yarıçaplı eğimi artan bir yolda gidiyor. Eğer dinamik sürtünme katsayısı μ_d=0,55 ise şekildeki konumda yavaşlama İvmesi ne olur. (g=9,81 m/sn^2)

Normal doğrultuda:



Şekil 2.24.

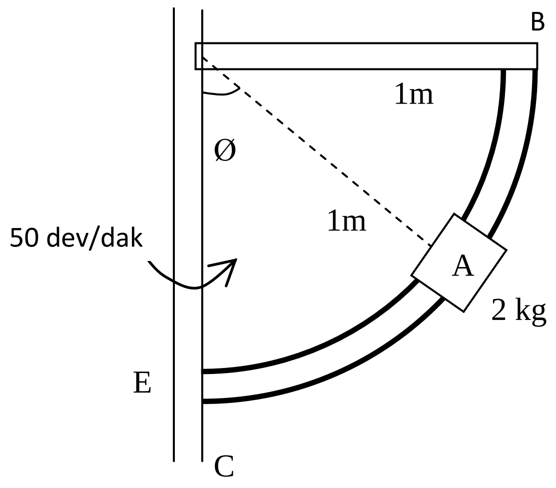
60 km/sa=16,67 m/sn $N - w\cos 15 = \frac{v^2}{R}\,\frac{w}{g}$

$N = 20000\cos 15 + \frac{16{,}67^2}{200}\,\frac{20000}{9{,}81}$ N=22150 Newton

Teğet doğrultuda: $20000\sin 15 + (0{,}55)(22150) = \frac{20000}{9{,}81}\,a_t$ a_t= 8,51 m/san^2

ÖRNEK

Gürültü yapma ahşap el davul



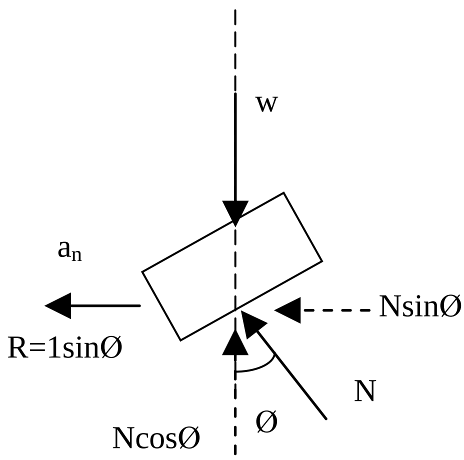
Şekil 2.25.

Dairesel bir çubuk w=50 dev/dak açısal hızla dönmektedir. A bloku çubuk üzerinde sürtünmesiz kayabiliyor. kütlesi 2 kg olduğuna göre hangi Ø açısında dengede olur. ($g = 10\ m/sn^2$)

50 dev/dak =50 $\frac{2\pi\ rad}{60\ sn}$ =5,23 rad/sn

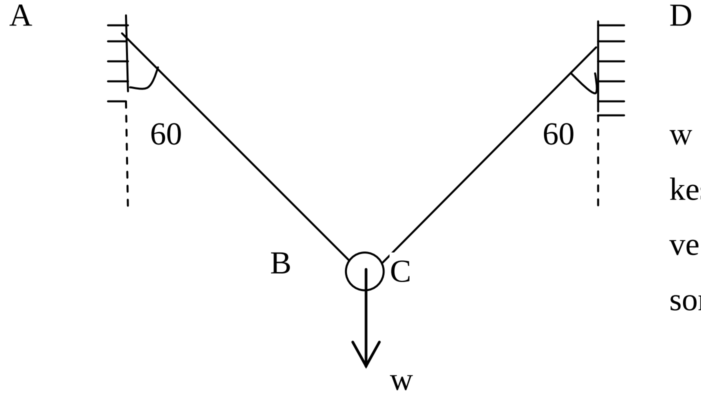
$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R*w)^2}{R} = R\ w^2 = 1 \sin Ø (5,23)^2$

$\left.\begin{array}{ll} \Sigma F_y = 0 & 2*10 - N\cos Ø = 0 \\ \Sigma F_x = ma_n & N\sin Ø = 2\sin Ø (5,23)^2 \end{array}\right\}$ Ø= 69,0°



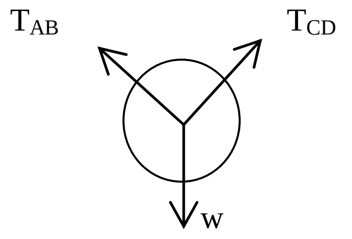
Şekil 2.26.

ÖRNEK



w ağırlığı iki tel ile tutulmaktadır. AB teli kesilirse CD telindeki gerilme kesilmeden önce ve kesilmeden sonra nedir? kesmeden hemen sonra ivme nedir ?

Şekil 2.27.

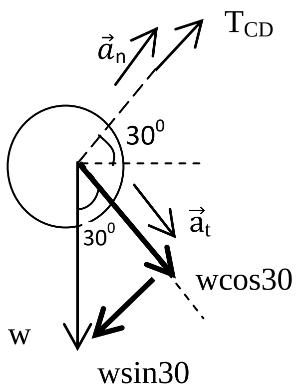


$\Sigma F_x = 0 \qquad T_{AB} \cos 30 = T_{CD} \cos 30$

$\Sigma F_y = 0 \quad \frac{1}{2} * 2\, T_{CD} = w \qquad T_{CD} = w$

Şekil 2.28.

Kesmeden sonra:



Şekil 2.29.

İlk anda hız sıfırdır.

$\Sigma F_n = m\, a_n \qquad \Sigma F_n = 0 \qquad T_{CD} - w\sin 30 = 0 \qquad T_{CD} = w/2$ olur.

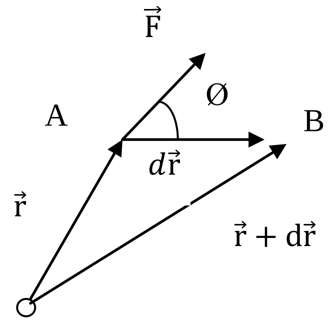
$\Sigma F_t = m a_t \qquad w\cos 30 = m a_t \qquad a_t = g\cos 30 = 0{,}866g$

BÖLÜM 3. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ İŞ VE ENERJİ

3.1. Giriş

Bir önceki bölümde $\vec{F} = m\vec{a}$ denklemini kullanarak $\vec{F}$ kuvveti etkisinde bir maddesel noktanın $\vec{a}$ ivmesini ve kinetik yöntemlerle de hız ve yer değiştirmesini bulduk. Bazı problemlerde daha uygun olacağı için $\vec{F}=m\vec{a}$ başka şekillere dönüştürülebilir. Bunlardan birisi iş ve enerji yöntemimi olup kuvvet, kütle, hız ve yer değiştirmelerle ilgili bağıntılardan hareket eder.

3.2. Bir Kuvvetin İşi



Şekil 3.1.

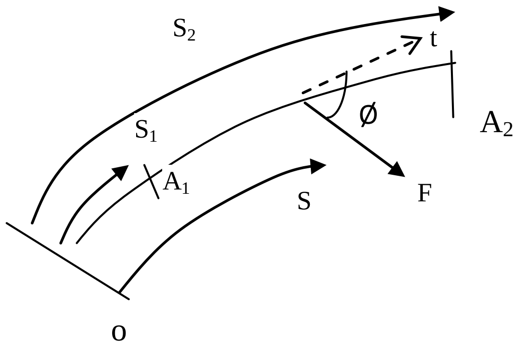
Bir maddesel nokta A'dan B'ye hareket ederken üzerine $\vec{F}$ gibi bir kuvvet etki ediyorsa bu kuvvetin yaptığı iş;

$dU=\vec{F}\circ d\,\vec{r}$ olur. Skaler çarpım tanımından

$dU =|\vec{F}|\,|\overrightarrow{dr}|\cos\emptyset=F(ds\cos\emptyset) =(F\cos\emptyset)ds$

dik koordinatlar cinsinden: $dU=F_x\,d_x+F_y\,dy+F_z\,dz$

işin şiddeti ve işareti vardır. Boyutu (kuvvet * uzaklık) tır. Doğrultuları aynı iken kuvvet ve yer değiştirme aynı yönde ise dU=Fds, kuvvet ve yer değiştirme ters yönde ise dU= -Fds, ikisi birbirine dik ise iş sıfırdır.



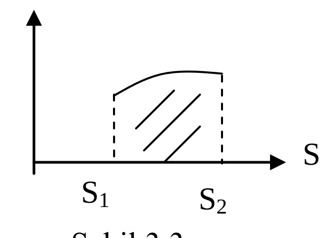
Şekil 3.2.

Bir maddesel nokta A_1'den A_2'ye giderken $\vec{F}$ gibi bir kuvvetin etkisinde ise üzerinde şu toplam iş yapılır.

$U_{12} = \int_{A1}^{A2} \vec{F} \circ d\,\vec{r}$ veya F_t teğetsel bileşen olduğuna göre

$U_{12} = \int_{S1}^{S2} (F\cos\text{Ø})ds = \int_{S1}^{S2} F_t \, ds$

S: yörünge üzerinde gidilen uzaklıktır. Bu integral grafikte gösterildiği gibi bir alana eşittir. Dik koordinatlar cinsinden:

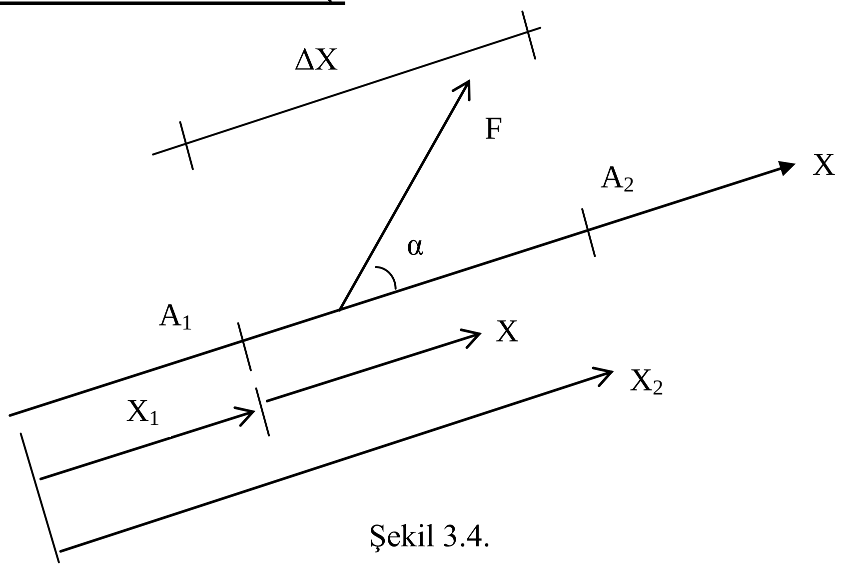


Şekil 3.3.

$U_{12} = \int_{A1}^{A2} (Fx\,dx + Fy\,dy + Fz\,dz)$

İntegrasyon yörünge boyunca olur.

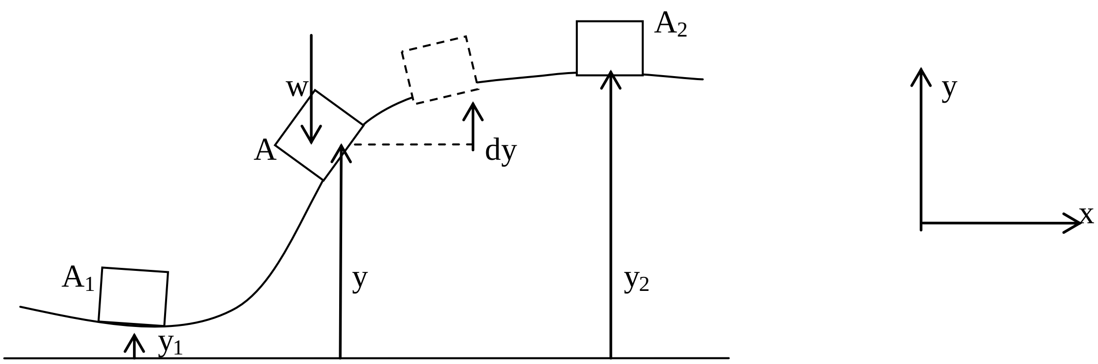
<u>Doğrusal Bir Harekette Sabit Bir Kuvvetin İşi</u>



Şekil 3.4.

$$U_{12} = F * cos\alpha * \Delta x$$

Ağırlığın Yaptığı iş



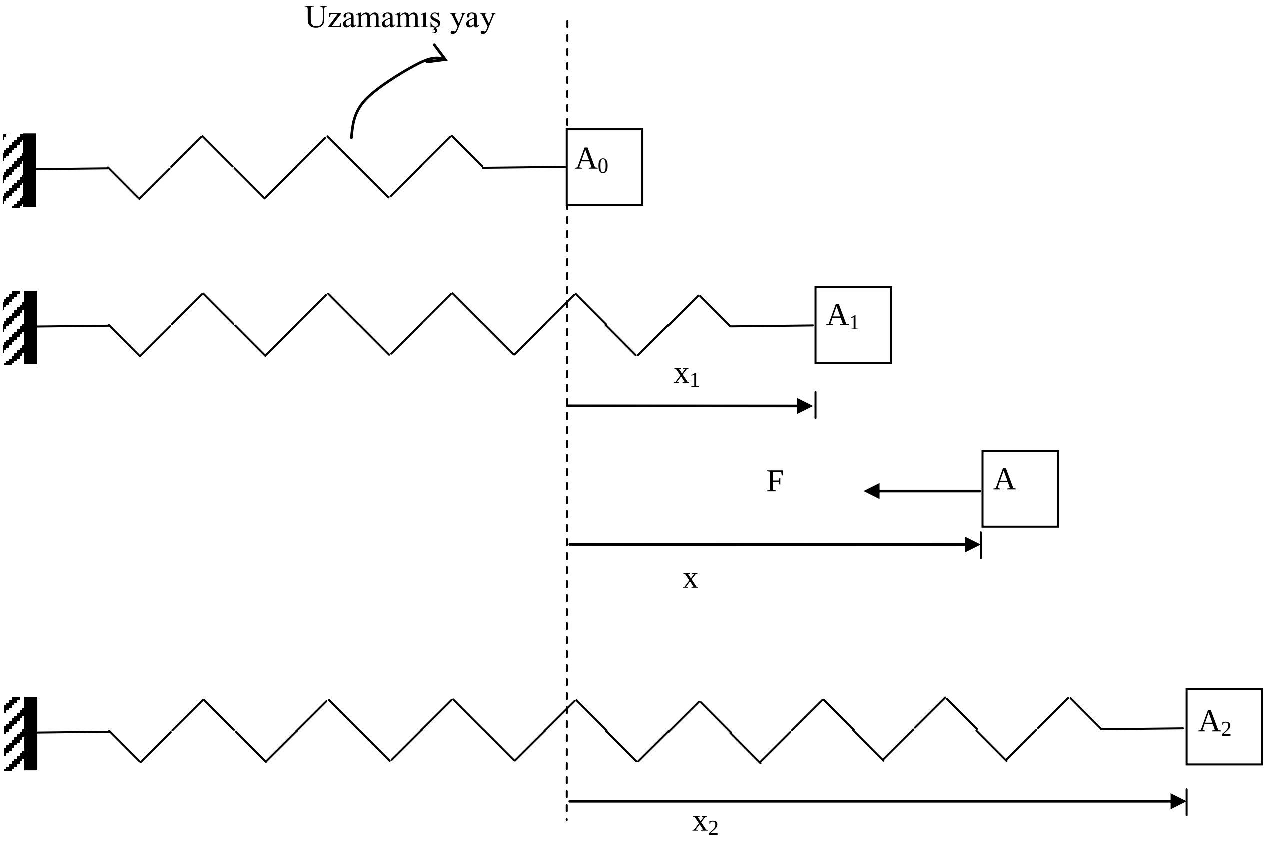
Şekil 3.5.

$F_x = 0$ $\quad$ $F_y = -w$ $\quad$ $F_z = 0$

$dU = -wdy$ $\longrightarrow$ integre edilirse

$U_{1\to 2} = -\int_{y1}^{y2} wdy = wy_1 - wy_2$ veya $U_{1\to 2} = -w\,(y_2 - y_1) = -w\Delta y$

Bir Yayın Uyguladığı Kuvvetin Yaptığı İş



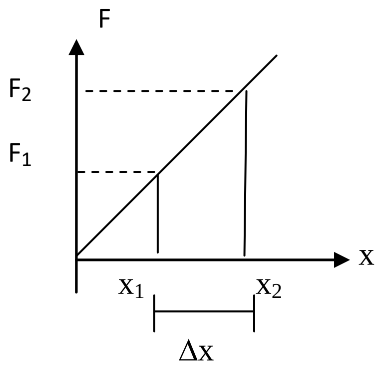
Şekil 3.6.

x uzamamış konumda olmak üzere $\vec{F} = -k\,x\,\vec{\imath}$

Cisim A_1 den A_2 ye giderken F yay kuvvetinin yaptığı iş; $dU=-Fdx = -kxdx$

$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{x1}^{x2} kxdx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$

$x_2<x_1$ olursa yani yayın boy değiştirmemiş konuma doğru dönmesi halinde yapılan iş (+) dir.



Şekil 3.7.

$U_{12} = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x$

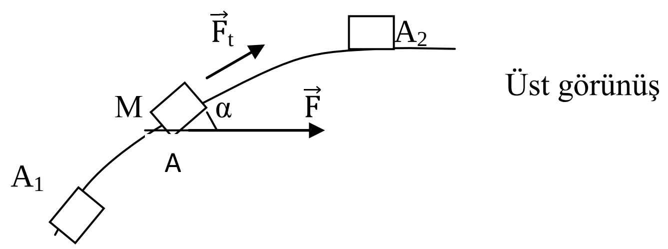
$U_{12} = -\frac{k}{2}(x_1 + x_2)(x_2 - x_1)$

$U_{12} = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$

aynı ifade elde edilir.

Kinetikte bazı kuvvetler iş yapmaz sabit noktaya etkiyen kuvvet (ds=0) harekete dik kuvvet (α=90°) sürtünmesiz yüzeyin reaksiyonu (örneğin : mesnet reaksiyonları.)

3.3. Maddesel Noktanın Kinetik Enerjisi (İş ve Enerji ilkesi)



Şekil 3.8.

Bir maddesel nokta herhangi bir yörünge üzerinde hareket ediyor olsun. $F_t = ma_t$ $F_t = m\frac{dv}{dt}$

$v = \frac{ds}{dt}$ olduğuna göre $F_t = m\,\frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = m\,v\,\frac{dv}{ds}$

$F_t\,ds = m\,v\,dv$ $\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

Sol taraf $\vec{F}$ kuvvetinin işi olup skalerdir. $\frac{1}{2}mv^2$ de skaler olup kinetik enerjiyi gösterir.

$T = \frac{1}{2}m\,v^2$, $U = T_2 - T_1$

Bu şunu ifade eder: Bir maddesel nokta $\vec{F}$ kuvveti etkisinde A_1 den A_2 ye hareket ederse $\vec{F}$ kuvvetinin işi maddesel noktanın kinetik enerjisindeki değişime eşittir. Buna iş ve enerji ilkesi denir.

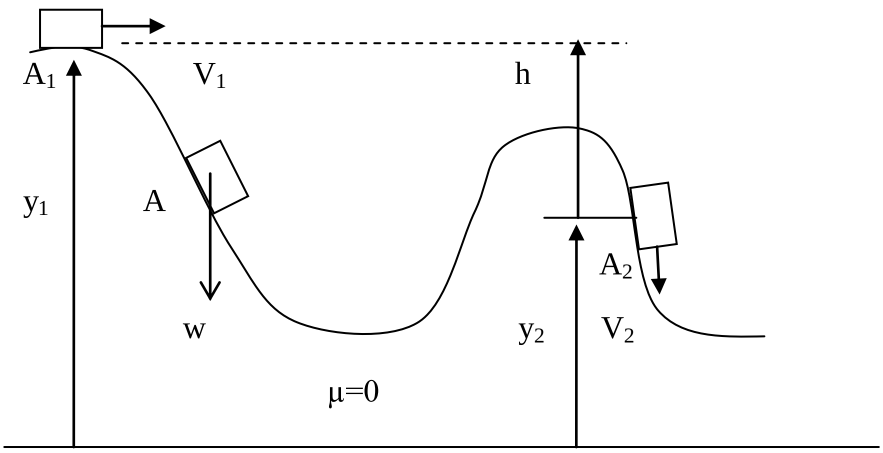
$T_1 + U_{12} = T_2$

Başka bir deyişle: Bir maddesel noktanın kinetik enerjisi A_1 den A_2 ye giderken üzerine etkiyen kuvvetlerin işine eşit bir miktar değişmeye uğrar. T kinetik enerjisi yani v hızı olan bir cismi durdurmak için –T kadar iş yapılmalıdır. Kinetik enerji ve iş aynı birimlerle ölçülür.

(T.M.B.S): $T = \frac{1}{2} mv^2 \quad [(\frac{\text{kgf}-sn^2}{\text{m}})(\frac{m^2}{sn^2})] = [\text{kgf.m}]$

(SI): $T = \frac{1}{2} mv^2 \quad [\text{kg} \frac{m^2}{sn^2}] = [\text{N.m}]$

3.4. İş ve Enerji İlkesinin Uygulamaları



Şekil 3.9.

$T_2 = T_1 + U_{1\to2} \qquad T_2 - T_1 = U_{1\to2}$

$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = mgh$ (ağırlığın yaptığı iş)

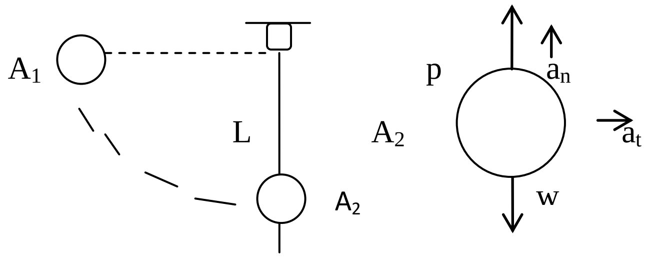
$v_1 = 0 \qquad v_2 = \sqrt{2gh}$

$v_1 \neq 0 \qquad \frac{1}{2}\frac{w}{g} v_2^2 - \frac{1}{2}\frac{w}{g} v_1^2 = w\,h$

$v_2^2 - v_1^2 = 2gh$

Görüldüğü gibi iş ve enerji ilkesinin şu üstünlükleri vardır:

1) A_2 deki hızı bulmak için arada bir A noktasındaki ivmeyi bulup integre etmeye gerek yoktur.
2) Hesaba giren bütün büyüklükler skalerdir. Bileşenleri ile uğraşmaya gerek yoktur.
3) İş yapmayan kuvvetlerin bulunması gerekmez. Ancak bulunması gerekmeyen ivme ve iş yapmayan kuvvetler bilinmek istenirse Newton denklemi yine kullanılmak zorundadır.



Şekil 3.10.

$a_n = v^2/R$

yukarıda $\sqrt{2gh}$ bulunmuştu.

$\frac{mv^2}{L} = -w + p$ $\quad\quad \frac{m(2gL)}{L} = -w + p$ $\quad\quad p = 3w$

3.5. Maddesel Noktalar Sistemi

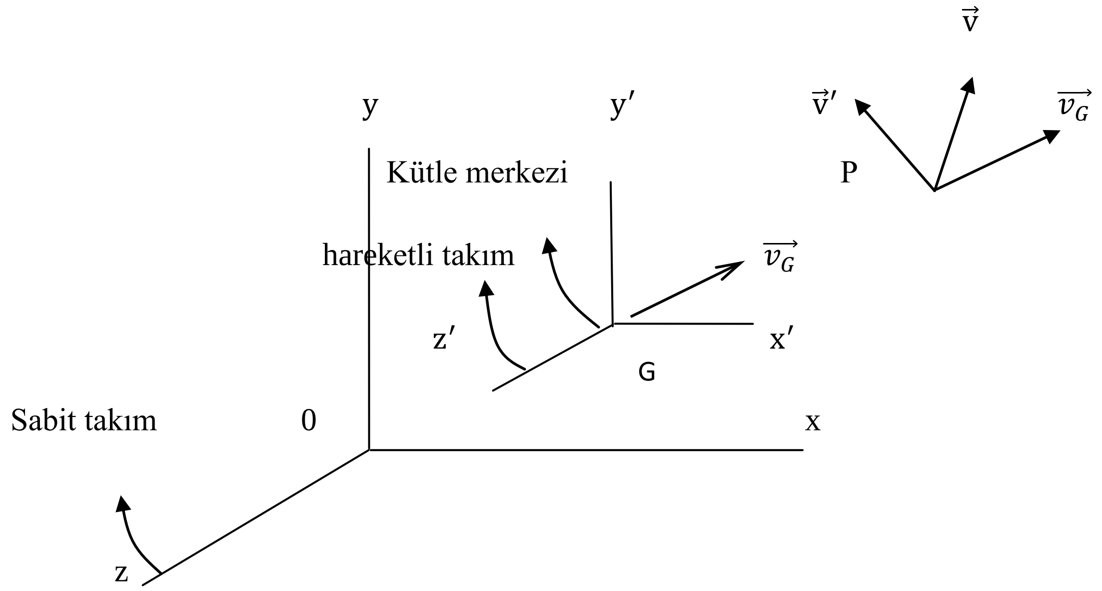
İş ve enerji ilkesi birçok maddesel noktadan oluşan sisteme de uygulanabilir. Her bir nokta için ayrı ayrı denklem yazılıp toplanırsa.

$$\left.\begin{array}{l} \text{1.cisim } T_1 + U_{12} = T_2 \\ \text{2.cisim } T_1 + U_{12} = T_2 \\ \text{3.cisim } T_1 + U_{12} = T_2 \end{array}\right\} \Sigma T_1 + \Sigma U_{12} = \Sigma T_2$$

U_{12} içerisinde iç ve dış kuvvetlerin işleri vardır. Bu uygulama uzamayan ip, zincir gibi elemanlar ile bağlı kütlelerden oluşan sistemlerde yararlıdır. Çünkü bağlantıdaki gerilme iki uçtaki kütlelere aynı işi ters işaretli uygulayacağından sonuç olarak hiç katkısı olmaz.

<u>Ağırlık Merkezinden Geçen Bir Karşılaştırma Takımının Kullanılması</u>

Pek çok sayıda maddesel noktadan oluşan bir sistemin kinetik enerjisini hesaplarken çoğu zaman sistemin G ağırlık merkezinin hareketi ile sistemin G'ye bağlanmış hareketli bir karşılaştırma takımına göre bağıl hareketini ayrı ayrı incelemek daha uygun olur.



Şekil 3.11.

x-y-z takımına göre kütle merkezinin hızı

$\vec{v} = \overrightarrow{v_G} + \vec{v}'$

x′− y′ −z′ takımına göre maddesel noktanın hızı

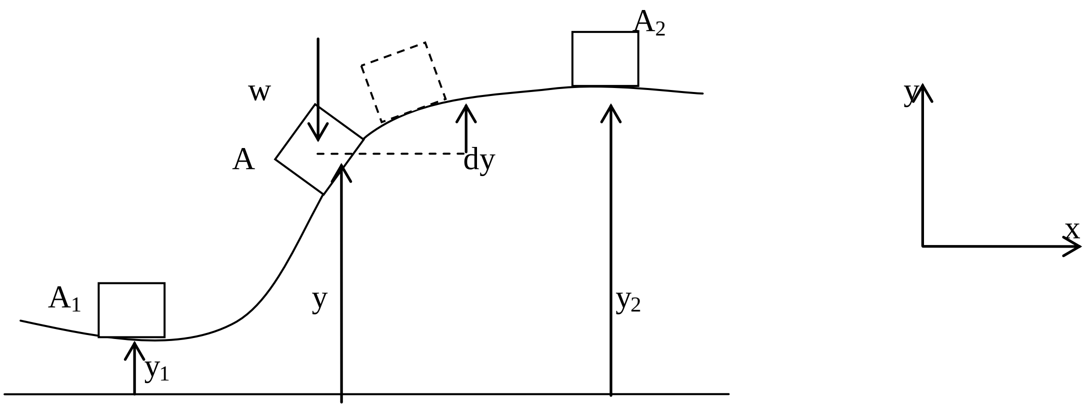
x-y-z takımına göre maddesel noktanın hızı

$T=\frac{1}{2}\Sigma m\, v^2=\frac{1}{2}\Sigma(m\vec{v}\circ\vec{v})$ $\qquad$ $T=\frac{1}{2}\Sigma[m(\overrightarrow{v_G}+\vec{v}')\circ(\overrightarrow{v_G}+\vec{v}')]$

$T=\frac{1}{2}(\Sigma m)v_G^2+v_G\,\Sigma m\, v'+\frac{1}{2}\Sigma(m\ v'^2)=\frac{1}{2}(\Sigma m)v_G^2+\frac{1}{2}\Sigma(m\ v'^2)$

Bir maddesel noktalar sisteminin kinetik enerjisi G kütle merkezinin (Kütlenin tamamı G'de toplanmış gibi farz ederek) kinetik enerjisi ile sistemin hareketli takımına göre hareketindeki kinetik enerjisini toplayarak elde edilebilir.

3.6. Potansiyel Enerji



Şekil 3.12.

Daha önce incelediğimiz kayan blok problemini ele alalım.

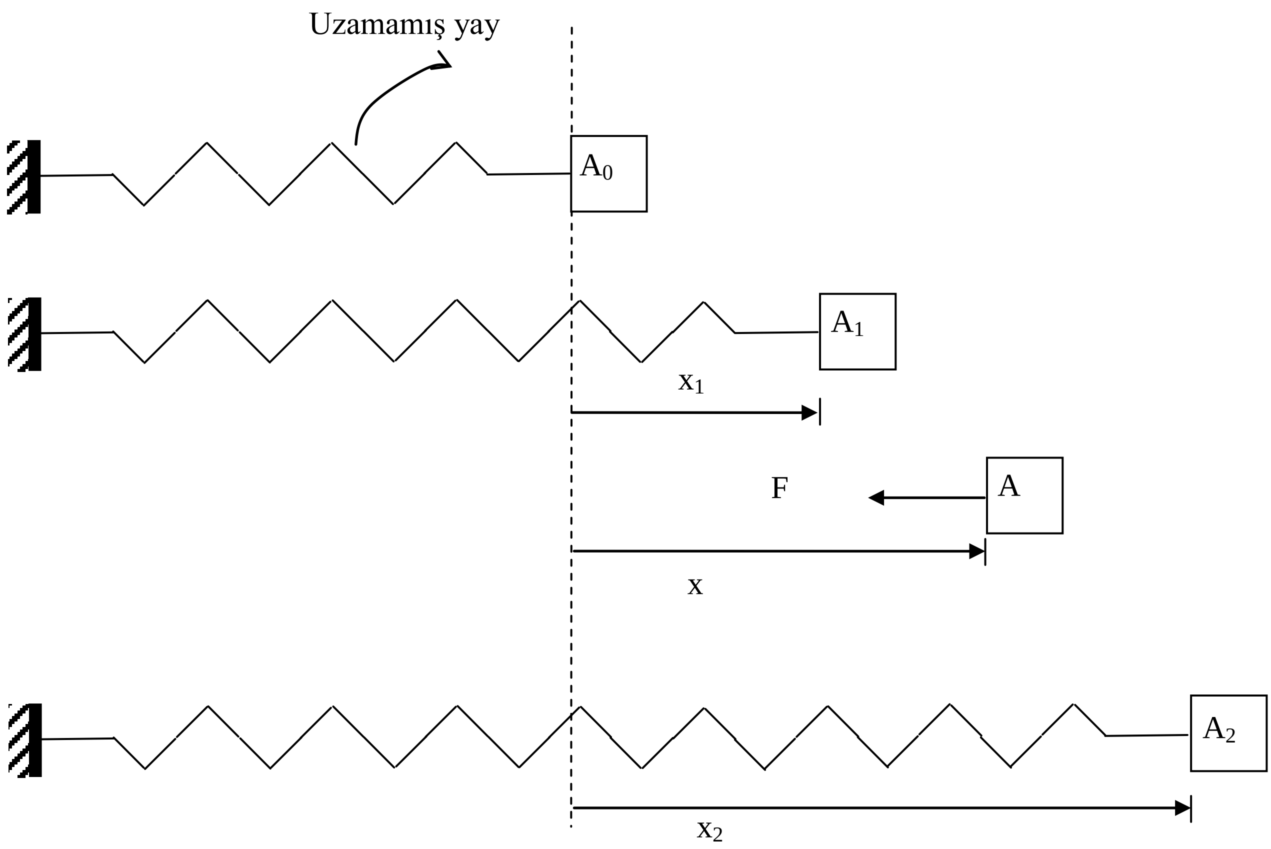
$U_{1\rightarrow 2} = w*y_1 - w*y_2 = (v_g)_1 - (v_g)_2$

$w*y = v_g$ fonksiyonuna $\vec{w}$ çekim kuvvetinin potansiyeli denir. Ya da potansiyel enerjisi enerjisi denir.

$(v_g)_2 > (v_g)_1$ ise potansiyel enerjisi artıyordur ve yapılan iş negatiftir.

