TC. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINI NO: 1286
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINI NO: 708

GENEL MATEMATİK

Yazarlar
Prof.Dr. Yalçın KÜÇÜK (Ünite 1, 2, 3, 4)
Doç.Dr. Mehmet ÜREYEN (Ünite 5, 6, 7)
Öğr.Gör.Dr. Nevin ORHUN (Ünite 8)
Prof.Dr. Musa ŞENEL (Ünite 9, 10, 14)
Prof.Dr. Orhan ÖZER (Ünite 11, 12)
Doç.Dr. Hüseyin AZCAN (Ünite 13)

Editör
Prof.Dr. Orhan ÖZER

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ

UZAKTAN ÖĞRETİM TASARIM BİRİMİ

Genel Koordinatör
Prof.Dr. Levend Kılıç

Genel Koordinatör Yardımcısı
Yard.Doç.Dr. Müjgan Bozkaya

Öğretim Tasarımcısı
Yard.Doç.Dr. Melih Zeytinoğlu

Grafik Tasarım Yönetmenleri
Prof. T. Fikret Uçar
Öğr.Gör. Cemalettin Yıldız

Televizyon Programları Yöneticisi
Doç.Dr. Feridun Akyürek

Dil ve Yazım Danışmanları
Yard.Doç.Dr. Hülya Pilancı
Öğr.Gör. Şennur Arslan
Okt. Aydın Fındıkoğlu

Ölçme Değerlendirme Sorumluları
Öğr.Gör. Ayşegül Tokbudak
Öğr.Gör. Meryem Akar

Kitap Koordinasyon Birimi
Yard.Doç.Dr. Feyyaz Bodur
Uzm. Nermin Özgür

Kapak Düzeni
Prof. T. Fikret Uçar

Dizgi
Açıköğretim Fakültesi Dizgi Ekibi

Genel Matematik

ISBN
975 - 06 - 0031 - 2

4. Baskı

Bu kitap ANADOLU ÜNİVERSİTESİ Web-Ofset Tesislerinde 150.000 adet basılmıştır.
ESKİŞEHİR, Haziran 2004

İçindekiler

Önsöz

Bu kitap, Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi'nin İktisat ve İşletme Fakültelerinin çeşitli bölümlerinde okutulan Genel Matematik dersinin kapsamındaki konuları içerecek şekilde hazırlanmıştır. Esas olarak da, günümüz matematiğinin uygulamaya yönelik kimi temel konularının ve kavramlarının tanıtılması amaçlanmıştır.

On dört üniteden oluşan kitabın, ilk dört ünitesinde kümeler, sayılar, eşitlik, eşitsizlik, fonksiyon, fonksiyon grafiği gibi kavramlar tanıtılmıştır. Beşinci ve altıncı ünitelerde limit, süreklilik türev kavramları anlatılmıştır. Bu kavramların tanıtılmasında basit örneklerden hareket edilerek kesin tanımlara ulaşılmaya çalışılmıştır. Yedinci ünite türev uygulamalarına ilişkindir. İlk türev testi ve ikinci türev testi ile maksimum minimum problemlerinin çözümüne ilişkin örnekler verilmiştir. Sekizinci ünitede üstel ve logaritmik fonksiyonlar ele alınmıştır; onların grafiklerine, türevlerine ve ekonomik problemlere uygulanışına ilişkin örnekler verilmiştir. Dokuzuncu ünitede, türevin ters işlemi olarak belirsiz integral tanımlanmış ve değişken değiştirme, basit kesirlere ayırma, kısmi integrasyon gibi belirsiz integral alma yöntemleri üzerinde durulmuştur. Onuncu ünitede, belirli integral kavramı, alan hesaplamaları, üretici rantı, tüketici rantının hesaplanmasına ilişkin örnekler verilmiştir. Onbirinci ünitede doğrusal denklem, doğrusal denklem sistemleri, sistemin çözümünün varlığı, tekliği veya çokluğu, çözümsüzlük durumları incelenmiştir. Doğrusal arz ve talep fonksiyonlarının oluşturduğu sistemin çözümü, denge fiyatı, denge noktası tartışılmıştır. On ikinci ve on üçüncü ünitelerde matrisler ve determinantlar konusu üzerinde durulmuştur. Matrislerin kullanılışı, uygulamadaki yeri, matris işlemleri, ters matrisin bulunması, determinantlar, determinant hesabı, doğrusal denklem sistemlerinin matris yöntemiyle çözümlerinin araştırılması konuları bu ünitelerde anlatılmıştır. Son ünitede doğrusal programlama yönteminin ne olduğu açıklanmış ve grafik yöntemle çözümün aranması örneklerle incelenmiştir.

Konuların işlenişinde yazarlar, kavramları tanımlamada teorik anlatımdan kaçınarak daha çok sezgiye dayalı yaklaşımlar yoluyla ve örneklerle kavramı tanıtmaya çalışmışlardır. Her ünitede konulara ilişkin örneklere yer verilmiştir. Verilen örnekleri iki tür olarak ifade edebiliriz. Birinci türde olanlar, tanıtılmaya çalışılan matematiksel kavramı açıklayacak türden cebirsel ifadeler, simgeler veya özellikler olabilir. Örneğin, matris toplamının değişme özelliğinin doğrulanmasına ilişkin bir örnek olarak, açık biçimde ifade edilen toplanabilir iki matrisin değişme özelliğinin doğrulanması... gibi. İkinci türden olanlar ise o kavramın pratikte uygulanışına ilişkin olan örneklerdir. Söz gelişi, üstel bir fonksiyona örnek için belli bir faiz oranıyla bankaya yatırılan bir paranın bir süre sonraki tutarının zamanın üstel fonksiyonu ile ifade edilmesi... gibi.

Her bir ünitede öğrencilerin düşünüp, tartışıp çözüm aramasına yönelik üç tür alıştırma grubu bulunmaktadır. Bu gruplardan birincisi sıra sizde adı altında toplanan alıştırmalardır. Burada amaçlanan ilgili ünitedeki kavramları pekiştirmek, sıcağı sıcağına öğrencinin çözüm yapabilmesine olanak sağlamaktır. Bu alıştırmaların birçoğu konu içindeki çözümlü örneklerin benzerleridir. Bir kısmı da konu içindeki kavramları bütünleyici nitelikte, örnek oluşturabilecek alıştırmalardır. Bu alıştırmaların çözümleri kağıt-kalem kullanılarak yapılmalıdır. İkinci grup alıştırmarımız, kendimizi sınayalım adı altında sunulmuş, çoktan seçmeli test türü sorulardan oluşmaktadır. Ünitenin bütününden ve önceki üniteleri de kapsayacak şekilde seçilmiş sorulardan oluşan alıştırmaların dikkatle yanıtlanması gerekmektedir. Bu türde soruların kimileri seçeneklerden başlayarak yanıtlanabilir. Kimileri ise sorunun çözümü yapılarak doğru yanıt bulunabilir. Bir soru için hangi yolun daha uygun olduğu sizin sezginize, dolayısıyla deneyiminize kalmış bir durumdur. Çokça test yanıtlarsanız bu size önemli ölçüde beceri kazandıracaktır. Sınavlarınızın da bu tür sorularla yapıldığını unutmayınız. Üçüncü grup alıştırmalarımız, biraz daha düşünelim adı altında yazılan sorulardan oluşmaktadır. Bu tür sorular öğrencinin kendi kendine düşünmesini, yorum yapmasını, araştırmasını sağlayıcı, buna yönlerdirici problemlerden oluşmaktadır. Tüm alıştırmaların yanıtları kitabın sonunda verilmiştir. Lütfen çözüm için çaba harcamadan yanıtlara bakmayınız.

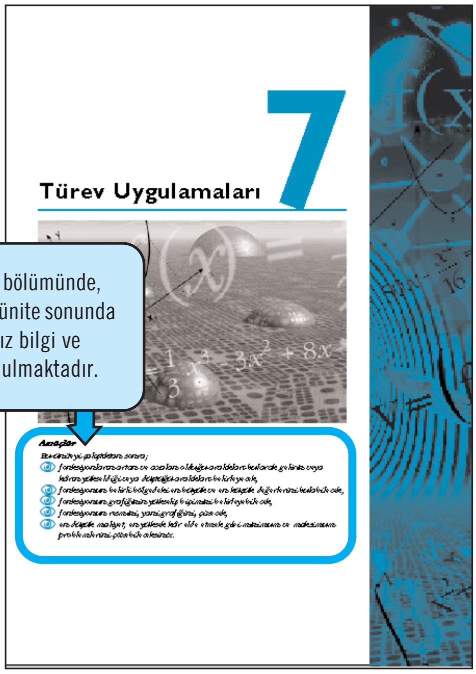
Matematik çalışırken daima kağıt-kalem kullanınız. Kavramınızı, örneğinizi veya sorunuzu açıklayıcı basit grafikler, şemalar çiziniz. Verilenler ile yanıtı aranan soruları birbirinden iyi ayırt ediniz. Bazen verilen soruyu iyi anlamak çözmek kadar önemlidir. Bu uyarıları unutmazsanız başarınızın artacağını göreceksiniz.

Matematiğin kendine özgü bir anlatım biçimi, simgeleri, yazılışı, kısaca bir dili vardır. Uğraşı alanı matematik olmayan birisinin bu dili anlaması, kullanması zor bir olaydır, sabır isteyen bir iştir. Sözü bu kitabın tasarımına, dizgisine getirmek istiyorum. Üniversitemiz Uzaktan Öğretim Tasarım Birimi, Dizgi Birimi, sabırla kitabın en iyi biçimde sunulabilmesi için gerekli çabayı fazlasıyla gösterdiler. Başka bir deyişle, sizlere ulaşan bu kitap yazarların, tasarım ve dizgi elemanlarının yoğun emek ve çabaları sonucunda ortaya çıkmıştır.

Yazımında, tasarımında, çiziminde, elektronik diziminde emeği geçen herkese editör ve yazarlar olarak sonsuz teşekkürlerimizi sunarız.

Haziran 2001 Prof.Dr. Orhan ÖZER

Kendi kendine öğrenme ilkelerine göre hazırlanmış olan bu kitabın işlevlerini öğrenmek için hazırlanan "Kullanım Kılavuzu", konuları anlamanızda ve sınavlara hazırlanmanızda sizlere fayda sağlayacaktır.



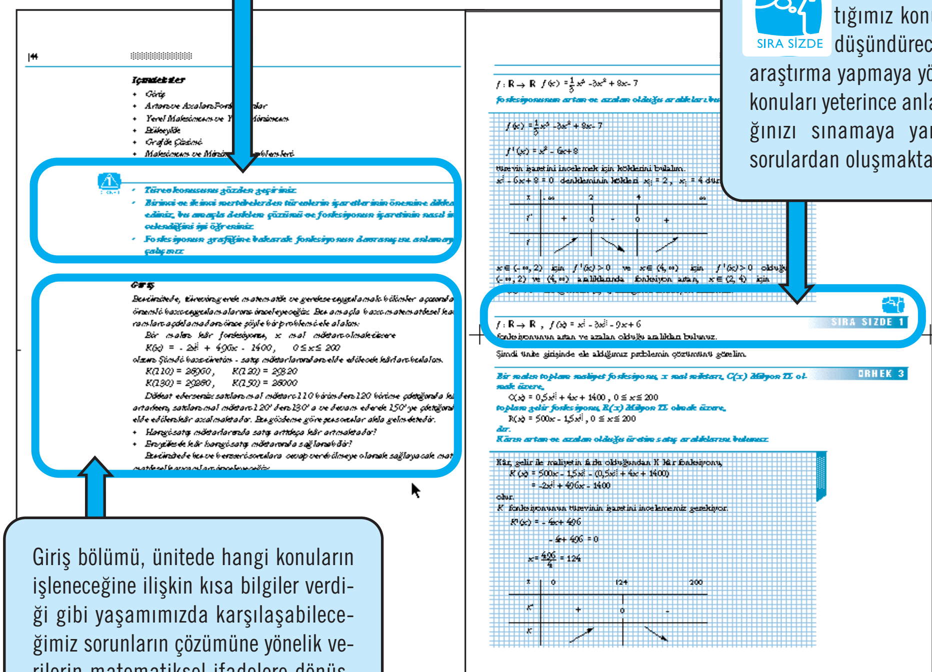
Amaçlarımız bölümünde, okuduğunuz ünite sonunda kazanacağınız bilgi ve beceriler sunulmaktadır.

DİKKAT

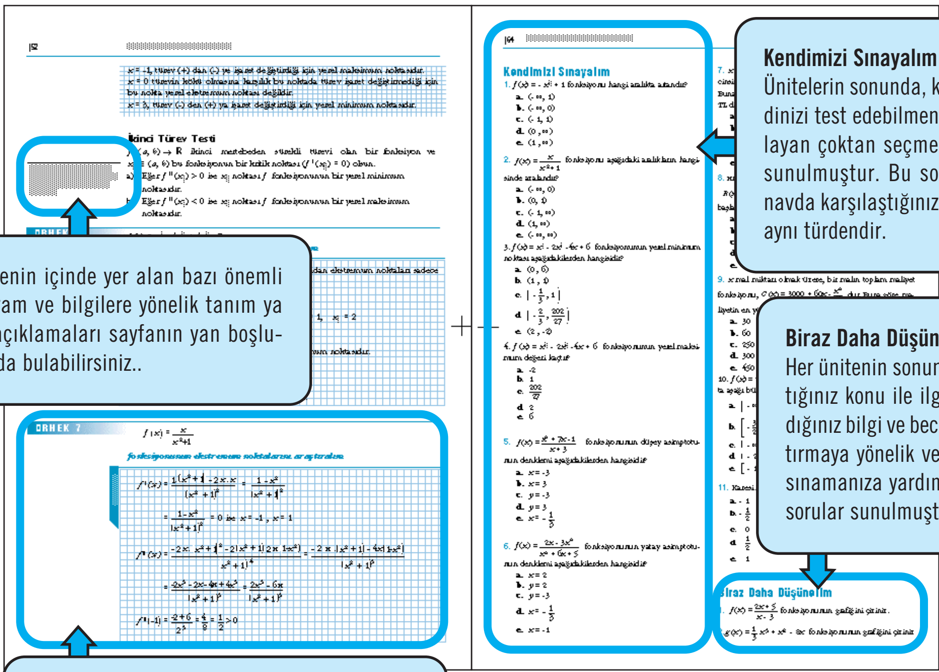
Dikkat bölümünde, üniteyi çalışmaya başlamadan önce bilgi sahibi olmanız gereken hazırlıklarla ilgili uyarı yapılmaktadır. Bu uyarı ayrıca, ünite içinde herhangi bir konuya dikkatinizi çekmek ya da ek bilgi vermek içinde sunulmuştur..

SIRA SİZDE

Sıra sizde bölümleri, çalıştığımız konu ile ilgili, sizi düşündürecek, daha fazla araştırma yapmaya yönlendirecek ve konuları yeterince anlayıp anlamadığınızı sınamaya yardımcı olacak sorulardan oluşmaktadır.



Giriş bölümü, ünitede hangi konuların işleneceğine ilişkin kısa bilgiler verdiği gibi yaşamımızda karşılaşabileceğimiz sorunların çözümüne yönelik verilerin matematiksel ifadelere dönüştürme konusunda açıklamalar yapmak için sunulmuştur..

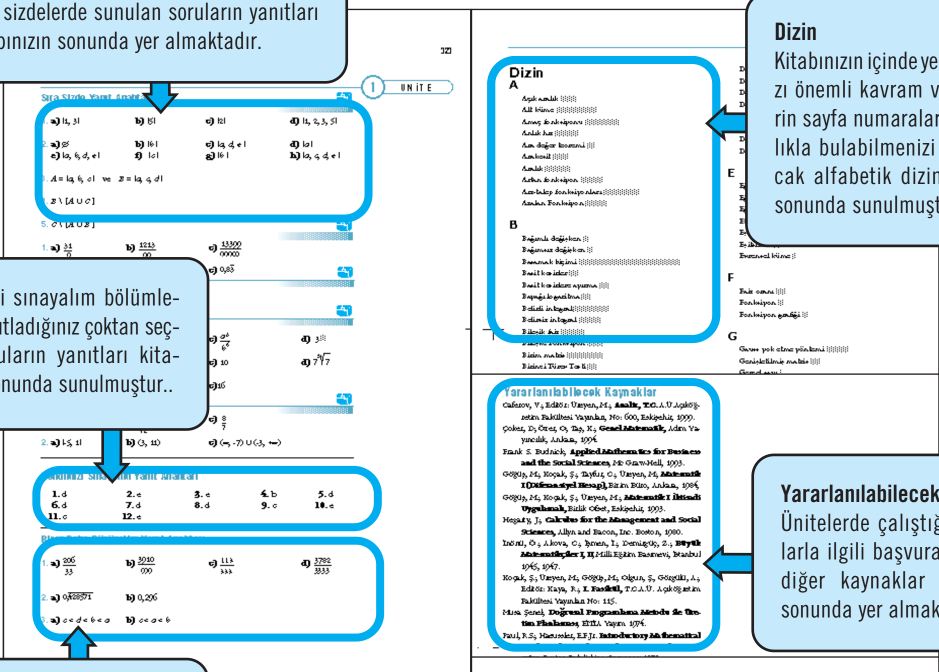


Kendimizi Sınayalım
Ünitelerin sonunda, kendi kendinizi test edebilmenizi amaçlayan çoktan seçmeli sorular sunulmuştur. Bu sorular, sınavda karşılaştığınız sorularla aynı türdendir.

Ünitenin içinde yer alan bazı önemli kavram ve bilgilere yönelik tanım ya da açıklamaları sayfanın yan boşluğunda bulabilirsiniz..

Biraz Daha Düşünelim
Her ünitenin sonunda, çalıştığınız konu ile ilgili kazandığınız bilgi ve becerileri arttırmaya yönelik ve kendinizi sınamanıza yardımcı olacak sorular sunulmuştur.

Örnek
Üniteler içinde çalıştığınız konuyu daha iyi kavramanız, bilgi ve beceri kazanmanızı sağlayacak, çok sayıda matematiksel örnek problem ve çözümleri bulabilirsiniz...



Sıra sizdelerde sunulan soruların yanıtları kitabınızın sonunda yer almaktadır.

Dizin
Kitabınızın içinde yer alan bazı önemli kavram ve bilgilerin sayfa numaralarını kolaylıkla bulabilmenizi sağlayacak alfabetik dizin, kitabın sonunda sunulmuştur..

Kendimizi sınayalım bölümlerinde yanıtladığınız çoktan seçmeli soruların yanıtları kitabınızın sonunda sunulmuştur..

Yararlanılabilecek Kaynaklar
Ünitelerde çalıştığınız konularla ilgili başvurabileceğiniz diğer kaynaklar kitabınızın sonunda yer almaktadır.

Biraz daha düşünelim bölümlerinde sunulan soruların yanıtları kitabınızın sonunda verilmektedir.

Kümeler ve Sayılar

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *küme kavramını tanıyacak, kümeleri algılayıp yazabilecek,*
- *kümeler üzerindeki işlemleri yapabilecek,*
- *küme işlemlerine dayalı problemleri çözebileceksiniz,*
- *sayma sayıları, doğal sayılar, tam sayılar rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerinin neler olduğunu hatırlayıp, gerçel sayıların özel alt kümeleri olan aralıkları inceleyeceksiniz,*
- *bir gerçel sayının üssünü kökünü ve bunlar üzerindeki işlemleri öğrenecek,*
- *mutlak değer kavramına dayalı olarak gerçel eksen üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamayı öğreneceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT
- ***Üzerinde düşünülerek tanımlamalar iyice anlaşılmalı,***
- ***kavramlar örneklerle pekiştirilmeli,***
- ***alıştırmalar çözülmelidir.***

Giriş

Belli bir A şehrinden, B şehrine giden yol üzerinde C, D ve F gibi üç konaklama yeri vardır. Belli bir gün içinde A şehrinden çıkıp, B şehrine ulaşan otobüs şöförlerine hangi konaklama yerlerinde konakladıkları sorulmuş ve şu yanıtlar alınmıştır.

20 si C de konakladığını,
15 i D de konakladığını,
18 i F de konakladığını ,
6 sı C ve F de konakladığını,
3 ü C ve D de konakladığını,
1 i ise C, D ve F de konakladığını

2 otobüs şöförüde hiçbir yerde konaklamadıklarını ifade etmişlerdir. O gün A şehrinden B şehrine kaç otobüs gelmiştir?

Bu tür problemleri kümeleri kullanarak çözeceğiz. Bu ünitemizin ilk bölümünde, ilk öğretimin başlangıcından bu yana göregeldiğiniz küme kavramına kısaca değineceğiz. Küme gösterimlerini hatırlatıp, küme işlemleri üzerinde duracağız. Ayrıntısına çok inmeyeceğimiz bu inceleme kuşkusuz konuyu hatırlatma amacı taşıyacaktır.

İkinci bölümde, sayı kümeleri, sayıların özellikleri, sayı ekseni ve aralıklar üzerinde duracağız. Ayrıca üslü ve köklü çokluklar konusunu ele alacağız ve mutlak değer kavramını hatırlayacağız.

KÜME KAVRAMI VE KÜME GÖSTERİMLERİ

AMAÇ 1 *Küme kavramını tanıyacak, kümeleri algılayıp yazabileceksiniz.*

Matematiğin en temel kavramı olan **küme**, iyi tanımlanmış (kesin ayırdedilebilir) nesne veya varlıkların topluluğu olarak tanımlanabilir. Burada iyi tanımlanmış deyimi, kümeyi oluşturan nesne veya varlıkların kesin bir şekilde şüpheye düşmeden saptanabileceğini belirtmektedir.

Örneğin, "Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesine kayıtlı öğrenciler topluluğu" bir küme oluşturur. Çünkü bir öğrencinin A.Ü.A.Ö.Fakültesine kayıtlı olup olmadığı öğrenci kayıt listesine bakılarak kesin olarak belirlenebilir.

Ancak "A.Ü.A.Ö.Fakültesine kayıtlı orta boylu öğrenciler topluluğu" bir küme oluşturmaz. Çünkü orta boylu olmanın ölçüsü açık olarak belirlenmediği sürece, kimin bu topluluğun üyesi, kimin üyesi olmadığı kesin olarak belirlenemez.

Bir küme verilsin. Bu kümeye ait nesne veya varlıklara o kümenin elemanları ya da üyeleri denir. Kümeler genellikle A, B, C, X, Y gibi büyük harflerle, kümenin elemanları ise a, b, c, x, y gibi küçük harflerle gösterilirler. Bir a elemanı A kümesinin elemanı ise $a \in A$ ile gösterilir ve "***a* eleman *A***" veya "***a, A* kümesine aittir**" diye okunur. b, A kümesine ait değilse $b \notin A$ ile gösterilir.

Hiç elemanı olmayan bir kümeye boş küme diyeceğiz ve bu kümeyi $\varnothing$ simgesiyle göstereceğiz. Küme cebiri içinde boş küme, aritmetikteki 0 (sıfır) rolünü üslenir diyebiliriz.

Gerçekten 0 (sıfır) uzunluğu olmadığı halde bir sayıdır. Benzer şekilde boş küme de elemanı olmayan bir kümedir. Boş kümenin, **küme işlemlerinin formüle edilmesinde** önemli bir işlevi vardır.

Kümeler ya elemanları listelenerek listeleme yöntemi ile veya elemanlarını belirleyen bir kuralla ortak özellik yöntemi ile belirtilirler. Listeleme yönteminde kümenin elemanları { } biçiminde iki ayracın içine aralarına virgül konularak, istenilen sırada yazılırlar. Bu yazım biçimine açık yazım da denir. Ortak özellik yönteminde ise küme, kümeyi oluşturan elemanların hepsinin sağladığı ve kümenin öğelerini diğer nesne ve varlıklardan kesinlikle ayıran özelliği (özellikleri) veren bir $P(x)$ açık önermesi yardımıyla $\{ x \mid P(x) \}$ biçiminde yazılır. Bu yazılış "***P(x)* önermesini sağlayan x öğelerinin kümesi**" biçiminde okunur. Bu yazım biçimine bazen kapalı yazım da denir.

ÖRNEK 1

a) a, b, c ***elemanlarından oluşan*** A ***kümesi, listeleme yöntemi ile*** $A = \{a, b, c\}$ ***biçiminde yazılır.***

Aynı küme, ortak özellik yöntemi ile $A = \{ x \mid x$ *alfabe'nin ilk üç harfi*$\}$ ***olarak yazılır.***

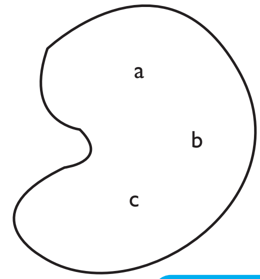
b) ***Kapalı biçimde verilen*** $B = \{ x \mid x^2 = 36 \}$ ***kümesinde***

$P(x) : x^2 = 36 \iff x = \pm 6$

olacağından, listeleme yöntemiyle $B = \{-6, 6\}$ ***biçiminde de yazılır.***

c) $A = \{ x \mid x$ *sonu 2 ile biten tek doğal sayı*$\}$ ***kümesi $\varnothing$ (boş) kümedir.***

Bazı durumlarda, küme elemanları dikdörtgen, üçgen, çember, elips veya herhangi bir kapalı düzlemsel eğri içine yazılarak şema ile gösterilebilir. Böyle şemalara Venn şemaları denir. Örneğin $A = \{a, b, c\}$ ***kümesi şekil 1.1. deki gibi gösterilir.***



Şekil 1.1

KÜME İŞLEMLERİ

AMAÇ 2

Kümeler arasında iki kümeye yeni bir küme karşılık getirme şeklinde birçok işlem tanımlanabilir. Bu bölümde bunlardan bazılarını tanıtacağız.

A ve B kümelerinin tüm elemanları aynı ise A ve B kümelerine **eşit kümeler** denir. Bu durum $A = B$ ile gösterilir.

A ve B iki küme olsunlar. B nin her elemanı, A nın da bir elemanı ise B ye, A nın bir **alt kümesi** denir. Bu durum $B \subseteq A$ ile gösterilir.

Sembolik mantık diliyle

$$B \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad x \in B \quad \text{için} \quad x \in A$$

yazılır.

Özel olarak, $B \subseteq A$ ve A nın, B de olmayan en az bir öğesi varsa B ye, A nın **öz (has) alt kümesi** denir. Bu durumda $B \subset A$ yazılır.

B kümesi, A kümesinin bir alt kümesi değilse $B \not\subset A$ yazılır.

ÖRNEK 2

a) $B = \{ x \mid x < 10 \;\; ve \;\; x \;\; tek\ doğal\ sayı \} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$
ve $A = \{ x \mid x < 20,\ x \;\; doğal\ sayı \} = \{ 0, 1, 2, 3, ..., 19 \}$ ***kümeleri için*** $B \subset A$ ***olur.***

b) Bir A ***kümesi için*** $x \in A \Rightarrow x \in A$ ***olduğundan*** $A \subseteq A$ ***olur.***

c) Her A ***kümesi için*** $\varnothing \subseteq A$ ***dır.***

Evrensel kümenin, problemden probleme değişeceği akıldan çıkarılmamalıdır.

Özel bir problemle ilişkili tüm kümeleri kapsayan yani sözkonusu problemle ilişkili tüm ögeleri bulunduran kümeye **evrensel küme** denir ve bu küme E ile gösterilir.

Bu bölüm boyunca, aksi söylenmedikçe, tüm kümeleri sabit bir E evrensel kümesinin alt kümesi olarak kabul edeceğiz.

E evrensel kümesi ve bunun herhangi bir A alt kümesi verilsin. E ye ait olan A ya ait olmayan bütün elemanların oluşturduğu kümeye ***A*** **kümesinin tümleyeni** denir. Bu küme A^t ile gösterilir.

Aynı küme $A^t = \{ x \mid x \in E \;\; \text{ve} \;\; x \notin A \}$ olarak da tanımlanabilir.

ÖRNEK 3

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ***ve*** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ***için*** A^t ***hangi kümedir?***

ÇÖZÜM

A^t kümesi E ye ait olan A 'nın elemanlarının dışındaki elemanlardan oluşacağından $A^t = \{ 5, 6, 7, 8 \}$ olur.

A ve B gibi iki küme verilsin.

a) A veya B den en az birine ait olan elemanların oluşturduğu kümeye ***A*** **ile** ***B*** **nin birleşim kümesi** denir. Bu küme $A \cup B$ ile gösterilir ve "***A*** **birleşim** ***B***" diye okunur.

b) A ve B kümelerinin her ikisine birden ait olan elemanların oluşturduğu kümeye ***A*** **ile** ***B*** **nin kesişim veya arakesit kümesi** denir. Bu küme $A \cap B$ ile gösterilir ve "***A*** **kesişim** ***B***" diye okunur.

Kesişimleri boş olan iki kümeye **ayrık kümeler** denir.

c) A kümesine ait olan, fakat B kümesine ait olmayan elemanlar kümesine ***A* ve *B* kümelerinin farkı** denir. Bu küme $A \setminus B$ biçiminde yazılır ve "***A* fark *B***" diye okunur.

Bu kümeleri kısaca

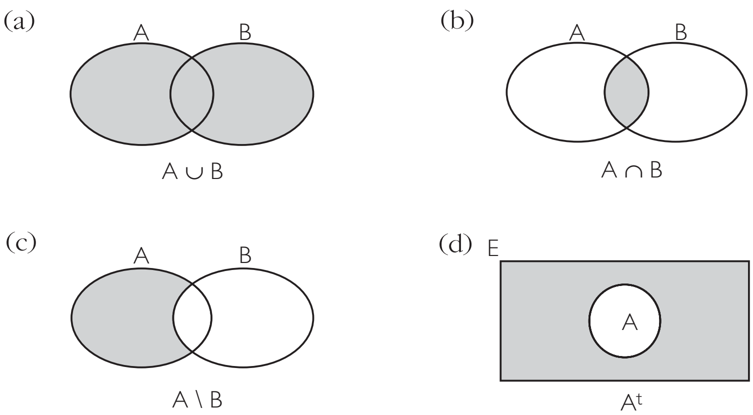
(a) $A \cup B = \{ x \mid x \in A$ ya da $x \in B \}$

(b) $A \cap B = \{ x \mid x \in A$ ve $x \in B \}$

(c) $A \setminus B = \{ x \mid x \in A$ ve $x \notin B \}$

biçiminde ifade ederiz.

Bu işlemleri şematik olarak da şöyle gösterebiliriz.



Şekil 1.2

ÖRNEK 4

Verilen* A, B *küme çiftleri için* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ *ve* $B \setminus A$ *kümelerini bulunuz.

a) $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

b) $A = \{ x \mid x$ *tek doğal sayı* $\}$, $B = \{ x \mid x$ *doğal sayı* $\}$

ÇÖZÜM

a)
- $A \cup B = \{ a, b, c, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
- $A \cap B = \varnothing$ olduğundan A ve B ayrık kümelerdir.
- $A \setminus B = A$ ve $B \setminus A = B$ dir.

b) $A = \{ 1, 3, 5, 7, ... \}$, $B = \{ 0, 1, 2, 3, ... \}$ olduğundan $A \subset B$ dir.
- $A \cup B = B$
- $A \cap B = A$
- $A \setminus B = \varnothing$ ve $B \setminus A = \{ 0, 2, 4, 6, ... \}$ olur.

A, B ve C kümeleri için aşağıdaki küme eşitlikleri vardır.

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	1'. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $A \cup B = B \cup A$	2'. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cup \varnothing = A$, $A \cup E = E$	3' $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap E = A$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$	5'. $(A \cap B)^t = A^t \cup B^t$
6. $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$	6'. $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$

AMAÇ 3

Küme işlemlerine dayalı problemleri çözümleyebileceksiniz.

ÖRNEK 5

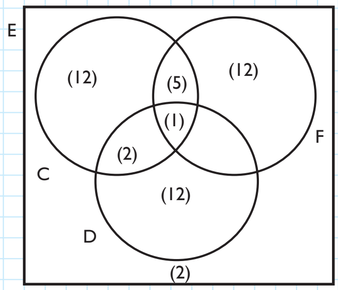
Belli bir A şehrinden, B şehrine giden yol üzerinde C, D ve F gibi üç konak lama yeri vardır. Belli bir gün içinde A şehrinden çıkıp, B şehrine ulaşan otobüs şöförlerine hangi konaklama yerlerinde konakladıkları sorulmuş ve şu yanıtlar alınmıştır.

20 si C de konakladığını,
15 i D de konakladığını,
18 i F de konakladığını,
6 sı C ve F de konakladığını,
3 ü C ve D de konakladığını,
1 i ise C, D ve F de

konakladığını, 2 otobüs şöförü ise hiçbir yerde konaklamadıklarını ifade etmişlerdir. O gün A şehrinden B şehrine kaç otobüs gelmiştir?

ÇÖZÜM

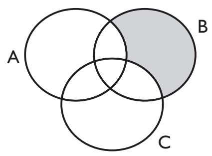
Konumuzla ilgili en geniş küme, A şehrinden çıkıp B şehrine giden otobüslerin kümesidir. Bu kümeye E diyelim. C konaklama yerinde duran otobüslerin kümesini C, D konaklama yerinde duran otobüslerin kümesini D, F konaklama yerinde duran otobüslerin kümesini F ile gösterelim. Problemle ilgili Venn şemasında verilenler yerleştirilirse, E kümesi

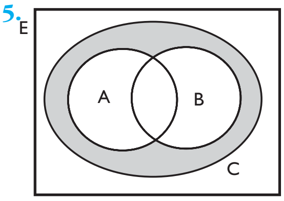


12 + 12 + 12 + 8 + 2 = 46

46 otobüsten oluşmaktadır.

SIRA SİZDE 1

1. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 5\}$ olmak üzere
   a) $A \setminus B$ **b)** $B \setminus A$ **c)** $A \cap B$ **d)** $A \cup B$
   kümelerini bulunuz.
2. $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ a, d, e \}$ ve $C = \{ d, e, a, b \}$ kümeleri veriliyor. $E = \{ a, b, c, d, e \}$ evrensel küme olmak üzere
   a) $A^t \cap B^t \cap C^t$ **b)** $(A - B) \cap C$
   c) $(A^t - C^t) \cup B$ **d)** $(A^t \cup B^t)^t$
   e) $(B \cup C) \setminus C^t$ **f)** $(A - C) - (B - A)$
   g) $[(B - A) - (C - A)] \cup (C - B)$ **h)** $(A - C) \cup B$
   kümelerini bulunuz.
3. $A \cup B = \{ a, b, c, d \}$, $A \cap B = \{ a, c \}$ ve $A \setminus B = \{ b \}$ ise A ve B kümelerini bulunuz.
4. 

   Taralı bölgeyi A, B, C kümelerini ve küme işlemlerini kullanarak ifade ediniz.
5. 

   Taralı bölgeyi A, B, C kümelerini ve küme işlemlerini kullanarak ifade ediniz.

SAYI KÜMELERİ

AMAÇ 4 ***Sayma sayıları, doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümelerinin neler olduğunu hatırlayıp, gerçel sayıların özel alt kümeleri olan aralıkları inceleyeceksiniz.***

Bu kesimde sayı kümelerinin yapılanmaları üzerinde durmadan uygulamada kullanıldıkları biçimiyle ele alıp tanıyacağız.

En iyi bildiğimiz sayı kümesi, ögelerini sayma için kullandığımız **sayma sayıları** kümesidir. Bu küme

$$1,2,3,\ldots,\ n,\ n+1,\ \ldots$$

sayılarından oluşur ve genellikle $\mathbb{N}^+$ ile gösterilir. Bu kümeye 0 (sıfır) katarak elde ettiğimiz kümeyi $\mathbb{N}$ ile gösterip bu kümeye **doğal sayılar** kümesi diyeceğiz. Doğal sayılar **tam sayılar kümesi** denilen ve elemanları

$$\ldots,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

olan kümenin bir alt kümesidir. Yazımından da anlaşılacağı gibi $\mathbb{Z}$ ile gösterilen tam sayılar kümesi N^+ nın öğelerinin önlerine eksi getirilerek oluşturulan $\mathbb{N}^-$ kümesi de kullanılarak

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^+$$

biçiminde yazılır.

Tam sayılar kümesi rasyonel sayılar kümesi adı verilen daha geniş bir sayılar kümesinin alt kümesidir. Bu küme sıfırla bölme kural dışı bırakılarak, tam sayıların birbirlerine bölümlerinden oluşan sayıların kümesidir ve genellikle $\mathbb{Q}$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{Z}\ ,\ b \neq 0 \right\}$$

dır. Her $p \in \mathbb{Z}$ sayısı $p = \frac{p}{1}$ yazılabileceğinden $p \in \mathbb{Q}$ dur.

Böylece $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ olur.

Hesaplamalarda $\frac{p}{0} = y$ ise $p = 0\ .\ y$ eşitliği $p \neq 0$ olduğunda çelişki yarattığından **sıfırla bölme tanımsızdır**. Ayrıca sıfırı sıfıra bölersek tek bir değer bulamayız. Bu nedenle $\frac{0}{0}$ **belirsizdir** deriz.

Çok önceleri teorik olarak her fiziksel büyüklüğün bir kesirli sayı ile verileceğine inanılırdı. Ancak M.Ö.5.yy. da bunun doğru olmadığı geometrik metodla kanıtlandı. Daha sonraları $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılamayan sonsuz sayıda sayının varlığı gösterildi. Siz de dik kenarlarının uzunlukları 1 birim olan bir dik üçgenin hipotenüs uzunluğu olan $\sqrt{2}$ sayısının $\frac{a}{b}$ olarak yazılamayacağını görebilirsiniz.

Bu tür sayılara **irrasyonel sayılar** diyeceğiz ve irrasyonal sayılar kümesini I_r ile göstereceğiz. $\mathbb{Q} \cup I_r$ kümesine **gerçel sayılar** kümesi denir ve bu küme $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Her x gerçel sayısı $a_0 \in \mathbb{N}$ ve $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olmak üzere

$$\pm\ a_0\ ,\ a_1\ a_2\ \ a_3 \ldots\ a_n \ldots$$

olarak yazılabilir. Bu yazıma ***x* in ondalık yazımı** denir.

Bu yazım kullanılarak rasyonel ve irrasyonel sayıları birbirinden ayırmanın başka bir yolu şöyle verilebilir:

$\frac{4}{3} = 1{,}333...$ (3 tekrar ediyor), $\frac{3}{11} = 0{,}272727...$ (27 tekrar ediyor)

$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285...$ (714285 tekrar ediyor),

$-\frac{3}{5} = -0{,}7500...$ (0 tekrar ediyor)

Yukarıdaki rasyonel sayıların ondalık yazımlarına dikkat edilirse virgülden sonraki kısmın bir parçası sonsuz kez tekrarlanmaktadır. Bu tür sayılara **ondalık kısımları devirlidir** deriz ve bu durumu kısaca

$$\frac{4}{3} = 1{,}333... = 1{,}\overline{3}\ , \ \frac{3}{11} = 0{,}272727... = 0{,}\overline{27}$$

$$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285... = 0{,}\overline{714285}\ , \ -\frac{3}{5} = -0{,}7500... = -0{,}75$$

biçiminde yazabiliriz.

Böyle devam edilirse $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilen tüm rasyonel sayıların ondalık kısımları devirlidir. Bunun tersi de doğrudur, yani devirli ondalık açılıma sahip olan sayılar $\frac{a}{b}$ biçiminde yazılabilirler.

Örneğin ondalık açılımı $x = 0{,}125125... = 0{,}\overline{125}$ olan x sayısını $\frac{a}{b}$ biçiminde yazalım. x sayısının tekrarlanan kısmını virgülün soluna geçirmek için 1000 ile çarpıp, bulunan sayıdan x sayısını çıkaralım,

$$\begin{aligned} 1000\,x &= 125{,}\overline{125} \\ x &= 0{,}\overline{125} \\ 999\,x &= 125 \end{aligned}$$

buradan $x = \frac{125}{999}$ rasyonel sayısı bulunur.

Bir sayının rasyonel olması için gerekli ve yeterli koşul bu sayının devirli bir ondalık açılımının olmasıdır.

Devirli ondalık açılıma sahip olmayan sayılara da **irrasyonel sayı** deriz. Örneğin π bir irrasyonel sayıdır, devirli ondalık yazılışı yoktur. Ancak bu yaklaşık olarak 3,14; 3,1415; 3,141592; ... sayılarından biri olarak alınabilir.

Gerçel sayıların kareleri negatif olmayacağından $x^2 = -1$ denkleminin çözümü gerçel sayı değildir.

18. yüzyıl matematikçileri bu çözümsüzlüğe yeni bir sayıyı $i = \sqrt{-1}$ biçiminde tanımlayarak çözüm getirdiler ve daha sonra gerçel sayıları da içine alan **karmaşık sayılar** diye adlandırılan bir sayı kümesi oluşturdular. Karmaşık sayılar kümesi genellikle $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\ ,\ i = \sqrt{-1} \right\}$$

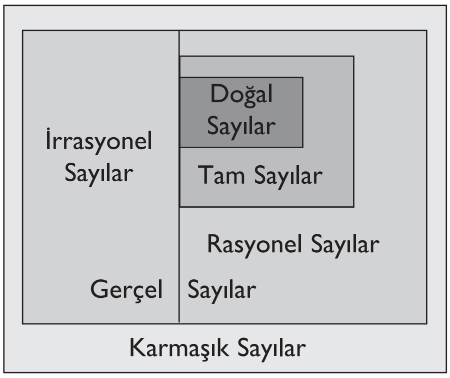
olmak üzere $a \in \mathbb{R}$ ise $a = a + 0i \in \mathbb{C}$ olduğundan $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olduğu görülür.

Bundan böyle aksi söylenmedikçe sayı denilince gerçel sayılar anlaşılacaktır.

Böylece $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ olduğu aşağıdaki tablo ile özetlenebilir (Şekil 1.3).

Özetle

- $\mathbb{N}^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$
- $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- $\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$
- $\mathbb{Q} = \{ x \mid x = a/b,\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$
  $= \{ x \mid x$ devirli ondalık yazılışa sahip $\}$
- $I_r = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I_r$
- $\mathbb{C} = \{ z \mid z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1} \}$ dir.



Şekil 1.3

SIRA SİZDE 2

1. **a)** $3,\overline{4}$ **b)** $12,\overline{25}$ **c)** $0,13\overline{412}$

devirli ondalık sayıların eşiti olan rasyonel sayıları bulunuz.

2. **a)** $\dfrac{146}{4}$ **b)** $\dfrac{17}{3}$ **c)** $\dfrac{5}{6}$

rasyonel sayıların devirli ondalık yazımını bulunuz.

SAYI EKSENİ

Gerçel sayıların geometrik modelini oluşturma fikri pratikte çok yararlı bir fikirdir. Bunu oluşturmak için önce bir doğru çizilir. Daha sonra bu doğru üzerinde **başlangıç noktası** diye adlandırılan bir nokta ile genellikle bu noktanın sağında, **birim uzunluğu ve yönü** belirleyecek olan bir başka nokta işaretlenir. Son olarak da gerçel sayılar bu eksen üzerine aşağıdaki biçimde yerleştirilir:

$a \in \mathbb{R}$ olsun.

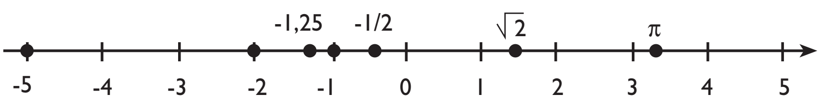
1. a sayısı **pozitif** ise **başlangıç noktasının sağında**, başlangıçtan a birim uzaklıktaki noktaya,
2. a sayısı **negatif** ise **başlangıç noktasının solunda**, başlangıçtan a birim uzaklıktaki noktaya,
3. a sayısı **sıfır** ise **başlangıç noktasına** (orijine) karşılık getirilir.

Bu düşünceyle her bir gerçel sayının eksen üzerinde bir yeri vardır. Eksen üzerindeki herbir noktanın başlangıç noktasına bir uzaklığı olduğundan her noktaya bir gerçel sayı karşılık gelir. Bu şekilde elde edilen sayı eksenine bazen **sayı doğrusu** da denir.

Eksen üzerindeki noktalarla gerçel sayılar kümesi 1-1 eşlenir.
Bu yaklaşım modeliyle bu doğruya **sayı ekseni** veya **gerçel eksen** denir.
Bu doğru üzerindeki her bir noktaya karşı gelen sayıya, **o noktanın koordinatı** denir.

ÖRNEK 6

-5, -2, -1,25, -1, -1/2, 1, $\sqrt{2}$, 2, 3, π ***ve*** 5 ***gerçel sayılarının sayı ekseni üzerindeki sıralamışı şöyledir:***



Burada yaklaşık olarak $\sqrt{2} \cong 1,41$ $\pi \cong 3,14$ olduğu düşünülebilir.

SIRA SİZDE 3

1. **a)** $0,\overline{25}$ **b)** $2,\overline{9}$ **c)** $0,\overline{7}$ **d)** $-6,\overline{4}$

rasyonel sayılarını sayı ekseni üzerine yerleştiriniz.

2. **a)** $5\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{11}{15}$ **c)** $-\sqrt{2}$ **d)** -2π

gerçel sayılarını sayı ekseni üzerine yerleştiriniz

GERÇEL SAYILARDA SIRALAMA ÖZELLİKLERİ

a, b gerçel sayıları için $a \neq b$ ve sayı ekseni üzerinde b, a nın sağında yer alıyorsa, bu durum için "***a* küçüktür *b***" denir ve $a < b$ yazılır. Eğer $a = b$ veya $a < b$ ise $a \leq b$ yazılır ve "***a* küçük-eşit *b***" denir.

$$a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$$

olduğu açıktır.

Sayılar arasında " $\leq$ " veya " $<$ " simgelerinden birinin kullanılmış olduğu bir ifadeye bir **eşitsizlik** denir.

Şimdi sayılar arasındaki eşitsizliklerle ilgili özellikleri kanıtsız olarak sıralayalım:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun.

1) $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$ dir.
2) $a < b$ ve $c < d$ ise $a + c < b + d$ dir.
3) $a < b$ olsun. Her $k \in \mathbb{R}$ sayısı için $a + k < b + k$ dır.
4) $a < b$ olsun.
   $k > 0$ ise $ak < bk$ ve $k < 0$ ise $ak > bk$ dır.
   Özel olarak $k = -1$ ise $-a > -b$ dir.
5) $a > 0$ ise $\frac{1}{a} > 0$ olur.
6) $0 < a < b$ ise $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
7) $a \neq b$ ise $a < b$ veya $b < a$ dır.
   Özel olarak $a \neq 0$ ise ya $a > 0$ veya $a < 0$ dır.

SIRA SİZDE 4

1. **a)** $\frac{3}{5}, \frac{7}{4}$ **b)** $-4, -\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{13}{4}$

verilen sayıları sıralayınız.

2. **a)** $\frac{2}{3}, \frac{21}{30}, \frac{11}{15}, \frac{4}{5}$ **b)** $-\pi$, 3,14 **c)** $-\pi$, 3,14 , -3,14 , π

verilen sayıları sıralayınız.

ARALIKLAR

Şimdi $\mathbb{R}$ 'nin aralık adını vereceğimiz özel alt kümeleri üzerinde duracağız.

$\mathbb{R}$ ye ait a, b $(a \leq b)$ gibi herhangi iki sayı arasındaki tüm gerçel sayılardan oluşan, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesine bir **aralık** denir. Bu a, b sayılarına **aralığın uç noktaları** denir. a sayısına aralığın **alt ucu**, b ye de **üst ucu** adı verilir.

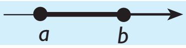
Geometrik olarak aralık bir doğru parçasıdır. Uç noktaların oluşturulan kümeye ait olup olmayışına bağlı olarak aralıklara çeşitli isimler verilir.

- Uç noktalarının her ikisini de bulundurmayan aralık tipine **açık aralık** denir.
- Uç noktalarının her ikisini de bulunduran aralığa **kapalı aralık** denir.
- Uç noktalarından sadece birini bulunduran aralık tipine **yarı-açık aralık** denir. Bunlar iki tiptir. Alt ucunu bulundurmayıp üst ucunu bulundurana **soldan açık sağdan kapalı aralık** veya **alttan açık üstten kapalı aralık** denir. Üst ucunu bulundurmayıp alt ucunu bulunduran aralığa da **soldan kapalı sağdan açık aralık** ya da **alttan kapalı üstten açık aralık** denir.

Aralıkların kümesel yazımları dışında özel yazımları vardır. Bu yazımlarda uç noktaların, kümeye ait oluşu kapalı parantezle, kümeye ait olmayışı da açık parantezle gösterilir.

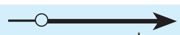
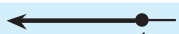
Aşağıdaki tabloda aralıkların kümesel tanımlanışı, gösterilişi, okunuşu (adlandırılışı) ve geometrik modeli özetlenmiştir.

ARALIKLAR

Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	a, b açık aralığı	 a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	a, b kapalı aralığı	 a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Soldan açık, sağdan kapalı aralık	 a b
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Soldan kapalı, sağdan açık aralık	 a b

Aralıklar pozitif yönde, negatif yönde veya her iki yönde sembolik ifadelerle genişletilebilirler. Her pozitif sayıdan daha büyük olduğu kabul edilen gerçel sayı olmayan bir sembolü $+\infty$ ile gösterip **artı sonsuz** diye okuyacağız. Benzer biçimde her negatif sayıdan daha küçük olduğu kabul edilen sembolü de $-\infty$ ile gösterip **eksi sonsuz** diye okuyacağız. Bunları kullanarak aşağıdaki aralıkları tanımlarız.

SINIRSIZ ARALIKLAR

Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	Soldan a ile sınırlı sağdan sınırsız kapalı aralık	 a $+\infty$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	Soldan a ile sınırlı sağdan sınırsız açık aralık	 a $+\infty$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$	Soldan sınırsız sağdan b ile sınırlı açık aralık	 $-\infty$ b
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	Soldan sınırsız sağdan b ile sınırlı kapalı aralık	 $-\infty$ b

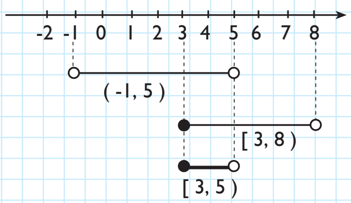
Aralıklar $\mathbb{R}$ nin özel alt kümeleri oldukları için küme işlemleri bunlar için de geçerlidir. Şimdi aralıkların kesişimi, birleşimi, farkına ilişkin örnekler verelim.

ÖRNEK 7 *Aşağıdaki işlemleri sonuçlandırınız.*

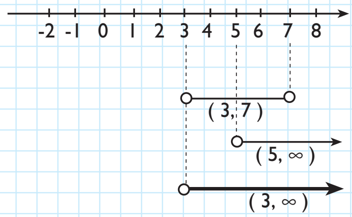
a) $[3, 8) \cap (-1, 5)$ b) $(3, 7) \cup (5, +\infty)$

ÇÖZÜM

a)



b)



Her iki aralığada ait öğelerin kümesi $[3, 5)$ aralığıdır.

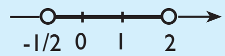
$(3, 7) \cup (5, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \}$
$= (3, +\infty)$

SIRA SİZDE 5

1. a) $[-1, 5/2)$ **b)** $(3, 7)$ **c)** $[-2, 2]$

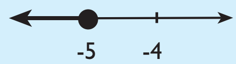
aralıklarını kümesel olarak ifade edip geometrik modellerini sayı doğrusunu kullanarak gösteriniz.

2.

Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \le x \le 0 \}$			
		-4, -1 kapalı aralığı	
			

verilen tabloyu tanımlayınız.

3.

Kümesel Yazılışı	Gösterilişi	Okunuşu	Geometrik Modeli
$\{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \le -3 \}$			
		Soldan sınırsız sağdan 3 ile sınırlı açık aralık	
			

verilen tabloyu tamamlayınız.

4. a) $(-\infty, 3) \cap (-1, +\infty)$ **b)** $(-\infty, -1) \setminus [-5, 3)$

aralıklarını kümesel olarak ifade edip geometrik modellerini sayı doğrusunu kullanarak gösteriniz.

5. Normal koşullarda su 0˚C'den küçük sıcaklıklarda katı (buz), 0˚ ile 100˚C arasında sıvı ve 100˚C'den büyük sıcaklıklarda gaz (buhar) halindedir. Bu durumları aralıkları kullanarak ifade ediniz.

ÜSLÜ VE KÖKLÜ ÇOKLUKLAR

Bu kesimde bir gerçel sayının üssünden ve kökünden söz edeceğiz.

AMAÇ 5

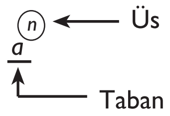
Bir gerçel sayının üssünü, kökünü ve bunlar üzerindeki işlemleri öğreneceksiniz.

Üslü Çokluklar

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için n tane a nın çarpımı kısaca a^n ile gösterilip ***a* üssü *n*** diye okunur. Bu durumda

$$a^n = \underbrace{a.\ a.\ a \ldots a}_{n \text{ tane}}$$

dir. ***a^n* sayısına *a* sayısının *n* yinci kuvveti** denir. Bu gösterimde ***a* sayısına taban, *n*** ye de **üs** denir.



Ayrıca $a^0 = 1$ ve $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ olarak tanımlanır. $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $a^m \, . \, a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3. $(a^m)^n = a^{m.n}$
4. $(a \, . \, b)^n = a^n \, . \, b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{b^n}{a^n}$
7. $b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $b\,a^n \pm c\,a^n = (b \pm c)\,a^n$ olur.

İleride göreceğimiz denklem ve eşitsizliklerin çözümünde aşağıdaki özellikler kullanılacaktır.

- $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ olmak üzere $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$
- $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a^n = b^n$ olsun.
  n tek ise $a = b$ dir.
  n çift ise ya $a = b$ veya $a = -b$ dir.
- $a > 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $a^n > 0$ dir.
  $a < 0$ olsun. n tek ise $a^n < 0$, n çift ise $a^n > 0$ olur.

ÖRNEK 8

a) 2^8 ***b)*** $\dfrac{2^8}{32}$ ***c)*** $(27)^2$ ***d)*** $(5.3^3)^2$

e) $\left(\dfrac{4^3}{4^2}\right)^3$ ***f)*** $\left(\dfrac{8}{64}\right)^{-3}$ ***g)*** $2^6 \, . \, 5^4$

işlemlerini sonuçlandırınız.

ÇÖZÜM

a) $2^8 = 2^{4+4} = 2^4 .\ 2^4 = 16.\ 16 = 256$

b) $\dfrac{2^8}{32} = \dfrac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3 = 8$

c) $(27)^2 = (3^3)^2 = (3^2)^3 = (9)^3 = 9.\ 9.\ 9 = 729$

d) $(5\ .3^3)^2 = 5^2\ .\ (3^3)^2 = 25\ .\ 729 = 18225$

e) $\left(\dfrac{4^3}{4^2}\right)^3 = \left(4^{3-2}\right)^3 = 4^3 = 4 \,.\, 4 \,.\, 4 = 64$

f) $\left(\dfrac{8}{64}\right)^{-3} = \left(\dfrac{64}{8}\right)^3 = \left(\dfrac{8^2}{8}\right)^3 = 8^3 = 8 \,.\, 8 \,.\, 8 = 512$

g) $2^6 \,.\, 5^4 = 2^2 \,.\, 2^4 \,.\, 5^4 = 4 \,.\, 10^4 = 40000$

Köklü Çokluklar

Şimdi köklü çokluk tanımını verelim ve köklü çokluklara ilişkin temel özellikleri görelim:

$a \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $b^n = a$ olacak şekilde negatif olmayan tek bir b sayısı vardır. Bu ***b* gerçel sayısına *a* sayısının *n*. kuvvetten kökü** denir ve bu b sayısı

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{veya} \quad a^{1/n}$$

biçiminde gösterilir. Simgesel olarak,

$$b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

dir. Eğer $a < 0$ ve n tek doğal sayı ise, $\sqrt[n]{a}$ yine tanımlıdır ve bu durumda

$$b = \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$$

dır. Bu b sayısının negatif olduğu açıktır.

$a < 0$ ve n çift doğal sayı olma durumunda $\sqrt[n]{a}$ tanımlı değildir.

Ayrıca $a \neq 0$ ve $a^{1/n}$ tanımlı ise

$$a^{-1/n} = \frac{1}{a^{1/n}}$$

dir.

Benzer olarak, m, n doğal sayılar ve $n \neq 0$ olmak üzere, $a \geq 0$ veya $a < 0$ olmakla birlikte n tek ise,

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

olur.

ÖRNEK 9

a) $\sqrt[5]{32} = ?$ ***b)*** $\sqrt[3]{-8} = ?$

ÇÖZÜM

a) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2^{5/5} = 2^1 = 2$

b) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = (-2)^{3/3} = (-2)^1 = -2$

ÖRNEK 10

$x = \sqrt{-1}$ ***eşitliğini sağlayan hiç bir x gerçel sayısı bulunamayacağını gösteriniz.***

ÇÖZÜM

$$x^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)^{2/2} = (-1)^1 = -1$$

olacağından $x^2 = -1$ eşitliğini sağlayan x gerçel sayısı olsaydı bu x sayısı ya

$x < 0$ veya $x = 0$ ya da $x > 0$ olacaktı.

$x < 0 \Rightarrow x \,.\, x = x^2 > 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$

$x = 0 \Rightarrow x \,.\, x = 0 \,.\, 0 \Rightarrow 0^2 = 0 \neq -1$

$x > 0 \Rightarrow x \,.\, x = x^2 > 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$ olur ki böyle bir $x \in \mathbb{R}$ bulunamaz.

Köklü ifadelerin bazı işlemleri üslü ifadelerden kolayca elde edilir.

$a, b > 0$, $c, d \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ ise

1. $\sqrt[n]{a \, . \, b} = (a \, . \, b)^{1/n} = a^{1/n} \, . \, b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $c\sqrt[n]{a} \pm d\sqrt[n]{a} = (c \pm d)\sqrt[n]{a}$

olur.

SIRA SİZDE 6

1. **a)** $(-2)^2 - 2^2 - 2^3 - (-2)^3 = ?$ **b)** $\dfrac{6^5 \, . \, 14^4 \, . \, 15^3}{21^4 \, . \, 10^2 \, . \, 12^3} = ?$

c) $\left[\dfrac{a^5}{b^4}\right]^3 . \left[\dfrac{b^2}{a^3}\right]^4 = ?$ **d)** $27^{-6} \, . \left(-\dfrac{1}{3^2}\right)^{-8} = ?$

2. **a)** $\sqrt{108} - \sqrt{48} + \sqrt{27} = ?$ **b)** $3\sqrt{50} + \sqrt{128} - 4\sqrt{242} = ?$

c) $\sqrt[6]{10} \, . \sqrt[6]{100} \, . \sqrt[6]{1000} = ?$ **d)** $4\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + 5\sqrt[3]{7} = ?$

3. **a)** $\sqrt[4]{(-3)^4} = ?$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{4\sqrt{20}} \, . \sqrt{2\sqrt{\sqrt{625}}}}{4\sqrt{5}} = ?$

c) $\dfrac{4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3}{2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2}$

MUTLAK DEĞER

AMAÇ 6

Mutlak değer kavramına dayalı olarak gerçel eksen üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamayı öğreneceksiniz.

- Her $a \in \mathbb{R}$ için $|a| \geq 0$ dır.
- Her $a \in \mathbb{R}$ için $|a| = \sqrt{a^2}$ dir. Çünkü $a \geq 0$ ise $\sqrt{a^2} = a = |a|$ ve $a < 0$ ise $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a = |a|$ dır. $|a| = \sqrt{a^2}$ eşitliği özellikle çift kuvvetten köklü denklemlerde kullanılır.

Mutlak değer kavramı, cebirsel olarak kök içeren hesaplamalarda ve geometrik olarak da iki nokta arasındaki uzaklık kavramının belirlenmesinde önemli rol oynar.

Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısının 0 (sıfır) a olan uzaklığına a sayısının **mutlak değeri** veya **büyüklüğü** denir. Bu sayı $|a|$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$|a| = \begin{cases} a \; ; & a > 0 \text{ ise} \\ 0 \; ; & a = 0 \text{ ise} \\ -a \; ; & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

Aşağıdaki özellikler tanım kullanılarak kolayca elde edilir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için;

1. $|a| = \sqrt{a^2}$ 2. $|a|^2 = a^2$ 3. $|-a| = |a|$

4. $-|a| \leq a \leq |a|$ 5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ 6. $|a^n| = |a|^n$

7. $|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$ 8. $|a - b| = |b - a|$ 9. $|a + b| \leq |a| + |b|$

10. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ 11. $|a| = \max\{-a, a\}$

Mutlak değer kavramı doğal olarak **uzaklık** kavramını gündeme getirir. Sayı doğrusu üzerinde koordinatları a ve b olan A ve B noktalarını alalım. Uzaklığın negatif olmayışından, A ve B noktaları arasındaki uzaklığa ***d*** denirse, B, A nın sağında olduğunda $b - a$ negatif değildir. Bu durumda

$d = b - a = |b - a|$

dir. A, B nin sağında ise $a - b$ negatif değildir.

$d = a - b = -(b - a) = |b - a|$

dir. Böylece $d = d(A, B) = |b - a|$ dır.

$d = d(A, B) = |b - a|$

Şimdi ileride mutlak değerli denklem ve eşitsizliklerde kullanacağımız birkaç ifade verelim.

Gösterilişi	Geometrik Anlamı
$\|x - a\|$	x ile a arasındaki uzaklık
$\|x + a\| = \|x - (-a)\|$	x ile $-a$ arasındaki uzaklık
$\|x\| = \|x - 0\|$	x ile 0 (sıfır) arasındaki uzaklık

ÖRNEK 11

Koordinatları a ve b olan A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

a) $a = 3, \; b = 7$ ***b)*** $a = -\sqrt{2}, \; b = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ ***c)*** $a = 0, \; b = -7$

ÇÖZÜM

a) $d(A, B) = |b - a| = |7 - 3| = |4| = 4$

b) $d\left(-\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}} - (-\sqrt{2})\right| = \left|\dfrac{1+2}{\sqrt{2}}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

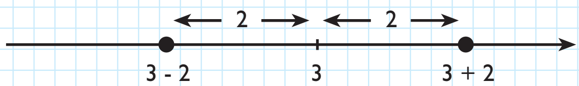
c) $d(0, -7) = |-7 - 0| = |-7| = -(-7) = 7$

ÖRNEK 12

a) $|x - 3| = 2$ ***b)*** $|x - 5| < 1$ ***c)*** $|x + 3| > 3$ ***çözüm kümelerini bulunuz.***

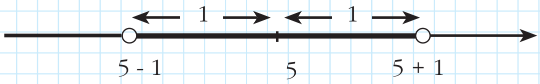
ÇÖZÜM

a) $|x - 3| = 2$, 3 noktasına 2 birim uzaklıktaki x noktaları



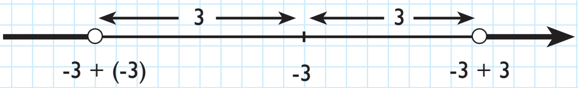
olacağından Ç = {1, 5} dir.

b) $|x - 5| < 1$, 5 noktasına uzaklığı 1 birimden küçük olan x noktaları



olacağından Ç = (4, 6) aralığıdır.

a) $|x + 3| = |x - (-3)| > 3$, -3 noktasına uzaklığı 3 birimden büyük olan x noktaları



olacağından Ç = $(-\infty, -6) \cup (0, \infty)$ aralığıdır.

SIRA SİZDE 7

1. Koordinatları a ve b olan A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

a) $a = -7,\ b = 7$ **b)** $a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ b = -\sqrt{2}$ **c)** $a = -\dfrac{5}{7},\ b = \dfrac{3}{7}$

2. Mutlak değerin geometrik anlamını kullanarak aşağıdaki koşulların herbirine uyan x'lerin kümelerini bulunuz.

a) $|x + 2| = 3$ **b)** $|x - 7| < 4$ **c)** $|x + 5| > 2$

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

(1845 - 1918)

Cantor, kümeler kuramını kuran ve sonsuz nicelik sayısı kavramını ortaya koyan ünlü matematikçidir.

"Matematikte bir soru ortaya koyabilme, soruyu çözmekten daha değerlidir."

Georg CANTOR

"Sonsuz ! Başka hiçbir problem insan zihnini bu kadar karıştırmamıştır."

David HILBERT

Kendimizi Sınayalım

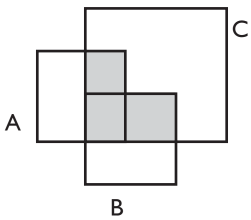
1. "MATEMATİK" ve "İSTATİSTİK" kelimelerinin harflerinin oluşturdukları kümeler sırasıyla A ve B olsunlar. $A \cap B$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\{ T, A, K \}$
b. $\{ K, A, T, E \}$
c. $\{ K, A, İ \}$
d. $\{ İ, T, A, K \}$
e. $\{ A, T, S, İ \}$

2. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{3, 5, 9\}$ ve
$C = \{ x \mid x^2 = 9, x \in \mathbb{N}\}$
kümeleri veriliyor. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a. $C \subset A$
b. $C \subset B$
c. $A \cap B \cap C = C$
d. $B \cup C \subset A$
e. $B \cap C = B$

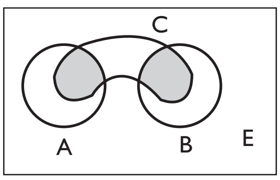
3.



$A \cup B \cup C = E$ olmak üzere A, B ve C kümeleri birer dikdörtgen ile gösterilmiştir. Aşağıdakilerden hangisi taralı olarak verilen küme değildir?

a. $(A \cup B) \setminus C$
b. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
c. $(A \cup B) \setminus C^t$
d. $(A^t \cap B^t)^t \cap C$
e. $(A \cup B) \cap C$

4.



Taralı olarak verilen küme aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(A \cup B) \setminus C$
b. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
c. $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
d. $(A \cup B)^t \setminus C^t$
e. $(A \cup B)^t \cup C$

5. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve a bir doğal sayı olmak üzere $a\mathbb{N} = \{ak \mid k \in \mathbb{N}\}$ kümesini göstersin. Buna göre $3\mathbb{N} \cap 7\mathbb{N}$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $3\mathbb{N}$
b. $7\mathbb{N}$
c. $10\mathbb{N}$
d. $21\mathbb{N}$
e. $4\mathbb{N}$

6. A ve B herhangi iki küme olduğuna göre, $A \setminus B$ kümesi aşağıdakilerden hangisine eşit değildir?

a. $A \cap B^t$
b. $(A^t \cup B)^t$
c. $B^t \setminus A^t$
d. $(A \cup B^t)^t$
e. $A \cap (A \cap B)^t$

7. $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N}$ ve $1 < x \leq 8 \}$ ve
$B = \{ x \mid x \in \mathbb{N}$ ve $x \geq 3\}$
ise $(A \cap B)^t$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\{ 2, 3 \}$
b. $\{ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$
c. $\mathbb{N} \setminus \{2, 3\}$
d. $\mathbb{N} \setminus \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$
e. $\mathbb{N} \setminus \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$

8. Aşağıdakilerden hangisi rasyonel sayı değildir?

a. 0,232323...
b. $3,\overline{576}$
c. 1,267
d. 0,323323332...
e. $0,\overline{2562}$

9. Aşağıdakilerden hangisi bir irrasyonel sayıdır?

a. $\sqrt[3]{-8}$
b. $\dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{27}}$
c. $\dfrac{3\sqrt{18}}{2\sqrt{6}}$
d. $\dfrac{12}{\sqrt{4}}$
e. $\dfrac{1}{3}$

10. $a > b > 0$ ve $c = \dfrac{a + 6b}{b}$ olduğuna göre, c'nin alacağı tüm değerler, aşağıdaki aralıkların hangisindedir?

a.


b.


c.


d.


e.


11. $a < b$ ve $ka > kb$ ise, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

a. $k^3 < 0$

b. $-k > 0$

c. $k > 0$

d. $a - b < 0$

e. $k^3 < k^2$

12. $a \, . \, b > 0$ ifadesine denk olan ifade, aşağıdakilerden hangisidir?

a. $a > b$

b. $b > 0$

c. $a > 0$

d. $a^2 - b^2 > 0$

e. $\dfrac{a}{b} > 0$

Biraz Daha Düşünelim

1. Aşağıdaki devirli ondalık sayıların eşiti olan rasyonel sayıları belirleyiniz.

a) $6{,}242424 = 6{,}\overline{24}$

b) $3{,}\overline{913}$

c) $0{,}\overline{339}$

d) $1{,}\overline{1347}$

2. Verilen rasyonel sayıların devirli ondalık yazılımını bulunuz.

a) $\dfrac{3}{7}$

b) $\dfrac{37}{125}$

c) $\dfrac{127}{27}$

d) $\dfrac{13}{133}$

3. Verilen sayıları sıralayınız.

a) $a = \dfrac{3}{2}, \quad b = \dfrac{4}{3}, \quad c = \dfrac{-3}{4}, \quad d = \dfrac{1}{6}$

b) $a = \dfrac{15}{17}, \quad b = \dfrac{18}{19}, \quad c = \dfrac{37}{32}$

4. $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 7 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \}$ kümelerini bulunuz?

a) $A \cap B$

b) $A \setminus B$

c) $A \cup B'$

d) $B \setminus A'$

5. Verilen tabloyu tamamlayınız.

A	B	A / B	A ∩ B	A \ B	B \ A
(3, 7)	(-1, 5)				
(-∞, 3)	(2, 7)				
(-∞, 3)	[-1, ∞)				
(-3, 5)	[3, 11]				
[-2, 4]	(0, ∞)				

6. a) $\dfrac{(2^2)\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}{(-2)^4} = ?$

b) $\dfrac{(3{,}25)^{-5}}{(32{,}5)^{-5}} \cdot \dfrac{(0{,}02)^{-2}}{(0{,}04)^{-2}} = ?$

c) $(0{,}8)^3 \, . \, (0{,}125)^2 = ?$

d. $\dfrac{(-2)^{-2} . (-4)^{-5}}{(-8)^{-4}} = ?$

e) $\left[4 \, . \, (-4^{-1/3})^3\right]^3 = ?$

f) $\dfrac{2^{93} - 2^{92}}{2^{94}} = ?$

7. a) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{16}}} = ?$

b) $\sqrt[3]{4} \; \sqrt[4]{\dfrac{1}{2}\sqrt{2}} = ?$

c) $\sqrt{1{,}44} - \sqrt[3]{0{,}008} - 4\sqrt[4]{0{,}0081} = ?$

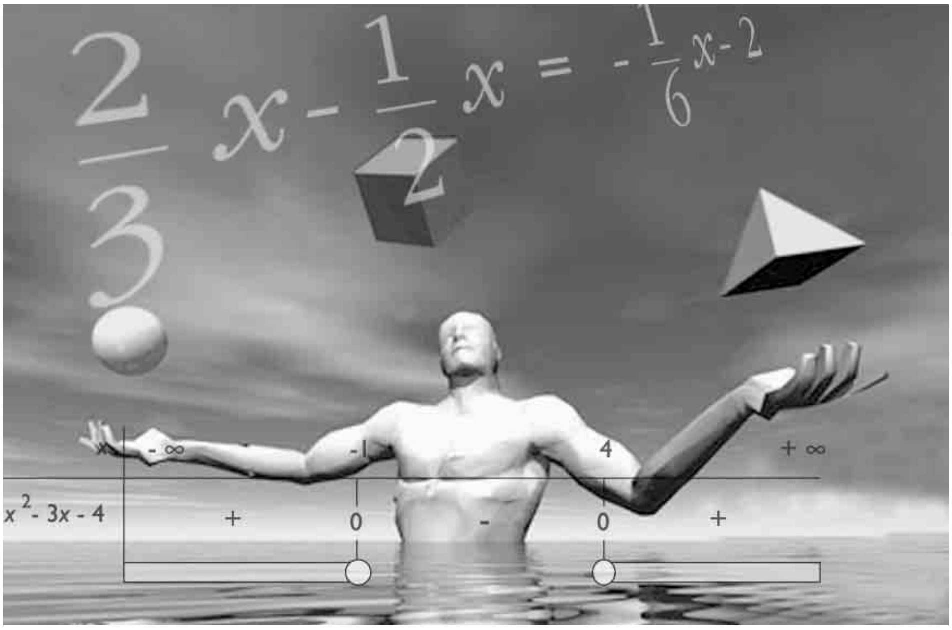
d) $\dfrac{\sqrt[3]{9}\,\sqrt[6]{3}}{\sqrt{3}} = ?$

e) $x^{3/2} = 27$ ise $x = ?$

8. $\sqrt[4]{-16}$ 'nın bir gerçel sayı olmadığını görünüz.

2

Özdeşlikler Denklemler ve Eşitsizlikler



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *denklem çözümlerinde kullanılan temel özdeşlikleri öğrenebilecek,*
- *birinci, ikinci ve üçüncü derece denklemleri çözümleyebilecek,*
- *birinci ve ikinci derece eşitsizliklerin çözümlerini bulabilecek,*
- *köklü ve mutlak değerli denklemler ile bazı mutlak değerli eşitsizliklerin çözümlerini yapabileceksiniz.*

İçindekiler

- *Değişken, Sabit, Parametre, Özdeşlikler ve Denklemler*
- *Eşitsizlikler*

DİKKAT

- ***Tanımlar iyi anlaşılmalı, özdeşlikler öğrenilmeli,***
- ***alıştırmalar çözülmelidir.***

Giriş

A ve B gibi iki oto kiralama firmasından, A firması bir arabayı günlük 3.200.000 TL ve kilometre başı 40.000 TL' ye, B firması ise aynı marka bir arabayı günlük 4.000.000 TL ve kilometre başı 32.000 TL ye kiraya vermektedir. A firmasından bir haftalığına bir araba kiralayan bir kişinin bu firmaya ödeyeceği paranın B firmasına ödemesi gereken paradan az olması için bu kişinin arabayı en fazla kaç kilometre kullanması gerekir?

Günlük yaşantımızdaki problemlerin pek çoğu bir ya da birkaç bilinmeyenli denklemler ya da eşitsizliklerle ifade edilebilir. Örneğin, yukarıdaki soru bir eşitsizlik yardımıyla çözülecektir (bkz. 14. Örnek). İki kesimden oluşacak bu ünitenin ilk kesiminde ön bilgiler, özdeşlikler, birinci, ikinci ve yüksek dereceli denklemlerin çözümleri üzerinde duracağız. İkinci kesim eşitsizlik çözümleri ile ilgili olacaktır.

DEĞİŞKEN, SABİT, PARAMETRE, ÖZDEŞLİKLER VE DENKLEMLER

AMAÇ 1 ***Denklem çözümlerinde kullanılan temel özdeşlikleri öğreneceksiniz.***

Değişebilen, yani farklı değerler alabilen bir büyüklüğe **değişken,** her zaman aynı kalan bir büyüklüğe **sabit** ve bazen değişken bazen de sabit olarak işlem gören bir büyüklüğe de **parametre** denir.

Örneğin; ekonomide fiyat, kazanç, gelir, maliyet gibi kavramlar değişkendir. x bir değişken olmak üzere $3x - 5$ yazılışında 3, -5 sabitlerdir. $ax - 5$ ifadesinde a nın 3 değeri olabildiği gibi başka değerlerde olabileceği düşünülürse a bir parametredir.

Değişken, parametre, sabit ve bunların farkları, toplamları, çarpımları, bölümleri, kökleri vs. içeren ancak eşitlik, eşitsizlik içermeyen $x + a$, $2x - 3$, $\sqrt{x - a} + 7$, ... gibi ifadelere **cebirsel ifade** denir.

Bir cebirsel ifadede $=, \leq, <, \geq$ ve $>$ simgeleri bulunmaz.

Değişkenlerin aldığı **her** değer için birbirlerine eşit olan iki cebirsel ifadeye özdeştir denir. Böyle bir eşitliğe de **özdeşlik** adı verilir.

Özdeş iki cebirsel ifadeden biri, diğeri yerine alınabilir.

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

eşitliği doğru olduğundan $(x + y)^2$ cebirsel ifadesi ile $x^2 + 2xy + y^2$ cebirsel ifadesi birbirlerine özdeştir.

Bazı önemli özdeşlikler aşağıda verilmiştir.

a) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (iki kare farkı)

b) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ (tam kare)

c) $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (x - y)(x - y)$ (tam kare)

d) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ (iki küp farkı)

e) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (iki küp toplamı)

AMAÇ 2 ***Birinci, ikinci ve üçüncü derece denklemleri çözümleyebileceksiniz.***

Değişken bulunduran ve değişkenin **bazı** değerleri için doğru olan eşitliklere **denklem** denir. Bir denklemde, değişkenin eşitliği doğrulayan değerlerine de **denklemin kökleri** adı verilir.

Verilen bir denklemin çözümlerinin varlığı ve bulunabilmesi matematikte önemli bir konudur. Bilindiği gibi her tür denklemin çözümünde izlenecek genel bir yol olmadığından, denklemler çeşitli biçimlerde sınıflandırılarak çözüm yolları aranır. Bu sınıflandırmalardan ikisi denklemlerin **bilinmeyen sayısına** ve **bilinmeyenlerin en yüksek derecesine** göre sınıflamadır.

Tek bilinmeyen içeren denklemlere **bir bilinmeyenli denklemler,** iki bilinmeyen içeren denklemlere **iki bilinmeyenli denklemler,** benzer şekilde n-bilinmeyen içeren denklemlere de ***n*-bilinmeyenli denklemler** denir.

Örneğin ; $x + 3 = 7$ bir bilinmeyenli, $2xy + y = 1$ iki bilinmeyenli ve $x + 2y + z = 20$ ise üç bilinmeyenli denklemlerdir.

Tek bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin derecesi bir olan denkleme, **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** (veya kısaca **birinci derece denklem**), tek bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin derecesi iki olan bir denkleme ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem (veya kısaca ikinci derece denklem), benzer şekilde bir bilinmeyen içeren ve bilinmeyenin derecesi ***n* - olan bir denkleme**

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = 0$ biçimindeki bir denkleme birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Böyle bir denklemin tek çözümü $x = -b/a$ dır. Denklemin çözüm kümesi

$Ç = \{-b/a\}$ dır.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ tipindeki bir denkleme ikinci derece denklem denir. Böyle bir denklemin

$\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

- $\Delta < 0$ ise gerçel çözümü yoktur.
- $\Delta = 0$ ise $x = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$ ise $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

ve $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

gibi iki farklı çözümü vardır. Kısaca çözüm kümesi

$$Ç = \left\{ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

dir.

***n.* dereceden bir bilinmeyenli bir denklem** (veya kısaca ***n.* derece denklem**) denir.

Bu kesimde 1. , 2. ve 3. derece denklemlerin çözüm yöntemlerine kısaca değineceğiz.

ÖRNEK 1

$3x + 12 + x - 8 = 10 + 2x + 4$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$$3x + x + 12 - 8 = 2x + 10 + 4$$
$$4x + 4 = 2x + 14$$
$$4x - 2x = 14 - 4$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$

Böylece $Ç = \{5\}$ dir.

ÖRNEK 2

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{6}x - 2$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

x lerin katsayılarının en küçük ortak katı 6 olduğundan denklemin her iki yanı 6 ile çarpılırsa

$$6 \cdot \frac{2}{3}x - 6 \cdot \frac{1}{2}x = 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)x - 6 \cdot 2$$
$$4x - 3x = -x - 12$$
$$x + x = -12$$
$$2x = -12$$
$$x = -6$$

olur. Böylece $Ç = \{-6\}$ dır.

ÖRNEK 3

$4x^2 - 8x - 5 = 0$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$ax^2 + bx + c = 4x^2 - 8x - 5 = 0$ ve $a = 4$, $b = -8$ ve $c = -5$ olduğundan

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (-5)}}{2 \cdot (4)}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{8 \pm 12}{8}$$
$$= \frac{2 \pm 3}{2}$$ olur ve çözümler

$x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ yani $Ç = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$ olur.

ÖRNEK 4

$\frac{1}{10}x^2 = \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$10 \cdot \left(\frac{1}{10}x^2\right) = 10 \cdot \left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 4x - 5$

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$a = 1$, $b = -4$ ve $c = 5$ olmak üzere

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (5) = 16 - 20 = -4 < 0$

olduğundan gerçel çözüm yoktur. $Ç = \varnothing$ dir.

ÖRNEK 5

$x^2 - 10x + 25 = 0$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$a = 1$, $b = -10$ ve $c = 25$ dir.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (25)}}{2 \cdot (1)} = \frac{10}{2} = 5$$

$x_1 = x_2 = 5$ olur. $Ç = \{5\}$ dir.

ÖRNEK 6

a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ***b)*** $x^2 + 5x + 6 = 0$ ***denklemlerini çözünüz.***

ÇÖZÜM

a) $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3) = 0$ dır.

$$\begin{array}{ccc} 2x & & -1 \\ x & & -3 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-6x - x = -7x} \end{array}$$

Bir çarpımın sıfır olması için çarpanlarından en az biri sıfır olmalıdır.

$2x - 1 = 0$, $x - 3 = 0$ dır.

Buradan $x_1 = 1/2$, $x_2 = 3$ olur. $Ç = \{1/2, 3\}$ olur.

b) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) = 0$ dır.

$\downarrow$ $\downarrow$

2+3 2.3

Böylece $x + 2 = 0$, $x + 3 = 0$ olacağından $x_1 = -2$, $x_2 = -3$ çözüm olur.
$Ç = \{-3, -2\}$ dir.

İkinci derece denklemleri çarpanlarına ayırarak çözmede yararlı olacak iki ifadeyi verelim.

$a \neq 1$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$ ikinci derece ifadeleri $a = p \cdot q$ ve $c = m \cdot n$ olmak üzere $b = p \cdot n + q \cdot m$ oluyorsa

$ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$

$$\begin{array}{ccc} px & & m \\ qx & & n \\ \hline \multicolumn{3}{c}{bx = (pn + qm)x} \end{array}$$

olarak yazılır.

Özel olarak $a = 1$, $c = p \cdot q$ ve $b = p + q$ ise

$x^2 + bx + c$
$= x^2 + (p + q)x + p \cdot q$
$= (x + p)(x + q)$

biçiminde yazılır.

ÖRNEK 7

a) $3x^2 - x = 0$ ***b)*** $x^2 - 9 = 0$ ***denklemlerini çözünüz.***

ÇÖZÜM

a) $3x^2 - x = x(3x - 1) = 0$ olduğundan

$x_1 = 0$, $3x - 1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$ olur.

$Ç = \{0, 1/3\}$ tür.

b) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -\sqrt{9}$ veya $x = \sqrt{9}$ olduğundan

$x_1 = -3$ veya $x = 3$ olur.

$Ç = \{-3, 3\}$ tür.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

- *$c = 0$ ise $ax^2 + bx = 0$*
  $\Rightarrow x(ax+b) = 0$
  $\Rightarrow x = 0$, $x = -\frac{b}{a}$
- *$b = 0$ ise $ax^2 + c = 0$,*

$\Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$, $-\frac{c}{a} \geq 0$ olmak koşuluyla

$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

olur.

ÖRNEK 8

a) $x^3 + x^2 = 20x$ ***b)*** $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ ***denklemlerini çözünüz.***

ÇÖZÜM

a) $x^3 + x^2 - 20x = 0 \Rightarrow x(x^2 + x - 20) = 0$
$\Rightarrow x(x + 5)(x - 4) = 0$
$\Rightarrow x = 0$, $x + 5 = 0$, $x - 4 = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = 4$
$\Rightarrow Ç = \{-5, 0, 4\}$

b) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$
$\Rightarrow (x + 3)(x^2 - 1) = 0$
$\Rightarrow (x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$
$\Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$
$\Rightarrow Ç = \{-3, -1, 1\}$

ÖRNEK 9

Bir şirket, birim başına maliyeti (işçilik ve araç gereç) 100 milyon TL olan fırın üretmektedir. Şirketin değişmez giderleri bir aylık 10 milyar TL dir. Ürünün satış fiyatı 130 milyon TL ise şirketin aylık kârının 11 milyar TL olması için satması gereken ürün sayısını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Satılması gereken ürün sayısını x ile gösterelim.

Bu ürünlerin maliyeti $100x$ milyon TL dir.
İşletmenin toplam maliyeti $100x + 10.000$ milyon TL dir.
Şirketin toplam geliri ise $130x$ milyon TL dir.

Kâr	=	Toplam gelir - Toplam gider
11.000	=	$130x - [(100x) + (10.000)]$
	=	$30x - 10.000$
$30x$	=	21.000
x	=	700 adet ürün satmalıdır.

SIRA SİZDE 1

1) Verilen denklemleri çözünüz.
   a) $4 + 5(2x - 3) = 3(4x - 1)$
   b) $3x - 4(2 - x) = 3(x - 2) - 4$
   c) $3[2 - 4(2x - 1)] = 4x - 10$
   d) $5[2 - (2x - 4)] = 2(5 - 3x)$
2) Verilen denklemleri çözünüz.
   a) $3x^2 + x - 2 = 0$
   b) $2x^2 - x - 3 = 0$
   c) $33x^2 + 34x - 35 = 0$
   d) $8x^2 - 22x + 15 = 0$
   e) $4x(3x - 2) - 7(3x - 2) = 0$
   f) $2x(5x - 2) - 3(2 - 5x) = 0$
   g) $x^2 - 81 = 0$
   h) $x^2 + 14x + 49 = 0$
   ı) $x^2 + 64 = 0$
   i) $25x^2 - 5x = 0$
3) Verilen denklemleri çözünüz.
   a) $12x^3 - 75x = 0$
   b) $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$
   c) $x^4 + 2x^3 - 35x^2 = 0$
   d) $2x^3 + 16x^2 + 66x = 0$

EŞİTSİZLİKLER

AMAÇ 3

Birinci ve ikinci derece eşitsizliklerin çözümlerini bulabileceksiniz.

Eşit olmayan ve sıralanabilen iki cebirsel ifadeden birinin diğerinden büyük (veya büyük eşit, küçük veya küçük eşit) olduğunu belirleyen bağıntıya **eşitsizlik** denir. Bu kesimde eşitsizliklerin çözüm kümelerinin bulunuşu üzerinde duracağız.

$ax + b \leq 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ veya $ax + b > 0$ biçiminde yazılabilen bir eşitsizliğe birinci dereceden eşitsizlik denir.

ÖRNEK 10

$3 + 5x \leq 3x - 9$ ***eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$5x - 3x \leq -9 - 3$$
$$2x \leq -12$$
$$x \leq -6$$

bulunur. -6 ya eşit ve -6 dan küçük x lerin kümesi verilen eşitsizliğin çözüm kümesidir. $Ç = \{x \mid x \leq -6\} = (-\infty, -6]$ aralığıdır.

ÖRNEK 11 $7 \leq 2 - 5x < 9$ ***eşitsizliğini çözünüz.***

ÇÖZÜM

Verilen eşitsizlik $7 \leq 2 - 5x$ ve $2 - 5x < 9$ eşitsizliklerinin bir arada yazımıdır. **Böyle bir eşitsizliğin çözüm kümesi, eşitsizliklerin ayrı ayrı çözümlerinden elde edilen çözüm kümelerinin kesişimidir.** Ancak, bu iki eşitsizliğin birlikte çözümü aşağıdaki biçimde de mümkündür.

$7 \leq 2 - 5x < 9$

$(-2) + 7 \leq (-2) + 2 - 5x < (-2) + 9$

$5 \leq -5x < 7$

$\left(-\frac{1}{5}\right) . 5 \geq \left(-\frac{1}{5}\right)(-5x) > \left(-\frac{1}{5}\right) . 7$

(eşitsizliğin her üç yanını $-\frac{1}{5}$ negatif sayısı ile çarptığımızdan eşitsizlikler yön değiştirdi.)

$-1 \geq x > -\frac{7}{5}$

bulunur. Son ifade $Ç = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{7}{5} < x \leq -1\right\} = \left(-\frac{7}{5}, -1\right]$ olduğunu verir.

Birinci derece bir bilinmeyenli eşitsizlikler tablo ile de çözülür. Bunun için $ax + b$ cebirsel ifadesinin işareti incelenmelidir. Bu ifade $x = -\frac{b}{a}$ için 0 (sıfır) olduğundan tablo aşağıdaki gibi düzenlenir.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	a nın işaretinin tersi	0	a nın işaretinin aynısı

ÖRNEK 12 $5(x - 2) > 9x - 3(2x - 4)$ ***eşitsizliğini çözünüz.***

ÇÖZÜM

1. Yol

$5x - 10 > 9x - 6x + 12$

$5x - 10 > 3x + 12$

$5x - 3x > 10 + 12$

$2x > 22$

$x > 11$

$Ç = (11, +\infty)$

2. Yol

$5x - 10 > 9x - 3(2x - 4)$

$2x - 22 > 0$

$2x - 22 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 11$

x	$-\infty$	11	$+\infty$
$2x - 22$	-	0	+

$Ç = (11, +\infty)$ olur.

ÖRNEK 13

Bir malın alış fiyatı x lira ve satış fiyatı y liradır. Satış için iki durum söz konusudur.

I. Durum : $y = 3x + 1300$

II. Durum : $y = 7x - 1100$

II. Durum I. Durum'dan daha kârlı ise x tam sayı olarak en az kaç lira olmalıdır?

ÇÖZÜM

$3x + 1300 < 7x - 1100$

$2400 < 4x$

$600 < x$ olur. $x = 601$ lira olmalıdır.

ÖRNEK 14

A ve B gibi iki oto kiralama firmasından A firması bir arabayı günlük 3.200.000 TL. ve kilometre başı 40.000 TL ye, B firması ise aynı marka bir arabayı günlük 4.000.000 TL ve kilometre başı 32.000 TL ye kiraya veriyor. A firmasından bir haftalığına araba kiralayan bir kişinin bu firmaya ödeyeceği paranın, B firmasına ödemesi gereken paradan az olması için bu kişinin arabayı en fazla kaç km. kullanması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$7 \ (3.200.000) + x \ (40.000) < 7 \ (4.000.000) + x \ 32.000$

$x \ (8.000) < 7 \ (800.000)$

$x < 700$

kullanacağı maksimum kilometre 699 km. olmalıdır.

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ veya $ax^2 + bx + c \leq 0$ biçiminde bir eşitsizliğe ikinci derece eşitsizlik denir. Bu tür bir eşitsizliğin çözümü için $ax^2 + bx + c$ üç terimlisinin işareti incelenmelidir.

Bunun için üç durum söz konusudur.

1. DURUM : $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki farklı çözümü vardır. $x_1 < x_2$ olmak üzere kökler x_1 , x_2 olur.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a nın işaretinin aynısı	0	a nın işaretinin tersi	0	a nın işaretinin aynısı

2. DURUM : $\Delta = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ ın eşit iki kökü var ve $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	a nın işaretinin aynısı	0	a nın işaretinin aynısı

3. DURUM : $\Delta < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ 'ın kökü yoktur. Bu durumda

(i) $a > 0$ ise daima $ax^2 + bx + c > 0$ (işareti daima pozitif)

(ii) $a < 0$ ise daima $ax^2 + bx + c < 0$ (işareti daima negatif) olur.

ÖRNEK 15

a) $x^2 - 3x > 4$ ***b)*** $x^2 \leq 5x - 4$ ***c)*** $x^2 + 6x + 9 \leq 0$ ***d)*** $3x^2 + x + 4 \geq 0$

eşitsizliklerini çözünüz.

ÇÖZÜM

a) $x^2 - 3x - 4 > 0$ eşitsizliğini çözmek için

- Önce $x^2 - 3x - 4 = 0$ denklemi çözülür.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 + 4 \,.\, 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 4$ bulunur.

- Sonra $x^2 - 3x - 4$ ün işareti incelenir.

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x^2 - 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Pozitif işaretli yerler çözüm olacağından çözüm kümesi taralı kısım olan $Ç = (-\infty\ , -1) \cup (4\ , +\infty\ )$ kümesi olur.

b) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$

- $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1\ , x_2 = 4$

-

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- $Ç = [1\ , 4]$

c) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

- $x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,\,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = -3$ olur.

-

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x^2 + 6x + 9$		$+$	0	$+$	

- ifade -3 de sıfırdır ve diğer hiçbir noktada negatif olmaz. Bu nedenle $Ç = \{-3\}$

d) $3x^2 + x + 4 \geq 0$

- $3x^2 + x + 4 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 . 4 . 3 = -47 < 0$ olduğundan gerçel kök yoktur ve $a = 3 > 0$ olduğundan $3x^2 + x + 4$ daima pozitiftir. $Ç = \mathbb{R}$ olur.

Eşitsizlikler kullanılarak $\sqrt{P(x)} = Q(x)$ biçimindeki köklü deklemler çözülebilirler.

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ve } P(x) = Q(x)^2$$

Uygulamada $P(x) = (Q(x))^2$ denklemi çözülür ve çıkan çözümlerden orijinal denklemi sağlayanlar alınır.

ÖRNEK 16

$\sqrt{3x+4} - x = 2$ ***denklemini çözünüz.***

ÇÖZÜM

$$\sqrt{3x+4} = x+2 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = (x+2)^2$$
$$\Rightarrow \quad 3x + 4 = x^2 + 4x + 4$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + x = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -1$$

Bunlar verilen denklemi sağlar. $Ç = \{-1 , 0\}$ dır.

Aşağıdaki bilgiler ve eşitsizlikler kullanılarak verilen mutlak değerli denklem ve eşitsizliklerin çözümleri bulunur.

- $| P(x) | = a \quad \Leftrightarrow \quad P(x) = \pm a$ olan x ler
- $| P(x) | < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < P(x) < a$ olan x ler
- $| P(x) | > a \quad \Leftrightarrow \quad P(x) < -a$ veya $P(x) > a$ olan x ler

çözüm olur.

ÖRNEK 17

a) $| 2x - 5 | = 3$ ***b)*** $\left| \dfrac{1}{x-3} \right| < 3$ ***c)*** $| 2x + 3 | \leq 1$

ÇÖZÜM

a) $| 2x - 5 | = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 5 = \pm 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{5 \pm 3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad Ç = \{1 , 4\}$

b) $\left| \dfrac{1}{x-3} \right| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{|x-3|} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad |x-3| \neq 0$ olmak üzere

$$|x-3| > \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x - 3 < -\frac{1}{3} \text{ veya } x - 3 > \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad Ç = \left(-\infty , 3 - \frac{1}{3}\right) \cup \left(3 + \frac{1}{3} , +\infty\right)$$
$$= \left(-\infty , \frac{8}{3}\right) \cup \left(\frac{10}{3} , +\infty\right)$$

c) $|2x+3| \leq 1 \iff -1 \leq 2x+3 \leq 1 \iff -4 \leq 2x \leq -2$

$\iff -2 \leq x \leq -1$

$\iff Ç = [-2\ ,\ -1]$

SIRA SİZDE 2

1. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini belirleyiniz.

a) $2(5x-8) \leq 7(x-3)$

b) $3x - 2(3x-5) > 4(2x-1)$

c) $4 + 2(3-2x) \leq 4(3x-5) - 6x$

2. Aşağıdaki eşitliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\sqrt{x-2} - 5 = 0$

b) $\sqrt[3]{x+2} + 3 = 0$

c) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x} = 2$

d) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$

e) $\left|\dfrac{x+1}{2x-1}\right| = 3$

3. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $||2x-3|-1| < 10$

b) $\left|\dfrac{2}{x-3}\right| > \dfrac{1}{5}$

c) $|4x-7| \geq 4$

Cahit Arf (1910 - 1997)

Cebir konusundaki çalışmalarıyla dünyaca ünlü matematikçimiz. Sentetik geometri problemlerinin cetvel ve pergel yardımıyla çözülebilirliği konusunda yaptığı çalışmalar, cisimlerin kuadratik formlarının sınıflandırılmasında ortaya çıkan değişmezlere ilişkin "Arf değişmezi" ve "Arf halkalar" gibi literatürde adıyla anılan çalışmaları matematik dünyasının ünlü matematikçileri arsında yer almasını sağladı.

Matematiği bir meslek dalı olarak değil bir yaşam tarzı olarak görmüştür. Öğrencilerine her zaman "Matematiği ezberlemeyin kendiniz yapın ve anlayın" demiştir. Hakkında yazılmış bir yazıda şöyle denilmiştir: "... Bir zamanlar integrali bilen kimselerin matematikçi, üstel fonksiyonu bilenlerin ise büyük matematikçi sayıldığı ülkemizde derin matematik konularının tartışılacağı hayal bile edilemezdi. Cahit Arf ,Türkiye' de matematiğin o günlerden bu günlere gelmesinde en büyük rolü oynamıştır."

Kendimizi Sınayalım

1. $3x - (1 - 2x) = 9$ denkleminin kökü kaçtır?

a. -3
b. -2
c. 2
d. 3
e. 5

2. $1 - \dfrac{2}{1 - \dfrac{4}{3x}} = 9$ denkleminin kökü kaçtır?

a. $\dfrac{4}{3}$
b. $\dfrac{16}{15}$
c. 1
d. $\dfrac{15}{16}$
e. $\dfrac{3}{4}$

3. $\dfrac{a}{3} + \dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{8}{x + 2}$ denkleminin bir kökü 2 ise a

aşağıdakilerden hangisidir?

a. -9
b. -6
c. 5
d. 6
e. 9

4. $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. {-1/3 , 1}
b. {-1 , 1}
c. {-1/3}
d. {-1}
e. {-1 , 1 , 1/3}

5. $\dfrac{4x}{5} + 5 = x - \dfrac{1 + x}{5}$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. {3}
b. {5}
c. {7}
d. $\mathbb{R}$
e. ∅

6. $3xy + y - 6x - 2 = 0$ ise y sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

a. -2
b. 1
c. 2
d. 3
e. 4

7. $x^2 (2x - 1) - 3x (2x - 1) + 2 (2x - 1) = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. {1/2}
b. {1 , 2}
c. {1/2 , 1 , 2}
d. ∅
e. {-1 , -2}

8. $2 (3x - 1) > 3x + 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(-\infty , 2)$
b. $(-\infty , 2]$
c. $(2 , \infty)$
d. $[2 , \infty)$
e. ∅

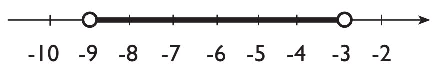
9. $15 - 5 (3 - 2x) \leq 4 (x - 3)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\{-\infty,\infty\}$
b. $(-\infty , -2]$
c. $[-2 , \infty)$
d. $[-2 , \infty)$
e. $[-\infty ,2)$

10. $\sqrt{13 - 4x} - x = 4 - 2x$ çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

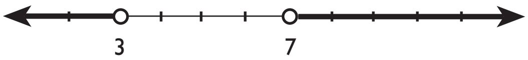
a. {1}
b. {1,3}
c. {-1,3}
d. {1,-3}
e. {-1,-3}

11.



