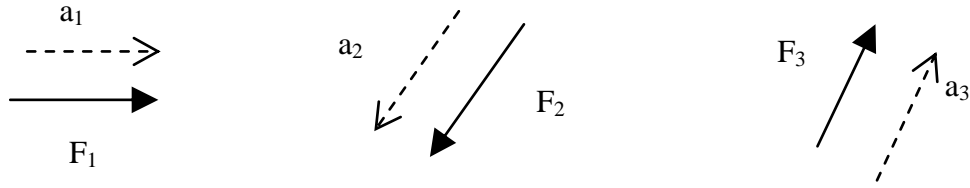


BÖLÜM 2. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ KUVVET, KÜTLE, İVME

2.1. Newton'un 2. Hareket Kanunu

Newton'un birinci ve üçüncü hareket kanunları dengedeki cisimlerin kuvvetler altındaki durumlarını incelemeye yetmiştir. Ancak cisimlerin ivmeli hareketleri ile ilgili olan problemlerde ise 2. kanuna gerek vardır. Cisimlerin hızlarının şiddet ve/veya doğrultusu değişiyorsa ivme vardır ve cismin hareketi ile etkiyen kuvvetler arasında bir ilişki kurulur.

Newton'un ikinci kanunu: Bir maddesel noktaya etkiyen bileşke kuvvet sıfır değilse maddesel nokta bileşke kuvvetin şiddeti ile orantılı ve bu bileşke kuvvetin doğrultusunda ve yönünde bir ivme kazanır. Bir cisme farklı yönlerde kuvvetler uygulanarak uygulanan her kuvvet için cismin ivmesi ölçülürse,



Şekil 2.1.

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \text{Sabit}$$

Bu değer bir cisim için sabit olup “m” kütle değerini verir.

Demek ki: $\vec{F} = m \vec{a}$

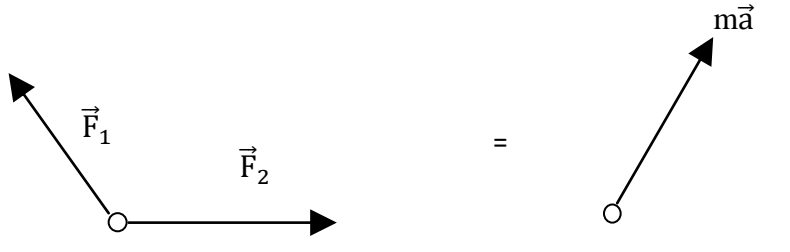
Birden fazla kuvvet varsa $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$ dır.

2.2. Birim sistemleri

$\vec{F} = m \vec{a}$ denklemini kullanırken birimleri gelişi güzel seçemeyiz. kütle, kuvvet, uzunluk ve zaman birimlerinden üçü seçilirse dördüncüsü bu denklemi sağlayacak şekilde seçilmelidir. Bu durumda seçilen birimlere kinetik bakımdan uyuşan birimler denir.

	<u>Salt birim sistemi (SI)</u>	<u>Çekimsel birim sistem(Teknik metrik sistem)</u>
Uzunluk (L)	metre (m)	metre (m)
Kütle (m)	kilogram(kg)	$\frac{\text{kgf} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$
Zaman (t)	saniye (sn)	saniye (sn)
Kuvvet (F)	Newton (kg. m/sn ²)	kgf

2.3. Hareket denklemleri (Dinamik Denge)



Şekil 2.2

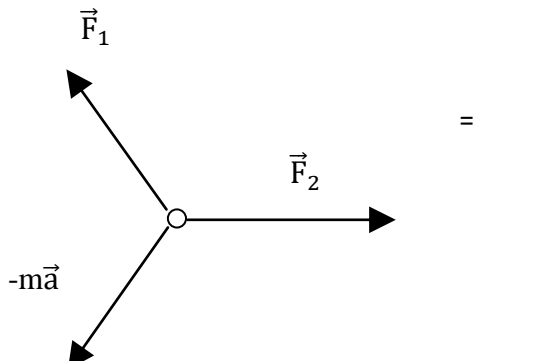
$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Sigma (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = m(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})$$

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$\Sigma F_z = ma_z$$



Şekil 2.3.