Ağırlık kuvveti pozitif iş yaptıkça potansiyel enerjisi düşer. <u>Denklemde yalnız koordinat farkı olduğuna göre potansiyel enerji için karşılaştırma düzeyi seçimi yeterlidir.</u>

Şimdi yay'a bağlı A noktasının A_1 den A_2 ye hareketini düşünelim.



Şekil 3.13.

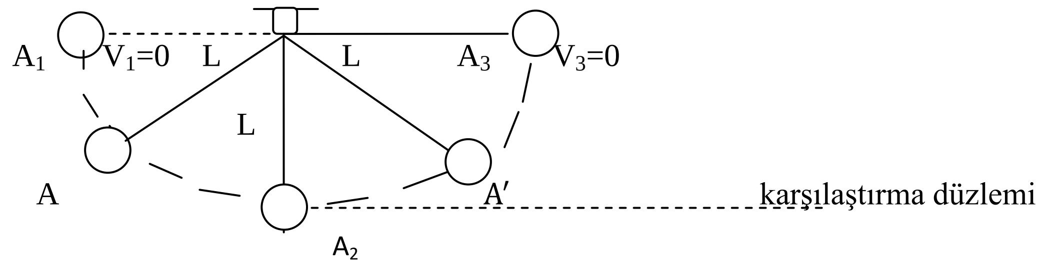
Yay kuvvetinin işi $U_{1\to 2} = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ idi. Buna göre $U_{1\to 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2$ olur

V_e =Yay potansiyel enerjisi. $= \frac{k}{2}(x^2)$

3.7. Enerjinin Korunumu

$T_1 + PE_1 = T_2 + PE_2$ T=Kinetik enerji, PE=Potansiyel enerji

T+PE toplamına sistemin toplam mekanik enerjisi denir. Düşey düzlemde bir sarkaç düşünelim.



Şekil 3.14.

A₁ de $T_1=0$, $PE_1=wL$ $T_1+PE_1=wL$

A₂ de $T_2=\frac{1}{2}\frac{w}{g}v_2^2=wL$, $PE_2=0$ $T_2+PE_2=wL$

Hareket devam ederse $T_3=0$, $PE_3=wL$ E=T+PE toplam kinetik enerji

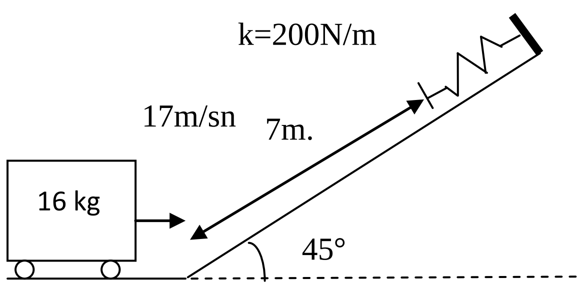
Ağırlık ve yay kuvveti konservatiftir. Fakat sürtünme değildir. Yani sürtünme kuvvetinin işi potansiyel enerji değişimi olarak gösterilmez. Yörüngeye bağlı iş yapar. Sürtünme kuvvetinin işi her zaman negatiftir. Sürtünmeli durumda mekanik ve ısı enerjilerinin toplamı sabit kalır.

Enerjinin Korunumu İlkesi

Eğer sisteme etki eden ve iş yapan kuvvetler var ise enerjinin korunumu ilkesi;

$(T+PE)_1 + U_{1\to 2} = (T+PE)_2$ halini alır.

ÖRNEK



Şekil 3.15.

Araba ne kadar yükseğe çıkar?($g=10$ m/sn^2)

$(T+PE)_1 + U_{1\to 2} = (T+PE)_2$

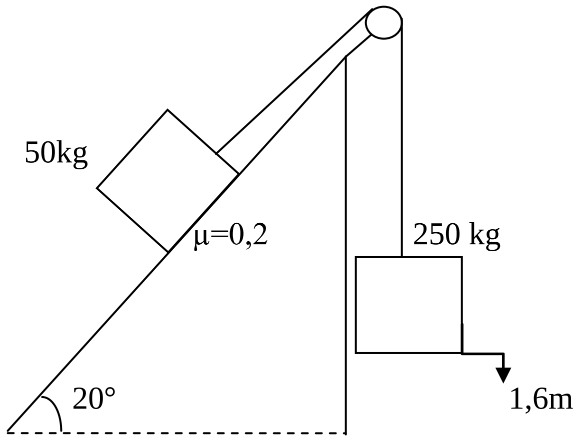
$\frac{1}{2}16(17)^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 + 16*10*\sin45*(7+\delta)$

$100\delta^2+113\delta-1520=0$ $\delta_1=3{,}33$m

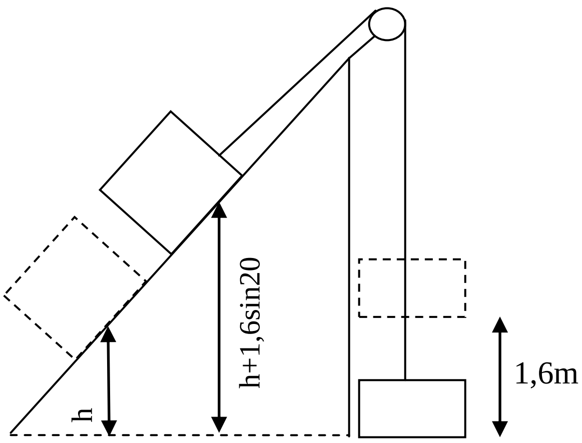
$h=(7+3{,}33)\sin45=7{,}3$m

ÖRNEK

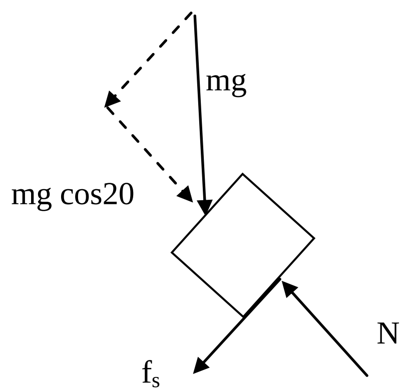
Sistem serbest bırakılınca 250 kg lık kütle 1,6m indiğinde hız ne olur ? (g=10m/sn^2)



Şekil 3.16.



Şekil 3.17a.



Şekil 3.17b.

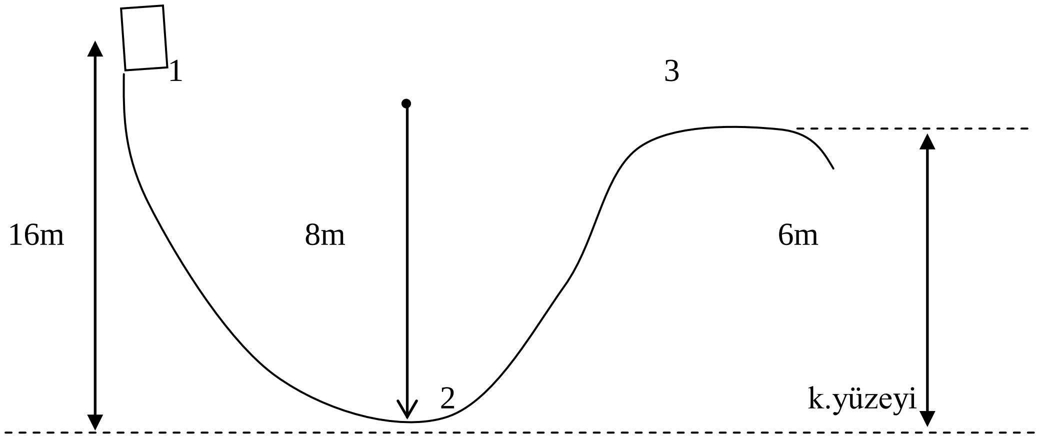
$(T+PE)_1 + U_{1\rightarrow 2} = (T+PE)_2$

$1{,}6*10*250+h*10*50-1{,}6*0{,}2*50*10\cos20=\frac{1}{2}(50+250)\,v^2+50*10*(h+1{,}6*\sin20)$

$1{,}6*10*250-1{,}6*0{,}2*500*\cos20=\frac{1}{2}(300)v^2+50*10*1{,}6*\sin20$

v=4,88 m/sn olur.

ÖRNEK



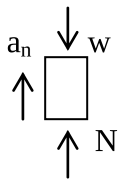
Şekil 3.18.

1000 Newton ağırlığındaki bir araba 1 noktasından harekete başlıyor.

a) 2 noktasındaki yüzey tepkisini bulunuz.

b) 3 noktasında eğrilik yarıçapının minimum emniyetli değerini hesaplayınız. ($g=9,81 m/sn^2$, sürtünme yok)

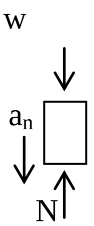
$(T+PE)_1 + U_{1\rightarrow 2} = (T+PE)_2$ $\quad$ $w*16 = \frac{1}{2}\frac{w}{g}v_2^2$ $\quad$ $v_2 = 17,7 m/sn$



$-w+N = m\,a_n$ $\quad$ $-w+N = \frac{w}{g}\frac{(17,7)^2}{8}$ $\quad$ N=5w=5000 Newton

$(T+PE)_1 + U_{1\rightarrow 3} = (T+PE)_3$ $\quad$ $0+w(16)= \frac{1}{2}\frac{w}{g}v_3^2+w(6)$ $\quad$ $v_3 = 14,0\ m/sn$

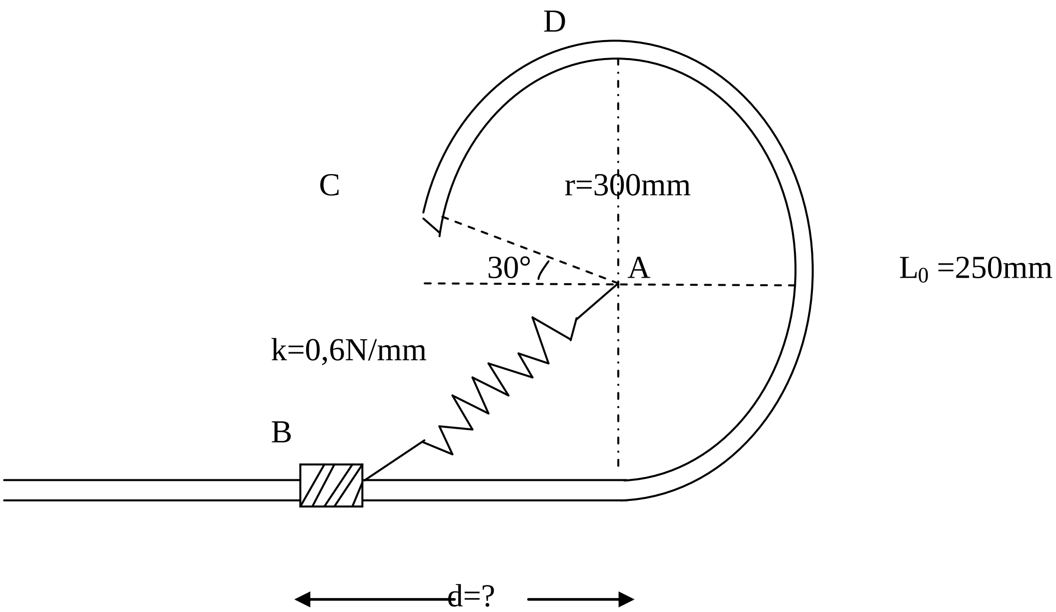
Emniyet için N≥0



$w-N = \frac{w}{g}\frac{v_3^2}{R}$ (N=0) $\quad$ $R = \frac{v_3{}^2}{g} = 20m$

ÖRNEK

.



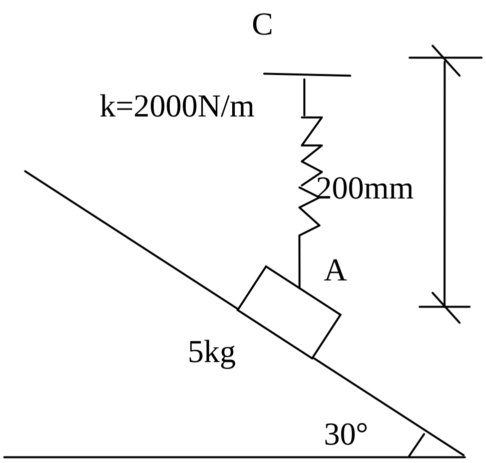
Şekil 3.19.

100 g'lık bilezik düşey düzlemdeki sürtünmesiz çubuk üzerinde kayıyor. Yayın sabiti 0,6 N/mm ve gerilmesiz uzunluğu 250 mm olduğuna göre "d"ne olmalıdır ki C'de bilezik 10m/sn hızla ayrılsın.

Yayın boyu L_i olsun; $\frac{1}{2}600(L_i -0,25)^2= \frac{1}{2}600(0,3-0,25)^2+ \frac{1}{2}(0,1)(10)^2+(0,1)(9,81)(\overset{(0,3\sin30)}{0,15}+0,3)$

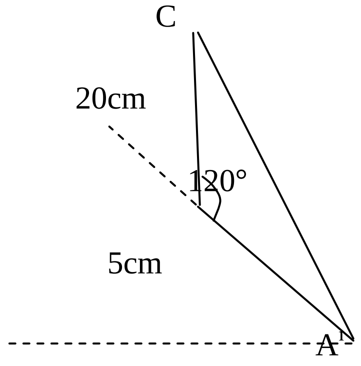
L_i =0,394m olur. $L_i^2=d^2+0,3^2$ $\sqrt{(0,394)^2-(0,3)^2}$ =d=0,2554m….

ÖRNEK



Düşeyken gerilmesiz olan yayın ucundaki cisim bırakılıyor. 50mm ilerleyince hızı ne olur? (Not: yay ile eğik düzlem arasındaki açı 60°dir, g=9,81m/sn^2)

Şekil 3.20.



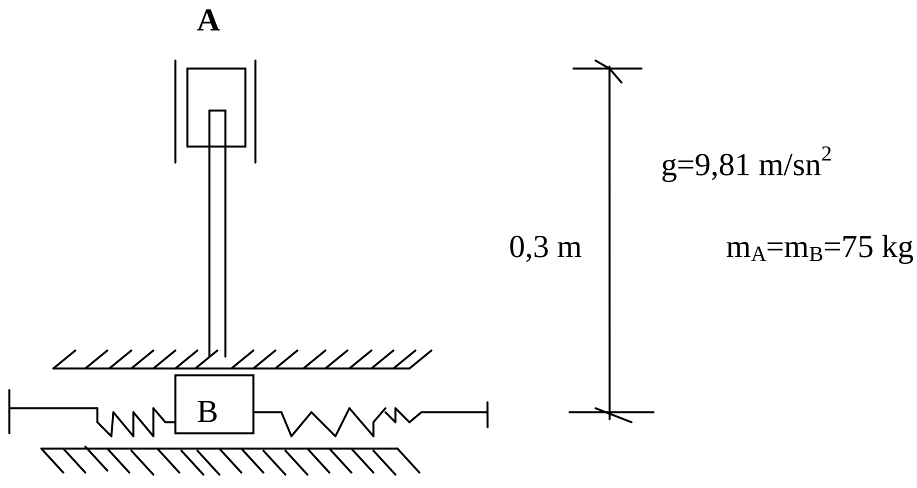
Şekil 3.21.

$CA' = 20^2 + 5^2 - 2*20*5*\cos120$ $\quad$ $CA' = 22{,}91$ cm olur.

$(T+PE)_1 + U_{1\to2} = (T+PE)_2$ $\quad$ $5*9{,}81*\sin30*\frac{50}{1000} = \frac{1}{2}5v^2 + \frac{1}{2}2000(0{,}2291-0{,}2)^2$

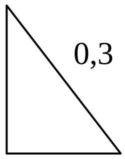
$v = 0{,}39$ m/sn olur

ÖRNEK



Şekil 3.22.

Çubuk düşey iken hızlar sıfır ve yaylar gerilmesizdir. A kütlesi 0,025 m inince v_B=? (k=900N/m)

0,025m inince 0,3-0,025  0,3

δ $\delta^2 = 0{,}3^2 - (0{,}3-0{,}025)^2$

Şekil 3.23. $\delta = 0{,}1199$m olur.

$(T+PE)_1 + U_{1\rightarrow 2} = (T+PE)_2$

$75*g*0{,}3 = 75*g*(0{,}3-0{,}025) + \frac{1}{2}75\, v_B^2 + \frac{1}{2}75\, v_A^2 + 2*\frac{1}{2}*900*(0{,}1199)^2$ …………1

Kinematik ilişki; $y_A^2 + x_B^2 = 0{,}3^2$

$2y_A\,\dot{y}_A + 2x_B\,\dot{x}_B = 0 \quad v_A = -\frac{x_B}{y_A} v_B \qquad v_A = -\frac{0{,}1199}{(0{,}3-0{,}025)} v_B$……..…..2

2 ifadesi 1 de yerine yazılırsa $V_B = 0{,}350$ m/sn olur..

3.8. Güç ve Verim

Güç birim zamanda yapılan iş olarak tanımlanır. Bir motor veya makinanın gücü yapılacak iş miktarından daha önemlidir.

Ortalama güç: $\frac{\Delta U}{\Delta t}$ limit durumun da $(\Delta t \rightarrow 0)$

Güç= $\frac{dU}{dt}$, $dU = \vec{F} \circ d\vec{r}$ Güç = $\frac{\vec{F} \circ d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \circ \vec{v}$

Mekanik güç genellikle beygir gücü (buhar beygiri) BB ile elektrik gücü watt(W) veya kilowatt(kW) ile ölçülür.

1 BB=75 kg m/sn

1 W=1 joule/sn=1 N m/sn

1 kW=1000 W

1 BB=736 W

1 kW=102 kg m/sn^2 =1,36 BB

Bir makinanın verimi

$\eta=\frac{\text{alınan iş}}{\text{verilen iş}}$ (iş sabit hızda yapılıyor ise) aynı zaman da aynı iş yapıldıklarından

$\eta=\frac{\text{alınan güç}}{\text{verilen güç}}$ olur.

Bir makinanın verimi daima 1'den küçüktür. Çok az durumlarda 1'e yakındır ve 1 sayılabilir.

ÖRNEK

Sürücü sabit 5 kW güç uygulayınca 7500 kg lık bir tramvay 10 km/sa hıza kaç saniyede ulaşır. (verim =%90)

F*v=0,9*5*1000=4500 watt 10km/sa=2,78 m/sn

$F=\frac{4500}{V}=ma$ $\frac{4500}{v}=m\frac{dv}{dt}$ $vdv = \frac{4500}{7500}dt$ t=6,44 sn

BÖLÜM 4. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ İMPULSE VE MOMENTUM

4.1. İmpulse ve Momentum İlkesi

Bu bölümde $\vec{F} = m * \vec{a}$ nın üçüncü bir kullanım şekli ortaya çıkacak ki bu hız, zaman, kütle ve kuvvetlerle ilgili problemlerde uygun olabilir

$\vec{F} = m * \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

$m\vec{v}$: Doğrusal (lineer) momentum olup hız doğrultusundadır.

T.M. Birim Sistemi $\frac{kgf * sn^2}{m} * \frac{m}{sn}$ = kfg*sn

S.I. Birim Sistemi [m*v]= kg * $\frac{m}{sn} * \frac{sn}{sn}$ = kg * $\frac{m}{sn^2}$ * sn = Newton*sn

Bu ifade sabit kütle durumu için Newton tarafından verilmiştir.

$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \int_{v_1}^{v_2} d(m\vec{v})$ $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

veya $m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2$

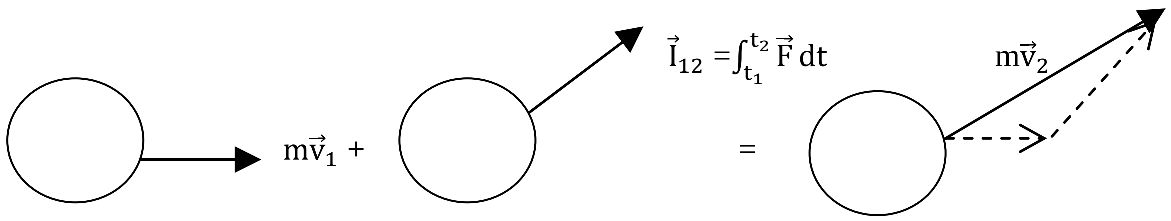
Bir maddesel nokta belirli bir süre bir $\vec{F}$ kuvveti etkisinde kalırsa momentumu o sürede F kuvvetinin impulse' ı kadar artar.

İmpulse $\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$ (doğrusal impulse)

$m\vec{v}_1 + \vec{I}_{12} = m\vec{v}_2$

$\vec{I}_{12} = \vec{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x dt + \vec{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y dt + \vec{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z dt$

Kinetik enerji ve iş skaler olduğu halde momentum ve impulse vektörel büyüklüklerdir.



Şekil 4.1.

Öyleyse üç doğrultuda

$(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = (mv_x)_2$

$(mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = (mv_y)_2$

$(mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = (mv_z)_2$

Birden çok kuvvet etki ederse

$m\vec{v}_1 + \sum \vec{I}_{12} = m\vec{v}_2$

4.2. Maddesel Nokta Sistemi

İmpulse-momentum ifadesi sistemin her maddesel noktası için yazılır ve toplanırsa

$\sum m\vec{v}_1 + \sum \vec{I}_{12} = \sum m\vec{v}_2$

İç kuvvetler hep eşit ve zıt kuvvetler olduğundan

$\sum m\vec{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{dış}\, dt = \sum m\vec{v}_2$

$\sum m\vec{v}_1 + \sum(\vec{I}_{dış})_{12} = \sum m\vec{v}_2$

Önceden Kütle merkezinin hızı (bulunmuştu)

$\sum(m\,\vec{v}) = (\sum m)*\vec{v}_G$

$= (\sum m)*\vec{v}_{G1} + \sum(\vec{I}_{dış})_{12} = (\sum m)*\vec{v}_{G2}$

Bu, tüm kuvvetler ağırlık merkezindeki tüm kütleye sahip bir maddesel noktaya etkimişçesine yazılmış momentum-impulse ifadesidir.

4.3. İmpulsif Kuvvetler

Çok kısa sürede çok büyük kuvvetlerden doğan impulse'ı hesaplamak için zamanla hesap yapmak zor olabilir. İmpulsif kuvvet denen kuvvetlerin impulse'ı yanında yay kuvveti, ağırlık kuvveti gibi kuvvetlerin impulse'ı ihmal edilir. Sürtünmesiz yüzeyde kayan kütlelerin çarpışması veya havada iki topun çarpışması gibi durumlar böyledir.

4.4. Momentumun Korunumu (Maddesel Noktalar Sistemi İçin)

$\sum m\vec{v}_1 + \sum(\vec{I}_{dış})_{12} = \sum m\vec{v}_2$

Dış kuvvetlerin impulse'ı sıfır ise

$\sum m\vec{v}_1 = \sum m\vec{v}_2$

Bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetlerin impulse'ları toplamı sıfır ise sistemin toplam momentumu sabit kalır.

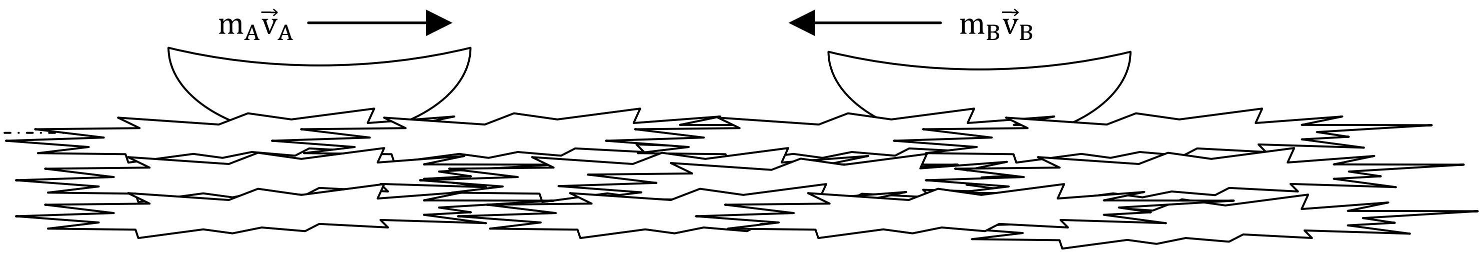
Önceden : $\sum(m\,\vec{v}) = (\sum m)\vec{v}_G$

$\vec{v}_{G1} = \vec{v}_{G2}$

Dış kuvvetlerin impulse'ı sıfır ise G'nin hızı sabittir.

Momentum Korunumunda iki Önemli Durum :

1-) Göz önüne alınan süre içinde sisteme etkiyen dış kuvvetler birbirini dengelemektedir.

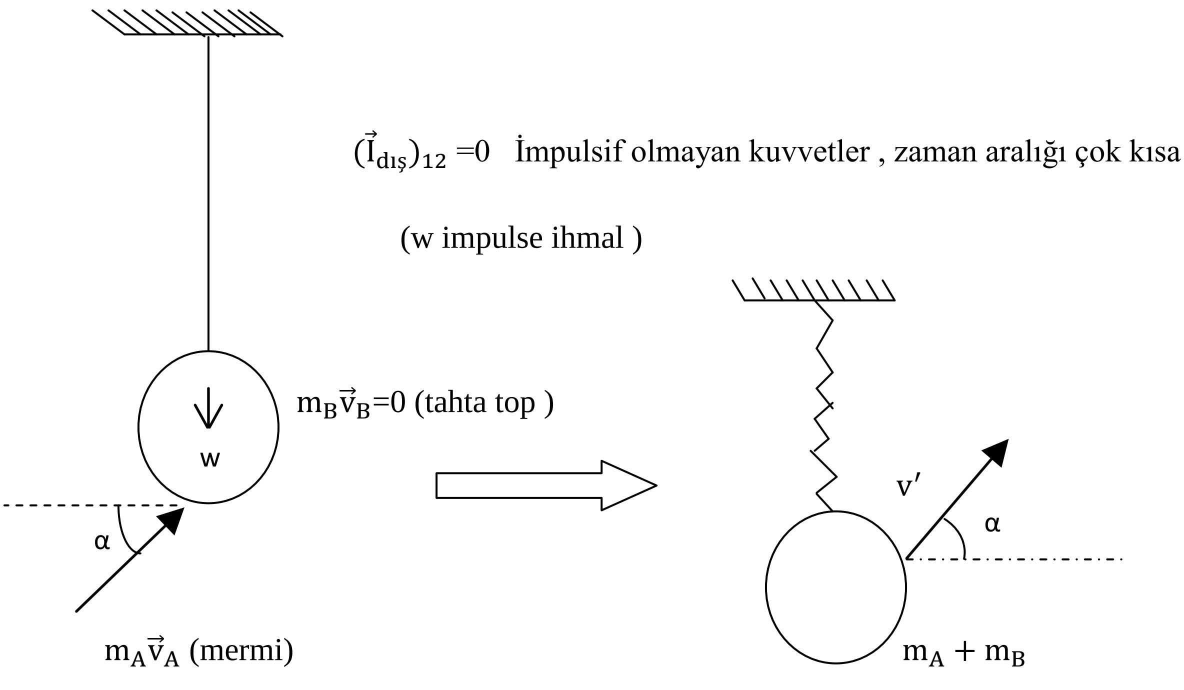


Şekil 4.2.

İki kayık birbirine bağlı ilk anda hız yok. Sonra ipin çekilmesiyle:

$\vec{v}_G$=0 (A ve B hızları zıt yönlü olduğu için kütle merkezi hızı sıfırdır.) ağırlık ve yüzey tepki kuvvetleri dengededir. Düşey impulse=0 dır.

2-) Göz önüne alınan zaman aralığı çok kısadır ve bütün dış kuvvetler impulsif olmayan tiptendir.

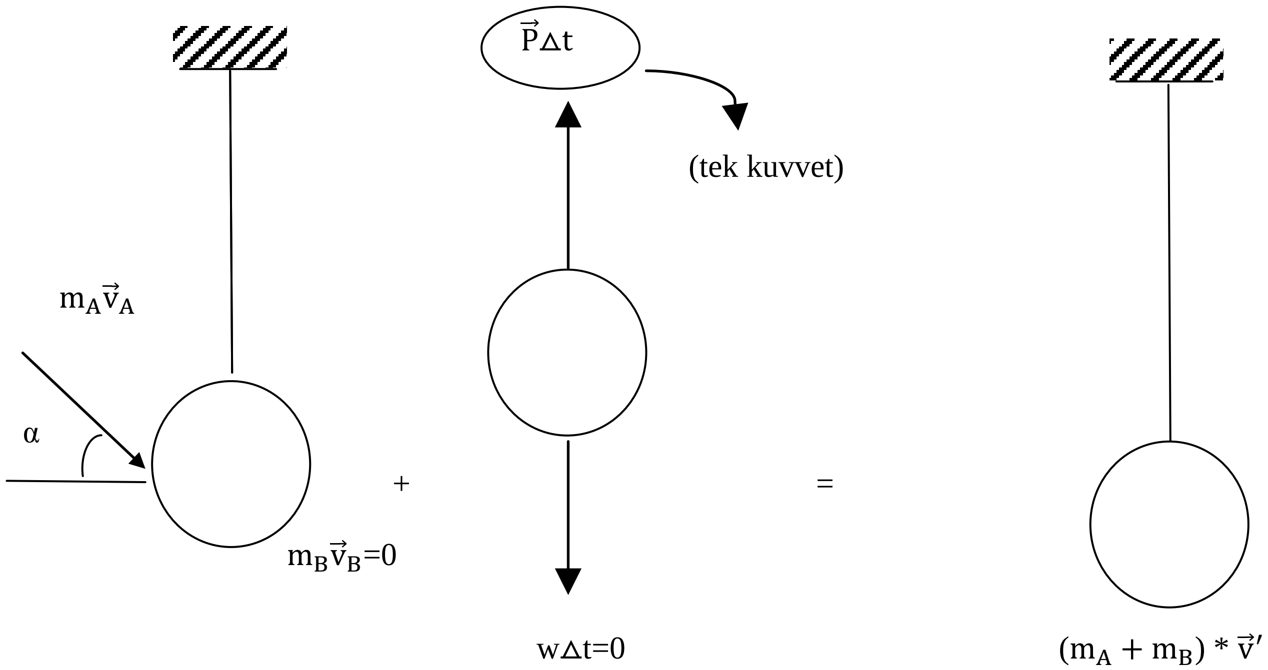


Şekil 4.3.

$\sum m\vec{v}_1 = \sum m\vec{v}_2$

$m_A\vec{v}_A + 0 = (m_A + m_B)\,\vec{v}'$

$\vec{v}_A$ ve $\vec{v}'$ aynı doğrultudadır ve bulunur. Ağırlık zaten impulsif değildir.



Şekil 4.4.

P impulsif kuvvettir.

Ağırlığın impulse'ı ihmal edilebilir.

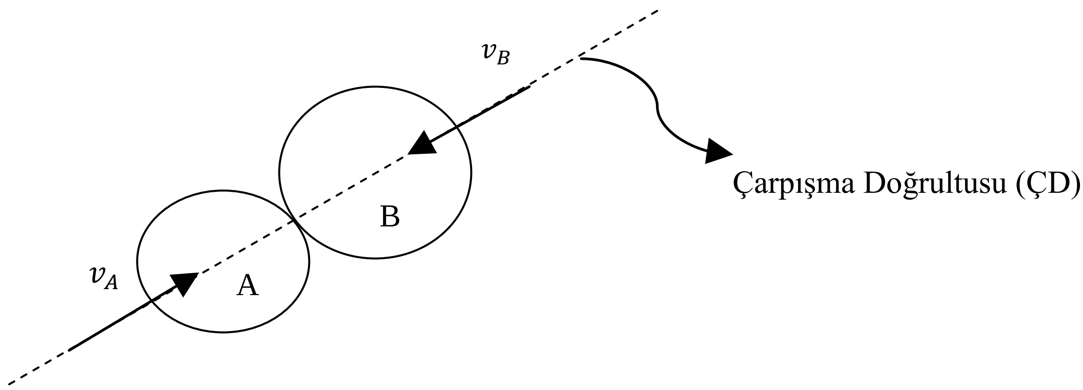
$\sum m\vec{v}_1 + \sum(\vec{I}_{dış})_{12} = \sum m\vec{v}_2$

$m_A v_A * \cos\alpha + 0 = (m_A + m_B) * v'$ (momentum x doğrultusunda korunur)

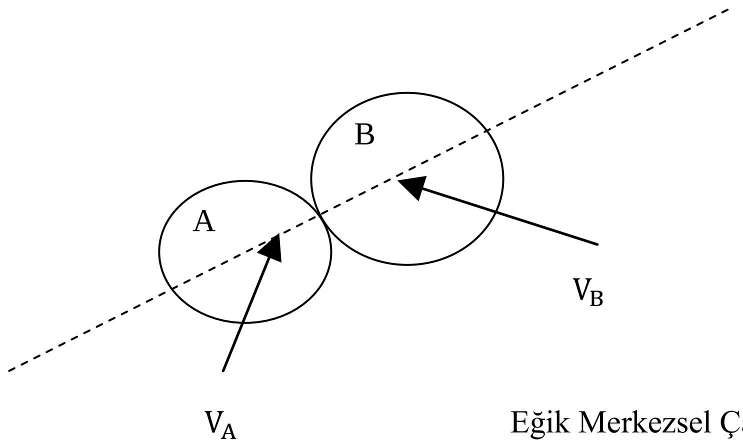
$-m_A v_A * \sin\alpha + P\Delta t = 0$ (P bulunur)

4.5. Çarpışma

İki cismin çok kısa sürede birbirlerine çok büyük kuvvetler uygulamasına **çarpışma** denir. Çarpışma sırasında dokunma yüzeylerinin orta normaline çarpışma doğrusu denir. Cisimlerin kütle merkezleri bu doğru üzerinde ise buna **merkezsel çarpışma** denir. Aksi halde çarpışmaya **merkezsel olmayan çarpışma** denir.