Çözüm kümesi sayı doğrusu üzerinde koyu olarak verilen eşitsizlik aşağıdakilerden hangisidir?

a. $-9 \leq x < -3$
b. $-9 < x \leq -3$
c. $-9 \leq x \leq -3$
d. $|x - 6| < 3$
e. $|x + 6| < 3$

12. 

kümesi aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilir?

a. $(-\infty\ ,\ -3) \cup (7,\ +\infty)$

b. $(-\infty\ ,\ 3) \cup [7,\ +\infty)$

c. $(-\infty\ ,\ 3] \cup [7,\ +\infty)$

d. $(-\infty\ ,\ 3) \cup (7,+\infty)$

e. $(3,7)$

Biraz Daha Düşünelim

1. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0 \iff P(x) = 0$ ve $Q(x) \neq 0$

"payı sıfır yapan paydayı sıfır yapmayan *x* ler" bilgisini kullanarak verilen denklemleri çözünüz.

a) $\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 6x + 3} = 0$

b) $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 8x + 15} = 0$

c) $\dfrac{2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^3 + 2x^2 - 3x} = 0$

d) $\dfrac{3x^3 - 12x}{6x^3 - 2x^2 + 24x} = 0$

2. x liraya mal edilen bir malın satış fiyatı y lira olsun. Bu malın satış fiyatının hesaplanmasında iki yol önerilmektedir:

1. YOL : $y = x + 100$

2. YOL : $y = 4x - 200$

Üretilen malın tümü satılabildiğine ve satış fiyatının hesaplanmasında 2. YOL u kullanmak daha kârlı olduğuna göre x maliyeti **en az kaç liradır?**

3. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

a) $3 + 2(x+5) \geq x + 5(x+1) + 1$

b) $10 - 13(2-x) < 5(3x-2)$

c) $-3 \leq 7x - 14 \leq 3$

4. Aşağıdaki eşitlikleri çözünüz.

a) $|2x - 8| + 10 = 2$

b) $6 - |2x + 4| = 1$

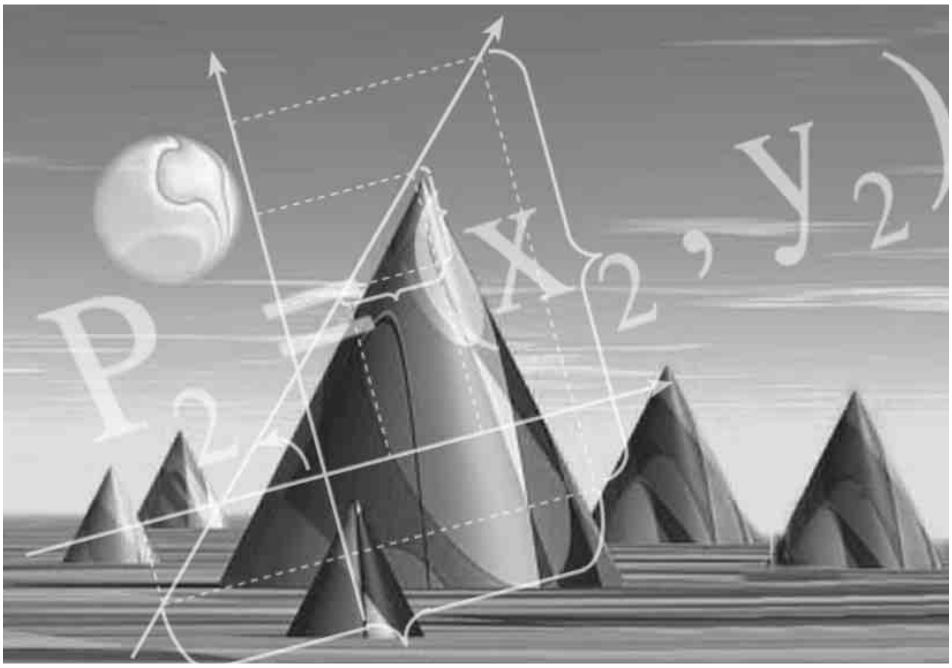
5. Aşağıda verilen eşitlikleri çözünüz.

a) $\sqrt{x+1} + x = 5$

b) $\sqrt{x-4} + x = 6$

3

Koordinat Düzlemi Doğru ve Parabol Denklemleri



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- $\mathbb{R}^2$ *nin noktalarını düzleme yerleştirmeyi ve buna dayalı olarak x ve y ye bağlı bir denklemin (varsa) grafiğini çizmeyi öğrenecek,*
- *doğru ve parabol denklemlerini çıkarabilecek ve çizebilecek, doğruları karşılaştırabilecek,*
- *bazı iki değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulabilecek, doğru ve parabollerle sınırlı düzlemsel bölgeleri eşitsizliklerle ifade edebileceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***Kümeler ve sayılar konusu tekrar edilmeli,***
- ***koordinat düzlemi ve bir denklemin grafiğinin ne anlama geldiği üzerinde düşünülmeli,***
- ***doğru ve parabol denklemleri ve grafik çizimleri öğrenilmelidir.***

Giriş

Bir üretim firması yeni bir elektrik süpürgesi üretmeyi düşünmektedir. Firmanın piyasa araştırma bölümü aşağıdaki fiyat-talep bilgilerine erişmiştir.

Fiyat (TL)	*Tahmini Talep (kişi)*
41 milyon	*8040*
66 milyon	*5040*
88 milyon	*2400*
108 milyon	*0*

Fiyat ile talep arasında bir doğrusal bağıntının olduğunu görünüz ve bu bağıntıyı bulunuz (bkz. 8. örnek).

Yukarıdaki soruda, görüldüğü gibi fiyat ile talep arasında bir ilişkilendirme kurulmuştur. Bu iki büyüklük arasındaki matematiksel ilişkiyi bulabilmek için düzlemin noktaları kullanılabilir.

Düzlemde bir noktanın yeri dik kesişen iki doğru yardımıyla verilebilir.

Bu ünitenin ilk iki kesiminde kartezyen çarpım ve koordinat düzlemini hatırlatacağız. Üçüncü kesimde genel grafik çizimleri üzerinde duracağız. Dördüncü kesimde doğru, parabol ve çemberin analitik olarak incelenmesine kısaca değineceğiz. Son kesimde de doğru ve parabol grafikleri kullanılarak oluşturulan iki değişkenli eşitsizlikler üzerinde durulacaktır.

KARTEZYEN ÇARPIM

$\mathbb{R}$ Gerçel sayılar kümesi olmak üzere

a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$
kümesine $\mathbb{R}$ nin kendisiyle **kartezyen çarpımı** veya **dik çarpımı** ya da kısaca **çarpımı** denir. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genellikle $\mathbb{R}^2$ biçiminde yazılır. $\mathbb{R}^2$ kümesinin öğeleri (x, y) biçimindedir. Bunlara **sıralı ikiler** denir.

b) $\mathbb{R}^2$ 'nin herhangi bir alt kümesine $\mathbb{R}$ den, $\mathbb{R}$ ye bir bağıntı denir.

KOORDİNAT DÜZLEMİ

AMAÇ 1

$\mathbb{R}^2$ nin noktalarını düzleme yerleştirmeyi ve buna dayalı olarak x ve y ye bağlı bir denklemin (varsa) grafiğini çizmeyi öğreneceksiniz.

Bir doğru üzerindeki her noktaya bir gerçel sayı ve her gerçel sayıya da bu doğru üzerindeki bir nokta karşılık getirilerek, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin bir geometrik modeli oluşturulur.

Şimdi $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için bir geometrik model kuralım. Bunun için adayımız **düzlem**dir. Düzlemin noktaları ile $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin elemanları olan sıralı ikililer bire bir eşlenirler. Bu gözlemimiz **cebirsel denklemlerin, geometrik eğriler olarak görünmesi ve geometrik eğrilerin, cebirsel denklemlerle verilmesini** sağlar.

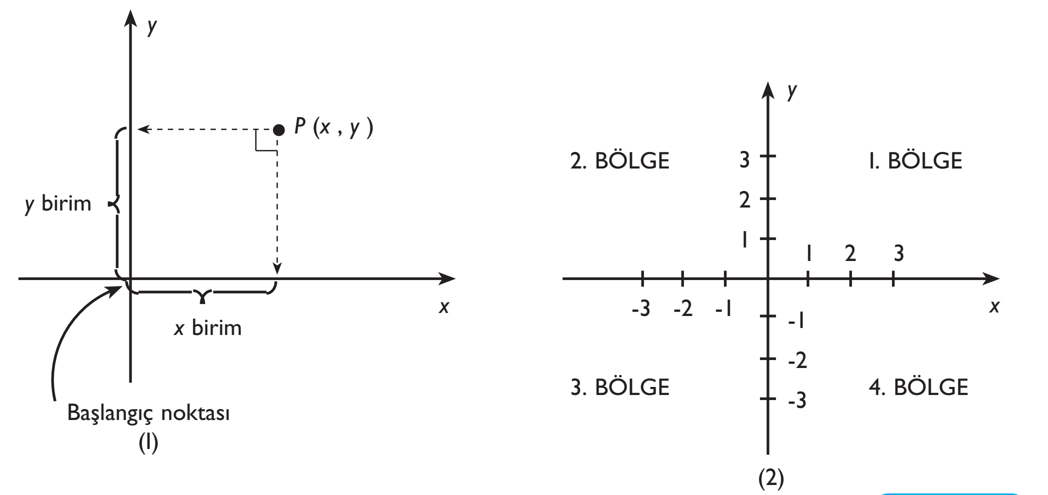
Önce düzleme dik koordinat sistemini yerleştirelim, sonra da $\mathbb{R}^2$ nin öğelerinin düzlemdeki noktalarla nasıl eşleneceğini açıklayalım.

Düzlemde dik olarak kesişen iki doğru alalım. Düzlemdeki bir noktanın yeri bu noktanın bu doğrulara dik uzaklıklarıyla belirlenir. İşaretleriyle birlikte bu uzaklıklar o noktanın **koordinatları** olarak adlandırılır.

Uzaklık ölçümüne yarayan bu doğrulara **koordinat eksenleri** veya kısaca **eksenler** denir. Bu doğruların kesişim noktasına **koordinat başlangıcı** veya kısaca **başlangıç noktası** denir.

Bu eksenler düzlemi, dörtlük diye adlandırılan 4 bölgeye ayırır. Bunlar saatin dönme yönüne zıt numaralandırılır.

Genel olarak bu eksenlerden yatay olanına **x - ekseni,** düşey olanına da **y - ekseni** denir. Ancak, amaca göre, bu eksenlere değişik isimler de verilebilir.

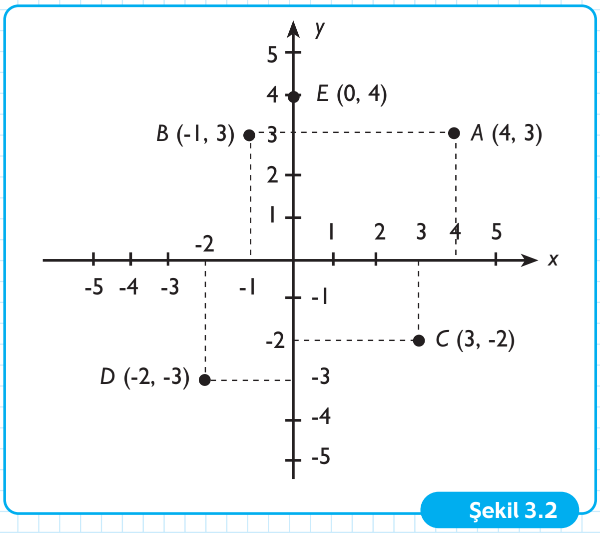


Şekil 3.1

ÖRNEK 1

A (4, 3), B (-1 , 3), C (3 , -2), D (-2 , -3) ve E (0, 4) noktalarını koordinat düzlemine yerleştiriniz.

ÇÖZÜM



Şekil 3.2

GRAFİKLER

Günlük hayatta, iki büyüklüğün birbirlerine nasıl bağlandığını grafikle göstermek yaygındır.

Gazete ve dergilerde, haftanın günlerine göre borsanın durumunu, yıllara göre işsizlik oranını veya kişi başına düşen milli geliri gösteren grafiklerle sık sık karşılaşırız.

Bu tür grafikler birbirine bağlı iki büyüklükten birinin diğerine göre değişiminin geometrik gösteriminden başka birşey değildir.

İki büyüklük arasındaki bağıntı genellikle bir denklemle verilir.

Örneğin, sıcaklık ölçümü birimleri olan Fahrenheit ile Santigrad arasındaki bağıntı

$$F = \frac{9}{5}C + 32 \quad \text{veya} \quad C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

bağıntılarından biri ile verilebilir.

Bu kesimde $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir bağıntı veren bu tür denklemlerin grafiklerinin çizimi hakkındaki temel bilgileri vereceğiz.

İki değişkenli $x + 2y = 7$ denklemini gözönüne alalım. x yerine 1 yazılırsa

$$1 + 2y = 7, \quad 2y = 6, \quad y = 3$$

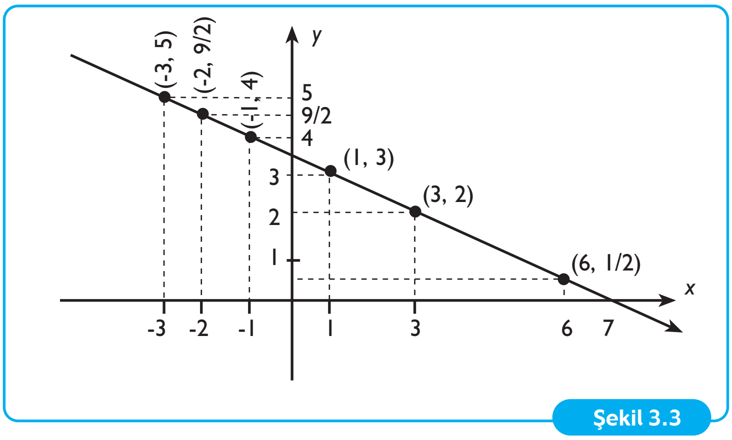
olur. $(x, y) = (1, 3)$ sıralı ikilisi bu denklemin bir çözümü olur. Benzer şekilde (-3, 5), (3, 2), (0, 7/2), (-2, 9/2), (-1, 4), (6, 1/2) ve (7, 0) da aynı denklemin çözümü olan sıralı ikililerdir. Gerçekte, bu denklemin çözüm kümesi sonsuz sayıda ikililerden oluşur.

x ve y değişkenlerine bağlı bir denklem verilsin. xy- düzleminin, bu denklemin çözüm kümesinin elemanlarından oluşan alt kümesine verilen **denklemin grafiği** denir.

Bu tanıma göre yukarıda verilen

$x + 2y = 7$ denkleminin grafiği

yandaki şekil olur.



Şekil 3.3

Sonsuz sayıda çözüme sahip olan $x + 2y = 7$ denkleminin tüm çözümlerini bulmak imkansızdır. Aslında bu çözümlerin tamamını bulmak çoğu zaman gereksizdir. Bir denklemin grafiğini doğru bir şekilde çizebilmek, denklemin sağladığı birtakım özellikleri kontrol edip **yeterli sayıda nokta elde etmekle** mümkün olabilir.

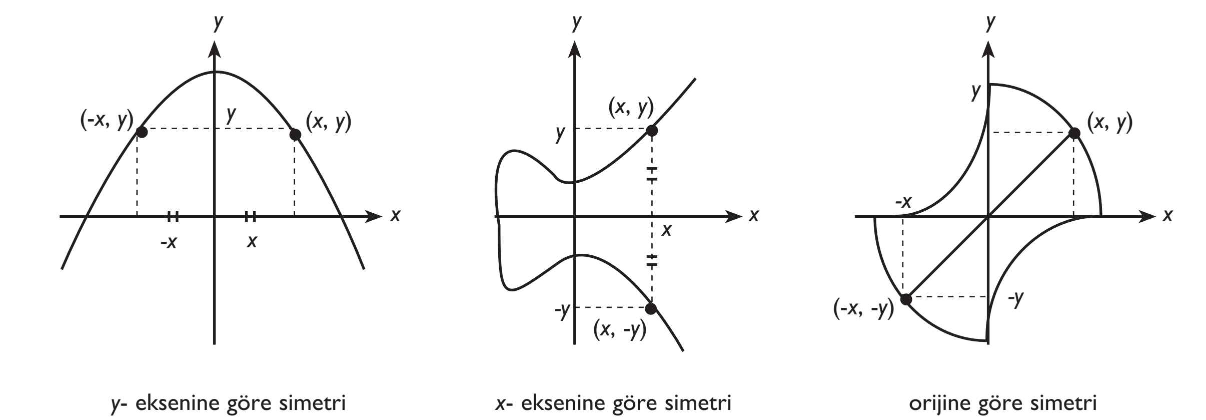
Grafik çizerken aşağıdakileri araştırmak yararlı olur.

1) **Grafiğin x ve y eksenlerini kestiği noktaların belirlenmesi:**

- Grafiğin x- eksenini kestiği noktayı bulmak için denklemde $y = 0$ yazılır.
- Grafiğin y- eksenini kestiği noktayı bulmak için denklemde $x = 0$ yazılır.

2) **Grafiğin simetrilerinin belirlenmesi:**

Düzlemdeki simetrilerin



Şekil 3.4

oldukları hatırlanırsa;

- Verilen denklemde x yerine $-x$ yazıldığında denklem değişmezse **grafik y- eksenine göre simetriktir.**
- Verilen denklemde y yerine $-y$ yazıldığında denklem değişmezse **grafik x- eksenine göre simetriktir.**
- Verilen denklemde x yerine $-x$, y yerine $-y$ yazıldığında denklem değişmezse **grafik orijine göre simetriktir.**

Grafik, hem x- eksenine, hem de y- eksenine göre simetrik ise orijine göre simetrik olur. Tersi doğru değildir.

ÖRNEK 2

$y = 2x + 1$ ***denkleminin grafiğini çiziniz.***

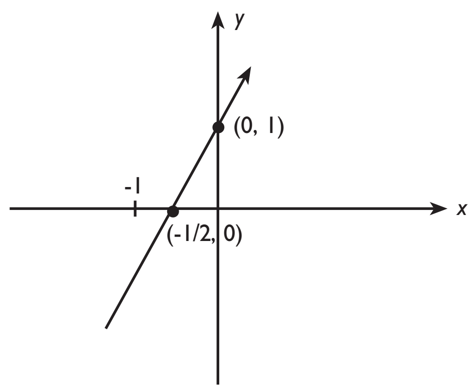
ÇÖZÜM

Bu denklemde x ve y nin derecesi 1 olduğundan böyle bir denklemin grafiğinin doğru olduğu bilinmektedir. Ayrıca iki noktadan bir doğru geçtiği de bilinmektedir. Böyle bir grafiği çizmek için sadece bu denklemi sağlayan iki nokta bulup bunlardan geçen doğrunun grafiğini çizmek yeterlidir. Bu noktalar grafiğin x- ve y- eksenlerini kestiği noktalar olarak seçilebilir.

$x = 0$ için $y = 2 \,.\, 0 + 1 \Rightarrow (0, 1)$

$y = 0$ için $0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$

x	$y = 2x + 1$	(x, y)
0	1	(0,1)
-1/2	0	(-1/2 , 0)



Şekil 3.5

ÖRNEK 3

$y = x^2 + 1$ ***denkleminin grafiğini çiziniz.***

ÇÖZÜM

y nin derecesi 1 ve x in derecesi 2 olduğundan grafik ileride ayrıntılı incelenecek olan bir paraboldür. Grafiğin (varsa) eksenleri kestiği noktaları bulalım.

$x = 0$ için $y = 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1)$

$y = 0$ için $0 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 \neq -1$

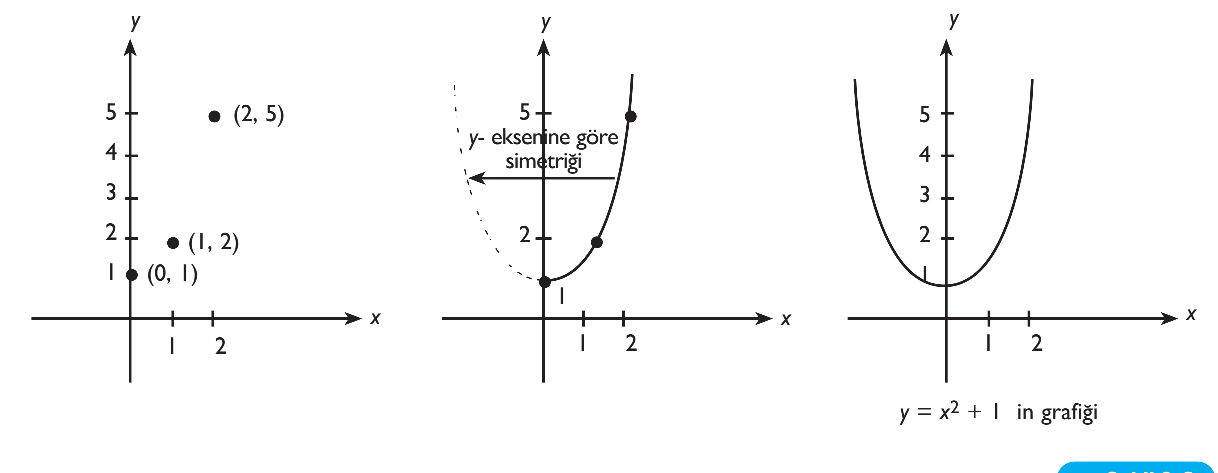
olduğundan grafik x- eksenini kesmez. x yerine $-x$ yazılırsa $y = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1$ olduğundan denklem değişmez. Grafik y- eksenine göre simetriktir. Grafiğin y- ekseninin sağındaki kısmını çizip y- eksenine göre simetriğini almak grafiğin tamamını verecektir.

Denklemi sağlayan yardımcı birkaç nokta daha bulalım.

$x = 1$ için $y = 1^2 + 1 = 2 \Rightarrow (1, 2)$

$x = 2$ için $y = 2^2 + 1 = 5 \Rightarrow (2, 5)$

x	$y = x^2 + 1$	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	5	(2, 5)



Şekil 3.6

ÖRNEK 4

$x\,y = 1$ ***denkleminin grafiğini çiziniz.***

ÇÖZÜM

$x = 0 \Rightarrow 0\,.\,y \neq 1$

$y = 0 \Rightarrow x\,.\,0 \neq 1$

olduğundan grafik x ve y eksenlerini kesmez. x yerine $-x$ ve y yerine $-y$ yazılırsa $(-x)(-y) = x\,y = 1$ olur ki denklem değişmez.

O halde $x\,y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$ in grafiği orijine ((0, 0) a) göre simetriktir.

Denklemi sağlayan yardımcı birkaç nokta bulalım.

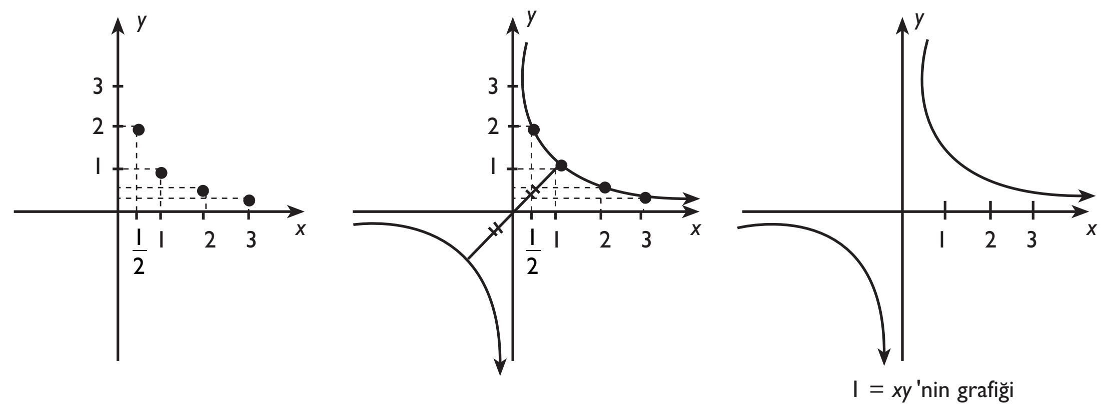
$x = 1$ için $y = \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow (1, 1)$

$x = 2$ için $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(2, \frac{1}{2}\right)$

$x = 3$ için $y = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(3, \frac{1}{3}\right)$

$x = \frac{1}{2}$ için $y = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

x	$y = \frac{1}{x}$	(x, y)
1	1	(1 , 1)
2	$\frac{1}{2}$	$\left(2, \frac{1}{2}\right)$
3	$\frac{1}{3}$	$\left(3, \frac{1}{3}\right)$
$\frac{1}{2}$	2	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$



Şekil 3.7

SIRA SİZDE 1

1) Verilen noktaların verilen denklemlerin grafiği üzerinde olup olmadıklarını belirleyiniz.

	Noktalar	**Denklem**
a)	A (3, 2) , B (8, 3)	$y = \sqrt{x + 1}$
b)	A (0, 2) , B (1, 5)	$y = x^2 + 3x + 2$
c)	A (0, 0) , B (1, 5)	$y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

2) Verilen denklemlerin grafiklerinin, varsa koordinat eksenlerini kestiği noktaları belirleyiniz.

a) $y = 2x - 1$

b) $y = x^2 + x - 2$

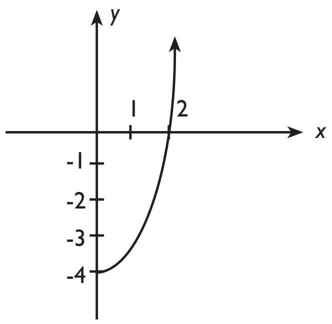
c) $y = (x - 3)\,(x + 1)$

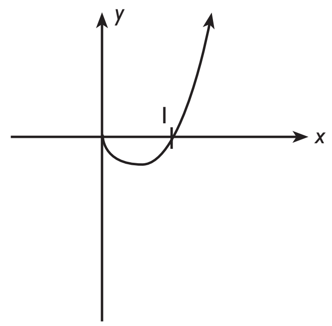
d) $x^2y - x^2 + 2y = 0$

e) $x = 4 - y^2$

3) Verilen simetrikliği kullanarak grafiği tamamlayınız.

a) $y = x^2 - 4$ (y- ekseni) **b)** $y = x^3 - x$ (orijin)

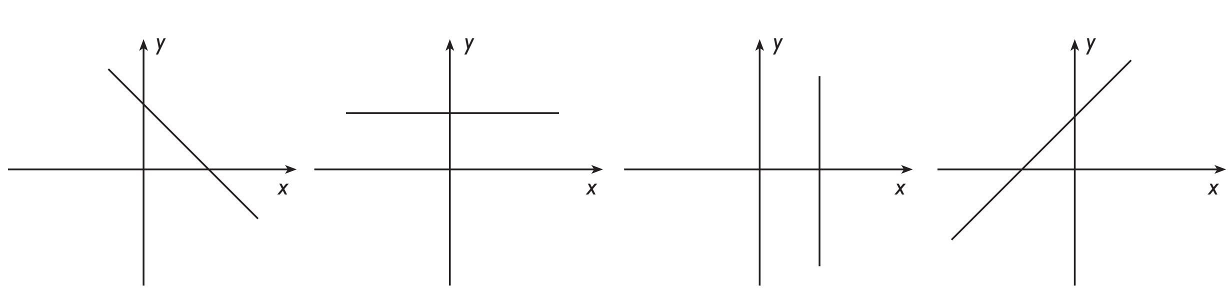




DOĞRU

Bu kesimde orta öğrenim yıllarında geometrik ve analitik olarak incelemiş olduğumuz doğru denklemlerini ve grafiklerini hatırlatacağız.

Geometrik olarak düzlemde düz bir çizgiye doğru denildiğini biliyoruz.



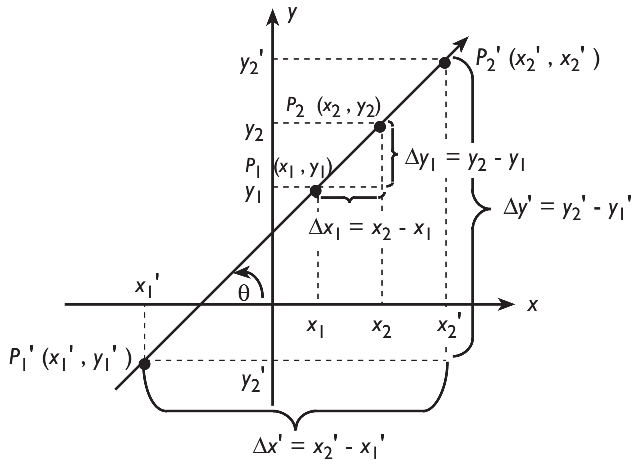
Şekil 3.8

Şimdi doğrunun analitik olarak elde edilişini hatırlatalım.

Doğrunun Eğimi

x - eksenini kesen bir doğrunun eğim açısı doğrunun x - eksenini kestiği nokta civarında saatin dönme yönünün ters yönünde ölçülen açıdır. x - eksenine paralel olan bir doğru için bu açı 0° dır.

Bir doğru üzerindeki herhangi iki noktanın ordinatları arasındaki farkın apsisleri arasındaki farka oranı sabittir. Bu sabit orana **doğrunun eğimi** denir ve $\boldsymbol{m}$ ile gösterilir.



Şekil 3.9

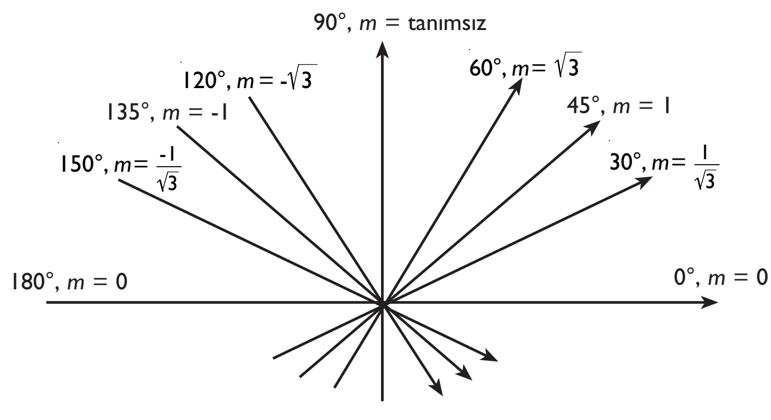
x - eksenine dik olan bir doğru için x - ekseni yönünde değişim söz konusu olmadığından $\Delta x = 0$ dır ve m tanımsızdır.

$$m = \frac{\text{Grafikteki yükselme}}{x\text{- ek. üzerindeki hareket}} = \frac{\text{düşey değişim}}{\text{yatay değişim}}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

$$= \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \text{Tan } \theta$$

Bir doğrunun eğimi, doğrunun üzerindeki herhangi iki nokta ile belirlenir ve eğim nokta çiftlerinin seçiminden bağımsızdır.



Şekil 3.10

Doğru Denklemleri

Bir denklem, bir doğru üzerindeki tüm noktaları ve sadece bu noktaları sağlıyorsa, denkleme bu **doğrunun denklemi** denir.

Verilen bir doğrunun denklemini bulmak için üzerindeki iki noktanın koordinatlarını veya üzerindeki bir noktayı ve eğimini bilmemiz yeterlidir.

İki Noktası Bilinen Doğru Denklemi

Bir doğru üzerindeki iki nokta $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ olsun. Doğru üzerinde hareket eden bir $P(x, y)$ noktası alalım. Bu doğrunun eğimi değişmeyeceğinden

$m_{\overline{PP_1}}$, $\overline{PP_1}$ doğru parçasının eğimini göstermek üzere

$m = m_{\overline{PP_1}} = m_{\overline{P_1P_2}}$ dir. Buradan

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Leftrightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

bulunur. Böylece P_1, P_2 noktalarından geçen doğru denklemi

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

olur.

- *Özel olarak bu noktalar doğrunun x- ve y- eksenlerini kestiği noktalar olarak alınırsa denklem*

$P_1(x_1, y_1) = P_1(p, 0)$, $P_2(x_2, y_2) = P_2(0, q)$ ise

$$\frac{y-0}{q-0} = \frac{x-p}{0-p} \Rightarrow \frac{y}{q} = -\frac{x}{p} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

bulunur. Burada

$$\frac{x}{\text{grafiğin } x\text{- eksenini kestiği noktanın } x \text{ koordinatı}} + \frac{y}{\text{grafiğin } y\text{- eksenini kestiği noktanın } y \text{ koordinatı}} = 1$$

olduğundan, $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ denklemine ***eksenlerden ayırdığı parçalara göre doğru denklemi*** *denir.*

Bir Noktası ve Eğimi Bilinen Doğru Denklemi

Bir doğru üzerindeki bir nokta $P_1(x_1, y_1)$ ve eğimi m olsun. Doğru üzerinde hareketli bir $P(x, y)$ noktası alalım. Yine eğimi kullanacağız. $m_{\overline{P_1P}}$, $\overline{P_1P}$ parçasının eğimini göstermek üzere

$m = m_{\overline{P_1P}}$ dir. Böylece

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

olduğundan, bir noktası ve eğimi bilinen doğru denklemi

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

olur.

Eğimi ve bir noktası bilinen doğru denkleminde $P_1(x_1, y_1)$ noktası doğrunun y- eksenini kestiği nokta olarak alınırsa, yani $P_1(x_1, y_1) = P_1(0, b)$ alınırsa,

$$y - b = m(x - 0) \Rightarrow y = mx + b$$

bulunur. Burada m doğrunun eğimi ve b grafiğin y- eksenini kestiği nokta olduğundan bu denkleme doğrunun **eğim - kesim denklemi** denir.

Yukarıdaki dört durumda da denklem x ve y bilinmeyenlerine göre düzenlenirse

$$Ax + By + C = 0$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denkleme de doğrunun genel denklemi denir.

ÖRNEK 5

Verilenlere göre doğru denklemlerini belirleyiniz.

a) $P_1(-2, -1)$, $P_2(3, 4)$ **b)** $P_1(3, 0)$, $P_2(0, 5)$

c) $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 3)$ **d)** $m = -1$, $P_1(3, 1)$

ÇÖZÜM

a) $\frac{y-(-1)}{4-(-1)} = \frac{x-(-2)}{3-(-2)} \Leftrightarrow \frac{y+1}{5} = \frac{x+2}{5}$

$\Leftrightarrow y + 1 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 1$ olur.

b) $P_1(3, 0)$, $P_2(0, 5)$ noktalarından birincisi x- ekseni, ikincisi y- ekseni üzerinde olduğundan grafiğin eksenleri kestiği noktalardır. Eksen parçalarına göre doğru denklemi kullanılırsa

$$\frac{x}{\text{grafiğin } x\text{- eksenini kestiği noktanın } x \text{ koordinatı}} + \frac{y}{\text{grafiğin } y\text{- eksenini kestiği noktanın } y \text{ koordinatı}} = 1,$$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{y}{5} = 1 - \frac{x}{3} \Leftrightarrow y = 5\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ olur.

c) $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 3)$ noktalarından biri orijindir. $y = mx + b$ de bu noktalar yerine yazılırsa

$P_1(0, 0)$ $0 = m\ 0 + b \Rightarrow b = 0$

$P_2(1, 3)$ $3 = m(1) + 0 \Rightarrow m = 3$ bulunur.

Böylece

$y = mx + b = 3x + 0 = 3x$

$y = 3x$ olur.

d) $m = -1,\ P_1\ (3, 1)$

$y - y_1 = m\,(x - x_1) \Leftrightarrow y - 1 = (-1)\,(x - 3)$

$\Leftrightarrow y = -x + 4$ olur.

ÖRNEK 6

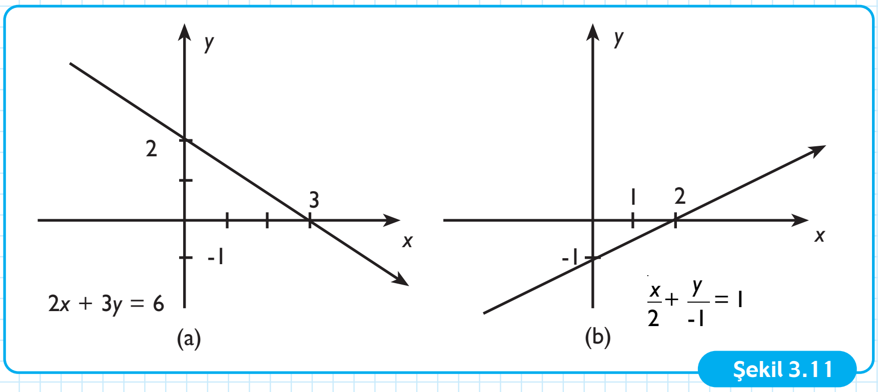
Verilen doğruların grafiklerini çiziniz.

a) $2x + 3y = 6$ **b)** $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} = 1$

c) $y = -3$ **d)** $x = 2$

ÇÖZÜM

a) Grafiğin y- eksenini kestiği noktayı bulmak için $x = 0$ yazılır. $2.0 + 3.y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$ bulunur. Benzer şekilde grafiğin x- eksenini kestiği noktayı bulmak için ise $y = 0$ yazılır ve $2.x + 3.0 = 6 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3, 0)$ bulunur. (0, 2) ve (3, 0) noktalarını birleştiren doğru parçasını içine alan doğru istenen doğrudur (Şekil 3.11 (b)).



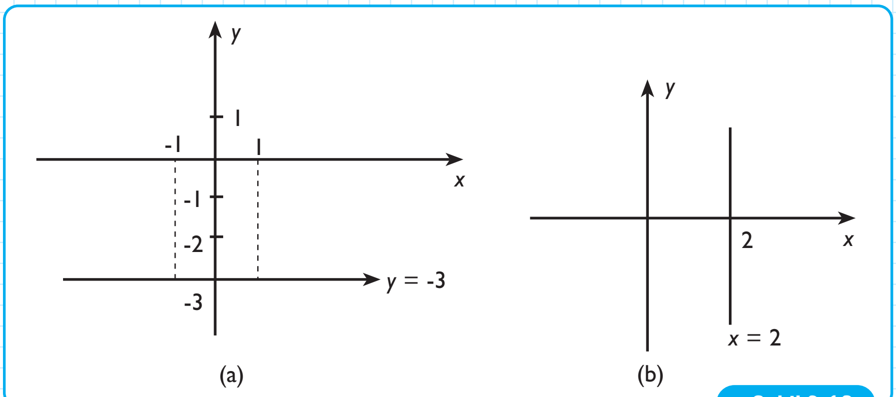
Şekil 3.11

b) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} = 1$ de grafiğin x ve y- eksenlerini kestiği noktalar hazır bir biçimde verilmiştir (Şekil 3.11 (b)). Bunlar sırasıyla 2 ve -1 dir. Gerçekten

$y = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{0}{-1} = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$

$x = 0 \Rightarrow \dfrac{0}{2} + \dfrac{y}{-1} = 1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$ olur.

c) $y = -3$ denkleminde x değişkeni olmadığından x serbestçe değişiyor demektir, yani $(x, -3)$ tipindeki tüm noktalar bu doğru üzerindedir. Özel olarak (-1, -3) ve (1, -3) noktaları da bu doğru üzerindedir. Bu noktaları birleştiren doğru parçasını üzerinde bulunduran doğru istenen doğrudur. Ya da kısaca bu doğrunun eğimi sıfırdır. Dolayısıyla x- eksenine paraleldir. y- ekseni üzerinde -3 noktasından geçen x eksenine paralel doğru istenen doğru olur (Şekil 3.12 (a)).

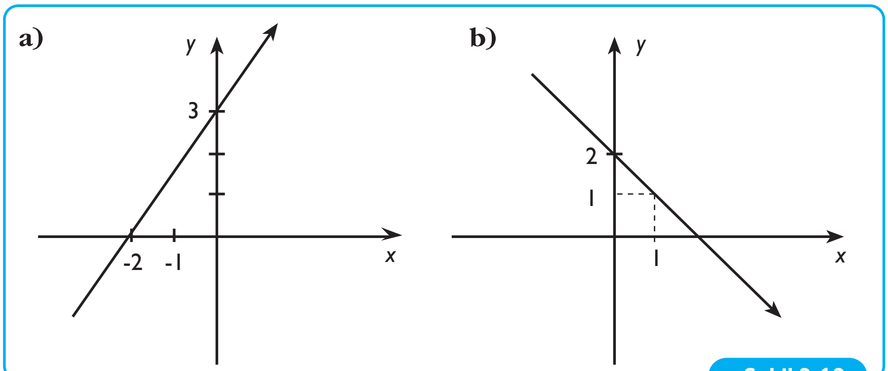


Şekil 3.12

d) Aynı düşünceyle $x = 2$ doğrusunun grafiği yukarıdaki gibidir (Şekil 3.12 (b)).

ÖRNEK 7

Grafikleri verilen doğruların denklemlerini bulunuz.



Şekil 3.13

ÇÖZÜM

Verilen doğruların denklemleri birkaç yolla bulunabilir. Aşağıda en kolay yolla bu denklemlerin elde edilişleri verilecektir.

a) Grafik x eksenini $(p, 0) = (-2, 0)$ ve y- eksenini $(0, q) = (0, 3)$ noktasında kestiğinden

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\Rightarrow 2y - 3x - 6 = 0 \quad \text{olur.}$$

b) Grafik y- eksenini $(0, n) = (0, 2)$ noktasında kestiğinden, eğim-kesim denklemi kullanılırsa

$y = mx + n = mx + 2$ olur. Grafik üzerindeki diğer nokta kullanılırsa
$1 = m\,1 + 2 \Rightarrow m = -1$ bulunur. Böylece denklem
$y = mx + n = -x + 2$ olur.

ÖRNEK 8

Bir üretim firması yeni bir elektrikli süpürge üretmeyi düşünmektedir. Firmanın piyasa araştırma bölümü aşağıdaki fiyat-talep bilgilerini elde etmiştir.

Fiyat (milyon TL)	Tahmini Talep (kişi)
41	8 040
66	5 040
88	2 400
108	0

Fiyat ile talep arasında doğrusal bir bağıntı olduğunu görünüz ve (108, 0) için bağıntıyı kurunuz.

ÇÖZÜM

$m = \dfrac{0 - 2400}{108 - 88} = \dfrac{2400 - 5040}{88 - 66} = \dfrac{5040 - 8040}{66 - 41} = -120$ olduğundan q_d = Talep,

F = Fiyat denilirse, $m = \dfrac{q_d - 0}{F - 108}$ formülünden

$q_d - 0 = -120\,(F - 108)$

$= -120\,F + 12\,960$ veya $q_d = 12\,960 - 120\,F$ bulunur.

ÖRNEK 9

Ayakkabı üreten bir firmanın günlük sabit giderleri 165 000 000 TL. dir. Günlük 100 adet ayakkabı için 2 365 000 000 TL. harcama yapılmaktadır. Firmanın üretimi ile maliyeti arasında doğrusal bir bağıntının var olduğunu kabul edelim. Bu bağıntıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

C = Maliyet , x = Üretim ise istenen bağıntı

$(x_1, C_1) = (0,\ 165\,000\,000)$ ve $(x_2, C_2) = (100,\ 2\,365\,000\,000)$

noktalarını birleştiren doğrunun denklemi olacaktır. İki noktadan geçen doğru denkleminin

$$\frac{C - C_1}{C_2 - C_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

olduğu hatırlanırsa

$$\frac{C - 165\,000\,000}{2\,365\,000\,000 - 165\,000\,000} = \frac{x - 0}{100 - 0}$$

olur. Buradan maliyet

$$C = 22\,000\,000\,x + 165\,000\,000$$

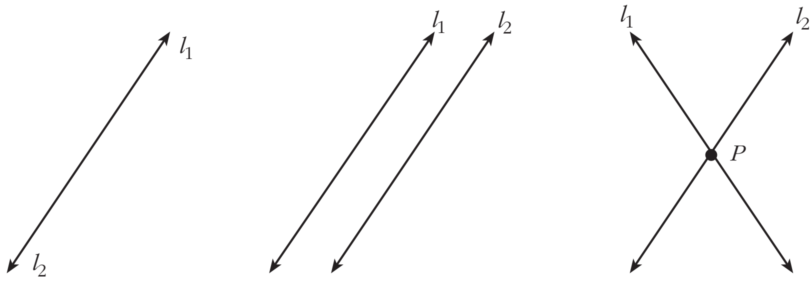
olarak elde edilir.

İki Doğrunun Birbirlerine Göre Durumları

Verilmiş iki doğru için üç durum söz konusudur. Bu doğrular ya **çakışıktır** ya **paraleldir** ya da **kesişirler.** Şimdi bu durumların hangi şartlarda gerçekleştiğini görelim.

A) Doğrular

$$\left.\begin{aligned} l_1 &: y_1 = m_1 x + b_1 \\ l_2 &: y_2 = m_2 x + b_2 \end{aligned}\right\}$$ denklemleriyle verilsin.



çakışık doğrular: $l_1 = l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ ve $b_1 = b_2$

paralel doğrular: $l_1 \,//\, l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ ve $b_1 \neq b_2$

kesişen doğrular: $l_1 \cap l_2 = \{P\} \neq \phi \Leftrightarrow m_1 = m_2$

Şekil 3.14

B) Doğrular

$$\left.\begin{aligned} l_1 &: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ l_2 &: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ denklemleriyle verilsin.

$$l_1 = l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$l_1 \,//\, l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad \text{ve}$$

$$l_1 \cap l_2 = \{P\} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{olur.}$$

Kesişen doğruların kesim noktalarını bulmak için birkaç yol vardır. Burada bunların iki tanesini örnek içinde açıklayalım.

ÖRNEK 10 ***Verilen doğru çiftlerinin birbirlerine göre durumlarını inceleyiniz. Kesişme durumuna uyanların kesim noktasını bulunuz.***

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -6x - 10y = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$

ÇÖZÜM

a) $\frac{3}{-6} = \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2}$ olduğundan bu iki doğru çakışıktır.

b) $\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{-3}{-1}$ olduğundan verilen iki doğru paraleldir.

(Çizerek görünüz).

c) $\frac{1}{1} \neq \frac{3}{-1}$ olduğundan doğrular keşişir. Kesim noktalarını **yok etme metodu** adı verilen metodla bulalım.

İkinci denklemin her iki yanını 3 ile çarpıp 1. denkleme eklersek

$$\begin{array}{rl} & x + 3y = 12 \\ 3\,/ & x - y = 4 \\ \hline & x + 3y = 12 \\ & 3x - 3y = 12 \\ \hline & 4x = 24 \end{array}$$

$$x = \frac{24}{4} = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \text{bulunur.}$$

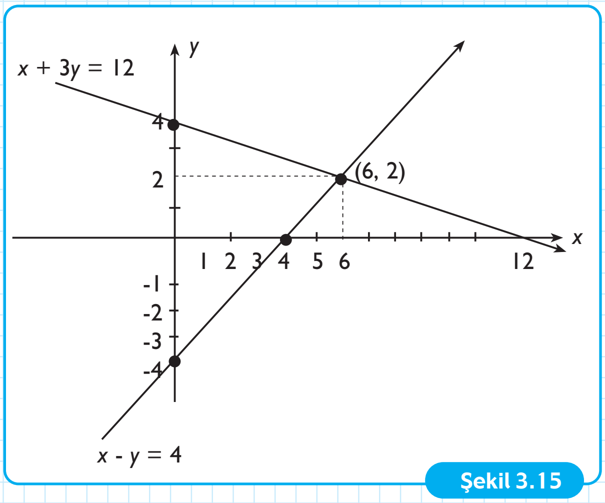
Bulunan $x = 6$ değerini ikinci denklemde (veya birinci denklemde) x gördüğümüz yere yazarsak

$x - y = 6 - y = 4 \Rightarrow$
$y = 6 - 4 = 2$

bulunur. Böylece kesim noktası

$(x, y) = (6, 2)$

olur.



Şekil 3.15

SIRA SİZDE 2

1) Verilen nokta çiftlerinden geçen doğruların eğimlerini ve denklemlerini bulunuz.

a) A (0, 0); B (3, -2) **b)** A (-1, 3); B (4, 0)

c) A (3, 0); B (-1, -1) **d)** A (3, 5); B (-1, 3)

2) x- eksenini 5, y- eksenini 3 noktasında kesen doğrunun denklemini bulunuz.

3) Verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $2x + y - 3 = 0$ **b)** $3x - 2y + 1 = 0$ **c)** $y = 3$

4) Verilen doğru çiftlerinin çakışık, paralel veya kesişen olup olmadıklarını araştırınız. Varsa kesişim noktalarını bulunuz.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2y = x + 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3y = x - 2 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$

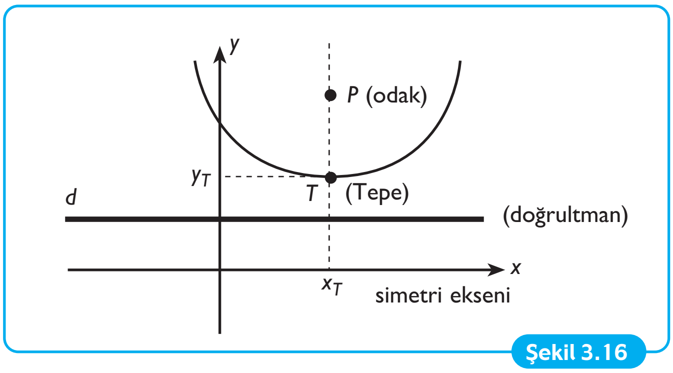
5) $y = 3x - 1$ doğrusuna paralel olan ve $A\ (2,\ 3)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

PARABOL

Burada sadece simetri ekseni x- eksenine paralel veya y- eksenine paralel olan parabolleri inceleyeceğiz.

Geometrik olarak, düzlemde verilen bir noktaya ve verilen bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların kümesine parabol denir. Bu noktaya parabolün odağı, doğruya da parabolün doğrultmanı adı verilir.

Eğer parabolün doğrultmanı y- eksenine dik ve odağı doğrultmanın üst bölgesinde seçilirse şekildeki parabol elde edilir.



Şekil 3.16

Parabolün grafiği, odağından geçen ve doğrultmanına dik olan bir doğruya göre simetriktir. Bu doğruya simetri ekseni ve parabolü kestiği noktaya da tepe noktası denir.

$$Ax^2 + Bx + C + Dy = 0$$

denklemi $A \neq 0 \neq C$ olduğunda simetri ekseni y- eksenine paralel olan bir parabolün genel denklemidir. Buradan y çekilirse

$$y = -\frac{A}{D}x^2 - \frac{B}{D}x - \frac{C}{D}$$

bulunur. $a = -\frac{A}{D}$, $b = -\frac{B}{D}$ ve $c = -\frac{C}{D}$ denirse

$$y = ax^2 + bx + c$$

denklemi bulunur. Benzer şekilde $Ay^2 + By + C + Dx = 0$ denklemi simetri ekseni x- eksenine paralel olan bir parabol gösterir. Bu denklemden x çekilirse

$$x = ay^2 + by + c$$

bulunur.

$y = ax^2 + bx + c$ Parabolünün Grafiği

Bu tür bir denklem $a > 0$ ise kolları yukarı açılan, $a < 0$ ise kolları aşağı açılan bir parabol verir. Grafiği kolayca çizebilmek için aşağıdaki yol izlenir.

İlk olarak; parabolün tepe noktasının koordinatları bulunur.

$y = ax^2 + bx + c$ de ilk iki terim a parantezine alınıp **parantez içindeki *x* in kat sayısının yarısının karesi** bir eklenir bir çıkarılırsa eşitlik

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$= a\left(x - x_T\right)^2 + y_T$$

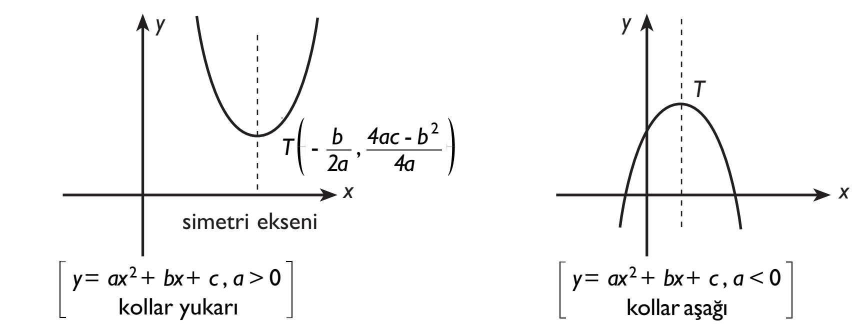
biçimine dönüşür. Burada $x_T = -\frac{b}{2a}$ parabolün tepe noktasının x koordinatı ve $y_T = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ise parabolün tepe noktasının y koordinatı olur.

Tepe noktası: $T\,(x_T, y_T) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ olur.

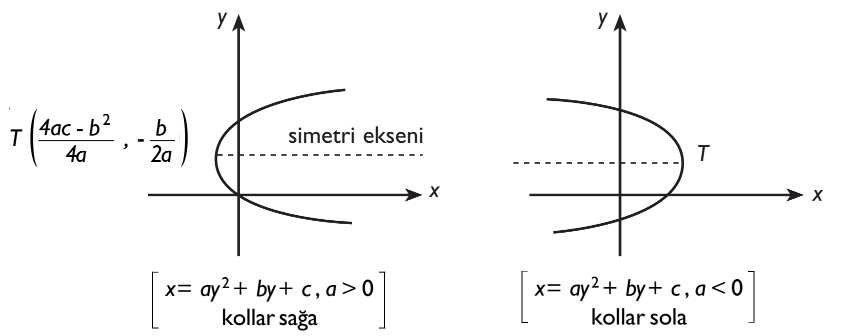
İkinci olarak; parabol üzerinde tepe noktasının iki yanında en az iki nokta belirlenir. Özel olarak bu iki nokta parabolün x- eksenini kestiği noktalar olarak seçilebilir.

Son olarak; $a > 0$ ise parabolün kollarının yukarı doğru, $a < 0$ ise parabolün kollarının aşağı doğru açıldığı gözönüne alarak çizim gerçekleştirilir.

- $y = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktası şu şekilde de bulunabilir.
  Önce; $x_T = -\frac{b}{2a}$ bulunur.
  Sonra; x_T, $y = ax^2 + bx + c$ de x yerine yazılarak y_T elde edilir.
  ve $T(x_T, y_T)$ tepe noktası bulunmuş olur.
- Tepe noktası , $a > 0$ ise grafiğin en alt (minimum), $a < 0$ ise grafiğin en üst (maksimum) noktası olur.
  Benzer inceleme $x = ay^2 + by + c$ parabolü için de yapılabilir.
  Grafikler izleyen sayfada özetlenmiştir.



Şekil 3.17a



Şekil 3.17b

ÖRNEK 11

a) $y = 4x^2 - 4x + 2$ **b)** $y = 1 - \frac{x^2}{4}$

parabollerinin grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

a) $y = 4x^2 - 4x + 2$ parabolünün tepe noktasının koordinatlarını belirlemek için eşitliğin sağ yanını kareye tamamlayalım.

$$y = 4\left(x^2 - x\right) + 2 = 4\left[x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] + 2$$

$$= 4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

olur. $y = (x - x_T)^2 + y_T$'den

$$T\,(x_T, y_T) = T\left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{elde edilir.}$$

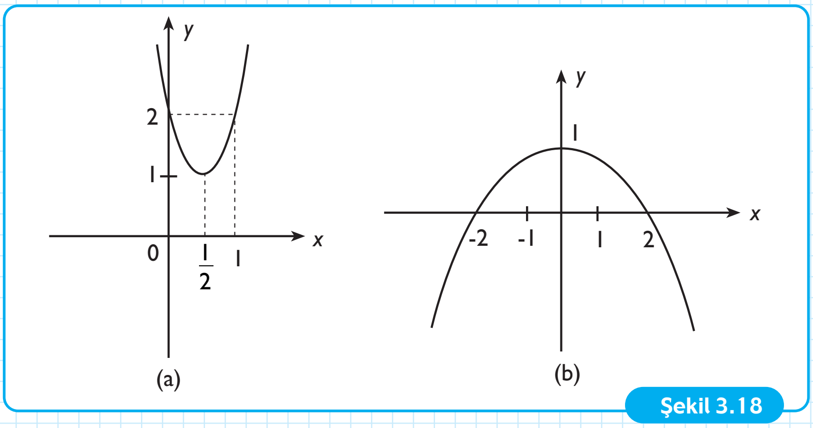
$x = 0$ için $y = 4 \,.\, 0^2 - 4 \,.\, 0 + 2 = 2$

$x = 1$ için $y = 4 \,.\, 1^2 - 4 \,.\, 1 + 2 = 2$

olduğundan parabol üzerindeki (0, 2) ve (1, 2) noktaları bulunur.

x	$y = 4x^2 - 4x + 2$	(x, y)
$\frac{1}{2}$	1	$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$
0	2	$(0, 2)$
1	2	$(1, 2)$

$a = 4 > 0$ olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. Grafik aşağıdaki gibidir. (Şekil 3.18 (a))



Şekil 3.18

b) $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, $x_T = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 0$

$y_T = 1 - \frac{0^2}{4} = 1$

$\Rightarrow T(0, 1)$ olur.

$y = 0$ için $1 - \frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ dir.

$a = -\frac{1}{4} < 0$ olduğundan kollar aşağı doğrudur. (Şekil 3.18 (b))

ÖRNEK 12

a) $x = -4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ **b)** $x = (y + 2)^2 - 4$

parabollerini çiziniz.

ÇÖZÜM

a) $x = -4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 1 = a(y - y_T)^2 + x_T$ ve $a = -4 < 0$ olduğundan kollar sola doğru açılır.

$T(x_T, y_T) = T\left(1, \frac{3}{2}\right)$ dir. Parabolün y- eksenini kestiği noktayı bulalım.

$$x = 0 \text{ için } -4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow 4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2} = \left|y-\frac{3}{2}\right|\right)$$

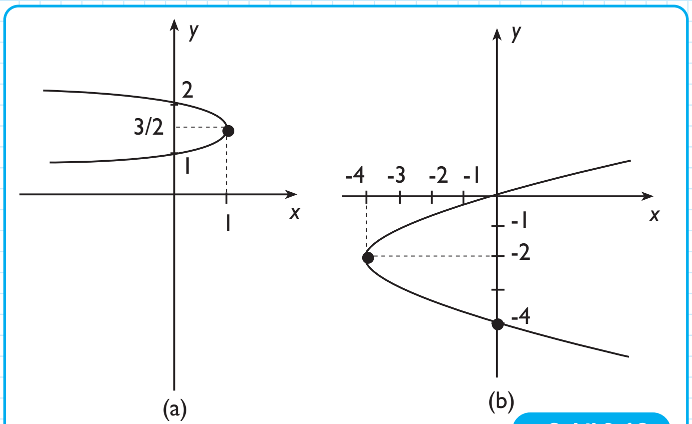
$$\Rightarrow \left|y-\frac{3}{2}\right| = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_1 = 2 \quad , \quad y_2 = 1$$

bulunur. Böylece

$x = -4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 + 1$	y	(x, y)
0	1	(0 , 1)
0	2	(0 , 2)
1	3/2	(1 , 3/2)

olur. Grafik yandaki gibidir (Şekil 3.19 (a)).



Şekil 3.19

b) $x = (y+2)^2 - 4 = a(y - y_T)^2 + x_T$, $a = 1 > 0$ olduğundan kollar sağa doğru açılır ve $T(-4, -2)$ dir. Parabolün y- eksenini kestiği noktaları bulalım.

$$x = 0 \text{ için } (y+2)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow |y+2| = 2 \left(\sqrt{(y+2)^2} = |y+2|\right)$$

$$\Rightarrow y + 2 = \pm 2$$

$$\Rightarrow y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = -4$$

$x = (y+2)^2 - 4$	y	(x, y)
-4	-2	(-4 , -2)
0	0	(0 , 0)
0	-4	(0 , -4)

olur. Grafiği yukarıdaki gibidir (Şekil 3.19 (b)).

SIRA SİZDE 3

1) Denklemleri verilen parabolleri çiziniz.

a) $y = 2x^2 - 5x$ **b)** $y = -3x^2 + 2x$

c) $y = 3 - 5x^2$ **d)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$

e) $y = -\frac{7}{9}(x+3)^2$ **f)** $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$

g) $y = x^2 - x - 6$ **h)** $y = -\frac{5}{3}x^2 - \frac{20}{3}x - 5$

2) Verilen parabollerin minimum noktalarını bulunuz.

a) $y = 3(x-1)^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 4x - 5$

c) $y = 3x^2 - 4x + 1$ **d)** $y = 2x^2 + x + 1$

3) Verilen parabollerin maksimum noktalarını bulunuz.

a) $y = -2x^2 + x$ **b)** $y = 1 - 3x^2$

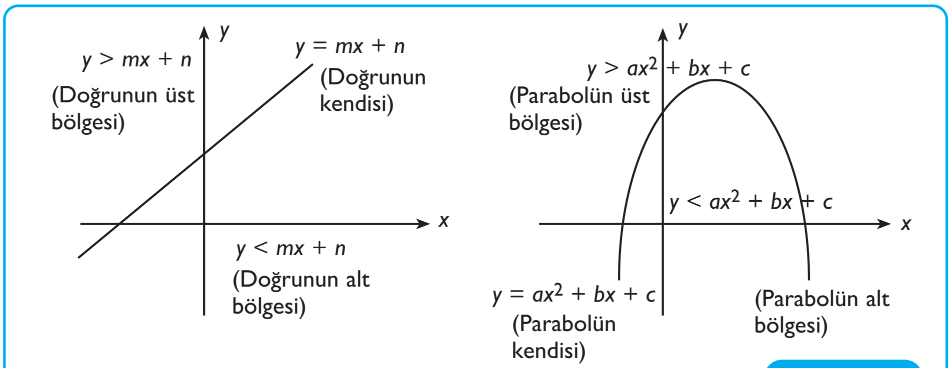
BİRİNCİ VE İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER

Bu kısımda,

$$y > mx + n \ (y \geq mx + n); \qquad y < mx + n \ (y \leq mx + n),$$
$$y > ax^2 + bx + c \ (x > ay^2 + by + c); \ y < ax^2 + bx + c \ (x < ay^2 + by + c)$$

biçimindeki (diğer bir deyişle doğru ya da parabol denklemleriyle oluşturulan) eşitsizliklerin çözümü olan (x, y) ikililerinin oluşturdukları kümenin nasıl belirlendiğini inceleyeceğiz.

Verilen bir doğru (ya da parabol) düzlemi üç bölgeye ayırır ve düzlemdeki bir (x, y) noktası bu bölgelerden sadece biri içindedir.



Şekil 3.20

Bu, verilen bir (x, y) için

$$y > mx + n \ , \quad y = mx + n \ , \quad y < mx + n \ \ldots (*)$$
$$(y > ax^2 + bx + c \ , \quad y = ax^2 + bx + c \ , \quad y < ax^2 + bx + c)$$

bağıntılarından sadece birinin sağlanması demektir. Tersine (*) bağıntılarından birini sağlayan bir nokta ya doğru (parabol) üzerindedir ya da bu doğrunun (parabolün) düzlemden ayırdığı iki bölgeden sadece birisi içindedir.

Böyle bir eşitsizliğin grafiğini çizmek için adım adım aşağıdaki yol izlenir.

Önce; $y = mx + n$ doğrusunun ($y = ax^2 + bx + c$) parabolünün grafiği nokta nokta çizilir.

Sonra; doğru (parabol) üzerinde olmayan herhangi bir nokta alınır ve alınan noktanın koordinatları verilen eşitsizlikte yerine yazılır. Koordinatlar eşitsizliği sağlıyorsa noktanın bulunduğu bölge aranan grafiktir, sağlamıyorsa diğer bölge aranan grafiktir.

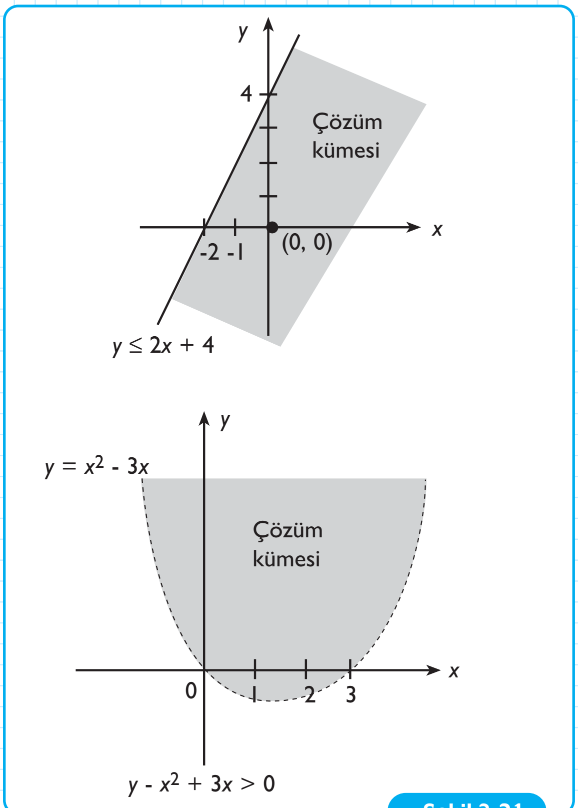
Son olarak, verilen eşitsizlik ≥ ya da ≤ biçimindeyse doğrunun (parabolün) kendisi de çözüme dahil edilir.

ÖRNEK 13 **a)** $y \leq 2x + 4$ **b)** $y - x^2 + 3x > 0$

eşitsizliklerinin çözüm kümeleri olan bölgeleri çiziniz.

ÇÖZÜM

a) $y = 2x + 4$ doğrusunu çizelim.
(0, 0) doğru üzerinde değildir. Bu noktayı $y \leq 2x + 4$ de yerine yazalım.
$0 \leq 2 \cdot 0 + 4 = 4$ eşitsizliği doğru olduğundan istenen çözüm bölgesi (0, 0) ı da içine alan doğrunun alt bölgesi olur.



Şekil 3.21

b) $y = x^2 - 3x$ parabolünün grafiğini nokta nokta çizelim (neden?). Parabol üzerinde olmayan (0, -1) noktasının koordinatlarını verilen eşitsizlikte yazalım.

$$y - x^2 + 3x = 0 - (-1)^2 + 3\,(-1) = -4 > 0$$

olur ve eşitsizlik sağlanmaz. Bu durumda bu eşitsizliğin çözüm bölgesi (0, -1) noktasının olduğu bölge değil, parabolün düzlemde ayırdığı diğer bölgedir.
Bir eşitsizlik sistemi verilmişse her bir eşitsizlik ayrı ayrı çözülür. Ortak çözüm bölgesi verilen sistemin çözüm bölgesi olur.

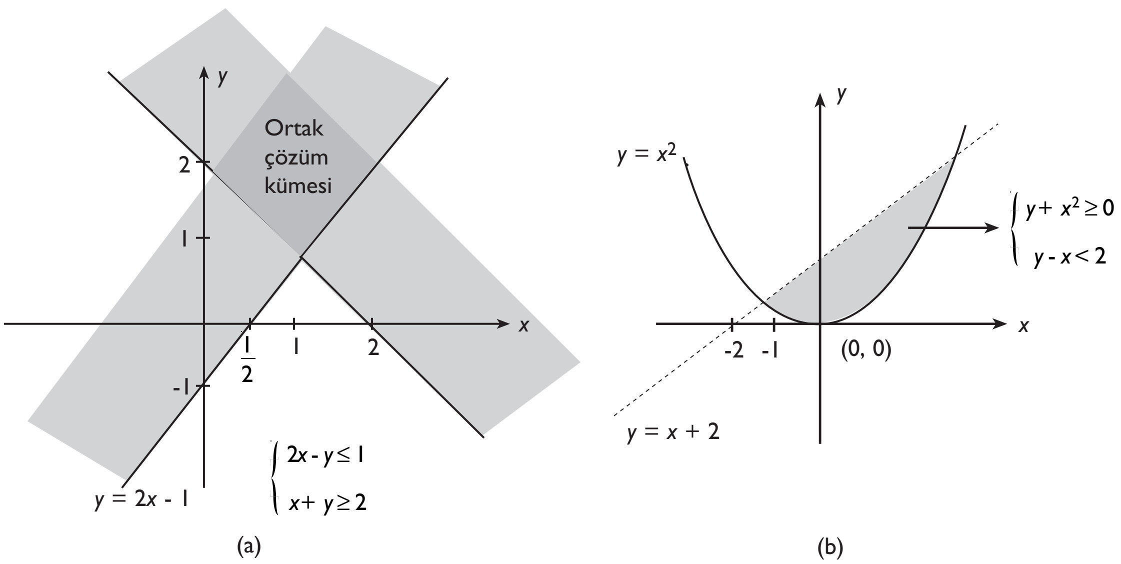
ÖRNEK 14

a) $\begin{cases} 2x - y \leq 1 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y + x^2 \geq 0 \\ y - x < 2 \end{cases}$

eşitsizlik sistemlerini çözünüz.

ÇÖZÜM

Eşitsizliklerin çözüm kümesi aşağıdaki grafiklerde görülen ortak taralı bölgelerdir.



Şekil 3.22

SIRA SİZDE 4

1) Verilen eşitsizliklerin çözüm kümelerini düzlemde çizerek gösteriniz.

a) $y - 3x > 0$ **b)** $2x - y < 1$ **c)** $x - 3y \leq 0$

d) $y - (x - 1)^2 \geq 0$ **e)** $y - x^2 - 4x - 5 \leq 0$

2) Verilen eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini düzlemde çizerek gösteriniz.

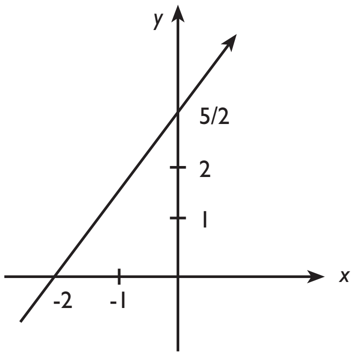
a) $\begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ x - y < 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x \geq 1 \\ y - 2x < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - 3x^2 + 1 > 0 \\ y + x^2 + 1 \leq 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} y - 2x - 3 \leq 0 \\ 1 - 3x^2 + y > 0 \end{cases}$

f) $1 < x + y < 3$ **g)** $2 < y - x^2 \leq 5$

Kendimizi Sınayalım

1.



Grafiği verilen doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $4y - 5x = -10$

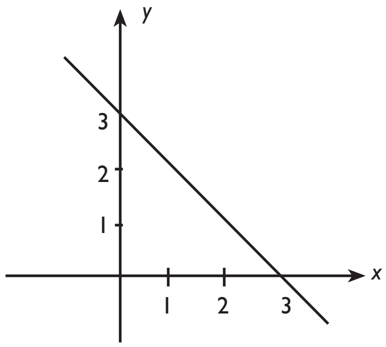
b. $4y + 5x = 10$

c. $4y - 5x = 10$

d. $5y - 4x = 10$

e. $10y + 2x = 2$

2.



Grafiği verilen doğruya dik olan doğru aşağıdakilerden hangisidir?

a. $x + y = -1$

b. $x + y = 3$

c. $x + y = -3$

d. $x - y = 3$

e. $-3x + y = 1$

3. Aşağıdakilerden hangisi bir doğru denklemi değildir?

a. $x - 3y = 1$

b. $3x + 2y = 1$

c. $y = 3x - 1$

d. $x - y^2 = 1$

e. $\sqrt{3}x + y = -1$

4. $d_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$; $d_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ doğruları en az iki ortak noktaya sahipseler aşağıdakilerden hangisi kesin olarak doğrudur?

a. d_1 ve d_2 paraleldir.

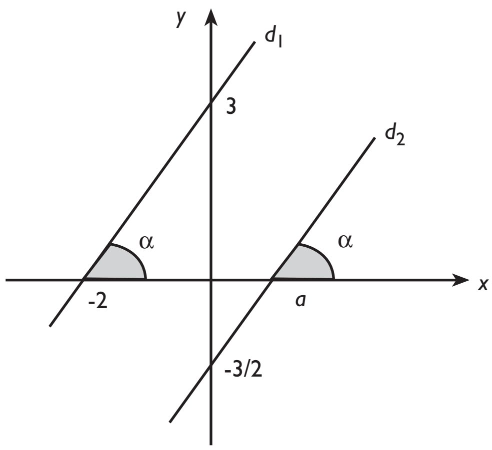
b. d_1, d_2 ye diktir.

c. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ dır.

d. $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 \neq C_2$ dır.

e. $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ dır.

5.



Yukarıdaki şekle göre a kaçtır?

a. 1

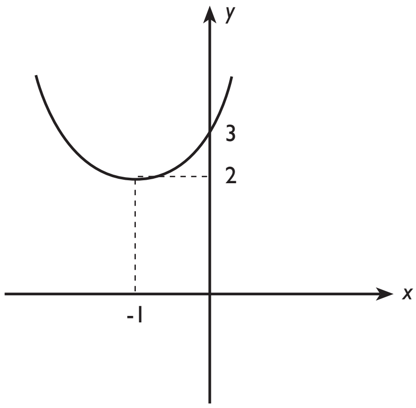
b. 2

c. 3

d. 4

e. 5

6.



parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $y = (x + 2)^2 - 1$

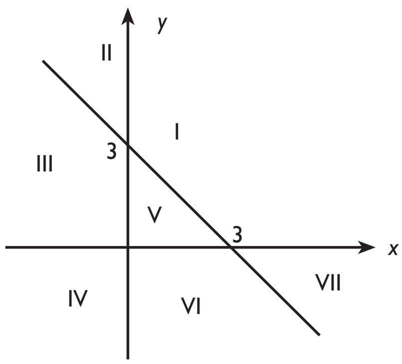
b. $y = -(x + 2)^2 - 1$

c. $y = (x + 1)^2 + 2$

d. $y = (x - 1)^2 + 2$

e. $y = (x - 1)^2$

7. Grafiği verilen $x + y > 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?



a. I, II ve III. bölgelerin bileşimi

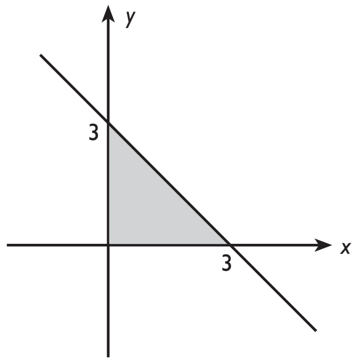
b. I ve V. bölgelerin bileşimi

c. I, II ve VII. bölgelerin bileşimi

d. II, III, IV, V ve VI. bölgelerin bileşimi

e. IV, VI ve VII. bölgelerin bileşimi

8.



Taralı bölge aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinden hangisinin çözüm kümesidir?

a. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$

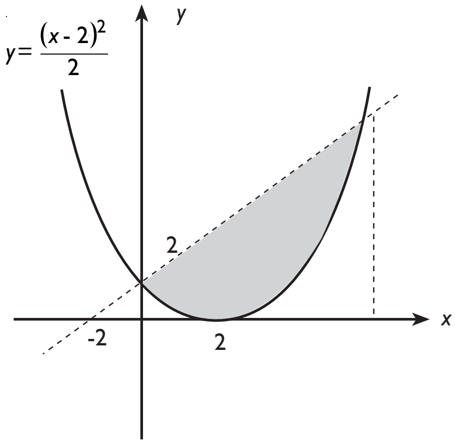
b. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y < 3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

9. Taralı bölge aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinden hangisinin çözüm bölgesidir?



a. $\begin{cases} y > \dfrac{x-2}{2} \\ y - x > 2 \end{cases}$

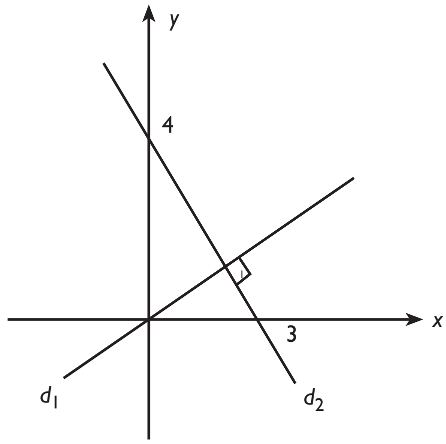
b. $\begin{cases} y \geq \dfrac{(x-2)^2}{2} \\ y > x + 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y < \dfrac{(x-2)^2}{2} \\ y < x + 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y \geq \dfrac{(x-2)^2}{2} \\ y - x < 2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y > \dfrac{(x-2)^2}{2} \\ y \leq x + 2 \end{cases}$

10. d_2 doğrusu d_1 e dik ise d_1 doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?



a. $y = 3x$

b. $y = \dfrac{2}{3}x$

c. $y = 2x$

d. $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$

e. $y = \dfrac{3}{4}x$

11. $d_1 : 2x - y = 3$; $d_2 : y - 4x = 0$

d_1 ve d_2 doğrularının kesişim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$

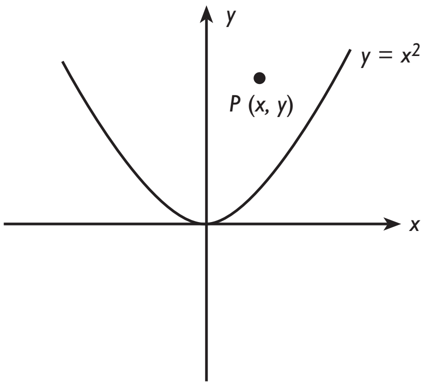
b. $\left(-\dfrac{3}{2}, 6\right)$

c. $\left(-\dfrac{1}{2}, -2\right)$

d. $\left(-\dfrac{3}{2}, -6\right)$

e. $(1, 4)$

12. Aşağıdaki şekle göre P noktasının koordinatları için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

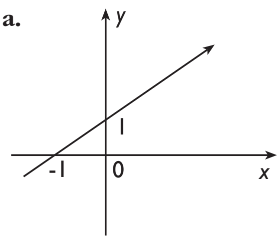


a. $x^2 > y$
b. $x^2 < y$
c. $x^2 = y$
d. $x^2 \geq y$
e. $x^2 \, . \, y = 3$

Biraz Daha Düşünelim

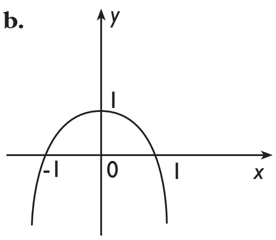
1. Verilen grafiklerin belirtilen simetriklerini bulunuz.

a.



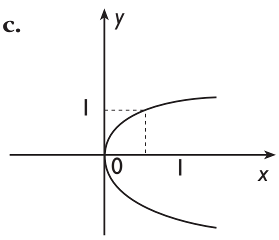
x- eksenine göre

b.



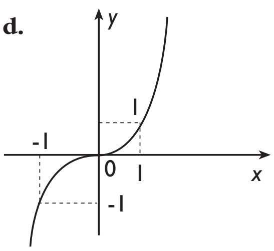
y- eksenine göre

c.



(y=x doğrusuna göre)

d.



y- eksenine göre

2. x üretilen ürün sayısı ve y fiyat olmak üzere bir üretici firmanın günlük üretim fiyatı (y milyon TL) $y = 10.000 - 90x + 0.045x^2$ olarak belirlenmiştir. Firma fiyatı minimum yapabilmesi için günde kaç adet üretim yapmalıdır?

3. $x + y = 3$ doğrusuna dik olan A (-1, -2) den geçen doğrunun denklemini bulunuz.

4. $y = x + n$ ve $y = mx - 5$ doğrularının A (3, 1) noktasında kesiştikleri biliniyorsa n ve m nedir?

5.

a. $x = -4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$

b. $x = (y + 2)^2 - 4$

parabollerini çiziniz.

René Descartes

(1596-1650)

"Descartes' ın adını ölümsüzleştiren onun felsefi ve teorik fikirlerinden daha çok analitik geometri konusundaki çalışmalarıdır. Analitik geometri pozitif bilimlerin ilerlemesi yolunda bu güne kadar atılmış olan en büyük adımdır."

John Stuart Mill

4

Fonksiyonlar

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra,

- *fonksiyon kavramını öğrenecek,*
- *bir fonksiyon verildiğinde tanım ve görüntü kümesinin bulunuşunu öğrenecek,*
- *bir fonksiyonun grafiğini çizebilecek,*
- *matematiksel model oluşturabilecek,*
- *fonksiyonların temel özelliklerini öğrenecek, bunları grafik çiziminde kullanabilecek,*
- *fonksiyonlar üzerindeki işlemleri yapabilecek,*
- *bir fonksiyonun tersini bulabilecek,*
- *fonksiyonların sınıflandırmasını öğreneceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***fonksiyon tanımı iyi öğrenilmeli,***
- ***matemetiksel model oluşturmak için çaba sarf edilmeli,***
- ***fonsiyonların özellikleri öğrenilerek grafik çizimlerinde nasıl kullanıldığı üzerinde durulmalı,***
- ***fonksiyonlarla işlem yapabilmek için verilen alıştırmalar çözülmelidir.***

Giriş

Bir firma ürettiği her bir ürünü a TL. den satıyor. Her bir ürün için b TL. lik hammadde gideri ve c TL. lik işçi ücreti ödeniyor. Firmanın yıllık sabit giderleri d TL. dir. x satılan ürün sayısını göstermek üzere yıllık kâr fonksiyonunu x cinsinden bulunuz.

Fen ve mühendislik alanında olduğu kadar ekonomi alanında da birçok probleme çözüm aranırken matematiğin yol gösteriliciliğinden yararlanılır. Bunun için önce verilen problem matematiksel biçimde ifade edilmelidir. Buna ***problemin matematiksel modelinin kurulması*** *denir. Bir problemin matematiksel çözümü için önce onun matematiksel modelinin kurulması gerekir. Matematiksel modelin kurulması genelde* ***veriler arasındaki ilişkiyi düzenleyen bir bağıntının oluşturulması*** *biçiminde olur. Sözel ifade edilen bir problemin matematiksel modeli ve bu modelin kuruluşu, çözümü* ***cebirsel, nümerik*** *ya da* ***geometrik*** *yollardan biriyle yapılır. Cebirsel yol, problemin analitik olarak ifade edilebilmesidir. Yani bir formül, bir fonksiyon veya bir denklem olarak yazılabilmesidir.* ***Nümerik yol,*** *verilerden uygun şekilde nümerik sonuçların çıkarılmasıdır.* ***Geometrik yol*** *ise, problemin veya çözümünün bir şema, bir çizim veya bir grafik yardımıyla gösterilebilmesidir. Elbette bu yolların kimi zaman biri, kimi zamanda birkaçı birlikte kullanılabilir. Uygun yolun hangisinin olacığının seçimi, matematik bilgisi ve problem çözme becerisine bağlıdır. Fakat şunu da unutmamak gerekir; günlük yaşamın çeşitli alanlarında karşılaşılan problemlerin matematiksel çözümleri teorik sonuçlardır. Her zaman gerçek yaşamdaki sonuçlar olmayabilir. Ancak problemin matematiksel modeli iyi kurulmuşsa, modelin çözümü gerçek çözüm olmasa da onun iyi bir yaklaşımıdır.*

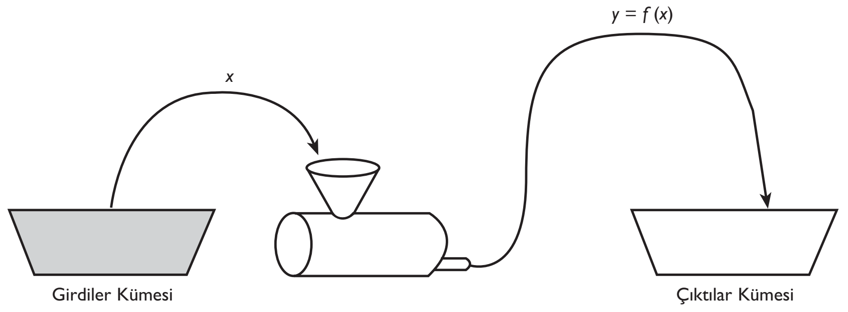
Fonksiyon kavramı matematiğin en temel kavramlarından biridir. Bir değişkene başka bir değişkeni karşılık getirme olarak tanımlanabilecek bu kavram iyi kavranılmadan matematiksel model kurma ve ona çözüm aramadan söz edilemez.

Bu ünitede ***fonksiyon kavramı*** *verilecek ve özellikleri incelenecektir. Ayrıca fonksiyonların grafiklerle gösterimlerinin öneminden söz edilecek ve bazı temel fonksiyonların grafiklerinin çizimleri yapılacaktır.*

FONKSİYON KAVRAMI

AMAÇ 1 ***Fonksiyonun ne olduğunu anlayacaksınız.***

Fonksiyonu, bir girdiye bir ve yalnız bir çıktı veren **girdi-çıktı makinesi** olarak da düşünebiliriz.



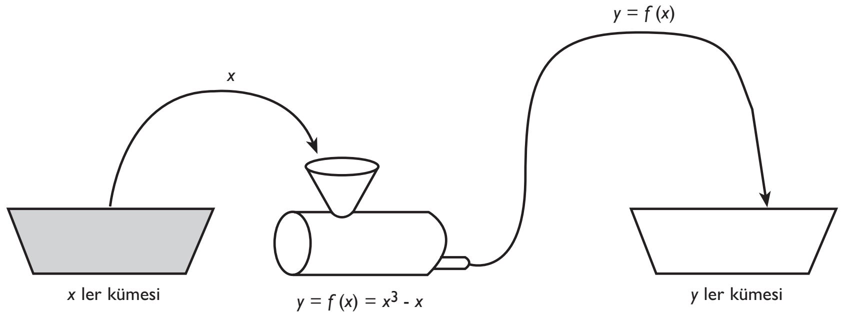
Şekil 4.1

Bunu bir örnekle açıklayalım. Bugün birçok hesap makinesinde $\frac{1}{x}$, a^x, $\log x$, y^x gibi tuşlar vardır. Bir sayı yazıp bu tuşlardan birine,

örneğin; $\frac{1}{x}$ e basılırsa ekranda, verilen sayısının çarpımsal tersi görülür. Hesap makinesinin $\frac{1}{x}$ tuşu (0 hariç) her bir sayıyı, çarpımsal tersine taşıdığından bir fonksiyon tanımlar. Benzer şekilde bir sayı yazıp x^2 tuşuna basılırsa ekranda, verilen sayının karesi görülecektir. Böylece x^2 tuşu da başka bir fonksiyon tanımlayacaktır. Bu nedenle bu tuşlara fonksiyon tuşları denir. Ancak bu tuşlardan y^x tuşu diğerlerinden farklıdır. Bir sayı yazıp y^x e basarsanız sonuç alamazsınız. Fakat önce 2 ye, sonra y^x e, daha sonra 3 e basar yani iki girdi verirseniz eşite basıldığında ekranda 8 belirecektir. Bu durumda iki değişkenli bir fonksiyon ortaya çıkacaktır.

$y = f(x) = x^3 - x$ denklemini göz önüne alalım. Bir x değeri girdi olarak alınırsa buna bir tek y çıktısı karşı gelecektir.

Gerçekten;



Şekil 4.2

ile gösterirsek, bu makine önce x girdisinin kübünü alıyor, x i bundan çıkarıyor ve bunu y çıktısı olarak veriyor diyebiliriz.

Örneğin;

x = girdi	y = çıktı
$x = 1$	$y = f(1) = 1^3 - 1 = 0$
$x = 2$	$y = f(2) = 2^3 - 2 = 6$
$x = 3$	$y = f(3) = 3^3 - 3 = 24$

olur. *"x in kübünü al x i bundan çıkar"* komutunu gerçekleştiren bu makinede $y = x^3 - x$ denklemi makinenin yapacağı işi tanımlayan bir matematiksel kural vermektedir. Bu kural bir x girdisine bir ve yalnız bir y çıktısı karşılık getirmektedir.

Her bir x girdisine, bir ve yalnız bir y çıktısı karşı getiren bir $y = f(x)$ matematiksel kuralına fonksiyon denir.

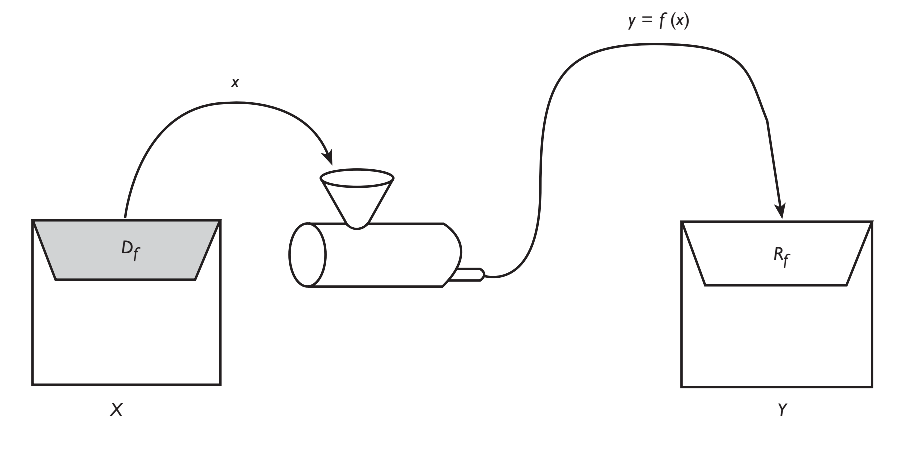
Fonksiyonu veren $y = f(x)$ kuralında x değiştikçe, y de buna bağlı olarak değişecektir. Bu nedenle x e **bağımsız değişken,** y ye de **x e bağlı** ya da kısaca **bağımlı değişken** denir.

$y = f(x)$ denklemini anlamlı yapan tüm x girdilerinin kümesine f fonksiyonunun **tanım kümesi,** tüm y lerin kümesine de f fonksiyonunun **görüntü kümesi** denir. Bu kümeler sırasıyla D_f ve R_f ile gösterilirler. D_f ve R_f, sırasıyla X ve Y gibi iki kümenin alt kümeleri ise f yi simgesel olarak

$$f : D_f \subset X \rightarrow Y$$

biçiminde gösteririz.

- Fonksiyon $y = f(x)$ kuralıyla verilmişse $D_f = \{ x \in X \mid y = f(x) \}$ ve $R_f = \{ y \in Y \mid x \in D_f$ için $y = f(x) \}$ olur.
- Genel olarak, D_f ve R_f, $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin bir alt kümesi olarak alınacaktır.



Şekil 4.3

Bir Fonksiyonun Tanım ve Görüntü Kümesinin Bulunuşu

AMAÇ 2 ***Bir fonksiyon verildiğinde tanım ve görüntü kümesini bulabileceksiniz.***

Bazı durumlarda fonksiyonu tanımlayan kişi tanım ve görüntü kümelerini kendisi verebilir. Bu durumda yapacak bir şey yoktur. Çoğu zaman f fonksiyonu $y = f(x)$ eşitliği ile verilir. O zaman eşitliği anlamlı yapan x lerin kümesi D_f yi ve en az bir x için $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan y lerin kümesi de R_f yi oluşturacaktır.

f, bir problemde sözel olarak ifade edilmişse önce f nin kuralı bulunur, daha sonra f nin tanım ve değer kümeleri probleme göre belirlenir.

ÖRNEK 1

Verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 7x}$ ***c)*** $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ ***e)*** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

ÇÖZÜM

Verilen bütün fonksiyonlar $y = f(x)$ biçiminde verildiğinden tanım kümesi için $y = f(x)$ i sağlayan x leri, görüntü kümesi için de aynı eşitliği anlamlı yapan y leri araştıracağız.

a) Negatif sayıların kareköklerinin olmadığını biliyoruz. $y = \sqrt{x - 1}$ eşitliğinde $x - 1 < 0$ olamaz, olursa eşitlik anlamsız olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} D_f &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq 0 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \} \\ &= [1, \infty) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de görüntü kümesini bulalım. $\sqrt{x - 1}$ önüne eksi işareti gelmedikçe negatif olamaz. $x \geq 1$ için $y = \sqrt{x - 1} \geq 0$ olur ki bu

$$R_f = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \} = [0, \infty)$$

demektir.

b) Aranan tanım kümesi $y = \dfrac{x - 3}{x^2 - 7x}$ eşitliğini anlamlı yapan x lerin kümesidir. $\dfrac{A}{0} = \infty$ ve sonsuzun bir gerçel sayı olmadığını biliyoruz.

Bu eşitlikte paydayı 0 yapan x ler için eşitlik anlamsız olacağından

$$\begin{aligned} D_f &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x \neq 0 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x(x - 7) \neq 0 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ ve } x \neq 7 \} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{0, 7\} = (-\infty, 0) \cup (0, 7) \cup (7, +\infty) \end{aligned}$$

olur. Görüntü kümesi kolayca bulunamaz.

Çoğu zaman görüntü kümesini analitik yoldan elde etmek kolay değildir. Ancak grafiği çizilerek kolayca belirlenebilir.

c) $y = \dfrac{x - 2}{x + 2}$ fonksiyonunun tanım kümesinin $D_f = \mathbb{R} \setminus \{ -2 \}$ olduğu kolayca görülebilir. Şimdi bu eşitliği anlamlı yapan y lerin kümesini bulalım. $y = \dfrac{x - 2}{x + 2}$ eşitliğinden x i çekersek

$$(x+2)\,y = x-2 \;\Rightarrow\; xy + 2y = x - 2$$
$$\Rightarrow\; xy - x = -2y - 2$$
$$\Rightarrow\; x\,(y-1) = -2\,(y+1)$$
$$\Rightarrow\; x = \frac{2\,(1+y)}{1-y}$$

olur. $y \neq 1$ için $x = \dfrac{2\,(1+y)}{1-y}$ eşitliği anlamlı olacağından

$$R_f = \{\, y \in \mathbb{R} \mid y \neq 1 \,\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

olur.

d) Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 1 \neq 0$ olduğundan $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ her $x \in \mathbb{R}$ için anlamlıdır. $D_f = \mathbb{R}$ olur. Diğer taraftan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ olduğundan

$0 < y = \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$ olur. $R_f = (0,\ 1]$ dir.

e) $x = 1$ için

$f(1) = \dfrac{1^2 - 1}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ olur ve $\dfrac{0}{0}$ belirsiz olduğundan, $x = 1$ de $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, tanımsızdır. Yani $x \neq 1$ olan tüm x ler eşitliği anlamlı yapar. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dir.

$f(x)$ i tekrar yazarsak $x \neq 1$ için

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}\,(x+1)}{\cancel{x-1}} = x + 1$ dir. Böylece $x \neq 1$ için $f(x) = x + 1$ olur. $y = f(1) = 1 + 1 = 2$ olduğundan 1 e karşı gelen $y = 2$ yi $\mathbb{R}$ 'den çıkarırsak değer kümesini buluruz. $R_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dir.

Günlük hayatımızda bir değişkenin diğer bir değişkene bağlı olarak değiştiği durumlarla sık sık karşılaşırız. Örneğin; taksi ücreti, kat edilen km ye bağlı olarak, alım satım vergisi alınan ya da satılan malın fiyatına bağlı olarak, dairenin alanı yarıçap uzunluğuna bağlı olarak, vs. ... değişir.

Genel olarak bir y değişkeninin bir x değişkenine bağlı olarak değiştiği her durum, kuralı y = f (x) olan bir fonksiyon tanımlar. Böylece fonksiyonlar ya bir **tablo** ile veya **grafik** ile ya da ***y = f (x)*** **denklemi** ile verilebilir. Biz daha çok son durum ile ilgileneceğiz.

Bir $f : D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği genellikle düzlemde bir eğridir.

Bir fonksiyonun grafiği $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan $(x\,,\,y)$ ikililerinin kümesi olarak tanımlanır.

AMAÇ 3 ***Bir fonksiyonun grafiğini çizebileceksiniz.***

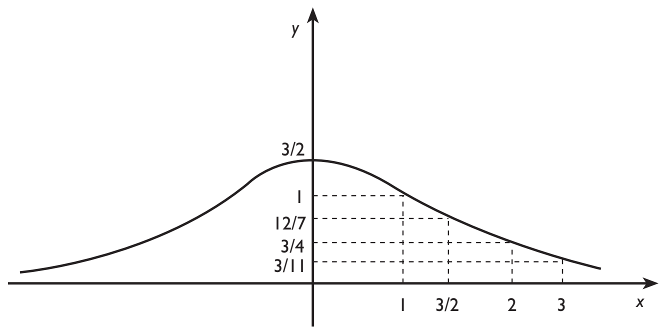
ÖRNEK 2

$f(x) = \dfrac{3}{2 + x^2}$ ***fonksiyonunun grafiğini çiziniz.***

ÇÖZÜM

Her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 2 \neq 0$ olur ve $D_f = \mathbb{R}$ dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $0 < f(x) = \dfrac{3}{2 + x^2} \leq \dfrac{3}{2}$ olduğundan $R_f = (0, 3/2]$ dür. $f(-x) = f(x)$ olduğundan grafik y - eksenine göre simetriktir. Grafiği $[0, +\infty)$ aralığındaki değerler için çizelim.

x	f (x)
0	3/2
1	1
2	3/4
3/2	12/7
3	3/11

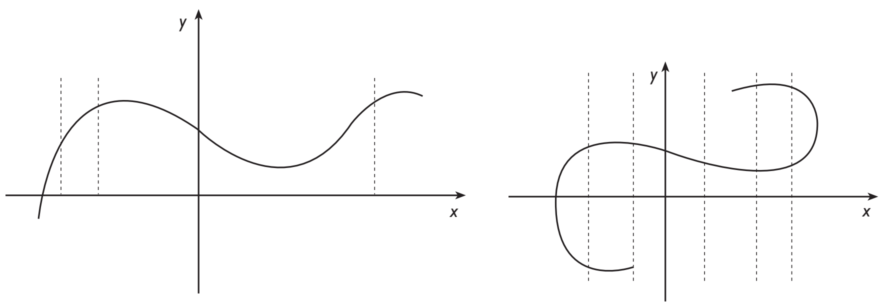


Şekil 4.4

olur.