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$$

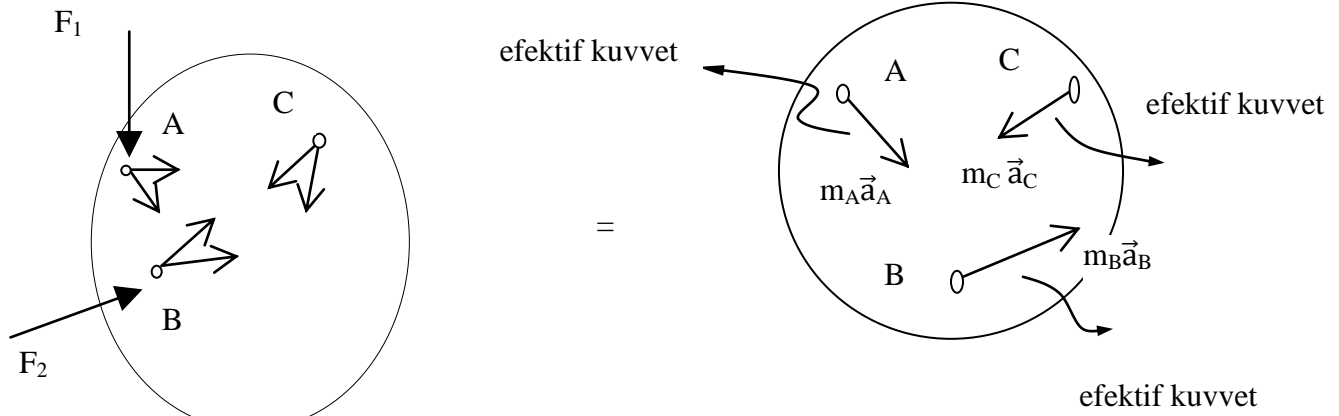
$$\Sigma \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

$-m\vec{a}$: Atalet kuvveti veya atalet vektörü olarak adlandırılır.

$\Sigma \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$ denklemi bir denge denklemi olduğu için bu denkleme dinamik denge denklemi denir.

2.4. Maddesel Noktalar Sistemi (D’alembert ilkesi)

Newton denklemi maddesel nokta sistemine tek tek de uygulanabilir yada her maddesel noktaya sistemin diğer noktalarından gelen iç kuvvetler ve sistemin dışından gelen dış kuvvetler diye 2 kısımdan oluşan kuvvetlerden söz edilebilir. Bütün kuvvetlerin toplamı $m\vec{a}$ ya eşit bir vektördür. Buna maddesel noktaya gelen efektif kuvvet denir. Şimdi bütün noktaları birden göz önüne alalım.

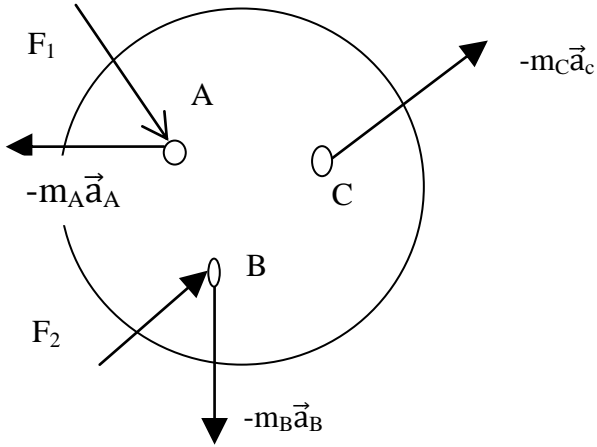


Şekil 2.4.

Yazılan bağıntı her bir maddesel nokta için geçerlidir. Sisteme etkiyen dış ve iç kuvvetlerin bileşkesi bütün noktalara etkiyen efektif kuvvetlerin bileşkesine eşit olur. Eğer iç kuvvetler Newton’un üçüncü kanunu gereğince eşit ve zıt çiftler oluşturuyorsa yok olurlar. Bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetler sistemin çeşitli noktalarına etkiyen efektif kuvvetler sistemine eşdeğerdir. Bu önemli hüküm Fransız matematikçisi Jean Le Rond D’alembert’e (1717-1783) izafeten D’alembert ilkesi adını almıştır.