Doğrulsal çarpışma

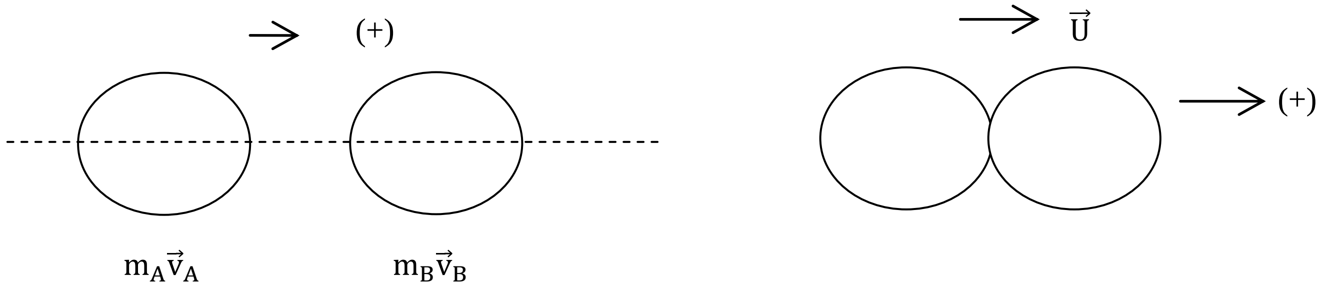


Eğik Merkezsel Çarpışma

Şekil 4.5.

Çarpışma sırasında cisimler birbirlerine çarpışma doğrusu doğrultusunda kuvvet uygularlar. Dolayısıyla sadece Ç.D. paralel hızlar değişir diğeri değişmez.

4.6. Doğru Merkezsel Çarpışma



Şekil 4.6.

İki cismin çarpışmasını gözönüne alalım (+) yön sağa doğru olsun. İki maddesel noktalı sisteme dıştan etki eden impulsif kuvvet yoktur.

$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}'_A + m_B\vec{v}'_B$ veya

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$

En büyük şekil değiştirme sırasında ortak hız kazanılır.

$m_A v_A - \int P\,dt = m_A U$ (Şekil değiştirme için) EK BİLGİ

$$e = -\frac{\text{Çarpışmadan Sonraki Bağıl Hız}}{\text{Çarpışmadan Önceki Bağıl Hız}} = -\frac{V'_B - V'_A}{V_B - V_A} = -\frac{V'_A - V'_B}{V_A - V_B}$$

e: Çarpışma (esneklik) katsayısı

Bu bağıntı e'nin tayininde kullanılır. Ayrıca e biliniyorsa problem çözümünde de kullanılır. e en çok malzemeye bağlıdır. Fakat çarpışma hızı, cisimlerin şekil ve boyutlarıda önemlidir.

<u>İki önemli durum :</u>

1) e =0 tam plastik çarpışma

Bir merminin saplanması, 2 çamur topun çarpışması gibi çarpışma sonrasında ortak hız olur

e = 0 $\quad V'_B = V'_A$

momentumun korunumu çözümü verir

$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v'_B,$

2) e=1 tam elastik çarpışma

e=1 ise $\quad v'_B - v'_A = -(v_B - v_A) \quad v'_B - v'_A = v_A - v_B \qquad v_A + v'_A = v_B + v'_B$

Bu durumda kinetik enerji korunur, Şöyle ki :

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$

$m_A (v_A - v'_A) = m_B (v'_B - v_B)$

yukarıda $v_A + v'_A = v_B + v'_B$ idi.

$m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$

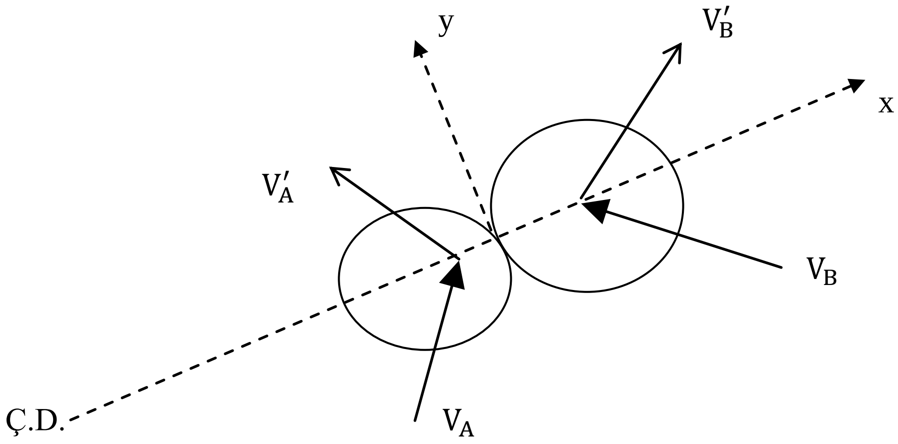
$m_A \left(v_A^2 - {v'_A}^2 \right) = m_B \left({v'_B}^2 - v_B^2 \right)$

$m_A v_A^2 - m_A {v'_A}^2 = m_B {v'_B}^2 - m_B v_B^2$

$1/2 \quad (m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A {v'_A}^2 + m_B {v'_B}^2) \quad 1/2$

$1/2 * m_A v_A^2 + 1/2 * m_B v_B^2 = 1/2 * m_A {v'_A}^2 + 1/2 * m_B {v'_B}^2$

4.7. Eğik Merkezsel Çarpışma



Şekil 4.7.

Çarpışmadan sonraki hızlar 4 skaler büyüklük gerektirir. Çarpışma doğrultusu x ve ona dik teğetsel doğrultusu y olsun. Sürtünmesiz yüzeyler düşünelim. İmpulsif kuvvetler yalnız x doğrultusundadır.

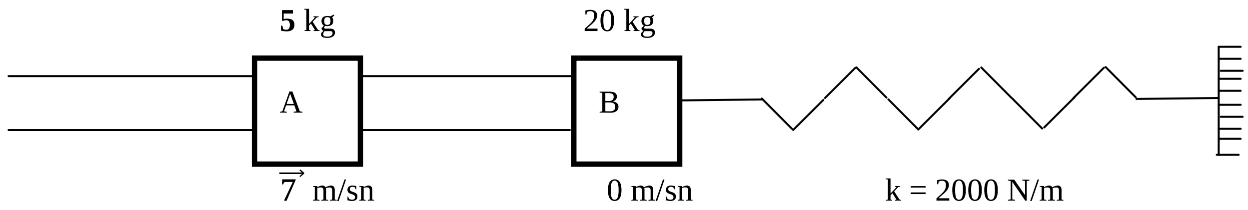
1) A cisminin momentumunun y bileşeni korunur. (hızın y bileşeninin şiddeti değişmez)
2) B cisminin momentumunun y bileşeni korunur. (hızın y bileşeninin şiddeti değişmez)
3) Sistemin toplam momentumunun x bileşeni korunur.
4) Malzemeye ait e ile yaklaşma ve uzaklaşma hızlarının x bileşenleri arasında bağıntı yazılır.

Dört denklem 4 bilinmeyen bulunur.

4.8. Enerji ve momentum ile ilgili problemler

$\vec{F} = m\,\vec{a}$ temel denkleminin 3 şeklini öğrendik. Probleme göre uygun olanını kullanırız. Çarpışma problemlerinde İmpulse – momentum yöntemi tek yoldur.

ÖRNEK



Şekil 4.8.

5 kg'lık A silindiri 7 m/sn hızla 20 kg'lık B silindirine çarparsa ona bağlı 2000 N/m sabitli yayı en çok ne kadar sıkıştırır. (e = 0,9)

$$\left.\begin{array}{l} e = -\frac{v_{BS}-v_{AS}}{v_{Bİ}-v_{Aİ}} \qquad v_{AS} = v_{BS} - e v_{Aİ} \\ m_A v_{Aİ} + m_B v_{Bİ} = m_A v_{AS} + m_B v_{BS} \end{array}\right\}$$

enerji denklemi yazamayız

e=0,9 elastik çarpışma değil

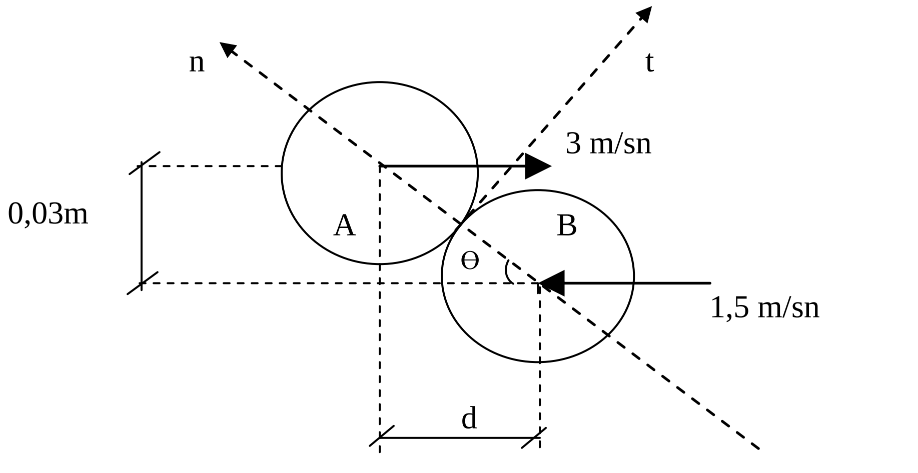
$5*7+0 = 5*(v_{BS} - 0{,}9*7) + 20*v_{BS}$ $\qquad v_{BS}$=2,66 m/sn

Çarpışmadan sonra:

$\frac{1}{2} m_B v_{BS}^2 = \frac{1}{2} * k\,\delta^2$ $\qquad$ δ= 0,266 m

ÖRNEK

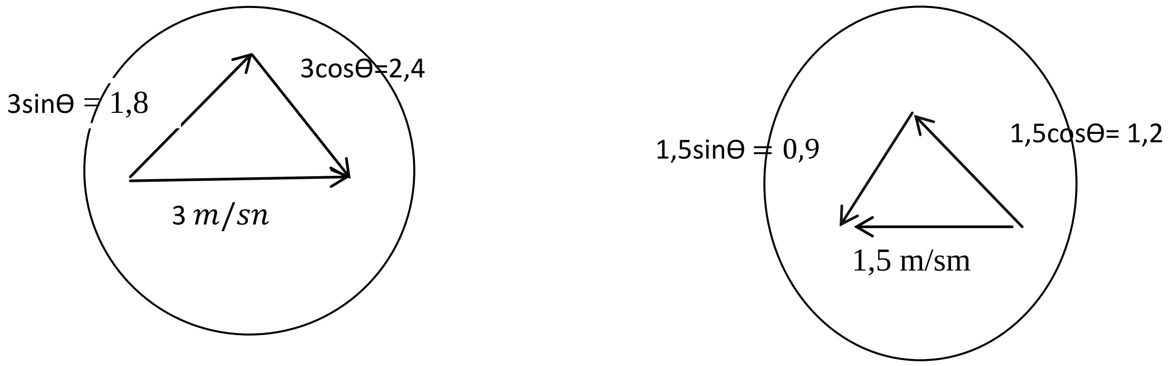
–



Şekil 4.9.

İnce A ve B diskleri sürtünmesiz yüzey üzerinde kayıyorlar. Yarıçapları 25 mm dir. $m_A = 0{,}1$ kg ve $m_B = 0{,}35$ kg , e = 0,7 olduğuna göre çarpmadan sonra hızları nedir? (Yan yüzeyleri sürtünmesiz kabul ediniz)

$d^2 + 0{,}03^2 = 0{,}05^2$ $\quad$ $d = 0{,}04$ $\quad$ tanϴ = $^3/_4$ $\quad$ ϴ= 36,87



Şekil 4.10.

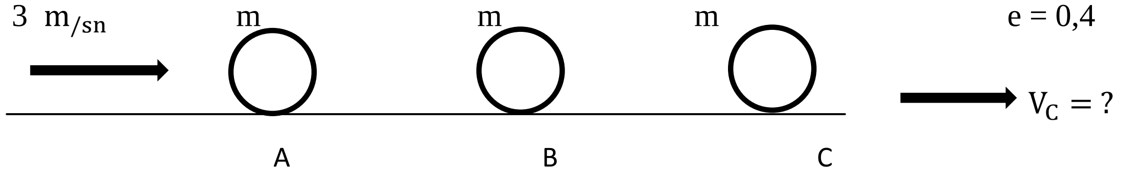
$(v_{As})_t = 1{,}8\ m_{/sn}$ $\qquad$ $(v_{Bs})_t = -\ 0{,}9\ m_{/sn}$

Normal doğrultu: 0,1*(-2,4) + 0,35 * 1,2 = 0,1 $(V_{As})_n$ + 0,35 $(V_{Bs})_n$

$0{,}7 = -\frac{(V_{Bs})_n-(V_{As})_n}{(V_{Bi})_n-(V_{Ai})_n}$ $\qquad$ $0{,}7 = -\frac{(V_{Bs})_n-(V_{As})_n}{1{,}2-(-2{,}4)}$

$(V_{Bs})_n = -\ 0{,}160\ m_{/sn}$ $\qquad$ $(V_{As})_n = 2{,}36\ m_{/sn}$

ÖRNEK



Şekil 4.11.

$3*m = mv_A' + mv_B'$ $\qquad$ (1)

$0{,}4 = -\frac{v'_B - v'_A}{0-3}$ (2)

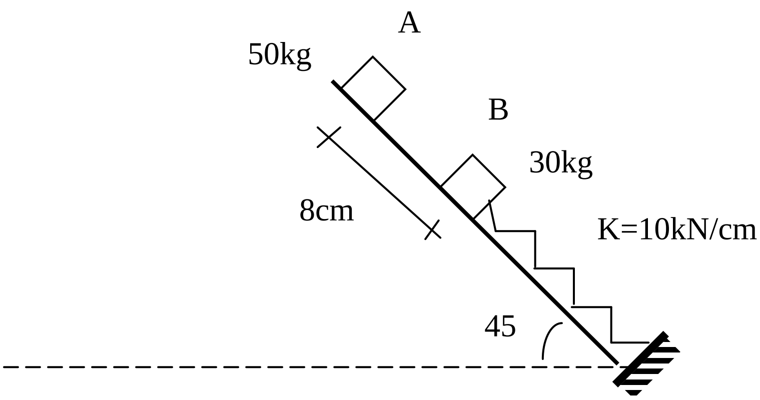
1 ve 2 nin ortak çözümünden $v'_A = 0{,}9\ m_{/sn}$ $v'_B = 2{,}1\ m_{/sn}$

m (2,1) = $mv''_B + mv'_C$ (3)

$0{,}4 = -\frac{v'_C - v''_B}{v_C - v'_B}$ (4)

3 ve 4 ün ortak çözümünden $v'_C = 1{,}47\ m_{/sn}$

ÖRNEK



Şekil 4.12.

A bileziği serbest bırakılınca B bileziğine e=0,2 ile birinci çarpışında B bileziğinin bağlı olduğu yayı en fazla ne kadar kuvvet ile sıkıştırır. (g= 10m/sn^2). Şekildeki konumda yay bir miktar sıkışmıştır.

Yayın üzerine B'yi koyunca yayın sıkışma miktarı: F = kx

$30*10*\sin 45 = 10^6*\delta_i$ $\delta_i = 0{,}000212$ m

A çarpmadan önce B kütlesi, yayı 0,000212 m sıkıştırmış durumda.

Çarpmadan önce A nın hızı enerjinin korunumundan :

$10*50*0{,}08*\sin 45 = ½ * v_A^2 * 50$ $V_A = 1{,}064\ m_{/sn}$

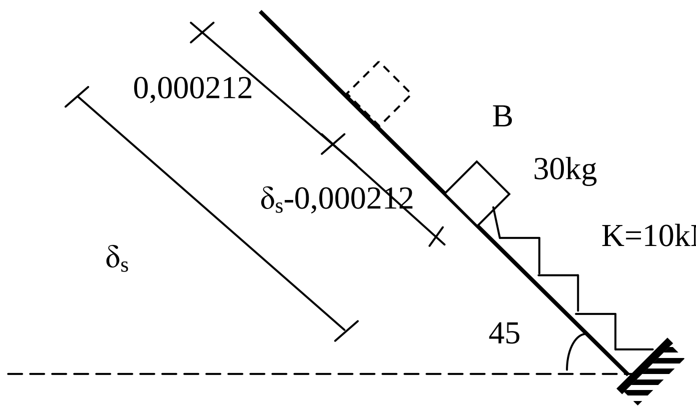
$$\left.\begin{array}{ll} 50*(1{,}064) + 0 = 30v'_B + 50v'_A & (1) \\ 0{,}2 = \frac{v'_B - v'_A}{1{,}064} & (2) \end{array}\right\} \quad V'_B = 0{,}798\ m/_{sn}$$

$k = 10\ \mathrm{kN/_{cm}} = 10^6\ \mathrm{N/m}$

Yayın toplam sıkışma miktarı $=\delta_s$

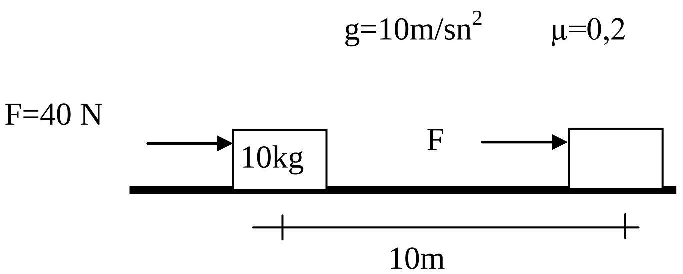
$\frac{1}{2} * 10^6 * (0{,}000212)^2 + \frac{1}{2} * 30 * (0{,}798)^2 + 30 * 10 * (\delta_s - 0{,}000212)*\sin 45 = \frac{1}{2} * 10^6 * (\delta_S)^2$ $\quad \delta s = 0{,}00416$ m

F = 4160 Newton (İmpuse sıfırdır. Çünkü yay kuvveti ile ağırlığın bileşeni birbirini dengeler.)



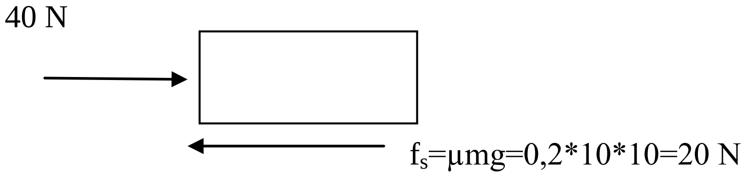
Şekil 4.13.

ÖRNEK



Şekil 4.14.

40 N'luk bir kuvvet durgun haldeki 10 kg'lik bir cisme sürtünme katsayısı 0,2 olan bir yüzey üzerinde 10 metre boyunca etkimektedir. 10m sonunda toplam kuvvetin impulse ı nedir.



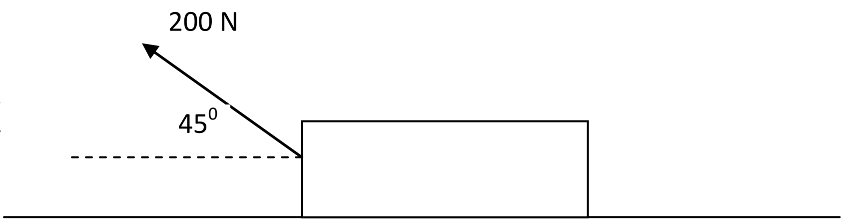
Şekil 4.15.

$\sum E_1 + \sum U_{12} = \sum E_2$ 0+(40*10-20*10)=1/2*10*v_2^2 v_2=6,324 m/sn

$mv_1+I_{12}=mv_2$ 0+I_{12}=10*6,32 I_{12}=63,24 kg m/sn

ÖRNEK

100 kg lık cisim durgun haldeyken 200 N luk kuvvet şekildeki gibi 10 sn boyunca etki etmektedir. Cisim yatay düzlemde hareket ederse bu süre sonunda cismin hızını ve yüzeyin tepkisini bulun.



Şekil 4.16.

Kuvvet sabittir. Zamana bağlı değildir.

yatayda $$mv_{x1} + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{x2}$$

$$mv_{x1} + F_x (t_2 - t_1) = mv_{x2}$$

+ ⟵ 0+(141.42*10)=100*v_{x2}

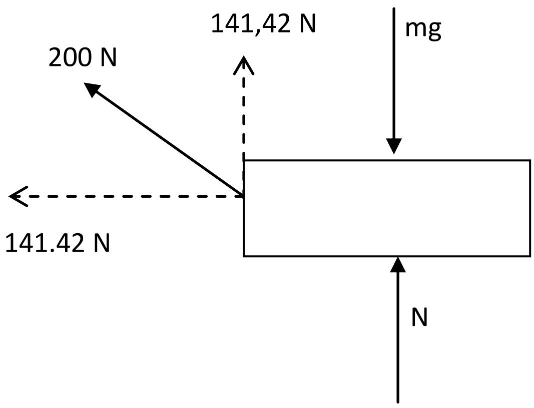
v_{x2}=14.1 m/sn

düşeyde $$mv_{y1} + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{y2}$$

$$mv_{y1} + F_y (t_2 - t_1) = mv_{y2}$$

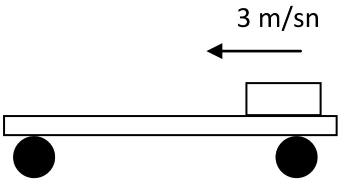
+ ↑ 0+N (10)-9.81*100*10+141.42*10=0

N=840 Newton



Şekil 4.17.

ÖRNEK (08/08/2011 Dönem sonu sınavı)



15 Newton ağırlığındaki bir bavul durmakta olan ve 30 Newton ağırlığında olan durgun haldeki kaykay'a 3 m/sn yatay hız ile atılmıştır. Bavulun kaykay üstündeki kayması bittiği anda kaykay ın hızı ne olur?

Şekil 4.18.

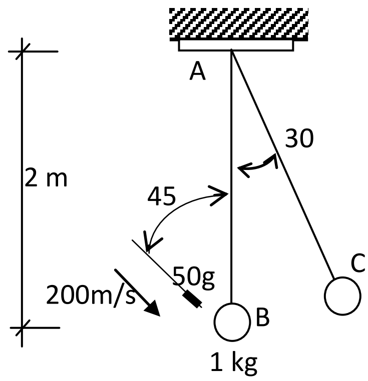
Ç.Ö.T.M.=Ç.S.T.M.

$m_k v_{k1} + m_b v_{b1} = m_k v_{k2} + m_b v_{b2}$

ortak hız

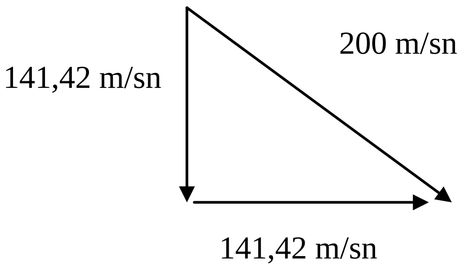
15/9,81*3+0=15/9,81*v+30/9,81*v v=1 m/sn

ÖRNEK (18.01.2006 Dönem sonu sınavı)



Şekil 4.19.

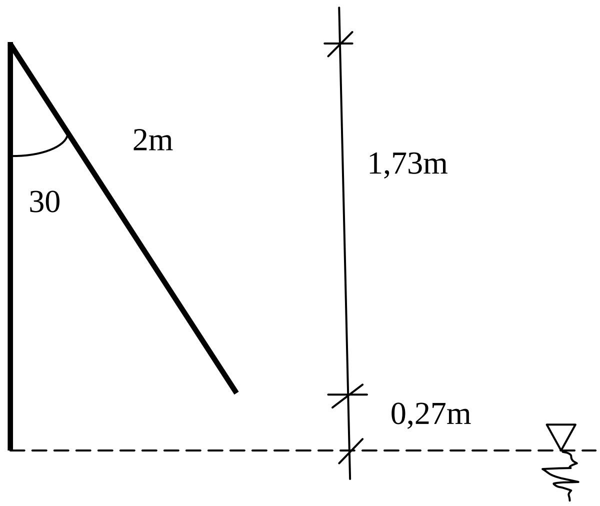
Kütlesi 50 gram olan mermi tahtadan 1kg kütleli B topuna düşey iple 45 derece yaparak 200m/s hızla çarpıp içerisinde kalıyor. İçerisinde mermi olan top C noktasına geldiğinde ip tavana ne yönde ve ne kadar kuvvet uygular? (Uyarı: Çarpışma sırasında enerji ve düşey doğrultuda momentum korunmaz.)



Şekil 4.20.

Ç.Ö.T.M.=Ç.S.T.M.

$0,05*141,42=1,05*v_B$ $v_B=6,73$ m/sn

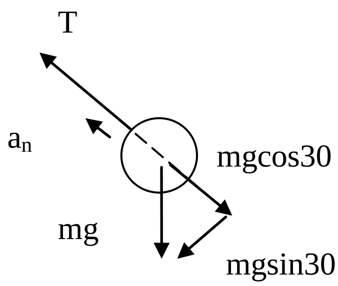


Şekil 4.21.

$½*1,05*6,73^2=1,05*9,81*0,27+1/2*1,05*v_c^2$ $v_c=6,29$ m/sn

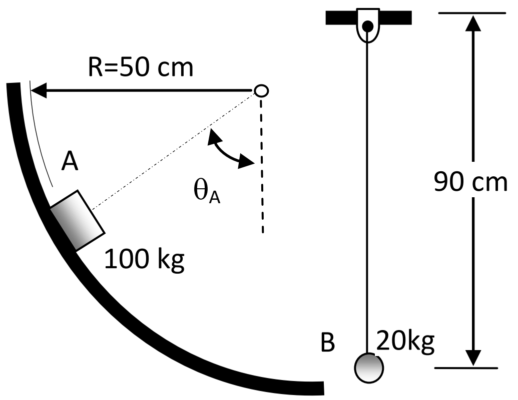
T-mgcos30=1,05*$(6,29)^2/2$

T=29,69 Newton



Şekil 4.22.

<u>ÖRNEK</u> (01.12.2008 Ara sınav)

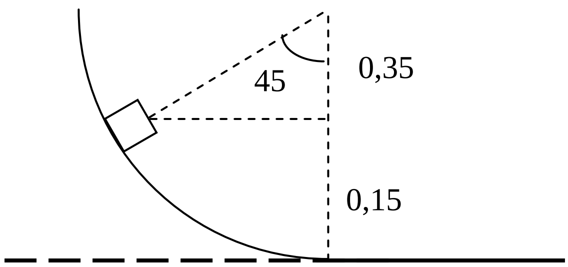


Şekil 4.23.

Çeyrek daire üzerindeki A bloku θ_A=45° iken serbest bırakılmıştır (100kg serbest olup iple bağlı değildir.) ve sürtünmesiz olarak kayarak B topuna vurmaktadır. e=0.80 olduğuna göre,

(a) çarptıktan hemen sonra B'nin hızını,

(b) B'nin çıkacağı maksimum yüksekliği



Şekil 4.24.

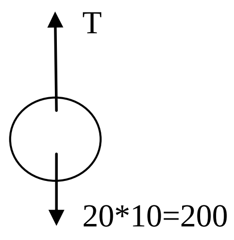
$100*10*0{,}15=1/2*100*v^2$ $v=1{,}73$ m/sn

$1{,}73*100=v_A*100+v_B*20$ (1)

$0{,}8=-(v_A-v_B)/(1{,}73-0)$ $v_A=v_B-0{,}8*1{,}73$ (2)

$173=v_B*100-138{,}4+20\ v_B$ $v_B=2{,}595$ m/sn $v_A=1{,}21$ m/sn

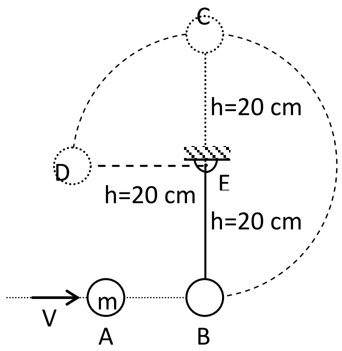
$½*20*2{,}595^2=20*10*h$ $h=0{,}34$ m



$T-200=20*2{,}595^2/0{,}9$ T=349,65 Newton

Şekil 4.25.

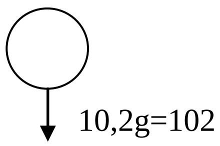
ÖRNEK (09.01.2009 Mazeret sınavı)



Yandaki şekilde m=0.2kg kütleli çamur 10kg kütleli sarkaç topuna 200m/s lik hız ile yatay olarak çarpıyor ve yapışıyor. Sarkaç C'ye ip gergin olarak varır mı? Gösteriniz. Eğer C'yi geçiyorsa D'de ve tekrar B'ye gelince ipteki gerilme kuvvetleri ne olur? g=10 m/sn^2

Şekil 4.26.

Momentumun korunumundan 0,2*200=10,2v v=3,92 m/sn



Şekil 4.27.

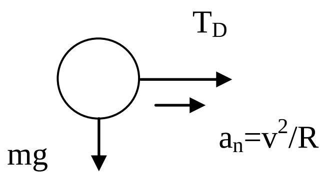
C noktasında

$\sum F=ma$ $102=10{,}2*v^2/h$ v=1,41 m/sn olmalı

Enerjinin korunumu

$½*10{,}2*3{,}92^2=10{,}2*10*2h+1/2*10{,}2*v^2$ v=2,71 m/sn

1,41<2,71 ip gergin olur.

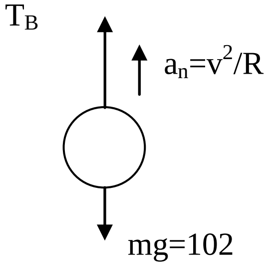


Şekil 4.28.

D noktasında

$½*10{,}2*3{,}92^2=10{,}2*10*0{,}2+1/2*10{,}2*v_D^2$ v_D=3,37 m/sn

$\sum F=ma$ $T_D=10{,}2*3{,}37^2/0{,}2=579{,}4$ Newton

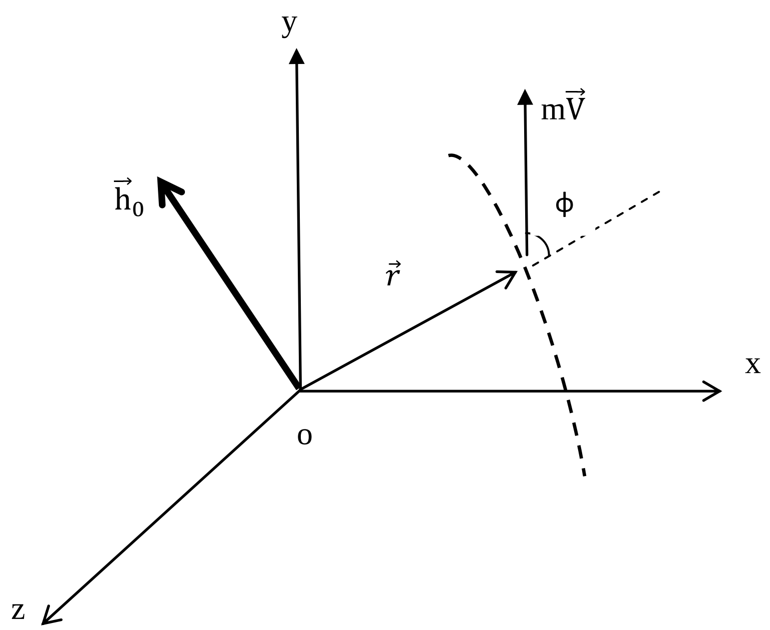


Şekil 4.29.

B noktasında

$T_B-102=10{,}2*3{,}92^2/0{,}2$ T_B=885,69 Newton

4.9. Bir Maddesel Noktanın Açısal Momentumu



Şekil 4.30.

Momentum = $m\vec{v}$

Bunun o ya göre momentine momentumun momenti veya açısal momentum denir.

$\vec{h}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$

Bu $\vec{r}$ ile $m\vec{v}$ nin düzlemine diktir. Aradaki açı ϕ olduğuna göre şiddeti

$h_o = r * mv * \sin \phi$

Yönü de sağ el kuralı ile bulunur.

$$\vec{h}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

Bu vektörün bileşenleri koordinat eksenlerine göre momentini verir.