Şimdi doğal olarak şu soru akla gelir: **Düzlemdeki her eğri bir fonksiyonun grafiği midir?** Bu sorunun yanıtı olumsuzdur. Düzlemdeki bir eğrinin, bir fonksiyonun grafiği olup olmadığı şöyle belirlenir: f nin tanım kümesindeki her noktadan y-eksenine paralel çizilen her doğru, verilen eğriyi en fazla bir noktada kesiyorsa bu eğri bir fonksiyonun grafiğidir. y-eksenine paralel çizilen bu doğrulardan en az biri grafiği iki ya da daha fazla noktada kesiyorsa, bu eğri bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği olamaz.

ÖRNEK 3



Şekil 4.5

y-eksenine paralel çizilen her doğru grafiği en fazla bir noktada keser. Eğri bir $y = f(x)$ ***fonksiyonunun grafiğidir.***

y-eksenine paralel çizilen doğrulardan bazıları grafiği bir ya da iki noktada keser. Eğri bir $y = f(x)$ ***fonksiyonunun grafiği değildir.***

Matematiksel Model Oluşturma

AMAÇ 4 ***Matematiksel model oluşturabileceksiniz.***

Şimdi verilen bir problemin matematiksel modelini çıkarma işlemi üzerinde duralım.

ÖRNEK 4

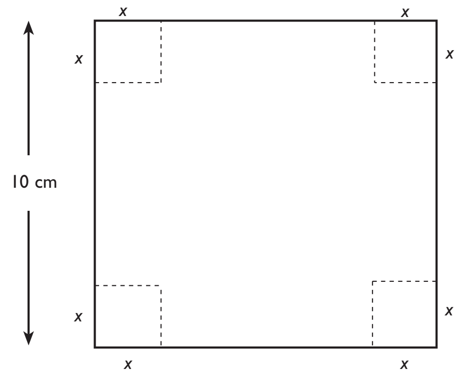
Kenar uzunluğu 10 cm olan karenin dört köşesinden x cm lik kareler çıkarılarak oluşturulan şeklin alanını y ile gösterelim.

a) y yi x in bir fonksiyonu olarak yazınız.

b) Oluşturulan $y = f(x)$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a)



Şekil 4.6

$$y = \begin{bmatrix} \text{kenar uzunluğu} \\ \text{10 cm olan} \\ \text{karenin alanı} \end{bmatrix} - 4 \,.\, \begin{bmatrix} \text{Kenar uzunluğu} \\ x \text{ cm olan} \\ \text{karenin alanı} \end{bmatrix}$$

$= 100 - 4 \,.\, x^2$ olduğundan

$y = f(x) = 100 - 4x^2$ olur.

b) Probleme göre x uzunluk olduğundan sıfırdan büyüktür ve x karenin kenar uzunluğunun yarısı olan 5 cm den büyük olamaz. Bu durum x i, $(0,5]$ aralığına kısıtlar. Oluşan şeklin alanı 0 dan büyük ve 100 cm^2 den küçük olacağı için (neden?) y ler de $[0,100)$ arasındadır. Bu nedenle fonksiyon

$$f : (0,5] \to [0,100) \ , \ y = f(x) = 100 - 4x^2$$

ile verilmek zorundadır. O halde f nin tanım kümesi $D_f = (0,5]$ ve görüntü kümesi $R_f = [0,100)$ alınmalıdır.

ÖRNEK 5

Bir firma A malını üretmek istiyor. Firmanın piyasa araştırma bölümünce yapılan araştırmalar sonucu, q_d = talep, F= fiyat olmak üzere, talep ile fiyat arasında

$$q_d = 500\ 000 - 50\ F$$

formülü çıkarılıyor. Gelir fonksiyonunu talep cinsinden ifade ediniz.

ÇÖZÜM

R = Gelir dersek, R = Fiyat x Talep = $F.\ q_d$ olur.

$q_d = 500\ 000 - 50\ F$ verilmişti, buradan F çekilirse,

$$F = \frac{500\ 000 - q_d}{50} = 10\ 000 - \frac{q_d}{50}$$

bulunur. Böylece

$$R(q_d) = q_d \cdot \left(10\ 000 - \frac{q_d}{50}\right)$$

$$= 10\ 000 q_d - \frac{q_d^2}{50}$$

bulunur. Burada fiyat ve talep negatif olamayacağından $q_d \geq 0$ ve $10\ 000 - \frac{q_d}{50} \geq 0$ yani $0 \leq q_d \leq 500\ 000$ olur. Sonuç olarak

$$R : [0,\ 500\ 000] \longrightarrow [0, \infty)\ ;\ R = 10\ 000\ q_d - \frac{1}{50}\ q_d^2 \text{ dir.}$$

ÖRNEK 6

Bir firma ürettiği her bir ürünü bir yıl boyunca a TL. den satıyor. Her bir ürün için bir yıl boyunca b TL. lik hammadde gideri ve c TL. lik işçi ücreti ödeniyor. Firmanın yıllık sabit giderleri d TL. dir. x satılan ürün sayısını göstermek üzere yıllık kâr fonksiyonunu x cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

R = Gelir $\qquad$ C = Maliyet (Yıllık)

K = Kâr (Yıllık) $\qquad$ olmak üzere;

Gelir = (satış fiyatı) . (satılan ürün sayısı) = ax

Maliyet = (hammadde + işçilik) (ürün sayısı) + Sabit giderler = $(b+c)\ x + d$

Kâr = Gelir - Maliyet

olduğunu düşünürsek

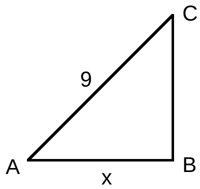
$$K(x) = R(x) - C(x)$$
$$= ax - [\ (b+c)\ x + d\ ] = (a-b-c)\ x - d$$

istenen kâr fonksiyonu olur.

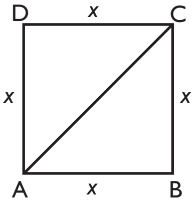
SIRA SİZDE 1

1. Boyutları 30 ve 20 olan dikdörtgen biçimli bir kartonun dört köşesinden kareler kesilerek üstü açık bir kutu oluşturulmak isteniyor. Bu kutunun hacmini veren bir fonksiyon bulunuz.

2.



Yandaki dik üçgende $f(x)$ "BC kenarının uzunluğu" ise $f(x)$ i x cinsinden ifade ediniz.

3. 

Yandaki karede
a) $f(x)$ "karenin çevresi";
b) $f(x)$ "karenin köşegeni"
c) f (x) "karenin alanı" ise $f(x)$ leri x cinsinden ifade ediniz.

4. Verilen fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ e) $f(x) = x^2 - 2x$

FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

AMAÇ 5 ***Fonksiyonların temel özelliklerini öğrenecek, bunları grafik çizimlerinde kullanabileceksiniz.***

Bu kesimde verilen fonksiyonların temel özellikleri tanımlanıp örneklerle açıklanacaktır.
$A, B \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: A \to B,\ y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

(i) Her $x_1, x_2 \in A$ için
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ veya denk olarak $f(x_1) = f(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ oluyorsa **f ye bire-bir (1-1) fonksiyon** denir.

(ii) Her $y \in$ B için $y = f(x)$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ varsa f ye örten fonksiyon denir. Bu durumda $f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \} = B$ olur.

(iii) $f(A) \subset B$ ise **f ye içine fonksiyon** denir.

(iv)
- Her $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ oluyorsa ***f* ye azalmayan (artan) fonksiyon** denir.
- $x_1 < x_2$ için $f(x_2) \leq f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$ oluyorsa **f ye artmayan (azalan) fonksiyon** denir.
- Bu koşullardan birini gerçekleyen bir fonksiyona **monoton fonksiyon** denir.

(v) Her $x \in A$ için $-x \in A$ ve
- $f(-x) = f(x)$ oluyorsa ***f* ye çift fonksiyon** denir.
- $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa ***f* ye tek fonksiyon** denir.

(vi) Bir $T > 0$ sayısı ve her $x \in A$ için $x + T \in A$ ve $f(x + T) = f(x)$ oluyorsa ***f* ye periyodik fonksiyon** denir. ***T* ye de bir periyot** denir.

$f: A \to B,\ y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

Grafiğini çizebildiğimiz bir fonksiyonun 1-1, örten, artan, azalan, çift, tek ve/veya periyodikliği aşağıdaki biçimde araştırılabilir.

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ ve

- *Her $y \in B$ noktasından x- eksenine paralel olarak çizilen bir doğru fonksiyonun grafiğini **en fazla bir noktada** kesiyorsa fonksiyon **bire-bir** dir.*
- *Her $y \in B$ noktasından x- eksenine paralel olarak çizilen bir doğru fonksiyonun grafiğini **en az bir noktada** kesiyorsa fonksiyon **örten** dir.*
- *x- ekseni üzerinde A nın en solundan başlayarak sağa doğru hareket edildiğinde fonksiyonun grafiği **daima yukarı doğru (aşağı doğru)** hareket ediyorsa fonksiyon **artan (azalan)** dır. **Bir aşağı bir yukarı** hareket ediyorsa grafik ne artan **ne de azalandır.***

- *Fonksiyonun grafiği* ***y- eksenine (orijine) göre simetrik*** *ise* ***fonksiyon çift (tek)*** *' tir.*
- *Fonksiyonun grafiği* ***belli aralıklar boyunca aynen tekrarlanıyorsa fonksiyon periyodik*** *dir.*

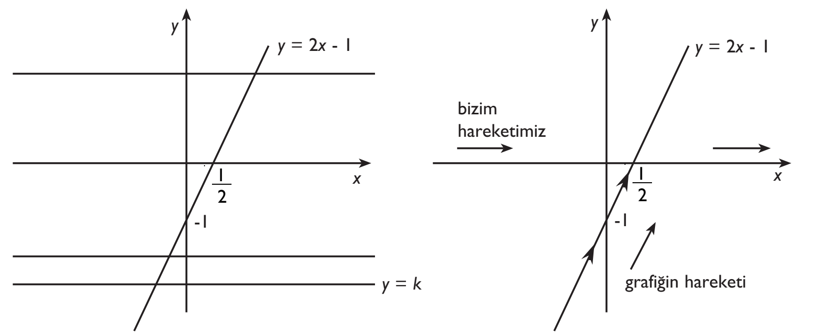
ÖRNEK 7

Verilen fonksiyonların tanımlı oldukları aralıkta bire-bir, örten, artan, azalan, tek ve/veya çift olup olmadıklarını araştırınız.

a) $y = 2x - 1$ ***b)*** $y = \frac{x^2}{2} - 2$

ÇÖZÜM

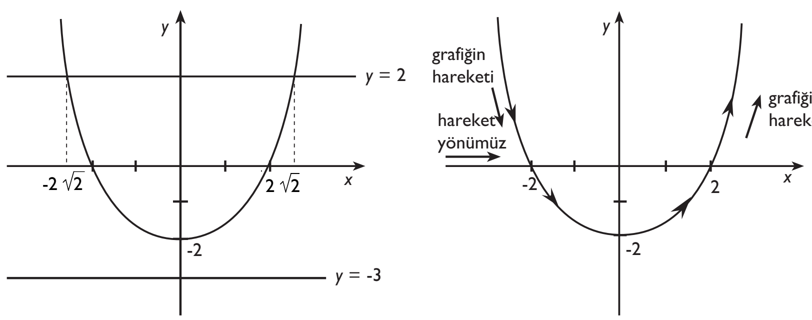
a) $y = 2x - 1$ doğrusunun grafiğini hemen çizebiliriz.



Şekil 4.7

Şekilde görüldüğü gibi x- eksenine paralel çizilen her doğru, $y = 2x - 1$ doğrusunu bir ve yalnız bir noktada kesiyor ve x - ekseni üzerinde soldan sağa hareket ettiğimizde grafik yukarı doğru hareket ettiğinden $y = 2x - 1$ fonksiyonu bire-bir örten ve artandır. Grafik y - eksenine ve orijine göre simetrik olmadığından tek veya çift olmaz.

b) $y = \frac{x^2}{2} - 2$ parabolünün grafiğini çizelim



Şekil 4.8

Grafikten de görüldüğü gibi $-\infty < k < -2$ olmak üzere x - eksenine paralel olan $y = k$ doğrularının hiçbiri $y = \frac{x^2}{2} - 2$ parabolünü kesmez, fonksiyon $\mathbb{R}$ ye örten değildir. Yine $-2 < k < +\infty$ olmak üzere $y = k$ doğruları grafiği her defasında iki noktada keserler. Bu $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$ nin bire-bir olmadığını gösterir.

İkinci şekilde x - ekseni üzerinde soldan sağa hareket ettiğimizde $(-\infty, 0)$ aralığında grafik aşağı doğru hareket eder (azalandır). $(0, \infty)$ aralığında ise grafik yukarı doğru hareket eder (artandır). O halde $\mathbb{R}$ nin bütününde grafik önce azalıyor sonra artıyor. $y = \frac{x^2}{2} - 2$ fonksiyonu **ne artandır ne de azalandır.**

Son olarak grafik y - eksenine göre simetrik olduğundan $y = \frac{x^2}{2} - 2$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

FONKSİYONLARLA YAPILAN CEBİRSEL İŞLEMLER

AMAÇ 6 *Fonksiyonlar üzerinde işlemler öğrenip uygulayabileceksiniz.*

Bu kesimde, verilen iki (ya da daha fazla) fonksiyondan yararlanarak yeni fonksiyonlar tanımlamanın değişik yollarından bahsedeceğiz.

$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

olarak tanımlanır.

ÖRNEK 8

$\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlanan $f(x) = 2x - 3$ ve $g(x) = x^2 + 1$ fonksiyonları verilsin.

a) $f + g$ **b)** $f - g$ **c)** $f \,.\, g$ **d)** $\frac{f}{g}$

fonksiyonlarını oluşturunuz.

ÇÖZÜM

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x - 3 + x^2 + 1 = x^2 + 2x - 2$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2x - 3 - (x^2 + 1) = -x^2 + 2x - 4$

c) $(f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x) = (2x - 3) \,.\, (x^2 + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

d) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$

ÖRNEK 9

$f(x) = \frac{x}{1 - x}$ ise $\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] = f(x^2)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1 - x} + \frac{-x}{1 - (-x)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{\underset{(1 + x)}{1 - x}} - \frac{x}{\underset{(1 - x)}{1 + x}}\right]$$

$$= \frac{(1 + x)\,x - x(1 - x)}{2\,(1 - x^2)} = \frac{2x^2}{2\,(1 - x^2)} = f(x^2)$$

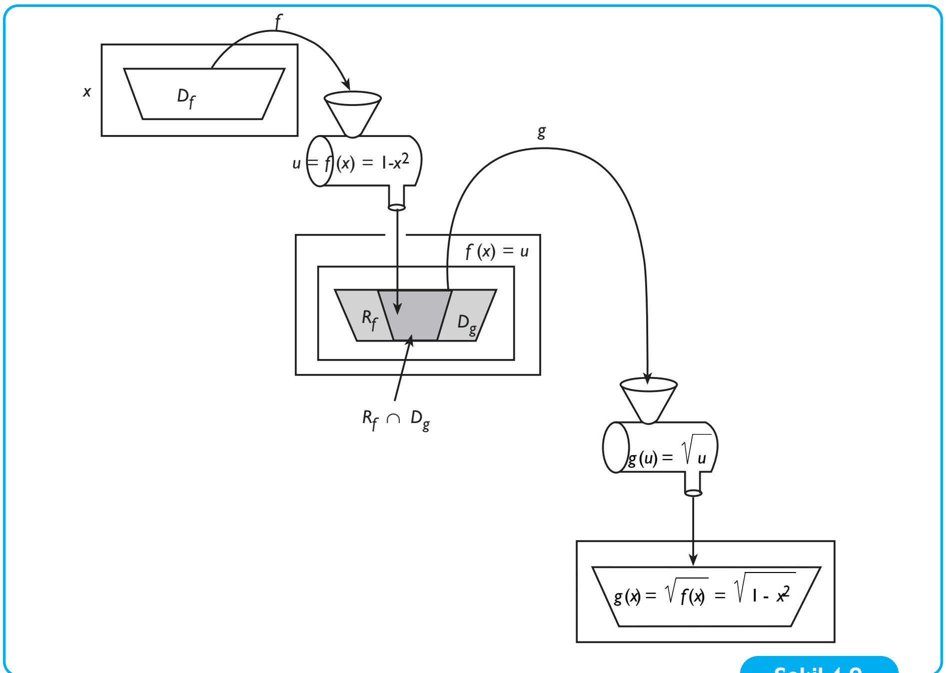
olur.

Bileşke Fonksiyon

Daha önce bir fonksiyonu bir girdi-çıktı makinesi olarak vermiştik. Çoğu zaman bir fonksiyon, bir başka fonksiyonun çıktısını girdi olarak alır ve kendi çıktısını bunu kullanarak oluşturur.

Örneğin;

$y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonunda $u = f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonunun çıktısı olan $1 - x^2$ nin karekökü alınmaktadır. Bunu şematik olarak gösterirsek



Şekil 4.9

olacaktır.

Bunu daha iyi kavrayabilmek için fonksiyon tanımlamamızın başındaki hesap makinesi örneğine dönelim. Bir hesap makinesinin üzerindeki fonksiyon tuşlarının her biri birer fonksiyon oluşturuyordu.

$\frac{1}{x}$ tuşuna "ters alma fonksiyonu" ve $\sqrt{x}$ tuşuna da "karekök alma" fonksiyonu diyebiliriz. Önce 9 a sonra $\frac{1}{x}$ tuşuna basarsak ekranda $\frac{1}{9}$ görürüz. Arkasından direkt olarak $\sqrt{x}$ tuşuna basılırsa ekranda bu defa $\frac{1}{3}$ yer alacakdır.

Kısaca önce ters alma fonksiyonu, onun sonucuna da karekök fonksiyonunu uygularsak

$$9 \xrightarrow{\text{ters alma}} \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{karekök alma}} \frac{1}{3} = 0.\overline{3}$$

elde edilir.

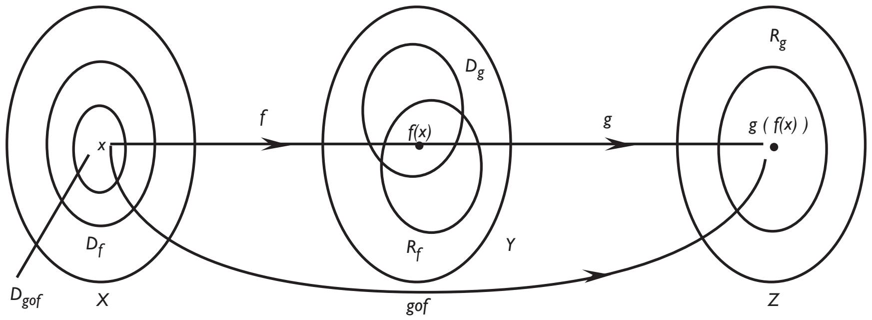
Şimdi iki fonksiyonun bileşkesini formal olarak tanımlayalım.

f ve g herhangi iki fonksiyon olsunlar. $f(x)$, g nin tanım kümesi içinde olmak üzere, f nin tanım kümesindeki her x için

$$(gof)\,(x) = g\,(\,f(x)\,)$$

olarak tanımlanan gof fonksiyonuna f ile g nin bileşke fonksiyonu denir.

Bu durumda $D_{gof} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}$ olacağı açıktır.



Şekil 4.10

ÖRNEK 10

$f(x) = 2x - 3$ ***ve*** $g(x) = x^2 + 1$ ***fonksiyonları için fog ve gof bileşke fonksiyonlarını hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

eşitliğinin sağ yanı "**f fonksiyonunda x gördüğün yere $g(x)$ i yaz**", demektir. Buradan

$$f(g(x)) = 2(g(x)) - 3 = 2 \,.\, (x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (2x - 3)^2 + 1$$
$$= 4x^2 - 12x + 9 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$$

bulunur.

Bu örnekte olduğu gibi genellikle $fog \neq gof$ dir.

ÖRNEK 11

$\sqrt[3]{\dfrac{1}{1 + x^2}}$ ***ifadesini üç ayrı fonksiyonun bileşimi olarak gösteriniz.***

ÇÖZÜM

Girdiye x diyelim ve x in girdisini alalım. Önce, $1 + x^2$ çıktısını hesaplayalım, sonra çıktının çarpımsal tersini alalım. Böylece $\dfrac{1}{1 + x^2}$ elde edilir.

Son olarak çıkan sonucun küp kökünü alalım. Böylece $\sqrt[3]{\dfrac{1}{1 + x^2}}$ fonksiyonu elde edilir. Buradan;

$u = f(x) = 1 + x^2$, $v = g(u) = \dfrac{1}{u}$ ve $y = h(v) = \sqrt[3]{v}$ alınırsa

$$y = h(g(f(x))) = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + x^2}}$$

olur.

ÖRNEK 12

$f(x) = x^3 + 3x + 6$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ ***olmak üzere*** $g(f(2)) = ?$

ÇÖZÜM

$f(2) = 2^3 + 3 \,.\, 2 + 6 = 8 + 6 + 6 = 20$

$g(f(2)) = g(20) = \dfrac{20}{1+20} = \dfrac{20}{21}$

bulunur.

Ters Fonksiyon

AMAÇ 7

Verilen bir fonksiyonun tersinin var olup olmadığını araştıracak ve var olanların tersini bulabileceksiniz.

Bir f fonksiyonu bire-bir ise görüntü kümesindeki herhangi bir y sayısına f nin tanım kümesinden $y = f(x)$ eşitliğini sağlayan (diğer bir deyişle $y = f(x)$ denkleminin çözümü olan) bir tek x karşılık gelir. x , y tarafından tek olarak belirlendiğinden x, y nin bir fonksiyonudur. Bu durumda

$x = f^{-1}(y)$

yazılır ve f^{-1} fonksiyonuna **f nin ters fonksiyonu** denir.

Genellikle bir fonksiyonun tanım kümesinin değişkeni olarak y yerine x tercih edildiğinden $x = f^{-1}(y)$ eşitliğinde x ile y değiştirilip ters fonksiyon tanımı şu şekilde verilebilir.

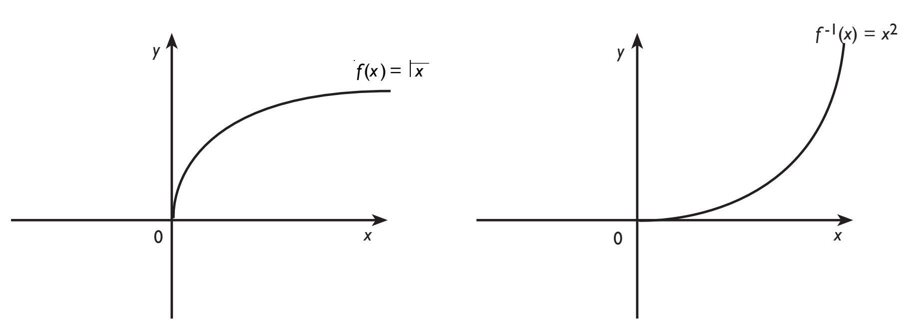
f bire-bir ise f^{-1} ters fonksiyonu vardır. $f^{-1}(x)$ in değeri f nin tanım kümesi içinde, $f(y) = x$ eşitliğini sağlayan bir tek y sayısıdır. Yani

$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$

dir.

Örneğin; $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ dan, $[0, +\infty)$ a bire -birdir.

Tersi vardır ve bu fonksiyon $y = \sqrt{x}$ de x ile y yer değiştirilip çözülerek $x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = f^{-1}(x) = x^2$ biçiminde bulunur. $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$ denkliğinden, bu denklemlerden biri diğerinin yerine alınabilir.Böylece bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki şekildeki gibi



Şekil 4.11

olur.

Bire-bir bir fonksiyonun terside bire-bir olacağından, tersinin de tersi vardır ve bu f ye eşittir. Gerçekten

$$y = \left(f^{-1}\right)^{-1} = f(x)$$

olur. $y = f^{-1}(x)$, $x = f(y)$ denklemlerinden biri diğerinin yerine alınabileceğinden her $y \in D_{f^{-1}}$ ve her $x \in D_f$ için

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

eşitlikleri elde edilir.

Kesin artan (ya da azalan) bir f fonksiyon bire-bir olacağından, görüntü kümesinden tanım kümesine tanımlı bir f^{-1} tersi vardır.

- *f nin tersi varsa tektir.*
- *f nin tersi bulunurken iki yol izlenir.*

1. YOL: *$y = f(x)$ den direkt olarak x çekilir. Çıkan $x = g(y)$ ifadesinde x yerine $f^{-1}(x)$, y yerine x yazılır.*

2. YOL: *$y = f(x)$ ifadesinde x ile y nin yeri değiştirilir, yani $x = f(y)$ yazılır ve bu eşitlikten y çekilir, bulunan y, $f^{-1}(x)$ i verir.*

- *Ters fonksiyonunun grafiği iki yolla çizilebilir.*

1. YOL: *f nin tersi bulunur ve onun grafiği çizilir.*

2. YOL: *f fonksiyonunun grafiği çizilir. Çizilen grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği* f^{-1} in grafiği olur.

ÖRNEK 13

Verilen fonksiyonların bire-bir olduklarını saptayınız, terslerini bulunuz ve çiziniz.

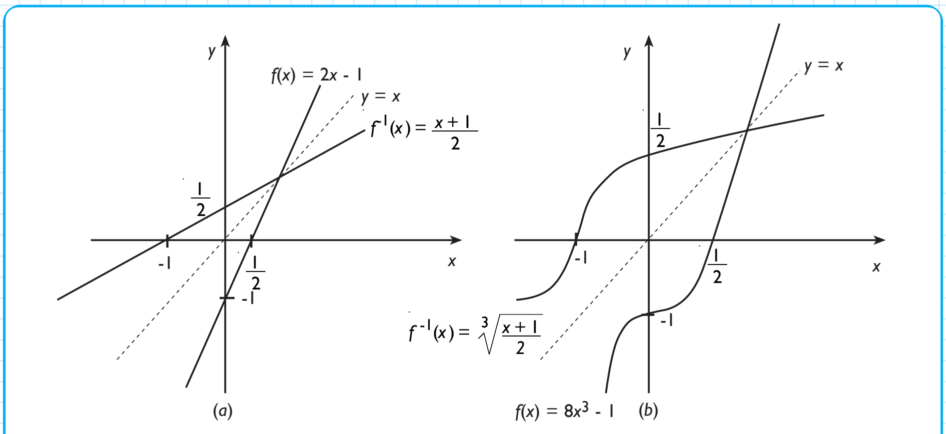
a) $f(x) = 2x - 1$ ***b)*** $f(x) = 8x^3 - 1$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonu monoton artan olduğundan tersi vardır. Şimdi tersini iki yolla bulalım.

1. YOL: $y = 2x - 1$ den x i çekersek $x = \dfrac{y+1}{2}$ bulunur.

x yerine $f^{-1}(x)$ ve y yerine x yazılırsa $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$ olarak bulunur.



Şekil 4.12

2. YOL: $y = 2x - 1$ de önce x ile y nin yerini değiştirelim. Bu durumda $x = 2y - 1$ elde edilir. Buradan y yi çekersek

$$x = \frac{y+1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

bulunur (Şekil (4.11 (a)).

b) $f(x) = 8x^3 - 1$ daima artan olduğundan tersi vardır.

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$$ olur (Şekil 4.11 (b)).

SIRA SİZDE 2

1. Verilen fonksiyonların bire-bir, örten, artan ve/veya azalan olup olmadıklarını araştırınız.

a) $f(x) = x^3 - x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & ; \quad x < 0 \\ x^2 & ; \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x+2 & ; \quad x > 2 \end{cases}$

d) $y = \sqrt{x^2 - x}$

2. Verilen fonksiyonlar için bileşke fonksiyonlarını bulunuz.

a) $f(x) = 3x^2 - 5x$, $g(x) = 1 - 3x$ için

(i) fog (ii) gof (iii) fof

b) $f(x) = x^3 - x$; $g(x) = \sqrt{2x-1}$

(i) fog (ii) gof

3. Verilen fonksiyonların terslerini bulunuz.

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

b) $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$; $f(x) = (x-1)^2 + 1$

c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$

4. $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2}$ fonksiyonları veriliyor. Aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $f(3) - g(2)$ b) $\dfrac{f(5)}{1+g(3)}$ c) $f(t+1)$ d) $g(t)$

5. **a)** $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ ise $f(x) + f(-x) = 2\,f(-x^2)$ olduğunu gösteriniz.

b) $f(x) = x\ (x+1)$ ise $f(x+h) - f(x) = h(2x + 1 + h)$ olduğunu gösteriniz.

FONKSİYON TÜRLERİ

AMAÇ 8 *Fonksiyonları sınıflandırabileceksiniz.*

Şimdi, orta öğrenim yıllarında görmüş olduğunuz belli başlı fonksiyon türlerini ve bunların grafiklerini verelim.

I) $a_n \neq 0$ ve a_0 , a_1 , ... a_{n-1} , $a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

biçimindeki bir fonksiyona **n-inci dereceden bir polinom fonksiyonu** denir.
Özel olarak

- $n = 0$ ise $f(x) = a$ fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir.
- $n = 1$ ise $f(x) = ax + b$ fonksiyonuna **doğrusal fonksiyon** denir. Burada $a = 1$, $b = 0$ ise $f(x) = x = I(x)$ ile gösterilir ve **birim fonksiyon** adını alır.
- $n = 2$ ise $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonuna **ikinci derece fonksiyon** denir.
- $n = 3$ ise $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonuna **kübik fonksiyon** denir.

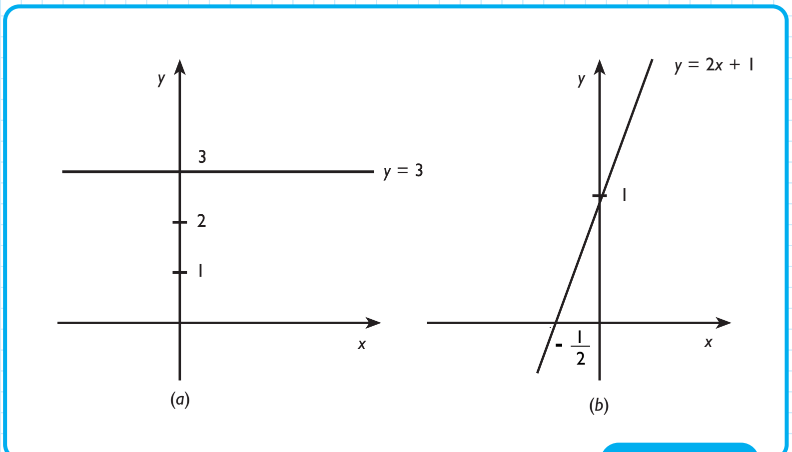
ÖRNEK 14

Verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = 3$ ***b)*** $y = 2x + 1$ ***c)*** $y = x^2 - x - 2$ ***d)*** $y = x^3 - x$

ÇÖZÜM

a) x - eksenine paralel olan y- eksenini 3 noktasında kesen doğrudur ((Şekil 4.13 (a))



Şekil 4.13

b) y ve x eksenlerini sırasıyla

$x = 0$ için $y = 2 \,.\, 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1)$

$y = 0$ için $0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

noktalarında kesen doğrudur (Şekil 4.13 (b))

c) y ve x eksenlerini sırasıyla

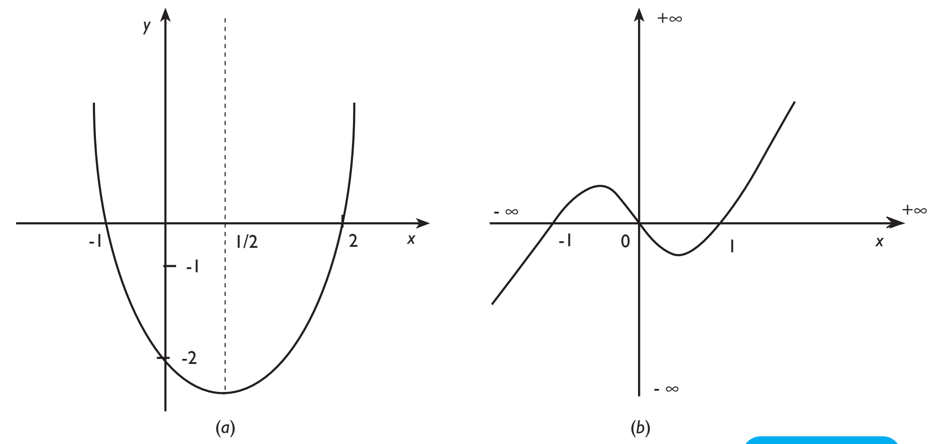
$x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow (0, -2)$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$

$\Rightarrow (-1 , 0) \ , \ (2 , 0)$

noktalarında kesen simetri ekseni $x = \frac{1}{2}$ doğrusu olan bir paraboldür (Şekil 4.14 (a)).



Şekil 4.14

d) $y = 0 \Rightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -1 \ , \ x_2 = 0, \ x_3 = 1$

olmak üzere x-eksenini (-1, 0), (0, 0) ve (1, 0) da kesen

$x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$

olan bir grafiği vardır, (Şekil 4.14 (b)).

I) f ve g sırasıyla n - yinci ve m - yinci dereceden polinomlar olsunlar.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

biçiminde bir fonksiyona **rasyonel fonksiyon** denir.

ÖRNEK 15

a) $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$ ***b)*** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

rasyonel fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{ -2 \} \to \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} , \quad f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$

olduğunu daha önce görmüştük.

Eksenleri kestiği noktaları bulalım. Grafiğin y - eksenini kestiği nokta

$$x = 0 \text{ için } \quad y = \frac{0 - 2}{0 + 2} = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

dır. x - eksenini kestiği nokta ise

$y = 0$ için $\dfrac{x-2}{x+2} = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$

olarak bulunur. Birkaç yardımcı nokta verirsek grafiği kabaca çizebiliriz.

$x = -3$ için $f(-3) = \dfrac{-3-2}{-3+2} = 5$

$x = 1$ için $f(1) = \dfrac{1-2}{1+2} = -1/3$

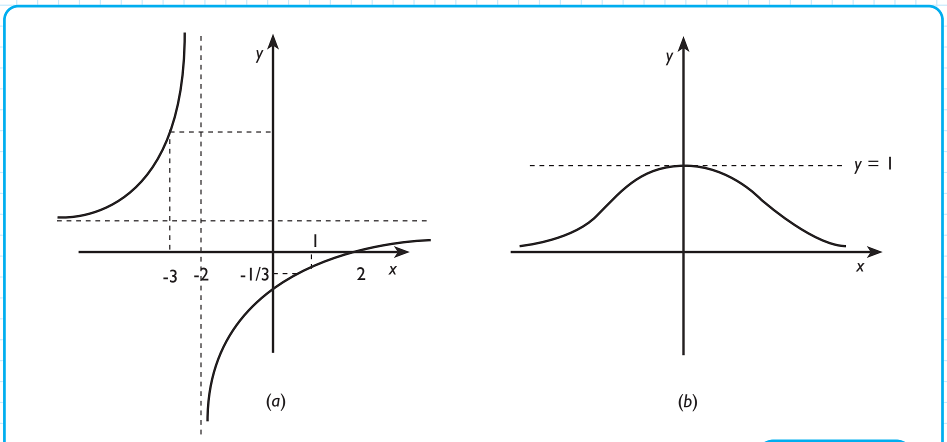
bulunur.

$x \to -\infty \Rightarrow y \to 1$

$x \to +\infty \Rightarrow y \to 1$

olur.

x	$-\infty$	-3	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	1	5	-1	-1/3	0	1



Şekil 4.15

b) $x \in R$ iken $0 < y \leq 1$ idi. Grafik x - ekseni ($y = 0$ doğrusu) ile $y = 1$ doğrusu arasındadır.

$x \to \pm\infty$ iken $y \to 0$ olacağından grafik yukarıdaki gibidir.

III) Parçalı Tanımlı Fonksiyon

Özel olarak veya zorunlu olarak bazı durumlarda fonksiyon, tek bir eşitlikle değil, tanım kümesi parçalara ayrılıp her bir parçada farklı bir eşitlikle verilebilir. Bu tür fonksiyonlara **parçalı tanımlı** ya da kısaca **parçalı fonksiyon** denir.

Günlük yaşamımızda parçalı tanımlı fonksiyonları çok sayıda örnek verebiliriz.

ÖRNEK 16

T C Posta İdaresi'nce ağırlığı 0 ile 2 kg arasında değişen mektup veya kolinin Türkiye'den İngiltere'ye gönderilme ücreti aşağıdaki fonksiyonla verilebilir (x gram y Türk Lirası olmak üzere).

$$y = f(x) = \begin{cases} 200.000 \ ; \ 0 < x < 20 \\ 300.000 \ ; \ 20 \leq x < 50 \\ 400.000 \ ; \ 50 \leq x < 100 \\ 900.000 \ ; \ 100 \leq x < 250 \\ 1.700.000 \ ; \ 250 \leq x < 500 \\ 3.000.000 \ ; \ 500 \leq x < 1000 \\ 4.700.000 \ ; \ 1000 \leq x < 2000 \end{cases}$$

- ***Bulunduğunuz şehirdeki taksilerdeki taksimetre tarifini km'ye, TL. karşılık getiren parçalı fonksiyon biçiminde yazınız.***
- ***Bulunduğunuz şehrin belediyesi tarafından düzenlenen m³'e TL. karşılık getiren su fiyatları için bir parçalı fonksiyon yazınız.***

ÖRNEK 17

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \ ; \ x \leq 3 \\ x-2 \ ; \ 3 < x \leq 4 \\ 5 - x \ ; \ x > 4 \end{cases}$$ ***parçalı fonksiyonu için***

a) $f(2)$, $f\left(\frac{7}{2}\right)$, $f(6)$ ***değerlerini hesaplayınız***

b) Grafiğini çiziniz.

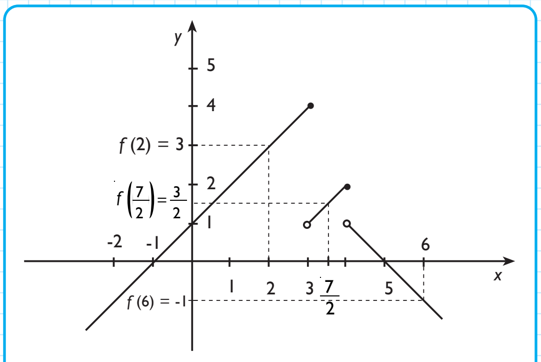
ÇÖZÜM

a) $x = 2 < 3 \ \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$

$3 < x = \frac{7}{2} < 4 \ \Rightarrow f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} - 2 = \frac{3}{2}$

$x = 2 > 4 \ \Rightarrow f(6) = 5 - 6 = -1$

b)



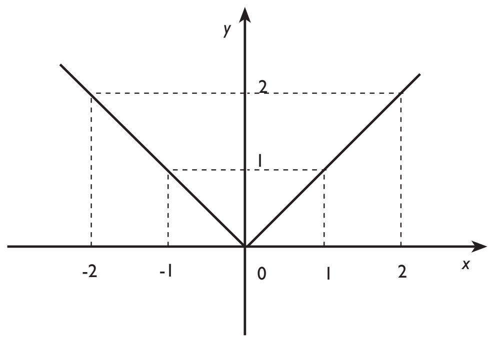
Şekil 4.16

IV) Salt (Mutlak) Değer Fonksiyonu

Bir x gerçel sayısının mutlak değerinin $|x| = \begin{cases} -x \; ; & x < 0 \\ 0 \; ; & x = 0 \\ x \; ; & x > 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlandığını biliyoruz.

$s : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \; ; \; s(x) = \begin{cases} -x \; ; & x < 0 \\ 0 \; ; & x = 0 \\ x \; ; & x > 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlı s fonksiyonuna salt (mutlak) değer fonksiyonu denir.

Bu fonksiyonun grafiği $x \in (-\infty, 0)$ da $s(x) = -x$; $x = 0$ için $s(x) = 0$; $x \in (0, \infty)$ için $s(x) = x$ grafikleri çizilerek aşağıdaki gibi oluşturulur.



Şekil 4.17

Ömer Hayyam (1048 - 1122)

Bir parabol ile bir çemberi kesiştirerek 3. dereceden bir polinom denklemin çözümü için geometrik bir yöntem bulmuştur.

Sevgili seninle ben pergel gibiyiz:
İki başımız var, bir tek bedenimiz.
Ne kadar dönersem döneyim çevrende:
Er geç baş başa verecek değil miyiz?
Ö. HAYYAM

"Biraz da şair olmayan bir matematikçi, hiçbir zaman tam bir matematikçi olamaz."
Karl WEIERSTRASS

Kendimizi Sınayalım

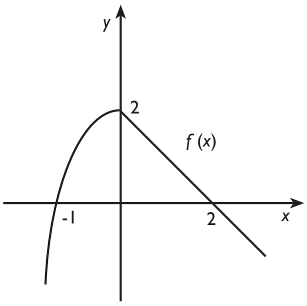
1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $[-2, 3]$
b. $[-3, 2]$
c. $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$
d. $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
e. $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

2. $f(x) = \sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
b. $(-\infty, 3)$
c. $(-\infty, -1]$
d. $[-1, +\infty)$
e. $[3, +\infty)$

3. Verilen grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine aittir?



a. $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x^2 & ; \ x < 0 \\ 2 - 2x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

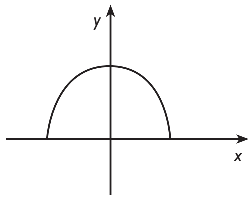
b. $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x^2 & ; \ x < 0 \\ 2 - x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

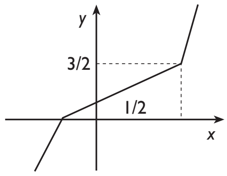
c. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & ; \ x < 0 \\ 2 - 2x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

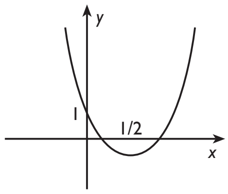
d. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; \ x < 0 \\ 2 - x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

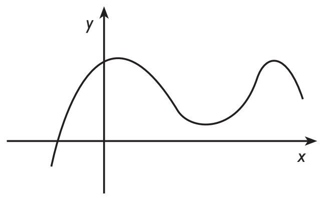
e. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & ; \ x < 0 \\ 2 - x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

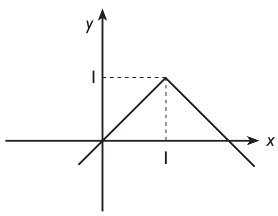
4. Aşağıdakilerden hangisi 1-1 fonksiyondur?

a.


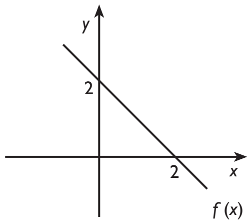
b.


c.


d.


e.


5. Aşağıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?



a. $x - y = 2$
b. $y - x = 2$
c. $x + y = 2$
d. $x + y = -2$
e. $x - 2y = 2$

6. $f(3x+1) = x-2$ ise, $y = f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a. $y = \frac{1}{3}(x-7)$

b. $y = \frac{x+1}{3} + 2$

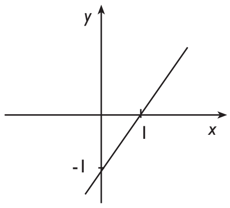
c. $y = \frac{x-6}{3}$

d. $y = \frac{x-5}{3}$

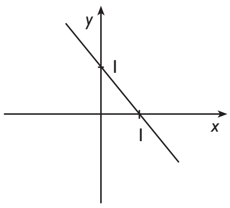
e. $y - x = 2$

7. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangisinin grafiği tersinin grafiği ile aynıdır.

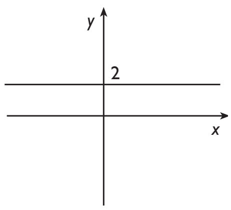
a.



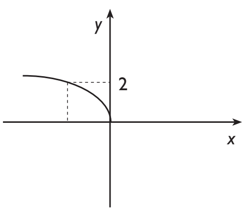
b.



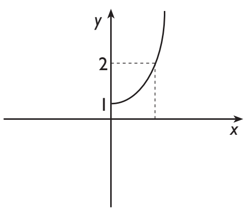
c.



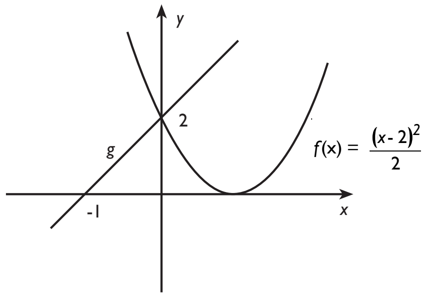
d.



e.



8.



Yukarıda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre $y = (gof)(x)$ bileşke fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $y = \frac{x^2}{2}$

b. $y = \frac{(x-2)^2}{2} + 2$

c. $y = \frac{(x+2)^2}{2}$

d. $y = \frac{(x-2)^2 + 2}{2}$

e. $y = (x-2)^2 + 2$

9. $f(x) = \frac{3x-1}{|x-2| - 4}$ fonksiyonun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

b. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

c. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 6\}$

d. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

e. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

10. $x f(x) + 2 = x + 3f(x)$ olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\frac{x-2}{x-3}$

b. $\frac{x+2}{x-3}$

c. $\frac{-3x+2}{-x-1}$

d. $\frac{3x-2}{x-1}$

e. $\frac{3x-2}{1-x}$

11. $f(x) = \dfrac{(x-3)^3}{4}$ fonksiyonunun $f^{-1}(x)$ ters fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\sqrt[3]{4x-3}$

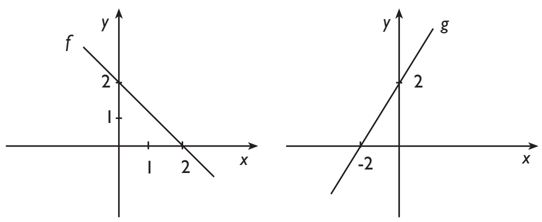
b. $3 - \sqrt[3]{4x}$

c. $\sqrt[3]{x-4} + 3$

d. $3 + \sqrt[3]{4x}$

e. $\sqrt[3]{x-7}$

12.



Yukarıda grafikleri verilen f ve g fonksiyonları için $(gof)(2)$ sayısı kaçtır?

a. -4
b. -2
c. 0
d. 2
e. 4

Biraz Daha Düşünelim

1. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4}$

b) $f(x) = \sqrt{|x| - 3}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

2. Aşağıdaki f ve g fonksiyonları için fog ve gof'i fonksiyonlarını bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$
$g(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = |x|$
$g(x) = x + 3$

3. Aşağıdaki fonksiyonların varsa ters fonksiyonlarını bulunuz.

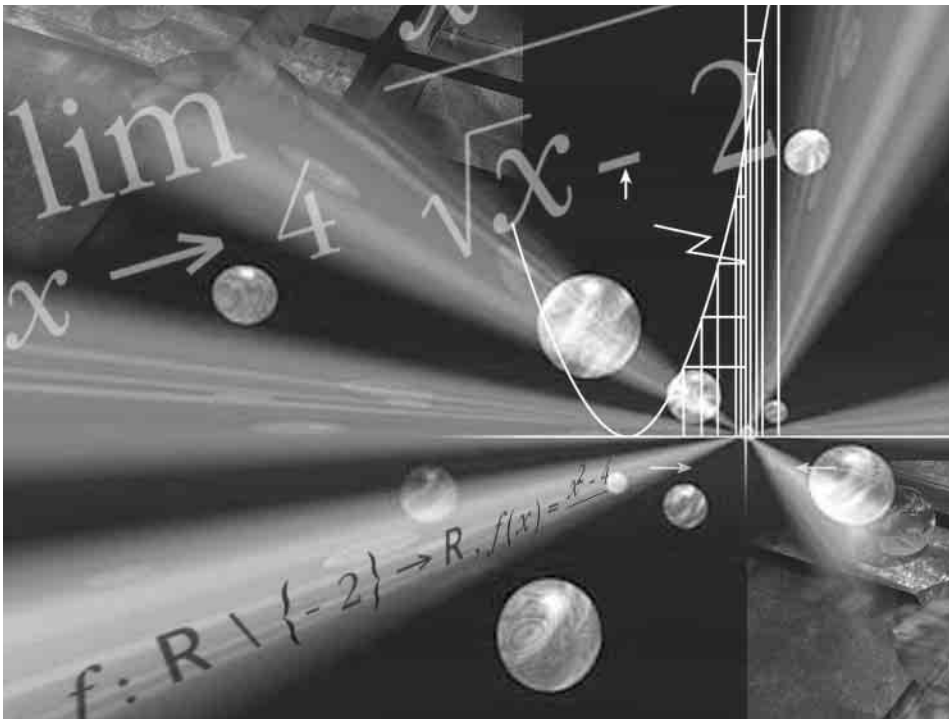
a) $f(x) = x + 2$

b) $f(2x-3) = \dfrac{x+1}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-5}$

d) $f(x) = 2x^3 - 1$

Limit ve Süreklilik 5



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *bir fonksiyonun, bir nokta civarındaki davranışını inceleyebilecek yani bu noktadaki limitini bulacak,*
- *bir fonksiyonun limitini daha kolay bulabilecek,*
- *fonksiyonun bir noktadaki limitini; bu noktaya sağdan ve soldan yaklaşan değerlerle bulacak,*
- *fonksiyonun bir noktadaki limiti ile bu noktadaki değeri arasındaki ilişkiyi karşılaştıracak,*
- *fonksiyonun en küçük ve en büyük değerinin olup olmadığını araştırabileceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***Yanınızda bir hesap makinesi bulundurunuz.***
- ***Örneklerde sizin yapmanızı istediğimiz işlemleri mutlaka yapınız.***
- ***Fonksiyonun grafiğini çizerek limitin ne anlama geldiğini grafikten görmeye çalışınız.***
- ***Bir noktada sürekli bir fonksiyonla, süreksiz fonksiyonun davranışları arasındaki farkı grafik üzerinde görmeye çalışınız.***

Giriş

Matematiğin, ekonomi ve diğer uygulamalı bilimlerde en çok kullanılan kavramları olan türev ve integral kavramları limit kavramı üzerine inşa edilmişlerdir. Matematikte başka kavramlara da anlam kazandıran limit kavramı, bu nedenlerden dolayı matematiğin en temel kavramlarından birisidir.

Biz bu ünitede, limit kavramını ve onunla çok yakından ilgili bir diğer önemli kavramı, sürekliliği inceleyeceğiz. İncelememizde sizler için gereksiz ve sıkıcı ayrıntılar içeren kesin matematiksel yaklaşım yerine sezgisel yaklaşıma ağırlık vereceğiz. Tanımları ve temel özellikleri belirli bir bütünlük içerisinde örneklerle açıklayacağız. Daha çok matematikçileri ilgilendiren teorik yaklaşımlara yer vermeyeceğiz.

LİMİT KAVRAMI

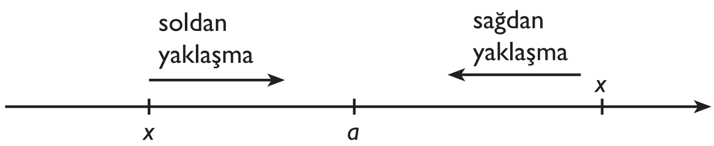
Daha önceki ünitelerde, tanım kümesi gerçel sayılar kümesinin bir alt kümesi olan bir fonksiyon verildiğinde, bu fonksiyonun tanım kümesine ait bir noktadaki değerini bulmak için bu sayıyı fonksiyon ifadesinde yerine yazıp gerekli işlemleri yapmamız gerektiğini görmüştük. Bu işlemleri yaparken zaman zaman hesap makinesine ihtiyaç duymanın ötesinde büyük bir zorlukla karşılaşmayız. Ancak fonksiyonlarla çalışırken x bağımsız değişkeni belirli bir sayıya yaklaşırken, $y = f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını, yaklaşıyorsa hangi sayıya yaklaştığını bilmek durumuyla da sık sık karşılaşırız. İşte bu soruna limit kavramıyla çözüm bulabilmekteyiz.

Limit kavramına geçmeden önce, x bağımsız değişkeninin verilen bir sayıya yaklaşmasının ne demek olduğunu açıklayalım. x değişken, a sabit olmak üzere x ve a gerçel sayılarını düşünelim. Eğer x değişkeni, a dan farklı ve a sayısına istenildiği kadar yakın değerler alıyorsa, diğer bir deyişle, x ile a arasındaki fark x değiştiğinde istenildiği kadar küçük bir sayıdan daha küçük kalıyorsa, x değişkeni a sayısına yaklaşıyor denir ve sembolik olarak $x \to a$ biçiminde gösterilir.

Eğer x değişkeni a ya a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa, bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma denir ve $x \to a^+$ biçiminde gösterilir; eğer x değişkeni a ya a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa, bu durumda da x değişkeni a ya soldan yaklaşıyor denir ve $x \to a^-$ biçiminde gösterilir.

Sayı doğrusu üzerinde, a dan büyük sayıların a nın sağındaki, a dan küçük sayıların ise a nın solundaki noktalarla temsil edildiğini hatırlayınız.

Aşağıdaki tabloda x değişkeninin 0 sayısına soldan, sağdan ve her iki yönden yaklaşmasına birer örnek verilmiştir.



x	x	x
-3	4	3
-2	3	1
-1	2	-1
-0,5	1	-0,2
-0,1	0,5	0,1
-0,01	0,2	0,01
-0,001	0,1	-0,01
-0,0001	0,001	0,0001
	0,0001	-0,001
	0,00001	0,00001
⋮	⋮	⋮
$x \to 0^-$	$x \to 0^+$	$x \to 0$

Bağımsız değişkenin sabit bir sayıya yaklaşmasını açıkladıktan sonra, asıl sorunumuzu ele alabiliriz. Sorunumuz, x bağımsız değişkeni, tanım kümesi içinde kalarak belirli bir a sayısına yaklaşırken $f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir L sayısına yaklaşıp yaklaşmadığını araştırmaktı. İncelememize başlamadan önce bir noktaya açıklık getirmemiz gerekmektedir.

İncelememizde, a sayısına yaklaşan x değerlerine karşılık gelen $f(x)$ değerleri söz konusu olduğundan, $f(x)$ değerlerinin anlamlı olabilmesi için a ya yaklaşan x değerlerinin fonksiyonun tanım kümesine ait olması gerekmektedir. Diğer bir deyişle a sayısı olarak ancak tanım kümesindeki elemanlarla istenildiği kadar yaklaşılabilen sayıların alınması zorunludur. Şimdi asıl problemimize dönelim.

Önce problemimize örneklerle açıklık getirmeye çalışalım. Örnek olarak, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonda x değişkeni 2 ye yaklaşırken $f(x)$ fonksiyon değerlerinin belirli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığına bakalım.

Aşağıdaki tabloda 2 ye 2 den küçük ve 2 den büyük değerlerle yaklaşan x değerlerine karşılık gelen $f(x)$ değerleri verilmiştir.

x	$f(x) = 2x - 3$
0	-3
1	- 1
1,5	0
1,7	0,4
1,9	0,8
1,99	0,98
1,999	0,998
1,9999	0,9998
⋮	⋮
$x \to 2^-$	$f(x) \to 1$

x	$f(x) = 2x - 3$
4	5
3	3
2,5	2
2,2	1,4
2,1	1,2
2,01	1,02
2,001	1,002
2,0001	1,0002
2,00001	1,00002
⋮	⋮
$x \to 2^+$	$f(x) \to 1$

Tablodaki örneğimize göre, hem $x \to 2^-$ ve hem de $x \to 2^+$ için fonksiyon değerleri 1 e yaklaşmaktadır. Siz de x e 2 ye yaklaşan başka örnek değerler vererek fonksiyon değerlerinin 1 e yaklaştığını görebilirsiniz. Bu örneklerimizi ne kadar çoğaltırsak çoğaltalım fonksiyon değerlerinin hep 1 sayısına yaklaştığını görürüz. İşte bu sayıya (yani 1 e) $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun 2 noktasındaki limiti denir ve sembolik olarak

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (2x - 3) = 1$$

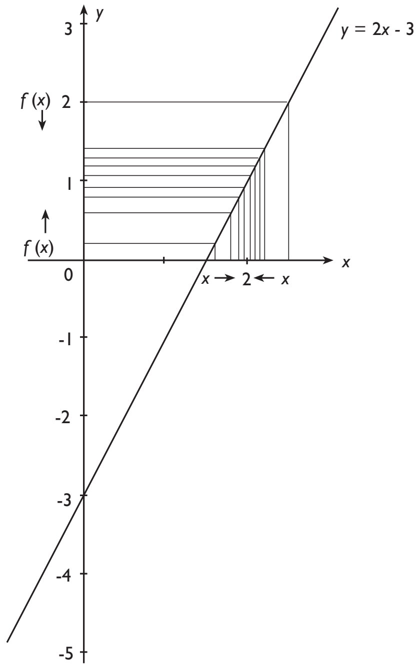
biçiminde gösterilir.

Bu durum bazen $x \to 2$ için $f(x) \to 1$ biçiminde de yazılır. Bunun anlamı: x değişkeni 2 ye (2 den farklı değerlerle) yaklaşırken fonksiyon değerleri 1 e yaklaşır demektir. Ayrıca;

$$\lim_{x \to 2} (2x - 3) = 1$$

olduğunu $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonunun aşağıdaki grafiğinden de açıkça görebilmekteyiz.

$x \longrightarrow 2$ iken x in her zaman 2 den farklı olacağını unutmayınız.



Şekil 5.1

Aynı problemi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^2$ fonksiyonu için x in 0 a yaklaşması durumunda inceleyelim. x in 0 a soldan ve sağdan yaklaşmasına örnek olarak aşağıdaki tablodaki değerleri alıp fonksiyon değerlerinin davranışına bakalım.

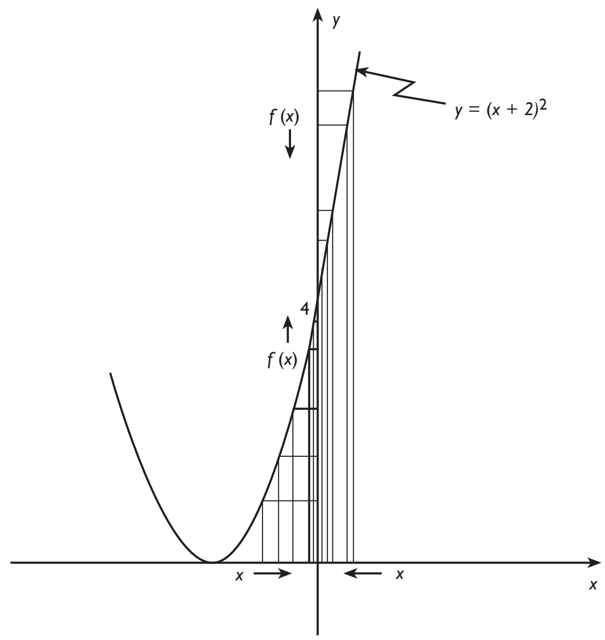
x	$f(x) = (x+2)^2$	x	$f(x) = (x+2)^2$
3	25	-3	1
2	16	-2	0
1	9	-1	1
0,5	6,25	-0,5	2,25
0,1	4,41	-0,1	3,61
0,01	4,0401	-0,01	3,9601
0,001	4,00400	-0,001	3,9960
0,0001	4,00040	-0,0001	3,9996
0,00001	4,00004	⋮	⋮
⋮	⋮		
$x \to 0^+$	$f(x) \to 4$	$x \to 0^-$	$f(x) \to 4$

x değişkeninin 0 a yaklaşan örnek değerlerine karşılık, x ister soldan, isterse sağdan yaklaşsın, $f(x)$ değerleri 4 e yaklaşmaktadır.

Aşağıdaki grafikten açıkça görebildğimiz gibi x değişkeni 0 *a* nasıl yaklaşırsa yaklaşsın fonksiyon değerleri 4 e yaklaşmaktadır. O halde

$$\lim_{x \to 0} (x+2)^2 = 4$$

tür diyebiliriz.



Şekil 5.2

Şimdi de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \text{ ise,} \\ x^2, & x > 0 \text{ ise,} \end{cases}$

fonksiyonunda $x \to 0$ için $f(x)$ değerlerinin belirli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını araştıralım.

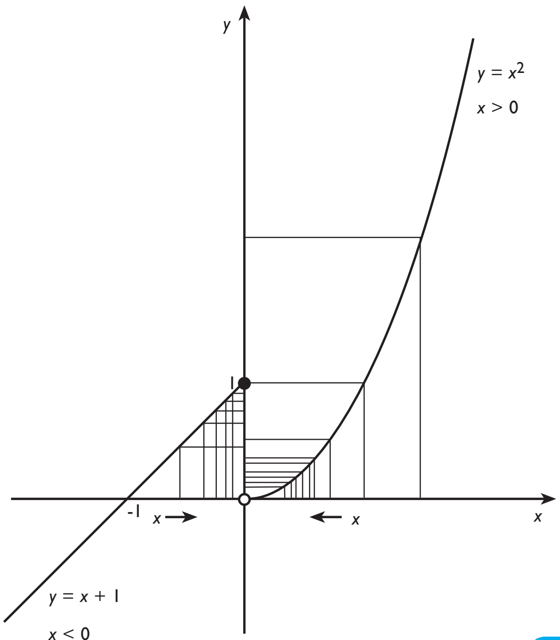
Bu örneğimizde, x değişkenine 0 *a* soldan ve sağdan yaklaşan değerler verip bunlara karşı gelen $f(x)$ değerlerini bulurken biraz daha dikkatli olmanız gerekmektedir. Çünkü $x < 0$ için $f(x) = x + 1$, $x > 0$ için $f(x) = x^2$ dir. Aşağıdaki tablo, bu durum dikkate alınarak oluşturulmuştur.

x	$f(x) = x + 1$	x	$f(x) = x^2$
-2	-1	2	4
-1	0	1	1
-0,5	0,5	0,5	0,25
-0,1	0,9	0,1	0,01
-0,01	0,99	0,01	0,0001
-0,001	0,999	0,001	0,000001
-0,0001	0,9999	0,0001	0,00000001
⋮	⋮	⋮	⋮
$x \to 0^-$	$f(x) \to 1$	$x \to 0^+$	$f(x) \to 0$

Tabloda gördüğünüz gibi, $x \to 0^-$ için $f(x) \to 1$ iken $x \to 0^+$ için $f(x) \to 0$ dır. x in 0 a yaklaşan değerlerine karşılık fonksiyon değerleri tek bir sayıya yaklaşmamaktadır. Bu durumda da $x \to 0$ için fonksiyonunun limiti yoktur diyoruz:

$\lim_{x \to 0} f(x)$ yoktur.

Fonksiyonun aşağıdaki grafiğinden de limitin yokluğu çok açık biçimde görülmektedir.



Şekil 5.3

Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olmaması başka bir noktada da limitinin olmadığı anlamı taşımamaktadır. Örneğin, yukarıdaki f fonksiyonu için $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$ olduğunu grafiğe bakarak hemen söyleyebiliriz. Yine f fonksiyonu için $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ olduğunu görebiliriz.

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi parçalı tanımlı fonksiyonlarda, x in herhangi bir değerine karşılık gelen f(x) değerini bulurken fonksiyonu tanımlayan ifadelerden hangisini kullanmanız gerektiğine dikkat ediniz.

Yukarıdaki örneklerimizde, $\lim_{x \to 2} (2x - 3) = 1$, $\lim_{x \to 0} (x + 2)^2 = 4$ olduğunu görmüştük. Bu iki örneği biraz dikkatle incelersek limit dediğimiz sayının, fonksiyon ifadesinde x yerine x in yaklaştığı sayının yazılmasıyla bulunabildiğini görebiliriz: $2.2 - 3 = 1$ ve $(0 + 2)^2 = 4$. Başka bazı fonksiyonlar için de doğru olan bu durum sizi yanıltmamalıdır. Limit konusunun bu kadar basit olmadığını incelememize devam ettikçe göreceksiniz. Örneğin, yukarıdaki son örneğimizde, fonksiyonun 0 daki değeri 1 olmasına karşılık fonksiyonun $x \to 0$ için limiti yoktur.

ÖRNEK 1

$f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

fonksiyonunun $x \to -2$ ***için limitini araştıralım.***

ÇÖZÜM

Dikkat ederseniz fonksiyon $x = -2$ noktasında tanımlı olmamasına karşılık, bu noktadaki limitinden söz etmekteyiz. Çünkü fonksiyonun tanım kümesi $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ dur ve x değişkeni bu kümedeki elemanlarla -2 sayısına istenildiği kadar yakın değerler alabilir.

Fonksiyon ifadesinde x yerine -2 yazarsak hem payın hem de paydanın 0 olduğunu görmekteyiz. Bu örnekte olduğu gibi 0/0 durumu ile karşılaştığımızda, 0/0 anlamlı olmamasına karşılık fonksiyonun limitinin olmadığını söyleyemeyiz.

Bu limiti hesaplamak için fonksiyonun ifadesine biraz daha yakından bakmamız gerekmektedir. $x \to -2$ iken daima $x \neq -2$ olacağından

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \to -2} (x-2) = -4$$

bulunur.

Fonksiyon bir noktada tanımlı olmadığı halde o noktada limiti olabilir.

Fonksiyonun bir noktada tanımlı olması halinde bu noktadaki değeri ile bu noktada limitinin varlığı ve varsa limitin değeri arasında doğrudan bir ilişki yoktur diyebiliriz.

Fonksiyon bir noktada tanımlı olmadığı halde o noktada limiti olabilir.

Fonksiyonun bir noktada tanımlı olması halinde bu noktadaki değeri ile bu noktada limitinin varlığı ve varsa limitin değeri arasında doğrudan bir ilişki yoktur diyebiliriz.

Buraya kadar örneklerle açıklamaya çalıştığımız limit kavramını şu şekilde tanımlayabiliriz.

$A \subset R$ olmak üzere, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $a \in \mathbb{R}$ sayısı A kümesine ait elemanlarla istenildiği kadar yaklaşılabilen bir nokta olsun. Eğer x bağımsız değişkeni A kümesine ait fakat a dan farklı değerlerle a ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyon değerleri tek bir L sayısına yaklaşıyorsa, f fonksiyonunun a noktasında limiti L ' dir denir ve bu durum $x \to a$ iken $f(x) \to L$ veya $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ biçiminde gösterilir.

Buna göre, tanımı yinelersek $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ demek, x değişkeni a dan farklı değerlerle a ya yaklaşırken f (x) fonksiyon değerleri L sayısına yaklaşıyor demektir.

SIRA SİZDE 1

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \le 0 \text{ ise,} \\ 1 - x, & x > 0 \text{ ise,} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ olduğunu görünüz. Fonksiyonun grafiğini çizerek sonucu doğrulayınız.

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(x) = 3x^2 - x + 5$ fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 9$ olduğunu gösteriniz.

3) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \text{ ise,} \\ 1, & x = 1 \text{ ise,} \\ x - 1, & x > 1 \text{ ise,} \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ olduğunu gösteriniz. Fonksiyonun grafiğini çizerek sonucu doğrulayınız.

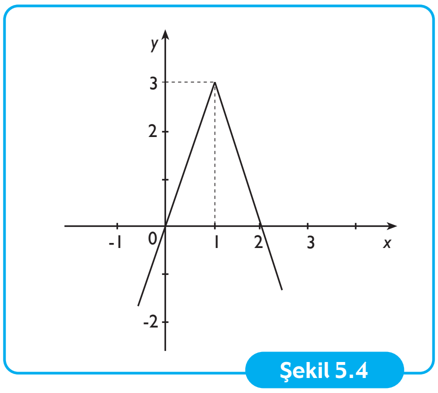
4) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x+5} = ?$ **5)** $\lim_{x \to 3} \left(x^2 - 2x\right) = ?$

6) $\lim_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2} = ?$ **7)** $\lim_{x \to 0} 10 = ?$

8) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} = ?$ **9)** $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = ?$

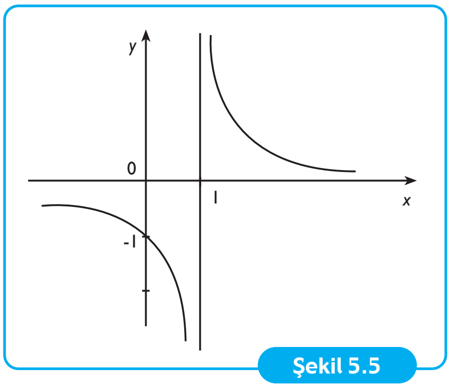
Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların $x \to 1$ için varsa limitlerini bulunuz.

10)



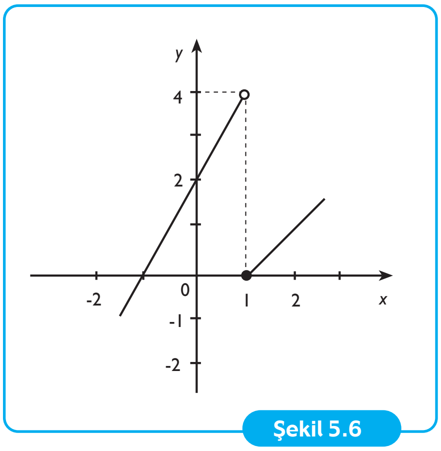
Şekil 5.4

11)



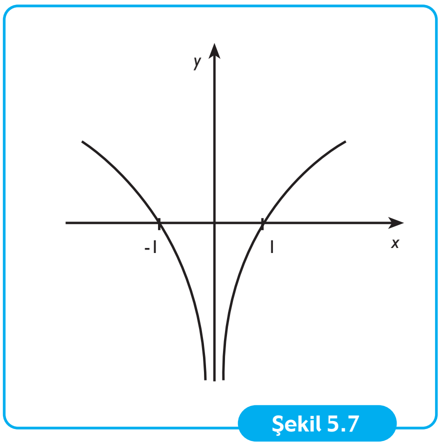
Şekil 5.5

12)



Şekil 5.6

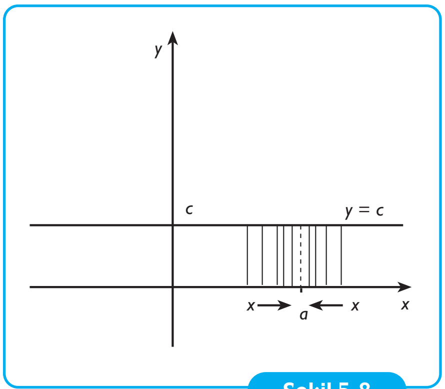
13)



Şekil 5.7

Limit Özellikleri

Bir önceki kesimde, limit kavramını, bazı basit sayılabilecek fonksiyonların bazı noktalarda limitini, sezgisel yaklaşıma ağırlık vererek açıklamaya çalıştık. Sizler tarafından anlaşılması oldukça zor olacağı için ve daha çok matematikçileri ilgilendirdiğine inandığımız kesin matematiksel tanımı vermedik. Ancak, yukarıda açıklamaya çalıştığımız yöntem zaman zaman sıkıcı sayısal işlemler gerektirmesine rağmen etkili bir yöntem de değildir. Çünkü, fonksiyonun a noktasında limitinin varlığını görmek için x değişkeni a ya nasıl yaklaşırsa yaklaşsın (yani sadece seçilen örnek değerler için değil), fonksiyon değerlerinin limit diyeceğimiz tek bir sayıya yaklaştığını göstermemiz gerekmektedir. Bu ise sanıldığından çok daha zor bir iştir. Biraz sonra vereceğimiz ve kanıtını yine matematikçilere bırakacağımız özellikler (teoremler) ve onların sonuçları bu zor işi biraz daha kolay hale getirebilmektedir.



Şekil 5.8

Sabit fonksiyonun herhangi bir noktada limiti vardır ve fonksiyon değeri olan sabit sayıya eşittir.

Birim fonksiyonun herhangi bir a noktasında limiti vardır ve a ya eşittir.

1. Özellik

c bir sabit olmak üzere, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = c$ ise

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$$

dir.

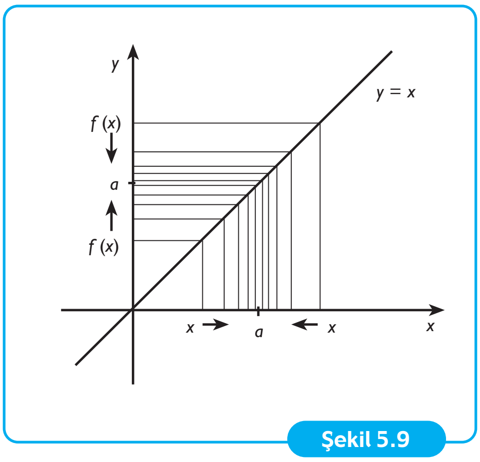
Sabit fonksiyonun herhangi bir noktada limiti vardır ve fonksiyon değeri olan sabit sayıya eşittir.
Grafikten bu özelliğin doğruluğunu çok açık biçiminde görüyoruz.

2. Özellik

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x$
ise

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

dir.
Birim fonksiyonun herhangi bir a noktasında limiti vardır ve a ya eşittir.



Şekil 5.9

Toplamın limiti limitler toplamına eşittir.

3. Özellik

$f: A\to\mathbb{R}$, $g: A\to\mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$ olsun. Bu durumda $f+g$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$$

dir.

Toplamın limiti limitler toplamına eşittir.

ÖRNEK 2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = -3$ veriliyor. $x = 2$ noktasında $f+g$ fonksiyonunun limitini bulalım.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu birim fonksiyon, g fonksiyonu sabit fonksiyon olduğundan her iki fonksiyonun 2 noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x = 2$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} (-3) = -3$ tür. 3. özellikten $f+g$ nin 2 noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x\to 2}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to 2}\left[x+(-3)\right] = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2}(-3) = 2+(-3) = -1$$

dir.
3. özellik sonlu tane fonksiyon için de doğrudur. f_1 , f_2 , ... , f_n fonksiyonlarının a noktasında limiti varsa,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x\to a} f_n(x)$$

dir.

4. Özellik

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir $a \in \mathbb{R}$ noktasında limitleri var ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ ise $f \cdot g$ fonksiyonunun bu noktada limiti vardır ve

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

dir.

Çarpımın limiti, limitlerin çarpımına eşittir.

Çarpımın limiti, limitlerin çarpımına eşittir.

4. özellikte $g(x) = c$ alınırsa,

$$\lim_{x \to a} [c\, f(x)] = \lim_{x \to a} c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

sonucu elde edilir. Buna göre, bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin bu sabitle çarpımına eşittir.

Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin bu sabitle çarpımına eşittir.

3. özellik ile 4. özelliğin sonucunu birleştirirsek,

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

diyebiliriz. Farkın limiti, limitler farkına eşittir.

Farkın limiti, limitler farkına eşittir.

5. Özellik

Limitlerin varlığı durumunda sonlu tane fonksiyonun çarpımının limiti, limitler çarpımına eşittir.

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots\ldots f_n(x)] = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) \ldots\ldots \lim_{x \to a} f_n(x)$$

dir.

ÖRNEK 3

$n \in \mathbb{N}$ ***olmak üzere*** $\lim\limits_{x \to a} x^n$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to a} x^n = \lim_{x \to a} (\underbrace{x \cdot x \ldots x}_{\text{n tane}}) = \underbrace{\lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x \ldots \lim_{x \to a} x}_{\text{n tane}} = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{\text{n tane}} = a^n$$

Buna göre,

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

dir.

ÖRNEK 4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0$, $n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, b_0 , b_1 , ... , $b_n \in \mathbb{R}$ ***polinom fonksiyonunun*** $x = a$ ***noktasında limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

Yukarıdaki özellikler ve örneklerdeki bilgilerimizi kullanarak,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0] \\
&= \lim_{x \to a} b_n x^n + \lim_{x \to a} b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \lim_{x \to a} b_1 x + \lim_{x \to a} b_0 \\
&= b_n \lim_{x \to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x \to a} x^{n-1} + \ldots + b_1 \lim_{x \to a} x + \lim_{x \to a} b_0 \\
&= b_n \cdot a^n + b_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot a + b_0
\end{aligned}$$

bulunur. Dikkat ederseniz bu değer polinom fonksiyonun a noktasındaki değeridir.

Polinom fonksiyonunun herhangi bir noktadaki limiti, fonksiyonun bu noktadaki değerine eşittir.

ÖRNEK 5

$\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 8)$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ fonksiyonu polinom fonksiyon olduğundan, bu limit $f(2)$ değerine eşittir.

Buna göre,

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 8) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 8 = -4$$

dir.

$x > 0$ ve $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} x^r = a^r$$

dir.

ÖRNEK 6

$\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x^2}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ dir. $x > 0$ ve $r \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to a} x^r = a^r$ olduğundan

$$\lim_{x \to 8} \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x \to 8} x^{2/3} = 8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 4$$

bulunur.

ÖRNEK 7

$\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}\,(3x^2 - 7x - 1)$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x}\,(3x^2 - 7x - 1) = \lim_{x \to 4} \sqrt{x} \cdot \lim_{x \to 4} (3x^2 - 7x - 1)$$

$$= \sqrt{4} \cdot (3 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 - 1) = 2 \cdot (48 - 28 - 1) = 38$$

bulunur.

6. Özellik

Bölümün limiti, paydanın limiti 0 dan farklı olmak koşuluyla, limitlerin bölümüne eşittir.

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve $g(x) \neq 0$ olsun. Eğer $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ ve $L_2 \neq 0$ ise $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ fonksiyonunun a noktasında limiti vardır ve $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2},\ g(x) \neq 0,\ L_2 \neq 0}$ dir.

ÖRNEK 8

$\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{2\sqrt[3]{x} + 3}{4x + 1}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 8} (2\sqrt[3]{x} + 3) = 2 \cdot \sqrt[3]{8} + 3 = 7, \quad \lim_{x \to 8} (4x + 1) = 4 \cdot 8 + 1 = 33$$

olduğundan,

$$\lim_{x \to 8} \frac{2\sqrt[3]{x} + 3}{4x + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 8} (2\sqrt[3]{x} + 3)}{\lim\limits_{x \to 8} (4x + 1)} = \frac{7}{33}$$

bulunur.

7. Özellik

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ olsun.
$n \in \mathbb{N}$ ve n çift iken $f(x) \geq 0$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

dir.
Özel olarak, $f(x) \geq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt{L}$$

dir.

ÖRNEK 9

$\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{2x^3 - 7x}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{2x^3 - 7x} = \sqrt{\lim_{x \to 4} \left(2x^3 - 7x\right)} = \sqrt{2 \cdot 4^3 - 7 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$$

dur.

8. Özellik

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$, $h: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve x in a sayısına yakın tüm değerleri için $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ eşitsizliği sağlansın. Eğer $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonunun a noktasında limiti vardır ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

dir.

Şimdi yukarıda verdiğimiz özellikleri kullanarak bazı fonksiyonların limitlerinin nasıl bulunacağını örneklerle açıklayalım.

ÖRNEK 10

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 6}{5x^2 - 20}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to 2} (5x^2 - 20) = 0$ olduğundan 6. özelliği kullanamayız. Bu durumda fonksiyonu biraz daha dikkatli incelememiz gerekir. x, 2 ye yaklaştığından $x \neq 2$ dir. Dolayısıyla

$$\frac{3x - 6}{5x^2 - 20} = \frac{3(x - 2)}{5(x^2 - 4)} = \frac{3(x - 2)}{5(x - 2)(x + 2)} = \frac{3}{5(x + 2)}, \quad x \neq 2$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x - 6}{5x^2 - 20} = \lim_{x \to 2} \frac{3}{5(x + 2)} = \frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$$

bulunur.

ÖRNEK 11 $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ ***limitini bulalım.***

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 9} (x-9) = 0$, $\lim\limits_{x \to 9} (\sqrt{x}-3) = 0$ dır. x 9 dan farklı olduğundan

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 3^2}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3} = \sqrt{x}+3$$

veya

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)}$$

$$= \sqrt{x}+3 \, , \quad x \neq 9$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \to 9} (\sqrt{x}+3) = \sqrt{9}+3 = 6$$

bulunur.

Bu iki örneğe dikkat ederseniz her iki örnekte de pay ve payda 0 a yaklaşırken limit, birincisinde $3/20$, ikincisinde 6 bulundu. Bunlardan şu sonucu çıkarıyoruz: $x \to a$ için bir kesrin hem payı hem de paydası sıfıra yaklaşıyorsa, kesrin limiti tamamen kesre bağlıdır, genel bir sonuç söylenemez. Bu nedenle bu durumda $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır denir. $\frac{0}{0}$ belirsizliği limitin yokluğu anlamı taşımaz, sadece limitin varsa değerinin kesre bağlı olduğunu ifade eder.

SIRA SİZDE 2 Aşağıdaki limitleri hasaplayınız.

1) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 3x - 1)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - \sqrt{2}\, x + 1)$

3) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (x^2 - \sqrt{8}\, x + 1)$

4) $\lim\limits_{x \to 81} \sqrt{x}$

5) $\lim\limits_{x \to 32} \sqrt[5]{x}$

6) $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt[3]{x}$

7) $\lim\limits_{x \to 1} (2x+1)(x-3)$

8) $\lim\limits_{x \to 8} \left(\sqrt[3]{x}+1\right)(3x-1)$

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\sqrt{x}-1}{3x+4}$,

10) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{x+1}$

11) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

12) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 + 5x + 2}$

13) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^3 - 4x^2 + 9}$

14) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+1}{\sqrt{3x-2}}$

15) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

16) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

17) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 + 6x}$

Tek Yönlü Limitler

Yukarıdaki incelemizde, a noktasındaki limiti incelerken x bağımsız değişkeni a ya nasıl yaklaşırsa yaklaşsın $f(x)$ değerlerinin belli bir sayıya yaklaşıp yaklaşmadığını araştırdık. Ancak, bazı durumlarda x in a ya sadece a dan büyük (yani sağdan) değerlerle yaklaşması veya sadece a dan küçük (yani soldan) yaklaşması zorunlu olabilir. İşte bu durumlarda tek yönlü limit söz konusudur.

Eğer $x \to a^+$ için f fonksiyonunun L gibi bir limiti varsa, bu limite a noktasındaki **sağdan limit** denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde, $x \to a^-$ için f fonksiyonunun L gibi bir limiti varsa bu limite de **soldan limit** denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L}$$

dir.

Yani, sağdan ve soldan limitlerin her ikisinin de söz konusu olduğu bir noktada limit varsa, hem sağdan hem de soldan limit vardır ve bunlar birbirine eşittir. Karşıt olarak sağdan ve soldan limitler var ve birbirine eşit ise bu noktada limit vardır. Sağdan ve soldan limitlerin birisi yoksa veya bu iki limit eşit değilse limit yoktur.

a noktasına her iki yönden yaklaşılabilindiği durumlarda, a noktasında limitin varolması için gerek ve yeter koşul, hem sağdan ve hem de soldan limitlerin var ve birbirine eşit olmasıdır.

ÖRNEK 12

$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ ve $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$ ***limitlerini bulalım.***

ÇÖZÜM

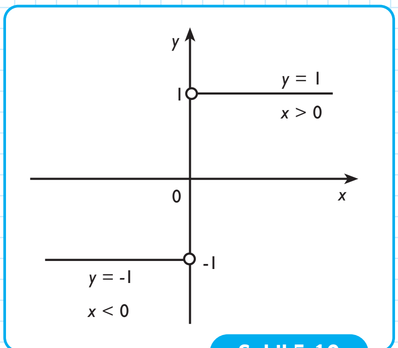
$x \to 0^+$ iken $x > 0$ olduğundan $|x| = x$ dir.
Buna göre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$x \to 0^-$ iken $x < 0$ olduğundan $|x| = -x$ dir.
Buna göre,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

olur.



Şekil 5.10

Bu fonksiyonun hem sağdan ve hem de soldan limitleri vardır ve sırasıyla 1 ve -1 dir. Bu iki limit birbirine eşit olmadığından

$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ yoktur.

ÖRNEK 13

$$f: R \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \le 2 \quad \text{ise,} \\ x + 3, & x > 2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ***limitlerini araştıralım.***

ÇÖZÜM

$x \to 2^-$ için $x < 2$ dir. Dolayısıyla bu durumda $f(x) = 3x - 1$ dir. Buna göre,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x - 1) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

dir. $x \to 2^+$ için $x > 2$ ve $f(x) = x + 3$ tür.
Bu durumda

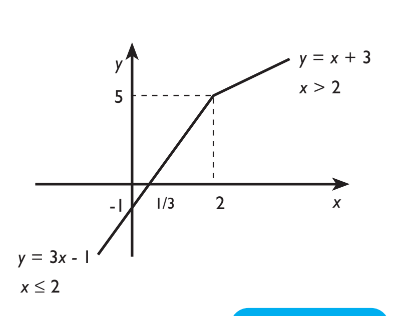
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 2 + 3 = 5$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

dir.



Şekil 5.11

Bazı durumlarda $x \to a$ (veya $x \to a^-$, $x \to a^+$) için fonksiyon değerleri istenildiği kadar büyük bir sayıdan daha büyük olabilir. Bu durumda **limit** ∞ **dur** denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \left(\text{veya} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty\right)$$

biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde, $x \to a$ (veya $x \to a^-$, $x \to a^+$) için fonksiyon değerleri negatif yönde istenildiği kadar küçük sayıdan daha küçük olabilir. Bu durumda da **limit** $-\infty$ **dur** denir ve

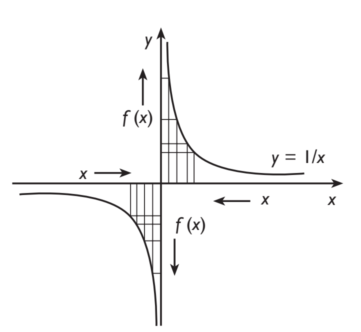
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \left(\text{veya} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty\right)$$

biçiminde gösterilir.

ÖRNEK 14

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$ ve $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ ***limitlerini araştıralım.***

ÇÖZÜM



Şekil 5.12

Yandaki grafikten gördüğümüz gibi, x değişkenine pozitif ve sıfıra yaklaşan değerler verdiğimizde fonksiyon değerleri sınırsız olarak büyümektedir. Benzer şekilde x e negatif ve sıfıra yaklaşan değerler verdiğimizde fonksiyon değerleri negatif yönde sınırsız olarak küçülmektedir.

Bu nedenle

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

dur. Soldan ve sağdan limitler farklı olduğundan

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ yoktur.

ÖRNEK 15

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2}, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$$

limitlerini araştıralım.

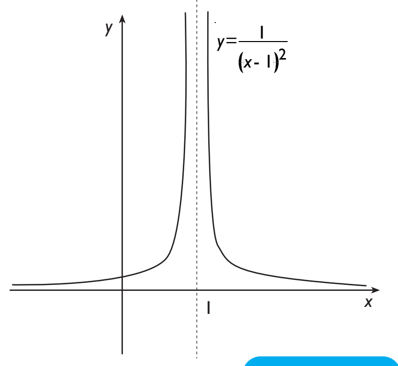
ÇÖZÜM

$x \to 1^-$ ve $x \to 1^+$ yaklaşmalarına örnekler vererek veya yandaki grafikten görebileceğimiz gibi,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty, \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

ve dolayısıyla $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$

dur.



Şekil 5.13

ÖRNEK 16

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-3}{3x^2-x}$ ***limitini araştıralım.***

ÇÖZÜM

$x \neq 0$ olduğundan pay ve paydayı x e bölelim.

$$\frac{2x-3}{3x^2-x} = \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x(3x-1)} = \frac{2-\frac{3}{x}}{3x-1}$$

dır. Buna göre,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2x-3}{3x^2-x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2-\frac{3}{x}}{3x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2x-3}{3x^2-x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2-\frac{3}{x}}{3x-1} = -\infty$$

dır. O halde

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-3}{3x^2-x}$ yoktur.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ olması limitin varlığı anlamı taşımaz. Sadece $x \to a$ için $f(x)$ değerlerinin sınırsız büyüdüğü anlamı taşır.

Benzer şekilde, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ olması da $x \to a$ için $f(x)$ değerlerinin negatif yönde sınırsız küçüldüğünü ifade eder.

Bir fonksiyonun tanım kümesinde x değişkeni pozitif yönde sınırsız büyüyebilir veya negatif yönde sınırsız küçülebilir, bu durumları $x \to \infty$ veya $x \to -\infty$ biçiminde ifade ederiz. Bu durumlarda da fonksiyonun limitinden söz etmek mümkündür. Eğer $x \to \infty$ (veya $x \to -\infty$) için $f(x)$ değerleri belirli bir L sayısına yaklaşıyorsa, bu durumda da limit L dir denir ve

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad \left(\text{veya} \lim_{x \to -\infty} f(x) = L\right)$$

biçiminde gösterilir.

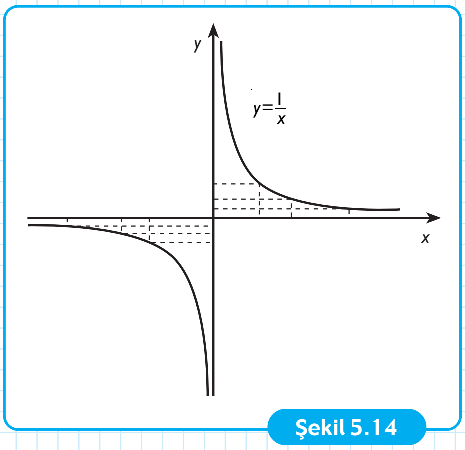
ÖRNEK 17 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$ ***limitlerini araştıralım.***

ÇÖZÜM

Yandaki grafikten gördüğümüz gibi x değişkenine pozitif yönde istenildiği kadar büyük veya negatif yönde istenildiği kadar küçük değerler verdiğimiz de fonksiyon değerleri 0'a yaklaşmaktadır. Bu nedenle hem $x \to -\infty$ ve hem de $x \to \infty$ için $f(x) \to 0$ olmaktadır. Yani

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 , \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

dır.



Şekil 5.14

ÖRNEK 18 $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 4x + 7}$ ***limitini araştıralım.***

ÇÖZÜM

Fonksiyonda hem payı ve hem de paydayı x^2 ile bölelim.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 4x + 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}} = \frac{3 - 0 + 0}{-1 + 0 + 0} = -3$$

bulunur.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \pm\infty , & n > m \text{ ise} \\ \dfrac{a_n}{b_m} , & m = n \text{ ise} \\ 0 , & n < m \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu gösterilebilir.

Bazı fonksiyonlarda x sınırsız büyürken fonksiyon değerleri, sınırsız büyüyebilir veya negatif yönde sınırsız küçülebilir. Bu durumları kısaca,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

biçimlerinde ifade ederiz.

Benzer şekilde $x \to -\infty$ için $f(x) \to \infty$ veya $f(x) \to -\infty$ olabilir. Bu durumları da

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty , \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

biçimlerinde ifade ederiz.

ÖRNEK 19

$$\lim_{x \to \infty} \left(2x^2 - 4x + 5\right) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = \infty \,.\, (2 - 0 + 0) = \infty$$

bulunur.

ÖRNEK 20

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + x}{2x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(2 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{2 - \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\infty \,.\, (1 - 0 + 0)}{2} = \infty$$

SIRA SİZDE 3

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1\,, & x \leq 0 \quad \text{ise} \\ x^2 + x, & x > 0 \quad \text{ise} \end{cases}$ olduğuna göre $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

2) $\lim_{x \to -1} \dfrac{|x + 1|}{x + 1} = ?$

3) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{|x - 1|}{x - 1} = ?$

4) $\lim_{x \to -\infty} \left(-x^2 + \dfrac{1}{x} - 5\right) = ?$

5) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 10} = ?$

6) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 5x}{2 - x} = ?$

7) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 5x}{2 - x} = ?$

Süreklilik

Limit konusunu incelerken, bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile fonksiyonun bu noktadaki değeri arasında doğrudan bir ilişki olmadığını ifade etmiştik. Bununla beraber bazı fonksiyonların a daki limiti ile a daki değerinin birbirine eşit olduklarını görmüştük. Bu özel durum fonksiyon davranışını incelemede önemli bir özellik olarak karşımıza çıkmaktadır. İşte bu durumda fonksiyon a noktasında süreklidir diyoruz. Buna göre sürekliliği şu şekilde tanımlayabiliriz:

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve bir $a \in A$ noktası verilsin. Eğer

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

oluyorsa, f fonksiyonuna **x = a noktasında süreklidir** denir. f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise, f fonksiyonu A üzerinde süreklidir denir.

Örneğin $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında süreklidir. Çünkü $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3) = 1 = f(2)$ dir.

Yine limit konusunda $P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ polinom fonksiyonunun herhangi bir a noktasındaki limitinin $P(a)$ olduğunu görmüştük. Buna göre, şu sonucu çıkarabiliriz.

$P(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ polinom fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir.

Sürekliliğin tanımına göre, $f: A\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun bir a noktasında sürekli olması için şu koşulların sağlanması gerekir:

- Fonksiyon a noktasında tanımlı olmalıdır,
- Fonksiyonun a noktasında limiti olmalıdır,
- Fonksiyonun a daki limiti a daki değerine eşit olmalıdır.

f fonksiyonu bir noktada sürekli değilse, f bu noktada **süreksizdir** denir.

ÖRNEK 21

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \le 0 \text{ ise} \\ x, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sürekli olup olmadığını inceleyelim.

ÇÖZÜM

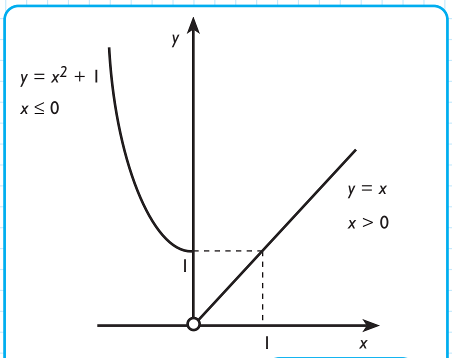
$f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

olduğundan, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ yoktur.

Buna göre f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli değildir.

Buna karşılık bu fonksiyon $x = 1$ noktasında süreklidir. Gerçekten



Şekil 5.15

$f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$

olduğundan fonksiyon $x = 1$ noktasında süreklidir.

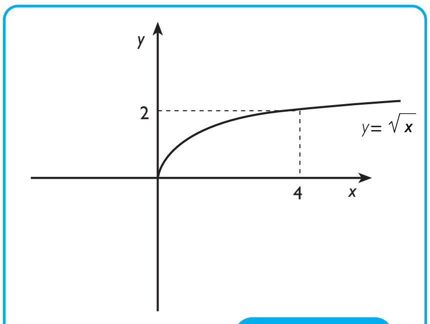
DİKKAT

f fonksiyonunun grafiğinin $x = 0$ ve $x = 1$ deki durumu arasında bir fark görüyor musunuz?

Bir fonksiyon bir aralıkta sürekli ise, fonksiyonun grafiği olan eğri bu aralıkta kalem kaldırılmadan çizilebilir yani fonksiyon grafiğinde herhangi bir kopma olmaz.

Yanıtınız şöyle olmalıydı:

f fonksiyonunun grafiği olan eğride $x = 1$ noktasında herhangi bir kopma yoktur. Bir fonksiyon **bir aralıkta sürekli ise**, fonksiyonun grafiği olan eğri bu aralıkta kalem kaldırılmadan çizilebilir yani fonksiyon grafiğinde herhangi bir kopma olmaz.



Şekil 5.16

ÖRNEK 22

$f : [0\ ,\ \infty) \rightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sqrt{x}$

fonksiyonunun $x = 4$ noktasında sürekli olup olmadığını araştıralım.

Bir fonksiyona bir noktada süreklidir diyebilmek için aşağıdaki üç sorunun yanıtı evet olmalıdır.

- Fonksiyon bu noktada tanımlı mı?
- Fonksiyonun bu noktada limiti var mı?
- Fonksiyonun bu noktadaki değeri limitine eşit mi?

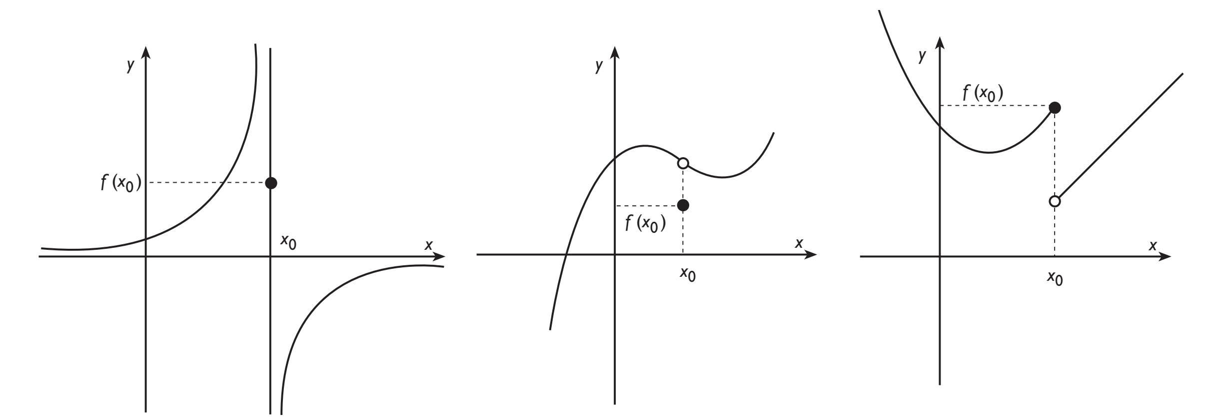
ÇÖZÜM

$f(4) = \sqrt{4} = 2\ ,\quad \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} = 2 = f(4)$

olduğundan fonksiyon $x = 4$ noktasında süreklidir.