Yer vektörlerine \vec{r} dersek ; $\Sigma \vec{F}_{dış} = \Sigma (m\vec{a})$ $\Sigma (M_o)_{dış} = \Sigma (\vec{r} \times m\vec{a})$

Ya da dış kuvvetlere atalet vektörleri eklenerek sıfıra eşdeğer bir sistem elde edilir.



$$\Sigma F_{dış} = \Sigma m_i a_i$$

Efektif kuvvetler toplamı
(D'alembert prensibi)

$$= \vec{0}$$

Şekil 2.5.

2.5. Bir maddesel Noktalar sisteminin Kütle Merkezinin Hareketi

Bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi şöyle gösterilebilir. $\vec{r}_G = \frac{\Sigma M \vec{r}}{\Sigma M}$

Skaler olarak :

$$X_G = \frac{\Sigma M x}{\Sigma M}, \quad Y_G = \frac{\Sigma M y}{\Sigma M}, \quad Z_G = \frac{\Sigma M z}{\Sigma M}$$

Ağırlık merkezi ile kütle merkezi aynı değildir. Çünkü yerçekimi doğrultusu her noktada tam paralel değildir. Ancak İnşaat Mühendisliğinde ağırlık merkezi ile kütle merkezi aynı kabul edilir.

$$t'ye \text{ göre türev alınırsa : } \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\Sigma (M \frac{d\vec{r}}{dt})}{\Sigma M} \quad \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \vec{v}_G = \text{Kütle merkezi hızı}$$

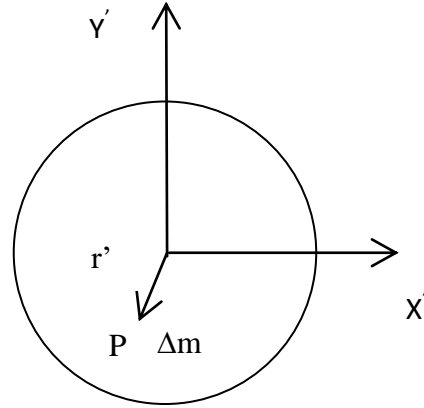
$$\vec{v}_G = \frac{\Sigma m \vec{v}}{\Sigma m} \quad \text{bir daha türev alınırsa}$$

$$\vec{a}_G = \frac{\Sigma m \vec{a}}{\Sigma m}$$

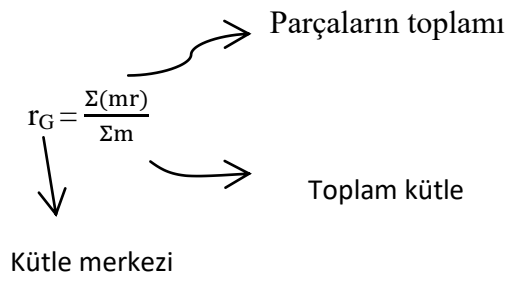
$$\Sigma \vec{F}_{dış} = \Sigma (m \vec{a}) \text{ idi (D'alembert ilkesi)}$$

$$\vec{a}_G = \frac{\Sigma \vec{F}_{dış}}{\Sigma m} \quad \Sigma \vec{F}_{dış} = (\Sigma m) \vec{a}_G$$

Bir maddesel noktalar sisteminin kütle merkezi, sistemin bütün kütlesi ve bütün dış kuvvetleri bu noktada toplanmış gibi Newton'un ikinci kanununa göre hareket eder.