$h_x = m\,(y\,v_z \; - z\,v_y\,)$

$h_y = m\,(z\,v_x \; - x\,v_z\,)$

$h_z = m\,(x\,v_y \; - y\,v_x\,)$

z=$v_z = 0$ olursa x –y düzlemindeki bir hareket için $h_x = \; h_y = 0$

$h_z = \; h_o = \; m\,(x\,v_y \; - y\,v_x\,)$ Skaler ile ifade edilir. Uzayda açısal momentumun zamana göre türevini alırsak:

$$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m * \vec{v}) + \vec{r} \times (m * \frac{d\vec{v}}{dt})$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times m\,\vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{r} \times m\vec{a}}_{F}$$

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Bir maddesel noktaya etkiyen F kuvvetinin bir o noktasına göre momenti maddesel noktanın o ya göre açısal momentumunun değişme hızına eşittir.

4.10. Bir Maddesel Noktalar Sisteminin Açısal momentumu

Bir maddesel noktalar sisteminin 0 ya göre $\vec{h}_0$ açısal momentumu diye sistemin çeşitli maddesel noktalarının momentumlarının 0 ya göre momentleri toplamına denir.

$$\sum \vec{h}_0 = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

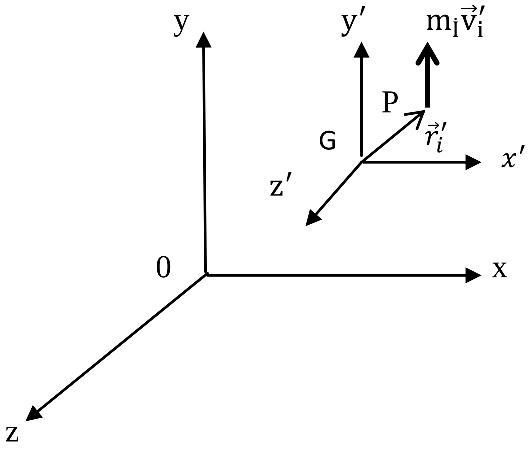
$$\frac{d(\sum \vec{h}_0\,)}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i\right) + \sum_i \left(\vec{r}_i \times \; m_i * \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right) = \sum_i (\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i) + \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

İç kuvvetler eşit ters kuvvet çiftleri oluşturduğundan etkileri birbirini sadeleştirir. Sadece dış kuvvet etkileri kalır.

$$\sum (\vec{M}_0)_{dış} = \frac{d(\sum \vec{h}_0\,)}{dt} \qquad (**\,)$$

Kütle merkezlerine göre açısal momentum

Rijit cisim hareketinde G ağırlık merkezinden geçen $G_{x'y'z'}$ takımına göre inceleme yapmak işleri kolaylaştırır.



Şekil 4.31.

0_{xyz} yerine $G_{x'y'z'}$ ye göre hareket cinsinden büyüklükler konursa da (**) denklemi sağlanır. Bunu ispatlayalım.

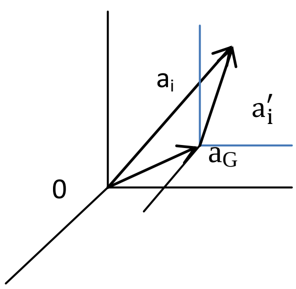
$r' \longrightarrow$ x' y' z' 'e göre konum vektörü

$r \longrightarrow$ x , y, z ' e göre konum vektörü

$h_G' = \sum_i(\overrightarrow{r'}_i \times m_i\overrightarrow{v'}_i)$ $\quad\quad \frac{dh_G'}{dt} = \sum \left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt} \times m_i\vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times m_i\overrightarrow{a'}_i\right)$

$\vec{a}_i = \vec{a}_G + \overrightarrow{a'}_i$ dır.

$\frac{dh_G'}{dt} = \sum\ (\vec{r}_i' \times m_i\,(\vec{a}_i - \vec{a}_G)) = \underbrace{\sum(\vec{r}_i * m_i\vec{a}_i)}_{F_{(dış)}} - \underbrace{\sum(\vec{r}_i * \overrightarrow{m}_i)}_{0} \times \vec{a}_G$



Şekil 4.32.

$\sum(r_i' m_i) = (\sum m) r_G$ idi $\qquad$ r_G üssülü takıma göre sıfıra eşittir.

$\frac{dh_G'}{dt} = \sum\left(\vec{r}_i \times m_i (F_i)_{dış}\right) = \sum(M_G)_{dış}$ $\qquad$ $\frac{dh_G'}{dt} = \sum(M_G)_{dış}$

4.11. Açısal Momentumun Korunumu

Daha önce görüldü ki bir maddesel noktanın bir o noktasına göre açısal momentumunun değişim hızı maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin 0 ya momentine eşittir. Her t değişimi için M_o sıfır ise her dt için

$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = 0$ ve integre edilirse $\vec{h}_0 = \text{sabit}$

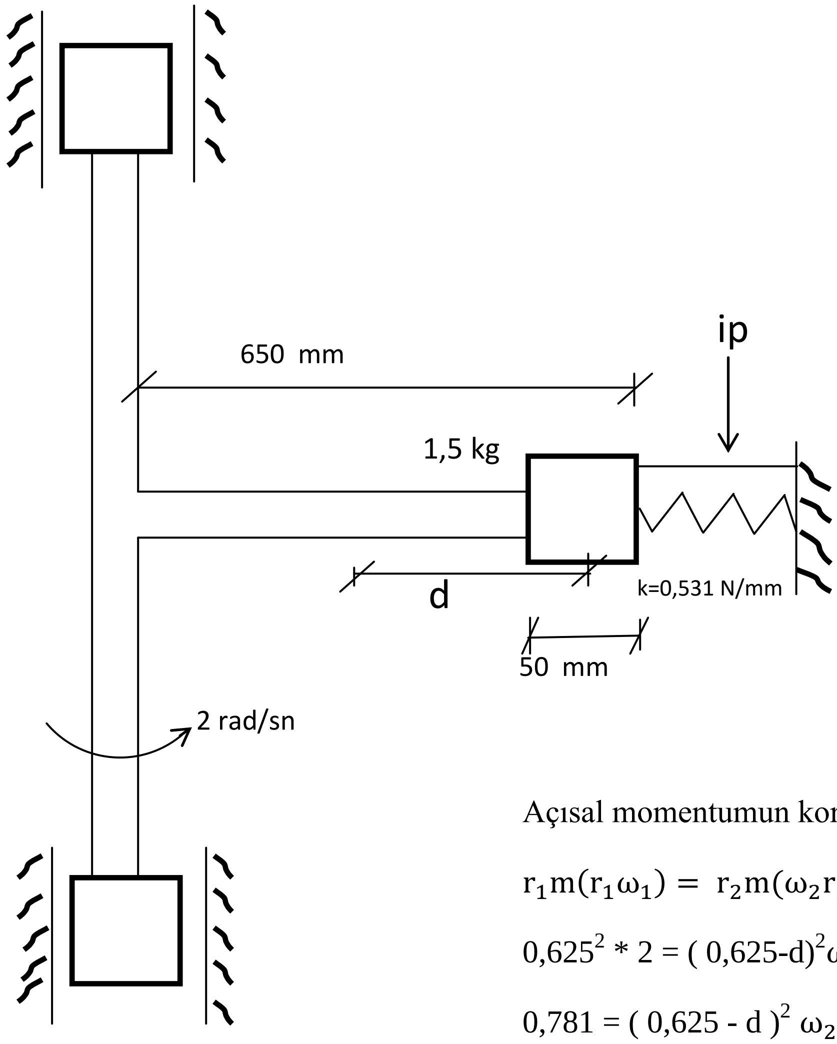
Bir maddesel noktaya etkiyen F kuvvetinin bir 0 noktasına göre momenti sıfırsa maddesel noktanın 0 'ya göre açısal momentumu korunur.

$M_o = 0 = \frac{d\vec{h}_0}{dt}$ $\qquad$ h_o = sabit , değişmez .

Bileşke kuvvetler sıfır ise bu ifade zaten sağlanır. Birde bu ifade merkezsel bir kuvvet içinde (momentin sıfır olması için 0 dan geçmesi gerek) sağlanır.

$h_o = \vec{r} \times m\vec{V} = \text{sabit}$

ÖRNEK



Şekildeki sistemin $\omega = 2$ rad/sn açısal hızla serbest olarak dönmektedir. 1,5 kg lık A kütlesi ile bir yay 100 mm sıkıştırılmış olarak durmaktadır. İp kesilince kütle eksene ne kadar yaklaşır. (kütle ile yay arasında bağ yoktur.) Sürtünme ve çubuk kütlelerini ihmal ediniz.

Şekil 4.33.

Açısal momentumun korunumu $r_1 m v_1 = r_2 m V_2$

$r_1 m(r_1\omega_1) = r_2 m(\omega_2 r_2)$ $m r_1^2 \omega_1 = m r_2^2 \omega_2$

$0{,}625^2 * 2 = (0{,}625-d)^2 \omega_2$

$0{,}781 = (0{,}625 - d)^2\ \omega_2$ (1)

Enerjinini korunumu : $\Delta(V + T) = 0$ $(V+T)_1 = (V + T)_2$

$\frac{1}{2}*(1{,}5)[0{,}625*(2)]^2+\frac{1}{2}*531*(0{,}1)^2=\frac{1}{2}(1{,}5)[(0{,}625-d)\omega_2]^2$ (2)

(1) ve (2) ortak çözülürse d=0,279 m

(merkez kaç daha zayıf ise kesilince yay ittiriliyor.)

d = 0,279 $>$ 0,1 yani yaydan 0,179 m uzakta duruyor.

ÖRNEK

Bir önceki problemi sürtünmeli duruma göre çözünüz (μ_d = 0,4)

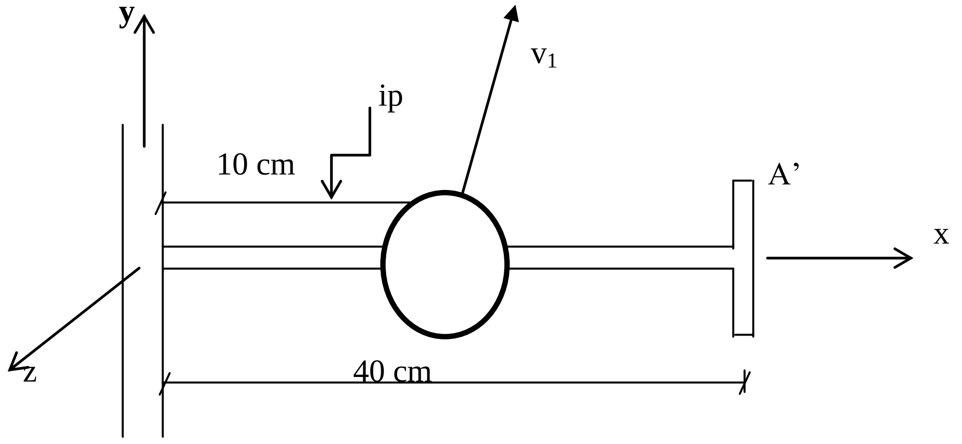
$0{,}781 = (0{,}625 - d)^2\omega_2$

$(U_{dış})_{1\to 2} = \Delta(V + T)$ $\qquad (V + T)_1 + U_{1\to 2} = (V + T)_2$

$-1{,}5*(9{,}81)*(0{,}4)d + \frac{1}{2} * (1{,}5)\ [0{,}625 * (2)]^2 + \frac{1}{2} *531*(0{,}1)^2 = \frac{1}{2} * (1{,}5)\ [(0{,}625-d)\,\omega_2]^2$

Deneme yanılma ile $\quad d = 0{,}205$ m

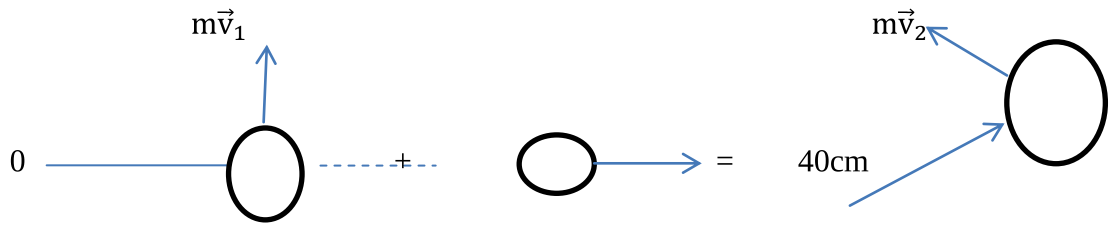
ÖRNEK



Şekil 4.34.

Düşey bir eksen etrafında serbest olarak dönen yatay bir çubuğa ağır bir top geçirilmiştir. Şekildeki konumda topun hızı 100 cm/sn dir ve top eksene bağlı bir ip yardımı ile tutulmaktadır. İp kesilince çubuk dönerken top A' konumuna geliyor . Çubuk kütlesini ihmal ederek

A) A'nın konumunda topun hızını
B) Çarpma ile sistemin kinetik enerjisindeki değişimi
C) Top A dan A' ' ye giderken xz düzlemindeki yörüngesi ne olur bulunuz ?



Şekil 4.35.

0 ‘ ya göre açısal momentum korunumu (Kütle var , momenti var ama ters yönde tepki var momenti var net moment sıfır)

$mv_1*(0,1) = m\, v_2\, (0,40)$

$v_2 = \frac{1}{4} * v_1 = 25$ m/sn

$T_1 = \frac{1}{2} * mv_1^2$ $T_2 = \frac{1}{2} * mv_2^2$ $T_2 = \frac{1}{16} * T_1$

Çubuğun kütlesi İhmal edildiğine göre A dan A’ ne giderken çubuktan yatay kuvvet gelmez Buna göre topun doğrusal momentumu sabit olur.

$F_N = m*a_n = 0$

BÖLÜM 5. RİJİT CİSİMLERİN KİNEMATİĞİ

5.1. Giriş

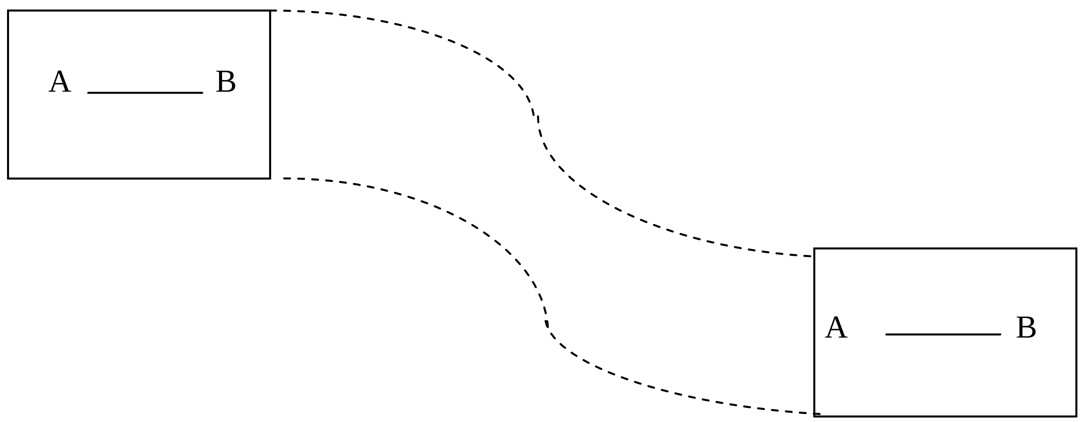
Bu bölümde rijit cisimlerin kinematiğini inceleyeceğiz. Zaman, yer, hız ve ivme arasındaki bağıntıların bir cisim değişik noktaları için uygulanmasını ele alacağız

Rijit cisimlerin hareketleri şu türden olabilir.

1-Ötelenme:

Bir cismin üzerindeki 3 noktanın oluşturduğu üçgen hareket sırasında aynı kalırsa (her kenar ayrı ayrı) bu harekete ötelenme denir. Ötelenmede cismin bütün noktaları paralel yörüngeler üzerinde hareket eder. Bu yörüngeler birer doğru ise o ötelenmeye doğrusal ötelenme denir. Aksi halde eğrisel ötelenme denir.

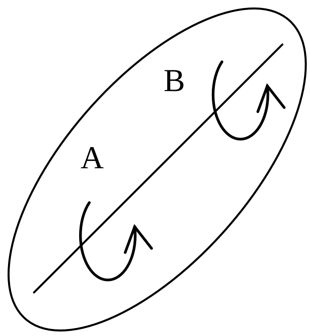
Doğrusal Ötelenme



Eğrisel Ötelenme

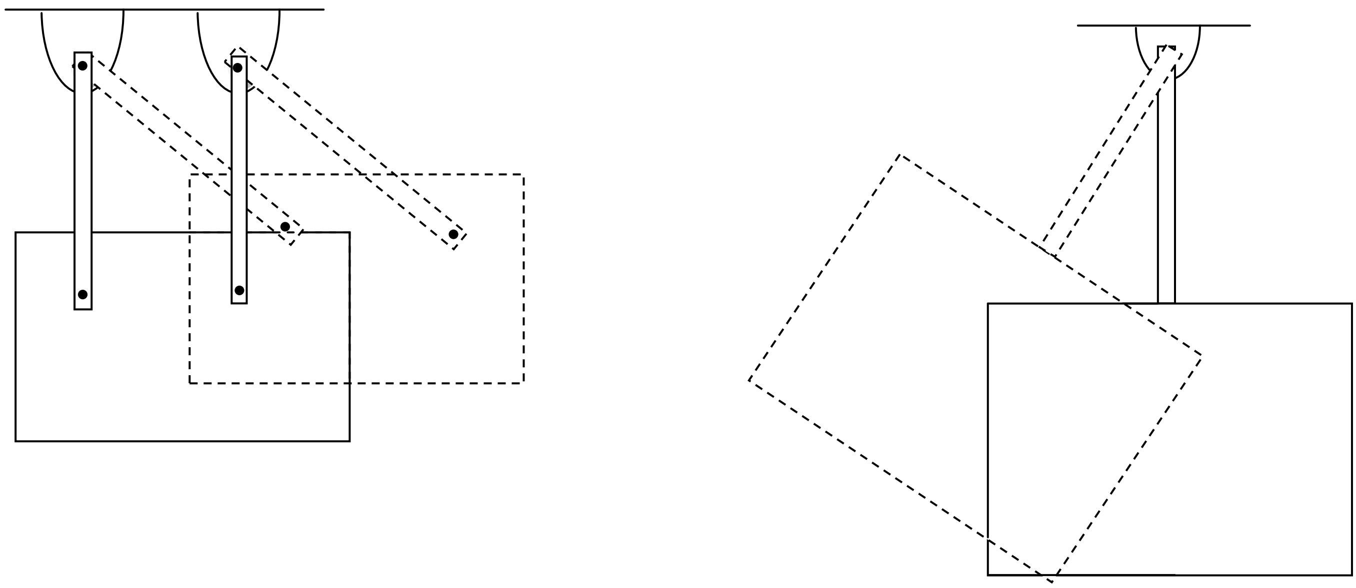
Şekil 5.1.

2-Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme:



Şekil 5.2.

Bu harekette rijit cismi oluşturan noktalar aynı bir sabit eksenin noktalarını merkez alan daireler üzerinde hareket ederler. Dönme eksenini oluşturan doğru cismi keserse kesim noktalarının hızı ve ivmeleri sıfırdır. Bazı ötelenme hareketlerini dönme ile karıştırmamak gerekir.



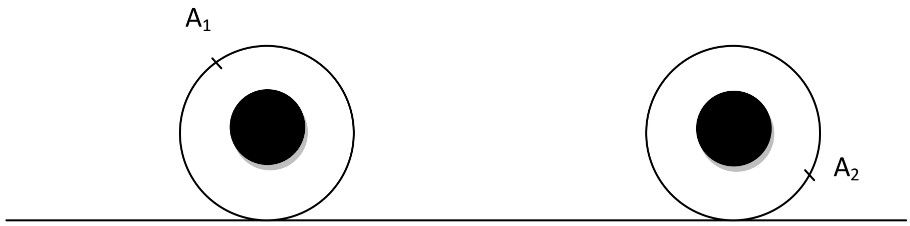
Eğrisel Ötelenme Dönme

Şekil 5.3.

Cismin tüm noktaları aynı düzleme paralel hareket ettiği için sabit eksen etrafında dönme düzlemsel bir harekettir denir.

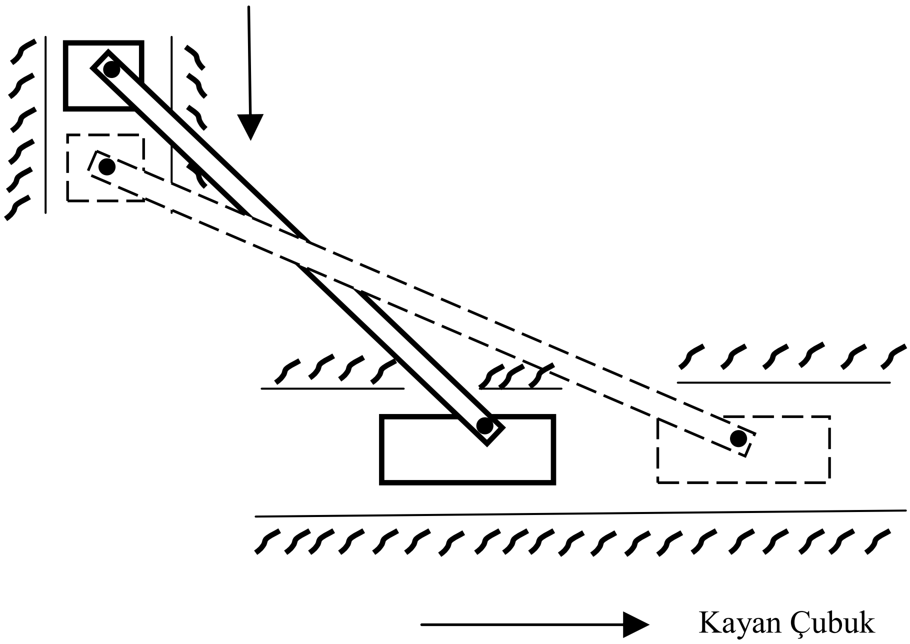
3-Genel Düzlemsel Hareket:

Bir cismin tüm noktalarının bir düzleme paralel hareket etmesi düzlemsel hareket diye adlandırılır. (Ötelenme ve Dönme)



Yuvarlanan silindir ve disk

Şekil 5.4.



Kayan Çubuk

Şekil 5.5.

4-Sabit Bir Nokta Etrafında Hareket:

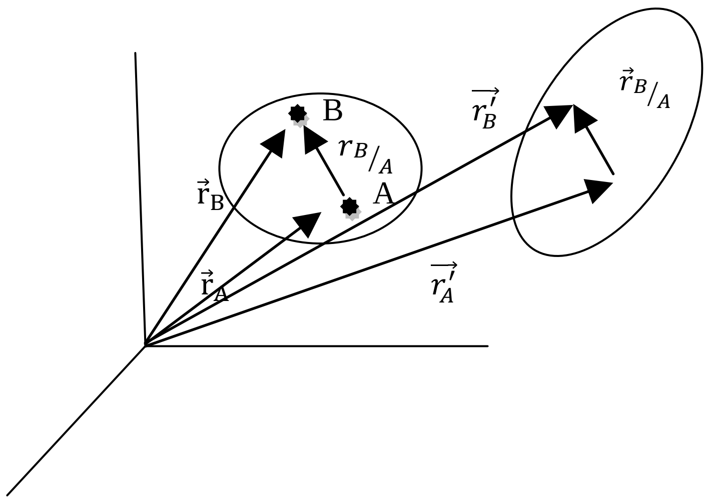
Sabit bir noktaya bağlanmış bir cismin üç boyutlu uzayda hareketi bu türdendir. Birde pürüzlü yüzeyde bir topacın hareketi de bu türdendir.

5-Genel hareket:

Bir rijit cismin yukarıdaki özel şekillerden hiç birine uymayan hareketine genel hareket denir.

5.2. Ötelenme

En genel ötelenme (3 boyutlu uzayda) hareketinde ayrı bir takıma göre $\vec{r}_A$ ve $\vec{r}_B$ yer vektörlerini, $\vec{r}_{B/A}$ da A ve B yi birleştiren vektörü göstersin



Şekil 5.6.

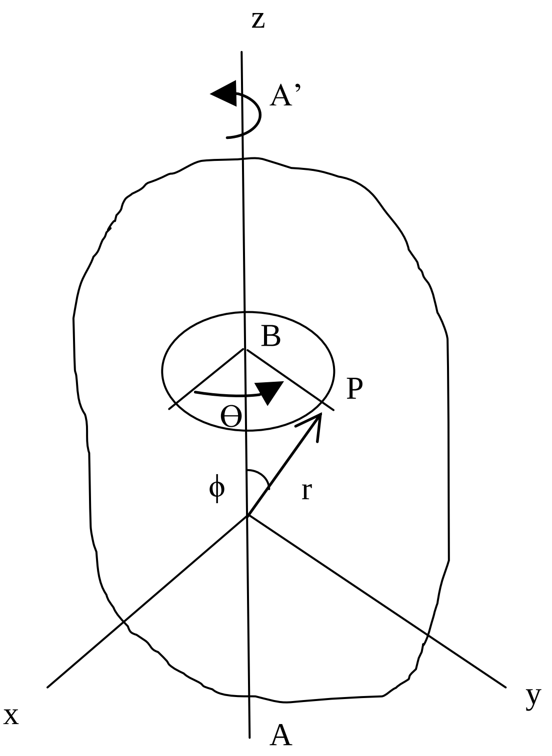
$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$

$\vec{r}_{B/A}$ = Ötelenmeden dolayı sabit doğrultu ve rijit cisimden dolayı sabit şiddetlidir. Türev alınırsa

$\vec{v}_A = \vec{v}_B$, $\vec{a}_A = \vec{a}_B$

<u>Ötelenmede hız ve ivme her t anında tüm noktalar için aynı doğrultuda olur.</u>

5.3. Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme



Şekil 5.7.

z ve A-A’ sabit dönme ekseni olsun . BP = rsinØ = sabit

BP nın xz düzlemi ile açısı θ dir. θ cismin bir açısal koordinatı olup A’dan bakınca saat yönünün tersine (+) radyan, derece veya devir ile ifade edilir.

1 dev = 2π rad = 360^0 şiddeti v=$\frac{ds}{dt}$

$$\Delta S = \underbrace{(BP)}_{\text{Açı kolu}}\ \underbrace{\theta}_{\text{açı}} = \underbrace{(r\sin\emptyset)}\ \theta$$

Hız tanımında yerine konulup limiti alınırsa

$$v=\frac{ds}{dt} = \underbrace{(r\sin\emptyset)\,\dot{\theta}}_{\text{şiddet}}$$

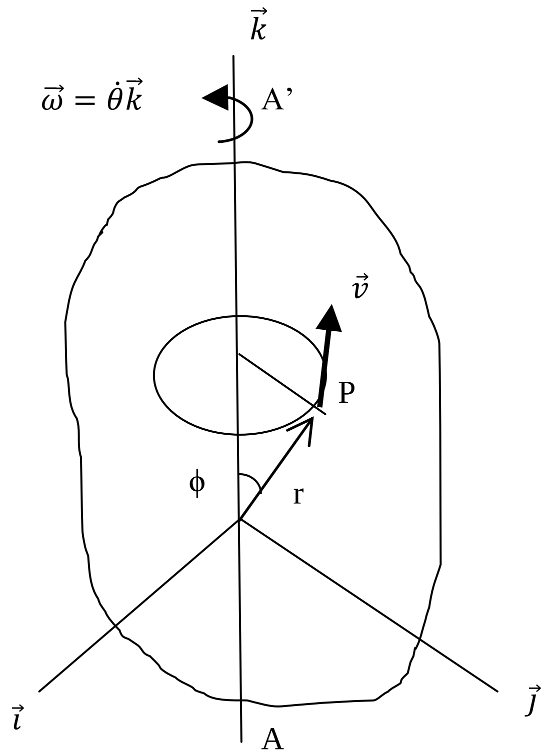
$\dot{\theta}$ noktadan bağımsızdır.

Sonuç: P nin $\vec{v}$ hızı A-A' ile $\vec{r}$ nin düzlemine dik ve v şiddeti ile tanımlanan bir vektördür.

Öyleyse $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{k}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{\omega}$ açısal hızdır. Şiddeti $\dot{\theta}$ ve yönü cismin dönüş yönüne göre sağ el kuralı ile bulunur.



Şekil 5.8.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$

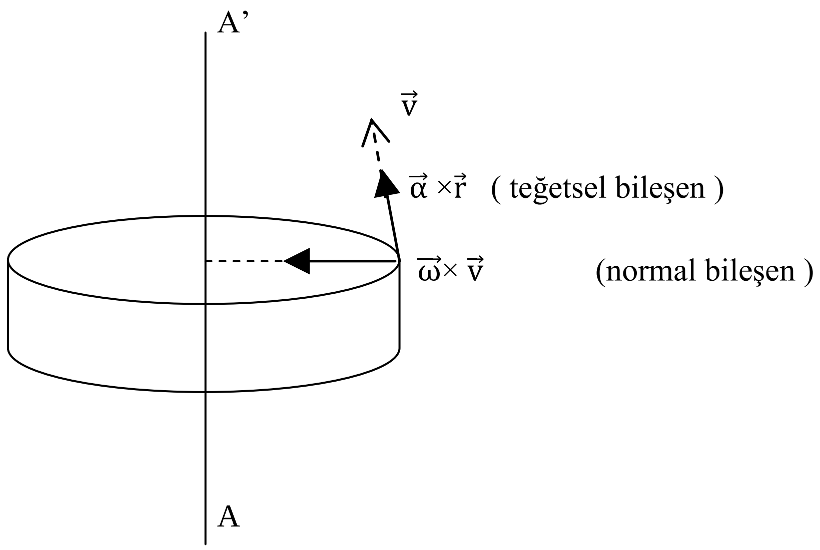
$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$

$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ açısal ivme

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 * \vec{r}$

$\vec{\alpha} = \alpha\,\vec{k} = \dot{\omega}\,\vec{k} = \ddot{\theta}\,\vec{k}$

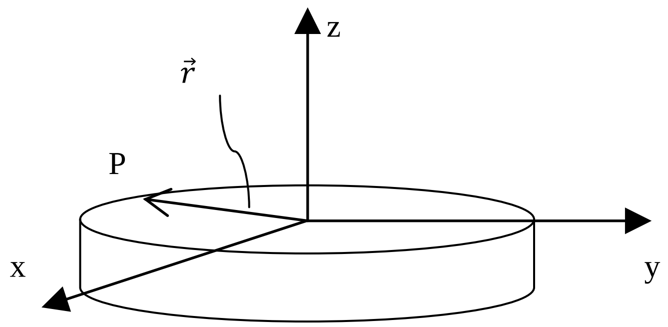
Sabit eksen etrafında dönmede w ve α aynı doğrultudadır. İvmenin ise 2 bileşeni var.



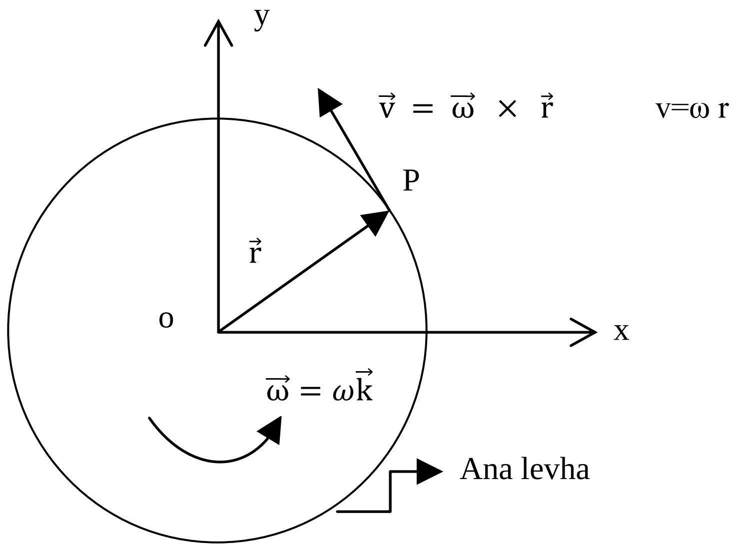
Şekil 5.9.

Ana Levhanın Dönmesi:

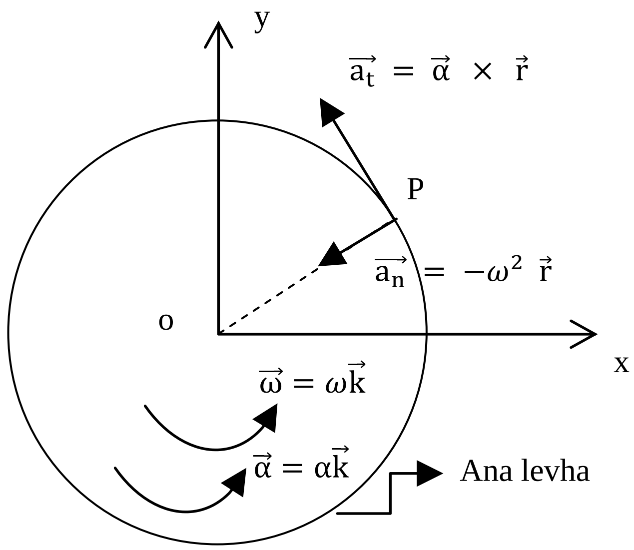
Sabit eksen etrafında dönme, sabit eksene dik bir ana levha hareketi ile gösterilebilir. x-y düzlemi ana levhanın düzlemi olsun



Şekil 5.10.