Aşağıdaki şekilde x_0 noktasında süreksiz olan çeşitli fonksiyon grafikleri görülmektedir.

Fonksiyonun tanım kümesine ait bir noktaya karşılık, grafikte kopma, delinme ve sıçrama varsa bu noktalarda fonksiyonun sürekli olmadığını unutmayınız.



Şekil 5.17

$f : A \rightarrow \mathbb{R}\ ,\ g : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $x_0 \in A$ noktasında sürekli ise, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $g(x_0) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonları da $x_0 \in A$ noktasında süreklidir.

ÖRNEK 23

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x\ ,\quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\ ,\ g(x) = x^2 + 1$ ***fonksiyonları veriliyor*** $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ***fonksiyonunun sürekliğini inceleyelim.***

Bir fonksiyon bir noktada sürekli ise, bu nokta civarında bağımsız değişkendeki küçük değişiklikler fonksiyon değerlerinde "küçük" değişiklikleri doğurur. Fonksiyon bir noktada sürekli değilse, bu nokta civarında bağımsız değişkendeki küçük değişikliklerin fonksiyon değerlerinde aşırı büyük değişiklikler meydana getirebileceğini beklemeliyiz.

ÇÖZÜM

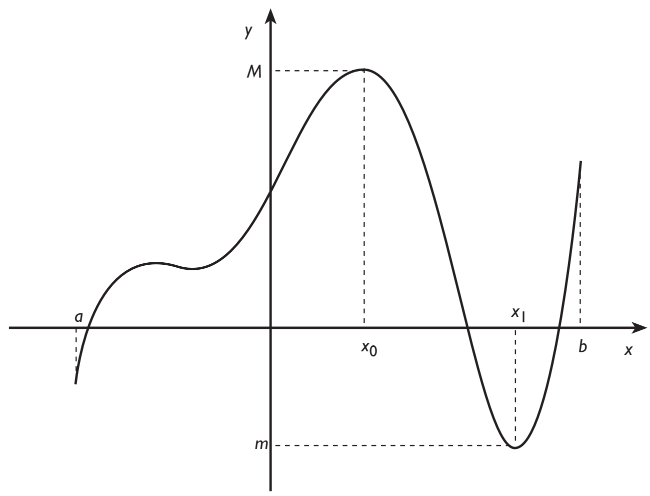
f ve g fonksiyonları polinom fonksiyon olduklarından her $x \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidirler. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 + 1 \neq 0$ olduğundan

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 + 1}$$

fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli fonksiyondur.

Sürekli Fonksiyonların Özellikleri

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyon verilsin. Eğer her $x \in A$ için $f(x) \leq f(x_0)$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in A$ noktası varsa, $f(x_0)$ sayısına f fonksiyonunun A üzerinde **mutlak maksimum değeri,** diğer bir deyişle en büyük değeri denir. Benzer şekilde, her $x \in A$ için $f(x_1) \leq f(x)$ olacak şekilde en az bir $x_1 \in A$ noktası varsa, $f(x_1)$ sayısına f fonksiyonunun A üzerinde **mutlak minimum değeri** yani en küçük değeri denir.



Şekil 5.18

Şekilde grafiği verilen fonksiyonun mutlak maksimum değeri M, mutlak minimum değeri ise m dir.

Her fonksiyonun mutlak maksimum veya mutlak minimum değeri var olmak zorunda değildir.

$f: (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun, mutlak minimumu yoktur, ancak mutlak maksimum değeri 1 dir. Burada 0 ın tanım kümesine ait olmadığına dikkat ediniz.

$[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların davranışlarını daha kolay inceleyebiliriz. Şimdi bu özelliklerden bazılarını ele alalım.

1. Özellik

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon mutlak minimum ve mutlak maksimum değerlerini en az birer noktada alır. Yani her $x \in [a, b]$ için

$f(x_1) \leq f(x)$ ve $f(x) \leq f(x_2)$

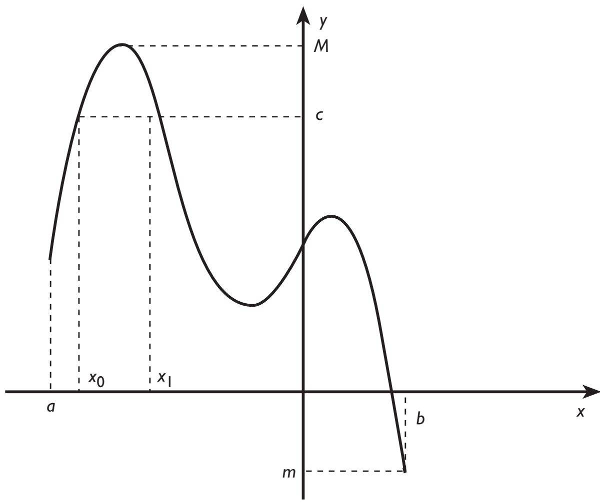
olacak şekilde en az birer x_1 , $x_2 \in [a, b]$ değerleri vardır.

2. Özellik

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyon mutlak minimum ve mutlak maksimum değerleri arasındaki her değeri en az bir noktada alır. Yani, fonksiyonunun mutlak minimum değeri m, mutlak maksimum değeri M olmak üzere,

$m \leq c \leq M$

koşulunu sağlayan herhangi bir c sayısına karşılık $f(x_0) = c$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in [a, b]$ sayısı vardır.

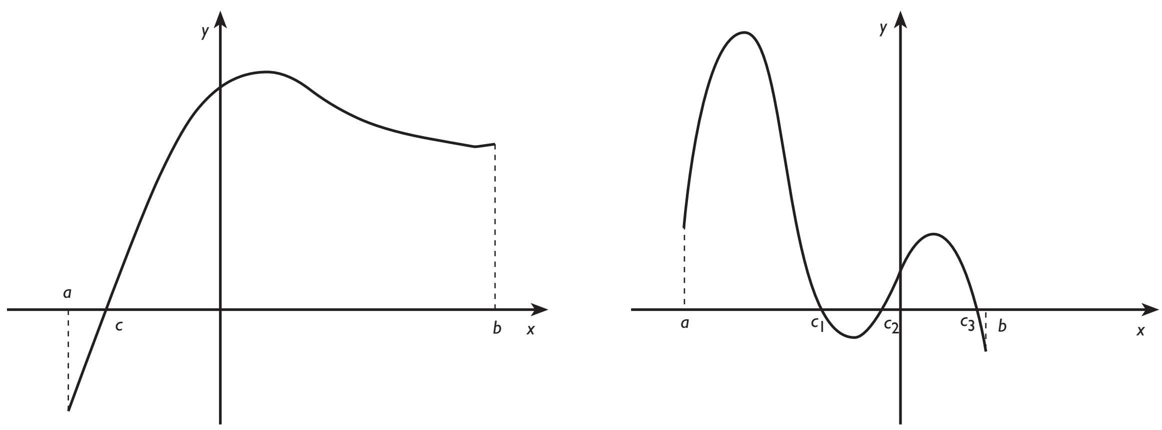


Şekil 5.19

Sürekli fonksiyonlar için bu özellik **ara değer teoremi** olarak bilinir. Şekildeki grafiğe göre $f(x_0) = f(x_1) = c$ dir.

Sonuç

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $f(a) \,.\, f(b) < 0$ ise en az bir $c \in (a, b)$ için $f(c) = 0$ dır. Yani f sürekli fonksiyonu $[a, b]$ aralığının uçlarında farklı işaretli değerler alıyorsa, $f(x) = 0$ denkleminin (a, b) aralığında en az bir kökü vardır.



Şekil 5.20

Yukarıdaki grafiklerden açıkça görüldüğü gibi, $f(a)$ ile $f(b)$ değerleri farklı işaretli olduğundan $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ noktalarından birisi x-ekseninin altında iken diğeri x-ekseninin üstündedir. Fonksiyon sürekli olduğundan grafiği kalem kaldırılmadan çizilecektir, dolayısıyla negatif bölgeden pozitif bölgeye veya pozitif bölgeden negatif bölgeye geçerken grafik en az bir noktada x-eksenini kesmek zorundadır. Bu noktanın apsisi ise $f(x) = 0$ denkleminin köküdür.

Bu sonuç yardımıyla bazı denklemlerin köklerini araştırabiliriz.

ÖRNEK 24

$3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$ ***denkleminin*** $[0, 2]$ ***aralığında kökü var mıdır?***

ÇÖZÜM

$f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ fonksiyonunu gözönüne alalım. f polinom fonksiyon olduğundan bu aralıkta süreklidir. $f(0) = -1$, $f(2) = 11$ olduğundan $f(0) \, . \, f(2) < 0$ dır, dolayısıyla en az bir $c \in (0, 2)$ için $f(c) = 0$ dır. Bu nedenle denklemin bu aralıkta en az bir kökü vardır.

Yukarıdaki özelliklerde, fonksiyonun tanım kümesi kapalı aralık değilse veya fonksiyon sürekli değilse, genel olarak bu özellikler doğru değildir.

SIRA SİZDE 4

Aşağıdaki fonksiyonların $x = 1$ noktasında sürekli olup olmadıklarını araştırınız.

1) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 , & x < 1 \text{ ise} \\ 0 , & x = 1 \text{ ise} \\ x + 1 , & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

2) $h(x) = \dfrac{|x - 1|}{x + 1}$

3) $k(x) = \sqrt{x+1}$

4) $m(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

Niels Abel (1802 - 1829)

Deha ve Yoksulluk.

Abel ,1824 de derecesi beşten büyük polinom denklemler için genel bir çözüm verilemeyeceğini kanıtlamıştır. Yoksul bir hayat yaşamış ve yakalandığı bir hastalık sonucunda 27 yaşında ölmüştür. Ünlü analizci Weierstrass öğrencilerine Abel'i okuyunuz tavsiyesinde bulunduktan sonra onun için şunları söylemiştir: *"Meğer Abel, ne mutlu adammış ki, fikirleri sonsuza kadar yaşayacak ve onların matematik bilimine çok olumlu etkileri olacaktır."*

"Tarih gösteriyor ki, bütün pozitif ilimlerin ortak kaynağı olan matematik kültürünü himaye eden hükümdarlar aynı zamanda devirleri en parlak olanlar ve zaferleri en uzun sürenlerdir."

Michel CHASLES

Kendimizi Sınayalım

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x - 4}$ değeri nedir?

a. $-\infty$
b. 0
c. 1
d. 4
e. ∞

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5}$ değeri nedir?

a. $-\dfrac{3}{5}$
b. 0
c. $\dfrac{1}{2}$
d. 2
e. Yoktur

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x\,|x| + 1}{x + 1}$ değeri nedir?

a. -2
b. -1
c. 1
d. 2
e. Yoktur

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - x^2 - x^3}{3 + x^2}$ değeri nedir?

a. $-\infty$
b. $\dfrac{1}{3}$
c. 0
d. $-\dfrac{1}{3}$
e. ∞

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - x\right)$ değeri nedir?

a. $-\infty$
b. 0
c. $\dfrac{1}{5}$
d. $\sqrt{2}$
e. ∞

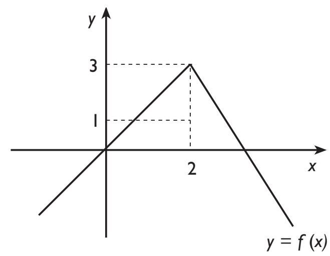
6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{(x - 1)^2}$ değeri nedir?

a. $-\infty$
b. -2
c. 0
d. 2
e. ∞

7. $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 4x - 2}$ değeri nedir?

a. -2
b. $\sqrt[3]{6}$
c. $\sqrt[3]{-2}$
d. 0
e. Yoktur

8. Yanda grafiği verilen f fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ değeri nedir?



a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. Yoktur

9. $f(x) = 2x^2 - ax + 4$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında sürekli ve $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 10$ olduğuna göre a kaçtır?

a. -4
b. -1
c. 0
d. 4
e. 10

10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - ax}{2x + 5} = \dfrac{2}{3}$ olduğuna göre, a kaçtır?

a. 2
b. $\dfrac{1}{2}$
c. 0
d. $-\dfrac{1}{2}$
e. -1

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$ değeri nedir?

a. -2
b. 0
c. $\dfrac{1}{4}$
d. 2
e. ∞

12. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 3}{x^2 + 3x}$ değeri nedir?

a. -1
b. 0
c. 1
d. 3
e. ∞

Biraz Daha Düşünelim

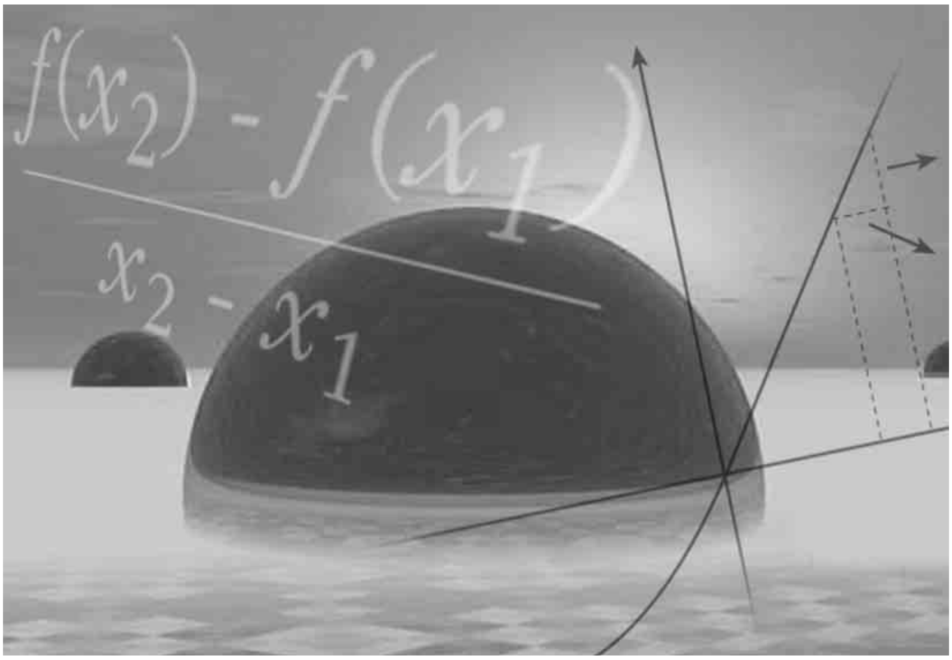
1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x+2}$ değeri nedir?

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x-3}+x\right)$ değeri nedir?

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x\sqrt{x}+5}{3x^2+7}$ değeri nedir?

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)^2}$ değeri nedir?

Türev Kavramı 6



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *bir fonksiyonun, bir noktadaki değişme hızının fonksiyonun, o noktadaki türevi olduğunu anlayacak,*
- *çeşitli tipteki fonksiyonların türevlerini bulabilecek,*
- *fonksiyonun bir noktadaki değerini, bu noktaya yakın uygun bir noktadaki teğeti yardımıyla bulacak,*
- *türev fonksiyonunun da türevlerini bulabileceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***Önce limit konusunu gözden geçiriniz.***
- ***Türev kurallarını çok örnek çözerek öğrenmeye çalışınız.***
- ***Türevin iktisadi uygulamalarının anlamlarını anlamaya çalışınız.***
- ***Çözümleri size bırakılmış soruları mutlaka çözünüz.***

Giriş

Bu ünitede türev kavramını, türev kurallarını ve türevin bazı uygulamalarını inceleyeceğiz. İncelememizde temel özellikleri örneklerle açıklayacak, ayrıntılı kanıtlara girmeyeceğiz.

Türev kavramı, fizikte hareketli bir cismin anlık hızının bulunmasıyla, matematikte ise bir fonksiyonun grafiği olan eğrinin bir noktadaki teğetinin eğiminin bulunması problemlerinden doğmuştur. Bugün ise türev, matematikle beraber fizik, kimya, mühendislik ve ekonomi gibi uygulamalı bilimlerin hepsinde pek çok problemin çözümünü kolaylaştıran, bu nedenle büyük önem taşıyan bir kavramdır. Örneğin, bir malın toplam maliyet fonksiyonunu biliyorsak hangi üretim miktarında maliyetin en düşük düzeyde olacağını veya herhangi bir üretim miktarında maliyetin değişim hızını yani maliyetin hangi hızla artacağını veya azalacağını, benzer şekilde bir malın kâr fonksiyonunu bildiğimizde hangi satış miktarında kârın en yüksek olacağını, herhangi bir satış miktarında kârın hangi hızla artacağını veya azalacağını türev yardımıyla bulabilmekteyiz.

Yukarıdaki örnekler ve bunlara benzer problemlerde, birbirine bağlı iki değişken vardır ve bu değişkenlerden birisindeki bir değişiklik nedeniyle, diğerinde meydana gelen değişme söz konusudur. Bu tür problemlerde, değişme miktarından daha çok, değişmenin hızı önem taşımaktadır. Örneğin günümüzde benzin fiyatı zamanla değişmektedir ancak, benzin fiyatının bir ayda 100 000 lira artması ile bir yılda 100 000 lira artması arasında çok büyük fark vardır. Bu nedenle önemli olan değişikliğin hangi miktarda olduğu değil, hangi oranda olduğudur. Bu örnekle vurgulamaya çalıştığımız kavram, matematik anlamda bir fonksiyonun bir noktadaki anlık (değişme) hızıdır.

Bir fonksiyonun anlık hızına geçmeden önce ortalama hızını bir örnekle açıklayalım.

x mal miktarını göstermek üzere bir malın, milyon TL cinsinden toplam maliyet fonksiyonu

$$y = C(x) = 5000 + 100x - \frac{x^2}{4} \quad , \quad 0 \leq x \leq 300$$

olsun. Bu toplam maliyet fonksiyonuna göre 100 birim ve 110 birim malın maliyeti,

$C(100) = 5000 + 100 \,.\, 100 - 2500 = 12{,}5$ *Milyar TL,*

$C(110) = 5000 + 100 \,.\, 110 - 3025 = 12{,}975$ *Milyar TL*

dir.

Bu malın $[100,\ 110]$ *aralığında ortalama maliyeti,*

$$\frac{C(110) - C(100)}{10} = 47{,}5 \text{ Milyon TL / mal birimi}$$

dir. İşte bu değere C *toplam maliyet fonksiyonunun* $[100,\ 110]$ *aralığındaki* ***ortalama hızı*** *diyoruz.*

Genel olarak, bir $y = f(x)$ *fonksiyonunda* x *bağımsız değişkeni bir* x_1 *noktasından* x_2 *noktasına* ($x_1 < x_2$ *olmak zorunda değildir) değiştiğinde fonksiyon değerlerinde meydana gelen değişiklik miktarı* $f(x_2) - f(x_1)$ *dir. Bu durumda*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

oranına fonksiyonun $[x_1,\ x_2]$ *aralığındaki ortalama hızı denir. Burada eğer* $x_2 < x_1$ *ise* $[x_2,\ x_1]$ *aralığındaki ortalama hızdan söz etmeliyiz.*

Şimdi de anlık hızı bir örnekle açıklayalım. Anlık (değişme) hızını yukarıdaki toplam maliyet fonksiyonu üzerinde açıklayabilirdik. Bunun için, uzunluğu birim uzunluktan çok daha küçük aralıklar üzerindeki ortalama hızlarından söz etmemiz gerekmektedir. Bunun matematik açısından hiçbir sakıncası olmamasına karşılık çok küçük kesirli miktarda mal miktarlarından söz etmemiz size anlamlı gelmeyebilir. Bunun yerine kavramı, ilk öğrenenler için daha anlaşılabilir hale getireceği inancıyla, hareketli bir cismin anlık hızının bulunması problemiyle açıklamaya çalışacağız. Bu arada şunu da ifade edelim ki bazı ekonomik problemler tamamen pozitif tam sayılarla ilgili olabilir. Dolayısıyla bu problemlerle ilgili fonksiyonlar da pozitif tam sayılar kümesi üzerinde tanımlı olur. Bu fonksiyonların özellikleri incelenirken bu fonksiyonlar yerine bunların gerçel sayılar kümesinin uygun bir alt kümesine genişletilmişleri alınarak inceleme yapılır. Şimdi anlık hız konusunu açıklayalım.

Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin aldığı yol, zamanın fonksiyonu olarak, t saniye (sn), s metre (m) olmak üzere,

$s = s(t) = 20t + 3t^2$

olsun.

Bu hareketlinin başlangıçtan ($t = 0$ *anından) itibaren ilk 2 saniyede aldığı yol* , $s(2) = 20 \,.\, 2 + 3 \,.\, 2^2 = 52$ *m, ilk 10 saniyede aldığı yol,* $s(10) = 20 \,.\, 10 + 3 \,.\, 10^2 = 500$ *m. dir.*

Bu hareketlinin 2' inci saniye ile 10' ncu saniye arasında aldığı yol $s(10) - s(2) = 500 - 52 = 448$ *m. dir. Buna göre,* s *yol fonksiyonunun diğer bir deyişle hareketlinin* $[2,\ 10]$ *aralığındaki ortalama hızı,*

$$\frac{s(10) - s(2)}{10 - 2} = \frac{500 - 52}{8} = 56 \text{ m/sn}$$

dir. Aynı cismin $[2,\ 3]$ *aralığındaki ortalama hızı,*

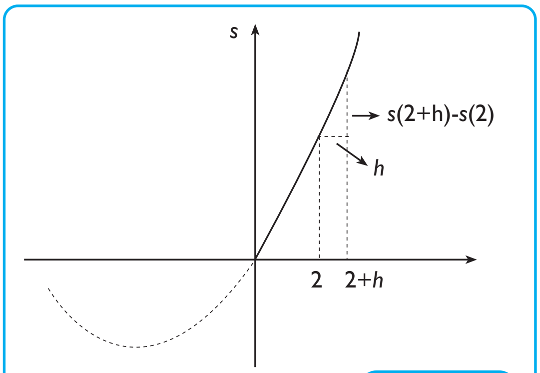
$$\frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{87 - 52}{1} = 35 \text{ m/sn} \ ,$$

$[2,\ 2{,}5]$ *aralığındaki ortalama hızı ise,*

$$\frac{s(2{,}5)-s(2)}{2{,}5-2}=\frac{68{,}75-52}{0{,}5}=33{,}5\ m/sn$$

dir. Şimdi bu cismin tam 2' inci saniyede radara girdiğini düşünelim. Acaba bu anda yani tam 2-inci saniyede cismin hızı nedir?

Bu soruya cevap vermek için ortalama hızdan yararlanalım. Zamana $t=2$ *anından itibaren* h *ile gösterdiğimiz (küçük) bir artış verelim ve* $[2,\ 2+\mathrm{h}]$ *aralığındaki ortalama hızı bulalım.*



Şekil 6.1

$$\begin{aligned} s(2+\mathrm{h}) &= 20(2+\mathrm{h})+3(2+\mathrm{h})^2 \\ &= 40+20\,.\,\mathrm{h}+12+12\mathrm{h}+3\mathrm{h}^2 \\ &= 52+32\,.\,\mathrm{h}+3\mathrm{h}^2 \end{aligned}$$

$s(2)=52\ m$ *olduğundan*

$$\frac{s(2+\mathrm{h})-s(2)}{(2+\mathrm{h})-2}=\frac{52+32\,.\,\mathrm{h}+3\,.\,\mathrm{h}^2-52}{\mathrm{h}}=32+3\mathrm{h}\ m/sn$$

dir.

Buna göre s *fonksiyonunun* $[2,\ 2+\mathrm{h}]$ *aralığındaki ortalama hızı* $32+3\mathrm{h}$ *m/sn dir. Bu hızın* $\mathrm{h}\to 0$ *için (varsa) limitini, hareketlinin* $t=2$ *anındaki hızı olarak almak oldukça akla yakın görünmektedir. İşte, varlığı halinde, bu limit değere cismin* $t=2$ *anındaki* ***anlık (değişme) hızı*** *veya* kısaca ***anlık hızı*** *denir. Bu durumda* $t=2$ *anındaki anlık hız,*

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{s(2+\mathrm{h})-s(2)}{(2+\mathrm{h})-2}=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\left(32+3\,.\,\mathrm{h}\right)=32\ m/sn$$

dir.

Bu örnekte anlık hız olan bu limit değer, benzer problemlerde teğet eğimi, marjinal maliyet, marjinal gelir gibi anlamlar taşır. Bu anlık (değişme) hızlarının genel adı ***türevdir.*** *Örneğin yukarıda bulduğumuz 32 değeri* $s(t)=20t+3t^2$ *fonksiyonunun* $t=2$ *noktasındaki türevidir.*

Türevin kesin tanımını vermeden önce bir konuya açıklık getirelim. Uygulamada karşılaşılan fonksiyonların tanım kümeleri genellikle bir aralıktır. Bazı özel durumlarda da sonlu tane aralığın ayrık birleşimi biçimindedir. Bu nedenle, tanım kümesi bir aralık olan fonksiyonların türevlerini inceleleyeceğiz.

TÜREV KAVRAMI

$f:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0\in(a,\ b)$ verilsin. $x\neq x_0$ ve $x\in[a,\ b]$ olmak üzere

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

oranına f fonksiyonunun $[x_0,\ x]$ (veya $[x,\ x_0]$) aralığında ortalama hızı, $x\to x_0$ için ortalama hızın varsa limitine de f fonksiyonunun x_0 noktasındaki **türevi** denir ve

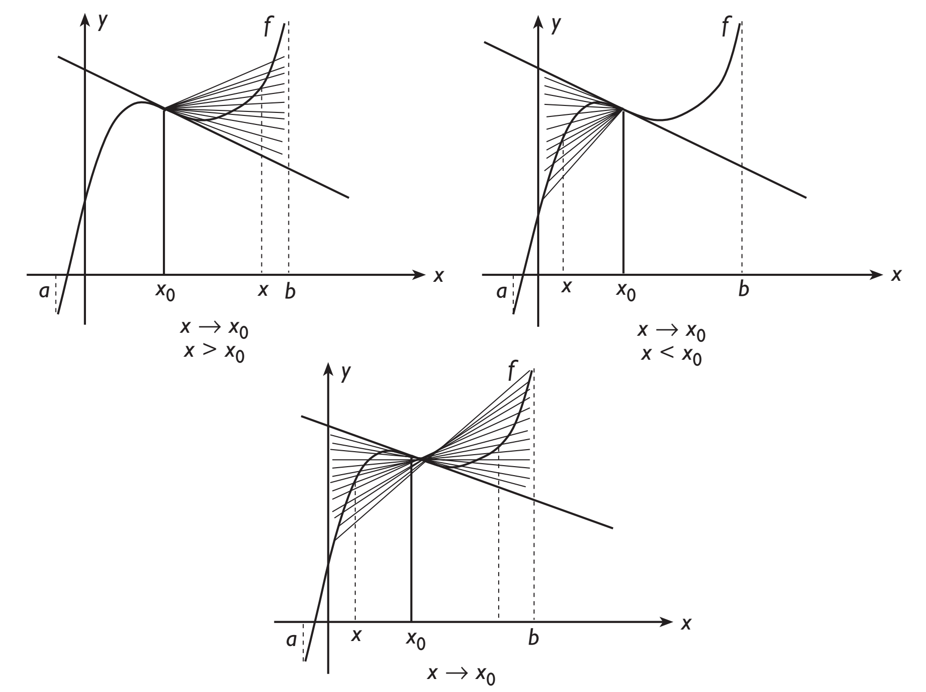
$$f'(x_0)\quad,\quad\frac{df(x_0)}{dx}\quad,\quad\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

biçiminde gösterilir. Buna göre,

$$\boldsymbol{f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

dir.

Eğer $f'(x_0)$ varsa, f fonksiyonuna $\boldsymbol{x_0}$ **noktasında türevlenebilir fonksiyon** denir.



Şekil 6.2

Yandaki şekilde, x in x_0 a yaklaşması durumunda eğri üzerindeki x ve x_0 apsisli noktalardan geçen kesenlerin hareketlerini inceleyiniz. Yukarıdaki limitin varlığı halinde bu kesenlerin belli bir doğruya "yaklaştığını" görmeye çalışınız. Bu doğruya teğet dediğimizi hatırlayınız.

Türev tanımında x_0 noktasını $[a,\ b]$ aralığının bir iç noktası almıştık. $[a,\ b]$ aralığının uç noktalarında türev şu şekilde tanımlanır.

Eğer $x_0=a$ ise x bağımsız değişkeninin a ya, a dan küçük değerlerle (soldan) yaklaşması mümkün olmadığından

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

sağdan limiti varsa, bu limite f fonksiyonun a noktasındaki türevi diyeceğiz. Benzer şekilde

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

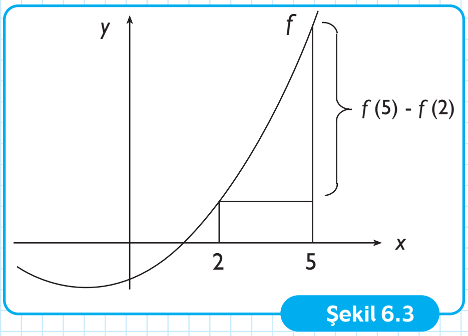
soldan limiti varsa, bu limit değere de f fonksiyonunun b noktasındaki türevi diyeceğiz.
f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığının her noktasında türevi varsa, bu durumda f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığı üzerinde türevlenebilir fonksiyondur veya kısaca türevlenebilir fonksiyondur denir.

ÖRNEK 1 ***$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 4$ fonksiyonunun $[2, 5]$ aralığında ortalama hızını ve $x = 2$ noktasındaki türevini bulalım.***

ÇÖZÜM

$f(2) = 2^2 + 3 \,.\, 2 - 4 = 6$
$f(5) = 5^2 + 3 \,.\, 5 - 4 = 36$

$$\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{36 - 6}{3} = 10$$



Şekil 6.3

Buna göre fonksiyonun $[2, 5]$ aralığında ortalama hızı 10 dur.
Şimdi f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki türevini araştıralım:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 4 - \left(2^2 + 3 \,.\, 2 - 4\right)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 5)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x + 5) = 7$$

O halde $f'(2) = 7$ dir.

Bağımsız değişken x_0 dan x e değiştiğinde; değişme miktarı $x - x_0$ dır. Bu değer genellikle Δx (delta x) ile gösterilir. $x > x_0$ ise $\Delta x > 0$, $x < x_0$ ise $\Delta x < 0$ olacağı açıktır. Her iki durumda da Δx e x in artma miktarı denir.

$x - x_0 = \Delta x$ ise $x = x_0 + \Delta x$ ve $x \to x_0$ için $\Delta x \to 0$ olacağından varlığı halinde $f'(x_0)$ türevi şu şekilde de tanımlanabilir:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Burada, $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ dersek,

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

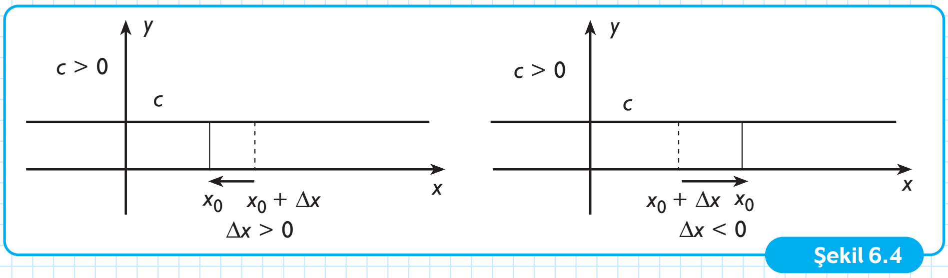
olur.

Buna göre türev, bağımsız değişkene verilen bir artmaya karşılık, fonksiyonun aldığı artmanın, değişkenin aldığı artmaya oranının, bağımsız değişkene verilen artmanın sıfıra yaklaşması halinde varsa limitidir. Yani türev, x bağımsız değişkenine verilen Δx artmasına karşılık fonksiyonun aldığı artma Δy olmak üzere, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ oranının $\Delta x \to 0$ için varsa limitidir.

ÖRNEK 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında türevini araştıralım.

ÇÖZÜM



Şekil 6.4

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

olduğundan $f'(x_0) = 0$ bulunur. Burada x_0 keyfi seçildiğinden her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 0$ dır diyebiliriz.

$f(x) = c$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 0$ dır. Sabit fonksiyonun her noktada türevi vardır ve sıfırdır.

Sabit fonksiyonun her noktada türevi vardır ve sıfırdır.

ÖRNEK 3

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ birim fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında varsa türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x$ olduğundan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$f'(x_0) = 1$ bulunur. Burada da x_0 keyfi seçildiğinden her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 1$ dir.

$f(x) = x$ birim fonksiyonunun her noktada türevi vardır ve 1 e eşittir.

$f(x) = x$ birim fonksiyonunun her noktada türevi vardır ve 1 e eşittir.

ÖRNEK 4

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında varsa türevini bulalım.

ÇÖZÜM

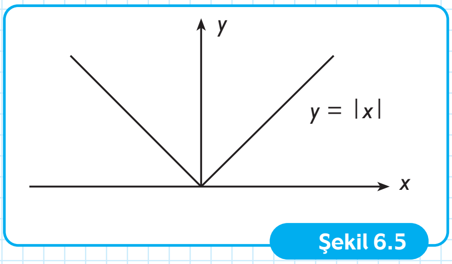
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

burada $\Delta x > 0$ ise $|\Delta x| = \Delta x$, $\Delta x < 0$ ise $|\Delta x| = -\Delta x$ olduğundan

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

dir. Buna göre $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$



Şekil 6.5

limiti yoktur. Dolayısıyla $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevi yoktur.

DİKKAT

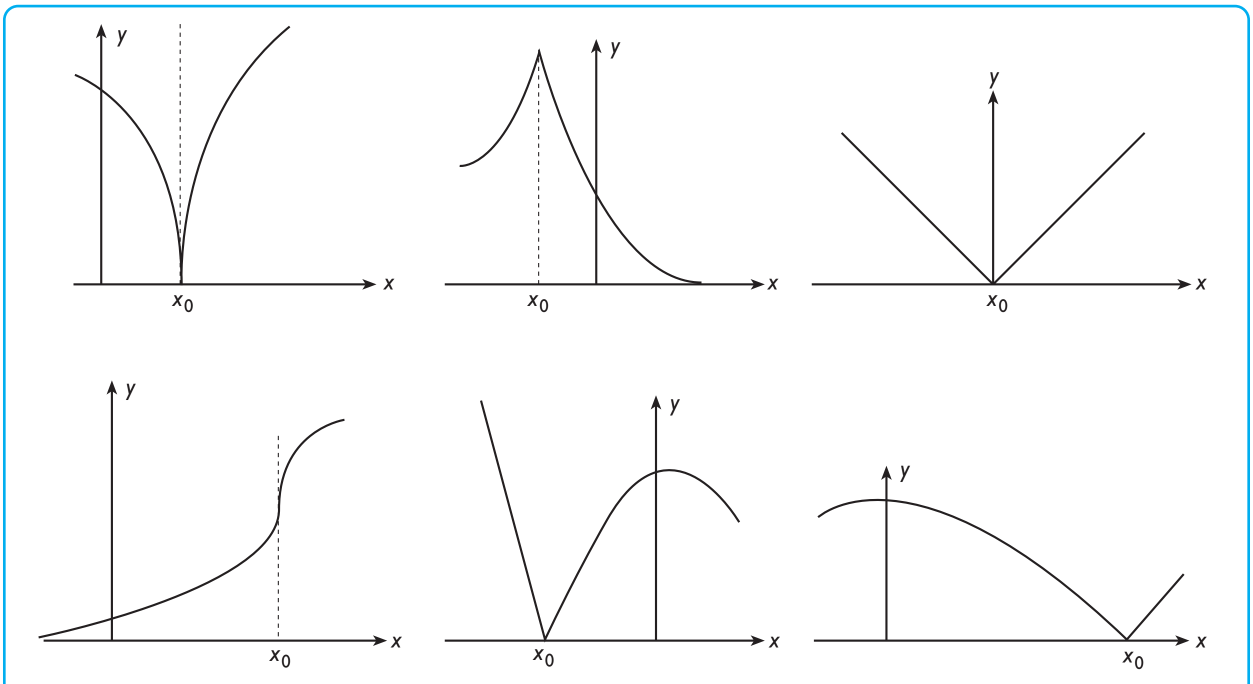
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = -2$ noktasındaki türevinin -1, $x = 3$ noktasındaki türevinin 1 olduğunu gösteriniz.

$f(x) = |x|$ fonksiyonunun sadece $x = 0$ noktasında türevi yoktur. Bunun dışında her noktada türevi vardır. Fonksiyonun grafiğine dikkat ederseniz (0, 0) noktası bir "köşe" noktadır.

Bir fonksiyonun bir noktada türevlenebilir olmasıyla bu noktadaki sürekliliği arasında yakın bir ilişki vardır.

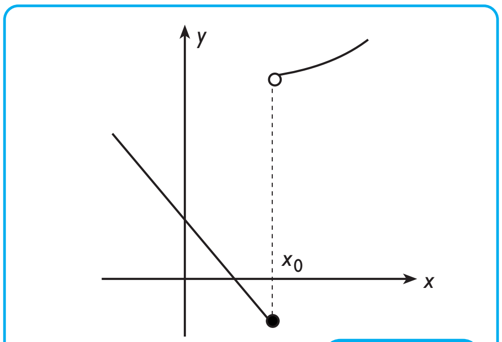
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevi varsa, f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir. Bir fonksiyon bir noktada sürekli olduğu halde bu noktada türevi olmayabilir. Örneğin $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında süreklidir. Yukarıda gördüğümüz gibi bu noktada türevi yoktur.

Aşağıdaki grafiklerde verilen x_0 noktalarında fonksiyonların türevleri yoktur. Bu noktalarda bazı fonksiyonların sürekli olmadığına, bazılarında da grafiğin çeşitli biçimlerde "uç" veya "köşe" oluşturduğuna dikkat ediniz.



Şekil 6.6

Bir fonksiyon bir noktada sürekli değilse, bu noktada türevi yoktur.



Şekil 6.7

ÖRNEK 5

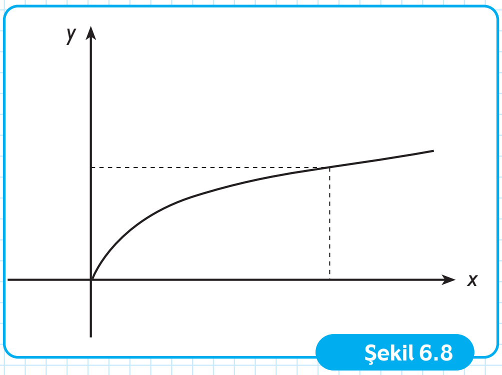
$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında varsa türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty$$

burada $\Delta x > 0$ olduğundan limit ∞ olur. Bu limit sonlu bir değer olmadığından $x = 0$ da türev yoktur. Bununla beraber bu limitin ∞ olması bu noktada, yandaki grafikte görüldüğü gibi, düşey bir teğetin varlığını ifade eder.



Şekil 6.8

SIRA SİZDE 1

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 3$ fonksiyonunun bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevini bulunuz.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$ fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = -1$ noktalarında türevini bulunuz.

TÜREV KURALLARI

Yukarıdaki örneklerden kısmen de olsa gördüğümüz gibi bir fonksiyonun türevini, türevin tanımını kullanarak hesaplamak bazen uzun ve yorucu işlemler gerektirebilir. Bu konuda türev kuralları diyebileceğimiz bazı özellikler, bize yardımcı olmaktadır.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

fonksiyonlarının bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevleri olsun. Bu durumda,

Kural 1: $f + g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\boldsymbol{(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

dır.

Türevlenebilir iki fonksiyonun toplamının türevi, fonksiyonların türevlerinin toplamına eşittir.

ÖRNEK 6

h *: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, h $(x) = x + 10$ **fonksiyonunun bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevini bulalım.***

ÇÖZÜM

h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, h $(x) = x + 10$ fonksiyonunu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ birim fonksiyonu ile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 10$ sabit fonksiyonunun toplamı olarak düşünebiliriz. Birim fonksiyonun ve sabit fonksiyonun her noktada türevi olduğundan h fonksiyonunun her noktada türevi vardır.

h $(x) = f(x) + g(x)$ olduğundan $h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ dır.

$f'(x_0) = (x)' = 1$, $g'(x_0) = (10)' = 0$ olduğundan

$h'(x_0) = 1 + 0 = 1$ dir.

O halde $f(x) = x + 10$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 1$ dir.

Kural 2: $f \, . \, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(f \, . \, g)(x) = f(x) \, . \, g(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\boldsymbol{(f \, . \, g)'(x_0) = f'(x_0) \, . \, g(x_0) + g'(x_0) \, . \, f(x_0)}$$

dır.

Dikkat ederseniz, çarpımın türevi türevler çarpımına **eşit değildir.**

ÖRNEK 7

h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, h $(x) = x^2$ *fonksiyonunun bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevini bulalım.*

ÇÖZÜM

h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu $f(x) = x$ olmak üzere, $h(x) = f(x) \, . \, f(x)$ biçiminde düşünülebilir. Buna göre,

$$h'(x_0) = f'(x_0) \, . \, f(x_0) + f(x_0) \, . \, f'(x_0)$$

dır. $f'(x_0) = 1$ olduğundan

$$h'(x_0) = 1 \, . \, x_0 + x_0 \, . \, 1 = 2x_0$$

dır. x_0 keyfi olduğundan $f(x) = x^2$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 2x$ tir diyebiliriz. Kural 2 de, özel olarak $g(x) = c$ sabit fonksiyonu alınırsa, sabit fonksiyonun türevi sıfır olduğundan

$$\boldsymbol{(c f)'(x_0) = c f'(x_0)}$$

olur. Yani bir fonksiyonun bir sabit ile çarpımının türevi, fonksiyonun türevinin bu sabit ile çarpımına eşittir.

Bir fonksiyonun bir sabit ile çarpımının türevi, fonksiyonun türevinin bu sabit ile çarpımına eşittir.

$f(x) = 8x + 13$ fonksiyonunun türevini türev kuralları yardımıyla kolayca bulabiliriz.

$$f(x) = 8x + 13 \text{ ise her } x \in \mathbb{R} \text{ için } f'(x) = (8x)' + (13)' = 8 \, . \, (x)' + 0 = 8 \, . \, 1 = 8$$

Bu durumda $y = f(x) = 8x + 13$ dersek $\dfrac{dy}{dx} = 8$ veya $y' = 8$ yazılır.

ÖRNEK 8

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 6x - 7$ fonksiyonunun bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında türevini bulalım.

ÇÖZÜM

$f(x) = 3x^2 + 6x - 7$ ise

$$f'(x) = (3x^2)' + (6x)' + (-7)' = 3(x^2)' + 6(x)' + 0$$
$$= 3 \,.\, 2x + 6 \,.\, 1 = 6x + 6$$

$y = 3x^2 + 6x - 7$ dersek $\dfrac{dy}{dx} = 6x + 6$ veya $y' = 6x + 6$ veya

$f'(x) = 6x + 6$ yazılır.

SIRA SİZDE 2

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

1. $f(x) = -4x + \sqrt{2}$
2. $g(x) = x^2 + 3x - 1$
3. $k(x) = \sqrt{3}\, x - \dfrac{1}{2}$
4. $l(x) = \dfrac{x}{5} - x^2$

Kural 3: $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, olmak üzere

$$c_1 f + c_2 g : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad (c_1 f + c_2 g)(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\mathbf{(c_1 f + c_2 g)'(x_0) = c_1 f'(x_0) + c_2 g'(x_0)}$$

dır. Burada özel olarak $c_0 = 1$, $c_0 = -1$ alınırsa

Farkın türevi türevler farkına eşittir.

$$\mathbf{(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)}$$

sonucu elde edilir.

Kural 4: Her $x \in [a, b]$ için $g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{f}{g} : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\mathbf{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

Bölümün türevi türevler bölümüne **eşit değildir**.

dır. Özel olarak $f(x) = 1$ sabit fonksiyonu olursa,

$$\mathbf{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

sonucu elde edilir.

ÖRNEK 9

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$

fonksiyonunun $x \in \mathbb{R}$ *noktasında türevini bulalım.*

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{(2x+1)'(x^2+3) - (x^2+3)'(2x+1)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2 \,.\, (x^2+3) - 2x(2x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^2+6-4x^2-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}$$

$y = \dfrac{2x+1}{x^2+3}$ dersek, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}$

olur.

Kural 5: $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $x \in (0, \infty)$ noktasındaki türevi

$$f'(x) = r\,x^{r-1}$$

dir.

$$\boldsymbol{f(x) = x^r \quad \text{ise} \quad f'(x) = rx^{r-1},\ x > 0,\ r \in \mathbb{R}}$$

ÖRNEK 10

$f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *ise* $f'(x) = ?$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ÖRNEK 11

$f(x) = \dfrac{3x^2+5}{2x+7}$ ***ise*** $f'(-1) = ?$

ÇÖZÜM

$f'(-1)$ sayısını bulmak için önce $f'(x)$ türevini bulup daha sonra x yerine -1 yazmak yeterlidir.

$$f'(x) = \frac{6x\,(2x+7) - 2\,.\,(3x^2+5)}{(2x+7)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 42x - 6x^2 - 10}{(2x+7)^2} = \frac{6x^2 + 42x - 10}{(2x+7)^2},$$

$$f'(-1) = \frac{6\,(-1)^2 + 42\,.\,(-1) - 10}{(2\,(-1) + 7)^2} = \frac{6 - 42 - 10}{5^2} = \frac{-46}{25}$$

ÖRNEK 12

$f(x) = \sqrt{x}\ (3x-1)$ ***ise*** $f'(x) = ?$

ÇÖZÜM

I. YOL

$$f'(x) = (\sqrt{x})'(3x-1) + (3x-1)'\sqrt{x}$$

$$= (x^{1/2})'(3x-1) + 3\,.\,\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}(3x-1) + 3\sqrt{x}$$

$$= \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}\,.\,x^{-1/2} + 3\sqrt{x} = \left(\frac{3}{2} + 3\right)\sqrt{x} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

II. YOL

$$f(x) = \sqrt{x}\ (3x-1) = 3x\sqrt{x} - \sqrt{x} = 3x^{3/2} - x^{1/2}$$

yazabiliriz. Buna göre,

$$f'(x) = \frac{9}{2}x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

bulunur.

Şimdi ünite girişinde ele aldığımız

$$C(x) = 5000 + 100x - \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 300$$

toplam maliyet fonksiyonunun, çeşitli noktalardaki anlık hızlarını, diğer bir deyişle, türevlerini bulalım.

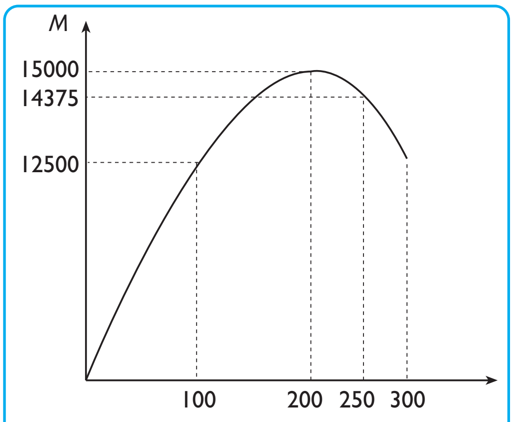
$$C'(x) = 100 - \frac{2x}{4} = 100 - \frac{x}{2}$$

dir.

$$C'(100) = 100 - \frac{100}{2} = 50 \text{ Milyon TL/Mal birimi,}$$

$$C'(250) = 100 - \frac{250}{2} = -25 \text{ Milyon TL/Mal birimi}$$

Dikkat ederseniz $C'(100)$ pozitif değer iken $C'(250)$ negatif bir değerdir. Bunun anlamı, 100 birimlik üretim miktarı civarında maliyet yaklaşık 50 Milyon TL/Mal Birimi hızla artarken, 250 birimlik üretim miktarı civarında maliyet yaklaşık 25 Milyon TL/Mal Birimi hızla azalacak demektir. Bu durumu fonksiyonun grafiğinden de görmek mümkündür.



Şekil 6.9

ÖRNEK 13

Bir firma x milyar TL reklam harcaması yaptığında

$N(x) = -2{,}8x^3 + 165x^2 - 580x + 1900, \quad 0 \le x \le 40$

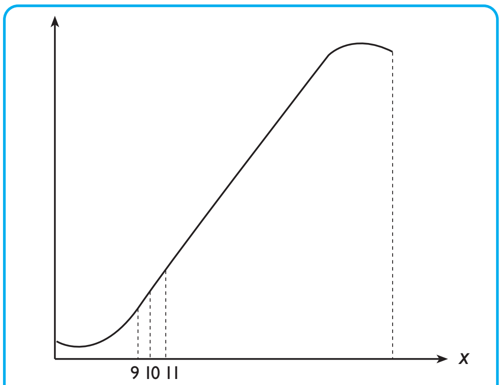
birim mal satacağını hesaplamıştır. Buna göre, $x = 10$ (milyar TL) noktasında satılacak mal miktarının anlık değişme hızını bulalım.

ÇÖZÜM

$x = 10$ noktasındaki anlık hız $N'(10)$ olduğundan $N'(10)$ sayısını bulmamız gerekmektedir. Bunun için önce $N'(x)$ i bulalım.

$$\begin{aligned} N'(x) &= -8{,}4x^2 + 330x - 580 \\ N'(10) &= -8{,}4 \cdot 100 + 330 \cdot 10 - 580 \\ &= -840 + 3300 - 580 \\ &= 1880 \end{aligned}$$

Buna göre, 10 milyar TL reklam harcaması yapıldığında satılacak mal miktarının artış hızı 1880 dir.



Şekil 6.10

Kural 6: $f : [a,\ b\,] \to \mathbb{R}$, $g : [c,\ d\,] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin ve $f(\,[a,\ b\,]\,) \subset [c,\ d\,]$ olsun. f fonksiyonunun $x_0 \in [a,\ b\,]$ noktasında, g fonksiyonunun $y_0 = f(x_0) \in [c,\ d\,]$ noktasında türevi varsa, bu durumda

$$gof : [a,\ b\,] \to \mathbb{R},\ \ (gof)\,(x) = g\,(\,f(x)\,)$$

bileşke fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır ve

$$\boldsymbol{(gof\,)'\,(x_0) = g'\,(f\,(x_0)\,)\,.\,f'\,(x_0)}$$

dir. İşlem kolaylığı bakımından gof bileşke fonksiyonunda

$$y = (gof)\,(x) = g\,(f\,(x)\,) = g\,(u)\ ,\qquad u = f\,(x)$$

dersek yukarıdaki kural kısaca

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna **zincir kuralı** denir.

ÖRNEK 14

h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{h}\,(x) = (2x^2 - x + 1)^3$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasındaki türevini bulalım.

ÇÖZÜM

h fonksiyonunu, $\mathbb{R}$ de tanımlı

$$u = f\,(x) = 2x^2 - x + 1 \quad \text{ve} \quad g\,(u) = u^3$$

fonksiyonlarının bileşkesi olarak düşünebiliriz. Buna göre,

$$y = \mathrm{h}\,(x) = (gof)\,(x) = g\,(f\,(x)) = g\,(u) = u^3\ ,\quad u = 2x^2 - x + 1$$

olur.

$$\mathrm{h}'\,(x) = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3u^2\,.\,(4x - 1) = 3\left(2x^2 - x + 1\right)^2\left(4x - 1\right)$$

olur. Buradan

$$\mathrm{h}'(1) = 3\,(2\,.\,1^2 - 1 + 1)^2\,(4\,.\,1 - 1) = 3\,.\,4\,.\,3 = 36$$

bulunur.

Zincir kuralı yardımıyla şu sonucu ifade edebiliriz.
$f : [a,\ b\,] \to \mathbb{R}^+$ türevi olan bir fonksiyon olmak üzere,

$$\mathrm{h} : [a,\ b\,] \to \mathbb{R}\ ,\quad \mathrm{h}\,(x) = [\,f\,(x)\,]^r\ ,\quad r \in \mathbb{R}$$

fonksiyonunun türevi

$$\mathrm{h}'\,(x) = r\,[\,f\,(x)]^{(r-1)}\,.\,f'\,(x)$$

dir.

$$\mathbf{h}(x) = [f(x)]^r \Rightarrow \mathbf{h}'(x) = r\,[f(x)]^{r-1} \cdot f'(x)$$

dir.

ÖRNEK 15

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4x^4 - 8x^2 + 8}$ fonksiyonu verilsin. $f'(-1) = ?$

ÇÖZÜM

$$f(x) = (4x^4 - 8x^2 + 8)^{1/2}$$

yazılabilir. Yukarıda verdiğimiz kurala göre,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4x^4 - 8x^2 + 8\right)^{-1/2}\left(16x^3 - 16x\right)$$

$$f'(-1) = \frac{1}{2}\left(4 - 8 + 8\right)^{-1/2}\left(-16 + 16\right) = 0$$

bulunur.

Şimdi buraya kadar verdiğimiz türev kurallarını toplu halde görelim.

$$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R} \text{ ise } f'(x) = 0$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(f.g)'(x) = f'(x) \,.\, g(x) + g'(x) \,.\, f(x)$$

$$(cf)'(x) = c\,f'(x)\ ,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)\,.\,f(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(fog)'(x) = \left[f(g(x))\right]' = f'\left(g(x)\right).\ g'(x)$$

$$\left(x^r\right)' = rx^{r-1}\ ,\ x > 0\ ,\ r \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\ ,\ f(x) > 0$$

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\left(f(x)\right)^{n-1}}}\ ,\ n \text{ çift ise } f(x) > 0$$

$$\left[\left(f(x)\right)^r\right]' = r\left(f(x)\right)^{r-1}.\ f'(x)\ ,\ f(x) > 0\ ,\ r \in \mathbb{R}$$

ÖRNEK 16

$f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x-2}}$ ***ise*** $f'(6) = ?$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{(3x)'\sqrt{x-2} - \left(\sqrt{x-2}\right)' 3x}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{x-2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \cdot 3x}{x-2}$$

$$= \frac{6(x-2) - 3x}{2 \cdot (x-2)\sqrt{x-2}} = \frac{3x-12}{2 \cdot (x-2)\sqrt{x-2}}$$

$$f'(6) = \frac{3 \cdot 6 - 12}{2 \cdot (6-2)\sqrt{6-2}} = \frac{6}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

ÖRNEK 17

$f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$ ***ise*** $f'(x) = ?$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \left(\frac{x}{x+1}\right)'$$

$$= 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x^2}{(x+1)^4}$$

ÖRNEK 18

$f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+5}}$ ***ise*** $f'(x) = ?$

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)'}{2\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+5}}} = \frac{\dfrac{3(2x+5) - 2(3x-1)}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+5}}}$$

$$= \frac{\dfrac{17}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\dfrac{3x-1}{2x+5}}} = \frac{17}{2(2x+5)^{3/2}\sqrt{3x-1}}$$

$$f : [a,\ b] \to [c,\ d]$$

fonksiyonu bire-bir, örten ve sürekli olsun. $x_0 \in [a,\ b]$ noktasında f fonksiyonunun türevi var ve $f'(x_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$f^{-1} : [c,\ d] \to [a,\ b]$$

ters fonksiyonunun $y_0 = f(x_0) \in [c, d]$ noktasında türevi vardır ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}$$

dır.

Örneğin $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun bir $x_0 \in (0, \infty)$ noktasında türevi vardır ve $f'(x_0) = 2x_0 \neq 0$ dır.

Bu durumda,

$$f^{-1} : (0, \infty) \to (0, \infty) \ , \ f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

fonksiyonunun $y_0 = f(x_0) = x_0^2$ noktasında türevi vardır ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

dır.

Bu sonucu $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ fonksiyonunun türevini alarak da bulabiliriz.

SIRA SİZDE 3

1. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ ise $f'(4) = ?$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$ ise $f'(-1) = ?$

3. $f(x) = (3 - 2x)^4$ ise $f'(1) = ?$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ ise $f'(x) = ?$

5. $f(x) = \sqrt[4]{x^3 + 2x + 19}$ ise $f'(-1) = ?$

6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$ ise $f'(-3) = ?$

7. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ ise $f'(x) = ?$

8. $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^{2/3}}$ ise $g'(8) = ?$

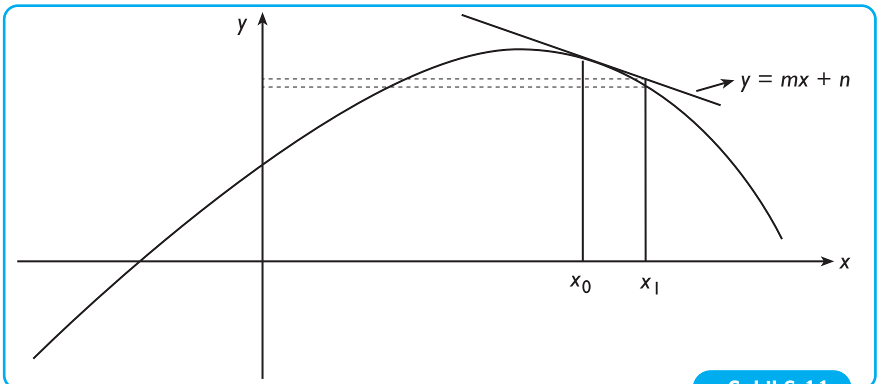
9. $k(x) = x\sqrt{x + 1}$ ise $k'(x) = ?$

10. $\mathrm{h}(x) = \dfrac{4}{7}x^{7/4} - \dfrac{5}{3}x^{-3/5}$ ise $\mathrm{h}'(1) = ?$

11. $m(x) = (x^{-3} - x^{-2} - 2)(x^3 + x^2 + 2)$ ise $m'(x) = ?$

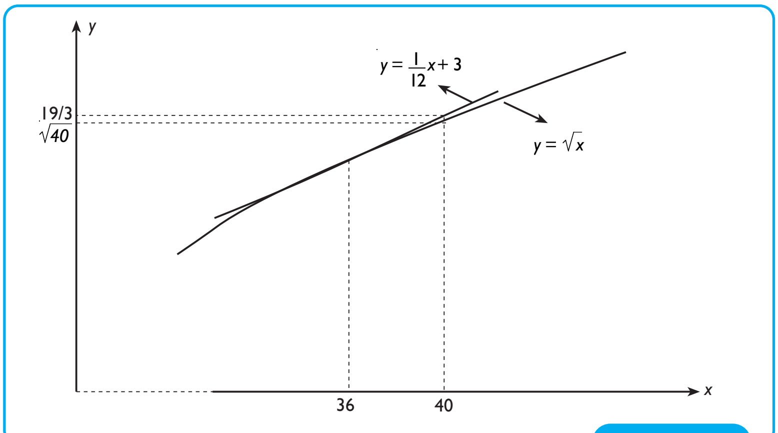
TEĞET DENKLEMİ

Bazı problemlerde karşımıza çıkan fonksiyonların ifadeleri oldukça karmaşık olabilir. Bunun sonucu olarak böyle fonksiyonlarla çalışmak da zorlaşır. Bu zorluğu aşmanın yollarından birisi bu karmaşık fonksiyon yerine, kabul edilebilir bir hatayla fonksiyona yakın değerler alan bir polinom fonksiyon almaktır. Böyle bir polinom fonksiyonun varlığı ve varlığı halinde şekli ile ilgili sorunun genel anlamda cevabı bu kitabın amacı dışındadır. Biz bir özel durumu burada ele alacağız. Bu özel durum, fonksiyonun x_1 gibi bir noktadaki değeri olarak, x_1 e yeteri kadar yakın, uygun bir x_0 noktasında eğrinin teğet doğrusu üzerinde x_1 apsisli noktanın ordinatının alınmasıdır.



Şekil 6.11

Biraz sonra göreceğimiz gibi, teğetin denklemi, birinci dereceden polinom fonksiyon (doğrusal fonksiyon) olduğundan, aranan değerin daha kolay bulunacağı açıktır. Örneğin $\sqrt{40}$ sayısı $y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x_1 = 40$ noktasındaki değeri demektir. $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $x_0 = 36$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemi (bu denklemi daha sonra bulacağız)



Şekil 6.12

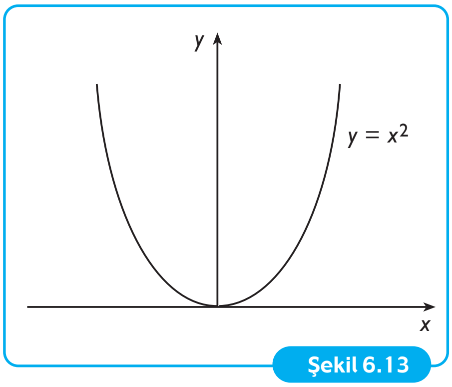
$y = \dfrac{1}{12}x + 3$ dür. İşte $\sqrt{40}$ sayısının bir yaklaşık değeri olarak

$$y = \frac{1}{12}40 + 3 = \frac{19}{3} = 6{,}333...$$

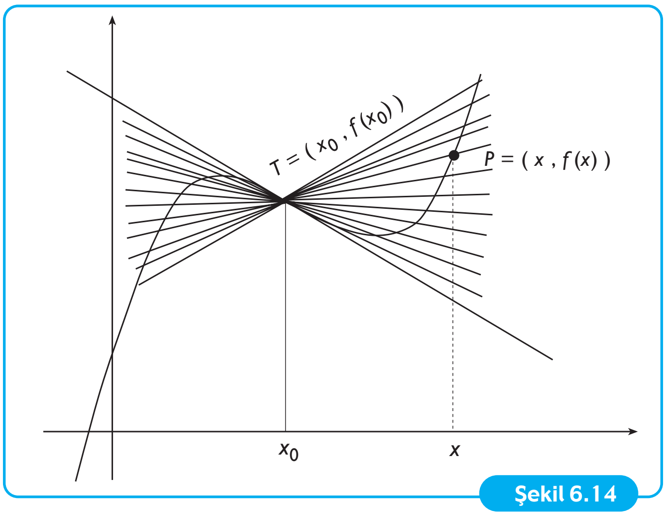
alabiliriz.

$$\sqrt{40} \cong 6{,}333...$$

Bu açıklama ve örneğe göre teğet denklemi oldukça yararlı görünmektedir. Ancak önce teğet nedir sorusuna cevap vermemiz gerekmektedir. Teğet deyince çoğumuz çemberin teğetini hatırlar ve eğriyi yalnız bir noktada kesen doğru olarak düşünürüz. Ancak bu düşünce her zaman doğru değildir. Örneğin; y - ekseni ($x = 0$ doğrusu) $y = x^2$ parabolünü tek noktada kesmesine karşılık, parabolün teğeti değildir.



Şekil 6.13



Şekil 6.14

Teğeti şu şekilde tanımlayabiliriz. Şekil 6.14te görüldüğü gibi $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği olan eğriyi ve bu eğri üzerinde sabit bir $T = (x_0 , f(x_0))$ noktasını ve bu eğri üzerinde Tden farklı $P = (x, f(x))$ noktasını alalım. Bu durumda TP keseninin eğimi

$$m_{TP} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

olur. P noktası eğri üzerinde T noktasına yaklaşırken (diğer bir deyişle $x \to x_0$, için) PT kesenleri belli bir limit konumuna yaklaşabilir, eğer m_{TP} eğimlerinin $x \to x_0$ için limiti varsa, yani

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti varsa, PT kesenleri belirli bir limit konuma yaklaşır. Bildiğiniz gibi bu limit f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevidir. İşte bu limit yani $f'(x_0)$ türevi varsa, f fonksiyonunun x_0 noktasında teğeti vardır diyeceğiz. Buna göre teğeti şöyle tanımlayabiliriz.

$(x_0 , f(x_0))$ noktasından geçen ve eğimi $f'(x_0)$ *a* eşit olan doğruya, f fonksiyonunun $(x_0 , f(x_0))$ noktasındaki teğeti denir.

(x_0 , y_0) noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi $y - y_0 = m (x - x_0)$ idi. Teğet için bu denklem de $y_0 = f(x_0)$, $m = f'(x_0)$ olduğundan teğetin denklemi,

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

olur.

Örneğin, $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğinin, $x_0 = 36$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulalım. "Bu teğetin yukarıda sözünü ettiğimiz teğet olduğuna dikkat ediniz".

$f(x_0) = f(36) = \sqrt{36} = 6$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ olduğundan

$f'(36) = \dfrac{1}{2\sqrt{36}} = \dfrac{1}{12}$ dir. Buna göre,

$$y - 6 = \frac{1}{12}(x - 36)$$

$$y = \frac{1}{12}x - 3 + 6$$

$$y = \frac{1}{12}x + 3$$

bulunur.

SIRA SİZDE 4

1. $y = \sqrt{4 - x^2}$ eğrisinin $x = \sqrt{3}$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

2. $y = \dfrac{1}{x}$ eğrisinin $x = \dfrac{1}{2}$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Bir ekonomist için belirli bir miktar mal üretildiğinde bu malın toplam maliyetini bilmek kadar; herhangi bir üretim miktarında maliyetin değişim hızını bilmek de önemlidir.

Örneğin bir malın toplam maliyet fonksiyonu, x mal miktarı, $C(x)$ Milyon TL olmak üzere

$$C(x) = 0{,}2x + 10\sqrt{x} + 1000 \quad , \quad 0 \leq x \leq 100$$

olsun. Bu maldan 16 birim mal üretildikten sonraki 17-inci malın maliyeti,

$$\begin{aligned} C(17) - C(16) &= 0{,}2 \,.\, 17 + 10\sqrt{17} + 1000 - (0{,}2 \,.\, 16 + 10\sqrt{16} + 1000) \\ &\cong 0{,}2 + 10 \,.\, 4{,}123 - 4 \,.\, 10 \\ &\cong 1{,}43 \text{ Milyon TL} \end{aligned}$$

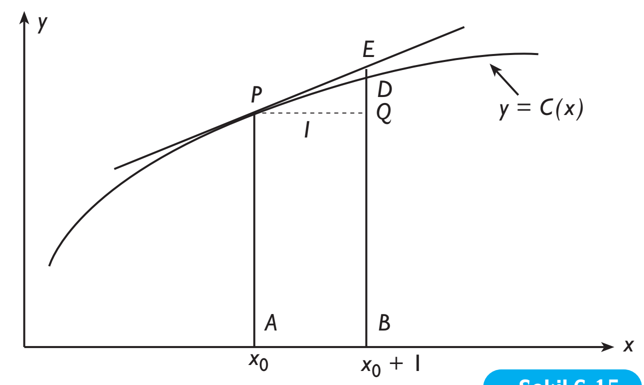
dir. Buna karşılık, 49 birim mal üretildikten sonraki 50-nci malın maliyeti

$$C(50) - C(49) = 0{,}2 \,.\, 50 + 10\sqrt{50} + 1000 - (0{,}2 \,.\, 49 + 10\sqrt{49} + 1000)$$
$$\cong 0{,}2 + 10 \,.\, 7{,}07 - 10 \,.\, 7$$
$$\cong 0{,}9 \text{ Milyon TL}$$

dir.

Gördüğünüz gibi maliyetin 16 noktasındaki ortalama artış hızıyla 49 noktasındaki ortalama artış hızı birbirinden farklıdır. Doğal olarak, bu noktalardaki anlık hızların da farklı olması beklenir. İşte toplam maliyet fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki anlık (değişim) hızına, diğer bir deyişle x_0 noktasındaki türevine, bu malın x_0 noktasındaki **marjinal maliyeti** denir.

Marjinal maliyet, x_0 apsisli noktadaki teğetin eğimi olduğundan $(x_0 + 1)$ inci malın yaklaşık maliyetini ifade eder. Bu durumu aşağıdaki şekilden açıkça görebiliriz.



Şekil 6.15

Yukarıdaki şekle göre,

$PA = QB = C(x_0)$, (x_0 birim malın maliyeti)
$DB = C(x_0 + 1)$, ($x_0 + 1$ birim malın maliyeti)
$DQ = DB - QB = C(x_0 + 1) - C(x_0)$, (($x_0 + 1$)- inci malın maliyeti)
$QP = (x_0 + 1) - x_0 = 1$
$EQ = C'(x_0)$, (x_0 noktasındaki marjinal maliyet)
$C'(x_0) = EQ \cong DQ = C(x_0 + 1) - C(x_0)$

ÖRNEK 19

$C(x) = 0{,}2x + 10\sqrt{x} + 1000$, $0 \le x \le 100$ ***toplam maliyet fonksiyonunun $x = 16$ ve $x = 49$ noktalarında marjinal maliyetini bulalım.***

ÇÖZÜM

Marjinal maliyet, toplam maliyet fonksiyonunun türevi olduğundan $C'(16)$ ve $C'(49)$ değerlerini bulmamız gerekiyor.

$$C'(x) = 0{,}2 + \frac{10}{2\sqrt{x}} = 0{,}2 + \frac{5}{\sqrt{x}}$$

$$C'(16) = 0{,}2 + \frac{5}{\sqrt{16}} = 0{,}2 + \frac{5}{4} = 1{,}45$$

$$C'(49) = 0{,}2 + \frac{5}{\sqrt{49}} = 0{,}2 + \frac{5}{7} = 0{,}91$$

Gördüğünüz gibi $C'(16)$ değeri yukarıda bulduğunuz 17 -inci malın maliyetine, $C'(49)$ değeri de 50 'inci malın maliyetine yakın bir değerdir. Bu nedenle

$C'(16) \cong 17$ ' inci malın maliyeti
$C'(49) \cong 50$ ' inci malın maliyeti

diyebiliriz.

Bir malın gelir fonksiyonunun bir noktadaki türevine, bu malın bu noktadaki **marjinal geliri** denir. Bir x_0 noktasındaki marjinal gelir de $(x_0 + 1)$-inci malın satışından elde edilen gelirin bir yaklaşık değerini ifade eder.

ÖRNEK 20

Bir malın gelir fonksiyonu x mal miktarı, R (x) Milyon TL olmak üzere

$$R(x) = 13x - \frac{x^2}{800} \quad , \quad 0 \leq x \leq 5000$$

dir. Bu malın x = 1000 noktasındaki marjinal gelirini bulalım.

ÇÖZÜM

$$R'(x) = 13 - \frac{x}{400}$$

$$R'(1000) = 13 - \frac{1000}{400} = 10{,}5$$

dir.

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde türevlenebilirse, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan ve her $x \in [a, b]$ sayısını f fonksiyonunun x noktasındaki türevine gönderen fonksiyona f nin türev fonksiyonu denir ve f' ile gösterilir. Buna göre,

$$f' : [a, b] \to \mathbb{R} \ , \ x \to f'(x)$$

dir.

Eğer f' fonksiyonunun bir $x_0 \in [a, b]$ noktasında türevi varsa, bu türeve f fonksiyonunun x_0 noktasında **ikinci mertebeden türevi** denir ve

$$f''(x_0) \quad , \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x = x_0} \quad , \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$$

biçiminde gösterilir.

f fonksiyonunun her $x \in [a, b]$ noktasında ikinci mertebeden türevi varsa,

$$f'' : [a\ ,\ b] \to \mathbb{R} \ \ , \ \ x \to f''(x)$$

fonksiyonuna f nin ikinci mertebeden türev fonksiyonu denir. f'' fonksiyonunun bir $x_0 \in [a, b]$ noktasındaki türevine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki üçüncü mertebeden türevi denir ve

$$f'''(x_0) \quad , \quad \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} \quad , \quad \left.\frac{d^3 y}{dx^3}\right|_{x = x_0}$$

biçiminde gösterilir.

Bu şekilde devam ederek $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere f fonksiyonunun n-inci mertebeden türevi tanımlanabilir. f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki n-inci mertebeden türevi

$$f^{(n)}(x_0) \quad , \quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} \quad , \quad \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x = x_0}$$

biçiminde gösterilir.

ÖRNEK 21

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + 6x - 4$ ***ise*** $f^{VI}(x) = ?$

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x^3 - 15x^2 + 6$ $\qquad$ $f^{IV}(x) = 12$

$f''(x) = 6x^2 - 30x$ $\qquad$ $f^{V}(x) = 0$

$f'''(x) = 12x - 30$ $\qquad$ $f^{VI}(x) = 0$

ÖRNEK 22

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ***ise*** $f^{IV}(x) = ?$

ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ olduğundan

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{IV}(x) = 24x^{-5} = \frac{24}{x^5}$$

olur.

SIRA SİZDE 5

1. $f(x) = \sqrt{x}$ ise $f'''(x) = ?$
2. $g(x) = x^4 - 5x + 6$ ise $g^{(6)}(x) = ?$
3. $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ise $h'''(8) = ?$
4. $k(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$ ise $k''(1) = ?$

Kendimizi Sınayalım

1. $f(x) = x^2 - 3x$ fonksiyonun $[-1, 3]$ aralığındaki ortalama hızı nedir?

a. -1
b. 0
c. $\frac{1}{2}$
d. 1
e. 2

2. $f(x) = \sqrt{x}\,(1 - x)^3$ ise $f'(4)$ değeri kaçtır?

a. $-\frac{243}{4}$
b. $-\frac{27}{4}$
c. $\frac{27}{4}$
d. $\frac{621}{4}$
e. 162

3. $f(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$ ise $f''(2)$ değeri kaçtır?

a. -4
b. -2
c. 2
d. 4
e. 10

4. $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 6}{\sqrt{x}}$ ise $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x}} - 6$
b. $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x\sqrt{x}}$
c. $\frac{3x^2 + 3x + 6}{2x\sqrt{x}}$
d. $(2x + 3)\,2\sqrt{x}$
e. $\frac{2x + 3}{x}$

5. $f(x) = (2x - 1)^6\,(5x - 7)$ fonksiyonu için $f'(0)$ değeri kaçtır?

a. 89
b. 60
c. 47
d. -47
e. -60

6. $f(x) = \sqrt[5]{3x^2 - 7x + 1}$ ise $f'(2)$ değeri kaçtır?

a. $\frac{1}{5}$
b. $\frac{2}{5}$
c. 1
d. $\frac{5}{2}$
e. 5

7. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$ ise $f'(64)$ değeri kaçtır?

a. $\frac{11}{192}$
b. $\frac{13}{192}$
c. $\frac{7}{48}$
d. $\frac{7}{16}$
e. $\frac{7}{12}$

8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ eğrisinin $x = 8$ noktasındaki teğetinin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $12y - x = 16$
b. $y - 12x = 16$
c. $3x - 4y = 16$
d. $3y - x = -2$
e. $12y - x = 94$

9. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ise $f'''(2)$ türev değeri kaçtır?

a. -6
b. -2
c. 2
d. 4
e. 6

10. x mal miktarı olmak üzere, bir malın milyon TL cinsinden toplam maliyet fonksiyonu,

$$C(x) = 25x + 240\sqrt{x} + 5000$$

dir. Buna göre 37. malın yaklaşık maliyeti kaç milyon TL'dir?

a. 43
b. 45
c. 5000
d. 7340
e. 7384

11. x mal miktarı olmak üzere, bir malın milyon TL cinsinden gelir fonksiyonu,

$$R(x) = 18x - \frac{x^2}{1000}$$

verilsin. Buna göre, $x = 2500$ noktasında marjinal gelir kaçtır?

a. 13
b. 12
c. 11
d. 10
e. 5

Biraz Daha Düşünelim

1. $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 6}{3x - 1}$ ise $f'(1)$ değeri kaçtır?

2. $g(x) = \sqrt[4]{3x^2 - 7x - 4}$ ise $g'(4)$ değeri kaçtır?

3. $h(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ ise $h'(2)$ değeri kaçtır?

Gottfried Wilhelm Von Leibniz

(1646 - 1716)

Diferansiyel ve integral hesabın kurucularından biri olan ünlü matematikçi, aynı zamanda hukuk, siyaset, tarih, mantık gibi bir çok alanda düşünce üreten evrensel deha.

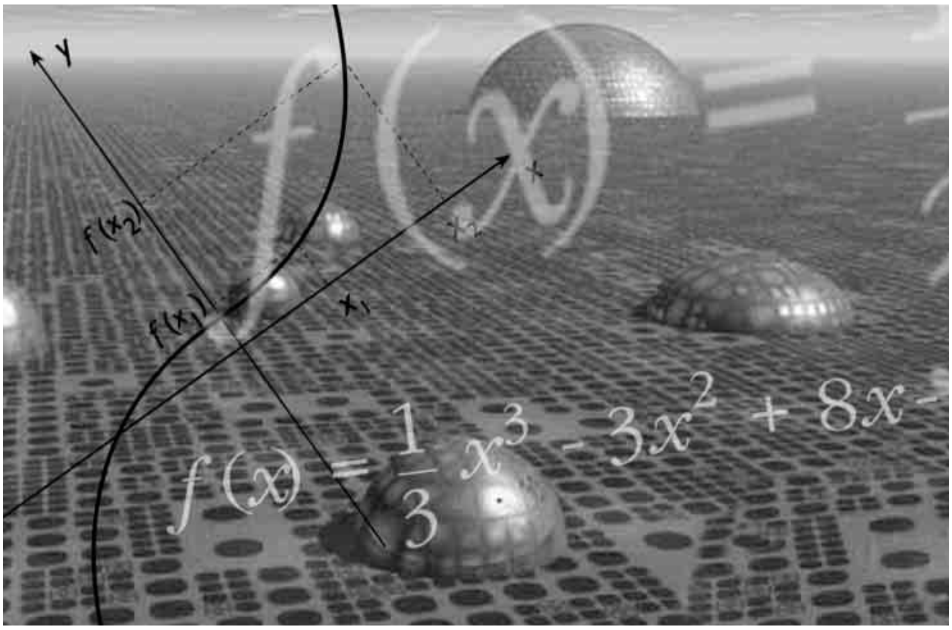
"Bende o kadar fikir var ki, şayet benden daha iyi görmesini bilenler bir gün onları derinleştirecek ve benim zihin emeğime kendi kafalarının güzelliğini katacak olurlarsa, sonraları belki bir işe yarayabilir."

G. LEIBNIZ

"Doğanın bütün olayları birkaç değişmeyen kanunun matematik sonuçlarıdır."

P. S. LAPLACE

7 Türev Uygulamaları



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *fonksiyonların artan ve azalan olduğu aralıkları bularak gelirin veya kârın yükseldiği veya düştüğü aralıkları belirleyecek,*
- *fonksiyonun belirli bölgedeki en büyük ve en küçük değerlerini bulabilecek,*
- *fonksiyonun grafiğinin yükseliş biçimini belirleyebilecek,*
- *fonksiyonun resmini, yani grafiğini, çizecek,*
- *en düşük maliyet, en yüksek kâr elde etmek gibi minimum ve maksimum problemlerini çözebileceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***Türev konusunu gözden geçiriniz.***
- ***Birinci ve ikinci mertebelerden türevlerin işaretlerinin önemine dikkat ediniz, bu amaçla denklem çözümü ve fonksiyonun işaretinin nasıl incelendiğini iyi öğreniniz.***
- ***Fonksiyonun grafiğine bakarak fonksiyonun davranışını anlamaya çalışınız.***

Giriş

Bu ünitede, türevin gerek matematik ve gerekse uygulamalı bilimler açısından önemli bazı uygulamalarını inceleyeceğiz. Bu amaçla bazı matematiksel kavramları açıklamadan önce şöyle bir problemi ele alalım:

Bir malın kâr fonksiyonu, x mal miktarı olmak üzere

$K(x) = -2x^2 + 496x - 1400, \quad 0 \leq x \leq 200$

olsun. Şimdi bazı üretim - satış miktarlarından elde edilecek kârları bulalım.

$K(110) = 28960, \quad K(120) = 29320$

$K(130) = 29280, \quad K(150) = 28000$

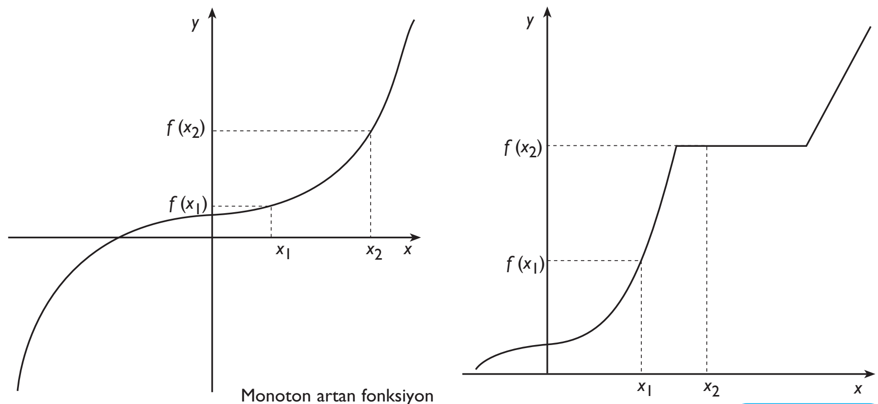
Dikkat ederseniz satılan mal miktarı 110 birimden 120 birime çıktığında kâr artarken, satılan mal miktarı 120' den 130' a ve devam ederek 150' ye çıktığında elde edilen kâr azalmaktadır. Bu gözleme göre şu sorular akla gelmektedir.

- *Hangi satış miktarlarında satış arttıkça kâr artmaktadır?*
- *En yüksek kâr hangi satış miktarında sağlanabilir?*

Bu ünitede bu ve benzeri sorulara cevap verebilmeye olanak sağlayacak matematiksel kavramları inceleyeceğiz.

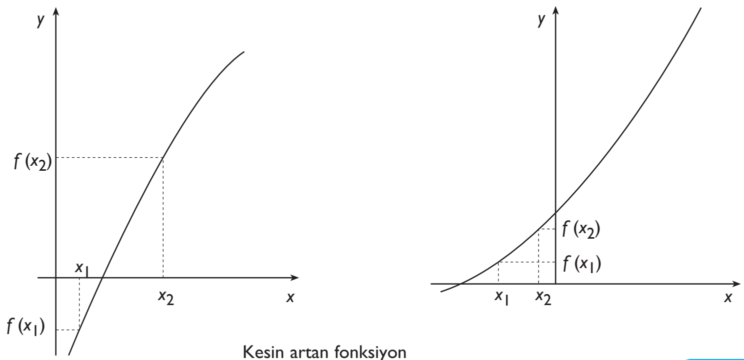
ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

$f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her x_1 , $x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonuna **monoton artan** (veya azalmayan), $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa **kesin artan** fonksiyon denir.



Monoton artan fonksiyon

Şekil 7.1

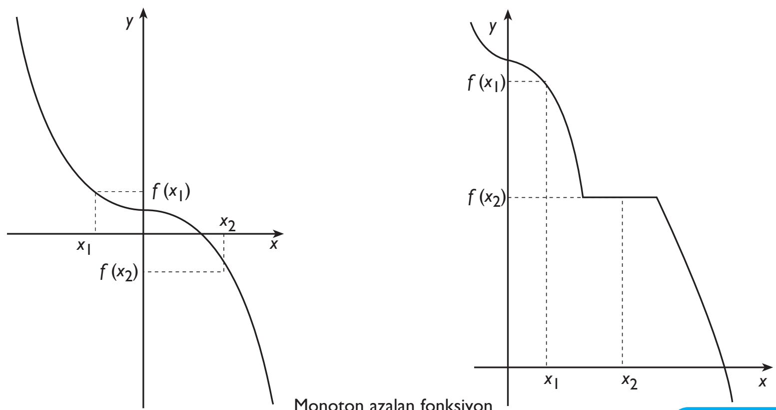


Kesin artan fonksiyon

Şekil 7.2

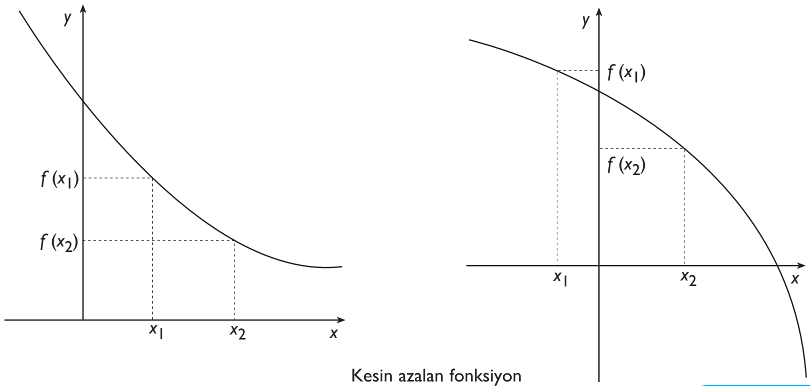
Monoton artan (veya kesin artan) fonksiyonun grafiğine dikkatli baktığımızda, koordinat sisteminde sağa doğru ilerlerken grafiğin yükseldiğini veya aynı yükseklikte kaldığını ancak hiçbir zaman düşmediğini görürüz.

Benzer şekilde, her x_1 , $x_2 \in A$ ve $x_1 < x_2$ için $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna **monoton azalan** (veya artmayan) fonksiyon, $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonuna **kesin azalan** fonksiyon denir.



Monoton azalan fonksiyon

Şekil 7.3



Kesin azalan fonksiyon

Şekil 7.4

Monoton azalan (veya kesin azalan) fonksiyonun grafiğinin de, sağa doğru ilerledikçe yükselmediğini görürüz.

Türevlenebilir bir fonksiyonun artan veya azalan olmasıyla türevinin işareti arasında yakın bir ilişki vardır.

$f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$

fonksiyonu sürekli ve her $x \in (a,\ b)$ için türevi olan bir fonksiyon olsun.

a) Eğer her $x \in (a,\ b)$ için $f\,'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu monoton azalan, $f\,'(x) < 0$ ise kesin azalan fonksiyondur.

b) Eğer her $x \in (a,\ b)$ için $f\,'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu monoton artan, $f\,'(x) > 0$ ise kesin artan fonksiyondur.

Bir aralıkta monoton artan veya kesin artan olan fonksiyona kısaca artan fonksiyon, benzer şekilde monoton azalan veya kesin azalan fonksiyona da azalan fonksiyon diyeceğiz.

Buna göre, bir aralık üzerinde türevlenebilen bir fonksiyonun türevinin işaretine bakarak fonksiyonun bu aralık üzerinde artan veya azalan olup olmadığına karar verebiliriz.

ÖRNEK 1

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f\,(x) = x^2$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulalım.

ÇÖZÜM

$f\,(x) = x^2$ fonksiyonu her noktada türevlenebilen bir fonksiyon olduğundan, bu fonksiyonun türevinin işaretini incelememiz yeterlidir.

$f\,'(x) = 2x$

olduğundan $x > 0$ ise $f\,'(x) > 0$ dır, dolayısıyla $(0,\ \infty)$ aralığında fonksiyon artandır, $x < 0$ ise $f\,'(x) < 0$ dır, dolayısıyla $(-\ \infty,\ 0)$ aralığında fonksiyon azalandır.

Bu bilgileri bir tablo ile aşağıdaki biçimde gösterebiliriz.

x	$-\ \infty$		0		∞
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

Tablodan görüldüğü gibi fonksiyon $(-\ \infty,\ 0)$ aralığında kesin azalan, $(0,\ \infty)$ aralığında kesin artandır.

Bir fonksiyonun bir aralıkta türevi pozitif ise fonksiyon artan, türevi negatif ise fonksiyon bu aralıkta azalandır. Ancak bunun karşıtı doğru değildir. Yani, Bir fonksiyon bir aralıkta kesin artan ise bu aralıkta türevi daima pozitiftir, kesin azalan ise türevi daima negatiftir diyemeyiz. Örneğin $f(x) = x^3$ fonksiyonu kesin artandır ancak $x = 0$ da türevi sıfırdır.

ÖRNEK 2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-7$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-7$$

$$f'(x)=x^2-6x+8$$

türevin işaretini incelemek için köklerini bulalım.
$x^2-6x+8=0$ denkleminin kökleri $x_1=2$, $x_2=4$ dür.

x	$-\infty$		2		4		∞
f'		+	0	-	0	+	
f		↗		↘		↗	

$x\in(-\infty,2)$ için $f'(x)>0$ ve $x\in(4,\infty)$ için $f'(x)>0$ olduğundan $(-\infty,2)$ ve $(4,\infty)$ aralıklarında fonksiyon artan, $x\in(2,4)$ için $f'(x)<0$ olduğundan $(2,4)$ aralığında fonksiyon azalandır.

SIRA SİZDE 1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2-9x+6$
fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Şimdi ünite girişinde ele aldığımız problemin çözümünü görelim.

ÖRNEK 3

Bir malın toplam maliyet fonksiyonu, x mal miktarı, C(x) Milyon TL olmak üzere,

$C(x)=0{,}5x^2+4x+1400$, $0\le x\le 200$

toplam gelir fonksiyonu, R(x) Milyon TL olmak üzere,

$R(x)=500x-1{,}5x^2$, $0\le x\le 200$

dır.

Kârın artan ve azalan olduğu üretim satış aralıklarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Kâr, gelir ile maliyetin farkı olduğundan K kâr fonksiyonu,

$$K(x)=500x-1{,}5x^2-(0{,}5x^2+4x+1400)$$
$$=-2x^2+496x-1400$$

olur.

K fonksiyonunun türevinin işaretini incelememiz gerekiyor.

$$K'(x)=-4x+496$$

$$-4x+496=0$$

$$x=\frac{496}{4}=124$$

x	0		124		200
K'		+	0	-	
K		↗		↘	

Bu durumda (0, 124) aralığında kâr artmakta, (124, 200) aralığında ise azalmaktadır.
Bunun anlamı, üretilip satılan mal miktarı 124 birime kadar arttıkça kâr da artacaktır. Ancak 124 birimden sonra üretilip satılan mal miktarı arttıkça kâr miktarı azalacaktır. Örneğin,

$$K(100) = 28200\,, \quad K(101) = 28294\,, \quad K(124) = 29352$$
$$K(130) = 29280\,, \quad K(150) = 28000\,, \quad K(151) = 27894$$

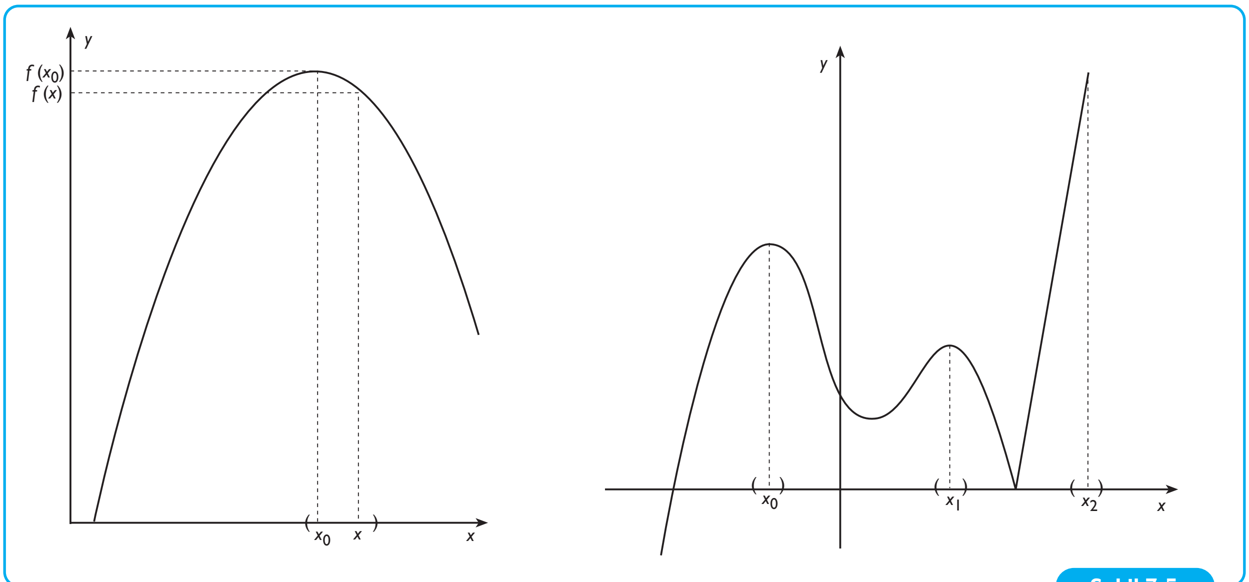
dir. Bu sayılardan da gördüğümüz gibi 101 birim malın satışından elde edilen kâr 100 birim malın satışından elde edilen kârdan fazla iken 151 birim malın satışından elde edilen kâr 150 birim malın satışından elde edilen kârdan daha azdır. O zaman, ne kadar mal üretilip satılırsa kâr en yüksek olur, sorusu akla gelmektedir.
Bu soruya cevap verebilmek için maksimum ve minimum kavramlarını bilmemiz gerekmektedir.

YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $x_0 \in A$ için x_0 noktasını içeren uygun bir aralık I ($I \subset A$) olsun.

i) Eğer her $x \in I$ için $f(x) \leq f(x_0)$ oluyorsa, x_0 noktasına f fonksiyonunun bir **yerel maksimum noktası**, $f(x_0)$ sayısına da bir **yerel maksimum değeri** denir.

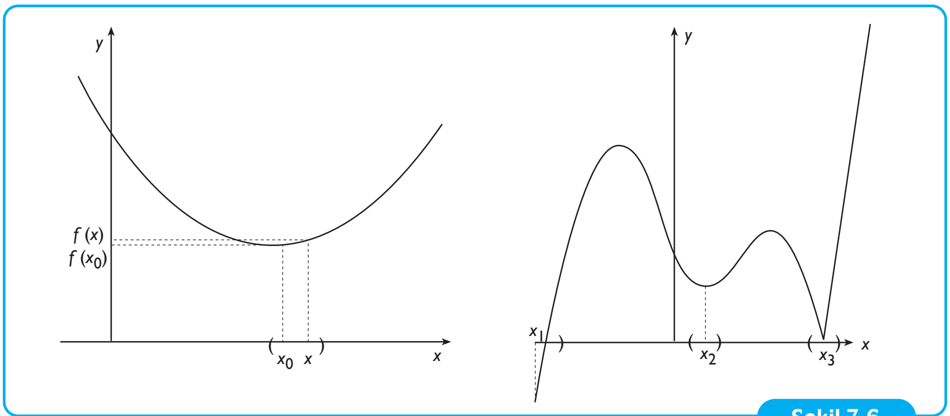
Şekil 7.5'de iki fonksiyonun yerel maksimum noktaları gösterilmiştir.



Şekil 7.5

ii) Eğer her $x \in I$ için $f(x_0) \leq f(x)$ oluyorsa, x_0 noktasına f fonksiyonunun bir **yerel minimum noktası**, $f(x_0)$ sayısına da bir **yerel minimum değeri** denir.

Şekil 7.6 'da iki fonksiyonun bazı yerel minimum noktaları gösterilmiştir.



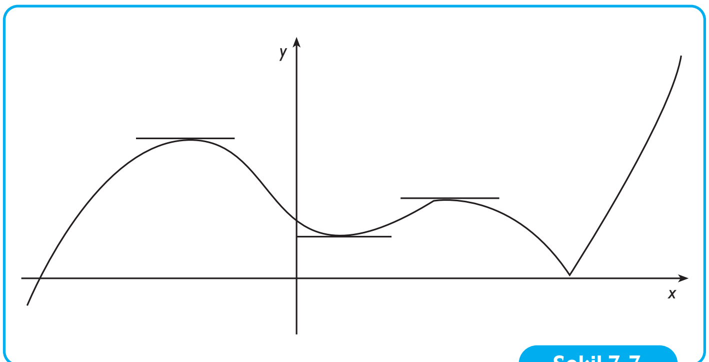
Şekil 7.6

Yerel maksimum ve yerel minimum kavramları bir noktanın civarındaki fonksiyon değerlerinin davranışı ile ilgili kavramlardır. Yerel maksimum noktasındaki fonksiyon değeri o noktaya yakın noktalardaki fonksiyon değerlerinden daima büyük, yerel minimum noktasındaki fonksiyon değeri de o noktaya yakın noktalardaki fonksiyon değerlerinden daima küçüktür.

Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına fonksiyonun **ekstremum noktaları** denir.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve her $x \in (a, b)$ için türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer bir $x_0 \in (a, b)$ noktası f fonksiyonunun bir yerel ekstremum noktası ise $f'(x_0) = 0$ dır.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve her $x \in (a, b)$ için türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer bir $x_0 \in (a, b)$ noktası f fonksiyonunun bir yerel ekstremum noktası ise $f'(x_0) = 0$ dır.

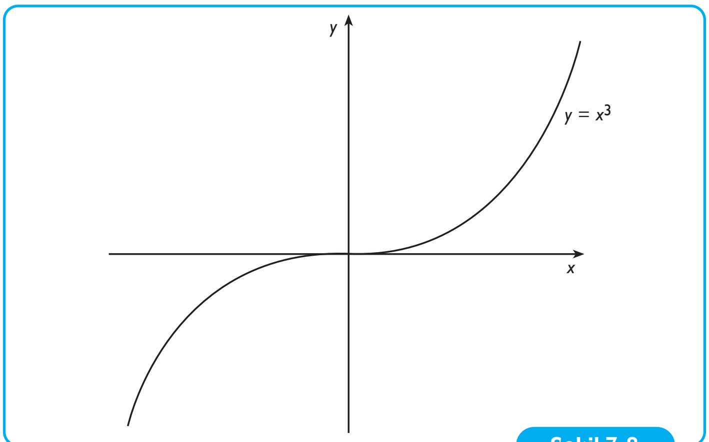


Şekil 7.7

Yandaki Şekil 7.7'de görüldüğü gibi bir fonksiyonun bir ekstremum noktasında türevi varsa bu noktada türev sıfırdır, dolayısıyla bu noktada yatay teğet vardır.

Ancak türevi olan bir fonksiyonun bir noktada türevinin sıfır olması, bu noktanın bir yerel ekstremum noktası olması için yeterli değildir.

Örneğin $y = x^3$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevi sıfır olmasına karşılık bu nokta bir yerel ekstremum noktası değildir (Şekil 7.8).



Şekil 7.8

Bu nedenle türevi olan bir f fonksiyonu için $f'(x) = 0$ koşulunu sağlayan noktalar ekstremum noktası olmaya aday noktalardır. Böyle noktalara f fonksiyonunun **kritik noktaları** diyoruz.

ÖRNEK 4 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 16x^2 + 20x - 5$

fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu 3. dereceden polinom fonksiyon olduğundan her noktada türevi vardır. Buna göre, f nin kritik noktaları türevi sıfır yapan noktalar olduğundan

$$f'(x) = 3x^2 - 32x + 20 = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad x_2 = 10$$

bulunur. O halde f nin kritik noktaları $\frac{2}{3}$ ve 10 dur.

Bir aralık üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun ekstremum noktalarını bulmak için izlenecek iki yöntem vereceğiz.

Birinci Türev Testi

Bir fonksiyonun ekstremum noktalarını bulmak için fonksiyonun öncelikle türevi ve türevin kökleri, yani kritik noktaları, bulunur. Daha sonra varsa fonksiyonun türevinin olmadığı noktalar da belirlenip türevin işareti incelenir.

Fonksiyonun sürekli olup türevinin işaret değiştirdiği noktalar ekstremum noktalarıdır. Bu noktaların yerel maksimum veya yerel minimum noktası olduklarına şöyle karar verilir.

Fonksiyonun sürekli olup türevinin işaret değiştirdiği noktalar ekstremum noktalarıdır. Bu noktaların yerel maksimum veya yerel minimum noktası olduklarına türevin işareti incelenerek karar verilir.

a) Sürekli fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği, diğer bir deyişle türevin işaretinin (+) dan (-) ye geçtiği nokta yerel maksimum noktasıdır.

x		x_0	
f'	+	0	-

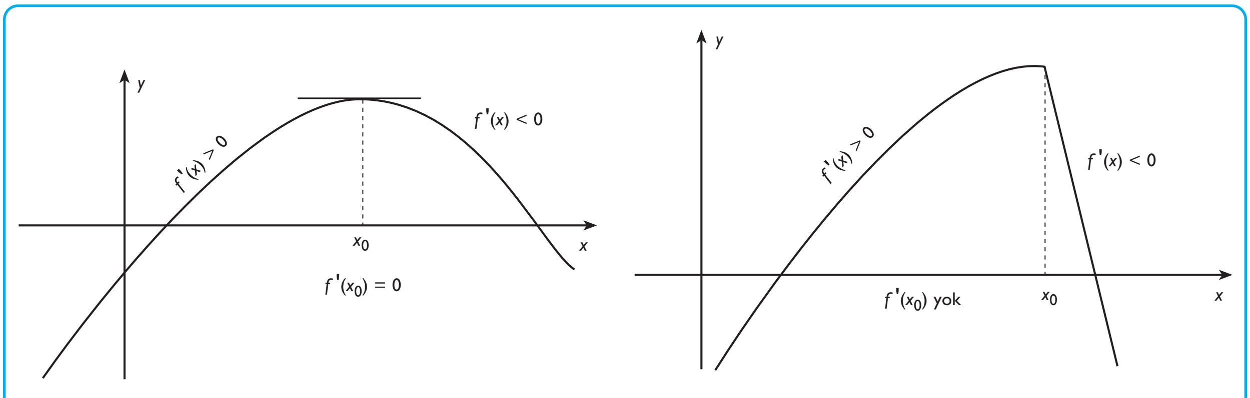
$f'(x_0) = 0$

x_0 yerel maksimum noktası

x		x_0	
f'	+		-

f sürekli, $f'(x_0)$ yok

x_0 yerel maksimum noktası



Şekil 7.9

b) Sürekli fonksiyonun azalanlıktan artanlığa geçtiği nokta yani türevin işaretinin (-) den (+) ya değiştiği nokta yerel minimum noktasıdır.

x		x_0	
f'	-	0	+

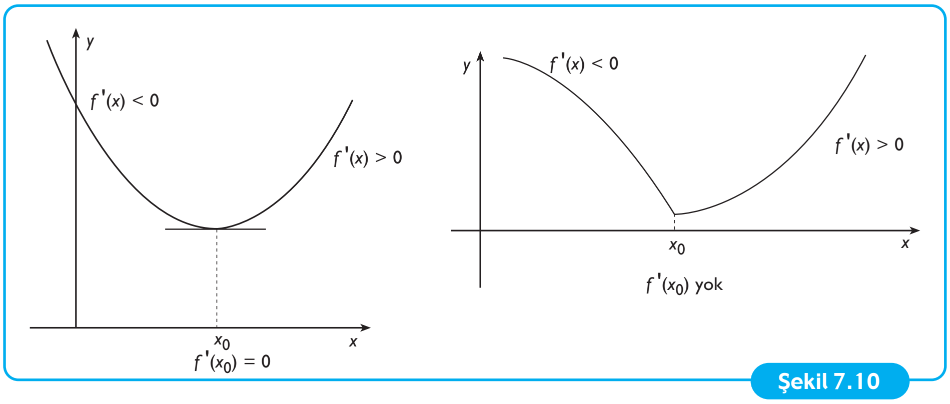
$f'(x_0) = 0$

x_0 yerel minimum noktası

x		x_0	
f'	-		+

f sürekli, $f'(x_0)$ yok

x_0 yerel minimum noktası



Şekil 7.10

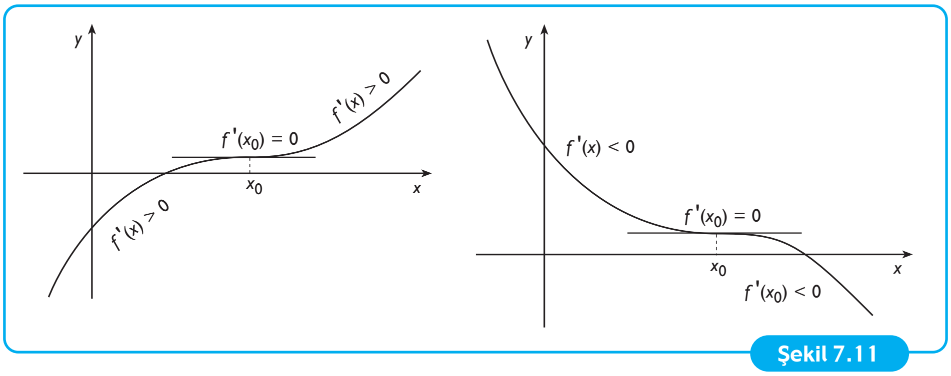
Türevin işaret değiştirmediği nokta yerel ekstremum noktası değildir.

x		x_0	
f'	+	0	+

x_0 yerel ekstremum noktası değildir

x		x_0	
f'	-	0	-

x_0 yerel ekstremum noktası değildir



Şekil 7.11

ÖRNEK 5

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 6$$

fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM

$f'(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2$

$x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 2x - 3) = 0$

$x^2(x + 1)(x - 3) = 0$, $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$

Şimdi de türevin işaretini inceleyelim.

x	$-\infty$		-1		0		3		∞
f'		+	0	-	0	-	0	+	
f		↗		↘		↘		↗	

$x = -1$, türev (+) dan (-) ye işaret değiştirdiği için yerel maksimum noktasıdır.
$x = 0$ türevin kökü olmasına karşılık bu noktada türev işaret değiştirmediği için bu nokta yerel ekstremum noktası değildir.
$x = 3$, türev (-) den (+) ya işaret değiştirdiği için yerel minimum noktasıdır.

İkinci Türev Testi

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ bu fonksiyonun bir kritik noktası $(f'(x_0) = 0)$ olsun.

a) Eğer $f''(x_0) > 0$ ise x_0 noktası f fonksiyonunun bir yerel minimum noktasıdır.

b) Eğer $f''(x_0) < 0$ ise x_0 noktası f fonksiyonunun bir yerel maksimum noktasıdır.

$f''(x_0) = 0$ olması durumunda ikinci türev testi ile karar verilemez. Bu durumda birinci türev testini uygulayınız.

ÖRNEK 6

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7$

fonksiyonunun ekstremum noktaları bulalım.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun her noktada türevi olduğundan ekstremum noktaları sadece türevin sıfır olduğu noktalarda olabilir.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$

$4x(x^2 - 3x + 2) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2$

0, 1 ve 2 bu fonksiyonun kritik noktalarıdır.

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$

$f''(0) = 8 > 0$ olduğundan $x = 0$ yerel minimum noktasıdır.

$f''(1) = 12 - 24 + 8 = -4 < 0$

olduğundan $x = 1$ yerel maksimum noktasıdır.

$f''(2) = 12.2^2 - 24 \,.\, 2 + 8 = 8 > 0$

olduğundan $x = 2$ yerel minimum noktasıdır.

ÖRNEK 7

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

fonksiyonunun ekstremum noktalarını araştıralım.

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - 2x.x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \text{ ise } x = -1, \quad x = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2x.(x^2+1)^2 - 2(x^2+1).2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x.(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(-1) = \frac{-2+6}{2^3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} > 0$$

olduğundan $x = -1$ yerel minimum noktası,

$$f''(1) = \frac{2-6}{2^3} = \frac{-1}{2} < 0$$

olduğundan $x = 1$ yerel maksimum noktasıdır.

ÖRNEK 8

$$f(x) = x - 10\sqrt{x} + 100$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını araştıralım.

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}} = 0, \quad x = 25$$

x	0		25		∞
f'		-	0	+	
f		↘		↗	

Tablodan görüldüğü gibi $x = 25$ yerel minimum noktasıdır. $f(25) = 75$ fonksiyonun yerel minimum değeridir.

ÖRNEK 9

Bir malın, x mal miktarı türünden kâr fonksiyonu, milyon TL cinsinden,

$$K(x) = -\frac{x^2}{750} + 4x - 2250, \quad 0 \leq x \leq 3000$$

dir. Maksimum kârın elde edildiği mal miktarını bulalım.

ÇÖZÜM

$$K(x) = -\frac{x^2}{750} + 4x - 2250, \quad 0 \leq x \leq 3000$$

$$K'(x) = -\frac{x}{375} + 4, \quad -\frac{x}{375} + 4 = 0, \quad x = 1500$$

x	0		1500		3000
K'		+	0	-	
K		↗	750	↘	

Bu üründen 1500 birim üretilip satıldığında maksimum kâr olarak 750 milyon TL elde edilir.

$K(1000) \cong 416{,}7$, $K(2000) = 416{,}7$, $K(3000) \cong -2250$

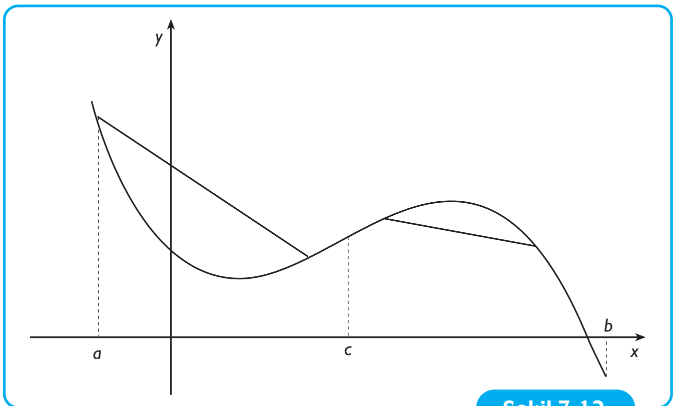
Dikkat ederseniz 3000 birim mal üretilip satıldığında 2250 milyon TL , zarar edilir.

SIRA SİZDE 2

1. $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün tepe noktasının apsisi nedir?
2. $g(x) = \sqrt{x} - 2x + 9$ fonksiyonunun maksimum noktasının apsisi kaçtır?
3. $k(x) = -\dfrac{x^2}{100} + 40x - 3000$ kâr fonksiyonunun maksimum noktasını bulunuz.
4. $h(x) = x + \dfrac{9}{x} + 5$ fonksiyonunun minimum noktasını bulunuz.

BÜKEYLİK

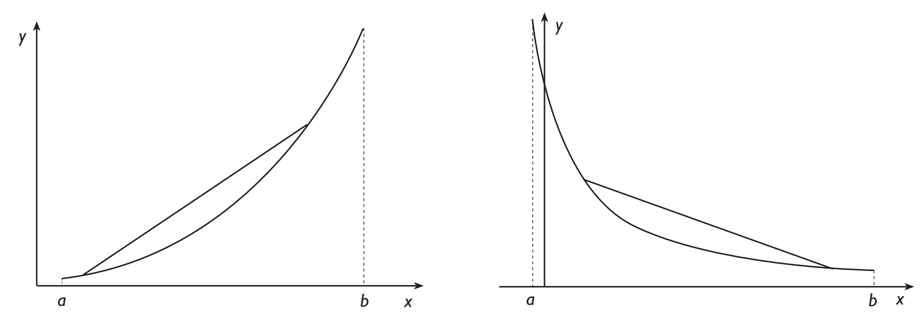
Aşağıda $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu grafiğin (a, c) aralığı üzerindeki parçasında herhangi bir kiriş grafiğin üstünde kalırken, grafiğin (c, b) parçası üzerindeki herhangi bir kiriş grafiğin altında kalmaktadır. Bu iki durumu bükeylik kavramı ile birbirinden ayırmaktayız.



Şekil 7.12

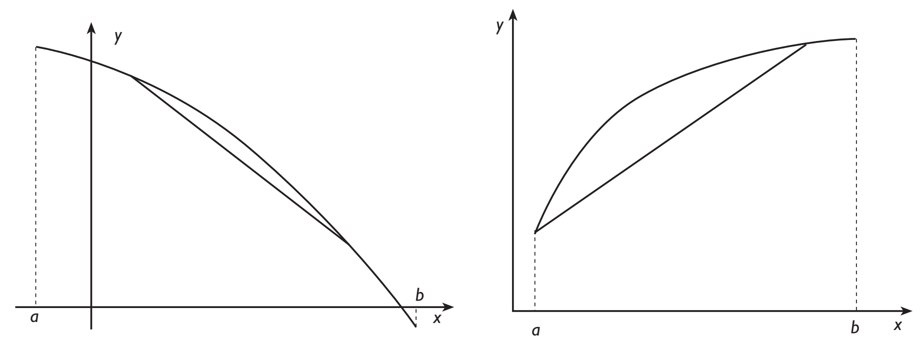
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli türevi olan bir fonksiyon olsun. Eğer fonksiyonun grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren kiriş daima grafiğin üzerinde kalıyorsa, f fonksiyonuna **yukarı bükey** veya **konveks** fonksiyon, eğer kiriş daima grafiğin altında kalıyorsa f fonksiyonuna **aşağı bükey** veya **konkav** fonksiyon denir.

Şekil 7. 12 deki f fonksiyonu (a, c) aralığında yukarı bükey, (c, b) aralığında aşağı bükeydir.



Yukarı bükey (konveks) fonksiyon

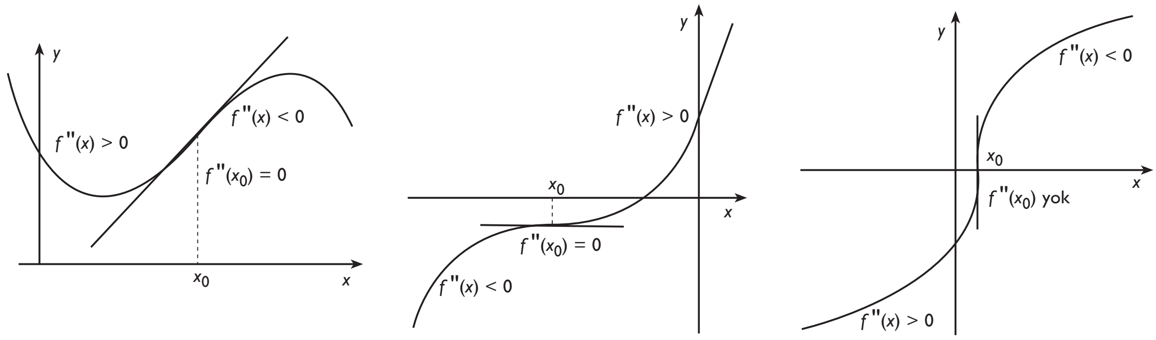
Şekil 7.13



Aşağı bükey (konkav) fonksiyon

Şekil 7.14

Bir fonksiyonun bükeyliğinin değiştiği noktaya **büküm** noktası denir.



Şekil 7.15

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon olmak üzere,

a) Her $x \in (a, b)$ için $f''(x) > 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında yukarı bükeydir,

b) Her $x \in (a, b)$ için $f''(x) < 0$ ise f fonksiyon [a, b] aralığında aşağı bükeydir.

Buna göre bir fonksiyonun yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıkları bulmak için ikinci türevinin işaretini incelemek yeterlidir.

Sürekli bir fonksiyonun ikinci mertebeden türevinin işaret değiştirdiği bir nokta da fonksiyonun büküm noktasıdır.

ÖRNEK 10

$f(x) = x^4 - 24x^2 + x + 1$

fonksiyonunun yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıklarla büküm noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun her mertebeden türevi olduğu için bükeyliğini belirlemek için ikinci türevinin işaretini incelemek yeterlidir.

$f'(x) = 4x^3 - 48x + 1$

$f''(x) = 12x^2 - 48$

$12x^2 - 48 = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$

x	$-\infty$	-2		2		∞
f''	+	0	-	0	+	
f	Yukarı bükey		Aşağı bükey		Yukarı bükey	

Tablodan da gördüğümüz gibi f fonksiyonu $(-\infty, -2]$ ve $[2, \infty)$ aralıklarında yukarı bükey, $[-2, 2]$ aralığında aşağı bükeydir. $x = -2$, $x = 2$ noktalarında fonksiyon sürekli ve bu noktalarda ikinci mertebeden türev işaret değiştirdiğinden bu noktalar büküm noktasıdır.

SIRA SİZDE 3

1. $f(x) = 2x + \frac{1}{2x} + 2$ fonksiyonu hangi aralıkta yukarı bükeydir?
2. $g(x) = x^3 + 3x - 7$ fonksiyonunun büküm noktasını bulunuz.

GRAFİK ÇİZİMİ

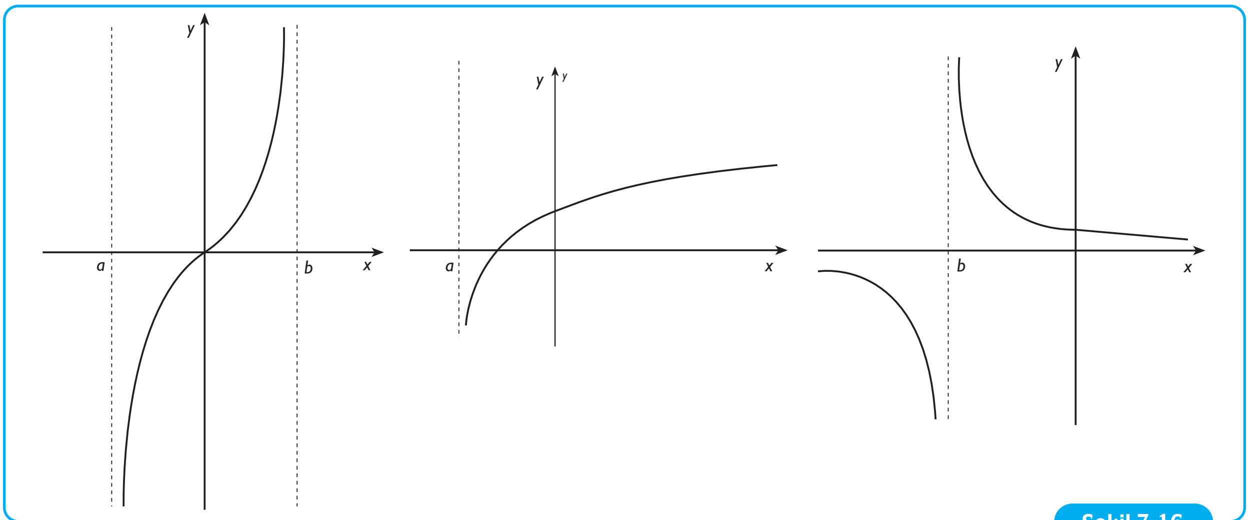
Bir fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıklar, ekstremum noktaları gibi temel özellikleri en açık biçimde grafiğinden görülebilir. Bir fonksiyonun grafiği onun resmidir. Bu resim en net biçimde türev kullanılarak çekilebilir. Türev sanki fotoğraf makinasının flaşı gibidir. Nasıl ki flaş, resmi çekilecek nesneyi aydınlatarak ayrıntıların kaydını sağlarsa, türev de fonksiyon davranışlarını ayrıntılı bir biçimde inceleme olanağı sağlar. Buraya kadar genel hatlarıyla çizdiğimiz grafikleri, artık daha ayrıntılı ve daha kolay çizebileceksiniz.

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken genellikle aşağıdaki adımlar izlenir.

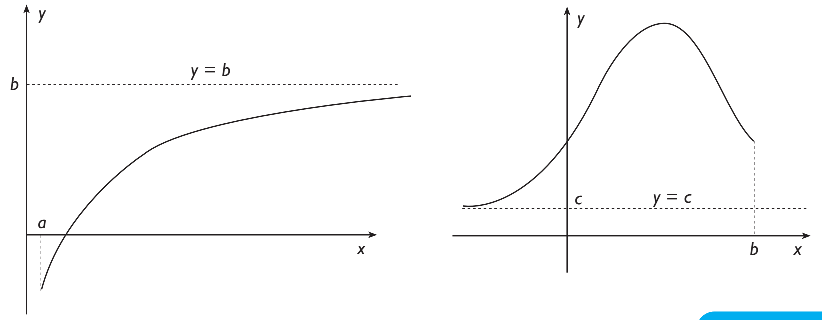
i) Fonksiyonun tanım kümesi açıkça verilmemişse öncelikle tanım kümesi belirlenir.
ii) Fonksiyonun tanım kümesini oluşturan aralıkların uç noktalarında varsa fonksiyon değerleri, yoksa fonksiyonun bu noktalardaki limitleri bulunur.
iii) Birinci ve ikinci mertebeden türevler yardımıyla fonksiyonun artan, azalan olduğu aralıklar, ekstremum noktaları ve bükeyliği belirlenir.
iv) Grafiğin koordinat eksenlerini kestiği noktalar araştırılır.
v) Elde edilen bilgiler bir tabloda toplanır.
vi) Tabloya uygun grafik çizilir.

Bu ve bundan önceki ünitelerde ii-inci adım dışındaki adımlarda ifade edilen kavramlar hakkında bilgi edinmiş bulunuyorsunuz. Biraz sonra vereceğimiz örneklerle de bu bilgilerinizi hatırlayacaksınız. Şimdi ii-inci maddede bulunması gereken limitlerde karşımıza çıkan asimptot kavramını açıklayalım.

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (veya $-\infty$) ise $x = a$ doğrusuna f fonksiyonunun **düşey asimptotu** denir. Benzer şekilde $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$ (veya $-\infty$) ise $x = b$ doğrusu da düşey asimptottur.



Şekil 7.16



Şekil 7.17

$f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ ise $y=b$ doğrusuna f fonksiyonunun **yatay asimptotu** denir.

Benzer şekilde $g:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunda $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=c$ oluyorsa, $y=c$ doğrusu yatay asimptottur.

Yatay asimptot, bağımsız değişkenin yeteri kadar büyük veya negatif yönde yeteri kadar küçük değerlerinde fonksiyonun sabit fonksiyon gibi davrandığını ifade eder.

Şimdi yukarıdaki adımları izleyerek çeşitli fonksiyonların grafiklerini çizelim.

ÖRNEK 11

$$y=C(x)=2000+50x-\frac{x^2}{16},\ 0\le x\le 600$$

toplam maliyet fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

$0\le x\le 600$ verildiğinden bu fonksiyonu,

$$C:[0,600]\to\mathbb{R},\ C(x)=2000+50x-\frac{x^2}{16}$$

şeklinde düşünebiliriz. Buna göre,

i) Tanım kümesi [0,600] kapalı aralığıdır.

ii) Fonksiyon $x=0$ ve $x=600$ de tanımlı olduğundan $C(0)=2000$, $C(600)=9500$

iii)

$$C'(x)=50-\frac{x}{8},\ 50-\frac{x}{8}=0,\quad x=400,\ C(400)=12000$$

$$C''(x)=-\frac{1}{8},\ C''(400)=-\frac{1}{8}<0 \text{ olduğundan}$$

$x=400$ yerel maksimum noktasıdır.

x	0		400		600
C'		+	0	-	
C"		-		-	
C	2000	↗	12000	↘	9500

Fonksiyon (0, 400) aralığnda artan, (fonksiyon değerlerinin 2000 den 12000 e arttığına dikkat ediniz), (400, 600) aralığında azalandır (bu aralıkta da 12000 den 9500 e azaldığına dikkat ediniz).

$x = 400$ yerel maksimum, $C(400) = 12000$ yerel maksimum (aynı zamanda mutlak maksimum) değeridir. Her x için $C''(x) < 0$ olduğundan grafik aşağı bükeydir.

Fonksiyonun y-eksenini kestiği noktaları bulmak için $x = 0$ için y değerini bulmamız gerekiyor. $C(0) = 2000$ dir. y = 0 yani $C(x) = 0$ denkleminin varsa kökleri de grafiğin x eksenini kestiği noktaları verecektir.

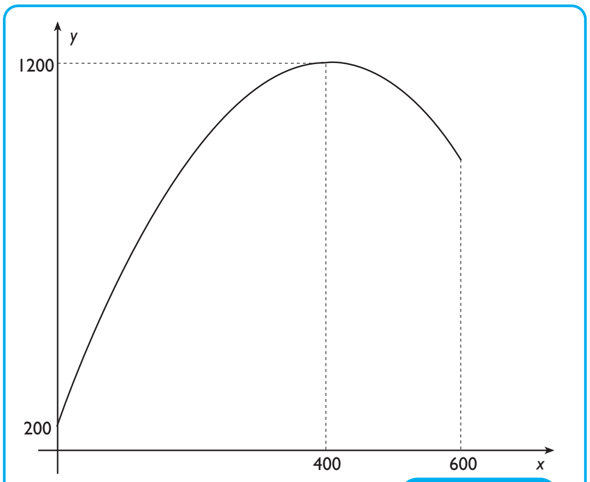
$$2000 + 50x - \frac{x^2}{16} = 0$$

bu denklemin kökleri olan

$$x_1 = 400 + 80\sqrt{30} \cong 838{,}2; \quad x_2 = 400 - 80\sqrt{30} \cong -38{,}2$$

sayıları [0,600] aralığında olmadığından grafik x ekseninni kesmez. Fonksiyonun tanım kümesi yukarıdaki x_1, x_2 sayılarını içeren bir aralık olsaydı grafik x ekseni bu noktalarda kesecekti.

Bu bilgilere göre C fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 7.18

ÖRNEK 12

$$y = f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

Tanım kümesi $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ dır.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4}{4} - x^3\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4}{4} - x^3\right) = \infty$$

$$f'(x) = x^3 - 3x^2$$

$$x^3 - 3x^2 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = 3,$$

$$f(0) = 0, \quad f(3) = -\frac{27}{4}$$

x	$-\infty$		0		3		∞
f'		-	0	-	0	+	
f	∞	↘	0	↘	$-\frac{27}{4}$	↗	∞

$x = 0$ da türev işaret değiştirmediğinden bu nokta bir yerel ekstremum noktası değildir. $x = 3$ te yerel minimum vardır.

$f''(x) = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$

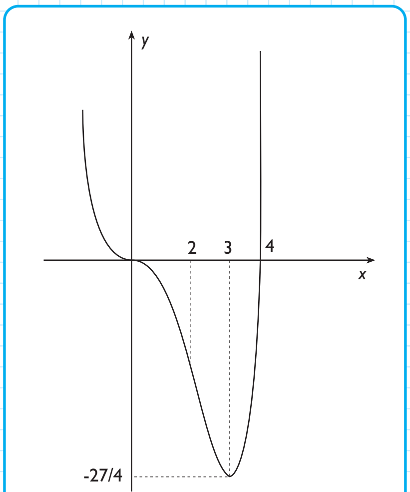
x		0		2	
f''	+	0	-	0	+
f	∪		∩		∪

$x = 0$ ve $x = 2$ noktaları büküm noktasıdır.

$x = 0$ için $y = 0$

$y = 0, \quad \frac{x^4}{4} - x^3 = 0\,, \quad \frac{x^3}{4}(x - 4) = 0\,, \quad x = 0\,, \quad x = 4$

x	$-\infty$		0		2		3		4		∞
f'		-	0	-		-	0	+		+	
f''		+	0	-	0	+		+		+	
f	∞	↘	0	↘	-4	↘	$-\frac{27}{4}$	↗	0	↗	∞



Şekil 7.19

ÖRNEK 13

$$y = f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

fonksiyonunun grafiğini çizelim.

ÇÖZÜM

Fonksiyon, paydanın kökleri olan -1 ve 1 de tanımlı değildir. Bu nedenle tanım kümesi,

R - {-1,1} = $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

dır.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \ , \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0 \ , \quad y = 0 \quad \text{yatay asimptottur.}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x^2 - 1} = -\infty \ , \quad \lim_{x \to -1^+} \frac{2x}{x^2 - 1} = +\infty \ , \quad x = -1 \quad \text{düşey asimptot}$$

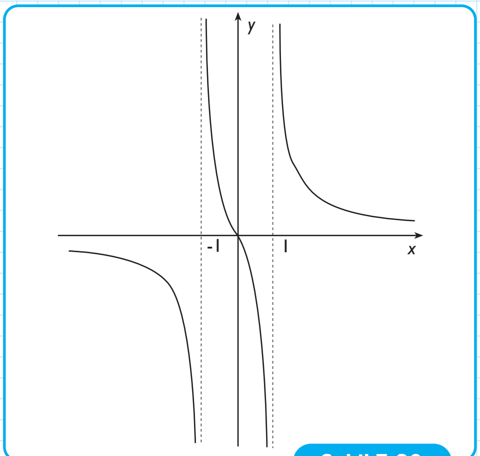
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x^2 - 1} = -\infty \ , \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x^2 - 1} = +\infty \ , \quad x = 1 \quad \text{düşey asimptot}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 2)^2} = 0 \ , \quad -2x^2 - 2 = 0 \ , \quad x^2 = -1$$

kök yok

$x = 0$ için $y = 0$, $y = 0$ için $x = 0$

x	$-\infty$		-1			1		∞
f'		$-$	‖	$-$	‖	$-$		
f	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	



Şekil 7.20

SIRA SİZDE 4

1. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x} + 5$ fonksiyonunun düşey asimptotunu bulunuz.

2. $g(x) = \dfrac{3x - 5}{1 - 2x}$ fonksiyonunun yatay asimptotunu bulunuz.

Maksimum ve Minimum Problemleri

Bir işletmeci hangi üretim düzeyinde ortalama maliyetin en düşük, hangi üretim-satış miktarında en yüksek kâr elde edeceğini bilmek ister. Bu değerleri yaşayarak değil hesaplayarak bilmek zorundadır. Yaşayarak öğrenmek isteyenlerin büyük olasılıkla ikinci bir şansı olmayacaktır. En küçük veya en büyük değeri bulma problemlerinde en büyük yardımcımız türev kavramıdır. Bu kesimde bununla ilgili problemlere iki örnek vereceğiz.

ÖRNEK 14

Kare prizma biçiminde 800 cm³ lük kapalı bir kutu yapılacaktır. Kutunun alt ve üst tabanlarının birim maliyeti yan yüzlerinin birim maliyetinin 2 katı olduğuna göre, en ucuza malolacak kutunun boyutlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Problemi çözmek için önce matematiksel ifadesini bulmamız gerekir. Bunun için kutunun taban kenar uzunluklarına x cm, yüksekliğine y cm diyelim.

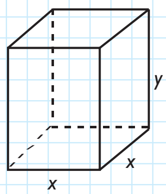
Kutunun hacmi : $V = x^2 y$ dir.

Taban alanları : $x^2 + x^2 = 2x^2$

Yanal yüz alanları : $4xy$

Toplam alan : $2x^2 + 4xy$

dir.



Yan yüzün birim maliyetine 1 dersek, tabanların birim maliyeti 2 olur.

Bu durumda

$$C = 2x^2 \,.\, 2 + 4xy \,.1 = 4x^2 + 4xy$$

olur. Dikkat ederseniz maliyet x ve y değişkenlerine bağlıdır. Burada hacimden yararlanarak y yi x türünden ifade edebiliriz.

$$V = x^2 y = 800 \quad \text{olduğundan} \quad y = \frac{800}{x^2}$$

$$C(x) = 4x^2 + 4x \,.\, \frac{800}{x^2} = 4x^2 + \frac{3200}{x}$$

bulunur.

Şimdi C fonksiyonunun minimum noktasını bulmalıyız.

$$C'(x) = 8x - \frac{3200}{x^2} = \frac{8x^3 - 3200}{x^2}$$

$$\frac{8x^3 - 3200}{x^2} = 0 \quad , \quad 8\,(x^3 - 400) = 0$$

$$\text{Buradan} \quad x = \sqrt[3]{400} \cong 7{,}37 \text{ cm}$$

x	0		7,37		∞
C'		-	0	+	
C		↘		↗	

Tablodan görüldüğü gibi $x = 7{,}37$ bir minimum noktasıdır. x in bu değerine karşılık gelen y değerini bulalım.

$$y = \frac{800}{x^2} \cong \frac{800}{54{,}29} \cong 14{,}74 \text{ cm}$$

Buna göre, taban kenarları 7,37 cm, yüksekliği 14,74 cm olan kutu en ucuza malolacaktır.

ÖRNEK 15

Bir turistik otel işletmesi bir seyahat acentasıyla şu şekilde anlaşma yapmıştır. 150 turiste kadar kişi başına konaklama ücreti günlük 8 milyon TL, 150 kişiden sonra, 150 ile 300 arasındaki her bir kişiye karşılık her müşteriden 20.000 TL indirim yapılacaktır. Otelin bir kişi için masrafı 4.000.000 TL olduğuna göre,
a) otele maksimum geliri sağlayacak,
b) otele maksimum kârı sağlayacak
turist sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce otelin gelirini ve kârını matematik dille ifade etmemiz gerekiyor.

$$R(x) = \begin{cases} x \,.\, 8\,000\,000 \;, & 0 \le x \le 150 \\ \left[\, 8\,000\,000 - (x - 150)\,.\,20.000 \,\right] x \;, & 150 < x \le 300 \end{cases}$$

veya

$$R(x) = \begin{cases} 8\,000\,000\,.\,x \;, & 0 \le x \le 150 \\ -20\,000x^2 + 11\,000\,000\,x \;, & 150 < x \le 300 \end{cases}$$

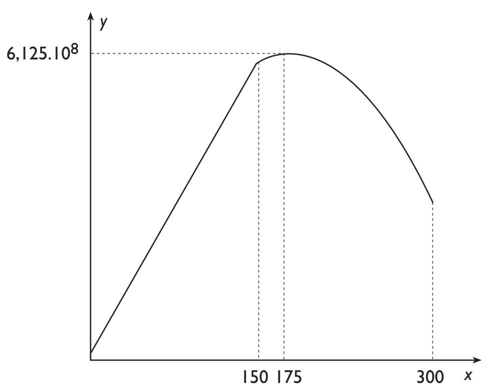
R fonksiyonunun maksimum noktasını bulmak için türevini alalım.

$$R'(x) = \begin{cases} 8\,000\,000 \;, & 0 \le x < 150 \\ -40\,000\,x + 11\,000\,000 \;, & 150 < x \le 300 \end{cases}$$

$R'(x) = 0$, $-40\,000x + 11\,000\,000 = 0$, $x = 275$

x	0		150		275		300
R'		+	‖	+	0	-	
R		↗		↗		↘	

Buna göre gelirin en yüksek olduğu turist sayısı 275 tir.
b) Şimdi de kâr fonksiyonunu ele alalım.



Şekil 7.21

$$R(x) = R(x) - C(x)$$

$$= \begin{cases} 8\,000\,000\,x - 4\,000\,000\,x \;, & 0 \le x \le 150 \\ -20\,000\,x^2 + 11\,000\,000\,x - 4\,000\,000\,\mathrm{x} \;, & 150 \le x \le 300 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4\,000\,000\,x \;, & 0 \le x \le 150 \\ -20\,000\,x^2 + 7000\,000\,x \;, & 150 \le x \le 300 \end{cases}$$

$$K'(x) = \begin{cases} 4\,000\,000 \;, & 0 \le x < 150 \\ -40\,000\,x + 7\,000\,000 \;, & 150 < x \le 300 \end{cases}$$

$K'(x) = 0$ ise $x = 175$

x	0		150		175		300
K'		+	‖	+	0	-	
K		↗		↗		↘	

Tablodan da gördüğünüz gibi en yüksek kâr 175 turistten elde edilmektedir. Buradan da gördüğünüz gibi en yüksek gelirin elde edildiği nokta ile en yüksek kârın elde edildiği nokta farklı olabilmektedir.

SIRA SİZDE 5

Dairesel dik silindir biçiminde $162\,\pi$ cm^3 hacimli kapalı bir kutu yapılacaktır. Kutunun 1 cm^2 nin maliyeti 5000 TL olduğuna göre en ucuza mal olacak kutunun maliyetini bulunuz.

Kendimizi Sınayalım

1. $f(x) = -x^2 + 1$ fonksiyonu hangi aralıkta artandır?

a. $(-\infty, 1)$
b. $(-\infty, 0)$
c. $(-1, 1)$
d. $(0, \infty)$
e. $(1, \infty)$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde azalandır?

a. $(-\infty, 0)$
b. $(0, 1)$
c. $(-1, \infty)$
d. $(1, \infty)$
e. $(-\infty, \infty)$

3. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ fonksiyonunun yerel minimum noktası aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(0, 6)$
b. $(1, 1)$
c. $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$
d. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{202}{27}\right)$
e. $(2, -2)$

4. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$ fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

a. -2
b. 1
c. $\frac{202}{27}$
d. 2
e. 6

5. $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x - 1}{x + 3}$ fonksiyonunun düşey asimptotunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $x = -3$
b. $x = 3$
c. $y = -3$
d. $y = 3$
e. $x = -\frac{1}{3}$

6. $f(x) = \dfrac{2x - 3x^2}{x^2 + 6x + 5}$ fonksiyonunun yatay asimptotunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $x = 2$
b. $y = 2$
c. $y = -3$
d. $x = -\frac{1}{3}$
e. $x = -1$

7. x mal miktarı olmak üzere bir malın milyon TL cinsinden kâr fonksiyonu, $K(x) = 800x - 2x^2$ verilsin. Buna göre, bu maldan elde edilecek en yüksek kâr kaç TL dir?

a. 640 Milyar
b. 160 Milyar
c. 80 Milyar
d. 40 Milyar
e. 800 Milyon

8. x mal miktarı olmak üzere, bir malın gelir fonksiyonu, $R(x) = 15x - \dfrac{x^2}{600}$ verilsin. Buna göre, gelirin azalmaya başladığı mal miktarı kaçtır?

a. 4500
b. 3000
c. 600
d. 300
e. 15

9. x mal miktarı olmak üzere, bir malın toplam maliyet fonksiyonu, $C(x) = 3000 + 60x - \dfrac{x^2}{10}$ dur. Buna göre, maliyetin en yüksek olduğu üretim miktarı kaçtır?

a. 30
b. 60
c. 250
d. 300
e. 450

10. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 13$ fonksiyonu hangi aralıkta aşağı bükeydir?

a. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$
b. $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$
c. $(-\infty, -2]$
d. $(-2, -1)$
e. $[-1, \infty)$

11. Karesi ile toplamı en küçük olan gerçel sayı kaçtır?

a. - 1
b. $-\frac{1}{2}$
c. 0
d. $\frac{1}{2}$
e. 1

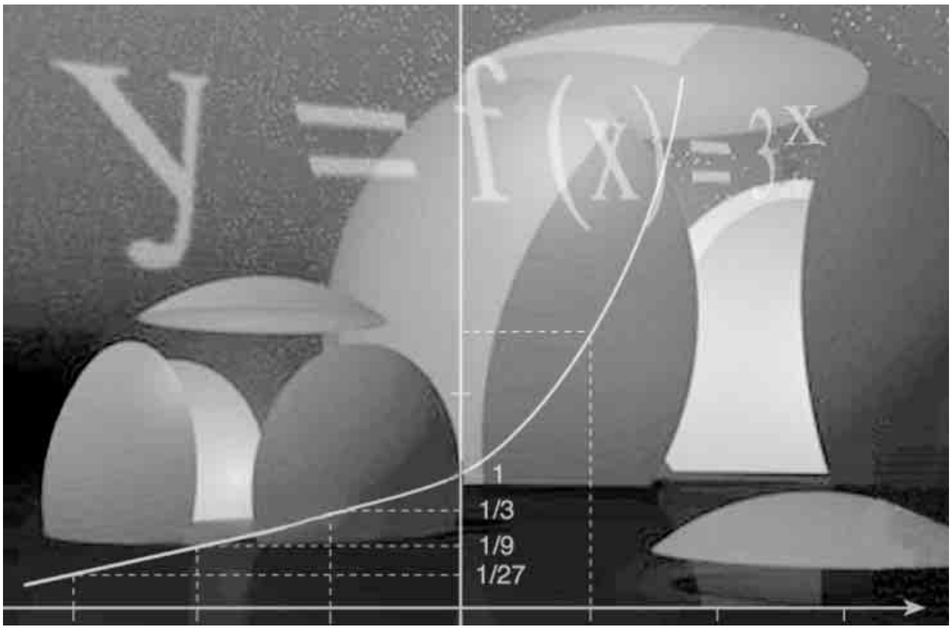
Biraz Daha Düşünelim

1. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

2. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz

8

Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- $y = a^x$ *şeklindeki üstel fonksiyon kavramını ve üstel fonksiyonların özelliklerini öğrenecek, grafiklerini çizecek,*
- $y = a^x$ *üstel fonksiyonun ters fonksiyonu olan* $y = \log_a x$ *logaritmik fonksiyon kavramını ve logaritmik fonksiyonların özelliklerini öğrenecek, grafiklerini çizecek,*
- *logaritmanın temel özelliklerini öğrenecek,*
- *üstel ve logaritmik fonksiyonların türevlerini öğrenecek,*
- *üstel ve logaritmik fonksiyonların uygulamaları olarak bileşik faiz, nüfus artışı, ekonomik büyüme hesapları yapabileceksiniz.*

İçindekiler

- *Üstel Fonksiyon*
- *Üstel Fonksiyonların Grafikleri*
- *Logaritmik Fonksiyon*
- *Logaritmik Fonksiyonların Grafikleri*
- *Logaritmanın Temel Özellikleri*
- *Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Türevleri*
- *Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Ekonomideki Uygulamaları*

DİKKAT

- ***1. ünitede verilen üslü sayılar, 4. ünitede verilen fonksiyon ve ters fonksiyon, 6. ünitede verilen türev kuralları konuları tekrar gözden geçirilmelidir.***
- ***Örnekler iyice incelenmelidir.***
- ***Alıştırmalar çözülmelidir.***

Giriş

500 milyon TL %62 yıllık faiz oranıyla 1 er aylık zaman dilimleriyle bankaya yatırıldığında, yıl sonundaki banka hesap tutarı ne olur?

Türkiyenin nüfusu 2000 yılında yaklaşık 65 milyon ve ortalama yıllık nüfus artış yüzdesi %2 olarak belirlenmişse 2025 yılında Türkiye'nin nüfusu ne kadar olacaktır?

Daha önceleri, bu türden problemlerle karşılaşmışsınızdır. Yukarıda örnekleri verilen, faiz problemlerini çözmek için uygun biçimde oluşturulan formüllerden yararlanmış olmalısınız. Şimdi ise, bunları çözmek için üstel fonksiyon kavramından yararlanacağız.

Üstel fonksiyonlar, matematikte olduğu kadar bileşik faiz, nüfus artışı, ekonomik büyüme konularındaki uygulamalarıyla önem kazanır.

ÜSTEL FONKSİYONLAR

Burada, üstel fonksiyonları tanımlayarak özelliklerini öğrenecek ve grafiklerini çizeceğiz. $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğini $a > 1$ ve $0 < a < 1$ olmak üzere iki durumda inceleyeceğiz.

4. Ünitede $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ gibi kuvvet fonksiyonlarını inceledik.

Bu fonksiyonlarda taban değişken üs sabittir. Bu ünitede de 2^x, 3^x, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ gibi tabanı sabit üssü değişken fonksiyonları inceleyeceğiz.

$a > 0$, $a \neq 1$ bir gerçel sayı olmak üzere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \ , \quad f(x) = a^x$$

fonksiyonuna bir **üstel fonksiyon** ve a sayısına da bu üstel fonksiyonun **tabanı** denir.

$a > 0$, $a \neq 1$ bir gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}^+$ ya tanımlanan $f(x) = a^x$ fonksiyonuna **üstel fonksiyon** denir.

I) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda a tabanı pozitiftir. Çünkü fonksiyon, $f(x) = (-2)^x$ gibi bir kural ile tanımlanırsa $x = \frac{1}{2}$ için fonksiyonun değeri, $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{1/2} = \sqrt{-2}$ tanımsız olur. Bu nedenle üstel fonksiyonlarda taban daima pozitiftir.

II) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda $a \neq 1$ dır. Çünkü $a = 1$ alınırsa her x gerçel sayısı için $1^x = 1$ olduğundan fonksiyon sabit fonksiyon olur. Bu yüzden a tabanı $a > 0$, $a \neq 1$ olarak alınmıştır. Örneğin:

$$f(x) = 2^x \ , \quad g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \ , \quad h(x) = (1000)^x \ , \quad u(x) = \left(\frac{1}{25}\right)^x$$

birer üstel fonksiyondur.

III) a , b pozitif sayılar x , y gerçel sayılar olmak üzere, üslü çoklukların özelliklerinde olduğu gibi üstel fonksiyonlar içinde aşağıdaki özellikler sıralanabilir:

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

şeklinde tanımlanır.

ÖRNEK 1

$f(x) = 5^x$ üstel fonksiyonunun $x = -1$, $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{2}$ için aldığı değerleri bulalım:

ÇÖZÜM

$$f(-1) = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$f(0) = 5^0 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 5^{1/2} = \sqrt{5} \cong 2,236$$

$$f(\sqrt{2}) = 5^{\sqrt{2}} \cong 9,672$$

ÜSTEL FONKSİYONLARIN GRAFİĞİ

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken, tanım kümesindeki bir x değeri fonksiyonda yerine konularak karşılık gelen y değeri bulunur. Sonra, (x, y) noktası düzlemde belirlenir. Düzlemdeki bu tür noktalar birleştirilerek fonksiyonun grafiği elde edilir.

- Şimdi üstel fonksiyonun özelliklerini elde etmek için bazı fonksiyonların grafiklerini, noktasal olarak çizelim. Fonksiyonun noktasal grafiğini çizmek için x'e bazı değerler vererek bu değerlerin fonksiyon altındaki görüntülerini yani y değerlerini bulalım. Daha sonrada bulunan (x, y) ikililerine düzlemde karşılık gelen noktaları belirleyelim.

ÖRNEK 2

$y = f(x) = 3^x$ ***fonksiyonunun grafiğini çizelim.***

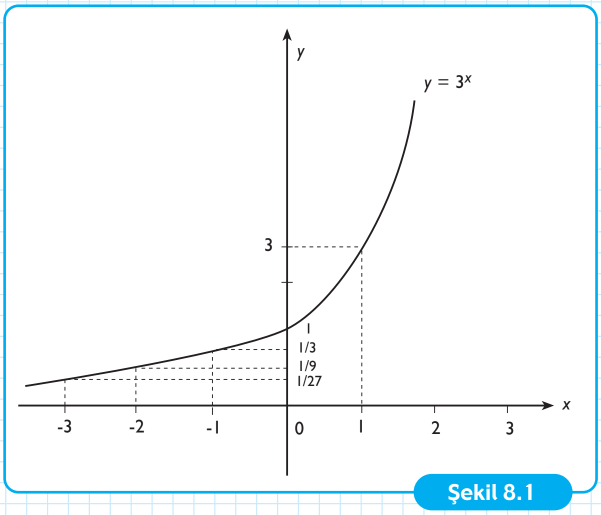
ÇÖZÜM

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	$3^0 = 1$	3	$3^2 = 9$	3 = 27

Buna göre,

$$\left(-3\ ,\ \frac{1}{27}\right),\ \left(-2\ ,\ \frac{1}{9}\right),\ \left(-1\ ,\ \frac{1}{3}\right),\ (0\ ,\ 1),\ (1\ ,\ 3),\ (2\ ,\ 9),\ (3\ ,\ 27)$$

ikilileri düzlemde belirtilerek $y = 3^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 8.1

ÖRNEK 3

Şimdi de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ***fonksiyonunun grafiğini çizelim:***

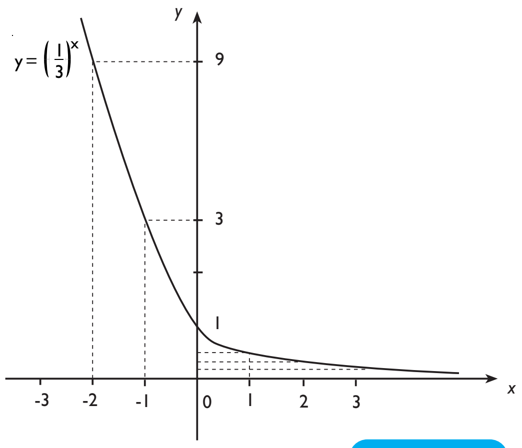
ÇÖZÜM

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

Buna göre,

$(-3\ ,\ 27)\ ,\ (-2\ ,\ 9)\ ,\ (-1\ ,\ 3)\ ,\ (0\ ,\ 1)\ ,\ \left(1\ ,\ \frac{1}{3}\right),\ \left(2\ ,\ \frac{1}{9}\right),\ \left(3\ ,\ \frac{1}{27}\right)$

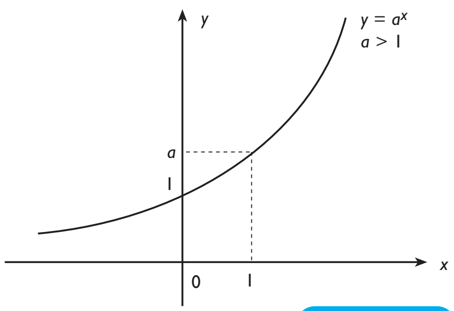
ikilileri düzlemde belirtilerek $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 8.2

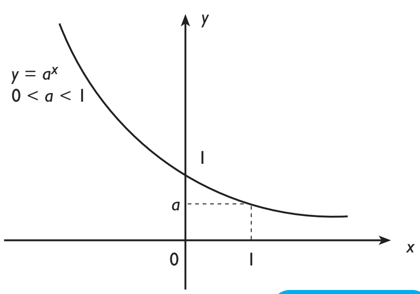
Bu iki örneğe göre, $y = 3^x$ fonksiyonunun grafiği $y = a^x$, $a > 1$ fonksiyonunun grafiğinin ve $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği de $y = a^x$, $0 < a < 1$ fonksiyonunun grafiğinin tipik birer örneğidir. Buna göre,

(i) $a > 1$ olduğunda $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği:



Şekil 8.3

(ii) $0 < a < 1$ olduğunda $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği:



Şekil 8.4

SIRA SİZDE 1

$y = 2^x$ ***ve*** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ***fonksiyonlarının grafiklerini de siz çiziniz.***

Üstel Fonksiyonların Temel Özellikleri

I) $y = a^x$ üstel fonksiyonu her x değeri için $a^x > 0$ dır. Yani fonksiyonun tanım kümesi $(-\infty, \infty)$ için değer kümesi $(0, \infty)$ dur. Böylece fonksiyonun grafiği daima x - ekseninin üst bölgesinde kalır.

II) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda;

$x = 0$ için $a^0 = 1$

olur. Bu nedenle fonksiyonun grafiği daima $(0, 1)$ noktasından geçer.

III) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda;

$0 < a < 1$ iken $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} > a^{x_2}$ olduğundan fonksiyon daima azalandır.
$a > 1$ iken $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} < a^{x_2}$ olduğundan fonksiyon daima artandır.

Buna göre, $y = a^x$ üstel fonksiyonu $x_1 \neq x_2$ için $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ olduğundan bire-birdir.

Bir fonksiyonda $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ ise fonksiyon azalan $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ ise fonksiyon artandır.

IV) $y = a^x$ üstel fonksiyonunda;

$a = e$ alınırsa $y = e^x$

üstel fonksiyonu elde edilir. Buradaki e sayısı irrasyonel bir sayı olup yaklaşık değeri $e \cong 2{,}71828...$ dir. Bu sayının taban olarak alınması matematiksel açıdan anlamlıdır. Bu fonksiyona eksponansiyel fonksiyon da denir ve

$\exp(x) = e^x$

ile gösterilir.

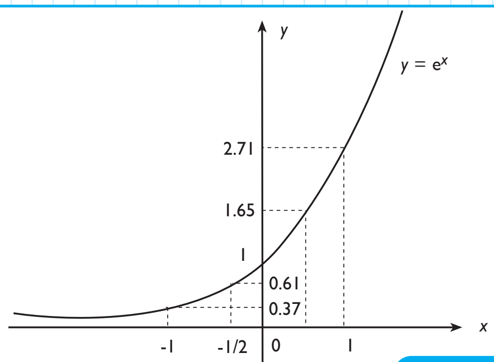
ÖRNEK 4

$y = e^x$ ***fonksiyonunun grafiğini çizelim.***

ÇÖZÜM

x	-1	-1/2	0	1/2	1
$f(x) = e^x$	$e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0.37$	$e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cong 0.61$	$e^0 = 1$	$e^{1/2} = \sqrt{e} \cong 1.65$	$e \cong 2.71$

Buna göre, $(-1, 0.37)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0.61\right)$, $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{2}, 1.65\right)$, $(1, 2.71)$ ikilileri düzlemde belirtilerek $y = e^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil 8.5

LOGARİTMİK FONKSİYON

Burada, logaritma fonksiyonunu tanımlayarak, üslü ve logaritmik ifadeler arasındaki ilişkiyi öğreneceğiz.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ üstel fonksiyonu bire-bir ve örten olduğundan ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona logaritma fonksiyonu denir. Buna göre logaritma fonksiyonu,

$$\log a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \;,\quad f(x) = \log_a x \quad \text{veya} \quad y = \log_a x$$

olarak gösterilir ve **"a tabanına göre logaritma x"** olarak okunur.

Logaritma fonksiyonunun tanımına göre,

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

olur. Burada pozitif bir x sayısının a tabanına göre logaritması, x'i bulmak için a sayısının yükseltilmesi gereken kuvvetini ifade eder. Örneğin, $\log_3 9$ sayısı, 9 sayısını bulmak için 3 sayısının yükseltilmesi gereken **kuvvetini** ifade eder. Bu sayı da 2 dir.

ÖRNEK 5

Aşağıdaki üslü ifadeleri logaritma biçiminde yazalım.

ÇÖZÜM

(i) $2^4 = 16$ için $\log_2 16 = 4$

(ii) $3^4 = 81$ için $\log_3 81 = 4$

(iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$ için $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$

(iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$ için $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

ÖRNEK 6

Aşağıda verilen logaritmik ifadeleri üslü biçimde yazalım:

ÇÖZÜM

(i) $\log_2 8 = 3$ ise $2^3 = 8$

(ii) $\log_3 9 = 2$ ise $3^2 = 9$

(iii) $\log_{10} 1000 = 3$ ise $10^3 = 1000$

(iv) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ ise $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

(v) $\log_{10} 0{,}1 = -1$ ise $10^{-1} = 0{,}1$

ÖRNEK 7

Aşağıda tanımlanan fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulalım:

ÇÖZÜM

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = y = 3^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu logaritma fonksiyonudur.

$$y = 3^x \Leftrightarrow x = \log_3 y$$

Son eşitlikte x yerine y , y yerine x yazarak

$$y = \log_3 x$$

ters fonksiyon bulunur.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu logaritma fonksiyonudur.

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{\frac{1}{3}} y$$

buradan,

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ters fonksiyonu bulunur.

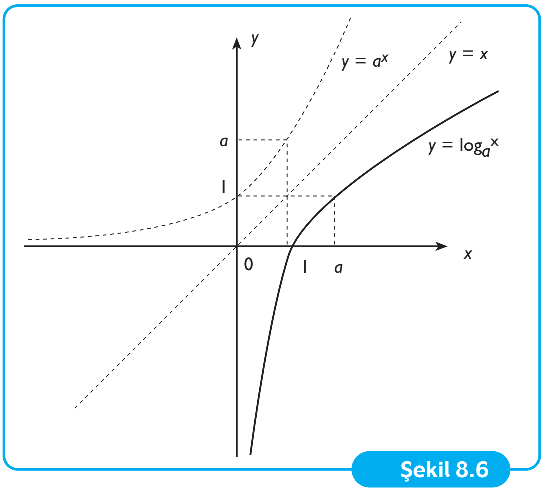
Logaritmik Fonksiyonun Grafiği

Burada $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini $a > 1$ ve $0 < a < 1$ iken çizeceğiz.

Bir fonksiyon ile ters fonksiyonun grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğunu biliyoruz. $y = \log_a x$ fonksiyonu $y = a^x$ üstel fonksiyonunun ters fonksiyonu olduğundan $y = a^x$ fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini verir. Buna göre,

(i) $a > 1$ olduğunda $y = \log_a x$ in grafiği

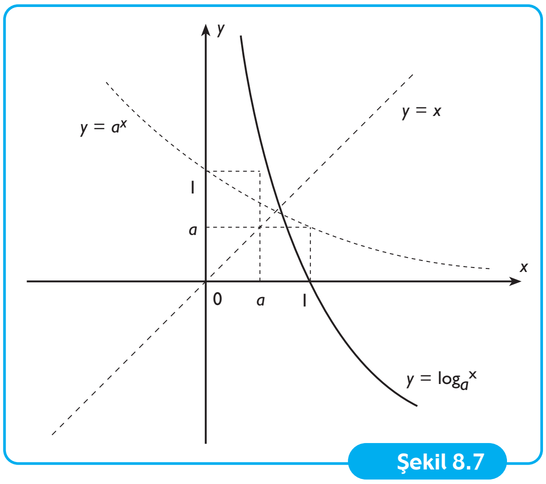
$y = a^x$ ve $y = \log_a x$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.



Şekil 8.6

(ii) $0 < a < 1$ olduğunda y $= \log_a x$ in grafiği

$y = a^x$ in grafiği biliniyorken, $y = \log_a x$ in grafiğini bulmak için $y = a^x$ in grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğini alırız.



Şekil 8.7

SIRA SİZDE 2

$y = 2^x$ ve $y = \log_2 x$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Şimdi bu grafiklerden yararlanarak $y = \log_a x$ fonksiyonunun özelliklerini ifade edelim:

I) Grafiklerden görüldüğü gibi $y = \log_a x$ fonksiyonu $(0 , \infty)$ aralığında tanımlı olduğundan sadece pozitif sayıların logaritmaları vardır. Negatif sayıların ve sıfırın logaritması tanımlı değildir.

II) $a > 0$, $a \neq 1$ olan her a sayısı için $a^1 = a$ olduğundan $\log_a a = 1$ dir.

Yani her pozitif a sayısının kendi tabanına göre logaritması 1 dir. Örneğin;

$\log_5 5 = 1$, $\log_{100} 100 = 1$, $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7} = 1$

III) $a > 0$, $a \neq 1$ olan her a sayısı için $a^0 = 1$ olduğundan $\log_a 1 = 0$.

Yani her tabana göre 1 sayısının logaritması 0 dır. Buna göre logaritma fonksiyonunun grafiği $(1 , 0)$ noktasından geçer.

IV) $a > 1$ ise 1 den büyük sayıların logaritmaları pozitif, 1 den küçük sayıların logaritmaları negatiftir.

$0 < a < 1$ ise 1 den büyük sayıların logaritmaları negatif, 1 den küçük sayıların logaritmaları pozitiftir (Grafikten kontrol ediniz).

V) Üstel fonksiyon bire-bir olduğundan bunun ters fonksiyonu olan logaritma fonksiyonu da bire-bir dir. Yani $x_1 \neq x_2$ için $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$ dir.

Logaritma işlemlerine geçmeden önce logaritma için uygun bir taban seçme problemine değinelim: Logaritma, sayısal hesaplamalarda büyük kolaylık sağlar. Çünkü üslü ve köklü çokluklarda, sayıların kesirli veya irrasyonel olması durumunda işlem yapmak kolay değildir. Böyle işlemlerin hızlı ve doğru yapılmasında logaritma önem taşır. Toplama işleminin çarpmaya göre ve çarpma işleminin üs alma işlemine göre daha kolay olduğu bilinir. Logaritmada temel ilke budur. Günümüzde sayıların logaritmalarının hesaplanmasında 10 tabanına göre hazırlanmış hesap cetvelleri veya elektronik hesap makinaları kullanılır. Aslında 1 den farklı her pozitif sayı logaritmada taban olabilir. Tabanı 10 olan logaritmaya **bayağı logaritma** denir ve kısaca $\log_{10} = \log$ ile gösterilir. Kullandığımız sayı sisteminin 10 luk sistem olması nedeniyle 10 tabanına göre logaritma kullanılması yapılan işlemleri kolaylaştırır. 10 tabanına göre logaritmanın kullanışlı olmasına karşın yaklaşık değeri 2,71828... olan ve e ile gösterilen sayının taban olarak kullanılması matematiksel olarak daha anlamlıdır. Doğal sayı olmayan bu e sayısını taban alan logaritmaya **doğal logaritma** denir ve $\log_e = \ln$ ile gösterilir. Buna göre doğal logaritma fonksiyonu:

Logaritma, sayısal hesaplarda kolaylık sağlar. Toplama çarpmaya göre, çarpma üs alma işlemine göre daha kolay olması nedeniyle, logaritma hesaplamalarda kolaylık sağlar.

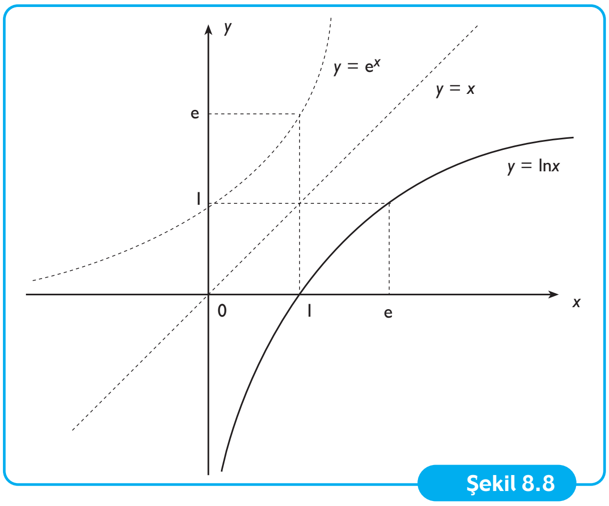
$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} , \quad f(x) = \ln x$$

dir. Bu fonksiyon $y = e^x$ üstel fonksiyonunun tersidir.

$y = e^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu $y = \ln x$ dir.

$$y = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

O halde, $y = \ln x$ fonksiyonunun grafiği $y = e^x$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir. $y = e^x$ ve $y = \ln x$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 8.8

Logaritmanın Temel Özellikleri

Burada logaritmanın temel özelliklerini ve bu özelliklerle ilgili problem çözümlerini öğreneceğiz.

$x\ ,\ y\ ,\ a\ \in\ \mathbb{R}^+\ ,\ a \neq 1$ olmak üzere

I) Bir çarpımın logaritması, çarpanların logaritmalarının toplamına eşittir.

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Bu eşitliği kanıtlayalım. Bunun için $\log_a x = u\ ,\ \log_a y = v$ olsun.

$x = a^u\ ,\ y = a^v$ olur.

$x\ .\ y = a^u\ .\ a^v = a^{u+v}$ logaritmanın tanımından

$\log_a(x\ .\ y) = u + v$

$\log_a(x\ .\ y) = \log_a x + \log_a y$

elde edilir.

II) Bir bölümünün logaritması, payın logaritması ile paydanın logaritmasının farkına eşittir.

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$\log_a x = u\ ,\ \log_a y = v$ olsun.

$x = a^u\ ,\ y = a^v$ olur.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v},$$

$\log_a \frac{x}{y} = u - v$, logaritmanın tanımından

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

elde edilir.

III) Bir kuvvetin logaritması, sayının logaritması ile kuvvetin çarpımına eşittir. ($n \in \mathbb{N}$).

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_a x^n = \log_a \underbrace{(x.x\ldots x)}_{n \text{ tane}}$$

$$= \underbrace{\log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{n \text{ tane}}$$

$$= n \log_a x$$

elde edilir.

Özel olarak $n = -1$ ve $n = \frac{1}{r}$ için sırasıyla (r, pozitif tamsayı)

$$\log_a x^{-1} = \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

olur.

$$\log_a x^{\frac{1}{r}} = \log_a \sqrt[r]{x} = \frac{1}{r} \log_a x$$

elde edilir.

IV) Logaritmada taban değiştirme:
Bir sayının bir tabana göre logaritması biliniyorsa, bu sayının herhangi bir tabana göre logaritması bulunabilir:
Her $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ için

$\log_a b \,.\, \log_b c = \log_a c$ dir.

$\log_a b = u$, $\log_b c = v$ olsun.
$a^u = b$, $b^v = c$ olur.
$(a^u)^v = b^v = c$
$a^{uv} = c$, logaritmanın tanımından
$\log_a c = u \,.\, v$
$\log_a c = \log_a b \,.\, \log_b c$ (1)

bulunur. Buradan, $\log_a b \neq 0$ olduğundan

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

elde edilir. Bu eşitliğe taban değiştirme kuralı denir.
(1) eşitliğinde $c = a$ alınırsa

$$\log_a a = \log_a b \,.\, \log_b a$$
$$1 = \log_a b \,.\, \log_b a$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

elde edilir.

ÖRNEK 8

$\log_{27}81$ ***ifadesinin değeri nedir?***

ÇÖZÜM

$$\log_{27}81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4}{3}$$

ÖRNEK 9

$\frac{3}{5} \cdot \frac{a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}}$ ***ifadesinin logaritmasını yazınız.***

ÇÖZÜM

$$\log\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}}\right) = \log\left(\frac{3\, a^3 b^2}{5\sqrt[3]{c}}\right)$$

logaritma kurallarını uygulayarak

$$= \log 3 + 3\log a + 2\log b - \log 5 - \frac{1}{3}\log c$$

elde edilir.

ÖRNEK 10

$3\log x + \frac{1}{4}\log y - (2\log a + 3\log b)$ ***ifadesini çarpım ve bölümün logaritması biçiminde yazınız.***

ÇÖZÜM

Logaritmanın temel özellikleri gereğince

$$\log \frac{x^3 \sqrt[4]{y}}{a^2 \cdot b^3}$$

elde edilir.

ÖRNEK 11

$f(x) = \log_3 x$ ***olduğuna göre*** $f\left(\sqrt[3]{9}\right)$ ***sayısı nedir?***

ÇÖZÜM

$$f\left(\sqrt[3]{9}\right) = \log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

ÖRNEK 12

$\log_3 2 = a$ ***ise*** $\log_2 48$ ***ifadesinin a cinsinden değeri nedir?***

ÇÖZÜM

$$\log_2 48 = \frac{\log_3 48}{\log_3 2} = \frac{\log_3(2^4 \,.\, 3)}{\log_3 2} = \frac{4\log_3 2 + \log_3 3}{\log_3 2}$$

$$= \frac{4a+1}{a}$$

ÖRNEK 13

$\log \frac{25}{3} + \log \frac{9}{5} + \log \frac{1}{4} - \log \frac{3}{8}$ ***ifadesinin değeri nedir?***

ÇÖZÜM

$$\log \frac{\frac{25}{3} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \log\left(\frac{25}{3} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3}\right) = \log 10 = 1$$

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Burada üstel ve logaritmik fonksiyonların türevlerini öğrenecek ve bunlarla ilgili örnekler göreceksiniz.

I) $y = f(x) = e^x$ için $y' = f'(x) = e^x$ dir.

ÖRNEK 14

$y = (3x + 1) \cdot e^x$ ***fonksiyonunun türevini bulalım.***

ÇÖZÜM

$$y' = (3x + 1)' \cdot e^x + (3x + 1) \cdot (e^x)'$$
$$y' = 3 \cdot e^x + (3x + 1) \cdot e^x$$
$$= (3x + 4)\, e^x$$

II) g türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = e^{g(x)}$ için $y' = f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ dir.

ÖRNEK 15

$y = e^{x^3}$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = \left(x^3\right)' e^{x^3} = 3x^2\, e^{x^3}$$

ÖRNEK 16

$y = 12e^{3x}$ ***fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki teğetinin eğimini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Bir fonksiyonun verilen bir noktadaki teğetinin eğimi, fonksiyonun o noktadaki türevinin değerine eşit olacağından,

$$y' = f'(x) = 12 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 36\, e^{3x}$$

$$f'(0) = 36\, e^0 = 36$$

bulunur.

III) $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$y = f(x) = a^x$ için $y' = f'(x) = a^x \cdot \ln a$ dır.

ÖRNEK 17

$y = 3^x$ ***fonksiyonunun x = 0 noktasındaki türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = 3^x \ln 3$

$f'(0) = 3^0 \ln 3 = \ln 3 \cong 1,0986$

IV) g türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = a^{g(x)}$ için $y' = f'(x) = a^{g(x)}\, g'(x) \ln a$ dır.

ÖRNEK 18

$y = f(x) = 3^{x^2 - 3x}$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = 3^{x^2 - 3x} \cdot \left(x^2 - 3x\right)' \cdot \ln 3 = 3^{x^2 - 3x} \cdot \left(2x - 3\right) \cdot \ln 3$

$= \left(2x - 3\right) \cdot 3^{x^2 - 3x} \cdot \ln 3$

ÖRNEK 19

$y = f(x) = x^2 \cdot 2^{3x}$ ***fonksiyonu için $f'(1)$ sayısını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = (x^2)' \cdot 2^{3x} + x^2 \cdot (2^{3x})'$

$f'(x) = 2x \cdot 2^{3x} + x^2 \cdot 3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2$

$f'(1) = 2 \cdot 2^3 + 1 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot \ln 2$

$= 16 + 24 \ln 2$

V) $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ olmak üzere

$y = f(x) = \log_a x$ için $y' = f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$ olur.

ÖRNEK 20

$y = f(x) = \log_3 x$ ***'in türevi bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_3 e$

olur.

VI) g türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = \log_a g(x)$ için $y' = f'(x) = \frac{(g(x))'}{g(x)} \cdot \log_a e$ dır.

ÖRNEK 21

$y = f(x) = \log_a(2x^2 + 1)$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = \frac{(2x^2+1)'}{(2x^2+1)} \cdot \log_a e = \frac{4x}{2x^2+1} \cdot \log_a e$$

ÖRNEK 22

$y = f(x) = \log_3(x^2 + 1)$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \cdot \log_3 e = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \log_3 e$$

ÖRNEK 23

$y = f(x) = \log_4 8x^2$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = \frac{(8x^2)'}{8x^2} \cdot \log_4 e = \frac{16x}{8x^2} \cdot \log_4 e = \frac{2}{x}\log_4 e$$

VII) $y = f(x) = \ln x$, $x > 0$ için $y' = f'(x) = \frac{1}{x}$ dir.

ÖRNEK 24

$y = f(x) = x^2 \ln x$ ***, $x > 0$ fonksiyonu için $f'(1)$ sayısını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

ÖRNEK 25

$y = f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x+1}$ ***, $x > 0$ olmak üzere $f'(1)$ sayısını bulunuz.***

ÇÖZÜM

Bölümün türev kuralına göre,

$$y' = f'(x) = \frac{\left((\ln x)^2\right)' \cdot (x+1) - (x+1)' \cdot (\ln x)^2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (x+1) - 1 \cdot (\ln x)^2}{(x+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{0}{4} = 0$$

VIII) g türevlenebilir pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$y = f(x) = \ln(g(x))$ fonksiyonu için $y' = f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ dir.

ÖRNEK 26

$y = f(x) = \ln(x+5)^3$ ***fonksiyonu için $f'(1)$ sayısını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = \frac{\left((x+5)^3\right)'}{(x+5)^3} = \frac{3(x+5)^2}{(x+5)^3} = \frac{3}{x+5}$$

$$f'(1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Burada $\ln(x+5)^3 \neq (\ln(x+5))^3$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK 27

$y = f(x) = \ln^3(4x^2+1)$ ***fonksiyonunun türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = 3\ln^2(4x^2+1) \cdot \left(\frac{8x}{4x^2+1}\right)$$

$$= \frac{24x \cdot \ln^2(4x^2+1)}{4x^2+1} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK 28

$y = f(x) = 3\,e^{2x+1}$ ***fonksiyonunun ikinci türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = 3 \cdot (2x+1)' \cdot e^{2x+1}$

$y' = f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = 6\,e^{2x+1}$

$y'' = f''(x) = 6 \cdot (2x+1)' \cdot e^{2x+1}$

$f''(x) = 6 \cdot 2 \cdot e^{2x+1} = 12 \cdot e^{2x+1}$

ÖRNEK 29

$y = f(x) = a^{10x}$ ***fonksiyonunun ikinci türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$y' = f'(x) = (10x)' \cdot a^{10x} \cdot \ln a = 10 \cdot a^{10x} \cdot \ln a$

$\ln a$ sabit olduğu için

$y'' = f''(x) = 10 \cdot 10 \cdot a^{10x} \cdot \ln a \cdot \ln a$

$f''(x) = 100 \cdot a^{10x} \cdot (\ln a)^2$

ÖRNEK 30

$y = f(x) = \log_3 6x$ ***'in ikinci türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = \frac{(6x)'}{6x} . \log_3 e = \frac{1}{x} \log_3 e$$

$\log_3 e$ sabit olduğundan

$$y'' = f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' . \log_3 e = -\frac{1}{x^2} . \log_3 e = \frac{-1}{x^2 \ln 3}$$

ÖRNEK 31

$y = f(x) = x \ln x$ ***in ikinci türevini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$y' = f'(x) = (x)' . \ln x + x . (\ln x)'$$

$$y' = f'(x) = 1 . \ln x + x . \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y'' = f''(x) = \frac{1}{x}$$

SIRA SİZDE 3

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

1. $y = x e^{-x}$
2. $y = (x^2 + 3) e^{x^5}$
3. $y = e^{x^3} + x^2$
4. $y = 3^{2x^2}$
5. $y = e^{-x^2} . 3^{x^3}$
6. $y = \sqrt{\ln x}$
7. $y = \ln (x^2 + x + 1)$
8. $y = a^{x^2} . \ln x$
9. $y = \ln^3 (x^2 + 1)$
10. $y = e^{-x^2} \ln x^2$

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLARIN EKONOMİDEKİ UYGULAMALARI

Şimdi, üstel ve logaritmik fonksiyonların ekonomideki uygulamalarına örnekler vereceğiz.

Üstel ve logaritmik fonksiyonlarla bileşik faiz, nüfus artışı, ekonomik büyüme gibi hesaplamalarda karşılaşırız.

Bileşik faiz, belli zaman aralığında gerçekleşen faizin, ana paraya eklenmesiyle bulunan tutarın faizidir.

P_0 = ana para,
i = faiz oranı
t = zaman (gün, ay veya yıl olarak)
P_t = ana para + faiz (t zaman süresinde)

P_t yi P_0 , i , t cinsinden bulalım.

1. zaman dilimi sonunda gerçekleşen faiz $P_0 i$ olacaktır. Böylece, 1. zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$P_1 = P_0 + P_0 i = P_0 (1+i)$$

olur.

2. zaman dilimi sonunda gerçekleşen faiz $P_1 i$ olacaktır. Böylece 2. zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 + P_1 i &= P_1 (1+i) \\ &= P_0 (1+i)(1+i) = P_0 (1+i)^2 \end{aligned}$$

olur.

3. zaman dilimi sonunda gerçekleşen faiz $P_2 i$ dir. Böylece 3. zaman dilimi sonunda, banka hesap tutarı

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + P_2 i = P_2 (1+i) \\ &= P_0 (1+i)^2 (1+i) \\ &= P_0 (1+i)^3 \end{aligned}$$

olur.

Bu şekilde devam edilerek t zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$P_t = P_0 (1+i)^t$$

olur. Buna **bileşik faiz (efektif faiz)** formülü denir.

Burada,

$$f : N \rightarrow \mathbb{R} \ , \quad f(t) = P_0 (1+i)^t$$

fonksiyonu ortaya çıkar. $1 + i = a$ ile gösterirsek

$$f(t) = a^t P_0$$

buradaki a^t terimi, t zaman dilimi sonunda banka hesap tutarının, ana paranın kaç katı olduğunu ifade eder.

ÖRNEK 32

50 milyon TL %80 yıllık faiz oranıyla 3 er aylık zaman dilimleriyle bankaya yatırılsın. 5 yıl sonundaki banka hesap tutarını bulunuz. 5 yıl sonunda kazanılan toplam faizi hesaplayınız.

ÇÖZÜM

t zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$P_t = P_0 (1+i)^t$$

dir. Bankaya yatırılan para P_0 ve bir zaman diliminde gerçekleşen faiz oranı i sırasıyla;

$$P_0 = 50 \,.\, 10^6 \quad \text{TL}$$

$$i = \frac{\text{Yıllık faiz oranı}}{\text{Bir yıldaki zaman dilimi sayısı}} = \frac{0{,}80}{4} = 0{,}20$$

olur. Burada %80 yıllık faiz oranının 0,80 şeklinde yazılması gerektiğine dikkat ediniz. Bir yılda 3 er aylık 4 zaman dilimi olduğuna göre, 5 yıldaki zaman dilimi sayısı

$$t = 4 \,.\, 5 = 20$$

dir. Bu durumda 5 yıl sonunda yani, 20 tane 3 er aylık zaman dilimi sonunda bankadaki hesap tutarı:

$$\begin{aligned} P_{20} &= 50 \,.\, 10^6\,(1 + 0{,}20)^{20} \\ &= 50 \,.\, 10^6\,(1{,}2)^{20} \\ &= 5 \,.\, 10^7 \,.\, (38{,}337) = 1916 \,.\, 10^6 \text{ TL} \end{aligned}$$

Kazanılan toplam faiz:

$$\begin{aligned} P_{20} - P_0 &= 1916 \,.\, 10^6 - 50 \,.\, 10^6 \\ &= 1866 \,.\, 10^6 \text{ TL} \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK 33

Bankaya yatırılan 25 .10^6 TL, 5 yılda bileşik faiz uygulanarak 800. 10^6 TL ye ulaşıyor. Bankanın uyguladığı yıllık faiz oranı nedir?

ÇÖZÜM

Bileşik faiz formülüne göre, t zaman dilimi sonunda banka hesap tutarı

$$P_t = P_0\,(1+i)^t$$

dir. Burada,

$$P_0 = 25 \,.\, 10^6 \quad , \quad t = 5 \text{ yıl} \quad , \quad P_t = 800 \,.\, 10^6$$

Buna göre, yukarıdaki eşitlikte verilenler yerine konursa,

$$\begin{aligned} 800 \,.\, 10^6 &= 25 \,.\, 10^6\,(1+i)^5 \\ 32 &= (1+i)^5 \\ 2^5 &= (1+i)^5 \\ 2 &= 1+i \\ i &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise yıllık faiz oranının %100 olduğunu gösterir.

ÖRNEK 34

Yıllık %60 faiz oranıyla 20 . 10^6 TL, bileşik faizle bankaya yatırılıyor. Kaç yıl sonra bankadaki hesap tutarı 209 . 10^6 TL ye ulaşır.

ÇÖZÜM

$$P_t = 209 \,.\, 10^6 \quad , \quad P_0 = 20 \,.\, 10^6 \quad , \quad i = 0.60$$

değerlerini

$$P_t = P_0\,(1+i)^t$$

ifadesinde yerine koyalım.

$$209\ .\ 10^6 = 20\ .\ 10^6\left(1+0{,}6\right)^t$$

$$209 = 20\left(1{,}6\right)^t$$

$$\frac{209}{20} = \left(1{,}6\right)^t$$

bulunur. Buradan n yıl sayısını bulmak için basit bir logaritma işlemi yeterli olacaktır.

$$t = \frac{\log 209 - \log 20}{\log 1{,}6} = \frac{2{,}3201 - 1{,}3010}{0{,}2041} \cong 5 \text{ yıl}$$

ÖRNEK 35

Bir bankaya yıllık %80 faizle yatırılan bir miktar para bileşik faiz ile 10 yıl sonra $320\ .\ 10^9$ TL ye ulaşıyor. Bankaya yatırılan parayı hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$P_t = P_0\ (1+i\ )^t$$

ifadesinde verilenleri yerine koyarak,

$$320\ .\ 10^9 = P_0\left(1 + 0{,}8\right)^{10}$$

$$320\ .\ 10^9 = P_0\left(1{,}8\right)^{10}$$

$$P_0 = \frac{32\ .\ 10^{10}}{\left(1{,}8\right)^{10}} \cong 896\ .\ 10^6 \text{ TL}$$

bulunur. 10 yıl önce bankaya yatırılan para yaklaşık 896 milyon TL dir.

ÖRNEK 36

Bir miktar para bankaya yıllık %80 faiz oranıyla birer aylık zaman dilimleri ile yatırılırsa, yıl sonunda gerçekleşecek bileşik faiz oranı nedir?

ÇÖZÜM

$t = 12$ ay olmak üzere $i = \dfrac{0{,}8}{12}$ dir.

Bileşik faiz formülüne göre,

$$P_t = P_0\left(1 + i\right)^t$$

$$P_{12} = P_0\left(1 + \frac{0{,}8}{12}\right)^{12}$$

$$P_{12} = P_0\ 2{,}17$$

bulunur. Yıl sonunda banka hesap tutarı, yatırılan paranın 2,17 katına ulaşmıştır. O halde yatırılan paranın 1,17 katı (%117) bileşik faiz oranıdır.

Üstel ve logaritmik fonksiyonların diğer bir uygulaması da nüfus artışının hesabıdır. Bunun da bileşik faiz hesabından bir farkı yoktur. Belli bir zaman başlangıcında nüfus N_0 , nüfus artış yüzdesi i olsun. t zaman dilimi sonunda ulaşılan nüfus yani, başlangıçtaki nüfus + nüfus artışı, $N(t)$ olsun. Bileşik faiz hesabındaki formülü yeni duruma dönüştürürsek

$$N(t) = N_0\,(1+i)^t$$

olur.

ÖRNEK 37

Dünya nüfusu 1975 yılında yaklaşık 4 milyar ve ortalama yıllık nüfus artış yüzdesi %2 ise 2010 yılında dünya nüfusu ne kadar olacaktır?

ÇÖZÜM

$$N(t) = N_0\,(1+i)^t$$

bağıntısında

$$N_0 = 4\,.\,10^9 \quad , \quad i = 0{,}02 \qquad t = 2010 - 1975 = 35 \text{ yıl}$$

olup, buna göre

$$\begin{aligned} N(t) &= 4\,.\,10^9\,(1+0{,}02)^{35} \\ N(t) &= 4\,.\,10^9\,(1{,}02)^{35} \\ &\cong 4\,.\,10^9\,.\,2 \\ &= 8\,.\,10^9 \end{aligned}$$

olur. Yani 2010 yılında dünya nüfusu yaklaşık 8 milyara ulaşacaktır.

ÖRNEK 38

Türkiye'nin nüfusu 1998'de $60\,.\,10^6$ olarak alınırsa kaç yıl sonra nüfus iki katına çıkacaktır? Ortalama nüfus artış yüzdesini $0{,}02$ olarak alınız.

ÇÖZÜM

$$N(t) = N_0\,(1+i)^t$$

bağıntısında

$$N(t) = 120\,.\,10^6 \quad , \quad N_0 = 60\,.\,10^6 \quad , \quad i = 0{,}02$$

değerlerini yerine koyarak,

$$\begin{aligned} 120\,.\,10^6 &= 60\,.\,10^6\,(1+0{,}02)^t \\ 2 &= (1{,}02)^t \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$\log 2 = t\,.\,\log 1{,}02$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} \cong 35 \text{ yıl}$$

O halde Türkiyenin nüfusu 35 yıl sonra 2033 yılında 120 milyon olacaktır.

Kendimizi Sınayalım

1. $f(x) = e^{-x^3}$ ise $f'(1)$ değeri nedir?

a. 3e
b. $3e^{-1}$
c. $\frac{1}{3e}$
d. $\frac{-3}{e}$
e. -3

2. $f(x) = x e^x$ ise $f'(0)$ değeri nedir?

a. -1
b. 0
c. 1
d. e
e. e^2

3. $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ ise $f'(0)$ değeri nedir?

a. -1
b. 0
c. 1
d. e
e. 1 + e

4. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ ise $f'(4)$ değeri nedir?

a. $\frac{-1}{6}e^2$
b. $\frac{e^2}{4}$
c. $\frac{e^3}{4}$
d. $\frac{-1}{4}$
e. e^3

5. $f(x) = x \ln x$ fonksiyonun $x = e$ noktasındaki teğetinin eğimi aşağıdakilerden hangisidir?

a. 1 + e
b. 2
c. 1
d. 0
e. -e

6. $f(x) = 5e^{x^2+x}$ fonksiyonunun ikinci türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $5e^{x^2+x}$
b. $5e^{x^2+x}(4x^2 + 4x + 3)$
c. $e^{x^2+x}.(2x + 1)^2$
d. $e^{x^2+x}(4x^2 + 2x + 1)$
e. $5e^{x^2+x}.(2x + 1)^2$

7. $f(x) = e^x + \ln x$ ise $f''(1)$ değeri nedir?

a. e + 1
b. e
c. e - 1
d. 0
e. -1

8. $f(x) = \sqrt{e^x}$ ise $f'(0)$ değeri nedir?

a. 0
b. 1/2
c. 1
d. 2
e. e

9. $f(x) = a^x . e^x$ ise $f'(0)$ değeri nedir?

a. $\ln a$
b. $e^x \ln a$
c. $\ln a + e^x$
d. $1 + \ln a$
e. e

10. 75 milyon TL %75 yıllık faiz oranıyla 3'er aylık zaman dilimleriyle bankaya yatırılıyor.Buna göre 1. yıl sonundaki banka hesap tutarı kaç milyon TL'dir.

a. 200
b. 158
c. 149
d. 140
e. 138

11. Bileşik faiz oranıyla bankaya yatırılan 49 milyon TL 2 yıl sonunda 81 milyon TL ye ulaştığına göre bankanın uyguladığı yıllık faiz oranı yaklaşık olarak nedir?

a. 15
b. 10
c. 28
d. 300
e. 375

12. %95 bileşik faiz oranıyla bankaya yatırılan bir miktar para 5 yıl sonunda 400 milyon TL'ye ulaştığına göre yatırılan para kaç milyon TL'dir.

a. 10
b. 12
c. 14
d. 20
e. 45

13. Türkiye'nin nüfusu 1995 yılında yaklaşık 60 milyon ve ortalama yıllık nüfus artış yüzdesi % 2 ise, 2025 yılında Türkiye'nin nüfusu yaklaşık kaç milyon olur?

a. 250
b. 108
c. 100
d. 97
e. 85

9

Belirsiz İntegral

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *belirsiz integralin alınışını,*
- *belirsiz integralinin ekonomik uygulamalarını,*
- *belirsiz integral alma yöntemlerini öğreneceksiniz.*

İçindekiler

- *Belirsiz integral tanımı*
- *Belirsiz integral hesaplama yöntemleri*

DİKKAT

- ***Belirsiz integral ünitesine başlamadan önce türev ile ilgili üniteleri bir kere daha gözden geçirmelisiniz.***
- ***Belirsiz integral kavramını ve türevle ilişkisini iyice kavramanız gerekir.***
- ***İntegral alma kuralları için örnekleri iyi incelemeniz ve bir kere de sizin çözmeniz daha uygun olacaktır.***

Giriş

Bir işletmenin, x üretim miktarını göstermek üzere, marjinal maliyet fonksiyonunun,

$$MC = x^2 + 2x$$

olarak belirlediğini varsayalım. Firmanın toplam maliyet fonksiyonu nasıl bulunur?

Yukarıda vermiş olduğumuz probleme benzer bir çok işletme ve ekonomi probleminin çözümünde integral alma kullanılacaktır. Bu kitapta verilmemesine rağmen, olayların zaman içindeki değişimini gösteren dinamik modellerin çözümünde kullanılan Diferansiyel Denklemlerin çözümünde de integralden yararlanılır.

BELİRSİZ İNTEGRAL TANIMI

Belirsiz integral konusuna girmeden önce bir ekonomi problemini ele alarak, çözümünü inceleyelim.

ÖRNEK 1

Bir işletme, x değişkeni üretim miktarını göstermek üzere, marjinal maliyet fonksiyonunu,

$$MC = f(x) = 4x + 4$$

olarak belirlemiştir. Verilen marjinal maliyet fonksiyonunundan yararlanarak bu işletmenin, sabit maliyetler 50 000 TL. olmak üzere, 100 birimlik üretiminin toplam maliyetini bulunuz.

ÇÖZÜM

Türevle ilgili ünitelerde marjinal maliyet fonksiyonunun, **toplam maliyet fonksiyonunun** üretim miktarı olarak olan x değişkenine göre birinci türevi olduğu açıklanmıştı. Toplam maliyet fonksiyonu $F(x)$ ise, $F(x)$ in türevi **marjinal maliyet** fonksiyonu olan $f(x)$ olacaktır. Böylece,

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

olur. Bu ilişki örnekte verilen verilere uygunalırsa,

$$\frac{dF(x)}{dx} = 4x + 4$$

eşitliği bulunur. Türevle ilgili verilerden, türevi $f(x) = 4x + 4$ olan bir $F(x)$ fonksiyonu, sabit farkıyla,

$$F(x) = 2x^2 + 4x$$

olarak bulunur. Türevi $4x + 4$ olan fonksiyonlardan bazıları, sabitin türevinin sıfır olduğu gözönüne alınarak, aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$F_1(x) = 2x^2 + 4x + 5\,, \qquad F'_1(x) = 4x + 4$$
$$F_2(x) = 2x^2 + 4x - 100\,, \qquad F'_2(x) = 4x + 4$$

Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi, türevi $4x + 4$ olan fonksiyonlar biribirinden **sabitlerle** ayrılmaktadır. Fonksiyonlardaki sabit yerine genel bir sabit olan c koyulursa,

$$F(x) = 2x^2 + 4x + c$$

olur. Toplam maliyet fonksiyonundaki c sabiti, üretimin olmadığı durumdaki sabit maliyeti göstermektedir. Örneğimizdeki toplam maliyet fonksiyonu olan $F(x)$ de $x = 0$ olarak alındığında,

$$F(0) = c = 50\ 000$$

olarak bulunur. Buradan $x = 100$ birimlik üretim için toplam maliyet,

$$F(100) = 2\,(100)^2 + 4.100 + 50\ 000 = 70\ 400$$

olacaktır.

Belirsiz integral ile maliyet fonksiyonları arasında ilişkiler vardır. Bu ilişkiler, bizi belirsiz integral tanımına götürecektir.

Vermiş olduğumuz örnekteki yöntem genelleştirilerek belirsiz integral tanımı aşağıdaki şekilde yapılabilir.

Belirsiz integral, türevi verilen fonksiyonları bulma işlemidir. Bu işleme ters türev de denir. Türevi eşit fonksiyonlar birbirinden integral sabiti denilen c sabitiyle ayrılırlar.

İntegral tanımındaki dx diferansiyeli, integralin hangi değişkene göre alınacağını göstermektedir.

Temel integral alma kurallarını anlayabilmeniz için türev konusuna yeniden bakmanız yararlı olacaktır.

Bir $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonu varsa, $F(x) + c$ fonksiyonlarına, $f(x)$ in ters türevleri veya **belirsiz integrali** denir ve bu durum,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitlik "$f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integralinin $F(x) + c$" olduğunu gösterir.

Burada $\int$ simgesine integral işareti, $f(x)$ fonksiyonuna **integrant** veya **integral altı** denilir. Bu ifadeye belirsiz integral denilmesinin nedeni $F(x) + c$ fonksiyonlarının kesin tanımlı olmayışı, bir fonksiyon ailesini göstermesindendir. $F(x)$ fonksiyonlarını biribirinden ayıran ***c* sabitine integral sabiti** denir.

İntegral tanımındaki dx diferansiyeli integralin hangi değişkene göre alındığını göstermektedir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

$\int 3x\,dx$ integrali, $3x$ fonksiyonunun x e göre integralinin alınacağını göstermektedir.

$\int 4y^2x\,dx$ integrali, $4y^2x$ fonksiyonunun x e göre integralinin alınacağını göstermektedir.

$\int 4y^2x\,dy$ integrali, $4y^2x$ fonksiyonunun y ye göre integralinin alınacağını göstermektedir.

$\int (2t^2y + t + 1)dt$ integrali, $(2t^2y + t + 1)$ fonksiyonunun t ye göre integralinin alınacağını göstermektedir.

TEMEL İNTEGRAL KURALLARI

Bu kısımda türev alma kurallarından yararlanarak integral alma kurallarını açıklayacağız.

1) $\int a\,dx = ax + c$

2) $n \neq -1$ için $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3) $n = -1$ için $\int x^{-1} dx = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \ln|x| + c \ , \ x \neq 0$

4) $\int e^x dx = e^x + c$

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0$

Yukarıda verilen temel integral formülleri, integral alma sonucu bulunan fonksiyonun türevinin integrali alınacak fonksiyonu verip vermediğine bakılarak doğrulanabilir. Şöyle ki:

1) $F(x) = ax + c$ ise $F'(x) = a$ olur.

2) $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ ise $F'(x) = \dfrac{(n+1)\, x^{n+1-1}}{n+1} = x^n$ olur.

3) $F(x) = \ln|x| + c$ ise $F'(x) = \dfrac{1}{x}$ olur. $x \neq 0$

4) $F(x) = e^x + c$ ise $F'(x) = e^x$ olur.

5) $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$, ise $F'(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} . \ln a = a^x$ olur.

Yandaki doğrulamalar integralin ters türev olduğunu göstermektedir.

Şimdi yukarıda vermiş olduğumuz kurallar için birer örnek verelim. Siz de ikinci taraftaki fonksiyonların türevlerini alarak integrali alınan fonksiyonları verip vermediğini kontrol ediniz.

$\int 3dx = 3x + c$ $\qquad \int \sqrt{x}\, dx = \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + c$

$\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} + c$ $\qquad \int \dfrac{dx}{x^3} = -\dfrac{1}{2x^2} + c$

$\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + c$ $\qquad \int \dfrac{dy}{y^2} = -\dfrac{1}{y} + c$

$\int 2y dy = y^2 + c$ $\qquad \int 5^x dx = \dfrac{5^x}{\ln 5} + c$

Türev yardımı ile doğrulamaları siz de yapınız.

Yukarıda verilen temel integral kuralları türev ile ilgili ünitelerde verilen türev alma kuralları yardımıyle daha da geliştirilebilir.

Buna göre, $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları, sırasıyle $F(x)$ ve $G(x)$ in türevleri olan fonksiyonlar ise,

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) + G(x)\right] = \frac{d}{dx} F(x) + \frac{d}{dx} G(x) = f(x) + g(x)$$

olduğundan,

$$\int \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int d\big(F(x) + G(x)\big)$$
$$= F(x) + G(x) + c$$
$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Birden fazla fonksiyonun toplamlarının türevi, bu fonksiyonların ayrı ayrı bulunan türevleri toplamına eşittir. Bu kuralın sonucu olarak da, birden çok fonksiyonun toplamlarının integralini fonksiyonların ayrı ayrı bulanan integralin taplamına eşit olduğu bulunur.

olur. O halde kural olarak, iki fonksiyonunun toplamlarının integrali, bunların ayrı ayrı bulunan integralleri toplamına eşit olacağını söyleyebiliriz.

$$\int \left[f(x) + g(x)\right] dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Sabitle bir fonksiyonun çarpımının integrali de, türev kuralları yardımıyle, fonksiyonun integrali ile sabitin çarpımına eşittir.

$$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$$

şeklinde gösterilir.

Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevi, fonksiyonun türevi ile sabitinin çarpımına eşit olduğunu hatırlayınız. Verdiğimiz kural da türev kuralının bir sonucudur.

SIRA SİZDE 1

Yukarıda verilen kurallar yardımıyla aşağıdaki integrallerin nasıl alındığını inceleyiniz.

Örnekteki integralleri alırken, integral işleminden önce basitleştirme işlemlerini yapmak problemlerin çözümünü kolaylaştıracaktır.

1) $\int (2x^2 - 4x + 6)\, dx = 2\int x^2 dx - 4\int x dx + 6\int dx = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 6x + c$

2) $\int (6x^2 - 2x + 8)\, dx = 6\int x^2 dx - 2\int x dx + 8\int dx = 2x^3 - x^2 + 8x + c$

3) $\int (e^y + y^2)\, dy = \int e^y dy + \int y^2 dy = e^y + \frac{y^3}{3} + c$

4) $\int (3t^3 + 2t^2 + 3)\, dt = 3\int t^3 dt + 2\int t^2 dt + 3\int dt = \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} + 3t + c$

5) $\int 2\left(\frac{1}{x}\right) dx = 2\int \left(\frac{1}{x}\right) dx = 2\ln|x| + c = \ln x^2 + c$

6) $\int \left(\frac{x^4 + x - 1}{x}\right) dx = \int \left(\frac{x^4}{x}\right) dx + \int \left(\frac{x}{x}\right) dx - \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$

$$= \int x^3 dx + \int dx - \int \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^4}{4} + x - \ln|x| + c$$

Temel integral alma kuralları yardımıyla aşağıdaki integrallerin nasıl alındığını inceleyiniz. Bu integrallerde, üstel ve köklü ifadelerin bulunduğu integrallerin nasıl alınacağı gösterilmiştir.