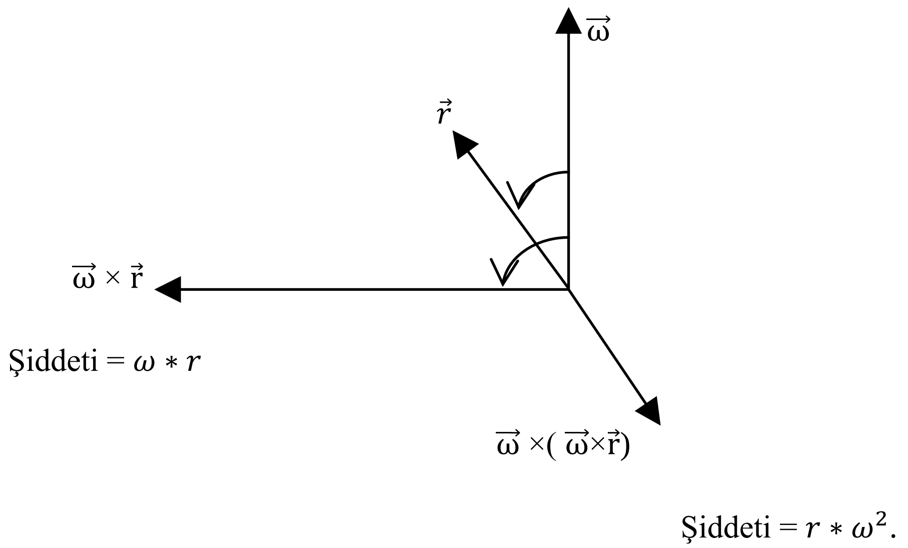


Şekil 5.11.



Şekil 5.12.

İvmenin normal bileşeni $\vec{\omega}\times(\vec{\omega} \times \vec{r})$ dir ve merkeze doğrudur. Normal bileşenin yönünü bulmak için önce $\vec{\omega} \times \vec{r}$ çarpımı yapılırsa sonuç vektör düzlem içinde 90^0 döner. $\vec{\omega}$ sonuç vektörle çarpılırsa en son elde edilen vektör $\vec{r}$ nin tersi yönde olur.



Şekil 5.13.

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 * \vec{r}$ (Sabit Eksen Etrafında Dönme)

$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

$\vec{a}_n = -\omega^2 * \vec{r}$

$a_t = r \ \alpha$

$a_n = r * \omega^2$

5.4. Bir Rijit Cismin Sabit Bir Eksen Etrafında Dönmesini Tanımlayan Denklemler

Bir dönme hareketinde $\theta = \theta(t)$ diye verilirse hareket belirlidir denir. Ancak kuvvetlerden ve momentlerden önce $\vec{\alpha}$ ivmesi t, θ, ve/veya ω cinsinden belirlenirse o zaman şöyle yapılır.

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

dt eşitlenirse $\frac{d\theta}{\omega} = \frac{d\theta}{\alpha}$ $\qquad \alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$

Bu denklemler maddesel noktanın doğrusal hareket denklemleriyle aynı olup aynı integrasyon yöntemleri kullanılabilir. Dönmenin 2 şekli çok sık karşılaşılır.

1-Düzgün Dönme

Açısal ivme = 0 ω = sabit

$\theta = \theta_0 + \omega$ t

2-Düzgün Değişen Dönme

Açısal ivme sabittir.

$\omega = \omega_0 + \alpha * t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0$*t + $\frac{1}{2} * \alpha * t^2$

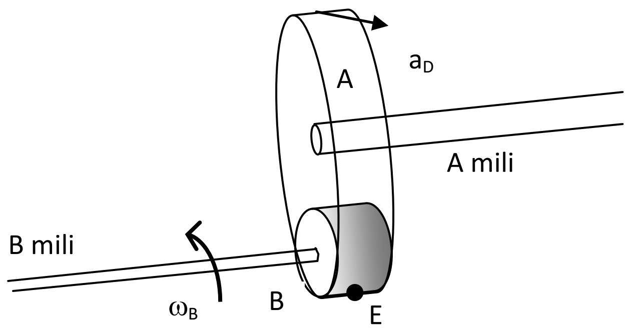
$\omega^2 = \omega_0{}^2 + 2* \alpha\, (\theta - \theta_0)$

Bunlar doğrusal hareketteki denklemler ile benzerdir.

Açısal hız iki noktayı bağlayan doğrunun seçilen koordinat takımına göre konumunu gösteren θ açısının değişme hızı ω olup cisim için bir değerdir.

Mekanizmaların çoğu bir yerine, çok sayıda parçadan oluşur. Bu parçalar birbirine mafsallı ise mafsal noktalarının da salt hız aynı olmak üzere ayrı rijit cisimler olarak incelenirler. Dişliler ve kayma yapmayan yüzeyler olunca dokunma noktasında yine salt hızlar aynı olur. Ancak salt ivmenin dokunma yüzeyinde yalnız teğet bileşenleri eşittir.

ÖRNEK



Şekil 5.18.

B sürtünme tekerleği B miline A sürtünme tekerleği A miline bağlıdır. B tekerleği A tekerleğinin çemberinin iç yüzünde kaymadan yuvarlanmaktadır. A tekerleğinin yarıçapı r_A merkezi o_2 dir. B tekerleğinin yarıçapı r_B merkezi o_1 dir. B milinin sabit ω_B açısal hızı ile döndüğü bilindiğine göre

a) ω_A=?

b) A tekerleğindeki bir D noktasının ivmesini bulunuz

$\vec{v}_{0_1} = \vec{v}_{0_2} = \vec{0}$

a) $|\vec{v}_E| = r_A * \omega_A = r_B * \omega_B$ $\qquad \omega_A = \frac{r_B}{r_A} * \omega_B$

b) İvmenin teğet bileşeni = 0 çünkü ω_A = sabit dolayısı ile :

$\alpha_A = 0 \qquad \alpha_t = r * \alpha_A = 0$

$a_D = a_n = r_A * {\omega_A}^2 = r_A * (\frac{r_B}{r_A} * \omega_B)^2 = \frac{{r_B}^2}{r_A} * {\omega_B}^2$

ÖRNEK

Bir önceki örnekte B'nin açısal hızı 10 sn'lik süre içinde düzgün olarak 200 dev/dak'dan 500 dev/dak'ya çıktığı ve r_A= 15 cm r_B= 5 cm olduğuna göre :

a) A tekerleğin açısal ivmesini
b) 10 sn içerisinde A tekerleğinin yaptığı devir sayısını bulunuz.

$\Delta\omega_B$ = 500 – 200 = 300 dev/dak = 31,42 rad/san

$\alpha_B = \frac{\Delta\omega_B}{\Delta t} = \frac{31,42}{10}$ = 3,142 rad/san^2

a) $(a\ )_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B$ $\qquad \alpha_A = \frac{r_B}{r_A} * \alpha_B$ = 1,047 rad/san^2

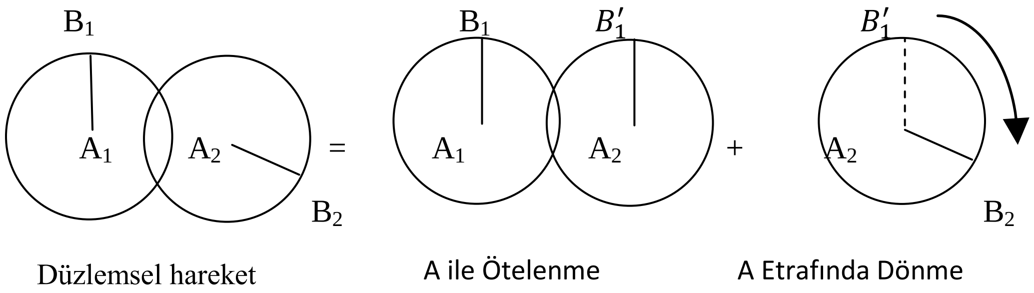
b) $(\omega_A)_0 = \frac{r_B}{r_A} * (\omega_B)_0 = \frac{5}{15} * 200$ = 66,67 dev/dak = 6,98 rad / san

$$\theta = \theta_0 + (\omega_A)_0\ t + \frac{1}{2}\alpha_A t^2$$

$\Delta\theta = \theta - \theta_0$ = 6,98*(10) + $\frac{1}{2}$ * (1,047)*10^2 = 122,15 rad = 19,44 dev

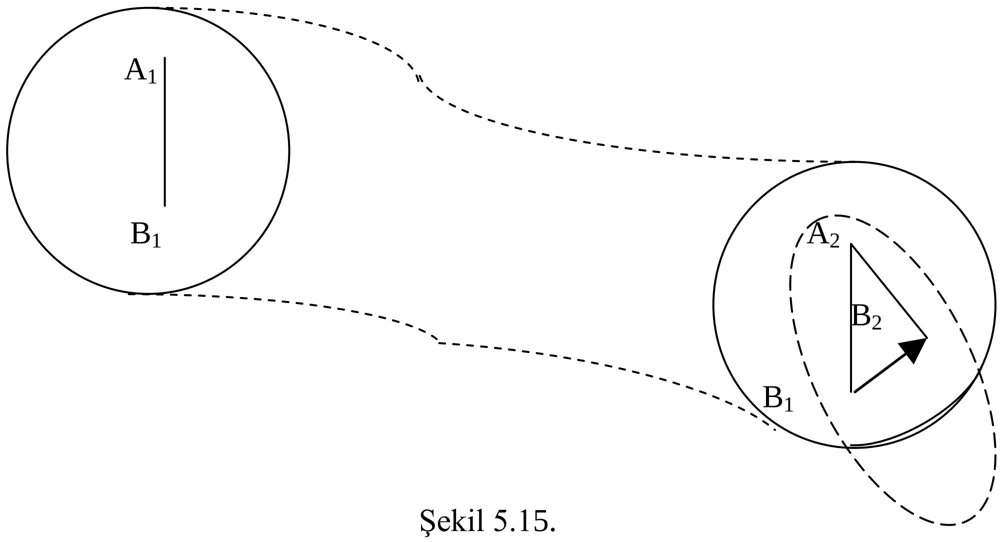
5.5. Genel Düzlemsel Hareket:

Ötelenme ve Dönme dışındaki düzlemsel hareketlere genel düzlemsel hareket deniliyordu. Şimdi her düzlemsel hareketin bir dönme ile bir ötelenmenin toplamı olduğunu göstereceğiz. Bunun için örnek olarak yuvarlanan bir tekerleği ele alacağız



Şekil 5.14.

Genel olarak biz levha için iki A, B noktası ile



Şekil 5.15.

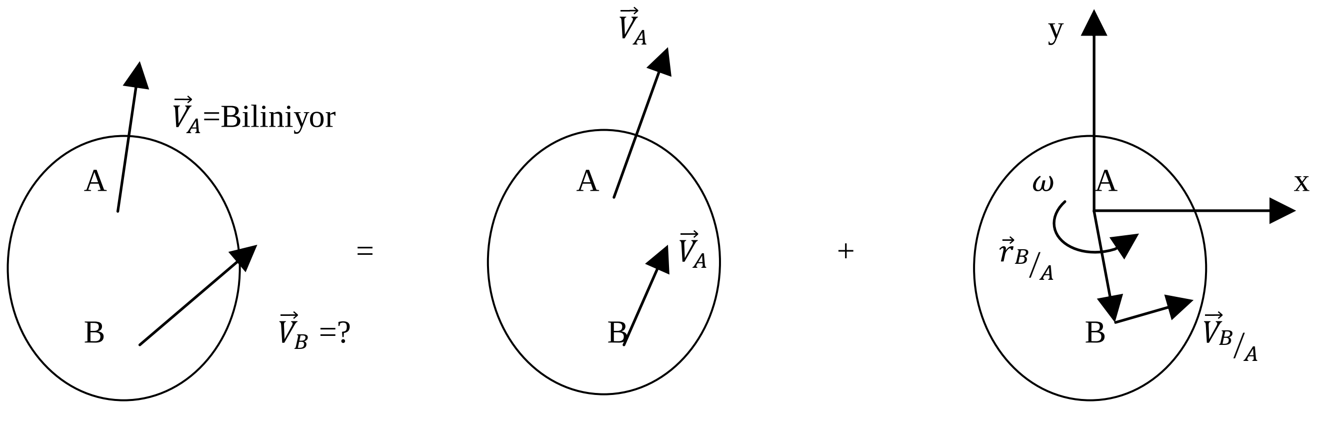
Böyle bir harekette bağıl hareket şöyle tanımlanabilir. A’ daki sabit doğrultularda eleman takımına göre B’nin hareketi dairesel bir harekettir. Önce Ötelenme sonra dönme olur.

5.6. Düzlemsel Harekette Salt ve Bağıl Hız:

Önceki bölümde bir levhanın herhangi bir düzlemsel hareketi yerine keyfi bir A karşılaştırma noktası için tanımlanan bir ötelenme hareketi ile A etrafında bir dönmenin konulabileceğini gördük. B noktasının salt hızı

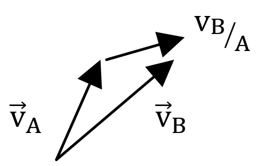
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

bağıl hız formülünden elde edilir. $\vec{v}_A$ hızı levhanın A noktasının ötelenmesine karşı gelmekte $\vec{v}_{B/A}$ bağıl hızı ise levhanın A etrafında dönmesi ile ilgili olup başlangıç noktası A'da bulunan ve doğrultuları değişmeyen eksenlere göre ölçülmektedir.



Düzlemsel hareket = A'nın Ötelenmesi + A Etrafında Dönme

Şekil 5.16.



Şekil 5.17.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$$

$$v_{B/A} = r\ \omega_{AB}$$

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$

$\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$

$v_{A/B} = r * \omega_{AB}$

r A ile B arasındaki uzaklık $\vec{r}_{B/A}$ yönlüdür ve işareti vardır.

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$ $\qquad \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

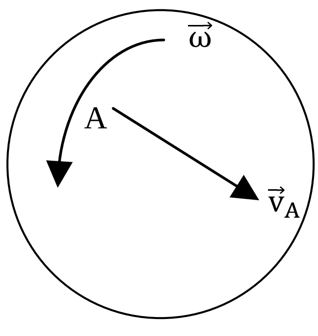
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\qquad \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A}$

Her iki durumda da ω ayın r de aynı ancak bağıl hızın işareti değişmektedir. Konum vektörünün doğrultusuda aynı olup yönü değişmektedir. O halde bağıl hızın yönü seçilen karşılaştırma noktasına bağlıdır. Çizilen bir diyagram yanlışlığı önler.

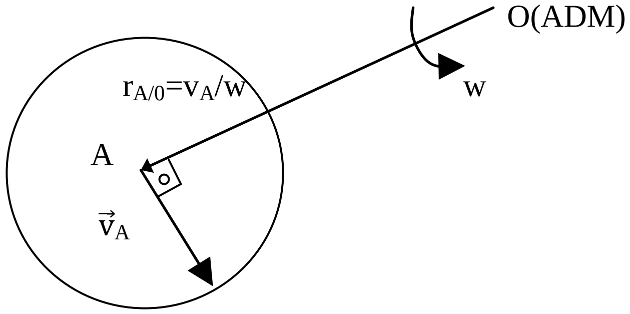
5.7. Düzlemsel Harekette Ani Dönme Merkezi

Bir levhanın düzlemsel hareketi en genel durumda bile bir eksen etrafında dönmeye eşittir. Bu eksenin levhayı ya da düzlemdeki noktayı kestiği noktaya da Ani Dönme Merkezi(ADM) denir. Bir levhanın A noktasının ötelenmesi ve sonra A etrafında ω açısal hızı ile dönmesi ile gösterilğini düşünelim.



Şekil 5.19.

A noktasının hızı ile ω açısal hızı bütün noktaların hızlarını belirler. Şimdi $\vec{v}_A$ ve $\vec{\omega}$ biliniyor ve sıfırdan farklı olduğunda ($\vec{v}_A = 0$ ise A dönme merkezidir. $\vec{\omega} = \vec{0}$ ise hareket ötelenmedir.)



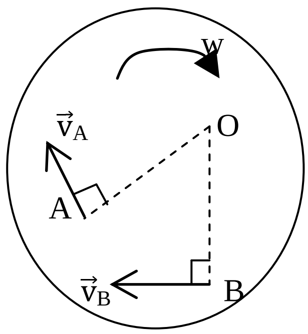
Şekil 5.20.

V_A'ya dik doğru üzerinde ve $r_{A/0}=v_A/w$ uzaklıktaki O noktası etrafında dönme ile de hızlar elde edilir. A'noktasının hızını O'ya göre yazalım.

$v_A = v_0 + \vec{v}_{A/0}$ $\qquad$ $v_A = \vec{v}_0 + \vec{w} \times \vec{r}_{A/0}$

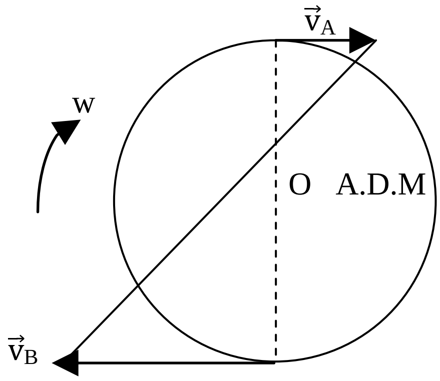
$v_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_A$ olması için $\vec{v}_0 = \vec{0}$ olmalı, yani O dönme merkezidir.

Ani dönme merkezi A ve B gibi iki noktada hızlar paralel değilse diklerin kesişmesiyle bulunur.

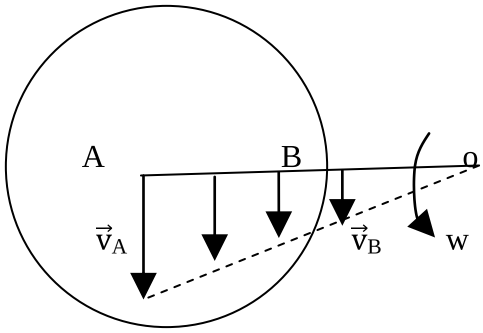


Şekil 5.21.

hızlar paralel ise

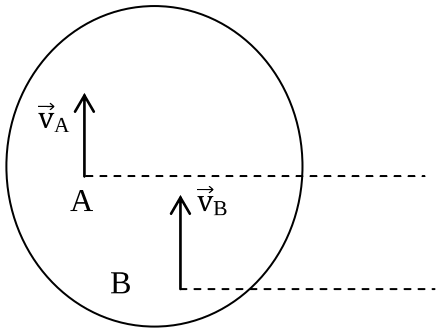


Şekil 5.20.



Şekil 5.22.

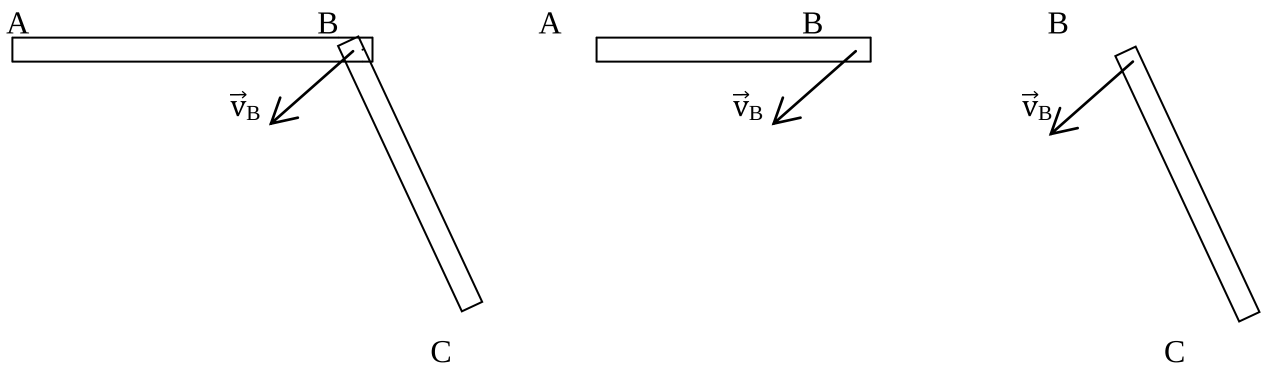
Eğer hızlar paralel, şiddetleri aynı ve yönleri de aynı ise o zaman cisim öteleme yapıyordur. Hızlara çıkılan dikler kesişmez. Dönme merkezi yoktur.



$\vec{v}_A = \vec{v}_B$ (öteleme)

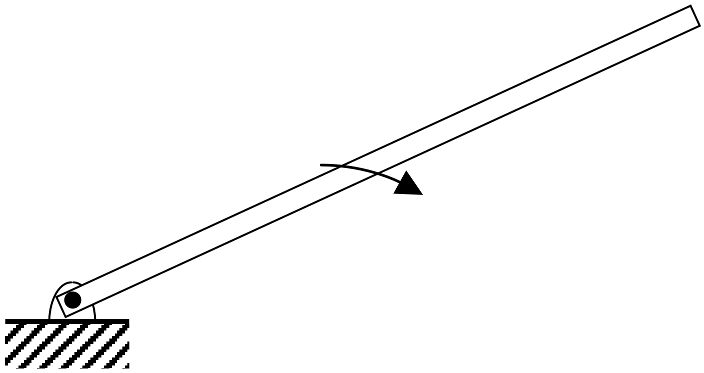
Şekil 5.23.

Ayrıca mafsal da iki cismin hızları eşittir.



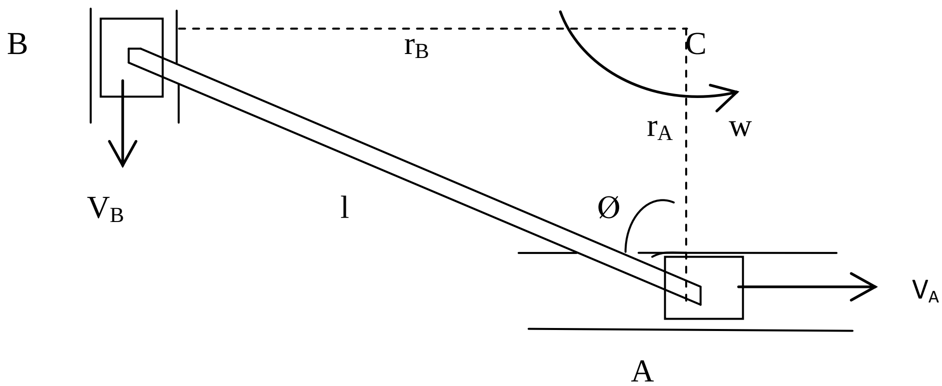
Şekil 5.24.

Sabit mesnette ani dönme merkezidir.



Şekil 5.25.

Ani dönme merkezi bazı hesaplarda yararlı olur.



Şekil 5.26.

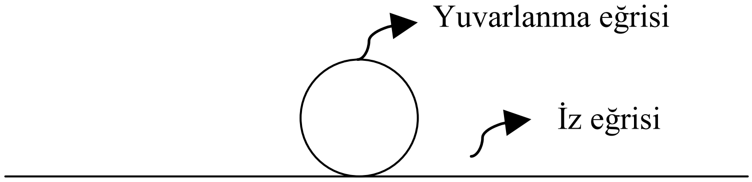
Dikler çizilerek C bulunur. A noktasının hızı belirli ise w=$\frac{v_A}{l\cos\text{Ø}}$ olur.

v_B =lsinØ$\frac{v_A}{l\cos\text{Ø}}$ =v_A tanØ ile v_B bulunur. Aslında tanØ ya bile gerek yok.

v_A =w r_A v_B =w r_B olup w=$\frac{v_A}{r_A}$ ve w=$\frac{v_B}{r_B}$ v_B= $\frac{r_B}{r_A}$ v_A ile bulunur..

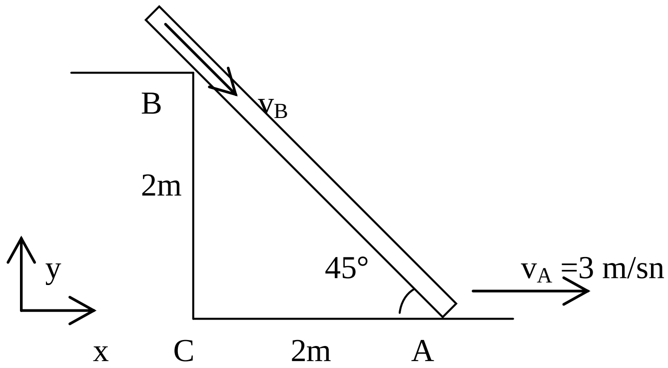
Ani dönme merkezi levha üzerinde veya dışında da olabilir. Ancak bu nokta levha üzerinde ise levhanın o noktadaki hızı sıfır olmak zorundadır. İki farklı zamanda ani dönme merkezinin yeri aynı olmayabilir. Yani ani dönme merkezinin ivmesi sıfırdan farklı olabilir. Öyle ise ivmeler C etrafında dönme oluşuna göre bulunmazlar.

Değişen ani dönme merkezinin cisim üzerinde değişen eğrisine yuvarlama eğrisi, uzayda çizdiği eğriyede iz eğrisi denir. Gösterilebilir ki her an 2 eğri birbirine teğettir. Levha hareket ettikçe yuvarlama eğrisi iz eğrisi üzerinde yuvarlanıyor gibidir.



Şekil 5.27.

ÖRNEK



Şekil 5.28.

Bir çubuğun yerdeki A ucu 3 m/sn hızla sağa doğru kayıyor. Çubuğun B noktasının hızı nedir ?

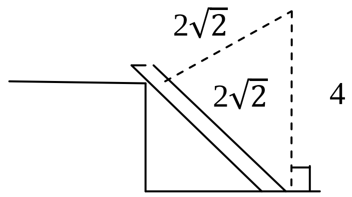
$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A}$

$v_B(0{,}707\,\vec{i} - 0{,}707\,\vec{j}) = 3\vec{i} + w_{AB}\vec{k} \times (-2\vec{i} + 2\vec{j})$ $0{,}707 v_B\,\vec{i} - 0{,}707\, v_B\,\vec{j} = (3 - 2\,w_{AB})\,\vec{i} - 2w_{AB}\,\vec{j}$

$0{,}707\ V_B = 3 - 2w_{AB}$

$-0{,}707\ v_B = -2w_{AB}$ $v_B = 2{,}12$ m/sn ve $\vec{v}_B = 2{,}12(0{,}707\vec{i} - 0{,}707\vec{j}) = 1{,}5\vec{i} - 1{,}5\vec{j}$ olur.

Ani dönme merkezi ile :



Şekil 5.29.

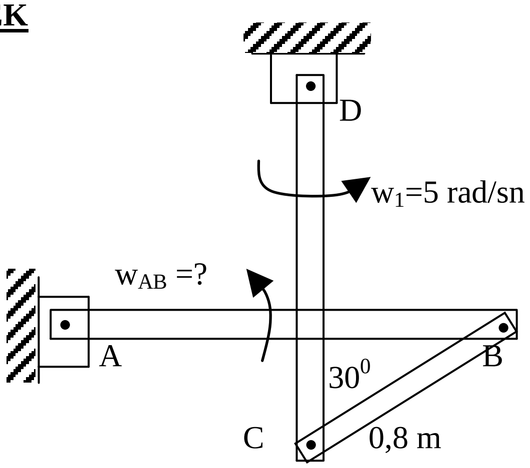
$\overrightarrow{v_A} = (\vec{v})_{ADM} + (\vec{v})_{A/ADM}$

$w = \frac{3}{4} rad$

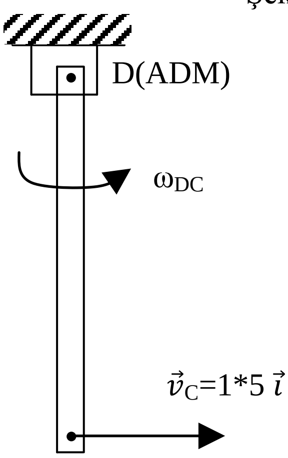
$v_B = \frac{3}{4} 2\sqrt{2} =$ <u>2,12 m/sn</u>

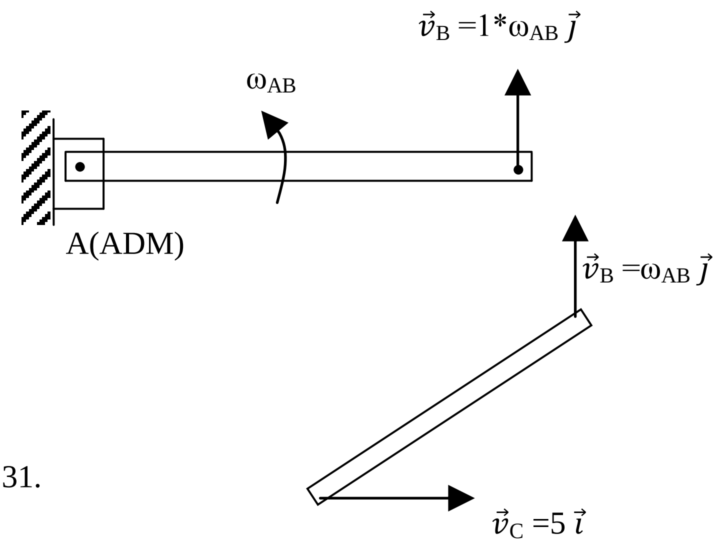
<u>ÖRNEK</u>

DC=1m, AB=1m w_{AB}=?



Şekil 5.30.





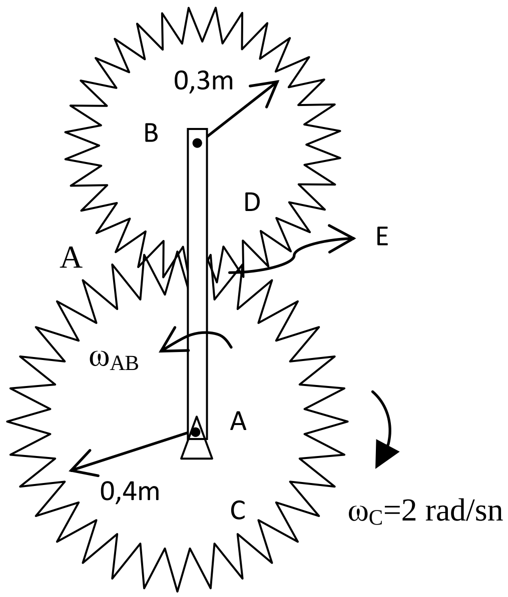
Şekil 5.31.

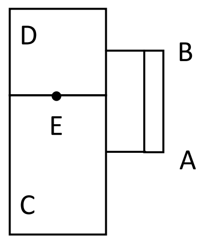
$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C}$ $\qquad$ $w_{AB}\,\vec{j} = 5\vec{i} + w_{BC}\,\vec{k} \times (0{,}8 \cos 30\vec{j} + 0{,}8 \sin 30\vec{i}\,)$

$0=5-0{,}866 * 0{,}8\, w_{BC}$ $\qquad w_{BC}= 7{,}22$ rad/sn

$w_{AB} = w_{BC} * 0{,}40 = 2{,}89$ rad/sn

ÖRNEK

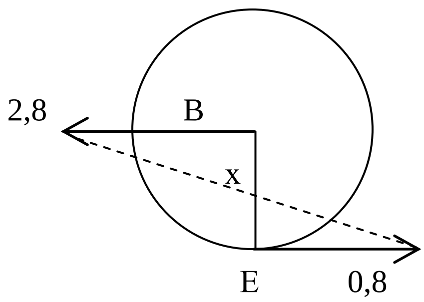




Şekil 5.32.

C dişlisi saat ibresi yönünde 2 rad/sn ile dönüyor. Aynı anda AB çubuğu saat ibresinin tersine w_{AB}=4rad/sn ile dönüyor. D dişlisinin açısal hızını bulunuz.(E ortak nokta)

AB çubuğundan



Şekil 5.33.

$v_B = 4*0{,}7 = 2{,}8$ m/sn

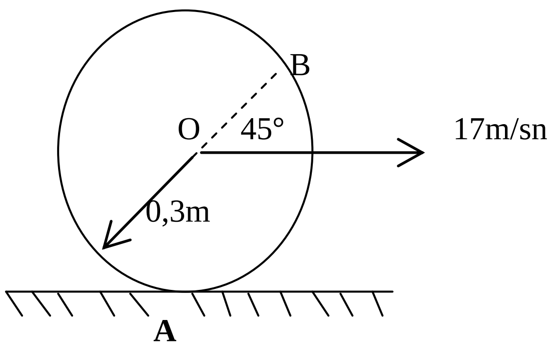
C dişlisindeki E noktasının hızı:

$(v_E) = 2*0{,}4 = 0{,}8$ m/sn $\qquad \frac{x}{2{,}8} = \frac{0{,}3-x}{0{,}8} \rightarrow x=0{,}233$m

$w_D = \frac{2{,}8}{0{,}233} = 12$ rad/sn

ÖRNEK

Bir teker 17m/sn hızla yuvarlanarak ilerliyor. Açısal hızı nedir? B noktasının verilen konumda hızı nedir?