Bu örneklerde köklerin kuvvet şeklinde yazılmaları çok önemlidir. İntegralleri önce alınız ve sonra cevapla karşılaştırınız.

$$\int (6.5^x - 2e^x + x - 1)\, dx = 6.\frac{5^x}{\ln 5} - 2e^x + \frac{x^2}{2} - x + c$$

$$\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int (x^{1/3} + x^{-1/2})\, dx = \frac{3x^{4/3}}{4} + 2x^{1/2} + c = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{x}{\sqrt[3]{x}} + 2\right) dx = \int (x^{3/4})\, dx + \int x^{2/3}\, dx + 2\int dx$$

$$= \frac{4x^{7/4}}{7} + \frac{3x^{5/3}}{5} + 2x + c$$

$$= 4x\sqrt[4]{x^3} + \frac{3}{5} x\sqrt[3]{x^2} + 2x + c$$

ÖRNEK 2

Bir işletmede x üretim miktarına bağlı olarak marjinal maliyet fonksiyonu,

$MC(x) = x + 50e^x$

ve sabit maliyet 250 000 birim ise, toplam maliyet fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce verilen 1. Örnek incelenirse marjinal maliyet fonksiyonunun integralinin toplam maliyet fonksiyonunu vereceği görülür. Başka bir ifadeyle,

$$TC(x) = \int (x + 50\, e^x)\, dx = \int x dx + 50\int e^x dx = \frac{x^2}{2} + 50\, e^x + c$$

olur. Üretim miktarının sıfır olduğu noktadaki maliyetin sabit maliyeti göstereceğini biliyorsunuz. Buradan,

$TC(0) = 50.e^0 + c = 250\ 000$ ve

$c = 250\ 000 - 50 = 249\ 950$ olur. Böylece toplam maliyet fonksiyonu,

$$TC(x) = \frac{x^2}{2} + 50\, e^x + 249\ 950$$

olur.

Ekonomide, marjinal maliyet fonksiyonu verildiğinde toplam maliyet fonksiyonunu bulmada kullanılan yöntemden, üretim miktarına bağlı olarak verilen marjinal kâr fonksiyonundan toplam kâr fonksiyonu bulunabilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyiniz.

Ekonomide marjinal maliyet fonksiyonu verildiğinde toplam maliyet fonksiyonunu, marjinal kâr fonksiyonu verildiğinde de toplam kâr fonksiyonu bulunabilir. Bu hesaplama yöntemi integral almadır.

ÖRNEK 3

Bir işletmede x üretim miktarına bağlı olarak marjinal kâr fonksiyonu,

$K'(x) = 100x - 5000$

olarak belirlenmiştir. İşletmede üretim yapılmadığında zarar 25000 birim ise, toplam kâr fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Marjinal kâr fonksiyonunun integrali toplam kâr fonksiyonunu vereceğinden, toplam kâr fonksiyonunu,

$$K(x) = \int (100x - 5000)\, dx = 50x^2 - 5000x + c$$

olur. Üretim yapılmadığında, $x = 0$ olacağından,

$K(0) = c = -25000$ birim olarak bulunur. Böylece toplam kâr fonksiyonu,

$K(x) = 50x^2 - 5000x - 25000$

olacaktır.

Bir işletmede talep miktarı x birim, üretilen malın satış fiyatı p olmak üzere, talep fonksiyonu,

$p = f(x)$

olacaktır. Başka bir deyimle, bir işletmenin ürettiği malların tamamını sattığı durumda, talep miktarı üretim miktarına eşit ve malın fiyatı da üretim miktarının bir fonksiyonu olmaktadır. Bu fonksiyona, yukarıda fonksiyon şeklinde ifade edildiği gibi, **talep fonksiyonu** denir.

Bu örneğin çözümünde Gelir = Fiyat . Miktar olduğu unutulmamalıdır.

İşletmenin toplam gelir fonksiyonu,

$R(x) = x.p = x\, f(x)$

olur.

Toplam gelir fonksiyonunun türevi marjinal gelir fonksiyonunu verecektir.

$R'(x) = f(x) + x.\, f'(x)$

Toplam gelir fonksiyonunun türevinin marjinal gelir fonksiyonu olduğunu unutmayınız. Bu sonuç bir çok ekonomik problemin çözülmesinde kullanılır.

Eğer işletmenin, x üretim miktarına bağlı olarak, marjinal gelir fonksiyonu biliniyorsa, toplam gelir fonksiyonu,

$$R(x) = \int R'(x)\, dx$$

olarak bulunur. Böylece toplam gelir fonksiyonu, c sabit geliri göstermek üzere,

$$\int R'(x)\,dx = R(x) + c$$

olarak bulunur.

Yukarıda yapılan açıklamalar ile aşağıdaki örnek arasındaki ilişkiyi kurunuz.

ÖRNEK 4

Bir işletmenin, x üretim miktarını göstermek üzere, marjinal gelir fonksiyonu,

$$R'(x) = 10 - 2x - x^2$$

ise toplam gelir fonksiyonu ne olur?

ÇÖZÜM

$$R(x) = \int MRdx = \int \left(10 - 2x - x^2\right) dx = 10x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + c = 10x - x^2 - \frac{x^3}{3} + c$$

Üretim yapılmadığında, gelir sıfır olacağı için burada $c = 0$ olacak ve dolayısıyle bu işletme için toplam gelir fonksiyonu,

$$R(x) = 10x - x^2 - \frac{x^3}{3}$$

olur.

ÖRNEK 5

Bir kentin nüfusunun, t yıl olarak zamanı göstermek üzere,

$$p'(t) = 6000 + 9000\sqrt{t}$$

bağıntısıyle büyüdüğü belirlenmiştir. Kentin şu andaki nüfusu 500 000 kişi ise, 4 yıl sonraki nüfusu ne olur?

ÇÖZÜM

Kent nüfusunun büyümesini gösteren,

$$p'(t) = 6000 + 9000\sqrt{t}$$

fonksiyonunun integrali alınarak, t yıl sonraki nüfusu,

$$p(t) = \int p'(t)\,dt = 6000t + 6000t\sqrt{t} + 500\,000$$

fonksiyonu ile belirlenir. $t = 4$ için,

$$p(4) = 6000.4 + 6000.4\sqrt{4} + 500\,000 = 572\,000$$

olacaktır.

BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

Bu kesimde, belirsiz integral hesaplarında en çok kullanılan üç yöntemi tanıtacağız. Bu yöntemler değişken dönüşümü, kısmi integrasyon ve basit kesirlere ayırma teknikleri olarak adlandırılır.

Değişken Dönüşümü İle İntegral Alma

Değişken dönüşümü ile integral alma yöntemini bir örnek üzerinde açıklayarak genelleştireceğiz.

ÖRNEK 6

$\int (x^2 - 1)^{20} x dx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyondaki $(x^2 - 1)^{20}$ ifadesinin açılarak integralin alınması çok uzun işlemler gerektirmektedir. Bu uzun işlemleri ortadan kaldırarak integrali alınacak fonksiyonu basitleştirmek için değişkeni dönüştüreceğiz.
İntegrali alınacak fonksiyonda $(x^2 - 1)$ yerine yeni bir değişken olarak,

$$u = x^2 - 1$$

değişkenini koyalım. Dönüşümle verilen fonksiyonunun x e göre türevini alalım ve buradan da dx diferansiyelini bulalım.

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

Bulduğumuz bu değerleri integrali alınacak fonksiyonda yerine koyalım.

$$\int (x^2 - 1)^{20} x dx = \int u^{20} . x . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u^{20} du$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{u^{21}}{21} + c = \frac{1}{42} u^{21} + c = \frac{1}{42} (x^2 - 1)^{21} + c$$

Bu örnekte uygulanan değişken dönüşümü ile integral alma yöntemi için aşağıdaki genel ilke verilecektir.

Çözümde bulduğunuz integralin U' ya bağlı olarak alınacağını du diferansiyeli göstermektedir.

- u değişkeni $u = g(x)$ şeklinde seçiniz. Genelde, integrali alınacak fonksiyondaki parantez içerisi, kök içerisi veya bir üs u olarak alınır.
- $\frac{du}{dx} = g'(x)$ ve buradan $\frac{du}{g'(x)} = dx$ diferansiyeli bulunur.
- $u = g(x)$ ve $\frac{du}{g'(x)} = dx$ değerleri integral alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa, içerisinde x değişkeni yerine u değişkenine bağlı integrali alınacak bir fonksiyon bulunur. Eğer, yapılan dönüşüm sonucunda içerisinde x değişkeni bulunan bir fonksiyon bulunursa başka bir dönüşüm uygulanır.
- Dönüşüm sonucunda u ya bağlı olarak bulunan fonksiyonun integrali u ya göre alınacaktır. Alınan integralde u yerine $u = g(x)$ değeri konulur.

Kural incelendiğinde değişkenin ve buna bağlı olarak diferansiyelin nasıl dönüştürüldüğünü görmek çok önemlidir Genelde integrali alınacak fonksiyondaki parantez içerisi, kök içerisi veya bir üs u olarak alınır.

Vermiş olduğumuz değişken dönüşümü yöntemi ile alınacak integral örnekleri vereceğiz.

ÖRNEK 7

$\int (x^3 + 1)^{10} x^2 dx$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonda $(x^3 + 1)$ ifadesi yerine u değişkeni alınırsa,

$$u = x^3 + 1 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler integraldeki fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int (x^3+1)^{10} x^2 dx = \int u^{10} . x^2 . \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int u^{10} . du = \frac{1}{3} . \frac{u^{11}}{11} + c$$

$$= \frac{1}{33}(x^2+1)^{11} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 8

$\int \frac{xdx}{(x^2+2)^4}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonda parantezin içerisindeki (x^2+2) ifadesi u olarak alınacaktır.

$$u = x^2 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2x} = dx$$

Bulunan değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \frac{xdx}{(x^2+2)^4} = \int \frac{x}{u^4} . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{-4}.du$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{u^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{6} . \frac{1}{(x^2+2)^3} + c$$

bulunur.

ÖRNEK 9

$\int \frac{xdx}{x^2+3}$ ***integralini hesaplayınız..***

ÇÖZÜM

$u = x^2 + 3$ olarak alındığında,

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

olur. Bu değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \int \frac{x}{u} . \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|\ u| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + c$$

sonucu bulunur.

Bu örnekteki integralin alınmasında logaritmik fonksiyonun türevinden yararlanıldığını görünüz.

ÖRNEK 10

$\int e^{3x+6} . dx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$u = 3x + 6$ olarak alınırsa,

$$\frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{3} = dx$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int e^{3x+6} dx = \int e^u . \frac{du}{3} = \frac{1}{3} e^u + c = \frac{1}{3} e^{3x+6} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 11

$\int x.\sqrt{x^2+2}\,dx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonda $u = x^2 + 2$ olarak alınırsa,

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx = \int x.\,u^{1/2}.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}u\sqrt{u} + c$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2+2} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 12

$\int e^{x^2+1}.\,xdx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$u = x^2 + 1$ alınırsa,

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

değerleri bulunur. Bulunanlar integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int e^{x^2+1}.\,xdx = \int e^u.\,x.\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{x^2+1} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 13

$\int \frac{e^{2x}\,dx}{2+e^{2x}}$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonda $u = 2 + e^{2x}$ olarak alınırsa,

$$\frac{du}{dx} = 2e^{2x} \Rightarrow dx = \frac{du}{2e^{2x}}$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{2+e^{2x}} = \int \frac{e^{2x}}{u}.\frac{du}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln\left(2+e^{2x}\right) + c$$

sonucu bulunur.

SIRA SİZDE 2

Örneklerdeki integralleri alırken önce değişkenin nasıl dönüştürüldüğüne dikkat ediniz.

Aşağıdaki integralleri alarak ikinci tarafla karşılaştırınız.

1) $\int (5x+3)^2\,dx = \frac{1}{15}(5x+3)^3 + c,$ $\quad (u = 5x+3)$

2) $\int (1-2x)^5\,dx = -\frac{1}{12}(1-2x)^6 + c,$ $\quad (u = 1-2x)$

3) $\int \sqrt{3x+5}\,dx = \frac{2}{9}(3x+5)\sqrt{3x+5} + c,$ $\quad (u = 3x+5)$

4) $\int \frac{2x\,dx}{x^2+5} = \ln(x^2+5) + c,$ $\quad (u = x^2+5)$

5) $\int e^{8x}dx = \frac{1}{8}e^{8x} + c,$ $\quad (u = 8x)$

6) $\int 2x\,.\,e^{x^2-1}\,dx = e^{x^2-1} + c,$ $\quad (u = x^2-1)$

7) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x)^4} = -\frac{1}{3(x^2+x)^3} + c,$ $\quad (u = x^2+\mathrm{x})$

8) $\int \frac{\ln|x+1|\,dx}{x+1} = \frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]^2 + c,$ $\quad (u = \ln|x+1|)$

Kısmi İntegral Alma Yöntemi

u ve v, x değişkenine bağlı ve bu değişkene göre türevlenebilir iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun çarpımlarının x e göre türevleri alınırsa,

$$\frac{d}{dx}(u\,.\,v) = u\,.\frac{dv}{dx} + v\,.\frac{du}{dx}$$

bulunur. Diferansiyelleri kullanarak,

$$d(uv) = udv + vdu$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafındaki ifadelerin integralleri alınırsa,

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

veya

$$uv = \int udv + \int vdu$$

$u.v$ şeklinde x e bağlı iki fonksiyonun çarpımlarının türevinden yararlanılarak

$$\int udv = uv - \int vdu$$

şeklinde belirlenen kısmi integral formülü bulunur.

eşitliği bulunur. Son eşitlikteki $\int udv$ terimi yalnız bırakılırsa, kısmi integral alma yönteminde kullanılacak formül bulunur.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Kısmi integral yöntem uyguanması için dv integrali en kolay alınabilen ve aynı zamanda,

$$\int vdu$$

integralinin kolayca alınmasını sağlayan fonksiyon olarak seçilmelidir.

Formülde çarpım şeklinde verilen udv ifadesindeki çarpanlardan dv olarak integrali en kolay alınabilen ve aynı zamanda $\int vdu$ integralinin kolayca alınmasını sağlayan fonksiyon seçilmelidir. Eğer, dv olarak seçilen fonksiyon ikinci taraftaki integralin alınmasını kolaylaştırmıyorsa, dv olarak diğer çarpan seçilir.

Aşağıda vereceğimiz örnekleri dikkatle incelerseniz bu seçimi kolayca yapar ve integrali hesaplayabilirsiniz.

ÖRNEK 14

$\int x e^x dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Kısmi integral alma yöntemiyle bu integrali almak için önce $x.e^x dx$ çarpımında hangi çarpanın u, hangi çarpanın dv olarak seçilmesi gerektiği belirlenmelidir. Burada $dv = e^x dx$, $u = x$ olarak alınırsa,

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$
$$x = u \Rightarrow dx = du$$

olarak bulunur. Bulunan değerler kısmi integral alma formülünde yerlerine koyulursa,

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$
$$\downarrow\ \downarrow \quad \downarrow\ \downarrow \quad \downarrow\ \downarrow$$
$$\int u\, dv = u.\, v - \int v\, du$$
$$= x e^x - e^x + c$$

bulunur.

ÖRNEK 15

$\int x \ln x\, dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonun çarpanlarından biri olan $\ln x$ fonksiyonunun integrali kolaylıkla alınamaz. O halde dv olarak xdx çarpanı seçilirse,

$$dv = xdx \Rightarrow \int dv = \int xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$
$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

değerleri bulunur. Bulunan değerler kısmi integral alma formülünde yerlerine konulursa,

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} . \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} . \frac{x^2}{2} + c$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

bulunur.

ÖRNEK 16

$\int \ln x \, dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonun çarpanlarından $\ln x$ fonksiyonunu u, dx ise dv olarak alınacaktır.

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Bulunan değerler yerlerine konulursa,

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x . \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 17

$\int (\ln x)^2 dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$$u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2 \ln x . \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int (\ln x)^2 dx = \mathrm{x} \, (\ln x)^2 - \int 2 . \ln x . \frac{1}{x} x \, dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \mathrm{dx} = x(\ln x)^2 - 2 \, (x \ln x - x) + c \quad \text{olur.}$$

$\int \ln x \, dx$

integralinin bir önceki örnekte hesaplandığına dikkat ediniz.

ÖRNEK 18

$\int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$$dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

Bu değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \frac{1}{x^2} \ln x \, dx = -\frac{1}{x} \ln x - \int \left(-\frac{1}{x}\right) . \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 19

$\int \ln|x+1|\,dx$ ***integralini kısmi integral alma yöntemiyle hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$

$u = \ln|x+1| \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x+1}dx$

Bu değerler integrali alınacak fonksiyonda yerlerine konulursa,

$$\int \ln|x+1|\,dx = x\ln|x+1| - \int \frac{x}{x+1}dx$$

$$= x\ln|x+1| - \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x\ln|x+1| - x + \ln|x+1| + c$$

sonucu bulunur.

ÖRNEK 20

$\int x^4 \ln 10x\,dx$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak fonksiyonunun çarpanlarından $\ln 10x$ ifadesi u, x^4dx ifadesi de dv olarak alınırsa,

$dv = x^4dx \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{x^5}{5}$

$u = \ln 10x \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}dx$

Bulunan değerler yerlerine konulursa,

$$\int x^4 \ln 10x\,dx = \frac{x^5}{5}\ln 10x - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^5}{5}\ln 10x - \frac{x^5}{25} + c$$

bulunur.

Basit Kesirlere Ayırma Yöntemiyle İntegral Alma

a lar sabit ve $n \geq 0$ tamsayı olmak üzere,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ a_{n-1}x + a_n$$

şeklinde x in kuvvetlerine göre düzenlenmiş bir ifadeye polinom denildiğini biliyorsunuz.

Bir polinomun $ax + b$ şeklinde birinci dereceden $ax^2 + bx + c$ şeklinde ikinci dereceden çarpanları olabilir.

$f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

x in pozitif tamsayı olan kuvvetlerine göre düzenlenmiş ifadelere polinom denir. $f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

şeklindeki fonksiyona rasyonel fonksiyon denir. Burada bir rasyonel fonksiyonun basit kesirler şeklinde nasıl ifade edileceği açıklanacaktır.

şeklindeki fonksiyona rasyonel fonksiyon denir. Rasyonel fonksiyonda paydaki fonksiyonunun derecesi paydadaki polinomun derecesinden küçük ise bu kesir basit kesirdir. Eğer paydaki polinomun derecesi paydadaki polinomun derecesinden büyük veya eşit ise, verilen kesirin payındaki polinom paydasındaki polinoma bölünerek verilen fonksiyon bir polinom ile bir basit kesirin toplamı şeklinde ifade edilebilir.

Örnek olarak $\dfrac{x^2}{x-1}$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \cline{2-2} \mp x^2 \pm x & x+1 \\ \cline{1-1} x & \\ \mp x \pm 1 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Böylece $\dfrac{x^2}{x-1} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1}$ olur.

Bu rasyonel fonksiyonun integralini alalım.

$$\int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c$$

Bir rasyonel fonksiyonun paydasındaki polinomun biribirinden farklı $ax + b$ şeklinde birinci dereceden çarpanları varsa, çarpanların her biri için,

$$\frac{A}{ax+b}$$

şeklinde basit kesirler yazılır ve bu kesirler toplanarak rasyonel fonksiyona özdeş kılınır.

ÖRNEK 21

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Paydadaki polinom, $(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$\frac{1}{x^2-1} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

İkinci taraftaki kesirlerin paydaları eşitlenirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$1 \equiv A(x+1) + B(x-1)$$
$$1 \equiv (A+B)x + A - B$$

özdeşlikleri bulunur. Özdeşliğin ikinci tarafı x li terimin katsayısı birinci taraftaki x li terim olmadığı için katsayı sıfır olacaktır.

$$A + B = 0$$
$$A - B = 1$$

Bu iki denklem ortak çözülürse $A = \dfrac{1}{2}$ ve $B = -\dfrac{1}{2}$ olarak bulunur. Böylece

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

olur. İntegral alınırsa,

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

$$= \ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|} + c$$

bulunur.

ÖRNEK 22

$\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak rasyonel fonksiyonun paydasındaki polinom çarpanlarına ayrılırsa, $x^2 + 7x + 6 = (x+1)(x+6)$ bulunur.

$$\frac{1}{x^2+7x+6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6}$$

Eşitliğin ikinci tarafındaki kesirlerin paydaları eşitlenir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$1 \equiv A(x+6) + B(x+1)$$
$$1 \equiv (A+B)x + 6A + B \quad \Rightarrow \quad A+B=0\,,\ \ 6A+B=1$$

denklem sistemi bulunur. Bu iki denklemin ortak çözümünden

$A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{5}$ bulunur.

$$\frac{1}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{5}\frac{1}{x+6}$$

İntegral alınırsa

$$\int \frac{1}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+6}$$

$$= \ln\sqrt[5]{\left|\frac{x+1}{x+6}\right|} + c$$

olur.

ÖRNEK 23

$\int \frac{x^2dx}{x^2-4}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak rasyonel fonksiyonun payındaki polinomun derecesi paydasındaki polinomun derecesinden büyük veya eşit ise; pay paydaya bölünerek verilen fonksiyon bir polinom ile bir basit kesirin toplamı şeklinde ifade edilir.

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2-4 \\ \cline{2-2} \mp x^2 \pm 4 & 1 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x^2-4} \equiv 1 + \frac{4}{x^2-4}$$

Özdeşlikteki $\frac{4}{x^2-4}$ fonksiyonu yukarıda açıklandığı gibi basit kesirlere ayrılabilir.

$$\frac{4}{x^2-4} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

İkinci taraftaki kesirlerin paydaları eşitlenip gerekli düzenlemeler yapılırsa, $4 \equiv (A+B)x + 2A - 2B$ özdeşliği bulunur. Özdeşliğin iki tarafındaki benzer terimlerin katsayılarının eşitliğinden,

$$A + B = 0$$
$$2A - 2B = 4$$

denklem sistemi bulunur. Bulunan iki denklem iki bilinmeyenden oluşan denklem sisteminin ortak çözümünden $A = 1$, $B = -1$ bulunur. Verilen rasyonel fonksiyonunun integrali alınırsa,

$$\int \frac{x^2dx}{x^2-4} = \int dx + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= x + \ln|x-2| - \ln|x+2| + c$$

$$= x + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c$$

bulunur.

DİKKAT

İntegrali alınacak rasyonel ifadelerin paydasındaki çarpanların biçimi önemlidir.

İntegrali alınacak rasyonel fonksiyonun paydasındaki polinomun $ax + b$ şeklinde birinci derece ifadelerin tekrarlanmış çarpanları varsa, A lar bulunması gereken sabitler olmak üzere (n) kere tekrarlanmış bir çarpan için,

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

şeklinde n tane basit kesirin toplamı yazılır.

ÖRNEK 24

$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)^2}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak rasyonel fonksiyonunun paydasındaki $(x - 1)$ çarpanı iki kere tekrarlanmıştır. Bu nedenle,

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

özdeşliği yazılıp, ikinci tarafın paydaları eşitlenirse, $x + 1 \equiv A(x - 1) + B$ özdeşliği ve buradan da, $x + 1 \equiv Ax - A + B$ özdeşliği bulunur. Özdeşliğin her iki tarafındaki benzer terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$A = 1$
$-A + B = 1$

denklem sistemi bulunur. Bulunan sistemin çözümünden $A = 1$, $B = 2$ değerleri bulunur.

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} \equiv \frac{1}{x-1} + 2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

İntegral alınırsa,

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)^2} = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \ln|x-1| - \frac{2}{(x-1)} + c$$

bulunur.

ÖRNEK 25

$\int \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^3+x^2}$ ***integralini alınız.***

ÇÖZÜM

Verilen rasyonel fonksiyonun paydasındaki polinom, $x^3 + x^2 \equiv x^2(x+1)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır. Burada x çarpanı iki kere tekrarlanmıştır.

$$\frac{(2x^2-1)}{x^3+x^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

İkinci tarafın paydaları eşitlenirse,

$$2x^2 - 1 \equiv x(x+1)A + (x+1)B + x^2C$$
$$\equiv (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

özdeşliği bulunur. Özdeşliğin iki tarafındaki benzer terimlerin katsayıları eşitlenirse,

$A + C = 2$
$A + B = 0$
$B = -1$

denklem sistemi bulunur. Sistemin ortak çözümünden, $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ değerleri bulunur. İntegrali alınırsa,

$$\int \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^3+x^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x+1| + c$$

$$= \ln|x(x+1)| + \frac{1}{x} + c$$

sonucu bulunur.

Kendimizi Sınayalım

1. $\int \frac{6x dx}{3x^2 - 10}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\ln|3x^2 - 10| + c$

b. $\ln|x^2 - 10| + c$

c. $\ln|3x^2 + 10| + c$

d. $6\ln|x^2 - 2| + c$

e. $\frac{1}{2}\ln(x^3 + 3) + c$

2. $\int e^{3x^3} . x^2 dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $e^{3x^3} + c$

b. $\frac{1}{3} e^{3x^3} + c$

c. $\frac{1}{2} e^{3x^3} + c$

d. $\frac{1}{9} e^{3x^3} + c$

e. $e^{x^3} + c$

3. $\int (x^2 + 2x)^5 . (x + 1)\, dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{(x^2 + 2x)^6}{12} + c$

b. $\frac{(x^2 + 2x)^5}{10} + c$

c. $\frac{(x^2 + 2x)^6}{6} + c$

d. $\frac{(x^2 + 2x)^4}{4} + c$

e. $\frac{(x^2 + 2x)^6}{18} + c$

4. $\int x^2 \ln x dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$

b. $\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{3} + c$

c. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{18} + c$

d. $\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + c$

e. $\frac{x^3}{9}\ln x + \frac{x^3}{3} + c$

5. $\int e^{-2x} dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{1}{2} e^{-2x} + c$

b. $\frac{1}{3} e^{-2x} + c$

c. $-\frac{1}{2} e^{-2x} + c$

d. $-\frac{1}{3} e^{-2x} + c$

e. $\frac{1}{4} e^{-2x} + c$

6. $\int e^{x^2} . x dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{1}{2} e^{x^2} + c$

b. $-\frac{1}{2} e^{x^2} + c$

c. $e^{x^2} + c$

d. $e^{x^2 - 1} + c$

e. $\frac{1}{8} e^{x^2} + c$

7. $\int e^{\frac{1}{x}} . \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{x}} + c$

b. $-e^{\frac{1}{x}} + c$

c. $2e^{\frac{1}{x}} + c$

d. $e^{-\frac{1}{x}} + c$

e. $\frac{1}{e^x} + c$

8. $\int \frac{(\ln x)^5 dx}{x}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\frac{(\ln x)^5}{5} + c$

b. $\frac{(\ln x)^6}{6} + c$

c. $\frac{(\ln x)^2}{3} + c$

d. $\frac{(\ln x)^4}{4} + c$

e. $\frac{\ln x}{6} + c$

9. x üretim miktarını göstermek üzere, bir firmanın marjinal gelir fonksiyonu, $R'(x) = 40\,000 - 2x$ olarak belirlenmiştir. Buna göre, bu firmanın toplam gelir fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $40\,000 - x^2$

b. $40\,000x - x^2$

c. $40\,000x + x^2$

d. $40\,000x - 3x$

e. x^2

10. x üretim miktarını göstermek üzere, bir firmanın marjinal maliyet fonksiyonu, $C'(x) = 8x + 100$ olarak belirlenmiştir. Firmanın 40 birim üretim için toplam maliyet 80 bin birim ise, toplam maliyet fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $4x^2 + 100x + 60.000$

b. $4x^2 + 100x + 69.600$

c. $4x^2 + 10x + 69.000$

d. $4x^2 + 100x + 70.000$

e. $4x^2 + 100x$

11. x üretim miktarını göstermek üzere, bir firmada marjinal kâr fonksiyonu, $P'(x) = 2x + 500$ olarak belirlenmiştir. Firmada 100 birimlik üretim için toplam kâr 20 bin birim ise, toplam kâr fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a. $-x^2 + 500x - 20\,000$

b. $-x^2 + 500x + 20\,000$

c. $x^2 + 500$

d. $x^2 + 500x - 30\,000$

e. $-x^2 - 500x + 20\,000$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\ln \sqrt[3]{\frac{x-3}{x+3}} + c$

b. $\ln \sqrt[4]{\frac{x-3}{x+3}} + c$

c. $\ln \sqrt[6]{\frac{x-3}{x+3}} + c$

d. $\ln \sqrt[12]{\frac{x-3}{x+3}} + c$

e. $\ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c$

13. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x - 1}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\ln (e^x + 1) + c$

b. $\ln |e^x - 1| + c$

c. $\ln e^x + c$

d. $\ln |1 - e^x| + c$

e. $e^x + c$

14. $\int \frac{\ln |x|\, dx}{x}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a. $\ln^2 |x| + c$

b. $\frac{\ln^2 |x|}{2} + c$

c. $\ln 2x + c$

d. $\frac{\ln^3 |x|}{3} + c$

e. $\frac{\ln^2 |x|}{3} + c$

Bernhard Riemann (1826 - 1866)

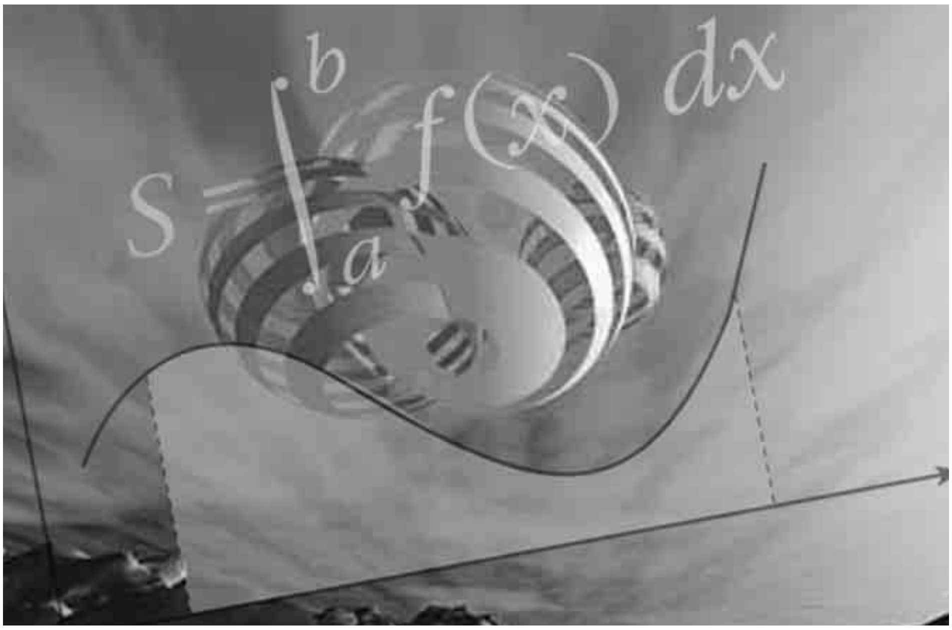
Riemann' ın uzay geometri konusundaki çalışmaları, modern kuramsal fiziğin gelişmesine önemli etkileri olmuştur. Bu gün Riemann integrali olarak bilinen belirli integral kavramını ortaya koymuştur.

"Riemann gibi bir geometrici gerçek dünyanın en önemli çizgilerinin hemen hemen hepsini herkesten önce sezmiş olabilirdi."

A. S. EDDINGTON

Belirli İntegral ve Uygulamaları

10



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *belirli integralin tanımını,*
- *belirli integralin alınışını,*
- *belirli integralin işletme ve ekonomik uygulamalarını öğreneceksiniz.*

İçindekiler

- *Belirli İntegral Tanımı*
- *Belirli İntegralin Uygulamaları*

DİKKAT

- ***Üniteyi çalışırken göreceğiniz gibi, bu üniteye başlamadan önce belirsiz integral kurallarını bir kere daha gözden geçirmeniz gerekmektedir.***
- ***Belirli integralin uygulamaları için de, türevle ilgili üniteleri ve belirsiz integral uygulamalarını da gözden geçirmeniz gerekmektedir.***

Giriş

Bir işletmenin, x değişkeni üretim miktarını göstermek üzere marjinal maliyet fonksiyonunu,

$$MC(x) = 2x + 3$$

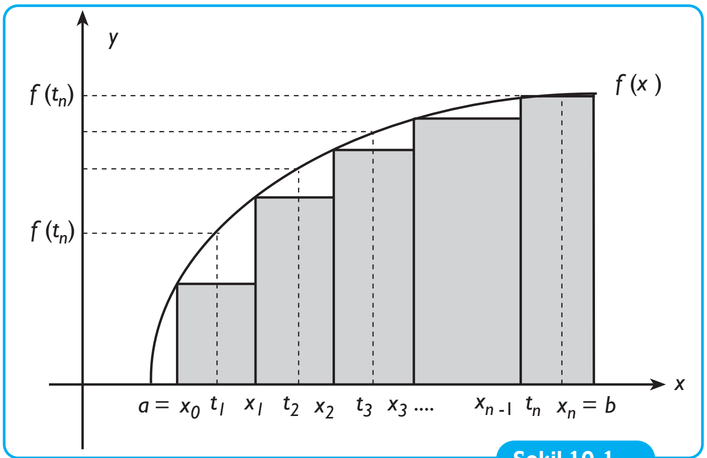
olarak belirlediğini varsayalım. Verilen marjinal maliyet fonksiyonundan yararlanarak 200 birimlik üretim için firmanın toplam maliyeti ne olur?

Vermiş olduğumuz problem ile 9. ünite girişinde verdiğimiz problem arasındaki farkı görmektesiniz. Önceki problemde marjinal maliyet fonksiyonu verilerek, toplam maliyet fonksiyonu istenmektedir. Bu problemde ise toplam maliyet fonksiyonu veriliyor, 200 birimlik üretim için toplam maliyetin ne olacağı soruluyor. Bu karşılaştırma sonucunda, belirli integral sözkonusu problemlerin çözümü için uygun bir yöntem olmaktadır.

Belirli integral, üniteyi çalışırken göreceğiniz gibi, fonksiyonu verilen bir eğri ile x ve y eksenleri arasında kalan alanların da hesaplanmasında kullanılmaktadır.

BİR EĞRİ ALTINDAKİ ALAN VE BELİRLİ İNTEGRAL TANIMI

$[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin, $f(x) \geq 0$ olmak üzere, Şekil 10.1'de görüldüğü gibi olduğunu varsayalım.



Şekil 10.1

Belirli integral fonksiyonu $f(x)$ olarak verilen eğri ile $[a, b]$ kapalı aralığında x ekseni arasında kalan alanın bulunması ile tanımlanmaktadır. Bu alan bulunurken verilen aralık n tane alt aralığa ayrılmakta, aralıkların taban olduğu dikdörtgenlerin alanlarının toplamının limiti alınmaktadır.

$[a, b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 ..... x_{n-1} < x_n = b$ şeklinde uzunluğu biribirine eşit n tane alt aralığa bölelim ve herbir alt aralığın uzunluğunu Δx ile gösterelim.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

dir.

Alt aralıklar üzerinde keyfi olarak alınmış $t_1, t_2 ..... t_n$ noktaları için fonksiyonun aldığı değerler $f(t_1), f(t_2), f(t_3) ..... f(t_n)$ olacaktır. $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğri, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alan, yaklaşık olarak taban uzunlukları Δx ve yükseklikleri $f(t_1), f(t_2), ... f(t_n)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamı olarak yazılabilir.

$$S \cong f(t_1)\,\Delta x + f(t_2)\,\Delta x + ... f(t_n)\,\Delta x$$

Bu toplam, toplam sembolü yardımiyle,

$$S \cong \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x$$

şeklinde ifade edilebilir. Aralık sayısını gösteren n değeri $n \to \infty$ iken $\Delta x \to 0$ olacaktır. Verilen toplamın limiti, $f(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olduğundan, vardır. Toplamın bu limitine **belirli integral** denir ve

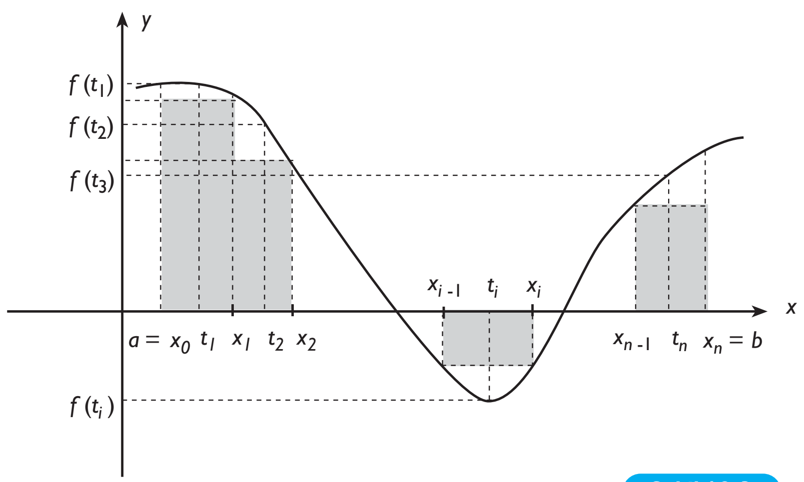
$$S = \lim_{k \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

biçiminde gösterilir. $\int_a^b f(x)\,dx$ yazılışı, $f(x)$ fonksiyonunun ***a* ile *b* arasındaki integrali** diye okunur. Burada a ya integralin **alt sınırı**, b ye integralin **üst sınırı** denir.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif, negatif ve sıfır değerleri de alabilir. Bu durumda, yukarıda olduğu gibi keyfi $x_0, x_1 \ldots x_n$ noktaları $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ koşulunu sağlayacak şekilde alınarak $[a, b]$ aralığı $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralıklarına bölünür. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$ ve $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ toplamına, **Rieamann toplamı** adı verilir. Bu toplam pozitif, negatif veya sıfır olabilen bir sayıdır. $n \to \infty$ ve $\Delta x_i \to 0$ için Rieamann toplamının limitine $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki belirli integrali denir ve bu limit,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 10.2

BELİRLİ İNTEGRALİN BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde, belirli ve belirsiz integral tanımlarından elde edilebilecek kimi önemli özellikler verilecektir. Bu özellikler yardımıyle, limit hesaplamasına girmeden belirli integrallerin hesaplamalarını yapacağız.

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

d) $a \le c \le b$ için $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

e) **İntegral hesabın birinci temel teoremi:** $f(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $a < x < b$ ise,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

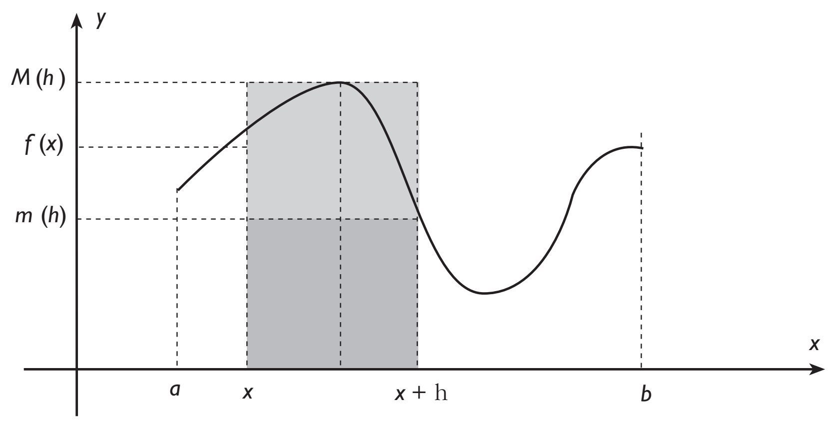
olarak tanımlanan $F(x)$ fonksiyonu türevlenebilir ve $F'(x) = f(x)$ dir.

f) **İntegral hesabın ikinci temel teoremi:** $F(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $F(x)$ de türevi $f(x)$ olan bir fonksiyon (yani $F'(x) = f(x)$) ise,

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

dir.

Bu özelliklerden son ikisi üzerinde kısaca duralım: $f(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon, $x \in (a, b)$ ve $h > 0$ olsun. Kolaylık için $f(x)$ in grafiğini şekilde olduğu gibi kabul edelim.



Şekil 10.3

$[x, x + h]$ aralığı içinde $f(x)$ in aldığı en büyük değer $M(h)$, en küçük değer $m(h)$ olsun. Tabanı h ve yüksekliği $M(h)$ olan büyük dikdörtgenin alanı $h \,.\, M(h)$, tabanı h ve yüksekliği $m(h)$ olan küçük dikdörtgenin alanı $h \,.\, m(h)$, $f(x)$ in grafiği altında ve $[x, x + h]$ aralığı üstünde kalan bölgenin alanı $\int_x^{x+h} f(t)\, dt$ olduğundan, bu alanlar arasında

$$h m(h) \le \int_x^{x+h} f(t)\, dt \le h M(h) \qquad (1)$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan $x \le c \le x + h$ olmak üzere, $F(x)$ fonksiyonunun tanımlanışına göre,

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \int_c^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^{c} f(t)\,dt = \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^{x} f(t)\,dt = F(x+h) - F(x)$$

olduğundan (1) eşitsizliğinden

$$m(h) \le \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le M(h)$$

eşitsizliği elde edilir. $h \to 0$ iken $m(h) \to f(x)$ ve $M(h) \to f(x)$ olduğundan

$$f(x) \le \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \le f(x)$$

veya buradan

$$F'(x) = f(x)$$

elde edilir. Böylece integral hesabın birinci temel teoremi, yani (e) özelliği kanıtlanmış olur.

Bu teorem, integral ile türev arasındaki önemli ilişkiyi verir. Bu ilişki sayılar için "kare alma" ile "karekök alma" arasındaki ilişkiye benzemektedir. Eğer pozitif bir sayının karesini alırsanız, elde edilen sayının karekökü başlangıçtaki sayıdır. Benzer olarak, sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun $\int_a^x f(t)\,dt$ ile tanımlanan ilkeli (belirsiz integrali) olan $F(x)$ fonksiyonunun türevi $f(x)$ dir.

İntegral hesabın ikinci temel teoremine gelince: $f(x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $F(x)$ de $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. $a \le x \le b$ için birinci temel teoreme göre,

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

olarak tanımlanan $A(x)$ fonksiyonunun türevi $f(x)$ dir. Böylece $F'(x) = f(x)$ ve $A'(x) = f(x)$ olduğundan $F(x)$ ile $A(x)$ fonksiyonları birbirlerinden bir sabit kadar farklıdırlar, yani öyle bir c sabiti vardır ki,

$$A(x) - F(x) = c \quad \text{veya} \quad A(x) = F(x) + c$$

dir. Bu eşitlikte sırasıyla $x = a$, $x = b$ yazalım. $x = a$ için

$$A(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \text{, yani } A(a) = F(a) + c = 0 \text{ veya } c = -F(a)$$

olur. Buradan, $x = b$ için

$$A(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) + c = F(b) - F(a)$$

veya kısaca

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

sonucuna ulaşılır. Bazen $F(b) - F(a)$ farkı yerine $\left[F(x)\right]\Big|_{x=a}^{x=b}$ gösterimi de kullanılır; Başka bir ifadeyle,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(x)\right]\Big|_{x=a}^{x=b}$$

olur. Bu formül bize ilkeli bilinen bir fonksiyonun belirli integralinin kolayca hesaplanabileceğini gösterir.

ÖRNEK 1

$$\int_{-2}^{2} \left(2x + x^2\right) dx = \left[x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left(4 + \frac{8}{3}\right) - \left(4 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{3}$$

ÖRNEK 2

$$\int_1^e \left(\ln|x|\right)^2 . \frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{\ln^3|x|}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}$$

ÖRNEK 3

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

ÖRNEK 4

$$\int_0^2 e^{x^2 - 2x}\left(x - 1\right) dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2 - 2x}\right]_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ÖRNEK 5

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \int_1^4 x^{1/2}\,dx = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3} . 4 . 2 - \frac{2}{3} . 1 . 1 = \frac{14}{3}$$

ÖRNEK 6

$$\int_0^{\sqrt{8}} \frac{3x\,dx}{\sqrt{1 + 3x^2}}$$ ***integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Değişken dönüşümü yöntemi uygulanacaktır.

$$u = 1 + 3x^2 \Rightarrow du = 6x\,dx$$

$$dx = \frac{du}{6x}$$

Burada belirli integralin limitleri de yeni değişkene göre belirlenecektir.

$x = 0$ için $u = 1 + 3x^2 = 1 + 3 . 0 = 1$

$x = \sqrt{8}$ için $u = 1 + 3 . \left(\sqrt{8}\right)^2 = 1 + 3 . 8 = 25$

Verilen kuralın uygulamaları örneklerle verilmiştir. Değişkeni dönüştürürken ne şekilde bir işlem yapılacağı belirsiz integral ünitesinde açıklanmıştır.

Belirli integral hesaplanırken değişken dönüştürülürse, integralin limitlerinin de yeni değişkene göre dönüştürülmesi gerekir..

$$\int_0^{\sqrt{8}} \frac{3x\,dx}{\sqrt{1+3x^2}} = \frac{1}{2}\int_1^{25} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{25} u^{-\frac{1}{2}}\,du = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{25} = \left[\sqrt{u}\right]_1^{25} = 5 - 1 = 4$$

ÖRNEK 7

$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ ***belirli integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Bu integralin hesaplanabilmesi için değişken dönüşümü yöntemi uygulanacaktır.

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$x\,du = dx$$

$x = 1$ için $u = \ln 1 = 0$

$x = e$ için $u = \ln e = 1$

$$\int_1^e \frac{\ln x\,dx}{x} = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

ÖRNEK 8

$\int_{-3}^{1} \sqrt{1-x}\,dx$ ***belirli integralini hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Bu integralin hesaplanabilmesi için de değişken dönüşümü yöntemi uygulanacaktır.

$$u = 1 - x \quad \Rightarrow \quad du = -\,dx$$

$x = -3$ için $u = 1 - x = 1 + 3 = 4$

$x = 1$ için $u = 1 - x = 1 - 1 = 0$

$$\int_{-3}^{1} \sqrt{1-x}\,dx = -\int_4^0 \sqrt{u}\,du = \int_0^4 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

Aşağıdaki örneklerde belirli integalin işletme ve ekonomideki uygulamalarını bulacaksınız.

ÖRNEK 9

Türkiye'de yayınlanan bir gazetenin, t değişkeni yılları göstermek üzere, satışlarının artışı,

$$S(t) = 100\, e^t$$

fonksiyonu ile belirlenmiştir. İlk 10 yıl içinde bu gazetenin toplam satışı ne olur?

ÇÖZÜM

Gazetenin ilk 10 yıldaki toplam satışını bulmak için $t_1 = 0$, $t_2 = 10$ limitleri arasında verilen fonksiyonunun belirli integral alınmalıdır.

$$\int_0^{10} 100\, e^t\, dt = 100 \int_0^{10} e^t\, dt = 100 \left[e^t\right]_0^{10} = 100\left(e^{10} - 1\right) \cong 2202546$$

olur ($e^{10} \cong 22026{,}46$ olarak alınmıştır).

ÖRNEK 10

t değişkeni ay olarak zamanı göstermek üzere, bir işletmenin aylar itibariyle satışları,

$$S(t) = 30\sqrt{t} + 100$$

fonksiyonu ile belirlenmiştir. Bu işletmenin ilk 4 aydaki satışları toplamı nedir?

ÇÖZÜM

$$\text{Satışlar toplamı} = \int_0^4 \left(30\sqrt{t} + 100\right) dt$$

$$= \int_0^4 \left(30\, t^{1/2} + 100\right) dt = \left[20\, t\sqrt{t} + 100\, t\right]_0^4 = 20 \,.\, 4 \,.\, \sqrt{4} + 400$$

$$= 160 + 400 = 560$$

ÖRNEK 11

Bir firmada, x satış miktarını göstermek üzere, marjinal gelir fonksiyonu,

$$R'(x) = -\,0{,}02x + 100$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre;

a) 100 birimlik satış için toplam gelir ne olur?

b) 10 ile 50 birim arasında yapılan satışlar için toplam gelir ne olur?

ÇÖZÜM

a) $R(x) = \int_0^{100} \left(-\,0{,}02x + 100\right) dx$

$$= \left[-\,0{,}01x^2 + 100x\right]_0^{100} = -\,0{,}01 \,.\, (100)^2 + 100 \,.\, 100$$

$$= -\,100 + 10.000 = 9900 \text{ birim}$$

b) $R(x) = \int_{10}^{50} \left(-\,0{,}02x + 100\right) dx = \left[-\,0{,}01x^2 + 100x\right]_{10}^{50} = 3976$ birim

ÖRNEK 12

Bir firmanın, x üretim miktarı olmak üzere, marjinal gelir fonksiyonu,

$$MG = f(x) = 20$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre;

a) 500 birimlik üretim için toplam gelir ne olur?

b) 200 ve 1000 birimlik arasında üretim için toplam gelir ne olur?

ÇÖZÜM

a) $\int_0^{500} 20\, dx = \left[20x\right]_0^{500} = 20 \,.\, 500 = 10\ 000$ birim

b) $\int_{200}^{1000} 20\, dx = \left[20x\right]_{200}^{1000} = 16\ 000$ birim

SIRA SİZDE 1

Bu sorulara kolayca yanıt verebilmeniz için belirsiz integral kurallarını yeniden gözden geçiriniz.

Aşağıda verilen belirli integralleri hesaplayınız.

1. $\int_0^1 e^x\, dx$

2. $\int_0^3 \left(3x^2 - 4x\right) dx$

3. $\int_0^2 \left(4x^3 - 9x^2\right) dx$

4. $\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2+1} \,.\, x\, dx$

5. $\int_1^e \frac{(\ln|\, x\,|)\, dx}{x}$

6. $\int_0^3 \left(x^3 + 3x\right)^{1/2} \left(x^2+1\right) dx$

7. $\int_0^3 \left(3x^2 + 9\right)^{1/2} .\ x\, dx$

8. $\int_1^2 \left((\sqrt{x}) + \sqrt{x-1}\,\right) dx$

9. $\int_{-1}^0 (2x-1)^3\, dx$

10. Bir firmada, x üretim miktarını göstermek üzere, marjinal gelir fonksiyonu, $MG = 10x$ olarak belirlenmiştir. Bu firmanın 20 birim üretim yaptığında toplam geliri kaç birim olur?

11. Bir firmanın, x değişkeni yılları göstermek üzere, satışlarının artışı, $S(x) = 9x^2$ fonksiyonu ile belirlenmiştir. İlk 3 yıl içinde bu firmanın satışları kaç birim olur?

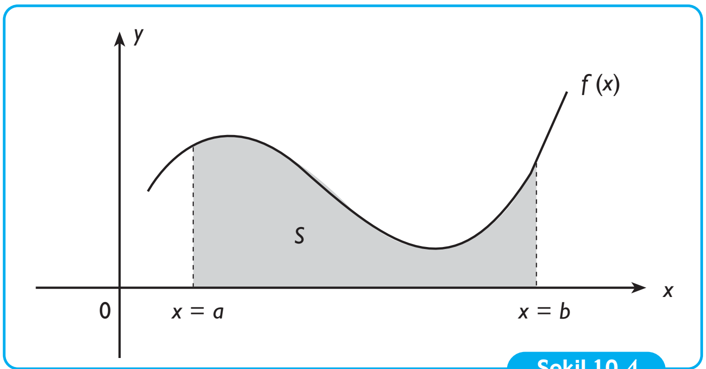
12. Bir ülkede, t değişkeni yılları göstermek üzere, nüfus $S(t) = e^{2t}$ fonksiyonu ile verilmiştir. Bu ülkede ilk 10 yıl içinde nüfus kaç birim artar?

BELİRLİ İNTEGRALİN ALAN HESAPLARINA UYGULANMASI

Belirli integrali tanımlarken bir $f(x) \geq 0$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ve $x = a$, $x = b$ doğrulariyle x ekseni arasında kalan alanın,

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

belirli integraliyle ifade edilebileceği açıklanmıştı.



Şekil 10.4

Bir $f(x) \geq 0$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasındaki alan,

$$S = \int_a^b f(x)\, dx$$

belirli integrali ile bulunur.
Eğer $f(x) \leq 0$ ise, fonksiyonunun gösterdiği eğri ile x ekseni arasındaki alan

$$S = -\int_a^b f(x)\, dx$$

belirli integrali ile hesaplanır.

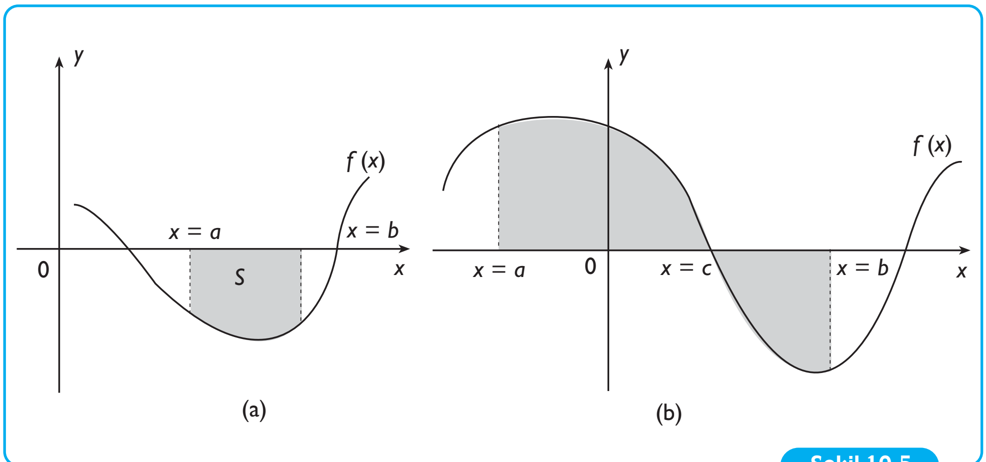
Eğer $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan alan aşağıda Şekil 10.5 (a)'da görüldüğü gibi bütünüyle x ekseninin altında kalıyorsa, alan,

$$S = -\int_a^b f(x)\, dx$$

belirli integrali ile bulunur. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında hem pozitif hem de negatif değerler alıyorsa, istenilen alan

$$S = \int_a^c f(x)\, dx - \int_c^b f(x)\, dx$$

integraliyle hesaplanır [Şekil 10.5 (b)].



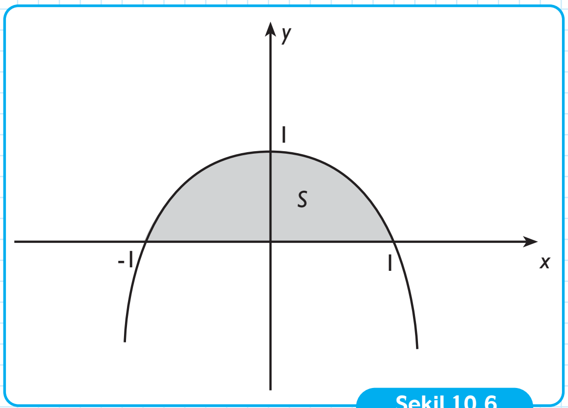
Şekil 10.5

ÖRNEK 13

$f(x) = 1 - x^2$ ***fonksiyonunun gösterdiği eğri ile x ekseni arasındaki kalan alanı hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Verilen fonksiyonunun gösterdiği eğri aşağıda Şekil 10.6'da gösterilmiştir.



Şekil 10.6

Bu gibi örnekleri çözerken, önce verilen fonksiyonun grafiğini çizmemiz gerekir. Bu gibi çizimlerin ne şekilde yapılacağı türevle ilgili ünitelerde açıklanmıştır.

Şekilde taralı olarak gösterilen alanı belirli integral yardımiyle bulacağız.

$$S = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\ \text{br}^2$$

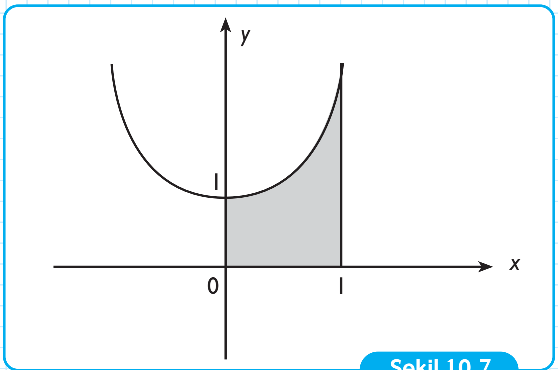
ÖRNEK 14

$f(x) = x^2 + 1$ ***fonksiyonunun gösterdiği eğri $x = 0$, $x = 1$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.***

ÇÖZÜM

Alan bulma problemlerinde önce verilen fonksiyonun grafiğinin çizilmesi uygun olur. $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile istenilen alan taralı olarak aşağıda Şekil 10.7 de gösterilmiştir.

$x = 0$ doğrusunun y ekseni olduğunu hatırlayınız.



Şekil 10.7

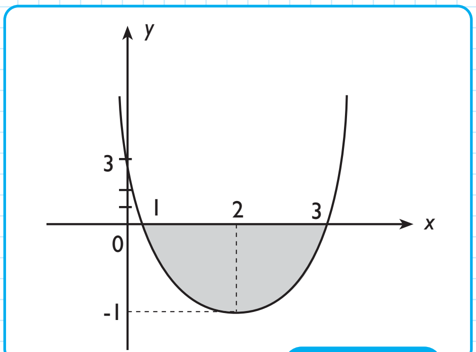
$$S = \int_{0}^{1} (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\ \text{br}^2$$

ÖRNEK 15

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ ***fonksiyonunun gösterdiği eğri ile $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ noktaları ve x ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

Bildiğiniz gibi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonu çizildiğinde bir parabol belirtir. Bu parabolün tepe noktası $T(2, -1)$ dir. $f(x)$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile bulunması istenen alan aşağıda Şekil 10.8 de gösterilmiştir.



Şekil 10.8

Şekilden görüldüğü gibi istenilen alan x ekseninin altında kalmaktadır.

$$S = -\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = -\left[\left(9 - 18 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right)\right]$$

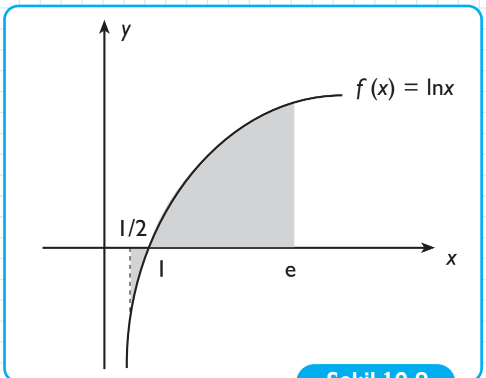
$$= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\ \text{br}^2$$

ÖRNEK 16

$f(x) = \ln x$ ***fonksiyonunun gösterdiği eğri*** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = e$ ***doğruları ve x ekseni arasında kalan alanı bulunuz.***

ÇÖZÜM

$f(x) = \ln x$ fonksiyonunun gösterdiği eğri ile sınırlanan bulunması istenilen alan taralı olarak aşağıdaki gösterilmiştir.



Şekil 10.9

Şekilde görüldüğü gibi, bulunması istenilen alanın bir kısmı x-ekseni altında, bir kısmı ise x ekseninin üstünde kalmaktadır. O halde bulunması istenilen alan iki belirli integralin toplanmasiyle bulunacaktır.

$$S = -\int_{1/2}^{1} \ln x\,dx + \int_{1}^{e} \ln x\,dx$$

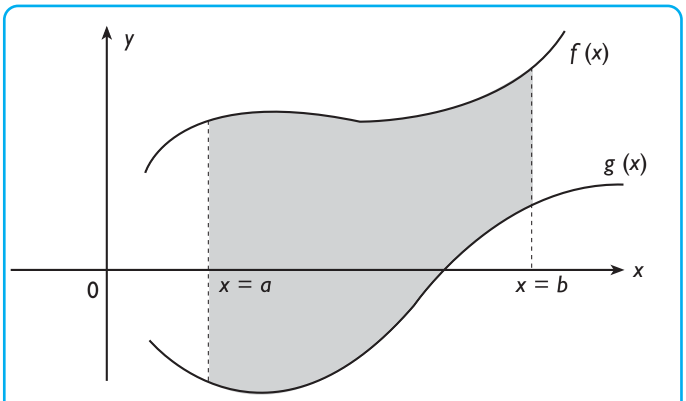
Bu integralin alınması kısmi integrasyon yöntemi ile yapılacaktır.

$$S = -\left[x\ln x - x\right]_{1/2}^{1} + \left[x\ln x - x\right]_{1}^{e}$$

$$= -\left[(1\,.\,\ln 1 - 1) - \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] + \left[(e\,\ln e - e) - (1\,.\,\ln 1 - 1)\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right] + 1 = \frac{1}{2}(3 - \ln 2)\ \text{br}^2$$

Belirli integral iki eğri arasındaki alanın bulunması için de kullanılır. Şimdi $f(x)$ ve $g(x)$ şeklinde verilmiş iki fonksiyonun gösterdiği eğriler ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan alan aşağıdaki Şekil 10.10 da görüldüğü gibi olsun.



Şekil 10.10

$f(x)$ ve $g(x)$ gibi verilen herhangi iki fonksiyonun gösterdiği eğriler ile $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan alan,

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

belirli integralinin yardımıyla hesaplanacaktır.

Şekilde görüldüğü gibi $f(x) \geq g(x)$ olarak verilmiştir. Taralı alan,

$$S = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

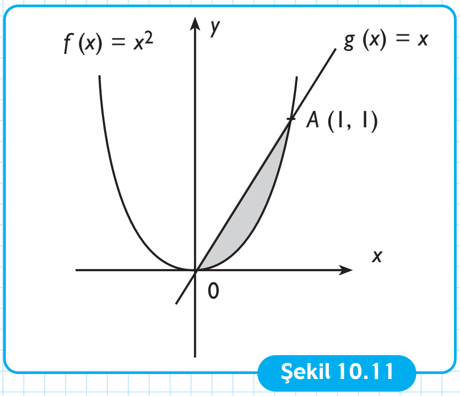
belirli integrali yardımıyla bulunur.

ÖRNEK 17

$f(x) = x^2$ ve $g(x) = x$ ***fonksiyonlarının gösterdikleri eğriler arasında kalan alan nedir?***

ÇÖZÜM

Önce verilen fonksiyonların grafiklerini çizelim. $f(x) = x^2$ fonksiyonu tepesi başlangıç noktasında olan bir paraboldür. $g(x) = x$ ise birinci açıortayını göstermektedir.



Şekil 10.11

Bu iki fonksiyonun grafikleri 0(0,0) ve $A(1, 1)$ noktalarında kesişirler. Burada şekilde görülen taralı alanın hesaplanması istenmektedir.

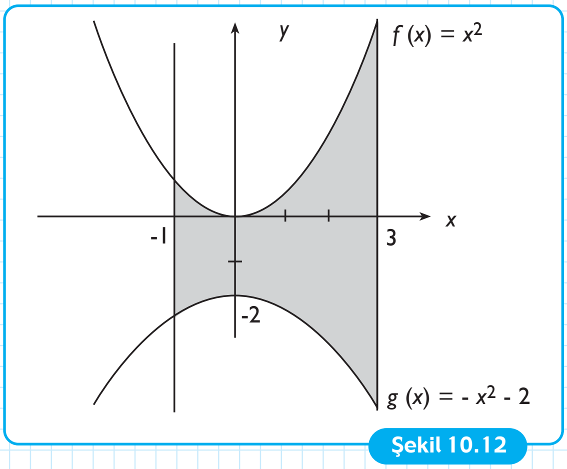
$$S = \int_0^1 \left[x - x^2\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ br}^2$$

ÖRNEK 18

$f(x) = x^2$ ***ve*** $g(x) = -x^2 - 2$ ***fonksiyonlarının gösterdikleri eğriler ile*** $x = -1$, $x = 3$ ***doğruları arasında kalan alan nedir?***

ÇÖZÜM

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile istenilen alan aşağıdaki Şekil 10.12 de gösterilmiştir.



Şekil 10.12

$$S = \int_{-1}^{3} \left[x^2 - \left(-x^2 - 2\right)\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \left[x^2 + x^2 + 2\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \left(2x^2 + 2\right) dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{3} = (18 + 6) - \left(-\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{80}{3} \text{ br}^2$$

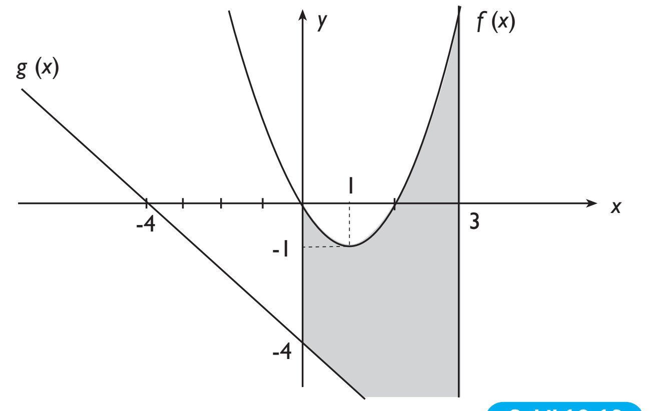
ÖRNEK 19

Örneklerde görüldüğü gibi, verilen fonksiyonların çizimlerini yapmadan alan hesaplaması yapmayız.

$f(x) = x^2 - 2x$ ***ve*** $g(x) = -x - 4$ ***fonksiyonlarının gösterdikleri eğriler ile*** $x = 0$, $x = 3$ ***doğruları arasında kalan alanı bulunuz.***

ÇÖZÜM

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri, $x = 0$, $x = 3$ doğruları arasındaki alan aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 10.13

$$S = \int_0^3 \left[\left(x^2 - 2x\right) - \left(-x - 4\right)\right] dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 - x + 4\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x\right]_0^3 = \frac{33}{2} \text{ br}^2$$

ÖRNEK 20

$f(x) = x^2 - 10x$ ***ve*** $g(x) = -x^2 + 10x$ ***fonksiyonlarının gösterdiği eğriler arasındaki alan nedir?***

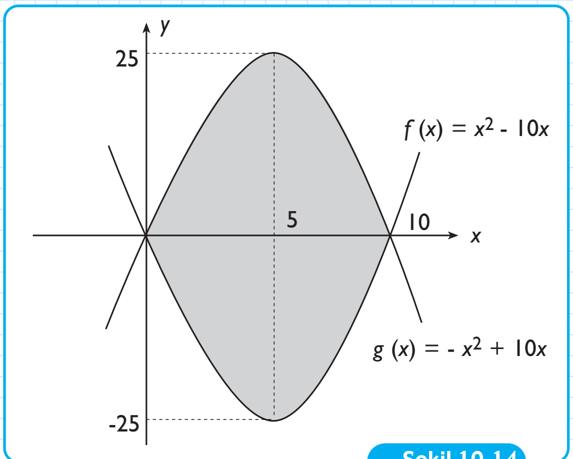
ÇÖZÜM

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının kesim noktalarını bulmak için ortak çözümün yapılması gerekir.

$$x^2 - 10x = -x^2 + 10x$$
$$2x^2 - 20x = 0$$
$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 10$$

Örnekte verilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının gösterdikleri eğrilerin kesim noktalarını bulmak gerekmektedir. Kesim noktaları iki eğrinin denklemlerinin ortak çözümü ile bulunur.

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının gösterdikleri eğriler ile hesaplanması istenilen alan aşağıdaki şekilde taralı olarak gösterilmiştir.



Şekil 10.14

$$S=\int_0^{10}\left[\left(-x^2+10x\right)-\left(x^2-10x\right)\right]dx=\int_0^{10}\left(-2x^2+20x\right)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+10x^2\right]_0^{10}$$

$$=-\frac{2000}{3}+1000=\frac{1000}{3}\ \text{br}^2$$

BELİRLİ İNTEGRAL YARDIMIYLA TÜKETİCİ VE ÜRETİCİ RANTININ HESAPLANMASI

Bir tüketici, almak istediği bir tüketim malı için uygun gördüğü bir fiyatı ödemeye hazırdır. Tüketici bu malı alırken ödeyeceği fiyat ödemeye hazır olduğu fiyattan daha düşük ise aradaki farka **tüketici rantı** denir. Başka bir deyimle, tüketici ödemeye hazır olduğu fiyattan daha düşük fiyattan bir mal aldığı için kazançlı çıkacaktır.

Ekonomi derslerinde tanımlarını bildiğimiz üretici ve tüketici rantlarının belirli integral yardımıyle nasıl bulunacağı açıklanacaktır.

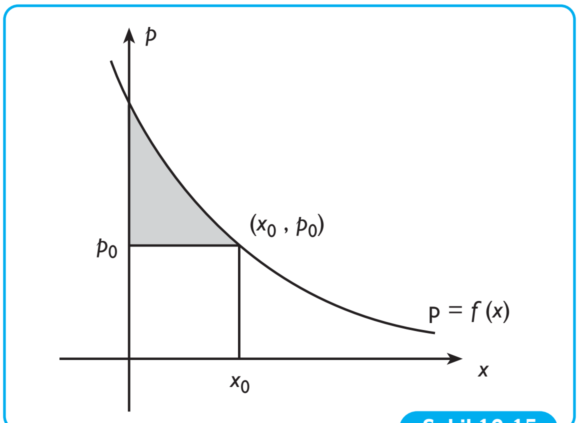
Tüketici rantını talep fonksiyonu yardımıyla belirleyeceğiz. Bildiğiniz gibi, bir malın talep edilen miktarlarıyla bu malın fiyatları arasında talep fonksiyonu dediğimiz bir fonksiyonel ilişki vardır.

Talep ile fiyat arasındaki ilişki ters yönlü olduğu için talep fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Aşağıda bir malın fiyatı p, talep edilen miktarlar x ve $(x_0\ ,\ p_0)$ denge noktası olmak üzere $p = f(x)$ ile talep fonksiyonunun grafiği Şekil 10.15'de gösterilmiştir.

Tüketici rantının bulunması için firmanın talep fonksiyonunu belirlemesi gerekmektedir. x_0 fiyat düzeyinde tüketici rantı,

$$TR=\int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 10.15

Şekilde taralı olarak gösterilen alan tüketicinin ödemeye hazır olduğu ve daha düşük fiyattan mal aldığı için ödemediği tutarı göstermektedir. Bu alan verilen tanıma göre tüketici rantını verecektir.

$$TR = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$$

ÖRNEK 21

Talep fonksiyonu $p = 50 - 3x$ ***olan bir mal için talep miktarı 10 birim olduğunda tüketici rantını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$x_0 = 10$ için $p_0 = 50 - 3 \,.\, 10 = 20$ olduğundan

$$TR = \int_0^{10} (50 - 3x)\,dx - 10 \,.\, 20$$

$$= \left[50x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{10} - 200$$

$$= 500 - 150 - 200 = 150 \text{ birim}$$

olacaktır.

ÖRNEK 22

Talep fonksiyonu $p = \dfrac{60}{3 + x}$ ***olan bir mal için fiyat*** $p_0 = 5$ ***olduğunda tüketici rantını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$p_0 = 5$ için talep fonksiyonu yardımıyla talep miktarı olan x_0 değerini bulalım.

$$5 = \frac{60}{3 + x_0} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 9$$

$$TR = \int_0^{9} \left(\frac{60}{3 + x}\right) dx - p_0 \,.\, x_0$$

$$= \left[60 \ln |x + 3|\right]_0^9 - 9 \,.\, 5 = 60 \,.\, [\ln 12 - \ln 3] - 45$$

$$= 60 \ln 4 - 45 = 120 \ln 2 - 45 \text{ birim}$$

ÖRNEK 23

Talep fonksiyonu $p = -x^2 + 9$ ***olan bir mal için*** $x_0 = 2$ ***değerindeki tüketici rantını bulunuz.***

ÇÖZÜM

$x_0 = 2$ ye karşı gelen p_0 değeri, talep fonksiyonundan,

$$p_0 = -(2)^2 + 9 = 5$$

olarak bulunur.

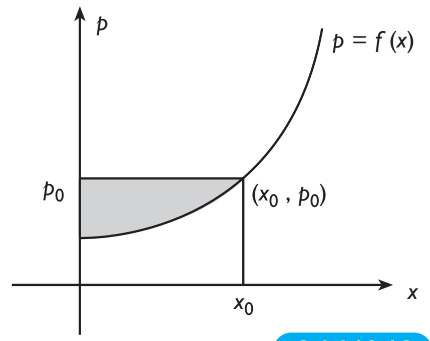
$$TR = \int_0^2 \left(-x^2 + 9\right) dx - 5 \,.\, 2$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 9x\right]_0^2 - 10 = \frac{16}{3} \text{ birim}$$

Bir malın arz fonksiyonu, bu malın fiyatlarıyla bu fiyatlarda arz edilen miktarları arasındaki fonksiyonel ilişkiyi göstermektedir. Bir malın arz edilen miktarları x değişkeniyle, fiyatları ise p değişkeni ile gösterilirse, talep fonksiyonuna benzer şekilde arz fonksiyonu,

$$p = f(x)$$

olacaktır. Arz fonksiyonu, iktisat derslerinden bildiğiniz gibi, artan bir fonksiyondur. Arz fonksiyonu ile $(x_0 \,,\, p_0)$ denge noktası aşağıda Şekil 10.16 da genel olarak gösterilmiştir.



Şekil 10.16

Bir üretici ürettiği malları piyasada satmaya hazır olduğu fiyattan daha yüksek bir fiyattan satarsa daha fazla bir kazanç elde eder. İşte bu kazanca **üretici rantı** denir.

Şekilde bu rant taralı alan olarak gösterilmiştir. Tüketici rantı belirli integralin alan bulma uygulaması yardımıyla,

$$ÜR = p_0\, x_0 - \int_0^{x_0} f(x)\, dx$$

formülüyle bulunur.

Ekonomi derslerinde gördüğümüz gibi, arz fonksiyonu verildiğinde üretici rantının nasıl bulunacağı açıklanacaktır. Eğer $f(x) = p$ arz fonksiyonu ise üretici rantı, $(x_0 \,,\, p_0)$ noktasında,

$$ÜR = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x)\, dx$$

formülüyle bulunur.

ÖRNEK 24

***x* değişkeni üretim miktarlarını *p* değişkeni fiyatları göstermek üzere, bir mal için arz fonksiyonu,**

$$p = \sqrt{x + 9}$$

olarak belirlenmiştir. Talep miktarı $x_0 = 7$ olduğunda üretici rantını bulunuz.

ÇÖZÜM

$p_0 = \sqrt{7+9} = 4$ olduğundan

$$ÜR = 4\ .\ 7 - \int_0^7 \sqrt{x+9}\ dx$$

$$= 28 - \left[\frac{2}{3}(x+9)\sqrt{x+9}\right]_0^7$$

$$= 28 - \left[\frac{2}{3}\ .\ 16\ .\ 4 - \frac{2}{3}\ .\ 9\ .\ 3\right] = \frac{10}{3} \text{ birim}$$

bulunur.

ÖRNEK 25

Bir mal için x değişkeni miktarı, p değişkeni fiyatı göstermek üzere arz ve talep fonksiyonları aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

$p = 20 - 3x^2$ ***Talep fonksiyonu***
$p = 2x^2$ ***Arz fonksiyonu***

Bu fonksiyonlardan yararlanarak denge noktasındaki tüketici ve üretici rantlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Denge noktası arz ve talep fonksiyonlarının kesim noktasıdır. Denge noktasındaki fiyat ve miktarı bulmak için verilen fonksiyonları ortak çözelim.

$$20 - 3x^2 = 2x^2$$
$$20 = 5x^2$$
$$4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2\ ,\ x_0 = -2 \text{ olamayacağından } x_0 = 2\ ,\ p_0 = 8 \text{ olur.}$$

$$TR = \int_0^2 \left(20 - 3x^2\right) dx - 2\ .\ 8 = \left[20x - x^3\right]_0^2 - 16 = 16 \text{ br}$$

bulunur. Benzer olarak,

$$ÜR = 2\ .\ 8 - \int_0^2 \left(2x^2\right) dx = 16 - \left[\frac{2\ x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32}{3} \text{ br}$$

bulunur.

SIRA SİZDE 2

Aşağıda verilen arz ve talep fonksiyonlarından yararlanarak yanlarında gösterilen fiyat düzeylerindeki üretici ve tüketici rantlarını bulunuz.

1. Talep fonksiyonu $p = -2x + 3$ ise $x_0 = 1$ noktasındaki tüketici rantı nedir?
2. Arz fonksiyonu $p = 4x + 7$ ise $x_0 = 1$ noktasındaki üretici rantını bulunuz.

Kendimizi Sınayalım

1. $f(x) = x^2$ parabolü, $x = 1$, $x = 2$ doğruları ve x ekseni arasında kalan alan nedir?

a. $\frac{13}{3}$

b. $\frac{11}{3}$

c. $\frac{10}{3}$

d. $\frac{7}{3}$

e. $\frac{1}{13}$

2. $f(x) = 9 - x^2$ parabolü $x = -2$, $x = 3$ doğruları ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

a. $\frac{87}{5}$

b. $\frac{89}{5}$

c. $\frac{100}{3}$

d. $\frac{101}{3}$

e. $\frac{103}{3}$

3. $f(x) = 2x - x^2$ parabolü $x = -1$, $x = 2$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?

a. $\frac{7}{3}$

b. $\frac{8}{3}$

c. $\frac{10}{3}$

d. $\frac{11}{3}$

e. $\frac{13}{3}$

4. $f(x) = 2x^2$ ve $g(x) = 27 - x^2$ parabolleri ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

a. 108

b. 107

c. 106

d. 105

e. 100

5. $f(x) = x^2$ parabolü ve $g(x) = -x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?

a. $\frac{3}{2}$

b. 1

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{1}{6}$

e. $\frac{1}{8}$

6. x talep miktar ve p de fiyat olmak üzere, bir mal için talep fonksiyonu,

$$p = -x + 3$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre, $x_0 = 2$ için tüketici rantı nedir?

a. 4

b. 3

c. 2

d. 1

e. $\frac{1}{2}$

7. x üretim miktarı ve p fiyat olmak üzere, bir mal için arz fonksiyonu,

$$p = 16 + x$$

olarak belirlenmiştir. Buna göre, $x_0 = 6$ için üretici rantı nedir?

a. 12

b. 13

c. 15

d. 18

e. 20

Sir Isaac Newton (1643 - 1727)

Günümüz diferansiyel ve integral hesabın kurucularından olan Newton, optik ve yerçekimi konularındaki çalışmaları onun dünyanın en büyük bilim adamlarından biri olarak bilinmesine neden olmuştur.

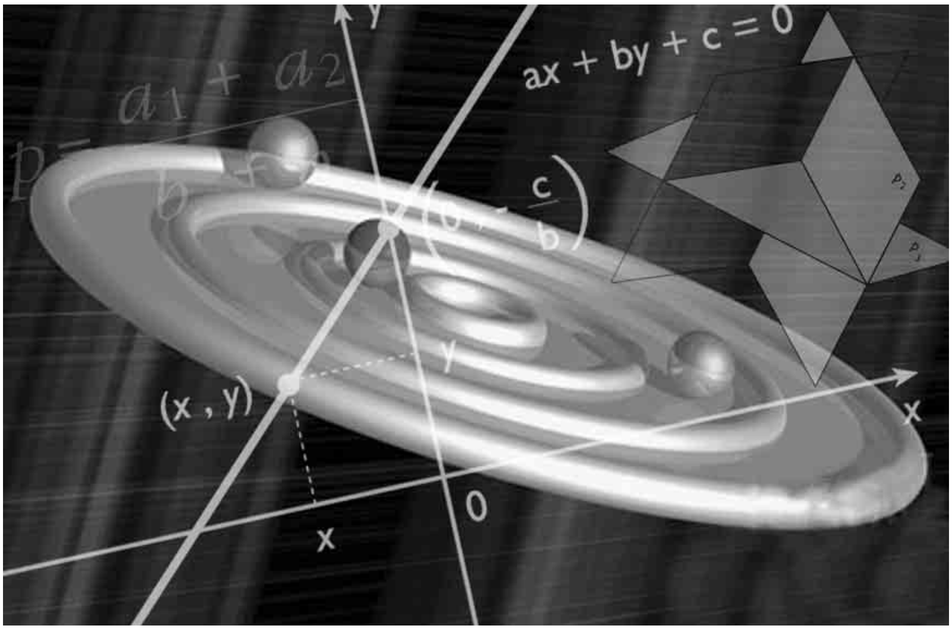
"Diferansiyel ve integral hesap her kilidi açan öyle bir anahtardır ki, onun sayesinde matematikçiler geometrinin ve onun sonucu olarak da doğanın sırlarını keşfederler"

P. BERKELEY

"Modern matematik gittikçe hesap yerine düşünceye yöneliyor. Buna rağmen matematiğin bazı dalları vardır ki, hesaplama her zaman önemini koruyacaktır."

P. G. LEJEUNE - DIRICHLET

Doğrusal Denklem Sistemleri



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *İki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerinin grafik çözümlerini yapabilecek,*
- *n-bilinmeyenli doğrusal denklem sistemlerinin çözüm yöntemlerini öğrenecek,*
- *Ekonomide arz ve talep arasındaki ilişkinin matematiksel olarak ifade edilmesine bir örnek olarak, doğrusal arz-talep fonksiyonlarını inceleyecek, denge fiyatı ve denge miktarının bulunmasını öğreneceksiniz.*

İçindekiler

DİKKAT

- ***Ünite içinde geçen size yeni olan kavramlar üzerinde düşünmelisiniz, örnekleri dikkatlice incelemelisiniz.***
- ***Verilenlerin ve bulunması istenilenlerin neler olduğunu öncelikle belirlemelisiniz.***
- ***Size bırakılan alıştırmaları kağı ve kalem kullanarak çözmelisiniz.***

Giriş

Bir gıda pazarı, fiyatları 1,5 milyon TL/kg ve 2 milyon TL/kg olan iki çeşit çayı karıştırmak suretiyle 100 kg karma çay hazırlamıştır. Bu karma çayın fiyatı 1,8 milyon TL/kg olarak belirlenmişse, 100 kg karma çay içindeki ucuz ve pahalı çay miktarları ne olur?

Ortaöğretim yıllarında yukarıdaki türden problemlerin çözümleriyle uğraşmış olmalısınız. Bu türden bir problemi çözmek için, adına iki bilinmeyenli denklemler dediğimiz denklemlerden yararlandınız. Çeşitli havuz problemlerinin, faiz problemlerinin uygun biçimde oluşturulan denklemler yardımıyla kolayca çözülebildiğini anımsıyor olmalısınız. Şimdi ise, daha çok bilinmeyen ve daha çok denklemden oluşan sistemlerin çözümleri üzerinde duracağız. Adına doğrusal denklem sistemi diyeceğimiz bu tür denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği konularını araştıracağız.

Matematikte olduğu kadar istatistik, fizik, biyoloji, mühendislik, ekonomi gibi alanlar için de birçok problem bir doğrusal denklem ya da doğrusal denklem sistemi biçiminde ifade edilir ve çözümü aranır. Bazen doğrusal denklem sistemi olarak ifade edilemeyen problemler de doğrusal denklem sistemine dönüştürülerek yaklaşık çözümler bulunmaya çalışılır. Bu nedenle doğrusal denklem sistemleri doğrusal cebirin önemli bir konusunu oluşturur.

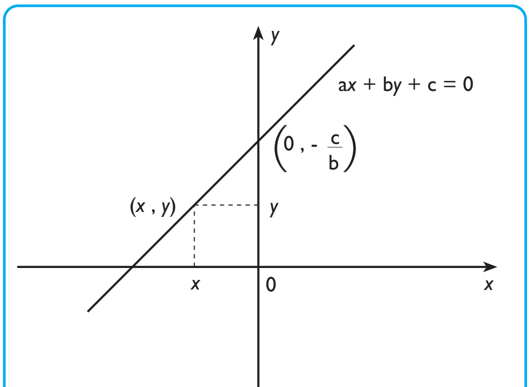
Bu ünitede, genel doğrusal denklem sistemlerinin ifade edilişi, homojen ve homojen olmayan sistemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin araştırılması, yok etme yöntemiyle çözümün bulunması konuları üzerinde duracağız. Daha sonra, matrisler konusunun işlendiği ünite içinde de matris yöntemleriyle doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerinin bulunmasını yeniden ele alacağız.

İKİ BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ

AMAÇ 1 ***İki bilinmeyenli bir doğrusal denklem sisteminin grafik ve analitik çözümünün bulunmasıdır.***

a, b gerçel sayılar, $a \neq 0$ ve x bir bilinmeyen olmak üzere $ax + b = 0$ biçiminde bir eşitliğe **bir bilinmeyenli bir doğrusal (lineer) denklem** denildiğini biliyoruz. Böyle bir denklemi sağlayan tek bir sayı vardır; bu sayı $x = -\frac{b}{a}$ dır. Bu sayıya $ax + b = 0$ doğrusal denkleminin çözümü denir. Örneğin, $3x + 2 = 0$ doğrusal denklemin çözümü $x = -\frac{2}{3}$ dür.

a, b, c gerçel sayılar ve $a \neq 0$, $b \neq 0$ olmak üzere, x, y bilinmeyenleri için $ax + by + c = 0$ biçimindeki bir eşitliğe **iki bilinmeyenli bir doğrusal denklem** denir. Böyle bir denklemin koordinat düzlemde bir doğruyu temsil ettiğini biliyoruz. Dolayısıyla bu doğru üzerindeki herhangi bir noktayı temsil eden (x , y) sıralı ikilisi $ax + by + c = 0$ denklemini sağlar, yani denklemin bir çözümüdür. Bu nedenle böyle bir denklemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. y bilinmeyenini x e bağlı olarak çözersek, $y = -\frac{1}{b}(ax + c)$ bulunur. x in alacağı her farklı değere karşılık y nin farklı bir değeri bulunur. O halde (x , y) çözümlerinin her birisi doğru üzerinde bir noktayı gösterir (Şekil 11.1). Sözgelişi, $2x - 3y + 1 = 0$ doğrusal denkleminin $(0 , 1/3)$, $(1 , 1)$, $(2, 5/3)$ çözümleri $2x - 3y + 1 = 0$ doğrusu üzerinde birer noktanın koordinatlarıdır.

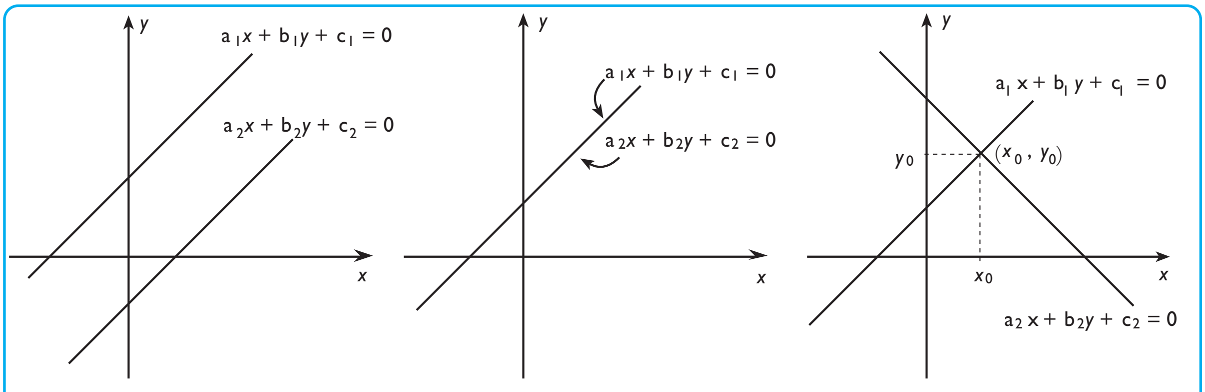


Şekil 11.1

Şimdi iki bilinmeyenli iki doğrusal denklemin birlikte verildikleri durumu ele alalım. Bu denklemler, genel halde

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

olsunlar. Bu denklemlere iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir **doğrusal denklem sistemi** denir. Denklemleri birlikte sağlayan bir (x_0, y_0) ikilisi sistemin bir çözümüdür. Böyle bir doğrusal denklem sisteminin çözümünü aramak, geometrik olarak, düzlemde bu denklemlerin temsil ettiği doğruların kesim noktasını aramak demektir. Doğruların paralel olması durumunda hiçbir ortak çözüm olmayacaktır [Şekil 11.2 (a)]; çakışık olmaları durumunda sonsuz çözüm [Şekil 11.2 (b)], kesişiyor olmaları durumunda ise tek çözüm olacaktır [Şekil 11.2 (c)].



(a) Doğrular paralel Sistemin çözümü yok

(b) Doğrular çakışık Sistemin sonsuz çözümü var

(c) Doğrular kesişiyor Sistemin tek çözümü var

Şekil 11.2

ÖRNEK 1

$2x + 3y = 10$
$-8x + y = 25$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

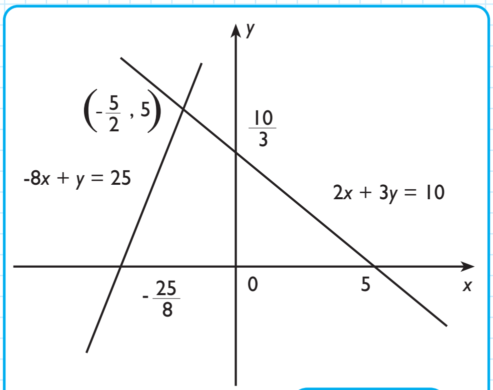
ÇÖZÜM

Bu denklem sistemindeki denklemlerden her biri bir doğru denklemidir.

$2x + 3y = 10$ doğrusunun eğimi $-\frac{2}{3}$ ve $-8x + y = 25$ doğrusunun eğimi 8 olduğundan bu doğrular kesişirler. Dolayısıyla verilen denklem sisteminin tek bir çözümü vardır. Şimdi bu çözümü yok etme yöntemiyle bulalım. Bu yönteme göre, önce her iki denklemde bilinmeyenlerden birinin katsayılarını eşitleyerek, bilinmeyenlerden birini yok edip ikincisini hesaplayalım. Bunun için birinci denklemi 4 ile çarpıp ikincisi üzerinde toplayalım;

$$4\,/\,2x + 3y = 108 \qquad x + 12y = 40$$
$$-8x + y = 25 \qquad \underline{-8x + y = 25}$$
$$13y = 65 \rightarrow y = 5$$

bulunur. $y = 5$ değerini birinci denklemde yerine yazalım:



Şekil 11.3

$$2x + 3(5) = 10$$
$$2x = 10 - 15$$
$$2x = -5$$
$$x = -\frac{5}{2}$$

olur. Böylece sistemin tek çözümü $x = -\frac{5}{2}$, $y = 5$ olarak bulunmuş olur. Doğruların kesim noktası $\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$ dir.

ÖRNEK 2

$$3x - 2y = 7$$
$$-21x + 14y = -49$$

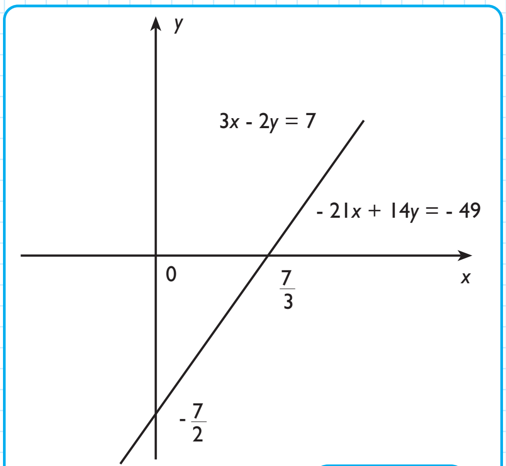
denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Bu denklem sisteminin denklemlerinin temsil ettiği doğruların eğimleri eşittir; m = 3/2 dir. Dolayısiyle bu doğrular ya çakışıktır ya da birbirlerine paraleldir. y - eksenini kesim noktaları da aynı, $\left(-\frac{7}{2}\right)$ olduğundan bu doğrular çakışıktır. O halde bu doğru üzerindeki her bir nokta sistemin bir çözümüdür; yani verilen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Şimdi cebirsel olarak bu sonucu doğrulayalım.

$$\begin{array}{rl} 7\ /\ 3x - 2y = 7 & \rightarrow \quad 21x - 14y = 49 \\ -21x + 14y = 49 & \quad\;\; \underline{-21x + 14y = -49} \\ & \qquad\qquad 0 = 0 \end{array}$$

Bu sonuç sistemin iki denkleminin eşdeğer olduğunu gösterir. Bu nedenle bu denklemlerden birisi, diyelim ki $3x - 2y = 7$ denklemi, alınarak çözüm yapılır. $3x - 2y = 7$ denkleminin x e bağımlı çözümü,



Şekil 11.4

$$y = \frac{1}{2}(3x - 7)$$

olur. x değişkeninin alacağı her bir değere karşılık y nin bir değeri bulunur. Bu nedenle verilen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Bazı özel çözümleri yazabiliriz:

$x = 0$ için $y = -\frac{7}{2}$

$x = 1$ için $y = -2$

$x = -1$ için $y = -5$

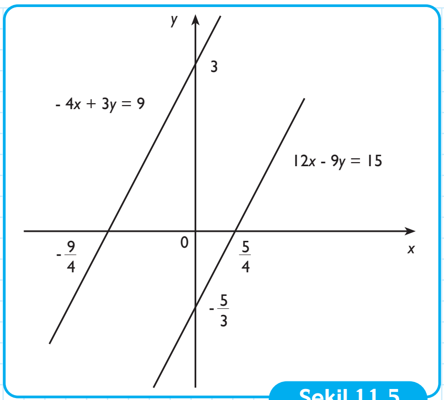
ÖRNEK 3

$$-4x + 3y = 9$$
$$12x - 9y = 15$$

denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Önce geometrik olarak çözümün var olup olmadığını görelim. Denklemlerin her birinin gösterdiği doğrunun eğimi $m = \frac{4}{3}$ dir. Fakat bu doğrulardan birincisinin y-ekseninin kesim noktası 3, ikincisinin $-\frac{5}{3}$ olduğundan bunlar farklı paralel doğrulardır. Bu nedenle de ortak bir noktaları yoktur. O halde verilen sistemin bir çözümü yoktur. Şimdi bu sonucu cebirsel olarak doğrulayalım.



Şekil 11.5

$$\begin{array}{ll} 3/ & -4x + 3y = 9 \\ & 12x - 9y = 15 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -12x + 9y = 27 \\ 12x - 9y = 15 \\ \hline 0 = 42 \end{array}$$

Böyle bir eşitlik olamayacağına göre, verilen denklem sisteminin bir çözümü yoktur.

ÖRNEK 4

Bir gıda pazarı, fiyatları 1,5 milyon TL/kg ve 2 milyon TL/kg olan iki tür çaydan 100 kg karma çay hazırlamıştır. Karma çayın fiyatı 1,8 milyon TL/kg olduğuna göre, her bir çaydan ne miktar karıştırılmıştır?

ÇÖZÜM

x_1 = 100 kg karma çay içindeki 1,5 milyon TL/kg lık çay miktarı,
x_2 = 100 kg karma çay içindeki 2 milyon TL/kg lık çay miktarı

olsun. O zaman,

$$x_1 + x_2 = 100 \qquad (1)$$

eşitliği yazılır. Diğer taraftan karma çayın fiyatı 1,8 milyon TL/kg olduğuna göre

$$1{,}5x_1 + 2x_2 = 1{,}8 \cdot 100 \qquad (2)$$

olmalıdır. Böylece (1) ve (2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 100 \\ 1{,}5x_1 + 2x_2 &= 180 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Sistemi çözelim:

$$\begin{array}{ll} -2/ & x_1 + x_2 = 100 \\ & 1{,}5x_1 + 2x_2 = 180 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} -2x_1 - 2x_2 = -200 \\ 1{,}5x_1 + 2x_2 = 180 \\ \hline -0{,}5x_1 = -20 \end{array}$$

$x_1 = 40$ ve böylece $x_2 = 60$ bulunur. O halde, 100 kg karma çay içinde 40 kg ucuz çay, 60 kg pahalı çay olmalıdır.

SIRA SİZDE 1

1. Aşağıda verilen doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini önce geometrik olarak (grafik yoluyla), sonra da cebirsel olarak araştırınız.

a) $\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ -2x + y &= 1 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -18x + 6y &= -12 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 4x + 2y &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x &= 3 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$ **e)** $\begin{aligned} -2x + y &= -3 \\ y &= 1 \end{aligned}$

2. Aşağıda verilen doğrusal denklem sistemlerinin her birinin çözümünün var olup olmadığını, varsa çözümün tek mi sonsuz çoklukta mı olduğunu belirleyiniz ve çözümü bulunuz.

a) $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} -2x + 4y &= 36 \\ x - 2y &= 20 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x &= y - 3 \\ -6x + 3y &= 9 \end{aligned}$ **e)** $\begin{aligned} -x + 3y &= 0 \\ 2x - 6y &= 8 \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -2x + 3y &= 4 \end{aligned}$

n-BİLİNMEYENLİ DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİ ($n \geq 3$)

AMAÇ 2

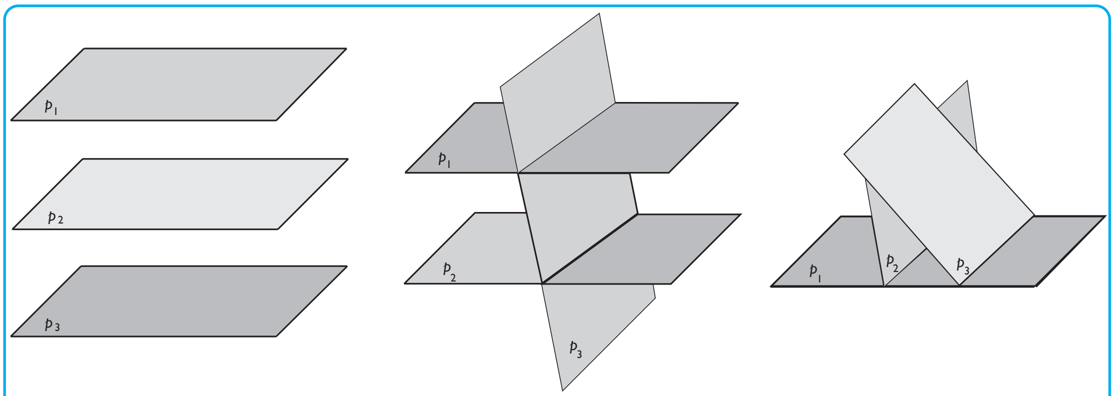
Çok bilinmeyenli çok denklemden oluşan doğrusal denklem sisteminin çözümlerinin Gauss yok etme yöntemiyle bulunması.