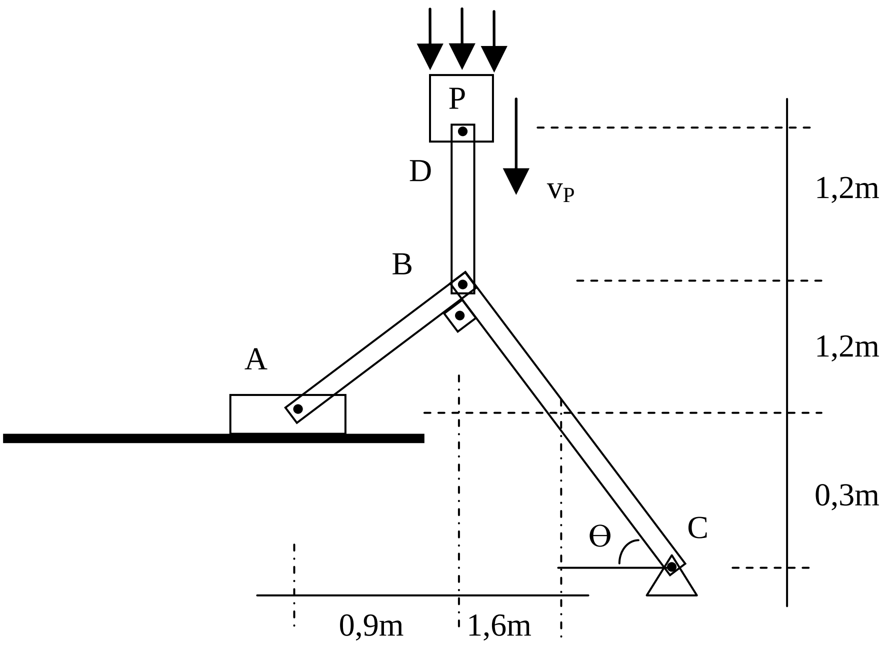


Şekil 5.34.

$\vec{v}_o = \vec{v}_A + \vec{w} \times \vec{r}_{o/A}$ $17\,\vec{i} = w\vec{k} \times 0{,}3\vec{j}$ $w = -\frac{17}{0{,}3} = -56{,}7$ rad/sn

$\vec{v}_B = \vec{v}_o + \vec{w} \times \vec{r}_{B/o} = 17\,\vec{i} + (-56{,}7\vec{k}) \times (0{,}3)[0{,}707\vec{i} + 0{,}707\vec{j}\,] = 29\vec{i} - 12{,}3\vec{j}$ m/sn

ÖRNEK



Şekil 5.35.

Piston (P) $\vec{v}_p = -6\vec{j}$ m/sn sabit hızla aşağıya inerken kayıcı $\vec{v}_A$'nın hızını bulunuz

$\vec{v_D} = \vec{v}_p = -6\vec{j}$ $\tan\Theta = \frac{1{,}2}{1{,}6}$ $\Theta = 36{,}8°$

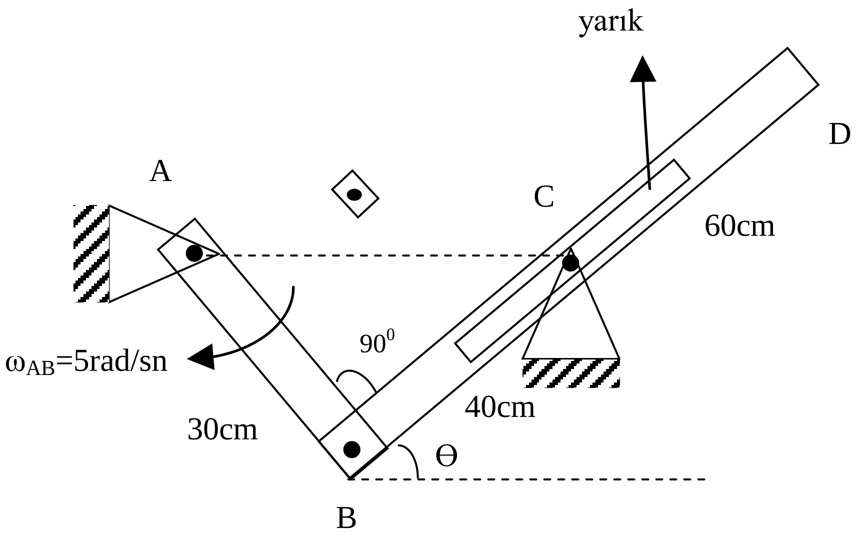
BD: $\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{v}_{B/D}$ $\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{w}_{BD} \times \vec{r}_{B/D}$ $\vec{v}_B = -6\vec{j} + w_{BD}\,\vec{k} \times (-1{,}2\vec{j})$ ***1***

BC: $\vec{v}_B = v_B(-0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j})$ ***2*** ($\vec{v}_B$ BA doğrusuna paraleldir dolayısı ile birim vektörler aynıdır)

1=2 $v_B(-0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j}) = -6\vec{j} + w_{BD}\vec{k} \times (-1{,}2\vec{j})$ $\rightarrow v_B = 7{,}5$ m/sn

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$ $\rightarrow -v_A\vec{i} = 7{,}5(-0{,}6\vec{i} - 0{,}8\vec{j}) + w_{AB}\vec{k} \times (-0{,}9\vec{i} - 1{,}2\vec{j}) \rightarrow v_A = 12{,}5$ m/sn; $\vec{v}_A = -12{,}5\vec{i}$ m/sn

ÖRNEK



Şekil 5.36.

AB çubuğu saat yönünde 5rad/sn lik bir hız ile dönmektedir. BD çubuğunun C noktasında hareketini kısıtlayan bir yarık vardır ($\vec{V_c} \parallel$ BD). Şekildeki konumda D noktasının hızı ile BD'nin açısal hızını bulunuz.

$\tan\Theta = \frac{30}{40}$ $\rightarrow \Theta = 36{,}9°$ $\sin\Theta = 0{,}6$ $\cos\Theta = 0{,}8$

$\vec{v}_B = \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = -5\vec{k} \times 30(\sin\Theta\vec{i} - \cos\Theta\vec{j}) = -90\vec{j} - 120\vec{i}$ cm/sn

$\vec{v}_C = v_C(\cos\Theta\vec{i} + \sin\Theta\vec{j}) = 0{,}8v_C\vec{i} + 0{,}6v_C\vec{j}$ ……………….(1)

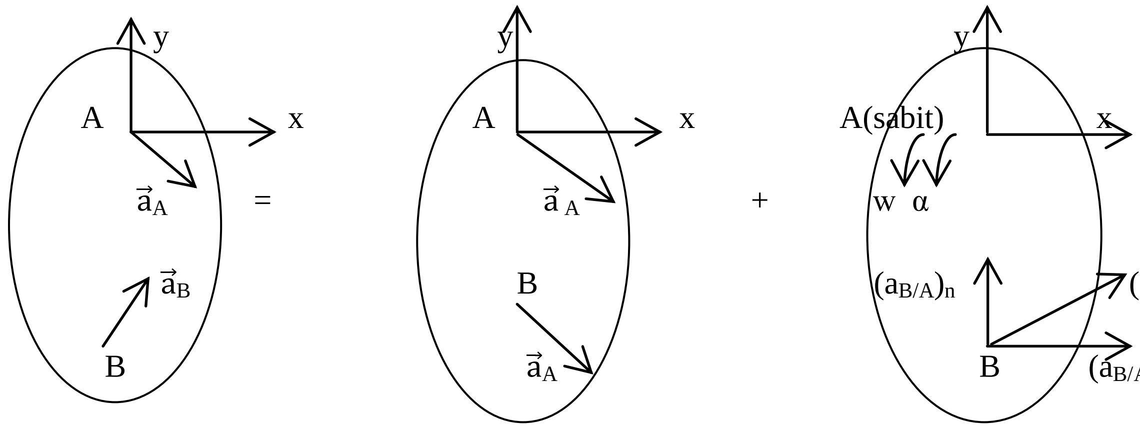
$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{w}_{BD} \times \vec{r}_{C/B} = -120\vec{i} - 90\vec{j} + w_{BD}\vec{k} \times 40(0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}) = (-120 - 24\,w_{BD})\,\vec{i} + (-90 + 32\,w_{BD})\,\vec{j}$ cm/sn … (2)

(1)=(2) $\rightarrow$ $v_C = -150$ cm/sn , $w_{BD} = 0$ (Ötelenme)

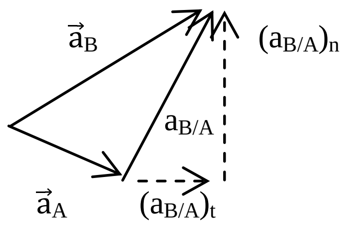
$\vec{v}_C = -150(0{,}8\vec{i} + 0{,}6\vec{j}) = -120\vec{i} - 90\vec{j}$ olur. $\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{w}_{BD} \times \vec{r}_{D/B} = -120\vec{i} - 90\vec{j}$

5.8. Düzlemsel Harekette Salt ve Bağıl İvme

Herhangi bir düzlemsel hareket seçilen bir A noktasının ötelenmesi ve bunun etrafında dönmesi ile oluşturulabilir. (5.6.) kısımda hızlar için kullandığımız bu özelliği şimdi ivmeler için kullanacağız.



Şekil 5.37.



$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

Şekil 5.38.

$\vec{a}_A$ ivmesi levhanın A ile birlikte ötelenmesine karşı gelmekte $\vec{a}_{B/A}$ bağıl ivmesi ise levhanın A etrafında dönmesi ile ilgili olup A noktası sabit gibi düşünülecektir. ($\vec{a}_{B/A}$) bağıl ivmesi ($\vec{a}_{B/A})_t$ bileşeni ile $(\vec{a}_{B/A})_n$ bileşenine ayrılabilir.

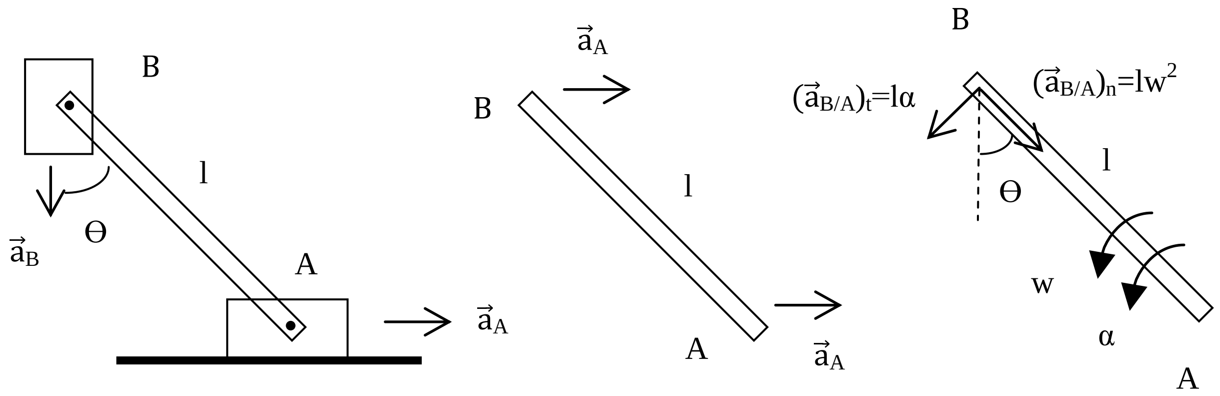
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$

Levhanın x-y takımına göre açısal hızı “w” ivmesi “α” olduğuna göre ve $r=|\vec{r}_{B/A}|$ ise

$(\vec{a}_{B/A})_t = \vec{\alpha} \times (\vec{r}_{B/A})$, $(a_{B/A})_t = r\alpha$

$(\vec{a}_{B/A})_n = -w^2 (\vec{r}_{B/A})$, $(a_{B/A})_n = rw^2$

Örnek olarak yine 2 ucu doğrusal kayan bir çubuğu ele alalım.



Düzlemsel hareket A ile ötelenme A etrafında dönme

Şekil 5.39.

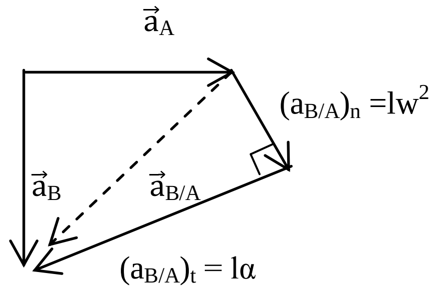
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$

Birinci durum için :

$\overset{+}{\rightarrow}$ $0 = a_A + lw^2 \sin\Theta - l\alpha\cos\Theta$

$+\uparrow$ $-\vec{a}_B = -lw^2\cos\Theta - l\alpha\sin\Theta$

a_B ve α ortak çözülür. Grafik yol ile de çözüm yapılabilir.



Şekil 5.40.

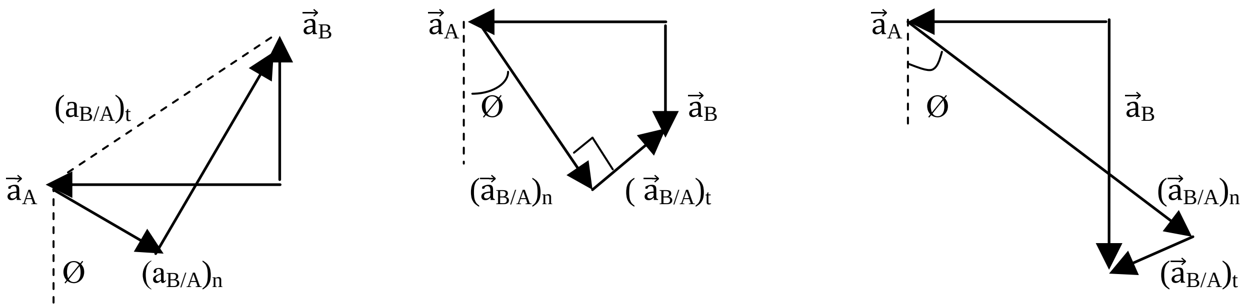
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$

$|(\vec{a}_{B/A})_n| = lw^2$ olup yönü A'ya doğrudur.

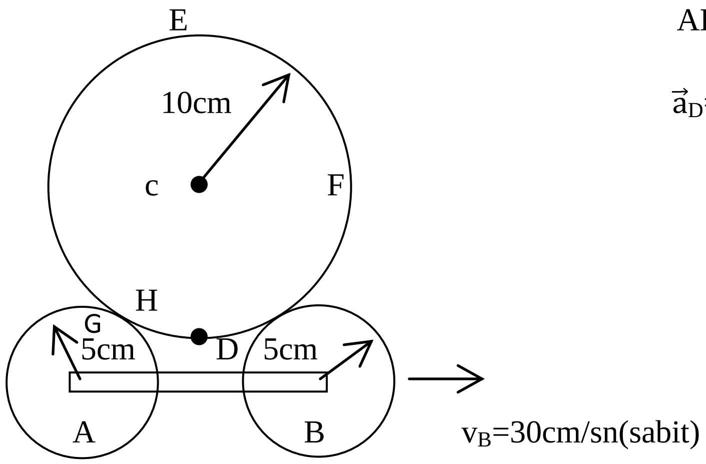
$|(\vec{a}_{B/A})_n| = l\alpha$ olup yönü belli değildir. Fakat doğrultusu AB'ye diktir.

$\vec{a}_A$ 'nın yönüne ve $(\vec{a}_{B/A})$ nın şiddetine göre değişik durumlar çıkabilir. a_B ve α iki bilinmeyen olup w daha önce hızlarla ilgili bağıntılardan elde edilebilir. 3 farklı durum için aşağıda grafik yöntemler verilmiştir.



Şekil 5.41.

ÖRNEK



AB=15 cm

$\vec{a}_D$=? $\vec{a}_E$ =? $\vec{a}_F$=?

Şekil 5.42.

A ve B 'nin ortasında olması gereken $\vec{v}_C = \vec{v}_A = \vec{v}_B$ (sabit) $\vec{a}_C = 0$ (hem düşeyde hem yatayda)

v_c sabit (düşeyde hareket yok)

$w_A = w_B = \frac{30}{5} = 6$ rad /sn $\vec{v}_G = \vec{v}_H \rightarrow \vec{v}_A + \vec{w}_A \times \vec{r}_{G/A} = \vec{v}_C + \vec{w}_C \times \vec{r}_{H/C}$ $w_C = \frac{r_A}{r_C} w_A = 3$ rad/sn

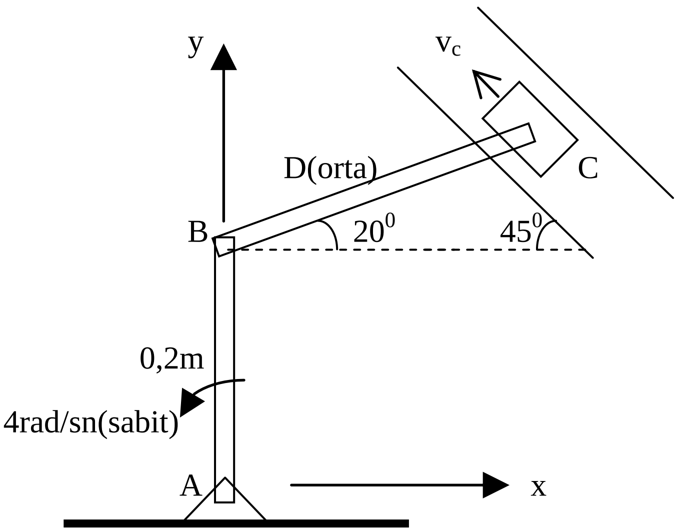
$\alpha_C = 0$ (w_C sabit)

$\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{D/C} = \vec{0} + \vec{0} + (-3^2)(-10\vec{j}) = 90\vec{j}$

$\vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{E/C} = \vec{0} + \vec{0} + (-3^2)(10)(\vec{j}) = -90\vec{j}$

$\vec{a}_F = \vec{a}_C + \vec{a}_{F/C} = \vec{0} + \vec{0} + (-3^2)(10)(\vec{i}) = -90\vec{i}$

ÖRNEK



BC=0,3m

w_{BC}=?

v_D=?

Şekil 5.43.

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = 4\vec{k}$ x $0{,}2\vec{j} = -0{,}8\vec{i}$

$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{w}_{B/C} \times \vec{r}_{C/B}$ $v_C(-\cos 45\vec{i} + \sin 45\vec{j}) = -0{,}8\vec{i} + w_{BC}\vec{k}$ x $0{,}3(\cos 20\vec{i} + \sin 20\vec{j})$

$= -0{,}8\vec{i} + 0{,}3\, w_{BC} \cos 20\vec{j} - 0{,}3 w_{BC} \sin 20\vec{i} \rightarrow$ $v_C = 1{,}779$ m/sn

$w_{BC} = 4{,}46$, $\vec{w}_{BC} = 4{,}46\vec{k}$ rad/sn

$\vec{v}_D = -0{,}8\vec{i} + (4{,}46\vec{k}) \times (0{,}141\vec{i} + 0{,}0513\vec{j}) = -1{,}029\vec{i} + 0{,}629\vec{j}$ m/sn

ÖRNEK

Bir önceki örnekte w_{AB}= 3rad/sn α_{AB} =5 rad/sn^2 ise α_{BC}=?

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} = -3(0{,}2)\,\vec{i} = -0{,}6\vec{i}$

$\vec{v}_C = v_C(-0{,}707\vec{i} + 0{,}707\vec{j}) = \vec{v}_B + \vec{w}_{BC} \times \vec{r}_{C/B} = -0{,}6\vec{i} + w_{BC}\vec{k} \times 0{,}3(\cos 20\vec{i} + \sin 20\vec{j})$

$= -0{,}6\vec{i} + w_{BC}(0{,}282)\,\vec{j} - w_{BC}(0{,}1026)\,\vec{i}$

$$\left.\begin{aligned} -0{,}707 v_C &= -0{,}6 - w_{BC}(0{,}1026) \\ 0{,}707 v_C &= 0{,}282 w_{BC} \end{aligned}\right\} \quad \vec{w}_{BC} = 3{,}35\vec{k} \text{ rad/sn}$$

$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A+(\vec{a}_{B/A})_t +(\vec{a}_{B/A})_n = \vec{a}_A +\vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} +\vec{w}_{AB} \times (\vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A})$

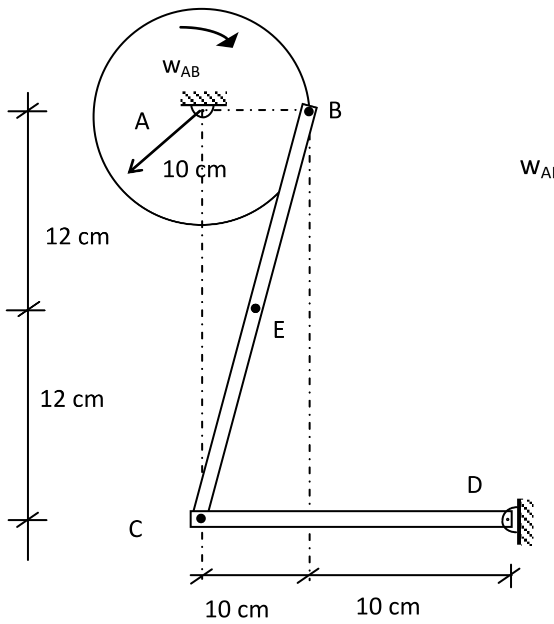
$\vec{a}_B=0 -0,2\alpha\vec{\imath} - 0,2w^2\vec{\jmath} = -1,0\vec{\imath} - 1,8\,\vec{\jmath}$

$\vec{a}_C=\vec{a}_B +(\vec{a}_{C/B})_t +(\vec{a}_{C/B})_n$

$a_C(-0,707\vec{\imath}+0,707\vec{\jmath})= -1,0\vec{\imath} -1,8\vec{\jmath} +\alpha_{BC}\vec{k} \times (0,3\cos20\vec{\imath}+0,3\sin20\vec{\jmath})+(3,35\vec{k})\times[(3,35\vec{k})\times(0,3\cos20\vec{\imath}+0,3\sin20\vec{\jmath})]$

$\alpha_{BC}=39,7$ rad/sn^2 olur.

ÖRNEK



$w_{AB}=8$ rad/sn (sabit)ve $\alpha_{AB}=\vec{0}$ ise

a) $\vec{\alpha}_{BC}=?$, $\vec{\alpha}_{CD}=?$
b) $\vec{a}_C=?$, $\vec{a}_D=?$

Şekil 5.44.

Açıkça görülüyor ki $\vec{a}_D=0$ ve $\vec{v}_D=0$

$\vec{v}_B= -80\vec{\jmath}$ BC çubuğunun ani dönme merkezi "∞" da dolayısı ile BC çubuğu ötelenme yapıyor.

$\vec{v}_C=\vec{v}_B= -80\vec{\jmath}$ $\vec{w}_{BC} =\vec{0}$ (ötelenme)

$\vec{v}_C=\vec{w}_{CD} \times \vec{r} \rightarrow v_C= w_{CD} * 20 \rightarrow \frac{80}{20}= w_{CD} \rightarrow \vec{w}_{CD}= 4\vec{k}$ rad/sn

$\vec{\alpha}_{AB}=\vec{0}$ $\quad \vec{a}_B= -r\, w_{AB}{}^{2}\, \vec{i} = -10(8)^2\vec{i} = -640\vec{i}$ cm/sn^2

$\vec{a}_C=\vec{a}_B+\vec{a}_{C/B} = \vec{a}_B+(\vec{a}_{C/B})_t +(\vec{a}_{C/B})_n$ $\qquad \vec{a}_C=-640\,\vec{\imath}+ \alpha_{BC}\vec{k} \times (-10\vec{i} -24\vec{j})$

$\vec{a}_C=\vec{a}_D+\vec{a}_{C/D} = \vec{a}_D+(\vec{a}_{C/D})_t +(\vec{a}_{C/D})_n$

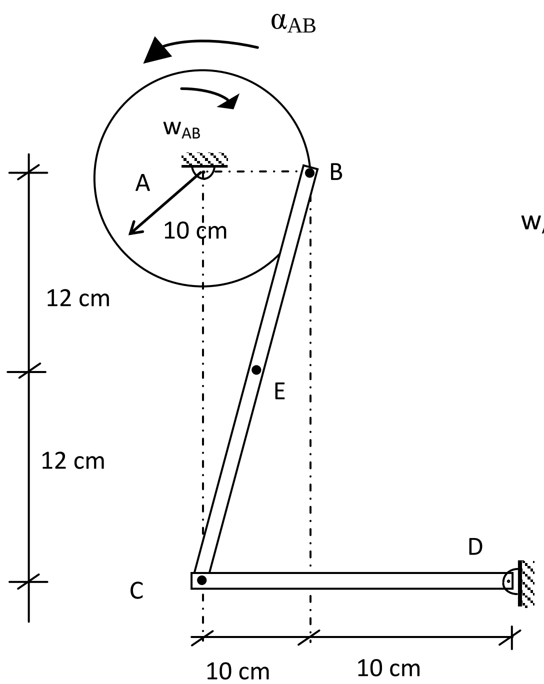
$\vec{a}_C= \vec{a}_D +\alpha_{CD}\, \vec{k} \times (-20\vec{\imath})+4\vec{k} \times [4\vec{k} \times (-20\vec{i})] =0+(-20\alpha_{CD}\vec{j})+(320\vec{j})=320\vec{i} - 20\alpha_{CD}\vec{j}$

$320\vec{i} -20\alpha_{CD}\vec{j} = -640\vec{i} + \alpha_{BC}\vec{k} \times (-10\vec{i} -24\vec{j})$

$$\left.\begin{aligned} 320&= -640 + 24\alpha_{BC} \\ -20\alpha_{CD}&= -10\alpha_{BC} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha_{BC}&= 40\text{rad/sn}^2 \\ \alpha_{CD}&= 20\text{rad/sn}^2 \end{aligned}$$

$\vec{a}_C= \vec{a}_D +\alpha_{CD}\, \vec{k} \times (-20\vec{\imath})+w_{CD}\vec{k} \times [w_{CD}\vec{k} \times (-20\vec{i})] =320\vec{i}- 400\vec{j}$ cm/sn^2

ÖRNEK



w_{AB}=8 rad/sn ve α_{AB}=30rad/sn^2 ise

$a)$ $\vec{\alpha}_{BC}$=? , $\vec{\alpha}_{CD}$=?
$b)$ $\vec{a}_C$=? , $\vec{a}_D$=?

Şekil 5.45.

$\vec{v}_B= \vec{0} +(-8\vec{k})x10\vec{i} = -80\vec{j}$, $\vec{v}_C =\vec{v}_B +\vec{v}_{C/B}$ $\rightarrow$ $v_C\, (-\vec{j})= -80\vec{j}+w_{BC}\vec{k} \times (-10\vec{i} - 24\vec{j})=80$, $w_{BC}=0$, v_c=80cm/sn

$w_{CD}=\frac{80}{20}$=4 rad/sn , $\vec{w}_{CD}= 4\vec{k}$

$\vec{a}_B=\vec{a}_A+\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A+(\vec{a}_{B/A})_t +(\vec{a}_{B/A})_n =$

$\vec{a}_B = \vec{0} + 30\vec{k} \times (10\vec{i}) + (-8\vec{k}) \times [(-8\vec{k}) \times (10\vec{i})] = 300\vec{j} - 640\vec{i}$

$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{C/D} = \vec{a}_D + (\vec{a}_{C/D})_t + (\vec{a}_{C/D})_n$

$\vec{a}_C = \vec{0} + \alpha_{CD}\vec{k} \times (-20\vec{i}) + 4\vec{k} \times [\,4\vec{k} \times (-20\vec{i})\,] = 320\vec{i} - 20\alpha_{CD}\vec{j}$ ……………(1)

Öte yandan:

$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B} = \vec{a}_B + (\vec{a}_{C/B})_t + (\vec{a}_{C/B})_n$

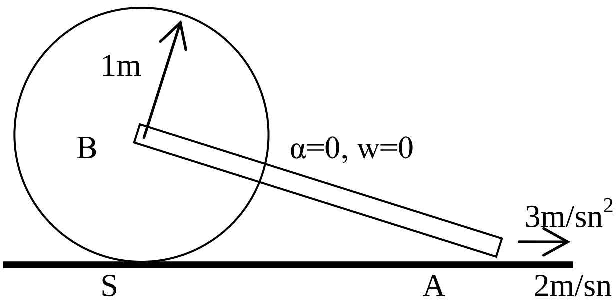
$\vec{a}_C = 300\vec{j} - 640\vec{i} + \alpha_{BC}\vec{k} \times (-10\vec{i} - 24\vec{j})$ ………………….(2)

(1) = (2) ise

$$\left.\begin{aligned} 320 &= -640 + 24\alpha_{BC} \\ -20\alpha_{CD} &= 300 - 10\alpha_{BC} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \alpha_{BC} &= 40 \text{ rad/sn}^2 \\ \alpha_{CD} &= 5 \text{rad/sn}^2 \end{aligned}$$

$\vec{a}_C = \vec{0} + 5\vec{k} \times (-20\vec{i}) + 4\vec{k} \times [4\vec{k} \times (-20\vec{i})] = -100\vec{i} + 320\vec{j}$ cm/sn^2

ÖRNEK



$\vec{a}_S = ?$ $\quad \vec{\alpha}_{BS} = ?$

Şekil 5.46.

A.D.M → ∞ ötelenme , $w_{AB}=0$ $\quad \alpha_{AB}=0$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \rightarrow \vec{a}_B = 3\vec{i}$

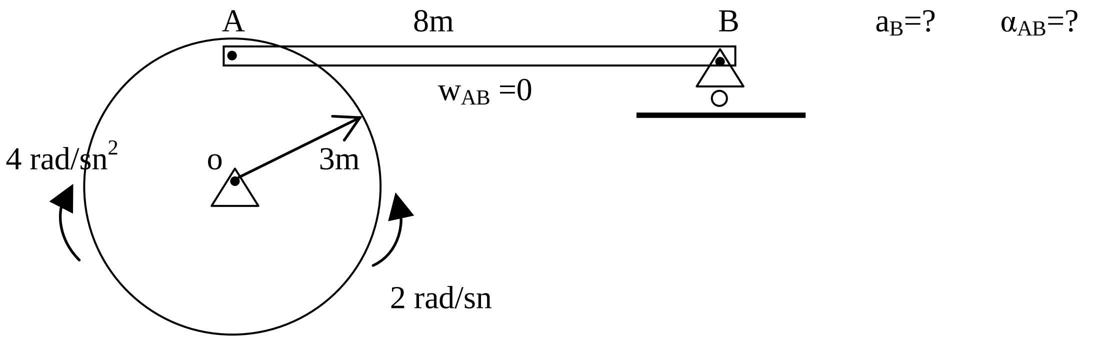
$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{w}_{BS} \times \vec{r}_{B/S}$ $\qquad \vec{v}_B = \vec{0} + w_{BS}\vec{k} \times 1\vec{j} =$ $\qquad \vec{v}_B = \vec{0} + w_{BS}\vec{k} \times 1\vec{j} = 2\vec{i} \rightarrow w_{BS} = -2$rad/sn

$\vec{a}_S = \vec{a}_B + (\vec{a}_{S/B})_t + (\vec{a}_{S/B})_n$

$a_S\,\vec{j} = 3\vec{i} + \alpha_{BS}\vec{k} \times (-1\vec{j}) + (-2\vec{k}) \times [(-2\vec{k}) \times (-1\vec{j})\,] = 3\vec{i} + \alpha_{BS}\vec{i} + 4\vec{j}$

$a_S = 4$m/sn^2 ve $\alpha_{BS} = -3$ rad/sn^2

ÖRNEK



Şekil 5.47.