Önce iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir doğrusal denklem sisteminin çözümünün araştırılmasında izlenen yok etme yöntemini, 3-bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir doğrusal denklem sisteminin çözümünün araştırılmasına yönelik olarak genelleştirelim. Sonra da n-bilinmeyenli m sayıda doğrusal denklemden oluşan sistemlerin çözümlerinin bulunması konusu üzerinde duralım.

Bilinmeyen sayısı ve denklem sayısı üç olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

biçiminde üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemi elde edilir. Her üç denklemi birlikte sağlayan bir (x_0, y_0, z_0) sıralı üçlüsüne sistemin bir **çözümü** denir. Geometrik olarak, bu denklemlerin her biri koordinat uzayı içinde bir düzlemi temsil eder. Dolayısıyla sistemin ortak çözümü olmayabilir (üç düzlemden en az ikisinin birbirlerine paralel olması veya farklı doğrular boyunca kesişmeleri durumu [Şekil 11.6 (a), (b) ve (c)]), sonsuz çoklukta çözüm olabilir (üç düzlemin bir doğru boyunca kesişmeleri veya çakışık olmaları durumu, [Şekil 11.7(a)]) ya da tek bir çözüm olabilir (üç düzlemin tek ortak noktaları olması durumu, [Şekil 11.7(b)]).

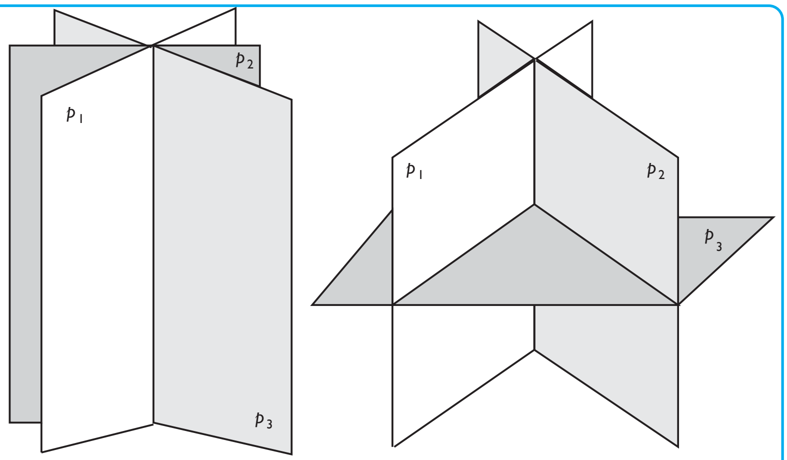


(a) Düzlemler paralel Sistemin çözümü yok

(b) İki paralel düzlem üçüncüsü tarafından kesiliyor Sistemin çözümü yok

(c) Üç düzlem farklı doğrular boyunca kesişiyorlar Sistemin ortak çözümü yok

Şekil 11.6



(a)
Üç düzlem bir doğru boyunca kesişiyorlar
Sistemin sonsuz çoklukta çözümü var

(b)
Üç düzlemin tek bir ortak noktası var
Sistemin tek çözümü var

Şekil 11.7

Şimdi farklı durumlar için birer örnek verelim.

ÖRNEK 5

$$\begin{aligned} 7x - 3y + 3z &= 28 \\ -x - 3y + z &= 12 \\ 5x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Üçüncü denklemi -3 ile çarpıp birinci denklemle ve -1 ile çarpıp ikinci denklemle toplarsak, birinci ve ikinci denklemden z bilinmeyeni yok olur. Böylece verilen sistem,

$$\begin{aligned} -8x - 12y &= 28 \\ -6x - 6y &= 12 \\ 5x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemine dönüşür. Bu sistemin ikinci denklemini -2 ile çarpıp birinci denklem üzerinde toplayalım;

$$\begin{aligned} 4x &= 4 \\ -6x - 6y &= 12 \\ 5x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin birinci denkleminden $x = 1$ bulunur. İkinci denklemde $x = 1$ yazılınca $y = -3$ olur. Üçüncü denklemde $x = 1$, $y = -3$ yazılınca $5(1) + 3\,(-3) + z = 0$ veya $z = 4$ elde edilir. Böylece son sistemin tek çözümü $x = 1$, $y = -3$, $z = 4$ olur. Bu çözüm aynı zamanda verilen denklem sisteminin de tek çözümüdür. Bunu doğrulamak için bulunan bu değerleri verilen sistemde yerine yazalım,

$$\begin{aligned} 7(1) - 3(-3) + 3(4) &= 28 \\ -(1) - 3(-3) + 4 &= 12 \\ 5(1) + 3(-3) + 4 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{veya} \qquad \begin{aligned} 28 &= 28 \\ 12 &= 12 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

olarak istenilen doğrulanmış olur.

ÖRNEK 6

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= -37 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Kolaylık ve kısalık için verilen sistemin birinci denklemini R_1, ikinci denklemini R_2 , üçüncü denklemini R_3 ile gösterelim. k sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere, $kR_i + R_j$ $(i, j = 1, 2, 3$ ve $i \neq j)$ simgesiyle i-yinci denklemin iki tarafının k ile çarpılıp j-yinci denklem üzerinde toplanmasını, kR_i ile de i-yinci denklemin k ile çarpılmasını gösterelim. Şimdi bu gösterimleri kullanarak verilen sistemin çözümünü araştıralım.

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ R_2 &: 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ R_3 &: 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -37 \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} R_1 &: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ R'_2 = -2R_1 + R_2 &: -x_2 + x_3 = -7 \\ R'_3 = -3R_1 + R_3 &: -7x_2 + 7x_3 = -49 \end{aligned}$$

$$\to \quad \begin{aligned} R_1 &: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ R'_2 &: -x_2 + x_3 = -7 \\ -7R'_2 + R'_3 &: 0 = 0 \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} R_1 &: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ R'_2 &: -x_2 + x_3 = -7 \end{aligned}$$

Elde edilen son denklem sistemi üç bilinmeyenli iki denklemden oluşan bir sistemdir. Bu sistemde x_3 ü bağımsız değişken olarak düşünüp x_1 ve x_2 bilinmeyenlerini x_3 e bağlı olarak çözebiliriz. $x_3 = t$ diyelim. R'_2 den $x_2 = x_3 + 7 = t + 7$ ve R_1 den $x_1 = -2x_2 + x_3 + 4 = -2(t + 7) + t + 4 = -t - 10$ olur. Böylece sistemin çözümü, t parametresine bağlı olarak

$$\begin{aligned} x_1 &= -t - 10 \\ x_2 &= t + 7 \\ x_3 &= t \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

olur. Her t gerçel sayısı için $(-t-10,\ t+7,\ t)$ sıralı üçlüsü verilen sistemin bir çözümü olur. Bu nedenle verilen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Bu sonucu geometrik olarak şöyle yorumlayabiliriz: Verilen denklem sisteminin denklemlerinin temsil ettiği düzlemler, parametrik denklemleri yukarıdaki şekilde olan doğru boyunca kesişirler.

ÖRNEK 7

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= -4 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 6x_2 + 12x_3 &= 5 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ R_2 &: -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ R_3 &: -2x_1 - 6x_2 + 12x_3 = 5 \end{aligned} \quad \to \quad \begin{aligned} R_1 &: x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ R'_2 = 2R_1 + R_2 &: 7x_2 - 8x_3 = -8 \\ R_3 = 2R_1 + R_3 &: 0 = -3 \end{aligned}$$

Dönüştürülen sistemin üçüncü denklemi R'_3 geçersiz bir eşitlik olduğundan verilen sistemin bir çözümü olamaz.

Bilinmeyen Sayısı *n*, Denklem Sayısı *m* Olan Sistemler

Şimdi genel bir doğrusal denklem sistemi tanımlayalım ve 2 veya 3 bilinmeyenli sistemlerin çözümleri için verilen yöntemi genelleştirelim.

Genel olarak, $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ler bilinmeyenler a_{ij} ve b_i ler gerçel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

biçiminde olan bir denklem sistemine, n **bilinmeyenli** m **denklemden** oluşan bir **doğrusal denklem sistemi** denir. Eğer b_i lerin hepsi sıfır ise sisteme **homojen**, en az bir $b_i \neq 0$ ise sisteme **homojen olmayan doğrusal denklem sistemi** denir. n bilinmeyenli bir doğrusal denklem sisteminin bir çözümü her bir denklemi sağlayan bir $(k_1 , k_2 , \ldots , k_n)$ n-sıralısıdır. Böyle bir doğrusal denklem sisteminin tek çözümü olabilir, sonsuz çoklukta çözümü olabilir ya da hiçbir çözümü olmayabilir. Eğer sistem homojen, yani $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$ ise $(0 , 0 , \ldots , 0)$ n-sıralısı bir çözümdür. Bu tür çözüme homojen sistemin **sıfır çözümü** (aşikâr çözümü) denir. O halde, homojen bir sistemin daima bir çözümü (en az sıfır çözümü) vardır. Homojen olmayan bir sistemin çözümünün varlığı, tekliği konusu sistemin bilinmeyen sayısı, denklem sayısı, a_{ij} katsayıları ve b_i sabitleri ile ilişkilendirilerek kısaca irdelenecektir. Bunun için önce basamak biçiminde doğrusal denklem sistemi tanımına değinelim.

Bir doğrusal denklem sistemi, genel olarak, dikdörtgen biçimindedir. Eğer bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit ise sisteme **kare sistem** denir. Denklem sisteminin ilk denkleminden ve ilk bilinmeyenden başlayarak, aşağıya doğru bilinmeyen sayısı giderek azalıyorsa bu tür bir sisteme **basamak biçimindedir** denir. Örneğin;

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 - 10x_3 + x_4 &= -35 \\ x_2 + 7x_3 \qquad &= 5 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_4 &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemlerinden ilki basamak biçiminde homojen olmayan doğrusal denklem sistemi, ikincisi basamak biçiminde homojen olan bir doğrusal denklem sistemidir. Basamak biçimindeki bir sistemin avantajı, sistemin çözümünün var olup olmadığının daha kolay belirlenmesi, çözüm varsa çözümün kolayca bulunabilmesinden gelmektedir.Örneğin, yukarıda verilen homojen olmayan basamak biçimindeki sistemin son denkleminden $x_4 = \frac{3}{5}$, üçüncü denkleminden $x_3 = -\frac{3}{5}$, ikinci denkleminden $x_2 = \frac{46}{5}$, birinci denkleminden $x_1 = \frac{22}{15}$ olarak sistemin çözümü kolayca bulunabilir. Eğer verilen doğrusal denklem sistemi basamak biçiminde değilse, sistem aşağıda tanımlanan üç tür temel satır işlemleriyle çözümü değiştirilmeden basamak biçimine dönüştürülebilir.

Temel satır işlemleri;

I. sistemin herhangi iki denklemin sırasının değiştirilmesi,

II. sistemin bir denklemin her iki yanının sıfır olmayan bir sayı ile çarpılması,

III. sistemin bir denkleminin sıfır olmayan bir katının bir başka denkleme eklenmesi.

Bir doğrusal denklem sistemine sonlu sayıda temel satır işlemi uygulanırsa, sonuçta elde edilen yeni doğrusal denklem sistemine başlangıçtaki sisteme eşdeğer denklem sistemi denir. Eşdeğer denklem sistemlerinin çözümleri varsa, aynıdır. Bu nedenle verilen bir doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulmak için sistem temel satır işlemleriyle basamak biçiminde eşdeğer bir sisteme dönüştürülebilir ve çözüm aranır. Bu biçimde çözüm aramaya **Gauss yok etme yöntemi** denir.

Homojen olmayan bir doğrusal denklem sistemi basamak biçimine dönüştürüldüğünde, eğer denklemlerden birinin birinci tarafı sıfır iken ikinci taraf sıfırdan farklı bir sayı ise, verilen sistemin çözümü yoktur. Bu durumda sistem **tutarsızdır** denir. Eğer sistem tutarsız değil ve bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit ise, sistemin tek bir çözümü vardır (Bu çözüm yukarıdaki örnekte olduğu gibi kolayca bulunur).

Denklem sayısı m, bilinmeyen sayısı n den daha az olduğu durumda $(n\text{-}m)$ tane bilinmeyen bilinen kabul edilerek, sistemin çözümü aranır. Bu durumda sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Eğer doğrusal denklem sistemi homojen ise, daima sıfır çözümü olduğu açıktır; yani homojen bir sistemin çözümsüzlüğü (tutarsızlığı) söz konusu değildir. Böyle bir sistemin ya tek ya da sonsuz çoklukta çözümü vardır. Sistem basamak biçime dönüştürüldüğünde denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit ise tek çözüm sıfır çözümdür; denklem sayısı bilinmeyen sayısından az ise homojen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır, $(n\text{-}m)$ tane bilinmeyen bilinen kabul edilerek çözüm yapılır

Özetlersek; m tane denklemden ve n tane bilinmeyenden oluşan homojen olmayan bir doğrusal denklem sistemi için $m < n$ ise, sistemin hiçbir çözümü olmayabilir ya da sonsuz çoklukta çözümü olabilir. Eğer $m \geq n$ ise, hiçbir çözüm olmayabilir, tek çözüm olabilir ya da sonsuz çoklukta çözüm olabilir. Homojen sistemlerde ise, ya sıfır çözüm ya da sonsuz çoklukta çözüm vardır.

Şimdi bu farklı durumlar için örnekler verelim:

ÖRNEK 8

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - 4x_2 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Dört bilinmeyenli dört denklemden oluşan homojen olmayan bir doğrusal denklem sistemi. Bu sistemi satır işlemleriyle basamak biçime dönüştürelim. Bunun için ilk denklemde birinci bilinmeyen x_1 in katsayısı 1 olacak şekilde bir işlem yapabiliriz. Fakat ilk denklemin tüm terimlerini 3 e bölmek uygun olmaz, çünkü kesirli sayılarla işlem yapmak durumunda kalırız. Bu nedenle ilk işlem olarak birinci satır ile ikinci satırın yerlerini değiştirelim:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - 4x_2 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Bu sistemin birinci satırını, sırasıyla -3 ile çarpıp ikinci satır üzerinde, -1 ile çarpıp üçüncü satır üzerinde, 1 ile çarpıp dördüncü satır üzerinde toplayalım:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 8 \\ 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\ -4x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Şimdi de ikinci satırı, sırasıyla, -1 ile çarpıp üçüncü satır ve 2 ile çarpıp dördüncü satır üzerinde toplayalım:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 8 \\ -3x_3 + 4x_4 &= -3 \\ 9x_3 - 9x_4 &= 18 \end{aligned}$$

Üçüncü satırın üç katını dördüncü satır üzerinde toplayalım:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 8 \\ -3x_3 + 4x_4 &= -3 \\ 3x_4 &= 9 \end{aligned}$$

Bu sistem basamak biçiminde bir doğrusal denklem sistemidir. Dördüncü denklemden $x_4 = 3$ bulunur. Bu değer üçüncü denklemde yerine yazılınca

$$-3x_3 + 4.3 = -3 \qquad \text{veya} \qquad -3x_3 = -3 - 12 \,, \qquad x_3 = 5$$

olur. x_3 ve x_4 ün bulunan değerleri ikinci denklemde yerlerine yazılınca $x_2 = -1$ ve birinci denklemde yazılınca $x_1 = -4$ bulunur. O halde, verilen denklem sisteminin tek çözümü var ve bu çözüm $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$; yani $(-4 , -1 , 5 , 3)$ sıralı dörtlüsüdür.

ÖRNEK 9

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -2x + 5y + 7z &= 9 \\ 3x + y + z &= -8 \\ x + 2y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen sistemde üç bilinmeyen dört tane denklem var. Bu denklemlerden herhangi üçünü alıp, üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan sistemin çözümünü araştırırız. Eğer çözüm varsa ve bu çözüm dışarıda kalan denklemi de sağlıyorsa, verilen sistemin çözümü olur; sağlamıyorsa, sistem tutarsızdır. İlk üç denklemden oluşan sistemin çözümünü araştıralım.

$$\begin{aligned} R_1 &: \quad x + y - z = 0 \\ R_2 &: -2x + 5y + 7z = 9 \\ R_3 &: \quad 3x + y + z = -8 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} R_1 &: x + y - z = 0 \\ R'_2 = 2R_1 + R_2 &: \quad 7y + 5z = 9 \\ R'_3 = -3R_1 + R_3 &: \quad -2y + 4z = -8 \end{aligned} \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} R_1 &: x + y - z = 0 \\ R'_2 &: \quad 7y + 5z = 9 \\ R''_3 = \frac{1}{2} R'_3 &: \quad -y + 2z = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 &: \quad x + y - z = 0 \\ R''_3 &: \quad -y + 2z = 9 \\ R'_2 &: \quad 7y + 5z = 9 \end{aligned}$$

İkinci denklem ile üçüncü denklemin yerlerini değiştirdik.

$$\begin{aligned} R_1 &: \quad x + y - z = 0 \\ R''_3 &: \quad -y + 2z = -4 \\ 7R''_3 + R'_2 &: \quad 19z = -19 \end{aligned}$$

İkinci denklemi 7 ile çarpıp üçüncü denklem üzerinde topladık.

Üçüncü denklemden $z = -1$, ikinci denklemden $y = 2$, birinci denklemden $x = -3$ bulunur. Şimdi bu çözümün verilen sistemin dördüncü denklemini sağlayıp sağlamadığına bakalım:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ -3 + 2.2 - 3(-1) &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

olduğundan verilen denklem sistemi tutarlıdır ve sistemin çözümü (-3, 2, -1) sıralı üçlüsüdür.

ÖRNEK 10

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= -3 \\ x_2 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Sistemi basamak biçimine dönüştürelim: Birinci denklemi -1 ile çarpıp ikinci denklem üzerinde toplayalım.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_2 + 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Bu sistemin üçüncü denklemini -1 ile çarpıp üçüncü denklem üzerinde toplayalım.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \\ x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Bu sistemin denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olduğundan aradaki fark kadar bilinmeyeni bilinen kabul ederek sistemin çözümünü araştıralım. Aradaki fark $4 - 3 = 1$ olduğundan bilinmeyenlerden birini, diyelim ki x_4 ü bilinen kabul edelim. $x_4 = t$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= -2 - t \\ x_3 &= 6 - 2t \end{aligned}$$

sistemini elde ederiz. Böylece sistemin t ye bağlı olarak elde edilen çözümü, (bu çözüme parametrik çözüm denir)

$x_4 = t$, $\quad x_3 = 6 - 2t$, $\quad x_2 = x_3 - 2 - t = 6 - 2t - 2 - t = 4 - 3t$

$x_1 = -1 - x_2 - x_3 = -1 - 4 + 3t - 6 + 2t = -11 + 5t$

olur. t gerçel sayısının alacağı her değer için sistemin bir özel çözümü bulunur. Bu nedenle verilen sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. Sistemin parametrik çözümü $(-11 + 5t,\ 4 - 3t,\ 6 - 2t,\ t)$ sıralı dörtlüsüdür. İki özel çözümü

$t = 0$	için	$x_1 = -11$,	$x_2 = 4$,	$x_3 = 6$,	$x_4 = 0$
$t = 1$	için	$x_1 = -6$,	$x_2 = 1$,	$x_3 = 4$,	$x_4 = 1$

olarak verilebilir.

ÖRNEK 11

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ 3x - y + z &= 5 \\ 2x + 2y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Sistemi basamak biçimine dönüştürelim: Birinci denklemi -3 ile çarpıp ikinci denklem, -2 ile çarpıp üçüncü denklem üzerinde toplayalım.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ -4y + 4z &= 8 \\ 0 &= 5 \end{aligned}$$

basamak biçimine dönüşür. Bu sistemin üçüncü denkleminde görülen $0 = 5$ eşitliği olamayacağına göre, verilen sistemin denklemleri tutarsızdır; bir başka deyişle, sistemin çözümü yoktur.

ÖRNEK 12

$$\begin{aligned} R_1 &: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ R_2 &: 3x_1 - 7x_2 - x_4 = 0 \\ R_3 &: 4x_1 - 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0 \\ R_4 &: x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{aligned}$$

homojen sistemin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Sistemi basamak biçimine dönüştürelim:

$$\begin{aligned} &R_1 &&: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ &R'_2 = -3R_1 + R_2 &&: -x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \\ &R'_3 = -4R_1 + R_3 &&: x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0 \\ &R'_4 = -R_1 + R_4 &&: 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &R_1 &&: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ &R'_2 &&: -x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \\ &R''_3 = R'_2 + R'_3 &&: -12x_3 + 15x_4 = 0 \\ &R''_4 = 2R'_2 + R_4 &&: -19x_3 + 9x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &R_1 &&: x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ &R'_2 &&: -x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \\ &R'''_3 = -\frac{1}{12} R''_3 &&: x_3 - \frac{5}{4} x_4 = 0 \\ &R''_4 &&: -19x_3 + 9x_4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
R_1 & : & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\
R'_2 & : & -x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0 \\
R'''_3 & : & x_3 - \frac{5}{4}x_4 = 0 \\
R'''_4 = 19R'''_3 + R''_4 & : & -\frac{59}{4}x_4 = 0
\end{array}$$

Sistemin bu basamak biçimi dört bilinmeyen ve dört denklemden oluştuğundan verilen sistemin tek çözümü sıfır çözümdür.

ÖRNEK 13

$$\begin{array}{ll}
R_1 : & -x + y + z = 0 \\
R_2 : & x + 2y + 8z = 0 \\
R_3 : & x - 3y - 7z = 0
\end{array}$$

homojen doğrusal denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Sistemi basamak biçime dönüştürelim:

$$\begin{array}{lll}
R_1 & : & -x + y + z = 0 \\
R'_2 = R_1 + R_2 & : & 3y + 9z = 0 \\
R'_3 = R_1 + R_3 & : & -2y - 6z = 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{lll}
R_1 & : & -x + y + z = 0 \\
R''_2 = \frac{1}{3}R'_2 & : & y + 3z = 0 \\
R''_3 = \frac{1}{2}R'_3 & : & y + 3z = 0
\end{array}
\rightarrow$$

$$\begin{array}{lll}
R_1 & : & -x + y + z = 0 \\
R''_2 & : & y + 3z = 0
\end{array}$$

olur. Şimdi bu homojen sistemin bilinmeyen sayısı 3 denklem sayısı 2 olduğundan bir bilinmeyeni, diyelim ki z yi, bilinen kabul ederek çözüm aranır. $z = t$ için sistemin parametrik çözümü,

$$z = t \quad , \quad y = -3z = -3t \quad , \quad x = y + z = -3t + t = -2t$$

olur. Verilen sistemin t ye bağlı sonsuz çoklukta çözümü vardır. $t = -1$ ve $t = 5$ için iki özel çözümünü yazalım:

$t = -1$ için $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$
$t = 5$ için $x = -10$, $y = -15$, $z = 5$

olur.

SIRA SİZDE 2

Aşağıdaki doğrusal denklem sistemlerinin varsa, çözüm kümelerini bulunuz.

1. $\begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 = -30 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{array}$

2. $\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 16 \\ 10x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \end{array}$

3. $\begin{array}{l} 5x + 7y - 10z = 20 \\ 10x + 12y - 21z = -5 \\ -15x - 21y + 32z = -50 \end{array}$

4. $\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 12 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 48 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -18 \end{array}$

5. $\begin{array}{l} 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 54 \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 = 30 \end{array}$

6. $\begin{array}{l} -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \end{array}$

7.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9. 100 kişilik bir grupta bulunan bayanların sayısı bayların sayısının yarısından 1 fazladır. Bu gruptaki bayan ve bayların sayısı nedir?

10. 50 milyar parası olan bir yatırımcı parasının tamanını yıllık getirisi %25, %30 ve %35 olan üç tür yatırım aracında değerlendiriyor. Yıl sonunda %25 ve %30 ile yatan miktarların toplam getirisi 8,4 milyar, %35 ile yatan miktarın ana para ile birlikte dönüşü 27 milyar ise, her bir yatırım aracına yatan miktar nedir?

ARZ - TALEP FONKSİYONLARI VE DENGE MİKTARLARI İÇİN DOĞRUSAL BİR MODEL

AMAÇ 3

Ekonomide arz ve talep arasındaki ilişkinin bir doğrusal denklem sistemiyle ifade edebileceğini görmek ve bu ilişkiyi matematiksel olarak irdelemektir.

Bir ticari malın piyasasında malın fiyatı, malın piyasadaki talebi ve piyasaya arzı arasında karmaşık bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi çeşitli matematiksel modellerle yaklaşık ifade etmek mümkündür. Malın fiyatını bağımsız değişken olarak kabul edersek, arz ve talep miktarlarını fiyatın fonksiyonları olarak ifade edebiliriz. Bu fonksiyonlara arz-talep fonksiyonları denir. Arz-talep fonksiyonları doğrusal olabileceği gibi, ikinci dereceden veya daha yüksek dereceden polinom türünde fonksiyonlar da olabilir. Biz burada bir malın pazarı için basit bir matematiksel model oluşturmak istiyoruz. Bunun için de arz-talep fonksiyonlarını bağımsız değişken fiyatın doğrusal fonksiyonları olarak kabul edeceğiz. Modelimizde arz ve talep miktarlarının eşit olduğu andaki fiyata **denge fiyatı**, denge fiyatına karşılık gelen arz-talep miktarına da **denge miktarları** diyeceğiz; ya da kısaca, denge fiyatı-denge miktarları ikilisine modelimizin **denge noktası** (denge durumu) adını vereceğiz. Böylece arz fonksiyonu, talep fonksiyonu ve denge durum arasındaki ilişkiyi bir doğrusal denklem sistemiyle ifade edebileceğiz.

Şimdi böyle bir matematiksel modeli ayrıntılara girerek oluşturalım.

Bir ticari malın (ürünün) bir zaman aralığı içinde pazara sunum (arz) miktarını q_s, pazarın talep miktarını q_d ve fiyatını p ile gösterelim. Şimdi arz-talep ve fiyat arasında basit dengeli bir matematiksel model oluşturmak istiyoruz. Modelimizin basitliği için p yi bağımsız değişken, q_s ve q_d yi de p nin doğrusal fonksiyonları olarak düşünelim. Fiyat arttıkça sunum artacağından ve talep de azalacağından, q_s yi p nin artan bir fonksiyonu, q_d yi de p nin azalan bir fonksiyonu olarak düşünebiliriz. Böylece a_1, a_2, b_1, b_2 pozitif katsayılar olmak üzere, q_s ve q_d fonksiyonları

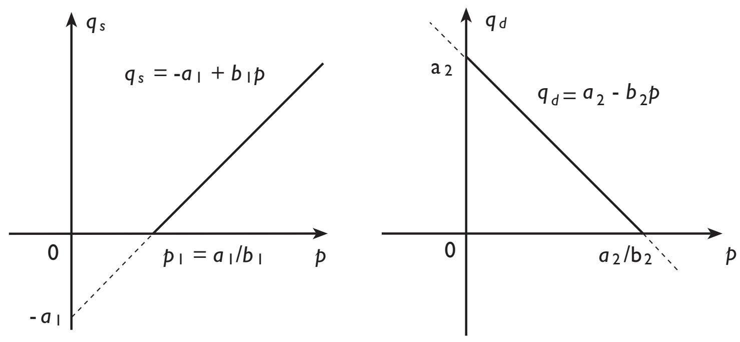
$$\begin{aligned} q_s &= -a_1 + b_1\, p \\ q_d &= a_2 - b_2\, p \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Modelimizin dengeli olması için bu sisteme bir de denge koşulu eklemeliyiz. Bu denge koşulu p nin belli bir değeri için talebin arza eşit olması, yani $q_d = q_s$ durumunda ortaya çıkar. Böylece modelimizin matematiksel ifadesi, a_1 , b_1 , a_2 , $b_2 > 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} q_s &= -a_1 + b_1\,p \\ q_d &= \;\; a_2 - b_2\,p \qquad\qquad (1) \\ q_d &= q_s \end{aligned}$$

biçiminde üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemi olur. Şimdi bu sistemin bir çözümünü analitik olarak aramaya girişmeden önce, geometrik olarak görmeye çalışalım. Bu nedenle, arz-talep analizinde olduğu gibi; yatay ekseni p, düşey ekseni q_s , q_d olan bir dik koordinat sisteminde arz fonksiyonu q_s nin ve talep fonksiyonu q_d nin grafiklerini çizelim:

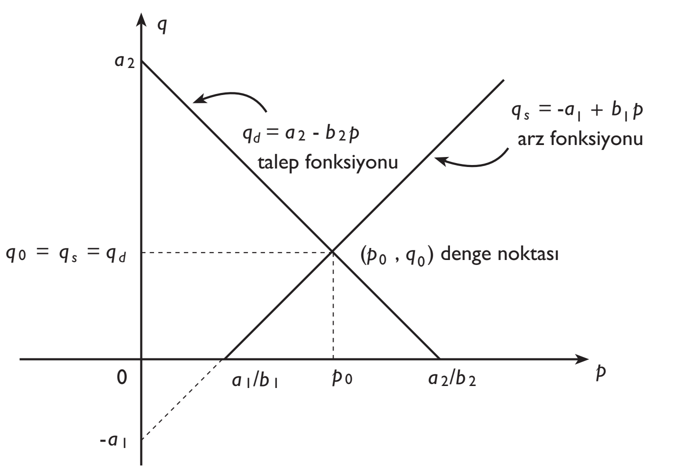
Arz fonksiyonu q_s artan olduğundan eğimi pozitif b_1 sayısıdır ve düşey ekseni kesim noktası $-a_1$ dir. Ancak fiyatın belirli bir p_1 ($p_1 = a_1 / b_1$) değerinden sonra sunum söz konusu olacağından, q_s nin grafiğinin başlangıç noktası p_1 olacaktır [Şekil 11.8(a)]. Talep fonsiyonu q_d azalan olduğundan eğimi negatif $-b_2$ sayısıdır ve düşey ekseni kesim noktası a_2 dir [(Şekil 11.8(b)]. Sistemin denge koşulu için $q_s = q_d = q$ yazıp, arz-talep fonksiyonlarının grafiklerini, düşey ekseni q olan aynı koordinat sisteminde çizersek, q_s ve q_d nin grafiklerinin kesim noktası denge fiyatı p_0 'a karşılık gelen q_0 için (p_0, q_0) denge noktası olur [Şekil 11.9].



(a)
Doğrusal arz fonksiyonun grafiği

(b)
Doğrusal talep fonksiyonun grafiği

Şekil 11.8



p_0 fiyatı için ürünün arz miktarı talep miktarına eşittir.

Şekil 11.9

Şimdi (1) denklem sisteminin çözümünü analitik olarak bulalım. Denge koşulu $q_s = q_d$ olduğundan, $q_s = q_d = q$ dersek, (1) sistemi

$$q = -a_1 + b_1 p \qquad (2)$$
$$q = a_2 - b_2 p$$

doğrusal denklem sistemine dönüşür. İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bu sistemin çözümü için q yu yok edersek,

$$-a_1 + b_1 p = a_2 - b_2 p$$

veya

$$(b_1 + b_2)p = a_1 + a_2$$

olur. $b_1 + b_2 \neq 0$ olduğundan p ye göre çözüm, denge fiyatı p yi verir.

$$p = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

olur. p nin bu değeri (2) sisteminin birinci denkleminde yerine yazılınca, denge miktarı

$$q = -a_1 + b_1 \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{-a_1 b_1 - a_1 b_2 + b_1 a_1 + b_1 a_2}{b_1 + b_2}$$

$$= \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 + b_2}$$

bulunur. $b_1 + b_2 > 0$ olduğundan denge miktarı q nun pozitif olması için $a_2 b_1 - a_1 b_2 > 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, (1) sisteminin ekonomik olarak anlamlı olabilmesi için, sistemin $a_2 b_1 - a_1 b_2 > 0$ koşulunu sağlaması gerekir.

Bu örnekteki (1) denklem sistemiyle verilen pazar modeline **doğrusal model** adı verilir.

Şimdi konuya ilişkin bazı örnekler verelim:

ÖRNEK 14

Arz-talep fonksiyonları aşağıdaki denklem sistemleriyle verilen pazar modellerinin denge noktası (p, q) yu bulunuz.

a) $q_s = -3 + 7p$
$q_d = 15 - 2p$

b) $q_s - 15p + 125 = 0$
$q_d + 3p - 37 = 0$

ÇÖZÜM

Her bir pazar modeli için $q_s = q_d$ olduğunda denge söz konusu olacaktır. Bu nedenle verilen her bir sistem için $q_s = q_d = q$ yazıp, denge fiyatı p ve denge miktarı q yu bulalım:

a) $q_s = q_d = q$ yazınca

$$-3 + 7p = q$$
$$15 - 2p = q$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden q yok edilirse,

$$-18 + 9p = 0$$

ve böylece $p = 2$ bulunur. p nin bu değeri $q = -3 + 7p$ denkleminde yerine yazılınca $q = 11$ bulunur. Denge noktası (2 , 11) olur.

b) Benzer olarak,

$$q - 15p + 125 = 0$$
$$q + 3p - 37 = 0$$

sisteminden q yok edilince

$$18p - 162 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden $p = \dfrac{162}{18} = 9$ bulunur.
Bu değer $q - 15p + 125 = 0$ denkleminde yerine yazılınca, $q - 15(9) + 125 = 0$ veya $q = 10$ bulunur. Denge noktası (9 , 10) olur.

Yukarıdaki örneklerde sadece bir tür ticari malın pazarı için doğrusal bir model verildi. Aslında birbirleriyle ilişkili birden çok ticari mal birlikte düşünüldüğünde de bir doğrusal model yazılabilir. Basitlik için, diyelim ki, birbirleriyle ilişkili iki ticari mal için doğrusal bir model yazmak istiyoruz. Birinci malın fiyatı p_1, ikincisinin p_2 olsun. Bu malların arz-talep fonksiyonlarını da sırasıyla $q_{s_1}, q_{d_1}, q_{s_2}, q_{d_2}$ ile gösterelim. Parametrik olarak bu doğrusal modelleri, denge koşullarını da ekleyerek şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} q_{s_1} - q_{d_1} &= 0 \\ q_{s_1} &= a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 \\ q_{d_1} &= b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_2 \end{aligned} \qquad \text{ve} \qquad \begin{aligned} q_{s_2} - q_{d_2} &= 0 \\ q_{s_2} &= c_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 \\ q_{d_2} &= d_0 + d_1 p_1 + d_2 p_2 \end{aligned}$$

Şimdi bu duruma bir örnek olarak, ilişkili iki ticari malın pazarı için verilen doğrusal modellerin denge çözümlerini bulalım.

ÖRNEK 15

Birbirleriyle ilişkili iki ticari mal için arz ve talep fonksiyonlar aşağıdaki denklemlerle veriliyor. Bu mallar için denge fiyatlarını ve denge miktarlarını bulunuz.

1) $q_{d_1} = 12 - 2p_1 + p_2$, $q_{s_1} = -8 + 3p_1$ ***2)*** $q_{d_2} = 18 + p_1 - p_2$, $q_{s_2} = -6 + 2p_2$

ÇÖZÜM

Bir ticari malın pazarı için denge koşulu $q_s = q_d$ olmasıdır. Bu nedenle

$$q_{d_1} = q_{s_1} = q_1 \qquad \text{ve} \qquad q_{d_2} = q_{s_2} = q_2$$

yazınca, verilen (1) ve (2) denklem sistemleri

$$\begin{aligned} q_1 &= 12 - 2p_1 + p_2 \\ q_1 &= -8 + 3p_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_2 &= 18 + p_1 - p_2 \\ q_2 &= -6 + 2p_2 \end{aligned}$$

sistemlerine dönüşür. Birinci sistemden q_1 ve ikinci sistemden q_2 yok edilince,

$$5p_1 - p_2 = 20 \qquad \text{ve} \qquad -p_1 + 3p_2 = 24$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri ortak çözelim:

$$\begin{aligned} 5p_1 - p_2 &= 20 \\ -p_1 + 3p_2 &= 24 \end{aligned}$$

İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bu sistemin çözümü için birinci denklemi 3 ile çarpıp ikinci denklem üzerinde toplarsak,

$14p_1 = 84$ veya $p_1 = 6$

bulunur. Böylece $3p_2 = 24 + p_1 = 24 + 6 = 30$, $p_2 = 10$ olur. Şimdi bu denge fiyatlarını her bir sistemin arz ya da talep fonksiyonlarında yerine yazınca, her bir malın arz miktarı talep miktarına eşit olacaktır. Yani,

$$q_1 = 12 - 2p_1 + p_2 = 12 - 2(6) + 10 = 10$$
$$q_2 = 18 + p_1 - p_2 = 18 + 6 - 10 = 14$$

olacaktır. Böylece denge fiyatlar $p_1 = 6$, $p_2 = 10$ ve denge miktarları $q_1 = 10$, $q_2 = 14$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 3

1. Bir malın talep fonksiyonu $q_d = 75 - 2p$ ve arz fonksiyonu $q_s = -15 + 4p$ olarak veriliyor. Bu mal için,

a) talebin sıfır olduğu,

b) arzın sıfır olduğu,

c) arz ve talebin eşit olduğu

fiyatları belirleyiniz.

2. Arz ve talep fonksiyonları,

$q_s = -5 + 3p$

$q_d = 35 - p$

olarak verilen bir malın hangi fiyatı için arz ve talep miktarları eşit olur? Denge miktarını belirleyiniz.

3. Arz-talep doğruları,

$q_s = -13 + 12p$

$q_d = 27 - 4p$

olarak verilen bir modelin denge noktası nedir?

4. Birbirleriyle ilişkili iki malın arz ve talep fonksiyonları,

$q_{d_1} = 54 - 2p_1 + p_2$ $\qquad$ $q_{d_2} = 68 + 3p_1 - 2p_2$

$q_{s_1} = 11p_1 - 16$ $\qquad$ $q_{s_2} = 11p_2 - 18$

olarak veriliyor. Her bir malın arz ve talebinin eşit miktarlarda olacağı denge fiyatlar var mıdır? Varsa denge değerleri nelerdir?

Kendimizi Sınayalım

1. $2x + 3y = 1$ ve $-3x + 2y = -8$ doğrularının kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

a. (-1 , 2)
b. (2 , -1)
c. (1 , -1)
d. (-1 , 1)
e. (2 , 1)

2. $2x - 5y = 16$
$-x + 7y = -17$
doğrusal denklem sisteminin (x, y) çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a. (18, 4)
b. (23, 6)
c. (-4, -3)
d. (3, 2)
e. (3, -2)

3. $3x + 6y = 8$
$kx + 2y = 6$
doğrusal denklem sisteminin çözümsüz olması için k ne olmalıdır?

a. -2
b. -1
c. 1
d. 2
e. 3

4. $-5x + ky = -2$
$15x + y = 6$
doğrusal denklem sisteminin sonsuz çözümü olduğuna göre, k kaçtır?

a. -1
b. -1/3
c. 1/3
d. 1
e. 3

5. $2x + 3y - z - 1 = 0$, $-x + 5y + z - 14 = 0$ ve $3x + y + 2z - 5 = 0$
düzlemleri verilsin. Bu düzlemlerin kesim noktası aşağıdakilerden hangisidir?

a. (1 , 2 , 3)
b. (-1 , 2 , 3)
c. (-2 , 1 , 3)
d. (2 , 3 , 1)
e. (2 , 3 , -1)

6. $x + y - 2z = -2$
$2x - y - z = 5$
$x - 3y + 2z = 10$
doğrusal denklem sisteminde yer alan düzlemlerin arakesit doğrusunun parametrik denklemleri aşağıdakilerden hangisidir?

a. $x = t$
$y = -4 + t$
$z = -1 + t \quad (t \in \mathbb{R})$

b. $x = -1 + t$
$y = -3 + t$
$z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

c. $x = -1 + t$
$y = 2t$
$z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

d. $x = 1 + t$
$y = -1 + t$
$z = t \quad (t \in \mathbb{R})$

e. $x = 1 + t$
$y = t$
$z = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R})$

7. $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$
$3x_2 - x_4 = 0$
doğrusal denklem sisteminin çözümü ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

a. Sistemin tek çözümü $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ dır.
b. Sistemin tek çözümü $x_1 = -8$, $x_2 = 1$, $x_3 = -10$, $x_4 = 3$ tür.
c. Sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır ve bu çözüm,
$x_1 = -\frac{8}{3}t,\ x_2 = \frac{1}{3}t,\ x_3 = -\frac{10}{3}t,\ x_4 = t \quad (t \in \mathbb{R})$
d. Sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır ve bu çözüm,
$x_1 = -8t$, $x_2 = t$, $x_3 = -10t$, $x_4 = t \quad (t \in \mathbb{R})$
e. Sistemin çözümü yoktur.

8. $x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -40$
$2x_1 - x_2 + x_3 = 9$
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20$
doğrusal denklem sisteminin (x_1, x_2, x_3) çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a. (3 , -7 , -2)
b. (1 , 3 , 2)
c.. (1 , -5 , 2)
d. (-1 , 5 , 4)
e. (-5 , 2 , 3)

9. Arz-talep fonksiyonları,

$q_s = -14 + 8p$

$q_d = 105 - 9p$

denklemleriyle verilen bir malın denge fiyatı ve denge miktarı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $p = 3$, $q = 10$
b. $p = 10$, $q = 15$
c. $p = 11$, $q = 74$
d. $p = 11$, $q = 6$
e. $p = 7$, $q = 42$

10. Arz-talep fonksiyonları,

$q_{d_1} = 3 - p_1 + p_2$, $q_{s_1} = -4 + 5p_1$

$q_{d_2} = 14 + p_1 - 3p_2$, $q_{s_2} = -9 + 2p_2$

denklemleriyle verilen iki ticari mal için denge fiyatı ve denge miktarları aşağıdakilerden hangisidir?

a. $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $q_1 = 6$, $q_2 = 1$
b. $p_1 = 2$, $p_2 = 6$, $q_1 = 6$, $q_2 = 3$
c. $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $q_1 = 11$, $q_2 = 1$
d. $p_1 = 3$, $p_2 = 7$, $q_1 = 11$, $q_2 = 5$
e. $p_1 = p_2 = 5$, $q_1 = 21$, $q_2 = 1$

Biraz Daha Düşünelim

1. **a)** $3x - 4y = 6$, $x + 2y = 2$ **b)** $5x + 2y = 11$, $4x + 3y = 6$

doğrusal denklem sistemlerini grafik olarak çözünüz.

2. $3x + y = 2$, $5x - y = 4$, $-3x + 2y = y$, $8x = 6$

doğrusal denklem sistemlerinin eşdeğer olduğunu gösteriniz.

3.
$$x - 2y - z = 2$$
$$x - y + 2z = 9$$
$$2x + y + z = 3$$

sisteminin çözümünü bulunuz.

4. İki kapda bulunan %4 lük ve %9 luk tuz çözeltilerinden 50 litre %6 lık bir çözelti elde etmek için her bir kapdan ne kadar çözelti alınarak karıştırılmalıdır?

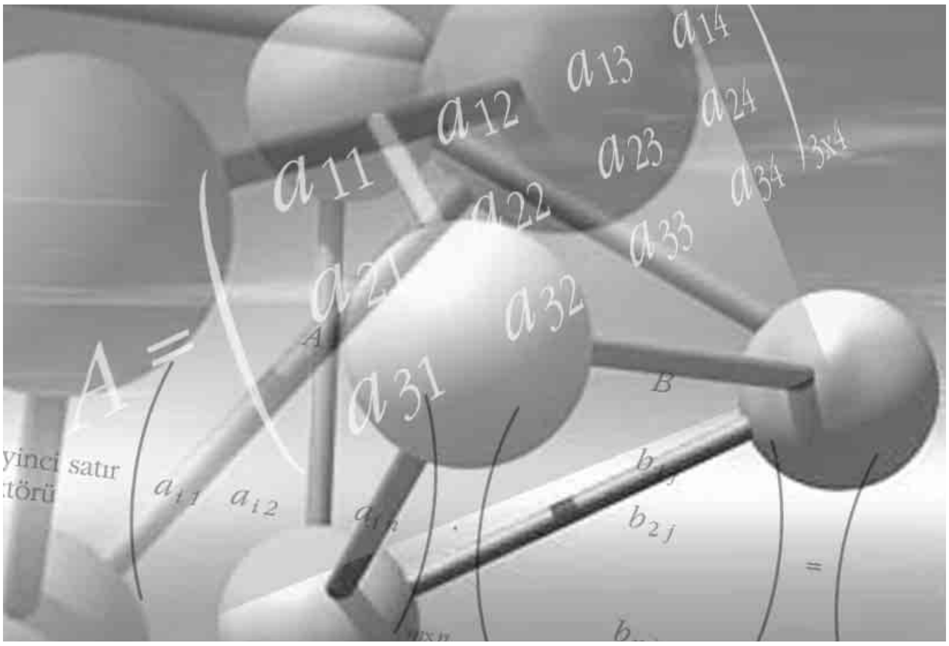
5. Bir nehirde seyreden bir bot, önce nehirin akışına ters yönde 6 saat yukarı doğru seyrettikden sonra geriye dönüyor ve 2 saatte hareket ettiği noktaya ulaşıyor. Sonra aşağı doğru 3 saat seyredip, tekrar yukarı doğru 8 saat seyrettiği halde başlangıç noktasına 4 km yaklaşıyor. Bu nehirin akış hızı nedir?

Pierre Fermat (1601 - 1665)

Avukat ve devlet adamı olan Fermat' ın bilinen en önemli çalışması Fermat' ın son teoremi olarak bilinen " $x^n+y^n=z^n$ ($n>2$) denkleminin pozitif tam sayılar için çözümü yoktur" biçiminde ifade edilen teoremdir. Bu teorem için Fermat, okuduğu bir kitabın kenarına şu notu yazmıştır: "Ben bu teoremin gerçekten çok güzel bir kanıtını yaptım, fakat bu sayfanın dar kenarına sığmaz." Oysa bu teoremin kanıtı matematikçileri yaklaşık 350 yıl uğraştırmıştır.

12

Matrisler



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *matris kavramını tanıyacak ve bir tablonun bir matris biçiminde gösterilişini yazabileceksiniz,*
- *bir matrisin boyutunu tanıyıp, matrislerin adlandırılışını öğreneceksiniz,*
- *uygun matrisler arasında toplama, çarpma ve bir sayı ile çarpma işlemleri yapabileceksiniz,*
- *ters matris kavramını tanıyıp, ilkel satır-sütun işlemleri yoluyla ters matrisin hesaplanışını öğreneceksiniz,*
- *doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini matris yöntemiyle bulabileceksiniz,*
- *çeşitli ekonomi problemlerinin matrislerle temsil edilişini yazabilecek ve çözümlerini matris yöntemiyle araştırabileceksiniz.*

İçindekiler

- *Matris Tanımı, Bir Matrisin Boyutu ve Özel Türden Matrisler*
- *Matris İşlemleri*
- *Matris İşlemlerinin Özellikleri*
- *Ters Matris*
- *Doğrusal Denklem Sistemlerinin Matrislerle Gösterilişi*

DİKKAT

- ***Tanımlar ve yeni kavramlar üzerinde iyi düşünülmeli ve doğru algılamaya çalışılmalıdır.***
- ***Örnekler iyi incelenmelidir.***
- ***Öğrenciye bırakılan sorularda verilenlerin ve bulunması istenilenlerin neler olduğu iyi ayırt edilmelidir.***
- ***Çalışırken mutlaka kağıt ve kalem kullanılmalıdır ve alıştırma sonuçları çözülerek bulunmalıdır.***

Giriş

Bu ünitenin konusu matrisler cebiri ve uygulamalarıdır. Daha açık ifade edecek olursak; bu ünitede matrislerin özellikleri, tipi ya da boyutu, matrisler arasında cebirsel işlemler, bu işlemlerin sağladığı özellikler, satır ve sütun işlemleri gibi konular ele alınacaktır. Uygulamada önemli yeri olan ters matrisin varlığı ve hesaplanmasına ilişkin bazı yöntemler üzerinde durulacaktır. Bütün bu gerekli kavramların verilmesinden sonra, matrislerin uygulama alanında önemini gösteren türden örnekler verilecektir. Bu tür örneklerin başında, doğrusal denklem sistemlerinin matris gösterimleriyle ifade edilişleri ve çözümlerinin irdelenmesi gelir. Matris gösterimleriyle verilen bir doğrusal denklem sisteminin çözümü yapılmadan, çözümün varlığı, varsa tekliği belirlenebilir; çözüm varsa, çözümün bulunmasını kolaylaştıran matris yöntemler verilebilir. Birçok ekonomik ilişkiler bir doğrusal denklem sistemiyle ifade edilebildiğinden, ekonomik ilişkilerin matematiksel olarak modellenmesinde matrislerin önemli bir yeri vardır. İleride vereceğimiz örnekler bu önemi daha iyi açıklayacaktır.

MATRİS TANIMI, BİR MATRİSİN BOYUTU VE ÖZEL TÜRDEN MATRİSLER

AMAÇ 1

Bu kesimde amaçlanan, tabloların matris olarak gösterilişi, matris terminolojisinin tanıtılması; kare, satır, sütun, birim matrisler, bir matrisin devriği, matris eşitliği kavramlarının açıklanmasıdır.

Önce "**matris nedir?**" sorusuna yanıt arayalım. Günlük yaşantımızda sayıların, değişkenlerin veya parametrelerin oluşturduğu çeşitli tablolar yapmaya ihtiyaç duyarız. Örneğin, bir fabrikanın ürettiği, diyelim ki beş tür malın ilk altı aylık üretim miktarlarının aylara göre dökümünün verilmesi istenirse, bunu göstermenin bir yolu beş satır ve altı sütundan oluşan bir tablo hazırlamaktır. Satırların karşısına mal çeşitlerini, sütunların tepesine de aylar yazılırsa, bir satır ile bir sütun kesiştiği yere de o ay içinde üretilen o malın miktarı yazılabilir. Bu tabloya fabrikanın ilk alt aylık üretim tablosu denildiği gibi üretim matrisi de denir. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

Bir giyim atölyesinde üretilen malların yılın ilk ayı içindeki üretim miktarları aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

	Ocak	Şubat	**Mart**	Nisan	**Mayıs**	Haziran
Ceket	250	200	150	300	200	100
Pantolon	300	250	175	300	250	200
Yelek	100	75	75	50	25	0
Gömlek	350	400	350	300	325	350
Kravat	500	450	400	375	250	150

Beş satır, altı sütundan oluşan bu tablo, hangi malın hangi ay ne miktarda üretildiğini göstermektedir. Kısa bir ifadeyle, atölyenin ilk alt aylık **üretim tablosu** veya **üretim matrisi**dir.

Sayıların, değişkenlerin veya parametrelerin oluşturduğu dikdörtgen biçiminde bir tabloya bir **matris** denir.

Bir matrisi oluşturan nesnelere o **matrisin elemanları ya da öğeleri** adı verilir. Yatay çizgiler üzerinde yer alan matris elemanlarına matrisin **satırları**, düşey çizgiler üzerinde yer alan matris elemanlarına matrisin **sütunları** denir. Bir matris, satır sayısı ve sütun sayısı ile ifade edilir. m sayıda satırı, n sayıda sütunu olan bir matris için mxn ye **matrisin boyutu** ya da **mertebesi** denir. Bir matrisin boyutu yazılırken daima önce satır sayısı sonra da sütun sayısı yazılır. Eğer satır sayısı sütun sayısına eşit ise, bu tür bir matrise **kare matris** denir. Boyutu nxn olan bir matris, kısaca ***n*- yinci mertebeden kare matris** diye de ifade edilebilir. Bir matrisin m sayıda satırı ve bir tek sütuna varsa, yani matrisin boyutu mx1 ise, böyle bir matrise **sütun matris** ya da bir **sütun vektör** denir. Bir tek satırı ve n sayıda sütunu, yani mertebesi 1xn olan bir matrise de **satır matris** ya da bir **satır vektör** denir.

Bir matrisin satırları ve sütunları normal parantez ( ) veya köşeli parantez [ ] biçiminde çizgiler arasına yazılır ve matrisin boyutu da parantezin sağ alt köşesine yazılarak gösterilir. Bu kitapta matrisler için ( ) gösterimini kullanacağız.

Aşağıda çeşitli boyutlardaki matrisler için birer örnek verilmiştir.

ÖRNEK 1

$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 & 0 \\ 0,5 & \sqrt{2} & -8 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$ ***2 x 4 boyutunda bir matris***

$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ ***2 nci mertebeden kare matris***

$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -7 & \sqrt{3} \end{pmatrix}_{1 \times 4}$ ***Satır matris (satır vektör)***

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$ ***Sütun matris (sütun vektör)***

Matrisler, A, B, C, ... , X, Y gibi büyük harfler ile onların öğeleri de küçük harfler ile gösterilirler. Boyutu $m x n$ olan genel bir matrisin i -yinci satırı ile j -yinci sütunun kesiştiği yerdeki elemanı a_{ij} olarak yazılır. Böylece A matrisi $A = (a_{ij})_{mxn}$ biçiminde temsil edilebilir (Bu tür yazılışlarda, yani bir matrisin boyutunun yazılışında olsun veya bir elemanın konumunun gösterilişinde olsun, daima satır sayısı ya da numarası sütun sayısından ya da numarasından önce yazılır). Gösterilişi $A = (a_{ij})_{mxn}$ olan m satır, n sütundan oluşan genel bir A matrisi, elamanlarının konumları açık gösterilecek şekilde aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{1. sütun} & \text{2. sütun} & j\text{-yinci sütun} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1. satır} \\ \leftarrow \text{2. satır} \\ \\ \leftarrow i\text{-inci satır} \\ \\ \\ \end{array}$$

İki matrisin boyutları ve aynı konumdaki tüm elemanları eşit ise bu iki matrise **eşit matrisler** denir. O halde, $A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{rxs}$ matrislerinin eşit olması için gerekli ve yeterli koşul $m = r$, $n = s$ ve her i, j için $a_{ij} = b_{ij}$ olmasıdır.

ÖRNEK 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & x \end{pmatrix}$ ***matrisinin*** $B = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ***matrisine eşit olması için x, y, z ne olmalıdır?***

ÇÖZÜM

A matris ile B matrisinin boyutları aynı olduğundan, $A = B$ olması için $x = 5$, $y = 3$, $z = 8$ olmalıdır.

ÖRNEK 3

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & -5 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad E=(-4)$$

matrisleri veriliyor. Bu matrislerin boyutlarını, eleman sayılarını ve a_{24}, b_{32}, c_{31}, d_{14}, e_{11} elemanlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Her bir matrisi tek tek ele alıp soruları yanıtlayalım. A matrisinin boyutu 3x4 dür; özel bir adlandırılışı yoktur. Elemanları sayısı 3x4 = 12 dir. a_{24}, ikinci satır dördüncü sütunda bulunan eleman olduğundan $a_{24} = 8$ dir.

B matrisinin boyutu 3x3 dür; yani üçüncü mertebeden bir kare matristir. Elemanları sayısı 3x3 = 9 dur. $b_{32} = -1$ dir.

C matrisinin boyutu 3x1 dir. Bu matris bir sütun matristir; elemanları sayısı 3 ve $c_{31} = 6$ dır.

D matrisinin boyutu 1x4 dür. Bu matris bir satır matristir; elemanları sayısı 4 ve $d_{14} = -1$ dir.

E matrisi boyutu 1x1 olan hem satır hem de sütun matristir. E nin tek elemanı $e_{11} = -4$ dür.

n- yinci mertebeden bir $A = (a_{ij})$ kare matrisinde a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{nn} elemanlarına kısaca **matrisin köşegen elemanları** denir.

Eğer bir kare matrisin köşegen elemanlarının hepsi 1 ve diğer tüm elemanları 0 ise, böyle bir matrise bir **birim matris** denir. n- yinci merteben bir birim matris için

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}\qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

dir. Her mertebeden birim matris vardır ve mertebesi n olan birim matris, genel olarak, I_n simgesiyle gösterilir.

Örneğin,

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrislerinden birincisi 2 ci mertebeden, ikincisi de 3 cü mertebeden birim matrislerdir.

Bir $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisi için A nın **devriği (transpozesi)** diye adlandırılan ve $A^T = (a'_{ij})_{nxm}$ ile gösterilen matris, boyutu nxm olan ve $a'_{ij} = a_{ji}$ olarak tanımlanan matristir. Bir başka ifade ile, A nın satırlarını sütun, sütunlarını da satır yaparak elde edilen matrise A nın devriği denir ve bu yeni matris A^T ile gösterilir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}_{3x4}$$

matrisinin devriği, boyutu 4x3 olan ve A nın satırlarını sütun kabul eden matristir.

$$A^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}_{4x3}$$

ÖRNEK 4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{2x3}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}_{3x1}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

matrislerinin devriklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{3x2}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}_{1x3},$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} = C$$

SIRA SİZDE 1

1. $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$ matrisinin öğeleri için $2a_{13} - 3a_{21}^2 - 4a_{23}$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 9 & z & z \end{pmatrix}$ matrislerinin eşit olmaları için x, y, z değerleri ne olmalıdır?

3. Öğeleri $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 2$ ve $a_{23} = a_{32} = 3$ olan kare matrisi yazınız.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ -2 & 1 & z \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ matrisi için $A = A^T$ ise, A matrisinin bilinmeyen öğelerini bulunuz ve A matrisini yeniden yazınız.

MATRİS İŞLEMLERİ

Bu kesimde matris toplaması, çıkarması, sayı ile çarpımı ve matris çarpımı işlemlerini tanıyacak ve bu işlemlerin kimi özelliklerini öğreneceksiniz.

Matris Toplamı

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ ve $B = (b_{ij})_{m\times n}$ aynı tipten iki matris olsunlar. Öğeleri $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1,2,...m\ ;\ j = 1,2,...,n)$ olan $C = (c_{ij})_{m\times n}$ matrisine A ve B matrislerinin **toplamı** denir ve bu matris $C = A + B$ şeklinde gösterilir. Bu durumda A ve B matrislerine **toplanabilir** matrisler adı verilir.

Açıktır ki,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

dir.

A ve B matrislerinin $A - B$ farkı da benzer şekilde tanımlanır.

ÖRNEK 5

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ***matrisleri için A + B , A - B matrislerini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+(-1) & 2+7 & -1+4 \\ 0+3 & 4+(-2) & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3-(-1) & 2-7 & -1-4 \\ 0-3 & 4-(-2) & 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -5 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Sayı İle Çarpma

Bir matrisin bir **sayı ile çarpımı**, o matrisin elemanlarının konumlarını bozmadan, tüm elemanların verilen sayı ile çarpımıyla oluşturulan matristir. Yani k bir sayı ve $A = (a_{ij})_{m\times n}$ verilen bir matris ise, k ile A nın kA ile gösterilen sayı ile çarpımı $kA = (ka_{ij})_{m\times n}$ olarak tanımlanan matristir.

ÖRNEK 6

$k = 5$ ***ve*** $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ***için kA matrisini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$kA = 5\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.4 & 5.(-2) \\ 5.3 & 5.0 \\ 5.1 & 5.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ 15 & 0 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$$

ÖRNEK 7

1 Ocak 1999 tarihinde peynir, et, şeker fiyatları milyon TL/kg olarak F matrisiyle veriliyor.

$$F = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 0,4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textbf{Peynir} \\ \text{Et} \\ \textbf{Şeker} \end{matrix}$$

Enflasyonun her yıl %30 oranında artacağını varsayarak, 3 yıl sonra 1 Ocak 2002 tarihindeki peynir, et, şeker fiyatlarını temsil eden sütun matrisi bulunuz.

ÇÖZÜM

1. yıl sonunda $F_1 = F + 0,30\ F = 1,30\ F$
2. yıl sonunda $F_2 = F_1 + 0,30\ F_1 = 1,30\ F_1 = 1,30\ (1,30\ F) = (1,30)^2\ F$
3. yıl sonunda $F_3 = F_2 + 0,30\ F_2 = 1,30\ F_2 = 1,30\ (1,30)^2\ F = (1,30)^3\ F$

olur. Böylece aranılan matris, yani 3 yıl sonraki fiyat matrisi

$$F_3 = (1,30)^3\ F = 2,197\begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,197.1,5 \\ 2,197.2,5 \\ 2,197.0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2955 \\ 5,4925 \\ 0,8788 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Bir A matrisi için $(-1)\ A = -A$ olarak gösterilir. Sözgelişi, 6. Örnekteki A matrisi için

$$-A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

dir.

ÖRNEK 8

$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ***matrisleri ve $k = -1$ sayısı veriliyor.***

$A + kB$ matrisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$A + kB = A + (-1)\ B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -4-5 \\ 1+1 & 7-3 \end{pmatrix} = A - B$$

olur. O halde, $A + (-1)\ B = A - B$ dir.

Tüm elemanları sıfır olan bir matrise **sıfır matris** denir. Her mertebeden sıfır matris vardır ve genel olarak sıfır matris O simgesiyle gösterilir. Açıktır ki, her A matrisi için $A - A = O$ dır.

ÖRNEK 9

Bir A matrisi için $A = -A$ ise, A nın sıfır matris olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

A herhangi bir matris olsun. $A = -A$ ise, bu eşitliğin her iki yanını A matrisi ile toplarsak

$A + A = A + (-A)$
$2A = A - A = O$
$2A = O$
$A = O$

olur. O halde, A sıfır matristir. (Burada O, A ile aynı mertebeden olan sıfır matrisi göstermektedir).

İki Vektörün İç Çarpımı

A bir satır vektör, B de bir sütun vektör olsun. Eğer A ile B nin elemanları sayısı eşit ise, A nın her bir elemanının B nin karşılık gelen elemanı ile çarpılıp toplanmasıyla elde edilen sayıya A satır vektörüyle B sütun vektörünün **iç çarpımı** denir ve bu sayı $A \,.\, B$ ile gösterilir. Kısaca

$$A = (a_{11}\ a_{12}\ .\ .\ .\ a_{1n}) \ \text{ ve } \ B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

ise,

$$A \,.\, B = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \ldots + a_{1n}\, b_{n1}$$

olur.

ÖRNEK 10

$$A = (2 \quad 3 \quad -4) \quad \textit{ve} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

vektörleri için $A \,.\, B$ iç çarpımını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$A \,.\, B = (2 \quad 3 \quad -4)\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \,.\, (-1) + 3 \,.\, 7 + (-4) \,.\, 5$$

$$= -2 + 21 - 20 = -1$$

bulunur.

Matris Çarpımı

Şimdi iki matrisin çarpımını tanımlamak istiyoruz. İki matrisin toplamının veya farkının tanımlanabilmesi için bunların boyutlarının eşit olması gerektiğini biliyoruz. İki matrisin çarpımının tanımlanabilmesi için de bunların boyutları arasında bir ilişki olması gerekmektedir. Bu ilişki şudur: Matrislerin birincisinin sütun sayısı ikincisinin satır sayısına eşit olmalıdır. Bu koşul altında iki matrisin çarpımını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisi ile $B = (b_{ij})_{nxr}$ matrisinin AB ile gösterilen çarpımı öyle bir $C = (c_{ij})$ matrisidir ki, C nin boyutu mxr dir ve c_{ij} elemanı A nın i- yinci satır vektörü ile B nin j- yinci sütun vektörünün iç çarpımıdır; yani her $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots r$ için

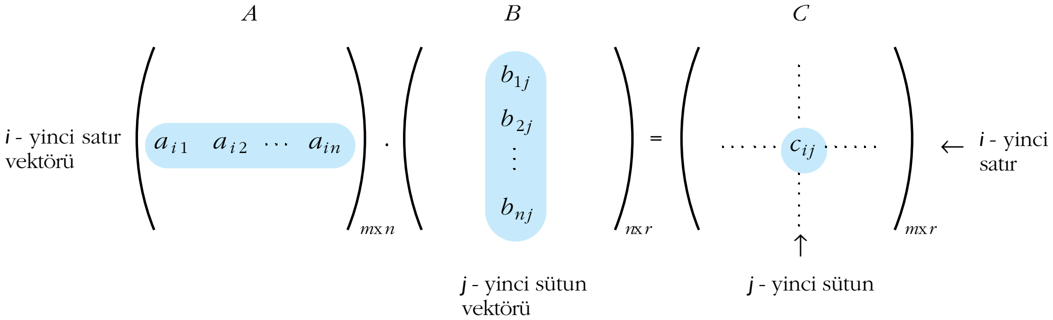
$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

veya kısaca

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

dir.

$AB = C$ çarpımının daha iyi anlaşılması için tanımı biraz görselleştirelim:



ÖRNEK 11

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}_{2x3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2x2}$$

matrisleri için tanımlı olan çarpımları belirleyiniz ve çarpım matrisleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Sadece AB ve CA çarpımları tanımlıdır. (Nedenini siz açıklayınız)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.1 + 4.8 + 7.6 & 2.0 + 4.3 + 7.4 & 2.(-2) + 4.(-1) + 7.2 \\ -1.1 + 5.8 + 9.6 & -1.0 + 5.3 + 9.4 & (-1)(-2) + 5(-1) + 9.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 76 & 40 & 6 \\ 93 & 51 & 15 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2x2} . \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}_{2x3}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.2 + 2.(-1) & 3.4 + 2.5 & 3.7 + 2.9 \\ 0.2 + 5.(-1) & 0.4 + 5.5 & 0.7 + 5.9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 22 & 39 \\ -5 & 25 & 45 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

ÖRNEK 12

Bir konfeksiyon atölyesinde satışa hazırlanan dört parti giyim eşyasının miktarları E matrisi, bu eşyanın birim fiyatları da milyon TL olarak F matrisi ile veriliyor. Her bir parti malın değerini gösteren sütun matris D yi bulunuz.

$$E = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textbf{Ceket} & \text{Pantolon} & \textbf{Gömlek} & \text{Kravat} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 250 & 200 \\ 75 & 100 & 175 & 175 \\ 125 & 125 & 100 & 100 \\ 140 & 160 & 300 & 250 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{1. parti} \\ \text{2. parti} \\ \text{3. parti} \\ \text{4. parti} \end{array}$$

$$F = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \textbf{Ceket} \\ \text{Pantolon} \\ \textbf{Gömlek} \\ \text{Kravat} \end{array}$$

ÇÖZÜM

Her bir parti malın değerini gösteren matris $D = EF$ dir. O halde,

$$D = EF = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 250 & 200 \\ 75 & 100 & 175 & 175 \\ 125 & 125 & 100 & 100 \\ 140 & 160 & 300 & 250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8000 + 3000 + 3750 + 2000 \\ 6000 + 2000 + 2625 + 1750 \\ 10000 + 2500 + 1500 + 1000 \\ 11200 + 3200 + 4500 + 2500 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16750 \\ 12375 \\ 15000 \\ 21400 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{1. parti malın değeri} \\ \text{2. parti " "} \\ \text{3. parti " "} \\ \text{4. parti " "} \end{array}$$

ÖRNEK 13

Altı öğrencinin devam ettiği bir dersin iki ara sınav ve bir genel sınav notlarının dökümü S matrisi ile veriliyor. Ara sınavlar %20 ve genel sınav %60 ağırlıklı olduğuna göre, dönem sonunda bu öğrencilerin başarı notları listesini (matrisini) bulunuz.

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textbf{1.ara sınav} & \text{2. ara sınav} & \textbf{Genel sınav} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 42 & 65 & 70 \\ 55 & 40 & 65 \\ 30 & 50 & 60 \\ 76 & 82 & 85 \\ 30 & 40 & 43 \\ 70 & 83 & 92 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{1. öğrenci} \\ \text{2. öğrenci} \\ \text{3. öğrenci} \\ \text{4. öğrenci} \\ \text{5. öğrenci} \\ \text{6. öğrenci} \end{array}$$

ÇÖZÜM

Ara sınavların ve genel sınavın ağırlıkları matrisini A ile gösterecek olursak, A matrisini

$$A = \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,20 \\ 0,60 \end{pmatrix}$$

sütun matrisi olarak alabiliriz. (A yı neden satır matris değilde sütun matris olarak aldığımızı siz düşününüz). O zaman, öğrencilerin başarı notları matrisine B diyecek olursak, $B = SA$ olur. Böylece

$$B = SA = \begin{pmatrix} 42 & 65 & 70 \\ 55 & 40 & 65 \\ 30 & 50 & 60 \\ 76 & 82 & 85 \\ 30 & 40 & 43 \\ 70 & 83 & 92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,20 \\ 0,60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,4 + 13 + 42 \\ 11 + 8 + 39 \\ 6 + 10 + 36 \\ 15,2 + 16,4 + 51 \\ 6 + 8 + 25,8 \\ 14 + 16,6 + 55,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63,4 \\ 58 \\ 52 \\ 82,6 \\ 39,8 \\ 85,8 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

SIRA SİZDE 2

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ matrisleri için $A - 2B + AB$ matrisini bulunuz.

2. $A = (2 \;\; 3 \;\; 7)$ satır vektörü ile $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sütun vektörünün iç çarpımı olan sayıyı bulunuz.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

a) AB **b)** BA **c)** $(AB)\,C$

d) A^2 **e)** $A\,(B+C)$

matrislerini bulunuz.

MATRİS İŞLEMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

AMAÇ 2 ***Matris işlemlerinin sağladığı kimi özelliklerin tanıtılması.***

Matris toplaması, çıkarması, sayı ile çarpımı ve matris çarpımına ilişkin kimi özellikler aşağıda dört grup olarak sıralanmıştır. Bu gruplarda geçen işlemler için verilen matrislerin uyumlu oldukları, yani iki matrisin toplamı söz konusu ise bu matrislerin toplanabilir oldukları, çarpımları söz konusu ise çarpılabilir oldukları kabul edilmiştir. Özelliklerin kanıtlarına girilmeyecek, bazılarının örneklerle doğrulanmasıyla yetinilecektir.

I. i)	$A + B = B + A$	Matris toplamasının değişme özelliği vardır.
ii)	$(A + B) + C = A + (B + C)$	Matris toplamasının birleşme veya parantez kaydırma özelliği vardır.
iii)	$A + O = O + A = A$	Sıfır matris, matris toplamasının etkisiz elemanıdır.
iv)	$A + (-A) = O$	$-A$, A matrisinin toplamsal tersidir.
II.	k, k_1 , k_2 sayılar	
i)	$kA = Ak$	
ii)	$(k_1 + k_2)\,A = k_1\,A + k_2\,A$	
ii)	$k\,(A + B) = kA + kB$	
iii)	$k_1\,(k_2\,A) = (k_1\,k_2)\,A$	
iv)	$k\,(AB) = (kA)\,B = A\,(kB)$	
III. i)	$A\,(BC) = (AB)\,C$	Matris çarpımının birleşme veya parantez kaydırma özelliği vardır.
ii)	$A\,(B + C) = AB + AC$	Matris çarpımının toplama üzerine dağılma özelliği vardır.
iii)	$IA = AI = A$	(Burada A kare matris değilse, soldaki birim matris ile sağdaki birim matrisin mertebeleri farklıdır.)
IV. i)	$(A + B)^T = A^T + B^T$	
ii)	$(A^T)^T = A$	
iii)	$(kA)^T = kA^T$	
iv)	$(AB)^T = B^T A^T$	

Şimdi yukarıdaki kimi özellikleri örneklerle doğrulayalım ve önemlerine değinelim.

ÖRNEK 14

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3x \\ 5 & -4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} y & -x \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 2y & -4x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri veriliyor. Bu matrisler için matris toplamının birleşme özelliği I (ii) yi doğrulayınız.

ÇÖZÜM

$$(A+B)=\begin{pmatrix} 2 & 3x \\ 5 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y & -x \\ 3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+y & 2x \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix} 2+y & 2x \\ 8 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2y & -4x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3y & -2x \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(B+C)=\begin{pmatrix} y & -x \\ 3 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2y & -4x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3y & -5x \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix} 2 & 3x \\ 5 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3y & -5x \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3y & -2x \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

O halde, $(A+B)+C=A+(B+C)$ dir.

Matris toplamasının birleşme özelliğinin önemi şudur: Sonlu sayıda toplanabilir matris için parantez kullanmadan bunlar arasına + işareti konularak toplamları yazılabilir. Örneğin, $A+B+C$, $A+B+C+D$ yazılışları anlamlıdır. Çünkü bu toplamlar ikili nasıl gruplanırsa gruplansın sonuç değişmeyecektir.

Genel olarak, matris çarpımının değişme özelliği yoktur; yani

$$AB \neq BA$$

dır. Çünkü AB çarpımı tanımlı iken BA tanımlı olmayabilir veya tersi (sözgelişi, A nın boyutu 2x3 ve B nin boyutu 3x4 ise AB çarpımı tanımlı BA çarpımı tanımlı değildir). Aslında AB ve BA çarpımlarının her ikisi de tanımlı olsa bile, genelde eşitlik yoktur. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

ÖRNEK 15

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

matrisler için $AB \neq BA$ olduğunu görünüz.

ÇÖZÜM

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+4 & 5+14 \\ -3+8 & 15+28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 19 \\ 5 & 43 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1+15 & -2+20 \\ 2+21 & 4+28 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 23 & 32 \end{pmatrix}$$

olduğundan $AB \neq BA$ dır.

A ve B çarpılabilir matrisler ve bu matrislerden biri sıfır matris ise AB çarpımının sıfır matris olacağı açıktır. Fakat bunun tersi doğru değildir; yani $A \neq O$ ve $B \neq O$ olduğu halde $AB = O$ olabilir. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

ÖRNEK 16

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

matrisleri veriliyor. AB çarpımının sıfır matris olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+9 & 27-27 \\ -3+3 & 9-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu örnek şunu göstermektedir: A ve B gibi iki matris için $AB = O$ ise $A = O$ veya $B = O$ olmak zorunda değildir. Oysa a, b gerçel sayıları için $ab = 0$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ olmak zorunda olduğunu anımsayınız. Yine a, b, c sayıları için $ab = ac$ $(a \neq 0)$ ise, $b = c$ dir. Gerçel sayılar için çarpmanın kısaltma özelliği olarak bilinen bu özellik de matris çarpımı için genel olarak geçerli değildir. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

ÖRNEK 17

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisleri veriliyor. Bu matrisler için kısaltma kuralının geçerli olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+9 & 2+6 \\ -12+27 & 6+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 2+6 \\ 6+9 & 6+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

O halde, $AB = AC$ dir; fakat kısaltma kuralı geçerli değildir. Çünkü $B \neq C$ dir.

Matris çarpımının birleşme özelliği III(i) nedeniyle çarpılabilir matrisler için ABC, $ABCD$ gibi yazılışları anlamlı olur. Aşağıdaki örnek, matris çarpımının birleşme özelliğini doğrulayan bir örnektir.

ÖRNEK 18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

matrisleri için $(AB)\,C = A\,(BC) = ABC$ eşitliğini doğrulayınız.

ÇÖZÜM

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(AB)\,C = \overset{AB}{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}}\overset{C}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}} = \overset{ABC}{\begin{pmatrix} 4 \\ -22 \end{pmatrix}}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}\overset{BC}{\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}} = \overset{ABC}{\begin{pmatrix} 4 \\ -22 \end{pmatrix}}$$

Böylece çarpılabilir A, B ve C matrisleri için $(AB)\,C = A\,(BC) = ABC$ eşitliği doğrulanmış olur.

Matris çarpımın birleşme özelliği, kare bir matrisin pozitif bir kuvvetinin tanımlanmasını da sağlar. A bir kare matris ve n de pozitif bir tam sayı ise, A nın n- yinci kuvveti

$$A = \underbrace{A \,.\, A \,.\, A \,....\, A}_{n \text{ tane}}$$

olarak tanımlanır. Özel olarak, A bir köşegen matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

ise,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^n \end{pmatrix}$$

olur.

ÖRNEK 19

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ***köşegen matrisinin beşinci kuvvetini bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}$$

ÖRNEK 20

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

matrisleri için $(A+B)^T = A^T + B^T$ ve $(AB)^T = B^T A^T$ eşitliklerini doğrulayınız.

ÇÖZÜM

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

olduğundan $(A+B)^T = A^T + B^T$ ve $(AB)^T = B^T A^T$ eşitlikleri sağlanmış olur.

SIRA SİZDE 3

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

matrisleri veriliyor. Aşağıdaki matrisleri hesaplayınız. Eğer matris işlemi tanımlı değilse, neden tanımlı olmadığını açıklayınız.

a) $A + B$, **b)** $A - B$, **c)** $B + C$, **d)** $3A$, **e)** $B + C^T$,
f) $4A - 2B + 3C^T$, **g)** AB, **h)** AC, **i)** $(A + B)\, C$, **j)** $A^T C^T$,
m) $A + X = B$ olacak şekildeki X matrisini bulunuz.
n) $A + Y = O$ olacak şekildeki Y matrisini bulunuz.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

a) AB matrisini bulunuz.

b) Bu vektörlerin iç çarpımı olan $A \,.\, B$ sayısını hesaplayınız.

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/6 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$AB = BA = I$ eşitliğini doğrulayınız.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$AX = XA = I$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir X matrisi bulunuz.

5. Bir giyim mağazasının üç ambarında bulunan dört kalem mallarının değerleri, milyon TL olarak, aşağıdaki D matrisi ile veriliyor. Eğer bu mağaza, mallarına %20 zam yaparsa ambarlarındaki malların değerlerini temsil eden matris ne olur?

$$D = \begin{pmatrix} 500 & 750 & 900 \\ 650 & 525 & 830 \\ 420 & 640 & 835 \\ 340 & 590 & 610 \end{pmatrix}$$

6. A ve B boyutları aynı olan kare matrisler ise,

$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

eşitliğini gösteriniz.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A^4 matrisini bulunuz.

b) $AB = BA = I$ olacak şekildeki B matrisinin

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

8. Bir şirket satın almak isteği 90 adet televizyon, 110 adet buzdolabı, 70 adet çamaşır makinası için dört ayrı firmadan fiyat teklifleri alıyor. Firmaların bu mallar için verdikleri birim fiyatlar, milyon TL olarak, A matrisi ile temsil edilmektedir.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \textbf{Tv} & \text{Bd} & \textbf{Çm} \end{array} & \\ A = & \begin{pmatrix} 130 & 180 & 170 \\ 150 & 175 & 165 \\ 120 & 190 & 150 \\ 140 & 200 & 160 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{1. firma} \\ \text{2. firma} \\ \text{3. firma} \\ \text{4. firma} \end{array} \end{array}$$

Eğer şirket bu malların hepsini aynı firmadan almak isterse, minimum toplam fiyatı hangi firma vermiştir?

TERS MATRİS

AMAÇ 3 ***Tersi olan kare matrislerin terslerinin bulunması.***

A bir kare matris olsun. A ile sağdan ve soldan çarpıldığında aynı birim matrisi veren bir matris varsa, bu matrise A nın **tersi** denir ve bu matris A^{-1} ile gösterilir. O halde, A nın tersi A^{-1} varsa,

$$AA^{-1} = A^{-1} A = I$$

dır.

Şimdi ters matrise ilişkin doğrudan tanımdan elde edilebilecek bazı uyarılar ve sonuçlar sıralayalım:

i) Ancak kare matrislerin tersleri olabilir. Her kare matrisin de tersi yoktur.

ii) A matrisinin tersi varsa, bu ters matris de kare matristir ve boyutu A nın boyutu ile aynıdır.

iii) A nın tersi varsa bu ters matris tektir.

iv) A nın tersi A^{-1} varsa, A da A^{-1} ın tersidir; yani $(A^{-1})^{-1} = A$ dır.

ÖRNEK 21

$A = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ***matrisleri veriliyor. $A^{-1} = B$ olduğunu gösteriniz.***

ÇÖZÜM

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

olduğundan $A^{-1} = B$ dir.

ÖRNEK 22 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ***matrisinin tersinin olmadığını gösteriniz.***

ÇÖZÜM

A matrisinin tersinin varlığını kabul edelim. Bu matris A ile aynı boyutta bir matris olacaktır; diyelim ki

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

olsun ve $AB = BA = I$ eşitliklerini sağlasın.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} \\ 5b_{11} & 5b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sağ yandaki son iki matrisin eşitliğinden

$$2b_{11} = 1 \qquad 2b_{12} = 0$$
$$5b_{11} = 0 \qquad 5b_{12} = 1$$

denklemleri elde edilir. Aynı zamanda $b_{11} = 1/2$ ve $b_{11} = 0$ (benzer olarak $b_{12} = 0$ ve $b_{12} = 1/5$) olamayacağından, $AB = I$ eşitliğini sağlayan bir B matrisi bulunamaz. Öyleyse A matrisinin ters matrisi yoktur.

ÖRNEK 23 ***A matrisinin tersi varsa, tek olduğunu gösteriniz.***

ÇÖZÜM

A matrisinin iki tane tersinin varlığını kabul edelim. Bunlar B ve C olsunlar. O zaman

$$AB = BA = I$$
$$AC = CA = I$$

eşitlikleri vardır. Şimdi bu eşitlikleri ve çarpımın birleşme özelliğini kullanırsak

$$B = BI = B\,(AC) = (BA)\,C = IC = C$$

olur.

ÖRNEK 24 ***A ve B aynı boyutlu tersleri olan matrisler ise, AB çarpım matrisinin de tersinin var olduğunu ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olduğunu gösteriniz.***

ÇÖZÜM

A ve B aynı boyutlu tersleri olan matrisler ise, AB ve $B^{-1}A^{-1}$ çarpımları da tanımlıdır. $AB = C$ diyelim. $CD = DC = I$ olacak şekilde bir D matrisi var mı? Eğer $D = B^{-1}A^{-1}$ alırsak aranılan koşullar sağlanır. Gerçekten,

$$CD = (AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A\,(BB^{-1})\,A^{-1} = A\,(I)\,A^{-1} = (A\,I)\,A^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$DC = (B^{-1}A^{-1})\,(AB) = B^{-1}\,(A^{-1}A)\,B = B^{-1}\,(I)\,B = B^{-1}\,(IB) = B^{-1}B = I$$

olduğundan $C^{-1} = D$; yani $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ dir.

ÖRNEK 25

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ***matrisinin tersini bulunuz.***

ÇÖZÜM

A matrisinin tersi varsa, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ biçiminde bir matris olacaktır ve

$AB = BA = I$ koşulunu sağlayacaktır. Buna göre,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3z & y+3t \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matris eşitliğinden

$$\begin{aligned} x \quad + 3z \quad &= 1 \\ 2x \quad\quad &= 0 \\ y \quad + 3t &= 0 \\ 2y \quad\quad &= 1 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Sistem yeterince basit olduğundan çözümünü hemen yazabiliriz: $x = 0$, $y = 1/2$, $z = 1/3$, $t = -1/6$ bulunur. Şimdi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

matrisinin A nın tersi, yani $B = A^{-1}$ olduğunu kolayca doğrulayabiliriz:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{pmatrix}$$

bulunur.

İlkel Satır İşlemleri ve Ters Matrisin Hesaplanması

Bir kare matrisin tersini hesaplamanın birçok yöntemi vardır. 25. Örnekte 2 nci mertebeden bir kare matrisin tersinin nasıl bulunabileceğini gördük. Ancak, bu yol üç ve daha yukarı mertebeden matrislerin terslerinin bulunmasında uygun bir yol değildir. Örneğin, üçüncü mertebeden bir matrisin tersini bulmak için dokuz bilinmeyenli dokuz denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemini çözmek durumunda kalırız. Bu nedenle, ters matrisi hesaplamanın daha uygun yöntemlerini öğrenmeliyiz. Bu yöntemlerden biri de Gauss Yöntemidir. Gauss Yönteminin ne olduğuna girmeden önce bir matrisin satırları arasında tanımlanan ilkel satır işlemlerinden söz edelim:

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerini araştırırken (11. Ünite) üç tür temel satır işleminden söz etmiştik. Aynı tür işlemler bir matrisin satırlarına uygulandığında bu işlemlere **ilkel satır işlemleri**, elde edilen matrise de verilen matrise **satır eşdeğer matris** denir. Şimdi ilkel satır işlemlerini görelim:

Üç tip ilkel satır işlemi vardır:

I. Matrisin iki satırının yerlerinin değiştirilmesi

II. Bir satırın sıfır olmayan bir sayı ile çarpılması

III. Bir satırın bir sayı ile çarpılıp başka bir satır üzerinde toplanması

Satır işlemleri doğrusal cebirin en önemli araçlarından birisidir. Doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerinin belirlenmesinde ve daha kimi konularda hem kuramsal hem de uygulama açısından neredeyse kaçınılmazdır. Bu nedenlerden dolayı satır işlemlerinin mekanik bir biçime getirilmesi oldukça yararlıdır. Öncelikle bir matrise satır işlemleri uygulamaktan beklentimizin ne olduğuna açıklık getirelim. Amaç yapılan işlere göre değişmekle birlikte genelde verilen matrisi **basamak biçimine** getirmek çoğu problem için yeterlidir. Şimdi basamak matrisin ne olduğunu tanımlayalım. Eğer verilen bir matriste her satırın sıfırdan farklı ilk öğesi bir ve bu birin olduğu sütunda birden sonra gelen öğeler sıfır ise böyle bir matrise **basamak biçiminde (ya da eşolon biçimde)** bir matris denir. Aşağıda örnek olarak gösterilen matrisler basamak biçimdedir.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki örneklerden kolayca anlaşılacağı gibi öncelikle her satırın ilk öğesine bakıyoruz, eğer bu öğe bir ise birin altındaki öğenin sıfır olup olmadığını denetliyoruz. Şimdi verilen bir matrisin sistematik bir şekilde bu biçime nasıl getirileceğini görelim. Basamak biçimin tanımından da anlaşılacağı gibi öncelikle, eğer birinci satırın birinci öğesi sıfırdan farklı ise bu öğeyle birinci satır bölünür. Eğer birinci satırın birinci öğesi sıfır ise, birinci satır, birinci öğesi sıfırdan farklı olan herhangi bir satır ile değiştirilip yukarıdaki işlem uygulanır. Daha sonra birinci satır i ≥ 2 için i- yinci satırın ilk öğesi a nın toplamsal tersi - a ile çarpılıp i- yinci satır üzerine toplanıp, birin altında kalan öğeler sıfır yapılır. Bu sayede basamak biçim için birinci satırın gerçekleşmesi gereken koşul sağlanmış olur. Daha sonra aynı işlem ikinci ve daha sonraki satırlara uygulanır. Böylece verilen matrisin basamak biçimine getirmiş oluruz. Şimdi bir örnekle uygulamayı görelim:

ÖRNEK 26

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ***matrisini basamak biçimine getiriniz.***

ÇÖZÜM

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $a_{11} = 1$ olduğundan ikinci ve üçüncü satırın birinci öğelerini sıfır yapmalıyız. İkinci satırın ilk öğesi sıfırdır. Üçüncü satırın ilk öğesini sıfır yapmak için birinci satır 2 ile çarpılıp üçüncü satıra eklenir.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 + 1.2 & 1 + 3.2 & 1 + (-1).2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ İkinci satırın ikinci öğesi 1 olduğundan, üçüncü satırın ikinci öğesi sıfır yapılmalıdır. Bunun için ikinci satır -7 ile çarpılıp üçüncü satıra eklenir.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 7 + 1.(-7) & -1 + 4.(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Üçüncü satırın üçüncü öğesini bir yapmak için üçüncü satırın her öğesini üçüncü satırın üçüncü öğesi olan -29 sayısına böldük.

Apaçık olarak bu son elde ettiğimiz matris basamak biçimindedir.

ÖRNEK 27

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ***matrisini basamak biçimine getirelim.***

ÇÖZÜM

$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ İlk satırın ilk elemanı 1 olmadığı için bu satırın her elemanını 4 e bölelim.

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -2/4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ İkinci satırın birinci öğesini sıfır yapmak için birinci satırın - 3 katını ikinci satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -1 + \frac{1}{4}.(-3) & 0 + \left(-\frac{1}{2}\right).(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -7/4 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & -7/4 & 3/2 \end{pmatrix}$ İkinci satırın ikinci öğesini 1 yapmak için ikinci satırın her öğesini - 4/7 ile çarpalım.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

ÖRNEK 28

Son bir örnek daha $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ***matrisini basamak biçimine getirelim.***

ÇÖZÜM

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Birinci satırın birinci öğesi sıfır olduğu için bu satırın ilk öğesini sıfırdan farklı olan ikinci satır ile yer değiştirelim.

$\sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ İlk satırın ilk öğesini 1 yapmak için birinci satırı -2 ye bölelim.

$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

elde edilir.

Eğer bir A kare matrisi A nın satırlarına uygulanan ilkel satır işlemleri sonucunda birim matrise dönüştürülebiliyorsa, bir başka ifadeyle A matrisi birim matris I ya satır eşdeğer ise, A matrisinin tersi vardır. Bunun için, A ile I aşağıda olduğu gibi yan yana yazılır ve elde edilen

$(A : I)$

blok matrisine ilkel satır işlemleri uygulanırsa, A nın yerinde birim matris oluşturulduğunda, I nın yerinde oluşan matris A^{-1} olur. Kısaca $(A{:}I)$ blok matrisi bir $(I{:}B)$ matrisine dönüştürülebildiğinde $B = A^{-1}$ dir. Bu yolla A^{-1} matrisinin bulunmasına **Gauss Yöntemi** denir.

ÖRNEK 29

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ***matrisinin varsa, tersini bulunuz.***

ÇÖZÜM

Gauss Yöntemini uygulayalım:

$(A : I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$ Birinci satırı - 2 ile çarpıp ikinci satır üzerinde toplayalım.

$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -2 & 1 \end{array}\right)$ İkinci satırı $-\frac{1}{10}$ ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & -1/10 \end{array}\right)$$

İkinci satırı - 3 ile çarpıp birinci satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2/5 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1/5 & -1/10 \end{array}\right)$$

olur. A nın yerinde birim matris oluştuğu için A^{-1} vardır ve

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/10 \\ 1/5 & -1/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dir.

ÖRNEK 30

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ ***matrisinin varsa, tersini bulunuz.***

ÇÖZÜM

Gauss Yöntemini uygulayalım:

$$(A : I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Birinci satır ile ikinci satırı yer değiştirelim.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Birinci satırı 3 ile çarpıp ikinci satır üzerinde toplayalım; üçüncü satırı 1/5 ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

İkinci satırı 1/6 ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

İkinci satırı - 2 ile çarpıp birinci satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right)$$

Üçüncü satırı 1/3 ile çarpıp birinci satır üzerinde; - 5/3 ile çarpıp ikinci satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1/15 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 \end{array}\right) = (I : B)$$

olduğundan, A matrisinin tersi vardır ve $A^{-1} = B$ dir; yani

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1/15 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -10 & 0 & 2 \\ 5 & 15 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

olur.

ÖRNEK 31

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ ***matrisinin varsa, tersini bulunuz.***

ÇÖZÜM

Gauss Yöntemini kullanalım:

$$(A : I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Birinci satırın 3 katını ikinci satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Birinci blokun ikinci satırı bütünüyle sıfır olduğundan artık burada birim matris oluşturulamaz. O halde, A matrisinin tersi yoktur.

SIRA SİZDE 4

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor. Bu matrislerden hangileri birbirlerinin tersidir?

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ matrisi için $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ olduğunu doğrulayınız.

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ise, A matrisi nedir?

4. Satır işlemleri uygulayarak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini birim matrise dönüştürünüz. A^{-1} var mı, varsa hangi matris?

5. Aşağıdaki matrislerin terslerini Gauss yöntemiyle bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MATRİSLERLE GÖSTERİLİŞİ

AMAÇ 4

Verilen bir doğrusal denklem sisteminin matris gösterimiyle yazılışını ve çözümünün matris işlemleriyle nasıl yapılabileceğini örneklerle görmek.

n bilinmeyen ve m tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad &\quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi

$$AX = B$$

biçiminde bir matris eşitliği ile gösterilebilir. Bu yazılışta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisi,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

bilinmeyenler matrisi ve

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sabitler matrisi adını alır. Eğer doğrusal denklem sistemi homojen sistem ise, yani sabitler matrisi B sıfır matris ise, verilen doğrusal denklem sisteminin matris gösterimi

$$AX = O$$

şeklinde olur. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

ÖRNEK 32

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 \quad\quad + x_4 &= 5 \\ 2x_1 \quad\quad - x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin matris gösterimini yazınız.

ÇÖZÜM

Sistemin katsayılar matrisi, bilinmeyenler matrisi ve sabitler matrisi, sırasıyla,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

olmak üzere, verilen sistemin $AX = B$ biçimindeki matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

olur.

Doğrusal Denklem Sistemlerinin Matris Gösterimiyle Çözümlerinin Aranması

Verilen bir doğrusal denklem sisteminin matris gösterimi sistemin çözümünün aranmasında kolaylık sağlar. Şöyle ki; matris gösterimi $AX = B$ olan bir doğrusal denklem sistemi için, katsayılar matrisi A ile sabitler matrisi B yi yan yana yazıp elde ettiğimiz

$$(A : B)$$

blok matrisine verilen sistemin **genişletilmiş matrisi** denir. Bu genişletilmiş matris üzerine uygulanan her ilkel satır işlemiyle elde edilen yeni matris, başlangıçta verilen doğrusal denklem sistemine eşdeğer bir denklem sisteminin genişletilmiş matrisdir. Başka bir ifadeyle, $(A : B)$ genişletilmiş matris üzerine uygulanan ilkel satır işlemleri verilen sistemin çözümünü etkilemeyecektir. Çünkü $(A : B)$ üzerindeki ilkel satır işlemleri aslında verilen doğrusal denklem sistemi için satır işlemleridir. İşte bu kural sistemin çözümünün aranmasında uygulanan Gauss yok etme yönteminin genişletilmiş matris üzerinde uygulanabilirliğini sağlar. Örneklerle görelim:

ÖRNEK 33

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

$$(A : B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Genişletilmiş matrisi, basamak biçiminde bir doğrusal denklem sisteminin genişletilmiş matrisine dönüştürmek için ilkel satır işlemleri uygulayalım.

$$(A : B) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

İlk satırı ikinci satır üzerinde toplayalım; ilk satırı - 3 ile çarpıp üçüncü satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 4 & -18 \end{array}\right)$$

İkinci satırı $\frac{7}{3}$ ile çarpıp üçüncü satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{19}{3} \end{array}\right)$$

Üçüncü satırı $\frac{3}{19}$ ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Son yazılan blok matris basamak biçimindeki

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin genişletilmiş matrisidir. Bu sistemin üçüncü denkleminden $x_3 = -1$, ikinci denkleminden $x_2 = 2$, birinci denkleminden $x_1 = 1$ bulunur. Bu çözüm aynı zamanda verilen doğrusal denklem sisteminin bir çözümüdür.

ÖRNEK 34

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -6x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sisteminin çözümünü araştırınız.

ÇÖZÜM

Genişletilmiş matrisi yazıp, satır işlemleri uygulayalım:

$$(A : B) = \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

İlk satırı 3 ile çarpıp ikinci satır üzerinde toplayalım.

$$\sim \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Bu blok matris hiçbir doğrusal denklem sisteminin genişletilmiş matrisi olamaz. (Nedenini siz açıklayınız.) O halde, verilen doğrusal denklem sisteminin bir çözümü yoktur; bir başka ifade ile sistem tutarsızdır.

ÖRNEK 35

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= -7 \\ 3x_1 - x_3 &= 14 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{için} \quad A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

olduğundan, sistemin matris gösterilişinden bilinmeyenler matrisi X i çözebiliriz:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Böylece

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7+28 \\ -21-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

olur. O halde, sistemin çözümü $x_1 = 3$ ve $x_2 = -5$ dir.

Bu son örnek bize şunu göstermektedir: n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan bir doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisi A nın tersi A^{-1} varsa, bilinmeyenler matrisi

$$X = A^{-1}B$$

dir.

ÖRNEK 36

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM

Katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nın tersi A^{-1} Gauss yöntemiyle hesaplanırsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

bulunur. O halde,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 \\ 9-12 \\ -6+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ve verilen sistemin çözümü $x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 4$ olur.

SIRA SİZDE 5

1. Aşağıdaki doğrusal denklem sistemlerinin matris gösterimlerini yazınız.

a) $$\begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 2x_3 &= 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ -x_1 \qquad + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

d) $3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 3$

2. Aşağıda matris gösterimleri verilen doğrusal denklem sistemlerini yazınız.

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 56 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (7)$

3. Aşağıda verilen doğrusal denklem sistemlerinin matris gösterimlerini yazınız ve Gauss yöntemiyle çözümlerini bulunuz.

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -2 \\ x_1 + 5x_2 &= 56 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 9 \\ x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -8 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi veriliyor. Önce A^{-1} matrisini bulunuz sonra da denklem sistemini çözünüz.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Cebirin temel teoremini ilk kez kanıtlayan matematikçidir. Kuramsal ve uygulamalı matematik alanlarında bir çok konuya öncülük etmiştir.

"Matematik tüm bilimlerin kraliçesi, sayılar kuramı ise matematiğin kraliçesidir."
Carl Friedrich GAUSS

"Evrenin hakimi sayıdır."
Pisagorcular

"Daha sonraki devirlerdeki sistematik aritmetiğin oluşumu ve gelişmesinin olduğu gibi, yüzyılımızdaki (19.) matematiğin özgün bilimsel fikirler sahasında meydana getirdiği hemen hemen herşeyin Gauss ile bağlantısı vardır."
Lêopold KRONECKER

Kendimizi Sınayalım

1. $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$
$x_1 + 2x_3 = -1$
$4x_1 + 5x_2 = 0$
doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & \sqrt{2} & \pi \\ x & \frac{1}{5} & 0{,}3 & y \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin a_{24} elemanı aşağıdakilerden hangisidir?

a. x
b. π
c. y
d. 2
e. -1

3. Aşağıdakilerden hangisi üçüncü mertebeden bir birim matristir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin devriği (transpozesi) aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

5. Aşağıdakilerden hangisi bir köşegen matristir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

6. Aşağıdaki matrislerden hangisi basamak biçiminde bir matristir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -34 & 5 & 0 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ -7 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & 11 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \\ x & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

matrisleri için aralarında toplama işleminin yapılabildiği matrisler aşağıdakilerden hangisidir?

a. A ve B
b. A ve C
c. A ve D
d. B ve C
e. B ve D

8. 7. soruda verilen matrisler için aşağıdaki matris çarpımlarından hangisi tanımlıdır?

a. BA
b. BD
c. CA
d. DA
e. AD

9. $A = (1 \quad 4 \quad 7 \quad -3)$ satır matrisi ile $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ sütun matrisinin AB çarpımı hangi matristir?

a. (25) **b.** (23)

c. $(-2 \quad 0 \quad 28 \quad -3)$ **d.** $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 28 \\ -3 \end{pmatrix}$

e. O (sıfır matris)

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

matrislerinin AB çarpım matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 32 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 32 & 6 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ **e.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12. Genişletilmiş matrisi $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 7 & 0 & -1 \end{array}\right)$ olan doğrusal denklem sistemi aşağıdakilerden hangisidir?

a.
$x_1 - 3x_2 + 2x_4 - 5 = 0$
$4x_2 - x_3 + 3x_4 - 2 = 0$
$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 1 = 0$

b.
$x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 5 = 0$
$4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2 = 0$
$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 1 = 0$

c.
$x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5 = 0$
$4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2 = 0$
$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 1 = 0$

d.
$x_1 - 3x_2 + 2x_4 + 5x_5 = 0$
$4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$
$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_5 = 0$

e.
$x_1 + 2x_3 - 5 = 0$
$-3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2 = 0$
$-x_2 + 7x_3 + 1 = 0$
$2x_1 + 3x_2 = 0$

Biraz Daha Düşünelim

1. Bir üretici A, B, C, D, E ham maddelerini kullanarak üç çeşit mal üretmektedir. Her malın birim üretimi için gerekli hammadde miktarları kg olarak aşağıdaki tablo ile verilmektedir.

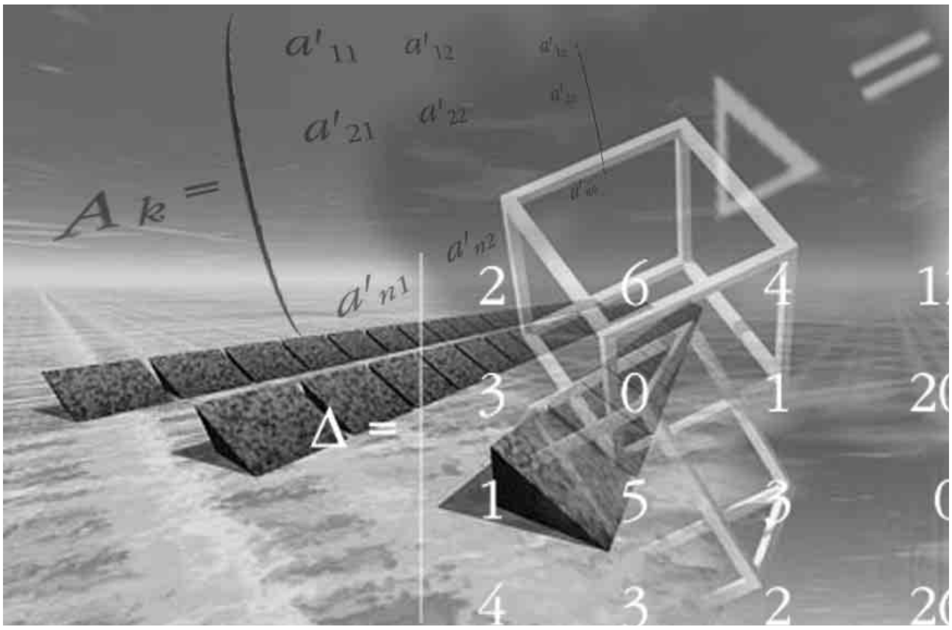
	Hammadde çeşitleri				
Ürün türleri	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
I	3	2	1	0	1
II	1	0	2	3	2
III	2	1	2	1	0

Eğer bu üretici 70 adet birinci tür, 80 adet ikinci tür ve 110 adet üçüncü türden mal üretimi siparişi alırsa, bu malların üretimi için gerekli ham madde miktarları nasıl bir matrisle temsil edilebilir? Ayrıca hammaddelerin fiyatları milyon TL/kg olarak, aşağıdaki tablo ile verilmiş ise, sipariş edilen mallar için gerekli toplam ham madde bedeli ne olur?

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Hammadde birim fiyatları	3	1	5	4	2

13

Determinantlar



Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- *determinant kavramını tanıyacak, determinantların özelliklerini öğrenecek ve bir kare matrisin determinantını hesaplayabileceksiniz,*
- *bir kare matrisin tersinin var olup olmadığına karar verebileceksiniz,*
- *tersi olan matrisin tersini, determinantı yardımıyla bulabileceksiniz,*
- *bilinmeyen sayısı, denklem sayısına eşit olan doğrusal denklem sistemlerinin çözümünü Cramer Yöntemiyle yapabileceksiniz.*

İçindekiler

- *Determinant ve Determinant Hesaplaması, Saruss Kuralı*
- *Kofaktörler ile Determinant Hesaplaması*
- *Ters Matrisin Kofaktörler ve Determinant Yardımıyla Bulunması*
- *Cramer Kuralı*

DİKKAT

- ***Kare matrisler ile determinantlar arasındaki ilişki iyi anlaşılmalıdır.***
- ***Determinantların özellikleri dikkatle incelenmelidir.***
- ***Determinant hesaplamalarında pratik kurallar iyi öğrenilmelidir.***
- ***Çözüm için bırakılan alıştırmalar kâğıt ve kalem kullanılarak çözülmelidir.***

Giriş

Elemanları sayılar olan bir kare matrise, o matrisin determinantı denilen bir sayı karşılık getirilir. Bu sayı, matrisin elemanları arasında belli kurallara göre yapılan hesaplamalar sonucu elde edilir. Bir kare matrisin determinantı olan sayının hesaplanmasına kısaca determinantın açılımı veya hesaplanması denir.

DETERMİNANT VE DETERMİNANT HESAPLANMASI

Determinant, matrisler cebirinin önemli bir kavramıdır. Kare matrisler için tanımlı olan bu kavram, matematiğin bir çok alanında, özellikle de doğrusal denklem sistemlerinin çözümlerinin araştırılmasında oldukça yararlı araç niteliğindedir.

Bir matrisin determinantı belli bir kurala göre onun elemanları türünden tanımlanan bir sayıdır. Bir A kare matrisi için A nın determinantı olan bu sayı

det (A) veya $|A|$

simgelerinden biriyle gösterilir. Bazen A matrisinin elemanları doğrudan iki çizgi içine alınarak da A nın determinantı gösterilebilir. Söz gelişi,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi için A nın determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

olarak gösterilir. Şimdi bir kare matris için bu sayının nasıl tanımlandığını önce boyutu 1 x 1, 2 x 2, 3 x 3 olan matrisler için, sonra da genel n x n-li bir matris için ifade edelim.

Boyutu 1 x 1 olan bir matrisin determinantı, matrisin tek elemanı olan o sayıdır. Örneğin, $A = (-3)$ matrisi için $|A| = -3$, $B = (7)$ matrisi için $|B| = 7$; genel olarak bir $M = (m_{11})_{1x1}$ matrisi için $|M| = m_{11}$ dir.

Boyutu 2 x 2 olan bir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrisi için A nın determinantı köşegenleri üzerindeki elemanlarının çarpımları farkıdır; yani

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$- \qquad\qquad +$$

formülüyle tanımlanır.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantını det $(A) = 1.8 - 5.7 = 8 - 35 = -27$ olarak bulunur.

Boyutu 3 x 3 olan bir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrisinin determinantı aşağıdaki şekilde hesaplanır:

(i) A nın ilk iki sütunu, üçüncü sütunun yanına, parantezin dışına yazılır;

(ii) Bu yazılıştan sonra aşağıda olduğu gibi A nın esas köşegenine paralel kö şegenler ve ikinci köşegenine paralel köşegenler çizilir;

(iii) Esas köşegenler üzerindeki öğelerin ayrı ayrı çarpımları toplamı ile ikinci köşegenler üzerindeki öğelerin ayrı ayrı çarpımları toplamı farkı olan sayı A nın determinantıdır.

3. mertebeden bir kare matrisin determinantını bu şekilde hesaplamaya **Sarrus Kuralı** denir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

formülüyle hesaplanır.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$ ***matrisinin determinantını hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

$$\begin{aligned} |A| &= [1.4.2 + (-2).(-1).3 + 3.2.5] - [3.4.3 + 1.(-1).5 + (-2).2.2] \\ &= (8 + 6 + 30) - (36 - 5 - 8) \\ &= 44 - 23 \\ &= 21 \end{aligned}$$

KOFAKTÖRLER İLE DETERMİNANT HESAPLANMASI

Boyutu 4×4 veya daha büyük olan matrislerin determinantlarının hesaplanması için geçerli olan pratik bir kural yoktur. Şimdi herhangi bir kare matrisin determinantının hesaplanması için geçerli olan genel bir kural vereceğiz. Bu kural, **kofaktörler yoluyla determinant hesaplanması** olarak bilinen yöntemdir. Önce bir matrisin bir elemanın kofaktörünü ve matrisin kofaktörler matrisini tanımlayalım:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisi verilsin. a_{ij} elemanının **minörü** diye, bu matrisin i -yinci satırı ve j -yinci sütunu atıldıktan sonra geriye kalan $(n-1)$ boyutlu matrisin determinantına denir. a_{ij} elemanının **kofaktörü** ise, a_{ij} nin minörü olan determinantın işaretli değerine denir; yani a_{ij} nin kofaktörünü a'_{ij} ile gösterecek olursak,

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

olur. A matrisinin **kofaktörler matrisi** de, A nın elemanlarının kofaktörlerinin oluşturduğu matrise denir; yani bu matrisi A_k ile gösterirsek

$$A_k = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

olur. Şimdi bir örnekle bu tanımları açıklığa kavuşturalım.

ÖRNEK 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ***matrisinde her elemanın kofaktörlerini hesaplayınız ve A nın kofaktörler matrisi A_k yı yazınız.***

ÇÖZÜM

$$a_{11} = 1 \quad \text{için} \quad a'_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \,.\, (3 + 8) = 11$$

Benzer olarak,

$$a_{12} = 0 \quad \text{için} \quad a'_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -1 \,.\, (6 - 20) = 14 \,,$$

$$a_{13} = -3 \quad \text{için} \quad a'_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (-4 - 5) = -9 \,,$$

$$a_{21} = 2 \quad \text{için} \quad a'_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \,.\, (0 - 6) = 6 \,,$$

$$a_{22} = 1 \quad \text{için} \quad a'_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (3 + 15) = 18 \,,$$

$a_{23} = 4$ için $a'_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2-0) = 2$,

$a_{31} = 5$ için $a'_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (0+3) = 3$,

$a_{32} = -2$ için $a'_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \,.\, (4+6) = -10$,

$a_{33} = 3$ için $a'_{22} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \,.\, (1-0) = 1$

bulunur. Böylece A nın kofaktörler matrisi

$$A_k = \begin{pmatrix} 11 & 14 & -9 \\ 6 & 18 & 2 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

Determinantın Kofaktörlere Göre Açılımı

n x n- li bir A matrisinin determinantını hesaplamak için A nın keyfi bir satırı veya bir sütunu seçilerek, o satırdaki veya sütundaki tüm elemanlar kofaktörleriyle çarpılıp toplandığında A matrisinin determinantı elde edilir. Formül olarak, i -yinci satır seçildiğinde

$$\det(A) = a_{i1}\, a'_{i1} + a_{i2}\, a'_{i2} + \ldots + a_{in}\, a'_{in}$$

toplamı ile ifade edilir. Bu yazılışa A nın determinantının i -yinci satırın **kofaktörlerine göre açılımı** denir. Eğer A nın j -yinci sütunu alınırsa, det (A) nın j -yinci sütunun kofaktörlerine göre açılımı

$$\det(A) = a_{1j}\, a'_{1j} + a_{2j}\, a'_{2j} + \ldots + a_{nj}\, a'_{nj}$$

olur.

A matrisinin determinantını kofaktörlere göre hesaplamak için herhangi bir satır veya sütun seçilebileceğine göre, en fazla sıfırı olan satır veya sütunun seçilmesinin hesaplamayı kolaylaştıracağı açıktır.

ÖRNEK 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ***matrisinin determinantını hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

A nın determinantını ikinci satırın kofaktörlerine göre açalım.

$a_{21} = -1$ için $a'_{21} = (-1)^{1+2} \,.\, 2 = -2$ ve $a_{22} = 3$ için $a'_{22} = (-1)^{2+2} \,.\, 1 = 1$

olduğundan

$\det(A) = a_{21}\, a'_{21} + a_{22}\, a'_{22} = (-1)(-2) + 3 \,.\, 1 = 2 + 3 = 5$

bulunur.

ÖRNEK 4

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$ ***matrisinin determinantını hesaplayınız.***

ÇÖZÜM

İkinci satırın kofaktörlerine göre açalım:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \, . \, (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 2 \, . \, (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4 \, . \, (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2(-31) - 4(3) = -74$$

ÖRNEK 5

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ ***determinantını hesaplayınız.***

(Δ bir grek harfi olup delta diye okunur.)

ÇÖZÜM

Verilen determinantı, en çok sıfır bulunan dördüncü satırın kofaktörlerine göre açalım. Sadece $a_{42} = 8 \neq 0$ olduğundan $\Delta = a_{42} \, . \, a'_{42}$ olacaktır. O halde,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 \, . \, (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \, . \, 1 \, . \, 3 \, . \, (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \, . \, 3 \, . \, (-1)(5 + 21)$$

$$= -24 \, . \, 26 = -624$$

Determinantların Özellikleri

Matrislerin bazı özelliklerinden determinantlar için önemli özellikler çıkartılabilir. Şimdi bu özelliklerin nasıl çıkartılabildiği konusu üzerinde durmadan, doğrudan determinantlar için kimi özellikler sıralayalım.

Determinant özellikleri:

I. Bir determinantın bir satırı veya bir sütunu tümüyle sıfır ise determinantın değeri sıfırdır.

II. Bir determinantın iki satır (veya iki sütunu) yer değiştirirse, determinantın işareti değişir.

III. Bir determinantın bir satırı veya bir sütununu sabit bir k sayısı ile çarpıldığında elde edilen determinantın değeri, başlangıçtaki determinantın değeri ile k sayısının çarpımına eşittir.

IV. Bir determinantın bir satırı (veya sütunu) başka bir satırın (veya sütunun) bir katı ise, determinantın değeri sıfırdır.

V. Bir determinantın bir satırı (veya sütunu) sabit bir sayı ile çarpılıp başka bir satır (veya sütun) üzerinde toplanırsa, determinantın değeri değişmez.

Bu özellikler bir determinantın değerini hesaplamak için oldukça yararlı olabilirler. Örneğin, III ve V. özellikler kullanılarak dördüncü mertebeden bir determinantın değerinin nasıl hesaplandığına ilişkin aşağıdaki örneği dikkatle inceleyiniz.

ÖRNEK 6

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 26 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & 12 \\ 3 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 26 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 20 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 26 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -9 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 2 \, . \, 1 \begin{vmatrix} -9 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \\ -9 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -9 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \, . \, (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \, . \, (-1)(54 - 4) = -2 \, . \, 50 = -100$$

bulunur.

[Yapılan hesaplamada şu sıra izlenmiştir: Önce birinci satırın ortak çarpanı 2 sayısı determinant dışına alınmıştır (III. özellik). Sonra, sırasıyla, birinci satır - 3, - 1, - 4 ile çarpılır ikinci satır, üçüncü satır, dördüncü satır üzerinde toplanmıştır (V. özellik). Sonra da üç sıfır bulunan birinci sütunun kofaktörlerine göre 3 x 3- lü bir determinanta indirgenmiştir. Üçlü determinantın birinci satırı - 1 ile çarpılıp üçüncü satır üzerinde toplanmıştır.]

ÖRNEK 7

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ -3 & 6 & -9 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Birinci satırı 3 ile çarpıp üçüncü satır üzerinde toplayalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

olur. Çünkü determinantın bir satırı tümüyle sıfırdır. Bu nedenle, bu satırdaki elemanların kofaktörlerine göre açılım sıfır olur.

Ters Matrisin Kofaktörler ve Determinant Yardımıyla Bulunması

Bir A matrisinin tersi A^{-1} in var olması için gerekli ve yeterli koşulun A nın birim matrise satır eşdeğer olması olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan birim matrisin determinantı sıfırdan farklı olduğundan, birim matrise satır eşdeğer olan her matrisin determinantı da sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla, bir A matrisinin tersi A^{-1} in var olması için gerekli ve yeterli koşul A nın determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

Verilen A kare matrisi için A^{-1} matrisini bulmanın birçok yolu vardır. Bunlardan bazılarını daha önce görmüştük. Şimdi de kofaktörler matrisi ve det (A) yı kullanarak A^{-1} matrisini hesaplamanın bir formülünü verelim.

Bir A kare matris için det $(A) \neq 0$ ise, A^{-1} matrisi vardır ve A_k^T , A nın kofaktörler matrisinin transpozesi olmak üzere,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A_k^T$$

dir.

ÖRNEK 8

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ***matrisinin tersi A^{-1} i bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-2).4 - 1.5 = -8 - 5 = -13 \neq 0$$

olduğundan A^{-1} vardır. Önce kofatörler matrisi A^k yı bulalım.

$$A_k = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_k^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$A^{-1} = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

ÖRNEK 9

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ***matrislerinin tersi A^{-1} i bulunuz.***

ÇÖZÜM

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{matrix} = -1 + 24 - 20 = 3 \neq 0$$

$-\quad -\quad -\qquad\qquad +\quad +\quad +$

olduğundan A^{-1} vardır. Tüm elemanların kofaktörlerini hesaplayalım.

$$a'_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-20) = -21$$

$$a'_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(3) = -3$$

$$a'_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1(12) = 12$$

$$a'_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1(-8) = 8$$

ÇÖZÜM

$$a'_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(1) = 1$$

$$a'_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1\,(4) = -4$$

$$a'_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\,(2) = 2$$

$$a'_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1\,(5-6) = 1$$

$$a'_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\,(-1) = -1$$

$$A_k = \begin{pmatrix} -21 & -3 & 12 \\ 8 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_k^T = \begin{pmatrix} -21 & 8 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 12 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -21 & 8 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 12 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümleri İçin Cramer Kuralı

Bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşit olan bir doğrusal denklem sistemi $AX = B$ biçiminde verilmiş olsun. Sistemin çözümü için şu durumlar söz konusudur:

$A = (a_{ij})_{nxn}$ katsayılar matrisi olmak üzere,

I. $\det(A) \neq 0$ ise, sistemin tek çözümü vardır. Bu çözüm

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\det(A)} \qquad j = 1, 2, \ldots n$$

biçimindedir. Burada Δ_j, A matrisinde j -yinci sütun yerine B matrisi yazılarak elde edilen matrisin determinantıdır. Bu şekilde $AX = B$ sisteminin çözümünün verilmesine **Cramer Yöntemi** denir.

II. $\det(A) = 0$ ve $\Delta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots n$ ise, $AX = B$ sisteminin sonsuz çoklukta çözümü vardır.

III. $\det(A) = 0$ ve en az bir j için $\Delta_j \neq 0$ ise, $AX = B$ sisteminin hiç bir çözümü yoktur.

ÖRNEK 10

$2x_1 - 3x_2 = 40$
$5x_1 + x_2 = 15$

doğrusal denklem sistemini Cramer Yöntemiyle çözünüz.

ÇÖZÜM

Sistemi $AX = B$ biçiminde yazarsak,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 15 \end{pmatrix}$$

olur. Böylece

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 15 = 17 \neq 0$$

olduğundan Cramer Yöntemine göre

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -3 \\ 15 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{40 + 45}{17} = \frac{85}{17} = 5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 40 \\ 5 & 15 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{30 - 200}{17} = \frac{-170}{17} = -10$$

bulunur.

ÖRNEK 11

$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + 3x_2 - x_3 = -9$
$2x_1 - x_2 = -4$

doğrusal denklem sistemini Cramer Yöntemiyle çözünüz.

ÇÖZÜM

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

olduğundan Cramer Yöntemiyle sistemin çözümü

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -9 & 3 & -1 \\ -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-14}{-2} = 7$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 12

Bir firma X, Y, Z ham maddelerini çeşitli oranlarda kullanarak A, B, C mallarını üretiyor. Bu malların her birinin birim üretimi için gerekli ham madde miktarları (birim olarak) aşağıdaki tablo ile verilmektedir.

Ham madde	***A ürünü***	***B ürünü***	***C ürünü***
X	***4***	***0***	***9***
Y	***6***	***5***	***1***
Z	***0***	***2***	***8***

Eğer 112 birim X ham maddesi, 93 birim Y ham maddesi ve 74 birim Z ham maddesi bütünüyle kullanılırsa, elde edilecek ürün sayıları ne olur?

ÇÖZÜM

x_1 = elde edilecek A ürünü sayısı
x_2 = " " B " "
x_3 = " " C " "

olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} 4x_1 \quad\quad\; + 9x_3 &= 112 \\ 6x_1 + 5x_2 + \; x_3 &= 93 \\ 2x_2 + 8x_3 &= 74 \end{aligned}$$

doğrusal denklem sistemi elde edilir. Şimdi bu sistemi Cramer Yöntemiyle çözelim. Katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 9 \\ 6 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 160 + 108 - 8 = 260$$

olduğuna göre

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 112 & 0 & 9 \\ 93 & 5 & 1 \\ 74 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2600}{260} = 10$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 112 & 9 \\ 6 & 93 & 1 \\ 0 & 74 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1300}{260} = 5$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 112 \\ 6 & 5 & 93 \\ 0 & 2 & 74 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2080}{260} = 8$$

bulunur.

SIRA SİZDE 1

Aşağıda verilen matrislerin determinantlarını hesaplayınız.

1. $A = (-3)$,

2. $B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$,

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 9 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

Aşağıda verilen determinantları hesaplayınız.

6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$,

7. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$,

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin kofaktörler matrisi A_k yı bulunuz.

9. Sekizinci örnekteki A matrisinin tersini bulunuz.

10.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 4x_1 + x_2 \qquad &= -3 \\ -9x_1 + \qquad x_3 &= 7 \end{aligned}$$
denklem sisteminin çözümünü Cramer Yöntemiyle bulunuz.

11. $AX = B$ biçimindeki bir doğrusal denklem sisteminin çözümü, matris çarpımı biçiminde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ise, bu doğrusal denklem sisteminin açık yazılışı nedir? Sistemin çözümünü bulunuz.

12. A ve B olarak adlandırılan iki tür malın üretildiği bir atölyede her bir malın bir adet üretimi için gerekli para ve iş saati aşağıdaki tablo ile verilmektedir.

	A	**B**
Para (milyon TL)	**7**	**5**
Zaman (saat)	**4**	**3**

Eğer bu atölyede 11.3 milyar TL ve 6600 iş saati tümüyle bu malların üretimi için harcanırsa, her bir maldan kaç adet üretilmiş olur?

Kendimizi Sınayalım

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bularak işaretleyiniz.

1. $A=\begin{pmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

matrisinin kofaktörler matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 8 & 16 & 8 \\ -18 & 2 & -22 \\ 17 & -76 & -29 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 8 & -18 & 17 \\ 16 & 2 & -22 \\ 8 & -76 & -29 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 17 & -18 & -8 \\ -76 & 2 & 16 \\ -29 & -22 & 8 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -29 & -76 & 17 \\ -22 & 2 & -18 \\ 8 & 16 & -8 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} -8 & 16 & 8 \\ 5 & -28 & -17 \\ 17 & -76 & -29 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

matrisinin determinantı aşağıdaki sayılardan hangisidir?

a. -39
b. -23
c. 0
d. 19
e. 23

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. Aşağıdaki matrislerden hagisinin tersi yoktur?

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

determinantı aşağıdakilerden hangisidir?

a. $(x - y)\,(x - z)\,(z - y)$
b. 0
c. $(x + y)\,(x + z)\,(z + y)$
d. $x^2\,y^2\,z^2$
e. xyz

Biraz Daha Düşünelim

1. Aşağıda genişletilmiş matrisleri verilen denklem sistemlerinden çözümü olanların çözümlerini bulunuz.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

2. Aşağıdaki matrislerden hangisinin tersi vardır? Ters matrisi bulunuz.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 12 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

matrisinin determinantını hesaplayınız.

4. Bir deri çanta üreticisinin imalâthanesinde, evrak çantası, el çantası ve cüzdan üretilmektedir. Her bir ürünün birim üretimi için gerekli olan zaman iş saati olarak aşağıdaki tablo ile verilmektedir.

	Kesme	Dikme	Cilalama
Evrak çantası	2	2	1
El çantası	1	1	1
Cüzdan	0,5	1	1

Bu imalâthane bir günde 125 iş saati kesme, 150 iş saati dikme ve 120 iş saati cilâlama kapasitesine sahip ise, tam kapasite ile kullanıldığında bir günde üretilen ürün sayıları ne olur?

14

Doğrusal Programlama

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra:

- *Uygulamada çok kullanılan bir eniyileme tekniği olan doğrusal programlama yönteminin ne olduğunu,*
- *İşletme yönetiminde çok karşılaşılan maliyet ve kâr problemlerinin doğrusal denklemlerle nasıl ifade edileceğini*
- *Basit grafik yöntemle doğrusal programlama modellerinin nasıl çözülebileceğini göreceksiniz.*

İçindekiler

- *Doğrusal Programlamanın Tanımı*
- *Bir Maliyet veya Kâr Probleminin Doğrusal Programlama Yöntemi ile Çözülmesi İçin Gerekli Olan Koşullar*
- *Verilen Problemin Denklemlerle Belirlenen Bir Model Haline Getirilmesi*
- *Doğrusal Programlama Modelinin Basit Grafik Yöntemle Çözülmesi*

DİKKAT

- ***Doğrusal programlama ünitesine başlamadan önce doğrusal denklem sistemleri ve matris ile ilgili üniteleri yeniden gözden geçiriniz.***
- ***Verilen problemlerde nelerin değişken olarak alınacağını belirleyiniz.***
- ***Belirlenen değişkenler arasındaki ilişkileri kurarken nelerin değişkenlerin katsayıları olacağını belirleyiniz.***
- ***Değişkenler arasındaki ilişkilerin eşitlik veya eşitsizlik şeklinde olması halinde çözüm yöntemi değişmektedir. Bu bakımdan ilişkinin şeklinin ne olacağını iyice belirleyiniz.***

Giriş

Bu günün işletme yöneticileri karar verirken iş deneyimlerinin ve kuramsal bilgilerini yanısıra matematiksel yöntemlerden de yararlanmaktadırlar.

Bilgisayar teknolojisindeki gelişmeler, kurulan matematiksel modellerin çözümünü kolaylaştırmaktadır. Bu bakımdan da sözkonusu yöntemler çok daha fazla kullanılmaktadır. Örneğin, bir pamuklu dokuma fabrikasında, pamuktan dokumaya kadar olan süreçte bütün üretim noktalarında devamlılığı sağlamak isteyen bir yönetici bunu ancak matematiksel yöntemlerle sağlayabilir.

Doğrusal programlama da yukarıda belirttiğimiz konularda karar vermeyi kolaylaştıran matematiksel yöntemlerden biridir. Bu ünitede doğrusal programlama yöntemi tanıtılacak ve basit çözüm yöntemleri tanıtılacak ve basit çözüm yöntemleri verilecektir. Burada önemli olan verilen problemin bileşenlerine ayrılması ve modelin kurulmasıdır. Model kurulduktan sonra çözümü bilgisayarda kolayca yapılmaktadır.

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA NEDİR?

AMAÇ 1

Uygulamada çok kullanılan bir eniyileme olan doğrusal programlama yönteminin ne olduğunu öğrenebilmektir.

Bir matematikçiye doğrusal programlamanın ne olduğu sorulursa alınacak yanıt "Doğrusal bazı sınırlandırmalar altında doğrusal bir fonksiyonu maksimum veya minimum yapan değerleri bulma yöntemidir." olacaktır. Aynı soru bir iktisatçıya sorulursa "Sınırlı olanakların optimal dağılımında kullanılan bir tekniktir." olacaktır. İşletme biliminde doğrusal programlama nedir diye sorulursa "Önceden belirlenmiş bir amacın, örneğin minimum masraf veya maksimum kârı, gerçekleştirmeye yarayan bir tekniktir." olacaktır.

BİR PROBLEMİN DOĞRUSAL PROGRAMLAMAYLA ÇÖZÜLEBİLMESİ İÇİN GEREKLİ KOŞULLAR

Değişkenlerin hangi özellikleri sağlaması halinde doğrusal programlama yöntemi uygulanabilir?

Bir problemin doğrusal programlama yöntemiyle çözülebilmesi için, problemde aşağıdaki koşulların bulunması gerekir:

- Problemi meydana getiren unsurların rakamla ifade edilebilmesi gerekir. Bu özellik rakamla ifade edilemeyen unsurları içeren problemler bu yöntemle çözülemeyeceğini göstermektedir. Örneğin, fayda optimizasyonu gibi.
- Değişkenler arasında alternatif seçim olabilmelidir. Maksimum veya minimum yapılacak fonksiyondaki değişkenler arasında bir seçim yapılabilmelidir. Örneğin, sadece bir makinaya veya insan emeğine ihtiyaç duyan bir üretim probleminde seçim sözkonusu olmadığı için böyle bir problem, doğrusal programlama yöntemiyle çözülemez.
- Problemde öngörülen değişkenler arasında kurulan bağıntılar doğrusal olmalıdır.

Doğrusal denilince, problemde değişkenler arasında bulunan eşitlik ve eşitsizliklerin birinci dereceden ilişkileri olmalıdır. Bu durum bir üretim problemi üzerinde açıklanacaktır.

ÖRNEK 1

Bir işletmede bir A malının bir biriminin üretilmesi için 4 dakikalık bir zamana gerek varsa, bu maldan 100 birim üretmek için 400 dakika zamana ihtiyaç olacaktır. Burada zaman ile üretilen miktar arasındaki ilişki doğrusaldır.

$$4A = 400$$

Bu işletmede A malı ile birlikte bir B malının da üretildiğini varsayalım. B malının üretiminin bir birimi için 3 dakikalık zamana gerek olduğunu ve bu iki malın üretimi için 400 dakikalık zamana ihtiyaç varsa aradaki ilişki,

$$4A + 3B = 400$$

olacaktır.

Yukarıdaki örnekten herhangi bir malın bir biriminin üretimi için kullanılacak zaman diğer birimlerin üretiminden az veya çok ise buradaki ilişki doğrusal bir ilişki olmayacaktır.

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA YÖNTEMİYLE ÇÖZÜLECEK PROBLEMİN BİR MODEL HALİNE GETİRİLMESİ

Verilen bir problemin doğrusal programlama tekniğiyle çözülebilmesi için aşağıdaki yol izlenir.

Problemin Tanıtılması

İşletme ve iktisat problemlerinde standartlar (zaman, hammadde, kâr ve birim maliyetler) tanıtılır. Üretimin yapılabilmesi için üretim teknikleri ve bu tekniklerin her birinin uygulanmasıyla üretilebilecek mamullerin birim maliyetleri (veya her birimin satışından elde edilecek kâr) hesaplanır.

Matematiksel Modelin Kurulması

Bu aşamada aşağıdaki işlemler uygulanır:

Değişkenlerin Belirlenmesi

İşletme problemlerine uygulanan doğrusal programlama modellerinde, genellikle, üretim hacmi, makinaların çalışma süreleri, üretimde kullanılan hammadde miktarları ve üretim için yapılan giderler değişken olarak alınır.

Modelin Genel Olarak Gösterilmesi

Genel olarak modele girecek değişkenler $x_1, x_2, \dots, x_n$ ile, bu değişkenler arasındaki bağlantıları kuran parametreler ise $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots a_{mn}$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, verilmiş sabit değerler (makina kapasiteleri, eldeki hammadde miktarları ve iş gücü gibi) $b_1, b_2, \dots, b_m$ ile gösterilir. Değişkenler arasındaki ilişkiler genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \; a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \le b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \; a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n \le b_2\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \; a_{mj}x_j + \dots \; a_{mn}x_n \le b_m
\end{aligned}$$

Buradaki değişkenler pozitif ve sıfır değeri alırlar. Ancak, bu değişkenler negatif değer alamazlar.

Ayrıca, modelde amaç fonksiyonu denilen, modeldeki bütün değişkenleri içinde bulunduran, değişkenlerin katsayıları birim kârlar veya maliyetler olan, maksimum veya minimum yapılması istenen bir fonksiyon da vardır.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots \; c_nx_n$$

Bu fonksiyona, amaç fonksiyonu denir.

Aşağıdaki örnekte verilen veriler yardımıyla modelin nasıl kurulacağı açıklanacaktır.

ÖRNEK 2

Bir işletme A ve B olmak üzere iki çeşit mal üretmektedir. A ve B mallarının üretimi için izlenebilir iki üretim tekniği vardır. Aşağıdaki tabloda sözkonusu iki malın üretim teknikleri ile birer birimlerinin satışından elde edilebilecek kârlar gösterilmiştir.

	A Malı		B Malı		Kapasite
	I. Teknik	II. Teknik	I. Teknik	II. Teknik	
İşgücü (saat)	40	40	40	40	600
Hammadde X	8	6	4	3	140
Hammadde Y	4	5	11	16	120
Birim kâr	6 TL	5,5 TL	9 TL	8 TL	
Değişkenler	x_1	x_2	x_3	x_4	

Yukarıdaki verilerden hangi maldan hangi üretim tekniğiyle ne kadar mal üretelim ki bu firmanın kârı maksimum olsun?

ÇÖZÜM

Verilen problemdeki değişkenler arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
40x_1 + 40x_2 + 40x_3 + 40x_4 &\le 600 \\
8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\le 140 \\
4x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 16x_4 &\le 120
\end{aligned}
$$

Ayrıca, bütün değişkenleri içinde bulunduran ve katsayıları bu problemde birim kârlar olan amaç fonksiyonu da yazılmalıdır.

$$Z = 6x_1 + 5{,}5x_2 + 9x_3 + 8x_4$$

Yukarıda verilen problemde değişkenler arasındaki ilişkilerde kurulan eşitsizlik sisteminde eşitsizlikler belirli bir değerden küçük eşitsizlikler olarak verilmiştir. Bazı işletme problemlerinde,

$$
\begin{aligned}
a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\
a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &\ge b_2
\end{aligned}
$$

gibi eşitlik ve eşitsizlikler de bulunabilir. Aşağıda bu gibi ilişkileri de içeren bir problem verilecektir.

Bazı problemlerde değişkenler arasındaki ilişkiler eşitlik veya büyük eşitsizlik şeklinde olabilir.

ÖRNEK 3

Bir işletme A malından 200 birim ve B malından 300 birim üretmek istemektedir. Sözkonusu iki malın üretimi iki üretim departmanından geçerek yapılabilmektedir.

Birinci departmanda A ve B malları bir makina kullanılarak üretilmektedir. Bu makinada bir birim A malı 2 saatte, bir birim B malı ise 4 saatte üretilmektedir. Sözkonusu makinanın bu malların üretiminde kullanılacak 1700 saat zamanı vardır.

İkinci departmanda A ve B mallarının üretimi için iki makina kullanılmaktadır. Birinci makinanın kullanılması halinde A malının bir biriminin üretimi 4 saat, B malının bir biriminin üretimi 7 saat almaktadır. Bu departmandaki ikinci makinanın kullanılması halinde bir birim A malının üretiminin 10 saat, bir birim B malının üretiminin 12 saat aldığı bilinmektedir. Birinci makinanın bu malların üretiminde kullanılabilecek 1000 saati, ikinci makinanın da 3000 saati vardır. Ayrıca birinci makinanın 500 saat fazla çalışma olarak kullanılabilir zamanı vardır.

Birinci departmanda kullanılacak makinanın bir saatlik maliyeti 3000 TL dır. İkinci departmanda birinci makinanın bir saatlik maliyeti 3000 TL, ikinci makinanın ise 2000 TL sıdır.

Eğer makinalar fazla mesaili çalıştırılırsa saat başına 450 TL lık artış olmaktadır. Fazla mesai uygulaması ikinci departmandaki birinci makinada uygulanmaktadır.
Bütün giderlerin minimum olacağı üretim miktarlarının bulunması istenmektedir.

ÇÖZÜM

Önce bu problemde kullanılacak değişkenler tanımlanacaktır:

- x_1 : Birinci departmandan ve ikinci departmanda normal zamanda birinci makina kullanılarak üretilecek A malı miktarı
- x_2 : Birinci departmandan ve ikinci departmandaki birinci makina kullanılarak fazla mesai kullanılarak üretilecek A malı miktarı
- x_3 : Birinci departmandan ve ikinci departmandaki ikinci makinada üretilecek A malı miktarı
- x_4 : Birinci departmandan ve ikinci departmanda birinci makinada normal zamanda üretilen B malı miktarı
- x_5 : Birinci departmandan ve ikinci departmanda birinci makinada fazla mesai yapılarak üretilecek B malı miktarı
- x_6 : Birinci departmandan ve ikinci departmandaki ikinci makinadan geçerek üretilecek B malı miktarı

Bu değişkenler için birim maliyetler,

x_1	için	18000	TL
x_2	için	19800	TL
x_3	için	26000	TL
x_4	için	33000	TL
x_5	için	36150	TL
x_6	için	36000	TL

olarak bulunur.
Yukarıda belirlenen değişkenler arasındaki ilişkiler aşağıda gösterilmiştir.

Birinci departman	$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 \leq 1700$
İkinci departman birinci makina (normal zaman)	$4x_1 + 7x_4 \leq 1000$
İkinci departman birinci makina (fazla mesai)	$4x_2 + 7x_5 \leq 500$
İkinci departman ikinci makina	$10x_3 + 12x_6 \leq 3000$
Planlanan A mamulü miktarı	$x_1 + x_2 + x_3 = 200$
Planlanan B mamulü miktarı	$x_4 + x_5 + x_6 = 300$

Amaç Fonksiyonu

$$Z = 18000\ x_1 + 19800\ x_2 + 26000\ x_3 + 33000\ x_4 + 36150\ x_5 + 36000\ x_6$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_5\ ,\ x_6 \geq 0$$

Doğrusal Programlama Modelinin Çözüm Yöntemleri

Doğrusal programlama modelleri üç yöntemle çözülebilmektedir. Bu yöntemler:

a) Grafik Yöntemi
b) Simpleks Yöntemi
c) Matris Yöntemi

olmaktadır.

DİKKAT

Bu ünitede doğrusal programlama modellerinin grafik yöntemle nasıl çözülebileceğini örneklerle açıklayacağız.

ÖRNEK 4

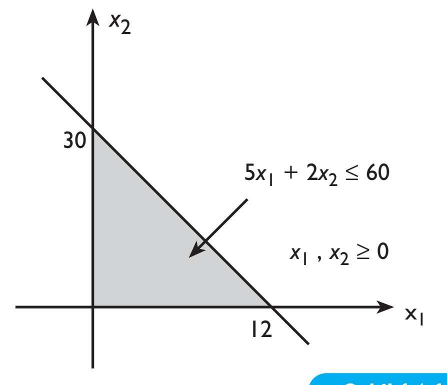
Bir firma A ve B olmak üzere iki çeşit mal üretmektedir. Bu iki çeşit mal bir üretim departmanındaki bir makinadan geçerek üretilmektedir. A malının bir biriminin üretimi için 5 saat, B malının bir birimi için 2 saat zaman harcanmaktadır. Sözkonusu departmandaki makinanın A ve B mallarının üretiminde kullanılabilecek 60 saat zamanı vardır. Değişkenler ile aralarındaki ilişkileri belirleyin.

ÇÖZÜM

Bu problemde A malının üretim miktarı x_1 , B malının üretim miktarı x_2 ile gösterilirse, x_1 ve x_2 değişkenleri arasındaki ilişki,

$$5x_1 + 2x_2 \leq 60$$

olacaktır. Bulunan bu ilişkinin grafiği ve çözüm alanı aşağıda Şekil 14.1'de gösterilmiştir.



Şekil 14.1

Yukarıda vermiş olduğumuz örnekte A ve B mallarının üretimi için, ikinci bir departmandaki makinalarında kullanılması gerektiğini varsayalım. Bu departmanda bir birim A malı üretmek için 5 saat, bir birim B malı üretmek için ise 4 saat zamana ihtiyaç vardır. İkinci departmanda bu üretim için kullanılabilecek 80 saat zaman olduğunu varsayarsak, x_1 , x_2 değişkenleri arasında ikinci departmandaki kısıtlamayı gösteren ilişki,

$$5x_1 + 4x_2 \leq 80$$

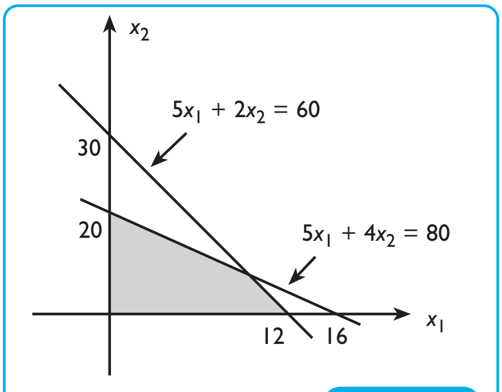
olacaktır.

Bu problemle ilgili kısıtlayıcılar topluca,

$$5x_1 + 2x_2 \leq 60$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 80$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

olarak gösterilir. Bu eşitsizlik sistemi ile, eşitsizliklerin çözüm alanlarının kesişimi aşağıda Şekil 14.2 de şekilde gösterilmiştir.

Değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren doğrusal denklemlerin grafikleri çizildiğinde, şekilde görülen uygun çözüm alanı belirlenir.



Şekil 14.2

Şekilde görülen taralı alan yukarıdaki bütün eşitsizliklerin ortak çözüm alanıdır. Bu alana **uygun çözüm alanı** denir.

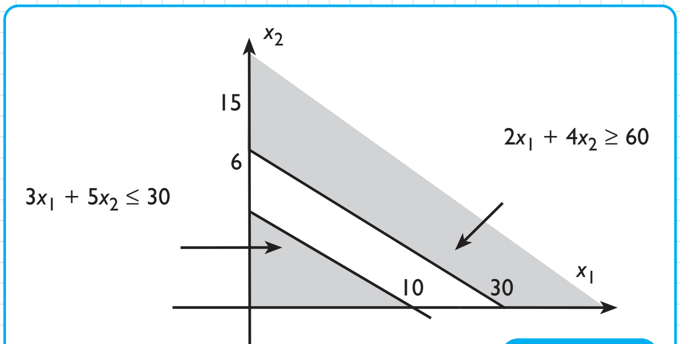
Bazı problemlerde değişkenler arasında kurulan ilişkinin belirli bir değerden büyük veya eşit şeklinde bir eşitsizlik biçiminde olabileceği önceki kesimde açıklanmıştı. Bu şekilde bir eşitsizliğin bulunduğu durumda çözümün ne şekilde yapılacağı aşağıda verilen bir örnek üzerinde açıklanacaktır.

ÖRNEK 5

$3x_1 + 5x_2 \leq 30$
$2x_1 + 4x_2 \geq 60$
$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$

sistemini grafik üzerinde gösterip, uygun çözüm alanını belirleyiniz.

ÇÖZÜM



Şekil 14.3

Eğer, değişkenler arasındaki ilişkileri gösteren denklemlerin gösterdiği doğrular kesişmiyorsa, uygun çözüm alanı yoktur.

Şekilde sistemdeki iki eşitsizliğin çözüm alanları taralı olarak gösterilmiştir. Görüldüğü gibi sistemdeki eşitsizliklerin ikisini de sağlayan ortak bir çözüm alanı yoktur.

Önceki kesimlerde doğrusal programlama modelinde verilen kısıtlayıcılar altında maksimum veya minimum yapılacak bir fonksiyona **amaç fonksiyonu** denildiğini biliyorsunuz.

Aşağıdaki problemlerde kısıtlayıcılarla birlikte amaç fonksiyonunun da verildiği bir doğrusal programlama modelinin grafik yöntemle nasıl çözüleceği açıklanacaktır.

Doğrusal Programlama Modelinin Grafik Çözümü

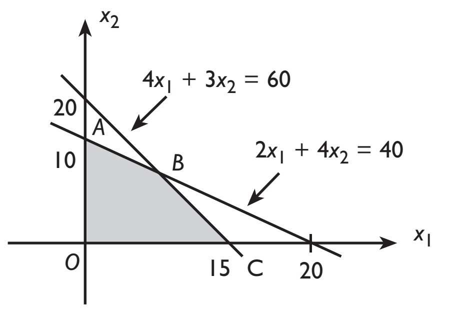
Grafik yöntemle doğrusal programlama modelinin çözümünde önce verilen eşitsizliklerin koordinat sisteminde grafikleri çizilerek uygun çözüm alanı bulunur. Optimum çözümün bulunması için uygun çözüm alanını gösteren çokgenin, bir konveks çokgen olması gerekir. Bulunan uygun çözüm alanını gösteren çokgenin köşelerinin koordinatları bu köşelerden geçen doğruların denklemlerinin ortak çözümü ile bulunur. Bulunan köşelerin koordinatları amaç fonksiyonunda yerlerine koyulur. Problem minimum yapma problemi ise amaç fonksiyonunun alacağı en küçük değerin, maksimum yapma problemi ise amaç fonksiyonunun alacağı en büyük değerin bulunduğu noktanın koordinatları optimum çözümü verecektir.

Optimum çözüm bulunabilmesi için çözüm alanını gösteren sınırlı bölgenin, konveks çokgen şeklinde olması gerekir.

ÖRNEK 6

$2x_1 + 4x_2 \leq 40$
$4x_1 + 3x_2 \leq 60$
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
Amaç fonksiyonu $Z_{mak} = 20x_1 + 15x_2$

ÇÖZÜM



Şekil 14.4

Şekil 14.4 de görüldüğü gibi uygun çözüm alanı $AOBC$ dörtgenidir.
Dörtgenin B köşesinin koordinatları,

$$2x_1 + 4x_2 = 40$$
$$4x_1 + 3x_2 = 60$$

denklem sisteminin ortak çözümünden $(12 , 4) = (x_1 , x_2)$ bulunur.
Dörtgenin köşelerinin koordinatlarıyla, amaç fonksiyonunun bu noktalarda aldığı değerler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Nokta	(x_1 , x_2)	$Z = 20x_1 + 15x_2$
A	$(0 , 10)$	$Z = 20.0 + 15.10 = 150$
B	$(12 , 4)$	$Z = 20.12 + 15.4 = 300$
C	$(15 , 0)$	$Z = 20.15 + 15.0 = 300$

Tabloda görüldüğü gibi, amaç fonksiyonu en büyük değerini B noktasında almaktadır. O halde $x_1 = 12$, $x_2 = 4$ olduğunda amaç fonksiyonunun maksimum olma koşulu sağlanmaktadır.

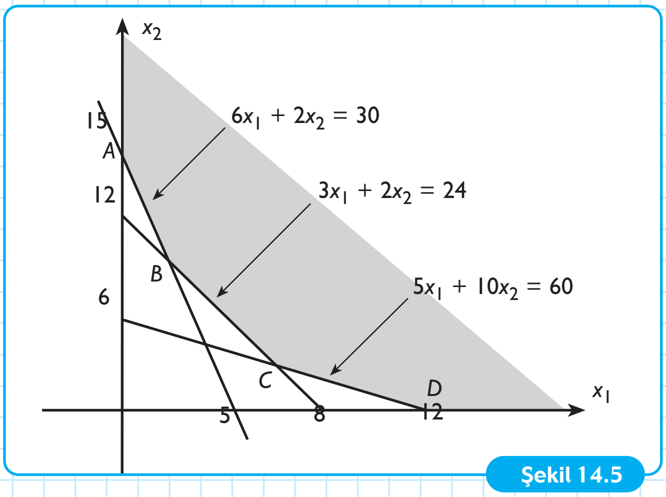
ÖRNEK 7

$6x_1 + 2x_2 \geq 30$
$3x_1 + 2x_2 \geq 24$
$5x_1 + 10x_2 \geq 60$
$x_1 \,,\, x_2 \geq 0$
$Z_{min} = 30x_1 + 50x_2$

Yukarıda verilen doğrusal programlama probleminin uygun çözüm alanını belirleyerek, optimum çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen kısıtlayıcılar ile uygun çözüm alanı, aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Şekil 14.5

Şekil 14.5 de görüldüğü gibi optimum çözüm A, B, C ve D noktalarının birisinde olacaktır.
B noktasının koordinatları,

$6x_1 + 2x_2 = 30$
$3x_1 + 2x_2 = 24$

denklemlerinin ortak çözümüyle (2, 9) olarak bulunur. C noktasının koordinatları,

$5x_1 + 10x_2 = 60$
$3x_1 + \ \ 2x_2 = 24$

denklemlerinin ortak çözümüyle (6 , 3) olarak bulunur.
Aşağıdaki tabloda A, B, C, D noktalarında amaç fonksiyonunun alacağı değerler verilmiştir.

Nokta	$(x_1 \,,\, x_2)$	$Z = 30x_1 + 50x_2$
A	(0 , 15)	$Z = 30.0 + 15.50 = 750$
B	(2 , 9)	$Z = 30.2 + 9.50 = 510$
C	(6 , 3)	$Z = 30.6 + 3.50 = 330$
D	(12 , 0)	$Z = 30.12 + 0.50 = 360$

Tabloda görüldüğü gibi, amaç fonksiyonu en küçük değerini C noktasında almakta ve dolayısıyla optimum çözüm $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ tür.

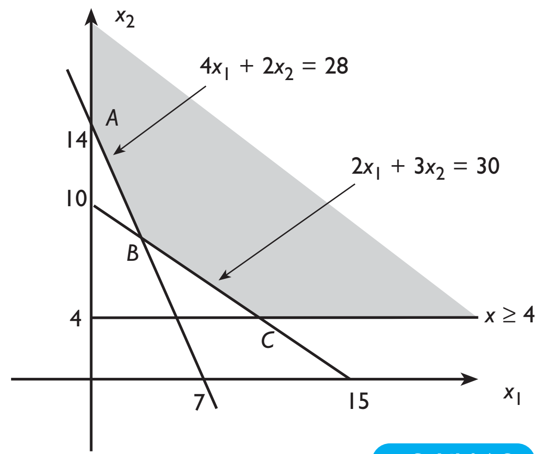
ÖRNEK 8

$4x_1 + 2x_2 \geq 28$
$2x_1 + 3x_2 \geq 30$
$x_2 \geq 4$
$x_1 , x_2 \geq 0$
$Z_{min} = 4x_1 + 5x_2$

doğrusal programlama modelinin uygun çözüm alanını bularak, optimum çözümü bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen kısıtlayıcıların grafikleri ile uygun çözüm alanı, taralı olarak aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 14.6

Şekil 14.6 da görüldüğü gibi amaç fonksiyonunu minimum yapacak değerler A, B, C noktalarından birinin koordinatları olacaktır. B noktasının koordinatları,

$4x_1 + 2x_2 = 28$
$2x_1 + 3x_2 = 30$

denklemlerinin ortak çözümüyle $(3 , 8)$ olarak bulunur. C noktasının koordinatları,

$2x_1 + 3x_2 = 30$
$x_2 = 4$

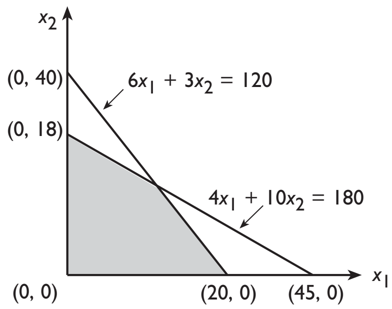
denklemlerinin ortak çözümüyle $(9 , 4)$ olarak bulunur.
A, B, C noktalarında amaç fonksiyonunun aldığı değerler, aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Nokta	(x_1 , x_2)	$Z = 4x_1 + 5x_2$
A	$(0 , 14)$	$Z = 4.0 + 5.14 = 70$
B	$(3 , 8)$	$Z = 4.3 + 5.8 = 52$
C	$(9 , 4)$	$Z = 9.4 + 4.5 = 56$

O halde amaç fonksiyonunu minimum yapan çözüm $x_1 = 3$, $x_2 = 8$ olmaktadır.

Kendimizi Sınayalım

1. Bir üretici her biri iki ayrı tezgahta işlenmesi gereken bisikletler ve motorsiklet gövdeleri üretmektedir. Birinci tezgahın kapasitesi 120, ikinci tezgahın kapasitesi 180 saattir. Bisiklet üretimi 6 saat 1. tezgahta, 4 saat 2. tezgahta işlenerek, motorsiklet gövdesi üretimi 3 saat 1. tezgahta, 10 saat 2. tezgahta işlenerek gerçekleştirilmektedir. Bisikletten elde edilen kâr 45 birim, motor gövdesinden elde edilen kâr 55 birim ise,işletmenin kârının maksimum değeri nedir?



Model:

$Z_{max} = 45x_1 + 55x_2$

Kısıtlar:

$6x_1 + 3x_2 \leq 120$

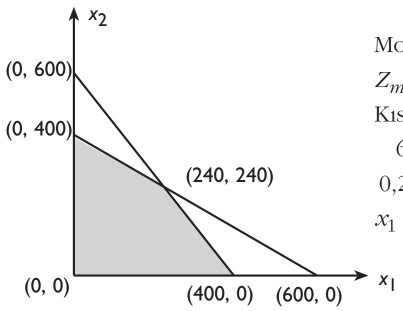
$4x_1 + 10x_2 \leq 180$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Şekil 14.7

a. 900
b. 990
c. 1306,25
d. 1650
e. 2700

2. Bir üretici elektrikli el testereleri ve matkaplar üretmektedir. Testerenin maliyeti 6 birim, matkabın ise 4 birimdir. Taşıma maliyeti testere için 0,20 birim, matkap için 0,30 birim. dir. Testere 9 birimden matkap ise 5,5 birimden satılabilmektedir. İşletmenin üretim maliyetleri için ayırdığı bütçe 2400 taşıma maliyetleri için ayırdığı bütçe 120 birim olduğuna göre, işletme kârını maksimum yapmak için her bir üründen ne kadar üretmelidir?



Model:

$Z_{max} = 9x_1 + 5{,}5x_2$

Kısıtlar:

$6x_1 + 4x_2 \leq 2400$

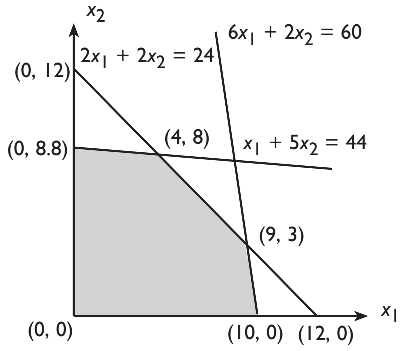
$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \leq 120$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Şekil 14.8

a. (0,400)
b. (240,240)
c. (600,0)
d. (0,600)
e. (400,0)

3. Bir üretici elindeki üç ayrı tezgâhı kullanarak iki farklı ürün üretmektedir. Bir birim (I) üretmek için A tezgâhında 2, B tezgâhında 1, C tezgâhında 6, bir birim (II) üretmek için A tezgâhında 2, B tezgâhında 5, C tezgâhında 2 saat işlem görmektedir. Planlama döneminde tezgâh kapasiteleri sırasıyla 24, 44 ve 60 saattir. Parça başına I ürününden 6, II ürününden 9 birim kâr edilmektedir. İşletmenin maksimum kârı ne olur?



Model:

$Z_{max} = 6x_1 + 9x_2$

Kısıtlar:

$2x_1 + 2x_2 \leq 24$

$x_1 + 5x_2 \leq 44$

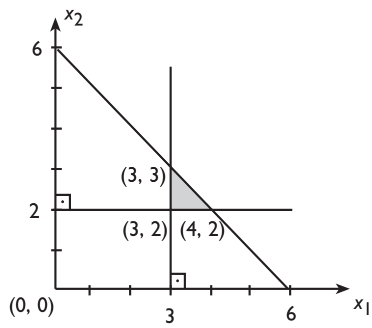
$6x_1 + 2x_2 \leq 60$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Şekil 14.9

a. 60
b. 81
c. 72
d. 96
e. 79,2

4. İki tür mal üretmekte olan bir firma haftalık talebi karşılayacak üretim programı yapmak istemektedir. Yapılan araştırmaya göre toplam talebin 6 birim olduğu anlaşılmıştır. Yönetim, birinci maldan haftada en az 3 birim, ikinci maldan en az 2 birim üretmek istemektedir. Malların birim maliyetleri sırasıyla 4 ve 5 birim olduğuna göre üretim maliyetini minimum yapacak haftalık üretim programını bulunuz.



Model:

$Z_{min} = 4x_1 + 5x_2$

Kısıtlar:

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 3$

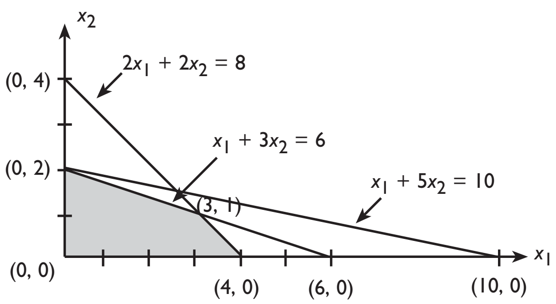
$x_2 \geq 2$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Şekil 14.10

a. (3,2)
b. (4,2)
c. (6,0)
d. (3,5)
e. (7,2)

5. Bir işletme 2 tür ürün üretmektedir. Ürünlerin birim satışında elde edilen kârlar sırasıyla 2 TL ve 1 TL . dir. Birinci maldan 1 br üretmek için 1 br malzeme, 1 saat makine ve 2 saat emek, ikinci maldan 1 bir ürütmek için 5 br malzeme, 3 saat makine ve 2 saat emek kullanılmaktadır. İşletmenin elinde 10 br malzeme, 6 saatlik makine kapasitesi ve 8 saatlik emek bulunduğuna göre, işletmenin kârını maksimum yapacak üretim programı ne olmalıdır?



Şekil 14.11

Model:

$Z_{max} = 2x_1 + x_2$

Kısıtlar:

$x_1 + 5x_2 \leq 10$

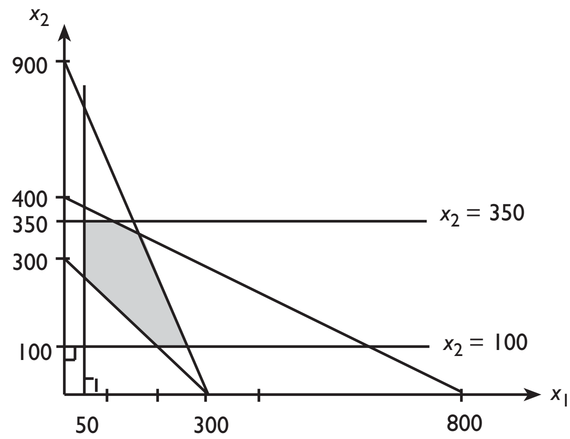
$x_1 + 3x_2 \leq 6$

$2x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 , x_2 \geq 0$

a. (10,0)
b. (0,2)
c. (4,0)
d. (6,0)
e. (3,1)

6. Aşağıda verilen modelin optimum çözümünü araştırınız.



Şekil 14.12

Model:

$Z_{max} = 2x_1 + 6x_2$

Kısıtlar:

$2x_1 + 4x_2 \leq 1600$

$6x_1 + 2x_2 \leq 1800$

$x_2 \leq 350$

$x_1 \geq 50$

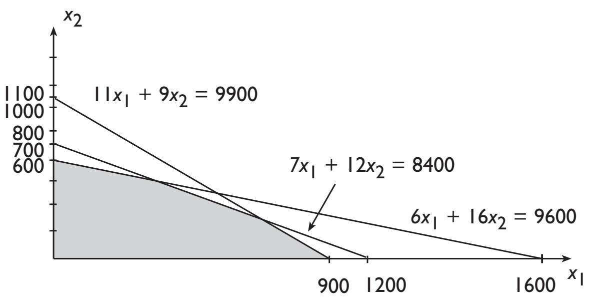
$x_2 \geq 100$

$x_1 + x_2 \geq 300$

$x_1 , x_2 \geq 0$

a. 1000
b. 1600
c. 2200
d. 2300
e. 3000

7. Bir işletmenin ürettiği P_1 ve P_2 ürünleri M_1, M_2 ve M_3 makinelerinde işlenmektedir. P_1 ürünü M_1 'de 11, M_2 'de 7 ve M_3 'de 6 dakika, P_2 ürünü ise M_1 'de 9, M_2 'de 12, M_3 'de 16 dakika işlem zamanı gerektirmektedir. M_1, M_2 ve M_3 makinelerinin planlama, dönemindeki kapasiteleri sırasıyla 165, 140 ve 160 saattir. P_1 'den birim başına 900, P_2 'den ise 1000 TL. kâr edildiğine göre, işletmenin maksimum kârı ne olur?



Şekil 14.13

Model:

$Z_{max} = 900x_1 + 1000x_2$

Kısıtlar:

$11x_1 + 9x_2 \leq 9900$

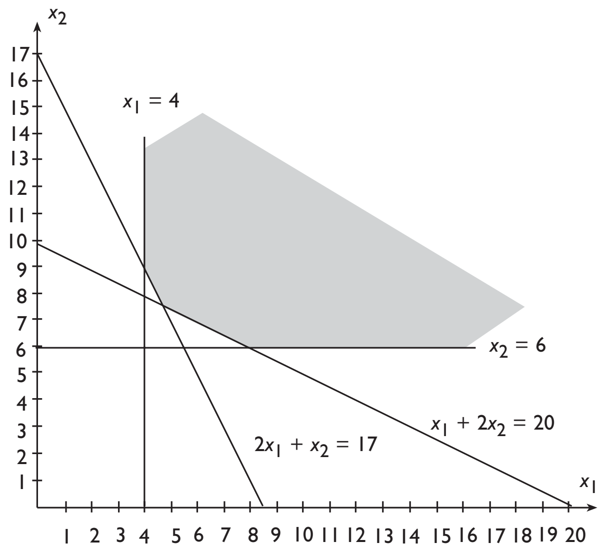
$7x_1 + 12x_2 \leq 8400$

$6x_1 + 16x_2 \leq 9600$

$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$

a. 600000
b. 810000
c. 852000
d. 898261
e. 1080000

8. Bir çiftlikte yaşayan hayvanların beslenmesinde kullanılan iki farklı tür yem bulunmaktadır. *M* yemi kg başına 0.1 kg *A*, 0.1 kg *C*, 0.2 kg *D*, *N* yemi 0.1 kg *B*, 0.2 kg *C*, 0.1 kg *D* içermektedir. Her bir hayvanın günlük 0.4 kg *A*, 0.6 kg *B*, 2 kg C ve 1.7 kg *D* ihtiyacı vardır. 1 kg *M* 10 TL, 1 kg *N* 4 TL. olduğuna göre hayvanların besin ihtiyacını karşılayacak ve maliyeti minimum yapacak besleme programını bulunuz.



Şekil 14.14

Model:

$Z_{min} = 10x_1 + 4x_2$

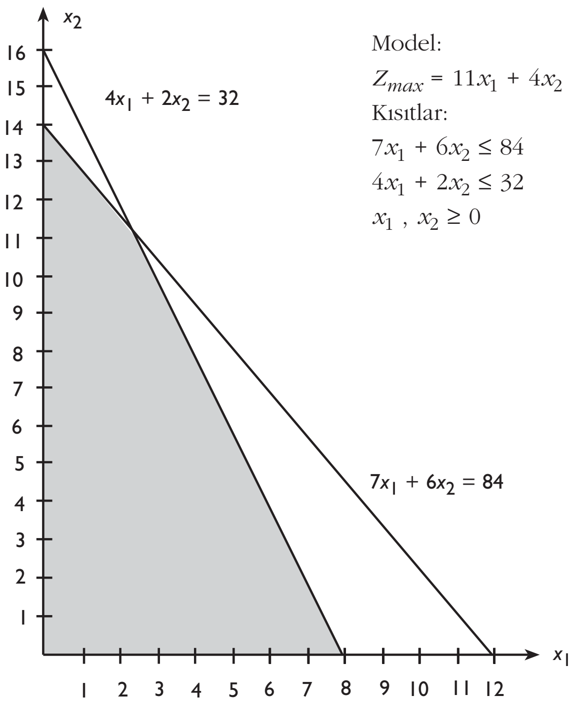
Kısıtlar:

$0{,}1x_1 \geq 0{,}4$	$x_1 \geq 4$
$0{,}1x_2 \geq 0{,}6$	$x_2 \geq 6$
$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \geq 2$	$x_1 + 2x_2 \geq 20$
$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \geq 1{,}7$	$2x_1 + x_2 \geq 17$

$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$

a. (0, 17)
b. (4, 9)
c. (4.6, 7.67)
d. (8, 6)
e. (20, 0)

9. Aşağıda verilen modelin uygun çözümü aşağıdakilerden hangisidir?



Model:

$Z_{max} = 11x_1 + 4x_2$

Kısıtlar:

$7x_1 + 6x_2 \leq 84$

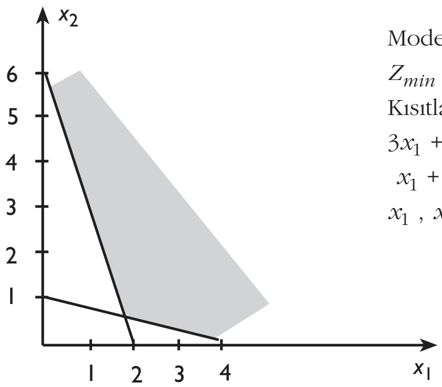
$4x_1 + 2x_2 \leq 32$

$x_1 \text{ , } x_2 \geq 0$

Şekil 14.15

a. (0, 14)
b. (2.4, 11.2)
c. (8, 0)
d. (12, 0)
e. (16, 0)

10. Aşağıda verilen modelin uygun çözümünü araştırınız.



Model:

$Z_{min} = 4x_1 - x_2$

Kısıtlar:

$3x_1 + x_2 \geq 6$

$x_1 + 4x_2 \geq 4$

$x_1 \text{ , } x_2 \geq 0$

Şekil 14.16

a. 1
b. $\frac{74}{11}$
c. 16
d. 0
e. -6

Yanıt Anahtarları

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

SIRA SİZDE 1

1. a) {1, 3} b) {5} c) {2} d) {1, 2, 3, 5}

2. a) Ø b) {b} c) {a, d, e} d) {a}
e) {a, b, d, e} f) {c} g) {b} h) {a, c, d, e}

3. $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{a, c, d\}$

4. $B \setminus [A \cup C]$

5. $C \setminus [A \cup B]$

SIRA SİZDE 2

1. a) $\frac{31}{9}$ b) $\frac{1213}{99}$ c) $\frac{13399}{99900}$

2. a) 36,5 b) $5,\overline{6}$ c) $0,8\overline{3}$

SIRA SİZDE 5

4. a) (-1, 3) b) (- ∞, -5)

SIRA SİZDE 6

1. a) 0 b) 30 c) $\frac{a^3}{b^4}$ d) 3^{-2}

2. a) $5\sqrt{3}$ b) $-21\sqrt{2}$ c) 10 d) $7\sqrt[3]{7}$

3. a) 3 b) $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt{2}}$ c)16

SIRA SİZDE 7

1. a) 14 b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{8}{7}$

2. a) {-5, 1} b) (3, 11) c) $(\infty, -7) \cup (-3, +\infty)$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. d	2. e	3. e	4. b	5. d
6. d	7. d	8. d	9. c	10. e
11. c	12. e			

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1. a) $\frac{206}{33}$ b) $\frac{3910}{999}$ c) $\frac{113}{333}$ d) $\frac{3782}{3333}$

2. a) $0,\overline{428571}$ b) 0,296

3. a) $c < d < b < a$ b) $c < a < b$

4. **a)** [4, 7) **b)** [-3, 4) **c)** $(-\infty, 7)$ **d)** [4, 7)

6. **a)** 2^{-6} **b)** 4.10^5 **c)** 8.10^{-3} **d)** -1
e) 1 **f)** 1/4

7. **a)** $\sqrt[15]{2}$ **b)** $\sqrt[24]{2^{13}}$ **c)** -0,2 **d)** $\sqrt[3]{3}$ **e)** 9

ÜNİTE 2

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

SIRA SİZDE 1

1. **a)** {-4} **b)** {-1/2} **c)** {1} **d)** {5}

2. **a)** {-1, 2/3} **b)** {-1, 3/2} **c)** {-5/3, 7/11} **d)** {5/4, 3/2}
e) {2/3, 7/4} **f)** {-3/2, 2/5} **g)** {-9, 9} **h)** {-7}
ı) Ø **i)** {0, 1/5}

3. **a)** {-5/2, 0, 5/2} **b)** {-2, 0} **c)** {-7, 0, 5} **d)** {0}

SIRA SİZDE 2

1. **a)** $\{-\infty, -5/3]$ **b)** $(-\infty, 14/11)$ **c)** $[3, \infty)$

2. **a)** {27} **b)** {-29} **c)** {1} **d)** {5} **e)** {2/7, 4/5}

3. **a)** (-4, 7) **b)** (-7, 13)\{3} **c)** $(-\infty, 3/4] \cup [11/4, \infty)$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. c **2.** b **3.** e **4.** c **5.** e
6. c **7.** c **8.** c **9.** b **10.** a
11. e **12.** d

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1. **a)** {-4, 3} **b)** {-2} **c)** {-2} **d)** {-2, 2}

3. **a)** $(-\infty, 7/4]$ **b)** $(-3, \infty)$ **c)** [11/7, 17/7]

4. **a)** Ø **b)** {-9/2, 1/2}

5. **a)** {3} **b)** {5}

ÜNİTE 3

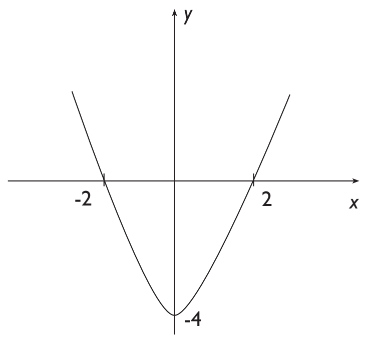
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

SIRA SİZDE 1

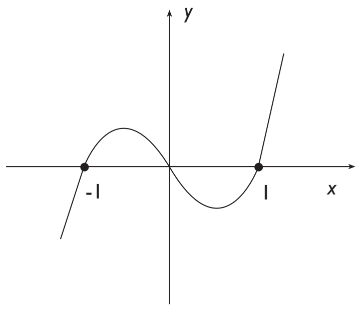
1. **a)** *A* ve *B* nin her ikisi de grafiğin üstündedir.
b) *A* grafiğin üstünde fakat *B* değildir.
c) *A* grafiğin üstünde fakat *B* değildir.

2. **a)** Grafik x - eksenini (1/2, 0), y - eksenini (0, -1) noktasında keser.
b) Grafik x - eksenini (1, 0), ve (-2, 0) noktalarında, y - eksenini ise (0, -2) noktasında keser.
c) Grafik x - eksenini (-1, 0), ve (3, 0) noktalarında, y - eksenini ise (0, -3) noktasında keser.
d) Grafik x ve y - eksenini (0, 0) da keser.
e) Grafik x - eksenini (4, 0) da, y - eksenini (0, -2) ve (0, 2) noktalarında keser.

3. **a)**



b)



SIRA SİZDE 2

1. **a)** $m_{\overline{AB}} = -\frac{2}{3}$; $y = -\frac{2}{3}x$ **b)** $m_{\overline{AB}} = -\frac{3}{5}$; $y = -\frac{3}{5}x + \frac{12}{5}$

c) $m_{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$; $y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$ **d)** $m_{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

2. $y = -\frac{3}{5}x + 3$

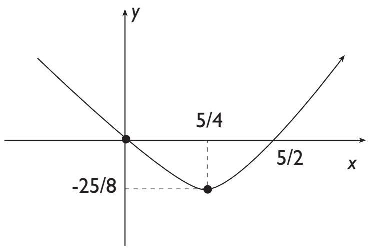
3. **a)** $m = -2$ **b)** $m = 3/2$ **c)** $m = 0$

4. **a)** paralel
b) kesişen, kesişim noktası (3/2, 3/2)
c) kesişen kesişim noktası (3/2, -1/2)
d) kesişen kesişim noktası (4/5, 7/5)
e) kesişen kesişim noktası (-1/10, -7/10)
f) kesişen kesişim noktası (5, 0)

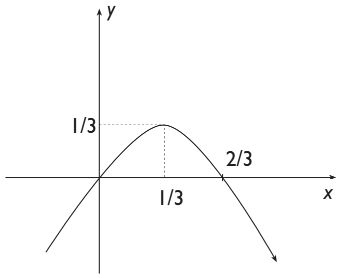
5. **a)** $y = 3x - 3$

SIRA SİZDE 3

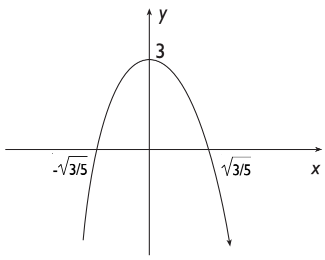
1. a)



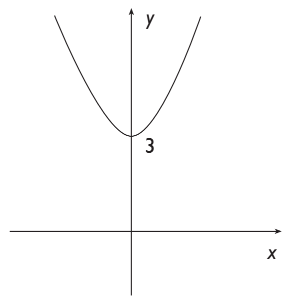
b)



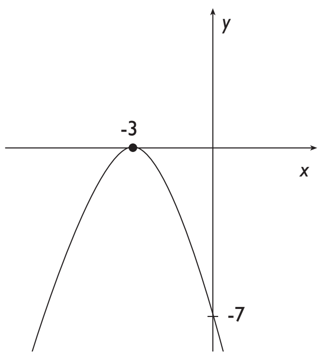
c)



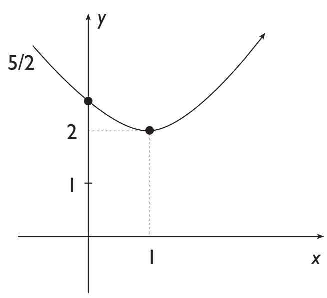
d)



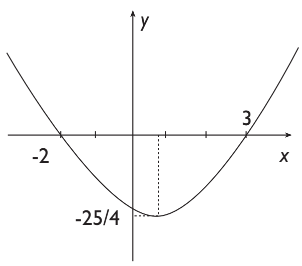
e)



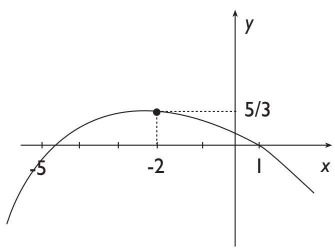
f)



g)



h)

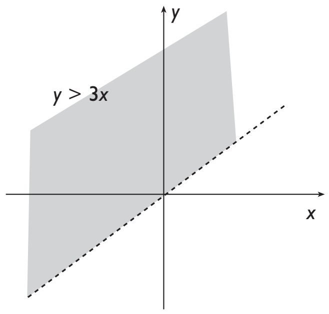


2. a) Tepe noktası minimum noktadır T (1, 3)
b) T (2, -9)
c) T (2/3, -1/3)
d) T (-1/4, 7/8)

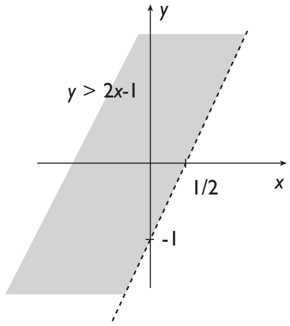
3. a) Tepe noktası maksimum noktadır T (1/4, 1/8)
b) T (0, 1)

SIRA SİZDE 4

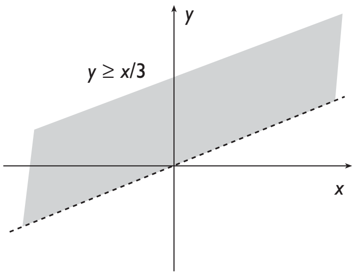
1. **a)**



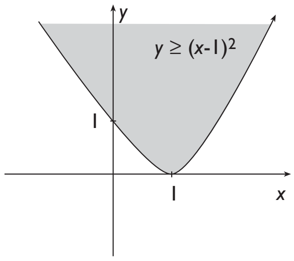
b)



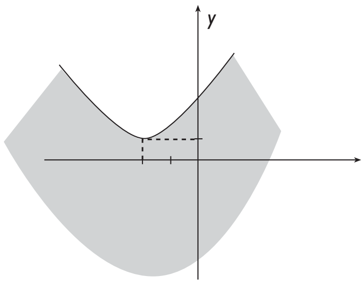
c)



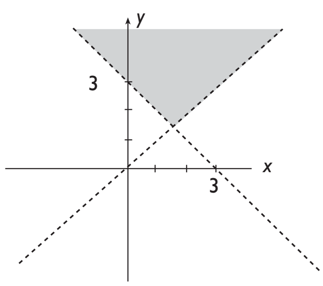
d)



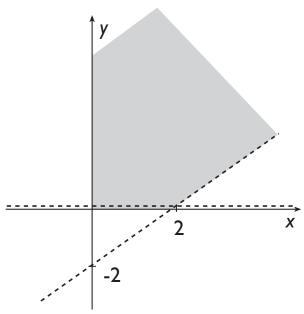
e)



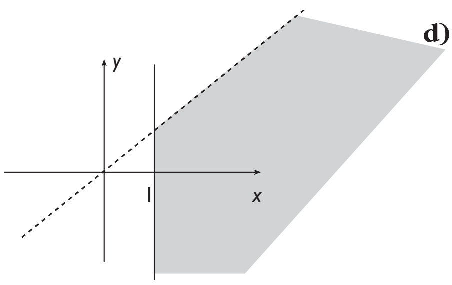
2. **a)**



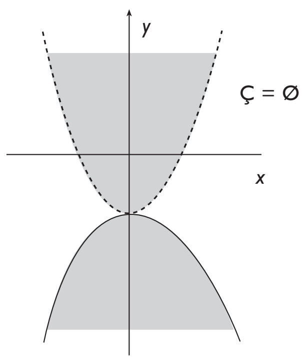
b)



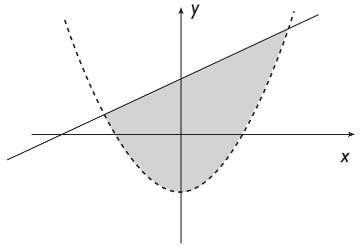
c)



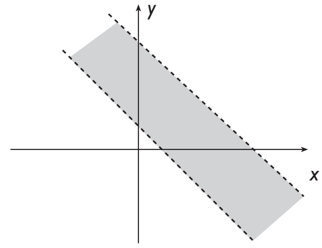
d)



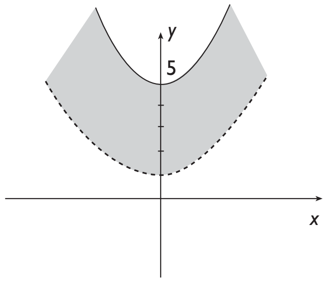
e)



f)



g)

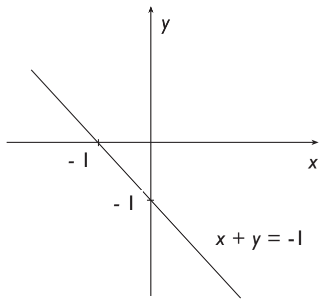


Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

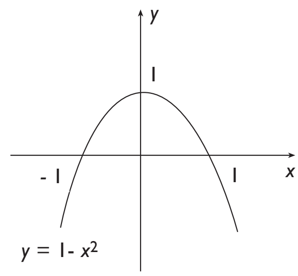
1. c	**2.** d	**3.** d	**4.** c	**5.** a
6. c	**7.** c	**8.** e	**9.** d	**10.** e
11. d	**12.** b			

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

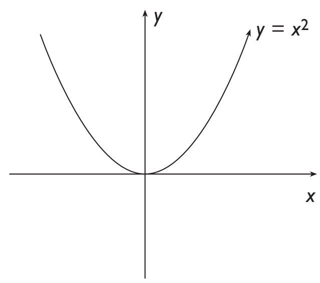
1. **a)**



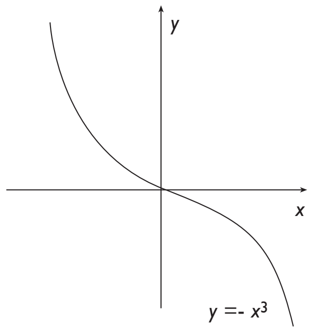
b)



c)



d)

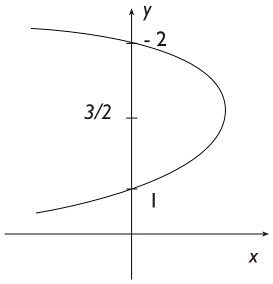


2. 1000

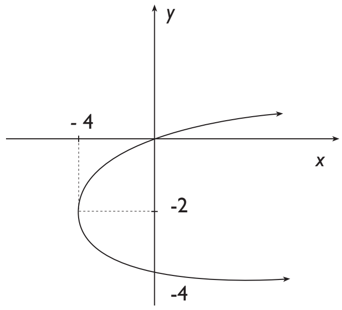
3. $y = x - 1$

4. $m = 2,\ n = -2$

5. a)



b)



4 ÜNİTE

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

SIRA SİZDE 1

1. $V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x)$

2. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

3. a) $f(x) = 4x$ **b)** $f(x) = \sqrt{2x^2}$ **c)** $f(x) = x^2$

4. a) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ **b)** $(-3, 0] \cup [1, +\infty)$ **c)** $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
d) $\mathbb{R}$ **e)** $\mathbb{R}$

SIRA SİZDE 2

1. a) f 1-1 değil, örten, artan veya azalan değil
b) f 1-1, örten ve artandır
c) $\mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 1-1 örten ve azalan
d) $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

2. a) (i) $(fog)(x) = 27x^2 - 3x - 2$
(ii) $(gof)(x) = -9x^2 + 15x + 1$

b) (i) $(fog)(x) = (2x - 2)\sqrt{2x - 1}$
(ii) $(fog)(x) = \sqrt{2x^2 - 2x - 2}$

3. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$ **b)** $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 1}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2}$ **d)** $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$

4. a) $f(3) - g(2) = -5/4$ **b)** $\dfrac{f(5)}{1 + g(3)} = 6$

c) $f(t + 1) = t^2 - t - 2$ **d)** $g(t) = \dfrac{t + 3}{t^2}$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. a	**2.** e	**3.** b	**4.** b	**5.** c
6. a	**7.** e	**8.** a	**9.** c	**10.** d
11. d	**12.** d			

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1. a) $\mathbb{R}$ **b)** $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

c) $\mathbb{R}$ **d)** $\mathbb{R}$

2. a) (i) $(fog)(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ (ii) $(gof)(x) = x + 2$

b) (i) $(fog)(x) = |x + 3|$ (ii) $(gof)(x) = |x| + 3$

3. a) $f^{-1}(x) = x - 2$ **b)** $f^{-1}(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{5x+2}{2x-1}$ **d)** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$

ÜNİTE 5

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

1. **4)** $-\frac{1}{6}$ **5)** 3 **6)** Yoktur **7)** 10 **8)** 4

9) $\frac{1}{2}$ **10)** 3 **11)** Yoktur **12)** Yoktur **13)** 0

2. **1)** -3 **2)** 1 **3)** -1 **4)** 9 **5)** 2

6) $\sqrt[3]{6}$ **7)** -6 **8)** 69 **9)** $-\frac{1}{4}$ **10)** 0

11) -2 **12)** 2 **13)** 3 **14)** 2 **15)** 2

16) $\frac{1}{4}$ **17)** $\frac{2}{3}$

3. **1)** Yoktur **2)** Yoktur **3)** -1 **4)** $-\infty$

5) ∞ **6)** ∞ **7)** $-\infty$

4. **1)** Sürekli değil **2)** Sürekli **3)** Sürekli **4)** Sürekli

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. d **2.** b **3.** d **4.** e **5.** b
6. e **7.** a **8.** d **9.** d **10.** e
11. c **12.** e

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1. Yoktur
2. -2
3. 0
4. Yoktur

6 ÜNİTE

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

1. **1)** $f'(x_0) = -2$ **2)** $f'(0) = 0,\ f'(-1) = -2$

2. **1)** $f'(x) = -4$ **2)** $g'(x) = 2x + 3$
3) $k'(x) = \sqrt{3}$ **4)** $l'(x) = \frac{1}{5} - 2x$

3. **1)** $-\frac{1}{18}$ **2)** $-\frac{2}{3}$
3) -8 **4)** $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$
5) $\frac{5}{32}$ **6)** $\frac{1}{16}$
7) $\frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$ **8)** $\frac{5}{48}$
9) $\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$ **10)** 2
11) $-6x^2 - 4x - 1 - x^{-2} + 4x^{-3} - 6x^{-4}$

4. **1)** $y = -\sqrt{3}x + 4$ **2)** $y = -4x + 4$

5. **1)** $\frac{3}{8}x^{-5/2}$ **2)** 0,
3) $\frac{5}{3456}$ **4)** $-\frac{2}{9}$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. a	**2.** a	**3.** e	**4.** c	**5.** a
6. c	**7.** b	**8.** a	**9.** e	**10.** b
11. a				

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1. **1.** $-\frac{9}{2}$
2. $\frac{17}{32}$
3. $\frac{2\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

7 ÜNİTE

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

1. $(-\infty, -1)$ ve $(3, \infty)$ aralıklarında artan, $(-1, 3)$ aralığında azalan.

2. **a)** $x = -\frac{b}{2a}$ **b)** $x = \frac{1}{16}$
c) (2000, 37000) **d)** (3, 11)

3. **a)** $(0, \infty)$ **b)** $(0, -7)$

4. **a)** $x = 0$ **b)** $y = -\frac{3}{2}$

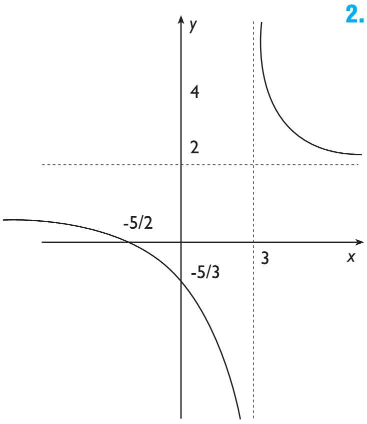
5. 1764390 TL.

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

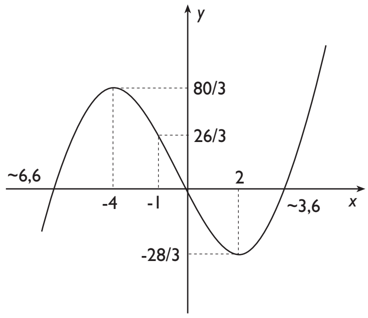
1. b	**2.** d	**3.** e	**4.** c	**5.** a
6. c	**7.** c	**8.** a	**9.** d	**10.** a
11. b				

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1.



2.

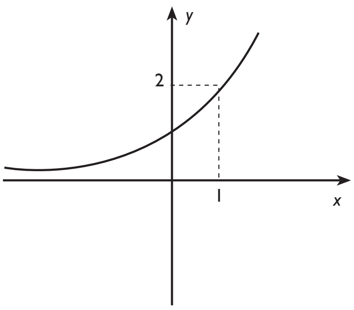


ÜNİTE 8

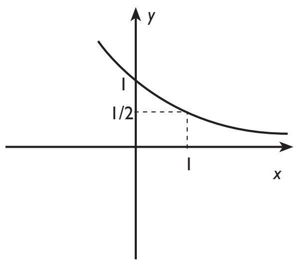
Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

SIRA SİZDE 1

1. $y = 2^x$ in grafiği

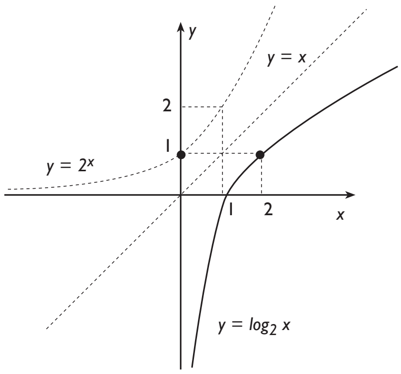


$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ in grafiği



SIRA SİZDE 2

$y = 2^x$ ve $y = \log_2 x$ in grafiği



SIRA SİZDE 3

1. $y' = e^{-x}(1-x)$

2. $y' = e^{x^5}(5x^6 + 15x^4 + 2x)$

3. $y' = x(3xe^{x^3} + 2)$

4. $y' = 4x \,.\, 3^{2x^2} \,.\, \ln 3$

5. $y' = x e^{-x^2} 3^{x^3}(-2 + 3x\ln 3)$

6. $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

7. $y' = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

8. $y' = 2x \,.\, a^{x^2} \,.\, \ln a \,.\, \ln x + \dfrac{a^{x^2}}{x}$

9. $y' = \dfrac{6x}{x^2+1} \,.\, \ln^2(x^2+1)$

10. $y' = \dfrac{2}{x} \,.\, e^{-x^2}(1-x^2 \,.\, \ln x^2)$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. d	**2.** c	**3.** a	**4.** b	**5.** b
6. b	**7.** c	**8.** b	**9.** d	**10.** c
11. c	**12.** c	**13.** b		

9 ÜNİTE

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. a	**2.** d	**3.** a	**4.** a	**5.** c
6. a	**7.** b	**8.** b	**9.** b	**10.** b
11. d	**12.** c	**13.** b	**14.** b	

10 ÜNİTE

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

SIRA SİZDE 1

1. $e-1$	**2.** 9	**3.** -8	**4.** 26/3
5. 1/2	**6.** 48	**7.** 21	**8.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$
9. -10	**10.** 2000	**11.** 81	**12.** $\dfrac{1}{2}(e^{20}-1)$

SIRA SİZDE 1

1. 1
2. 2

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. d	**2.** c	**3.** b	**4.** a	**5.** d
6. c	**7.** d			

ÜNİTE 11

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

SIRA SİZDE 1

1. a) $x = -1/2$, $y = 0$
   b) Sonsuz çoklukta çözüm var; $t \in \mathbb{R}$, $x = t$, $y = 3t - 2$
   c) Çözüm yok
   d) $x = 3$, $y = 2$
   e) $x = 2$, $y = 1$
2. a) Sıfır çözüm; $x = 0$, $y = 0$
   b) Çözüm yok
   c) $x = 3$, $y = 2$
   d) Sonsuz çoklukta çözüm var;
      $x = t$, $y = 2t + 3$, $t \in \mathbb{R}$
   e) Çözüm yok
   f) $x = \frac{23}{5}$, $y = \frac{22}{5}$

SIRA SİZDE 2

1. $x_1 = -5$, $x_2 = 3$
2. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$
3. $x = -14$, $y = 20$, $z = 5$
4. Çözüm yok
5. Sonsuz çoklukta çözüm var. $t \in \mathbb{R}$ için
   $x_1 = -\frac{14}{3} t - 48$, $x_2 = -\frac{13}{3} t - 66$, $x_3 = t$
6. $x_1 = -1 - \frac{19}{2} x_3$, $x_2 = 1 - \frac{9}{2} x_3$
7. Tek çözüm sıfır çözüm.
8. Sonsuz çoklukta çözümü var.
   $x_1 = -\frac{9}{4} x_3$, $x_2 = -\frac{1}{4} x_3$
9. Bayların sayısı 66
   Bayanların sayısı 34
10. %25 ile yatan miktar 12 milyar
    %30 ile yatan miktar 18 milyar
    %35 ile yatan miktar 20 milyar

SIRA SİZDE 3

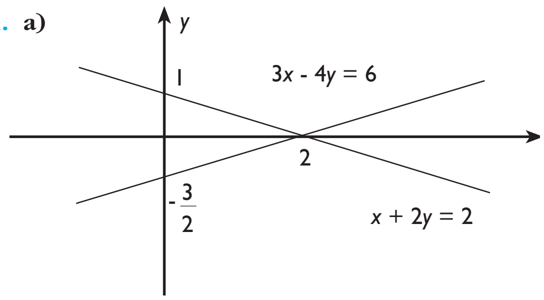
1. a) $p = \frac{75}{2}$
   b) $p = \frac{15}{4}$
   c) $p = 15$
2. $p = 10$, $q = 25$
3. $\left(\frac{5}{2}, 17\right)$
4. $p_1 = 6$, $p_2 = 8$, $q_1 = 50$, $q_2 = 70$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

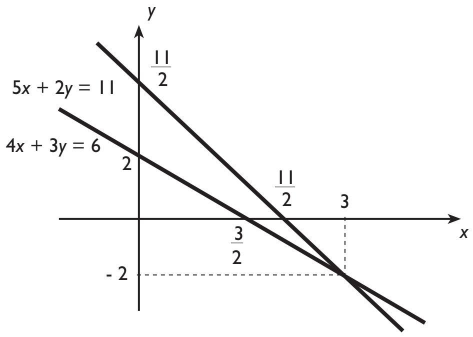
1. b	**2.** e	**3.** c	**4.** b	**5.** b
6. a	**7.** c	**8.** c	**9.** e	**10.** a

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1. a)



b)



3. (1, -2, 3)

4. %4 lük çözeltiden 30 litre, %9 luk çözeltiden 20 litre karıştırılmalıdır.

5. Botun hızı 8, nehirin hızı 4 dür.

12 ÜNİTE

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

SIRA SİZDE 1

1. 7

2. $x = 4$, $y = 9$, $z = 0$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

SIRA SİZDE 2

1. $\begin{pmatrix} 0 & 27 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$

2. 17

3. **a)** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

SIRA SİZDE 3

1. **a)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

c) $B+C$ tanımlı değil

d) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 12 \\ 21 & 37 & 10 \end{pmatrix}$

g) AB tanımlı değil

h) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 24 & 19 \end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 29 & 0 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 9 & 17 & 2 \\ 12 & 19 & -12 \\ 15 & 25 & -10 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & -3 \end{pmatrix}$ **n)** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

2. **a)** (56)
b) 56

4. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

5. $1{,}20\ D = \begin{pmatrix} 600 & 900 & 1080 \\ 780 & 630 & 996 \\ 504 & 768 & 1002 \\ 408 & 708 & 732 \end{pmatrix}$

7. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 625 \end{pmatrix}$

8. 3. firma

SIRA SİZDE 4

1. A ile C

2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

5. $$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

SIRA SİZDE 5

1. **a)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (3)$

2. **a)** $3x_1 - 2x_2 = -2$
$x_1 + 5x_2 = 56$

b) $x_1 + 2x_3 = 1$
$-x_1 + x_2 = 2$

c) $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

d) $x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_3 = 7$

3. **a)** (6, 10) **b)** (4, 5, 6) **c)** (2, 0, 1, 1)

4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. a	**2.** c	**3.** e	**4.** b	**5.** b
6. d	**7.** d	**8.** e	**9.** b	**10.** b
11. c	**12.** a			

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1. Hammadde miktarları matrisi :

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 510 & 250 & 450 & 350 & 230 \end{pmatrix}$$

Toplam hammadde bedeli : 5 890 milyon TL.

ÜNİTE 13

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

1. $|A| = -3$
2. $|B| = 1$
3. $|C| = 56$
4. $|D| = 405$
5. $|E| = -420$
6. $\Delta = 0$
7. $\Delta = 120$

8. $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 11 & -19 & 5 \end{pmatrix}$

9. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{11}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{19}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

10. $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$

11. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$3x_1 + x_2 + x_3 = 12$
$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$
$-3x_1 + x_2 + x_3 = 24$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$

12. A türünden 900 adet, B türünden 1000 adet.

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. e	**2.** a	**3.** b	**4.** d	**5.** a

Biraz Daha Düşünelim Yanıt Anahtarı

1. **a)** $x_1 = -3 - 4t$, $x_2 = 1 - t$, $x_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$

b) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$

c) Çözüm yok.

2. **a)** Tersi yok

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. -1728

4. Bir günde üretilen evrak çantası, el çantası ve cüzdan sayıları, sırasıyla, x, y, z olmak üzere $x = 30$, $y = 40$, $z = 50$.

14 ÜNİTE

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. c	**2.** e	**3.** d	**4.** a	**5.** c
6. d	**7.** d	**8.** b	**9.** c	**10.** e

Yararlanılabilecek Kaynaklar

Caferov, V.; Editör: Üreyen, M.; **Analiz, T.C.** A.Ü.Açıköğretim Fakültesi Yayınları, No: 600, Eskişehir, 1999.

Çoker, D; Özer, O; Taş, K.; **Genel Matematik,** Adım Yayıncılık, Ankara, 1994.

Frank S. Budnick; **Applied Mathematics for Business and the Social Sciences**; Mc Graw-Hell, 1993.

Göğüş, M.; Koçak, Ş.; Tayfur, C.; Üreyen, M; **Matematik I (Diferansiyel Hesap),** Bizim Büro, Ankara, 1984,

Göğüş, M.; Koçak, Ş.; Üreyen, M.; **Matematik I İktisadi Uygulamalı,** Birlik Ofset, Eskişehir, 1993.

Hegarty, J.; **Calculus for the Management and Social Sciences,** Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1980.

İnönü, Ö.; Akova, C.; İşmen, İ.; Demirgüç, Z.; **Büyük Matematikçiler I, II**, Milli Eğitim Basımevi, İstanbul 1945, 1947.

Koçak, Ş.; Üreyen, M.; Göğüş, M.; Olgun, Ş., Görgülü, A.; Editör: Kaya, R.; **I. Fasikül,** T.C.A.Ü. Açıköğretim Fakültesi Yayınları No: 115.

Musa Şenel; **Doğrusal Programlama Metodu ile Üretim Planlaması**, EİTİA Yayım 1974.

Paul, R.S.; Haeussler, E.F.Jr. **Introductory Mathematical Analysis for Students of Business and Economics,** Reston Publishing Company 1973.

Protter, M.H.; Morrey, C.B. **A First Course in Real Analysis,** Springer Verlag 1977.

Sherman K. Stein, Anthony Barcellos; (Türkçesi Beno Kuryel); **Calculus ve Analitik Geometri**, Mc Graw-Hell, 1997.

Dizin