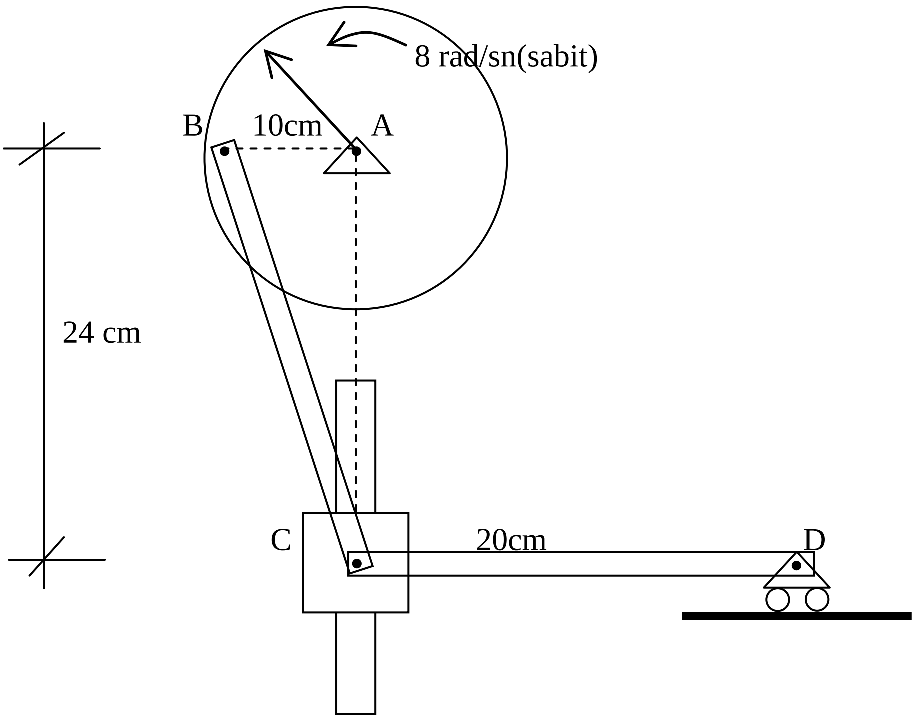
$\vec{v}_A = \vec{v}_B = 2\vec{k} \times 3\vec{j} = -6\vec{i}$ $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O} = \vec{a}_O + (\vec{a}_{A/O})_t + (\vec{a}_{A/O})_n$

$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{AO} \times \vec{r}_{A/O} + \vec{w}_{AO} \times (\vec{w}_{AO} \times \vec{r}_{A/O})$, $\vec{a}_A = \vec{0} + (-4\vec{k} \times 3\vec{j}) + 2\vec{k} \times (2\vec{k} \times 3\vec{j}) = -12\vec{j} + 12\vec{i}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_t + (\vec{a}_{B/A})_n$ $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{w}_{AB} \times (\vec{w}_{AB} \times \vec{r}_{B/A})$

$\vec{a}_B = a_B\,\vec{i} = -12\vec{j} + 12\vec{i} + \alpha_{AB}\vec{k} \times 8\vec{i} + 0 = 12\vec{i}\ \text{m/sn}^2$ $a_B = 12\text{m/sn}^2$ $-12 + 8\alpha_{AB} = 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 1{,}5\ (\text{rad/sn}^2)$

ÖRNEK



Şekil 5.48.

a) $\vec{\alpha}_{BC}$=? , $\vec{\alpha}_{CD}$=?

b) $\vec{a}_C$=? , $\vec{a}_D$=?

$\vec{v}_B = -80\vec{j}$, $\overrightarrow{w_{BC}} = \vec{0}$, $\vec{v}_C = -80\vec{j}$ D noktası ADM, $w_{CD} = \frac{80}{20} = 4 \text{rad/sn}^2$

$a_B = 8^2 * 10\vec{i} = 640\,\vec{i}$ $\quad a_C(-\vec{j}) = 640\vec{i} + \alpha_{BC}\vec{k} \times (10i - 24\vec{j})$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 640 + 24\alpha_{BC} \\ -a_C &= 10\alpha_{BC} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\alpha_{BC} = -26{,}67 \text{ rad/sn}^2 \\ &a_C = 266{,}7 \text{ cm/sn}^2 \quad \text{ve} \quad \vec{a}_C = -266{,}7\,\vec{j} \end{aligned}$$

$a_D\vec{i} = -266{,}7\,\vec{j} + \alpha_{CD}\vec{k} \times (20\vec{i}) + 4\vec{k} \times (4\vec{k} \times 20\vec{i}) = -320\,\vec{i} \text{ cm/sn}^2$ $\quad a_D = -320 \text{ cm/sn}^2$

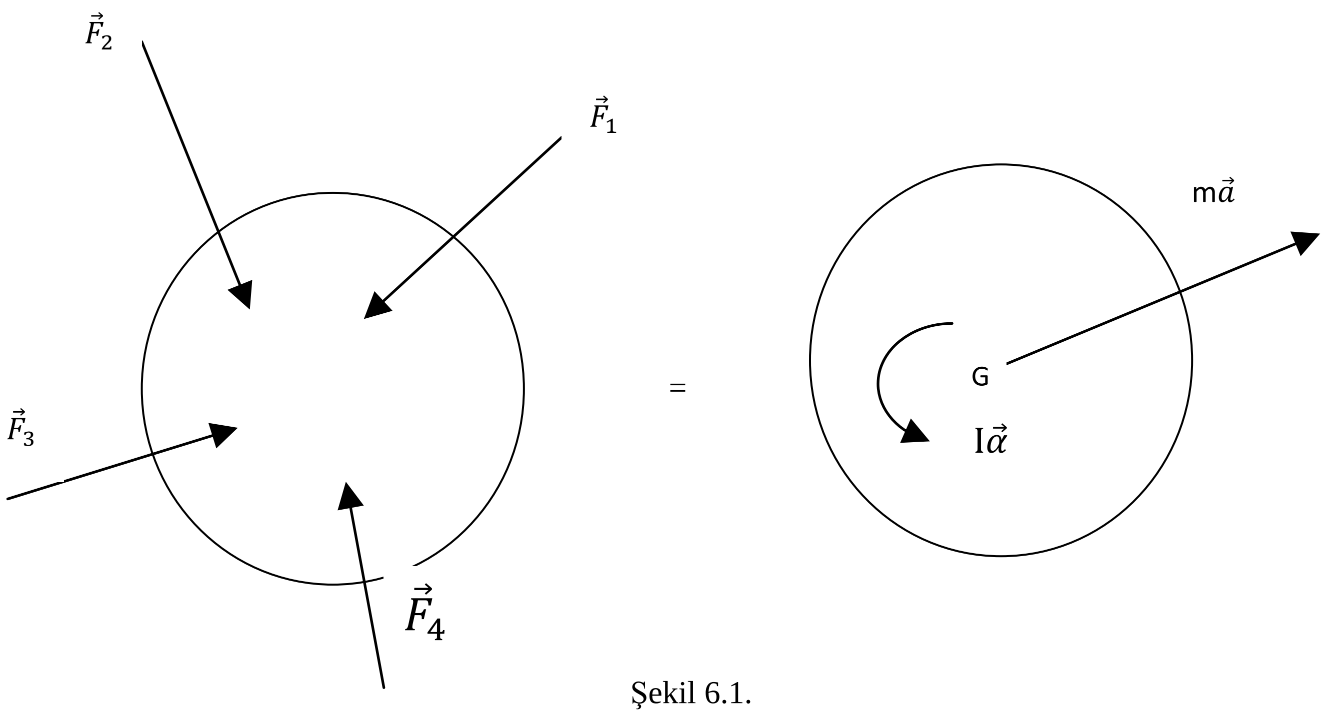
$0 = -266{,}7 + 20\alpha_{CD} \rightarrow \alpha_{CD} = 13{,}33 \text{ rad/sn}^2$

BÖLÜM 6. RİJİT CİSİMLERİN DÜZLEMSEL HAREKETİ

6.1. Giriş

Bir cismin ağırlık merkezinin ötelenmesine ek olarak onun bir nokta etrafında dönmesini de inceleyeceğiz. Disk, levha, çubuk ve silindir gibi cisimlerin düzlemsel hareketlerini ele alacağız.

6.2 Rijit Bir Cismin Düzlemsel Hareketi

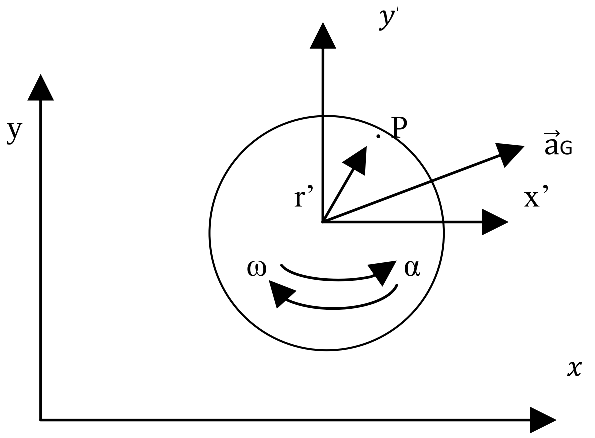


Şekil 6.1.

Bir cismin ağırlık merkezine o cismi temsil eden nokta olarak

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Denklemi maddesel nokta için uygulandığı gibi uygulanır.



Şekil 6.2.

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{a'}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{a}'_t + \vec{a}'_n = \vec{a}'_G + \vec{\alpha}\times\vec{r'} - \omega^2\ \vec{r'}$$

P noktası için

$$(\Delta m)\ \vec{a}_P = (\Delta m)\ \vec{a}_G + \Delta m(\vec{\alpha}\times\vec{r'}) - (\Delta m)\omega^2\ \vec{r'}$$

Tüm noktaları toplarsak

$$\Sigma a\Delta m = \Sigma\vec{a}_G\Delta m + \Sigma(\vec{\alpha}\times\vec{r'})\Delta m - \Sigma\omega^2\ \vec{r'}\Delta m = \vec{a}_G\Sigma\ \Delta m + \vec{\alpha}\times\underbrace{\overbrace{\Sigma\ \vec{r'}\ \Delta m}^{=0}}_{=0} - \omega^2\underbrace{\overbrace{\Sigma\ \vec{r'}\Delta m}^{=0}}_{=0}$$

$\Sigma\ a\ \Delta\ m = \vec{a}_G\Sigma\Delta m$ $\qquad\qquad$ $\Sigma\ F = m\ \vec{a}_G$

$$\Sigma\ \vec{F}_x = m(\ \vec{a}_G)_x$$

Düzlemsel harekette $\qquad \Sigma\ \vec{F}_y = m(\ \vec{a}_G)_y$

Parçacık için Newton denklemi tekrar yazılırsa

$$(\Delta m)\ \vec{a}_P = (\Delta m)\ \vec{a}_G + \Delta m(\vec{\alpha}\times\vec{r'}) - (\Delta m)\omega^2\ \vec{r'}$$

İfadesinin G noktasına göre momenti alınır ve tüm parçaların oluşturduğu momentler toplanırsa

$$\Sigma (\vec{r'} \times a\, \Delta m) = \Sigma (\vec{r'} \times a_G\, \Delta m) + \Sigma\, \vec{r'} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r'})\, \Delta m - \Sigma (\vec{r'} \times \omega\, \vec{r'}\, \Delta m)$$

$$= \Sigma\, \vec{r'}\, \Delta m \ \mathrm{x}\ \vec{a}_G + \ \Sigma(\vec{r'} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r'})\, \Delta m) \ - \ \omega^2\, \Sigma (\vec{r'} \times \vec{r'})\, \Delta m$$

$$= \underbrace{\Sigma(\vec{r'} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r'})\, \Delta m)}$$

α ile aynı doğrultuda $\underbrace{\alpha\, \Sigma\, \vec{r'}^{\,2}\, \Delta m}_{\bar{I}\alpha}$ şiddetinde vektör

$$\Sigma (\vec{r'} \mathrm{x}\ a\, \Delta m) = \bar{I}\alpha$$

Kuvvetlerin kütle merkezine göre momenti ise

$$\Sigma M_G = \bar{I}\, \alpha$$

eşitliğini verir burada;

$\bar{I}$= levha düzlemine dik ve G'den gecen bir eksene göre atalet momentidir. Kuvvetlerin hangi noktaya göre momenti alınıyorsa $\bar{I}$ da aynı noktaya göre olmalıdır.

Rijit cismin düzlemsel hareketinden 3 adet skaler denklem elde edilir.

$\Sigma F_x = m\, a_x$ $\qquad \Sigma F_y = m\, a_y$ $\qquad \Sigma M_x = \bar{I}\, \alpha$

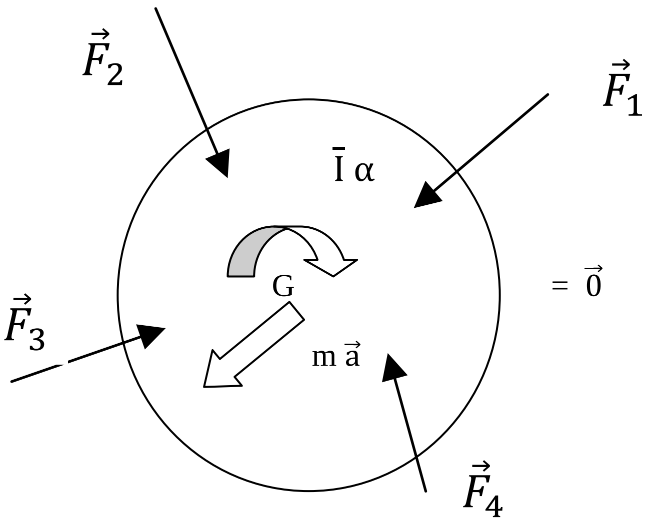
$\vec{a}$ =0 ise G etrafında dönme (v_0=0)

α: 0 ise ötelenme (w_o=0)

Bir cismin en genel düzlemsel hareketi öteleme ve G etrafında dönmeden oluşur.

6.3. Rijit Bir Cismin Düzlemsel Hareketi ile İlgili Problemler

Yukarıda elde edilen 3 adet skaler denklemler kullanarak problemler çözülür.



Dinamik denge

Şekil 6.3.

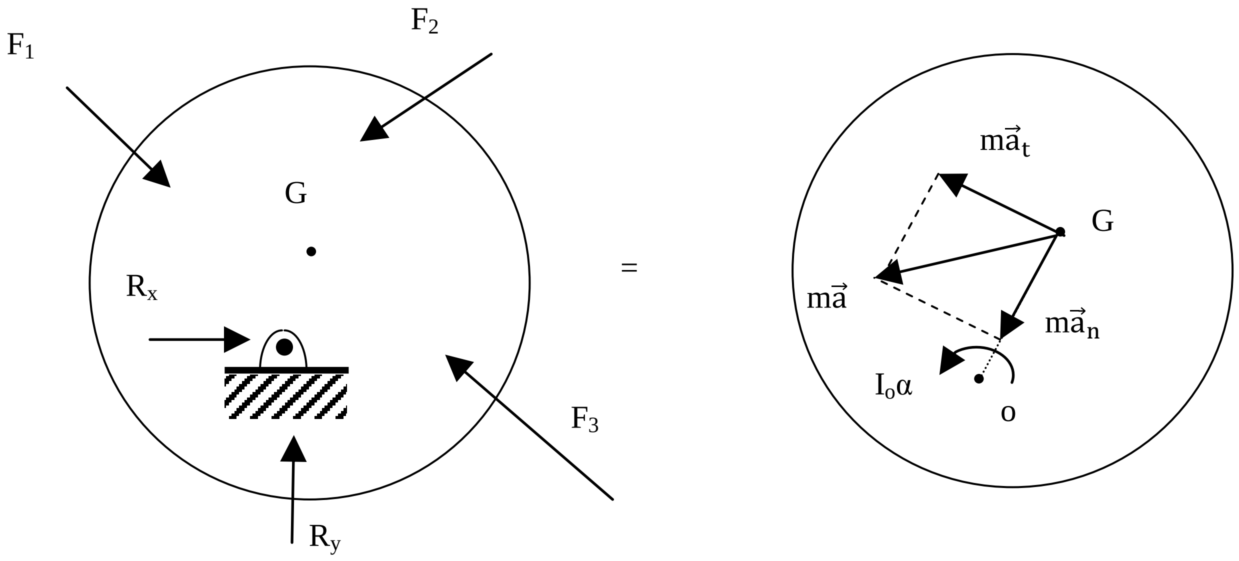
6.4 Rijit Cisimlerden Oluşan Sistemler:

Tek cisme uygulanan denklemler çok parçalı sistemlerde her parça için ayrı ayrı uygulanır. Cisimlerin mafsallarda ve dokunma noktalarıyla ip ve yayla bağlı yerlerinde Newton'un 3. Kanunu ve kinematik kurallar geçerlidir. Dinamik denge kullanarak statikteki gibi birden fazla parça birlikte dinamik denge denklemlerini sağlanır.

6.5 Bağlı Düzlemsel Hareket

Şafların sabit bir eksen etrafında dönmesi ve tekerlerin kaymadan yuvarlanması gibi hareketlere bağlı hareketler denir. Bu durumda $\vec{a}$ ve $\vec{\alpha}$ vektörleri arasındaki bağlantılar kullanılır.

Keyfi bir sabit nokta (G'nın dışında) etrafında dönme

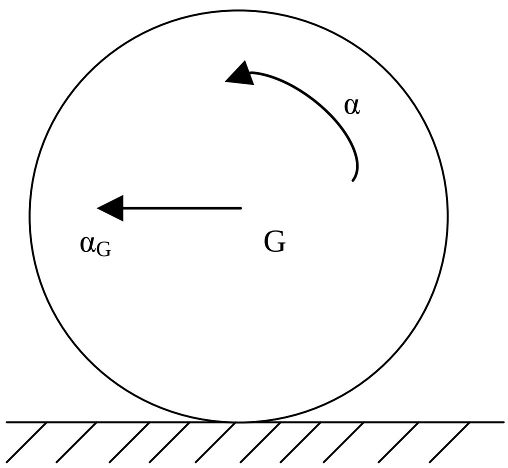


Şekil 6.4.

$\Sigma\vec{F} + \Sigma\vec{R} = m\,\vec{a}$ (a'nın teğet ve normal bileşeni olur.)

$\Sigma M_O = \bar{I}_o\,\alpha$

Yuvarlama hareket



Şekil 6.5.

Diskin Ө radyan kadar dönmesi durumunda G'nin aldığı yol

S = r Ө dır

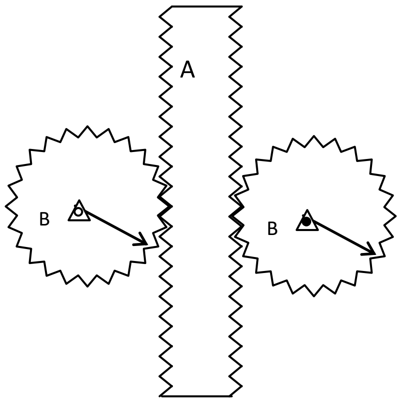
iki kere türev alınırsa

$a_G = r\,\alpha$

dinamik sürtünme kuvveti kaymadan yuvarlanmaya göre çözümde $F_{sür} > F_{max} = \mu_s.N$ bulunursa o yüzeyde kayma olduğuna göre

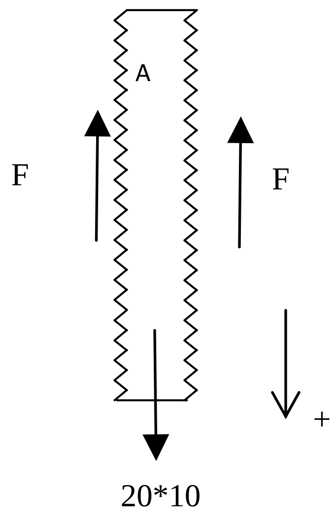
$F_{sür} = \mu_k N$ ile yeniden çözüm yapılır. Silindir ve disk için $a_G = r\,\alpha$ denkleminde kullanılmaz.

ÖRNEK



20kg'lık A çubuğu yarıçapı 20cm kütlesi 5kg olan B dişlilerine şekildeki gibi bağlıdır. A çubuğu serbest bırakıldığında 2 saniyede çubuk ne kadar aşağıya iner. ($g=10 m/sn^2$)

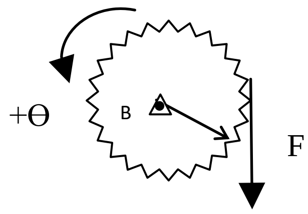
Şekil 6.6.



Şekil 6.7.

Çubuk için $\Sigma F = ma$ $20*10 - 2F = 20\,\bar{a}_A$ ………………(1)

Disk için $\Sigma M = I\alpha$ (merkeze göre) $-0{,}2F = \frac{1}{2} 5\,(0{,}2)^2\,\alpha_B$ ……..(2)



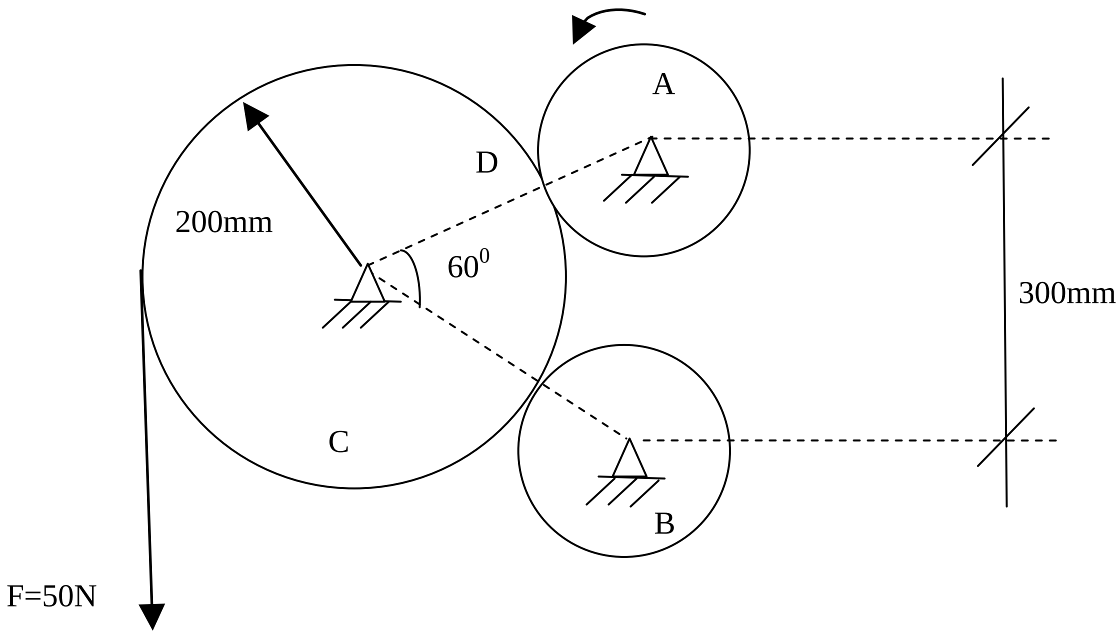
Şekil 6.8.

Kinematikten $0{,}2\,\alpha_B = -\bar{a}_A$……………………(3)

$\bar{a}_A = 8 m/sn^2$ $\bar{v}_A = 8\,t = 16$ m/s $\bar{S}_A = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = 16$ m

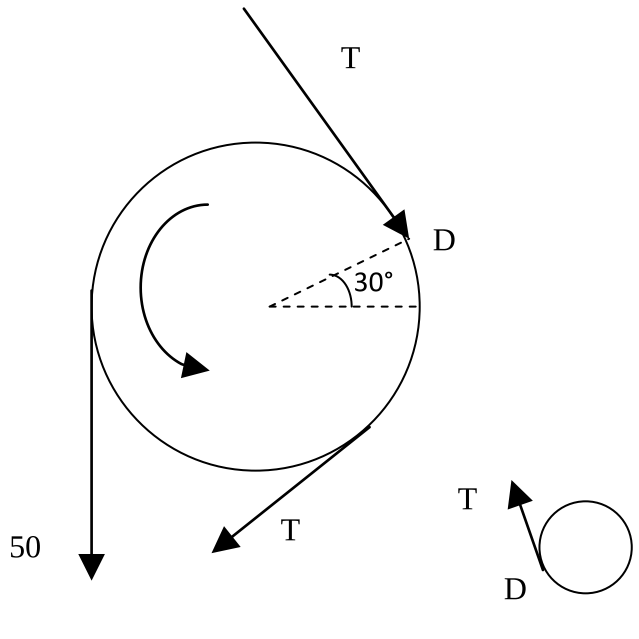
ÖRNEK

α_A=?



Şekil 6.9.

C diski için m=5 kg r_{gy}=141,42mm r=200mm A diski için m=2 kg r_{gy}=70,7mm r=100mm B diski için m=2 kg r_{gy}=70,7mm r=100mm ise α_A=?



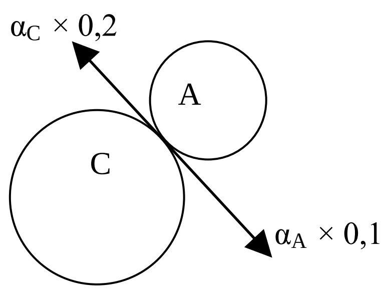
Şekil 6.10.

C için ΣM= Iα (merkeze göre)

$$50*0,2 - T*0,2*2 = 5*0,141^2\,\alpha_C \quad (1)$$

A için ΣM= Iα (merkeze göre)

$$-T*0,1 = 2\,(0,0707)^2\,\alpha_A \quad (2)$$

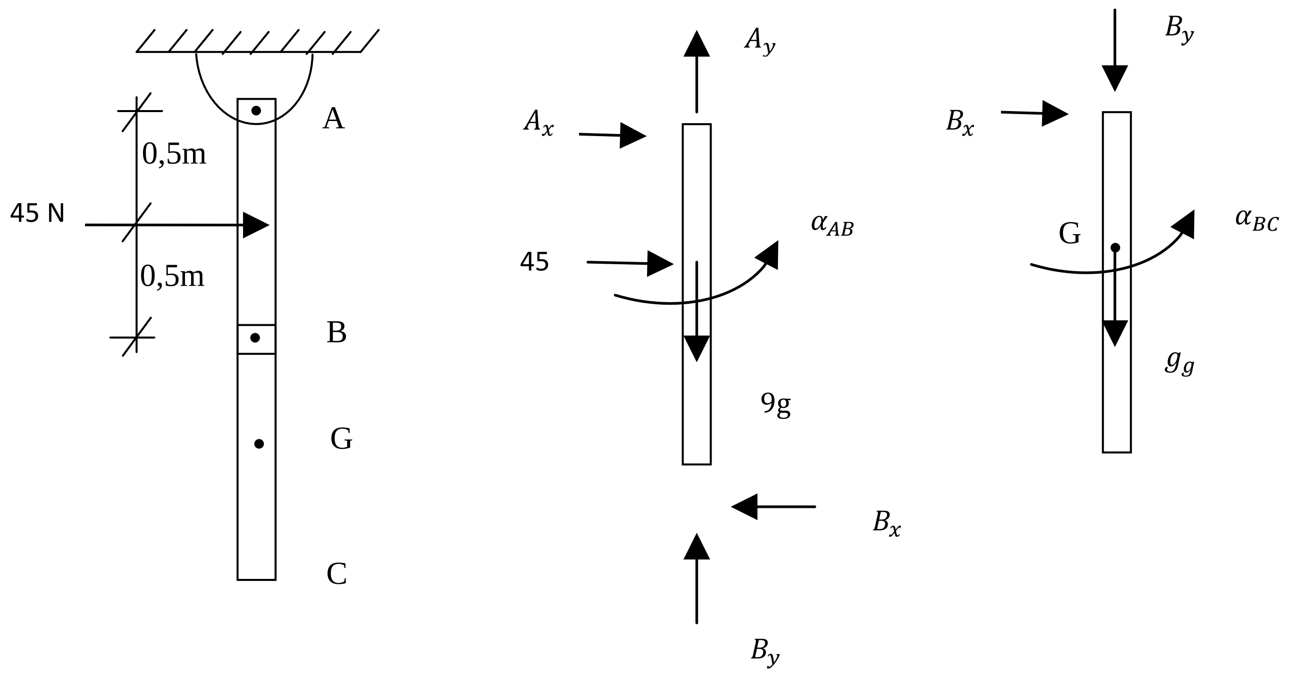


Şekil 6.11.

$$(a_D)_t = \alpha_C\,(0,2) = -\alpha_A\,(0,1) \quad (3)$$

$$\alpha_A = -111 \text{ rad/sn}^2$$

ÖRNEK



Şekil 6.12.

2 çubuk 9 ar kg ve 1'er metre uzunlukta olup uniformdur. Başlangıçta durgun olan çubukların 45 N'luk kuvvet etkisinde açısal ivmeleri ne olur ?

BC $\Sigma M_G = I\,\alpha$ (merkeze göre) $-B_x*(0,5) = \frac{1}{12}(9)*(1)^2 * \alpha_{BC}$ (1)

AB $\Sigma M_A = I\,\alpha$ (A noktasına göre) $45*(0,5) - B_x(1) = \frac{1}{3}(9)*(1)^2 * \alpha_{AB}$ (2)

BC $\Sigma F = ma$ (x yönü) $B_x = 9\,a_{Gx}$ (3)

Kinetikten: $\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BC} \times (-0,5\,\vec{j}) + \vec{0}$

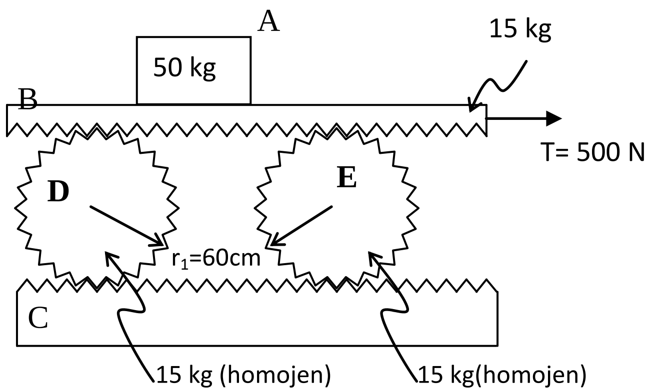
$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_{AB}\,\vec{k} \times (-1\vec{j}) + \vec{0}$

$\vec{a}_G = \underbrace{(\vec{\alpha}_{AB}\,\vec{k} \times (-1\vec{j}))}_{\vec{a}_B} + (\vec{\alpha}_{BC} \times (-0,5\,\vec{j})) = (\underbrace{\alpha_{AB} + 0,5\,\alpha_{BC}}_{a_{Gx}})\,\vec{i}$

$a_G = \alpha_{AB} + 0,5\,\alpha_{BC}$ (4)

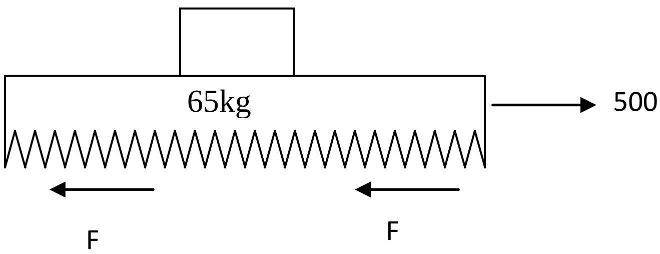
Ortak Çözüm : $\alpha_{AB} = 4,29$ rad/san^2 $\alpha_{BC} = -6,43$ rad/san^2

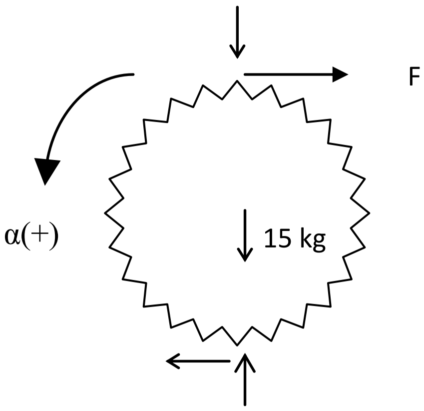
ÖRNEK



15 kg lık bir B platformu 50 kg lık A blok' unu taşımaktadır ve D, E dişlileri üzerinde hareket etmektedir. Her dişli 15 kg ise 500 N' luk bir kuvvet 1 saniyede platformu ne kadar hareket ettirir.

Şekil 6.13.





Şekil 6.14.

Dişli için ΣM= Iα (tabana göre) $-F\,(1{,}2) = \frac{3}{2} * (15) * 0{,}6^2 * \alpha$

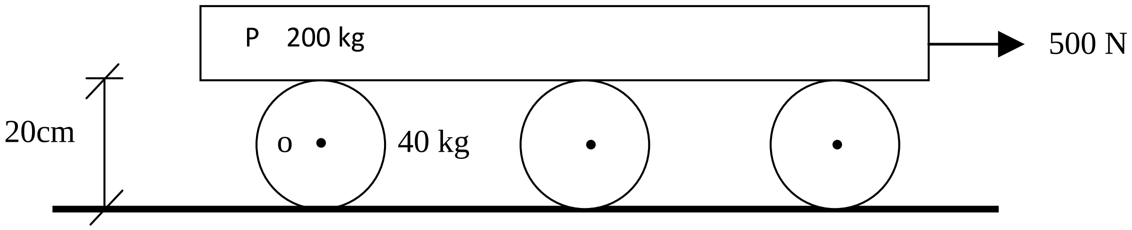
Platform için $500 - 2F = 65\,\bar{a}$

Kinetikten $\bar{a} = -1{,}2\,\alpha$

$\bar{a} = 6{,}56$ m/sn^2

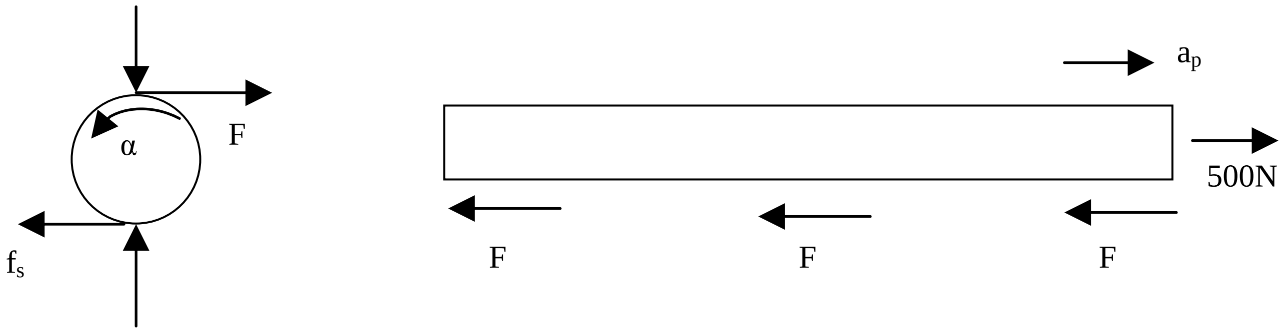
$x = 6{,}56 * \frac{t^2}{2}$ s = 3,28 m

ÖRNEK



Şekil 6.15.

Silindirlerin hepsi aynı özelliktedir. t=4 sn v_0 = ? v_p = ?



Şekil 6.16.

$$\left.\begin{aligned} &-3F + 500 = 200\, a_p \\ &-0{,}2F = +\tfrac{3}{2} * 40 * (0{,}1)^2 * \alpha \\ &-a_p = 0{,}2\,\alpha \end{aligned}\right\}$$

$a_p = 2{,}04\ m/sn^2$ $\alpha = -\ 10{,}2\ rad/sn^2$

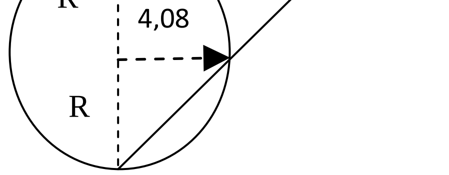
$\vec{a}_p = 2{,}04\ \vec{i}$ $\vec{\alpha} = -10{,}2\vec{k}$

$V_p = 0 + at$

$V_p = 2{,}04 * (4) = 8{,}16$ m/sn

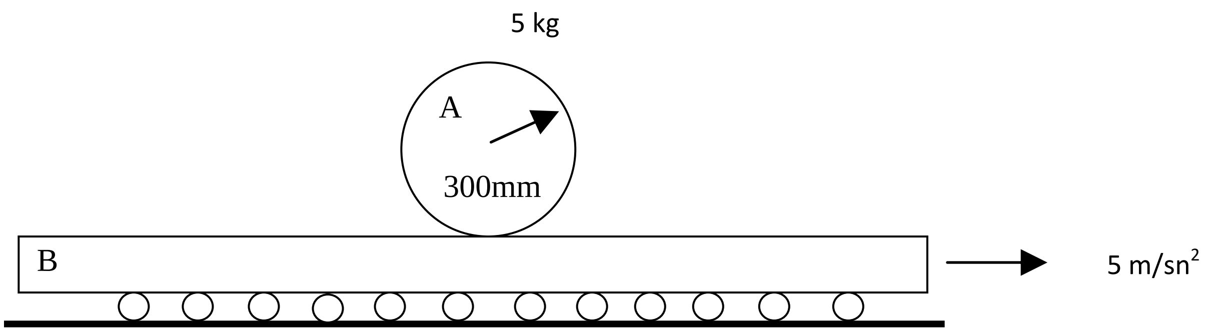
$0{,}2\ \omega = 8{,}16$ $\omega = -40{,}8$

$V_0 = 0 + (-40{,}8) * 0{,}1 = 4{,}08$ m/sn



Şekil 6.17.

ÖRNEK



Şekil 6.18.

B arabasının 5 m/sn^2 ivme veriliyor. Arabada ilk hızı sıfır olan A silindiri 5 kg ve 600 mm çaplıdır. 1,5 saniyede A B' ye göre ne kadar hareket eder ?

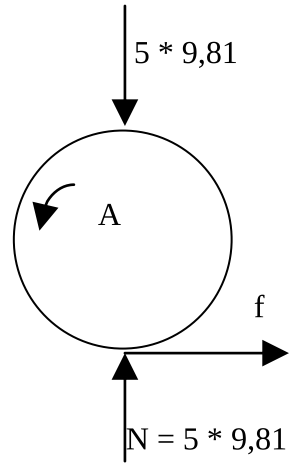
$f(0,3) = \frac{5}{2} * (0,3)^2 * \alpha_A$ Merkeze göre moment

$\Sigma F = m(a)_x$ $f = 5\,(\vec{a}_A)_x$

$a_A = a_B + (a_{A/B})_t + (a_{A/B})_n = 5\vec{i} + \alpha\vec{k} \times 0,3\vec{j}$ +normal ivme

$(\vec{a}_A)_x = 5 - 0,3 * \alpha_A$

$(a_A)_x = 1,667$ m/sn^2



Şekil 6.19.

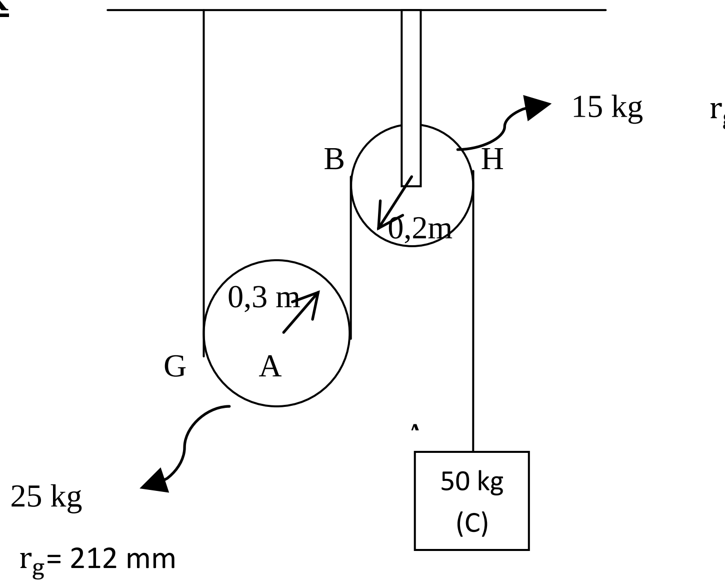
$x_A = \frac{1}{2} * 1,667 * t^2$ $x_A = \frac{1}{2} * 1,667 * (1,5)^2 = 1,87$m

$x_B = \frac{1}{2} * 5 * t^2$ $x_B = \frac{1}{2} * 5 * (1,5)^2 = 5,62$m

$x_B = x_A + x_{B/A}$

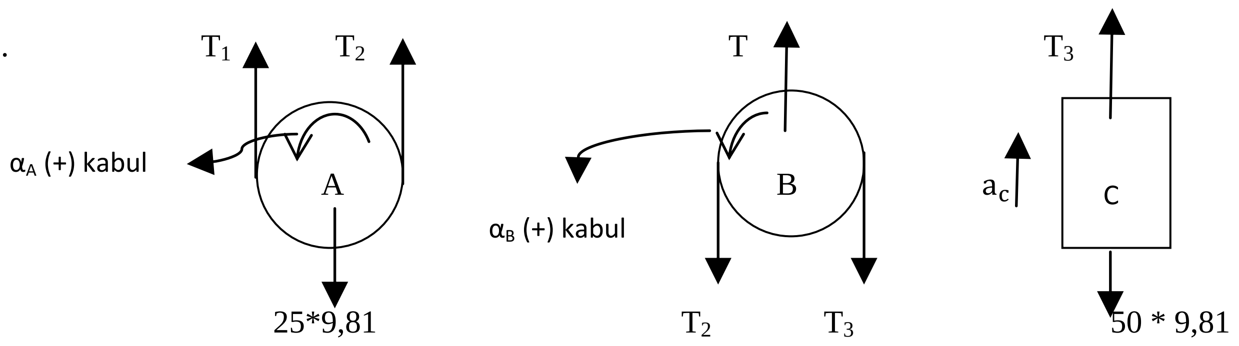
$5,62 = 1,87 + x_{B/A}$ $x_{B/A} = -3,75$ m

ÖRNEK



Kayma olmadığına ve sistem görülen konumdan serbest bırakıldığına göre a_c ' yi bulunuz .

Şekil 6.20.



Şekil 6.21.

$$\sum M_G = (\, k^2 m \,)\, \alpha_A$$

A $\quad M_G = 0{,}6 * T_2 - 25 * 9{,}81 * 0{,}3 = (25 * 0{,}212^2 + 25 * 0{,}3^2)\, \alpha_A \qquad (1)$

B $\quad M_B = T_2 * (0{,}2) - T_3 * (0{,}2) = 15 * 0{,}141^2 * \alpha_B \qquad (2)$

C $\quad T_3 - 50 * (9{,}81) = 50 * a_c \qquad (3)$

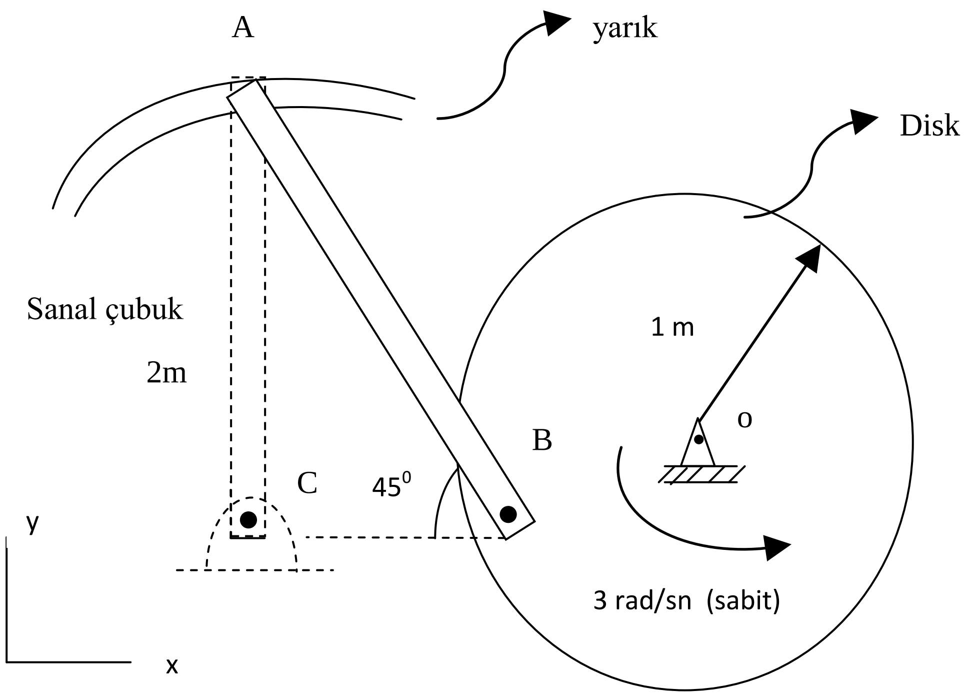
Kinematik:

$0{,}2 * \alpha_B = a_c \qquad (4)$

$-\alpha_A\, (0{,}3) * 2 = a_c \qquad (5)$

$a_c = -5{,}32\ \frac{m}{sn^2}$

ÖRNEK



$\vec{a}_A = ?$

Şekil 6.22.

$\vec{v}_B = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_{0B} \times \vec{r}_{B/0} = 3\,\vec{k} \times (-\vec{i}\,) = -3\,\vec{j}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_0 + \vec{\alpha}_{OB} \times \vec{r}_{B/0} + 3\,\vec{k} \times (3\,\vec{k} \times (-\vec{i}\,)) = 9\,(\vec{i}\,)$

$\vec{v}_A = v_A\vec{i} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B}$

$v_A\vec{i} = -3\,\vec{j} + \omega_{ab}\vec{k} \times \left(-2\vec{i} + 2\vec{l}\right)$ $\quad v_A = 3$ m/sn $\quad \omega_{AB} = -1{,}5$ rad/sn

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} = 9\vec{i} + \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega}_{AB} \times (\vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{A/B})$

$= 9\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{k} \times (-\frac{3}{2}\vec{k} \times (-2\vec{i} + 2\vec{j}\,)) + \alpha_{AB}\vec{k} \times (-2\vec{i} + 2\vec{j}\,)$

$\vec{a}_A = 9\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{i} - \frac{9}{2}\vec{j} - 2\,\alpha_{AB}\vec{j} - 2\alpha_{AB}\vec{i}$

$\vec{a}_A = (13{,}5 - 2\alpha_{AB})\,\vec{i} - (4{,}5 + 2\alpha_{AB})\vec{j}$ (1)

$v_A = \omega_{AC}\vec{k} \times (2\vec{j}) = 3\vec{i}$ $\quad \omega_{AC} = -3/2$

$\vec{a}_A = \vec{0} + \alpha_{AC}\vec{k} \times (2\vec{j}\,) - \frac{3}{2}\vec{k} \times (-\frac{3}{2}\vec{k} \times 2\vec{j}\,) = -2\,\alpha_{AC}\vec{i} - \frac{9}{2}\vec{j}$ (2)

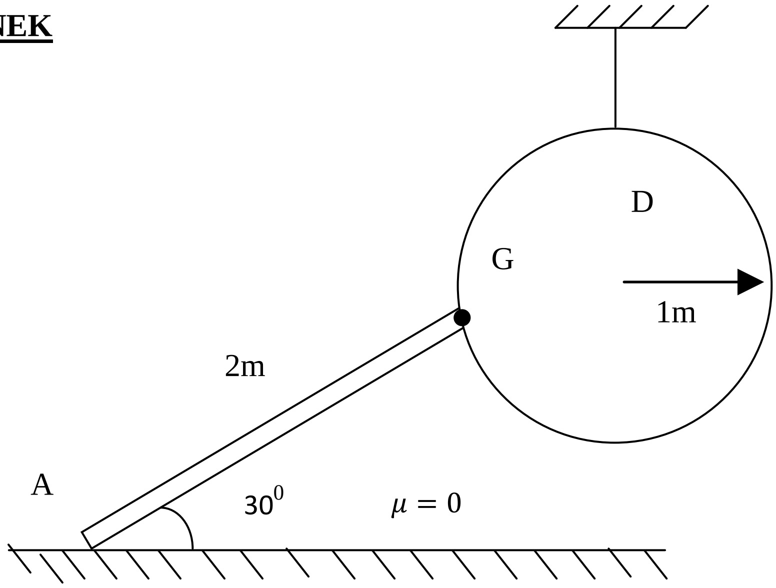
(1) ve (2) ortak çözülür

$-\frac{9}{2} = -4{,}5 - 2\,\alpha_{AB}$ $\qquad\qquad \alpha_{AB} = 0$

$-2\alpha_{AC} = 13{,}5 - 2\,\alpha_{AB}$ $\qquad\qquad \alpha_{BC} = -6{,}75$

$\vec{a}_A = (13{,}5\,\vec{i} - 4{,}5\,\vec{j})\ m/sn^2$

ÖRNEK

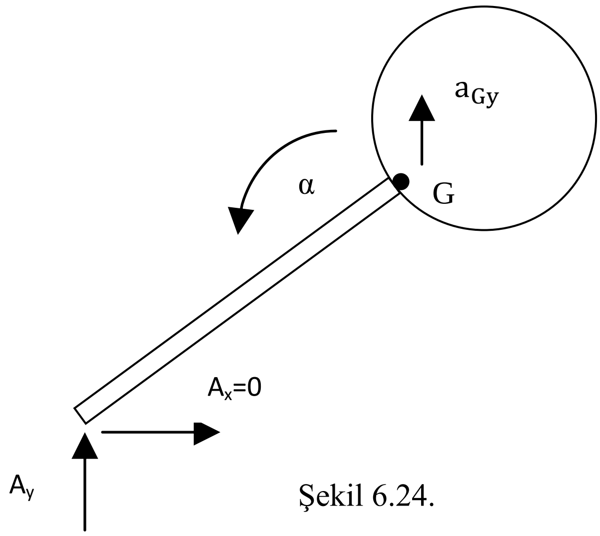


İp kesilince A_x , A_y ne olur ?

$M_D = 40$ kg $\quad (r_g = 10$ cm)

$M_{AB} = 40$ kg (Homojen)

Şekil 6.23.



Şekil 6.24.

$\sum F_x = 0 = 80\ a_{Gx} \qquad a_{Gx} = 0$

Sabit veya G ‘ ye doğru ivmeli nokta yok

$\sum M_G = -A_y(2\cos 30) = \frac{1}{3} * 40\ (2)^2 + 40\ \ (0{,}1)^2 + 40\ (1)^2\ \alpha \qquad (1)$

$\sum F_y = A_y - 80 * 10 = 80\ a_{Gy} \qquad (2)$

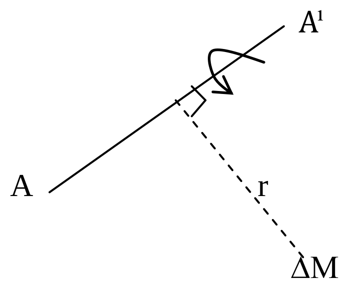
$a_A \vec{i} = a_{Gy}\ \vec{j} + \alpha\vec{k} \times 2\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j})$

$A_y = 224{,}7$ N $\qquad a_{Gy} - \sqrt{3}\ \alpha = 0$

BÖLÜM 9. BİR KÜTLENİN ATALET MOMENTLERİ

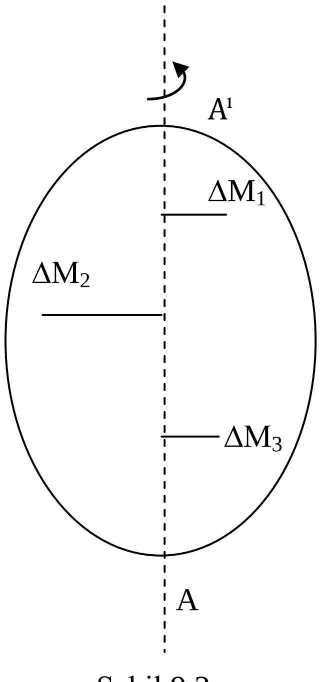
<u>Bir kütlenin atalet momenti</u>

Bir alanın atalet momenti $I_x = \int y^2\, dA$, $I_y = \int x^2\, dA$ idi



Şekil 9.1.

Bir AA^1 ekseni etrafında serbestçe dönebilen kütlesi ihmal edilebilen bir çubuk üzerine monte edilmiş küçük bir ΔM kütlesi göz önüne alalım. Sisteme bir kuvvet çifti uygulanırsa başlangıçta durgun olan çubuk ve kütle AA^1 etrafında dönmeye başlayacaktır. Sistemin dönme hızına erişmesi için gerekli zamanın ΔM kütlesi ile orantılı ve r uzaklığının karesi ile orantılıdır. Bundan dolayı $r^2\Delta M$ çarpımına ΔM kütlesinin AA^1 eksenine göre atalet momenti denir. Sonsuz sayıda ΔM kütlesinin toplanması ile bir cisim elde edilir.



Şekil 9.2.

$I = \Sigma\, r_i^2\, \Delta M_i$

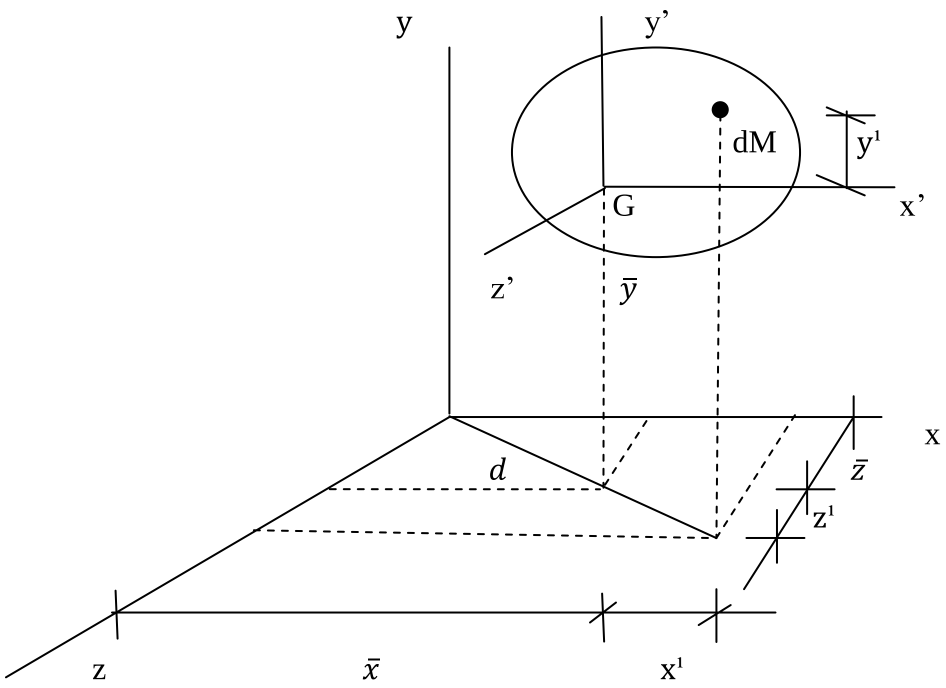
$I = \int r^2\, dM$ kütle atalet momenti

$I = r_{gy}^2 M = k^2 M \quad r_{gy} = k = \sqrt{\frac{I}{M}}$ (Merkeze göre)

r_{gy} = k=atalet yarıçapı veya jirasyon yarıçapı denir.

k= cismin AA^1 eksenine göre atalet momenti aynı kalmak üzere cismin bütün kütlesinin bir arada konulması gereken uzaklıktır.

Paralel eksen teoremi



Şekil 9.3.

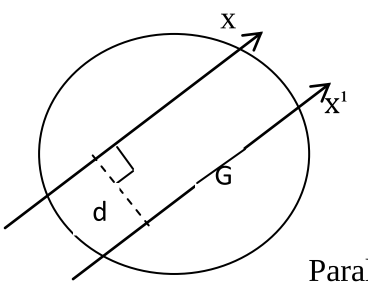
$x = x^1 + \bar{x} \qquad y = y^1 + \bar{y} \qquad z = z^1 + \bar{z}$

$I_y = \int r^2\, dM = \int (x^2 + z^2) dM = \int [(\bar{x} + x^1)^2 + (z^1 + \bar{z})^2] dM$

$$=\int (x^{1^2} + z^{1^2})dM + 2\bar{x}\int x^1\, dM + 2\bar{z}\int z^1\, dM + \int(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)dM$$

$I_y = \bar{I}_{y^1} + M(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) = \bar{I}_{y^1} + Md^2$, $I_z = \bar{I}_{z^1} + M(\bar{y}^2 + \bar{x}^2)$ $I_x = \bar{I}_{x^1} + M(\bar{z}^2 + \bar{y}^2)$

Basitçe



$x // x^1$

$I_x = \hat{I}_{x^1} + Md^2$

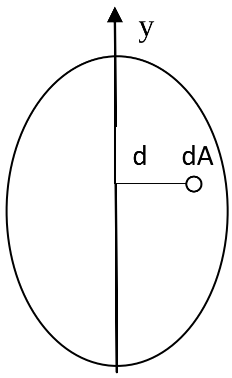
$I = \hat{I} + Md^2$

Paralel eksene(x) göre I kütle merkezinden geçen eksene (x^1) göre I

Şekil 9.4.

<u>İnce levhaların atalet momenti</u>

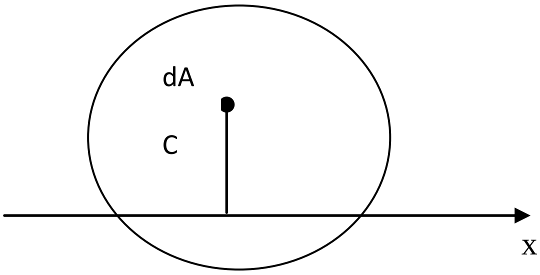
Homojen ve üniform kalınlıkta ρ yoğunluk ta bir ince levha düşünelim.



$$I_{y,kütle} = \int d^2 dM = \int d^2\, \rho t dA = \rho t \underbrace{\int d^2 dA}_{I_{y,alan}}$$

$$I_{y,kütle} = \rho t\, I_{y,alan}$$

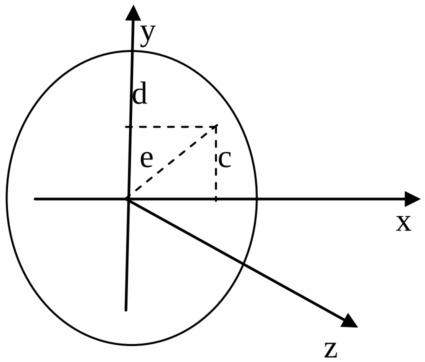
Şekil 9.5.



$I_{x,kütle} = \int c^2\, dM = \int c^2 \rho t\, dA = \rho t \int c^2\, dA$

$I_{x,kütle} = \rho t I_{x,alan}$

Şekil 9.6.



Şekil 9.7.

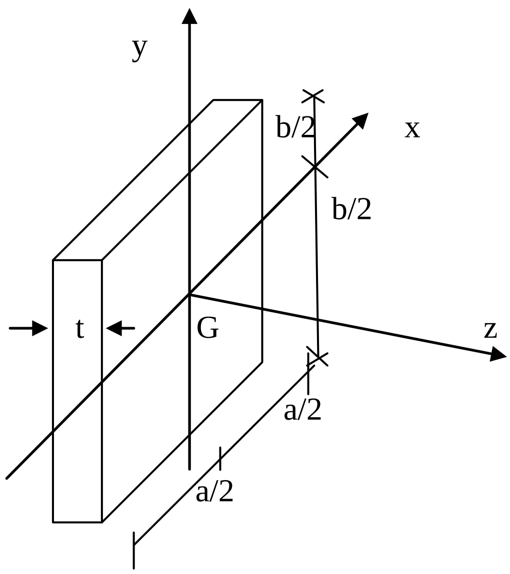
$e^2 = d^2 + c^2$

$I_{z,kütle} = \int e^2\, dM = \int (d^2 + c^2)\, dM = \int d^2\, dM + \int c^2\, dM$

$$I_{z,kütle} = I_{y,kütle} + I_{x,kütle}$$

$I_{z,kütle} = \rho t I_{y,alan} + \rho t\, I_{x,alan} = \rho t\, (I_{x,alan} + I_{y,alan}) = \rho t J_{z,alan}$

Homojen dikdörtgen levha



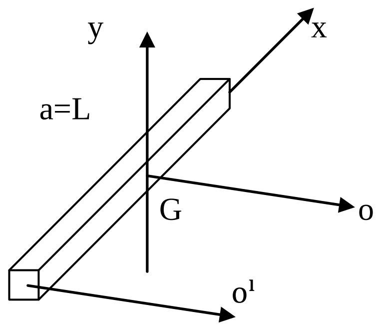
Şekil 9.8.

$I_{y,kütle}= \rho t I_{y,alan} = \rho t\,(\frac{1}{12}\,a^3 b)$

$I_{x,kütle} = \rho t I_{x,alan} = \rho t\,(\frac{1}{12}\,b^3 a)$ $\rho tab = M$ olup

$I_y = \frac{1}{12} M a^2$ $I_x = \frac{1}{12} M b^2$ $I_z = \frac{1}{12} M(a^2+b^2)$

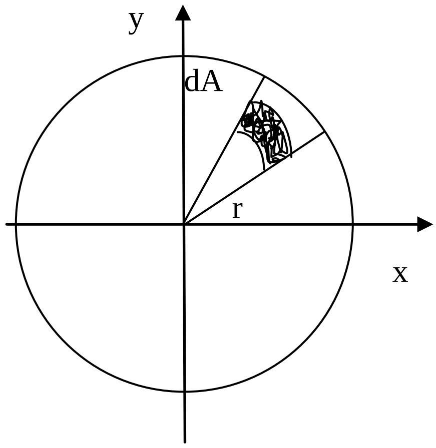
Çubuk durumun da b sıfıra 0 a L'ye yaklaşır. ve $I_z = \frac{1}{12} M(L^2)$ olur.



Şekil 9.9.

$I_o = \frac{1}{12}M(L^2)$ $\quad\quad$ $Io^{l} = Io + M(\frac{L}{2})^2 = (\frac{1}{12})ML^2 + \frac{ML^2}{4} = \left(\frac{1}{3}\right) ML^2$

Dairesel plak

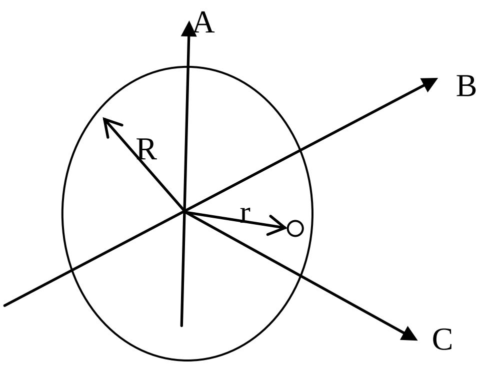


Şekil 9.10.

$dA = rdØd_r$

$I_{xx,alan} = \int y^2 dA = \int (r\sin Ø)^2 rdØdr = \int r^3 \sin^2 ØdØdr = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin^2 Ø\, dØ\, dr = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 ØdØ$

$= \frac{R^4}{4} (\frac{1}{2}Ø - \frac{1}{4}\sin 2Ø)\Big|_0^{2\pi} = (\frac{1}{4}\pi R^4) = I_{yy,alan}$



Şekil 9.11.

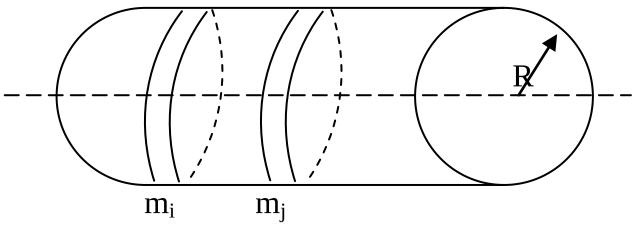
$I_{AA,kütle} = \rho t\, I_{AA,alan} = \rho t\ \frac{1}{4}\pi R^4$

$I_{BB,kütle} = \rho t\ \frac{1}{4}\pi R^4$

$m = \rho \pi R^2 t$

$I_{C,kütle} = I_{A,kütle} + I_{B,kütle} = \frac{1}{2}\rho t \pi R^4 = \frac{1}{2} m R^2$

<u>Silindir durumunda</u>

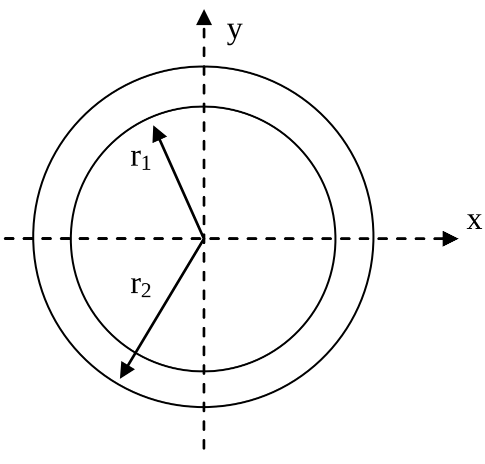


Şekil 9.12.

Küçük dairesel plakların toplanması ile silindir elde edilir.

$M = \Sigma m_i$ olsun $\quad I = \frac{1}{2} M R^2$

<u>ÖRNEK</u>



Şekil 9.13.

$I_{çap} = ?$ $\qquad I_{eksen} = ?$

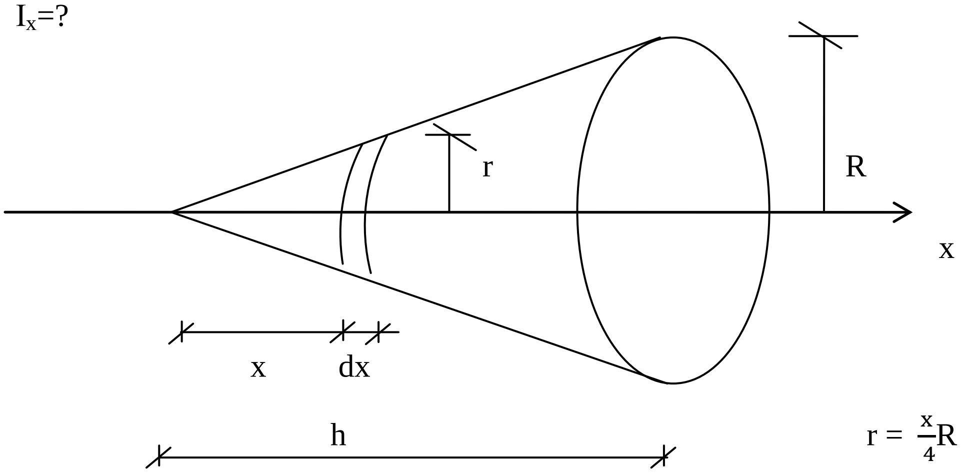
ince dairesel halka levha ; $m=\rho tA$

$I_{küt}=\rho t I_{alan} = \frac{M}{A} I_{alan}$ $A= \pi r_2^2 - \pi r_1^2$

$I_{y,alan}= I_{x,alan}= \frac{1}{4}\pi r_2^4 - \frac{1}{4}\pi r_1^4$ $I_{y,kütle}=I_{x,kütle}= \frac{M}{A}\frac{\pi}{4}(r_2^4-r_1^4) = \frac{M}{4}(r_2^2+r_1^2)$

$I_{z,kütle}= I_{x,kütle}+ I_{y,kütle} =2I_{kütle} = \frac{M}{2}(r_2^2+r_1^2)$

ÖRNEK I_x=?



Şekil 9.14.

$I_x=\int_0^h \frac{1}{2}\pi(\frac{x}{4}R)^2 dx\, \rho\, (\frac{xR}{4})^2 = \frac{3}{10}(\frac{1}{3}\pi R^2 h\rho)R^2 = \frac{3}{10}MR^2$