BİLGİ:

Şekil 2.6.



$$r_G' m = \Sigma(mr')$$

r'_G :orjinde olduğu için sıfıra eşittir.

$$r'_G \Sigma m = 0$$

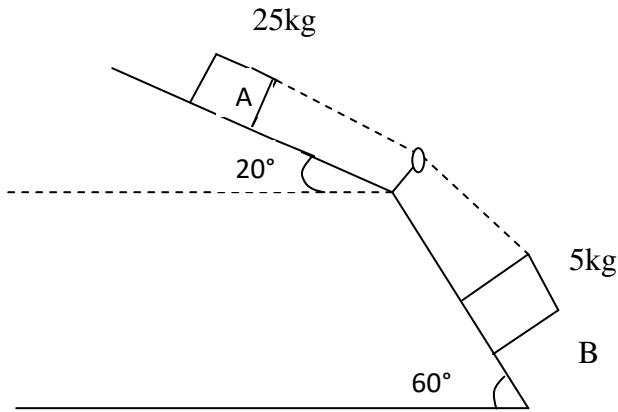
$$\Sigma(mr') = 0$$

2.6. Maddesel Noktanın Doğrusal Hareketi

Dış kuvvetler etkisinde bir noktanın bir doğru üzerinde hareket ettiğini düşünürsek ;

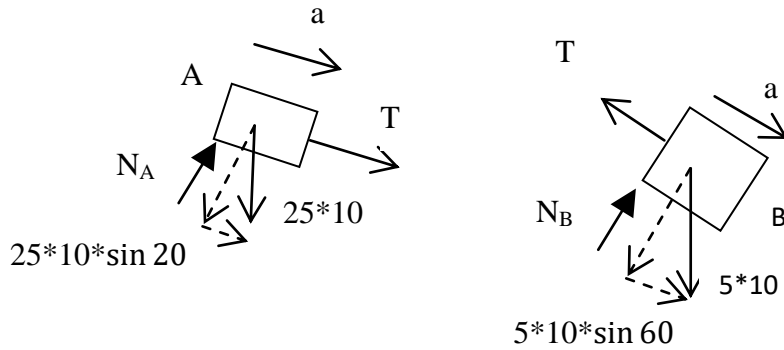
$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \text{ olur}$$

ÖRNEK



Şekil 2.7.

Sürtünmeyi ihmal ederek ve ikisi birden serbest bırakılırsa şekildeki kütleler 3sn'de ne kadar yol alır $g=10\text{m/sn}^2$.



Şekil 2.8.

$$\Sigma F = ma$$

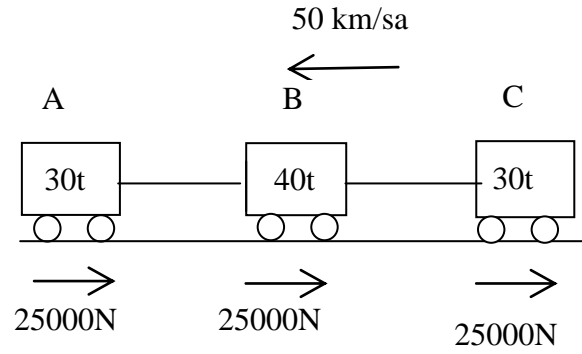
$$T + 25 \cdot 10 \cdot \sin 20 = 25a$$

$$-T + 5 \cdot 10 \cdot \sin 60 = 5a$$

$$30a = 128,8$$

$$a = 4,29 \text{ m/sn}^2$$

$$d = at^2 / 2 = 19,32 \text{ m}$$

ÖRNEK

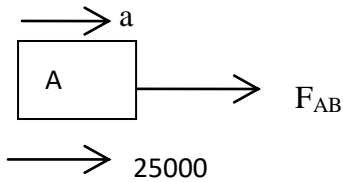
Şekil 2.9.

Şekildeki tren 50 km/sa hızla yol almaktadır. Fren yapılırken birbirlerine bağlanma yerlerinde ne kadar kuvvet iletilir. Vagon başına fren kuvveti 25000 N dur. ($g=10 \text{ m/sn}^2$)

$$\Sigma F = (\Sigma m)a$$

$$3 \cdot 25000 = 100000 \cdot a$$

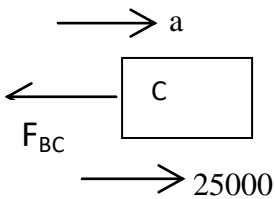
$$a = 0,75 \text{ m/sn}^2$$



$$25000 + F_{AB} = 30000 \cdot (0,75)$$

$$F_{AB} = -2500 \text{ N}$$

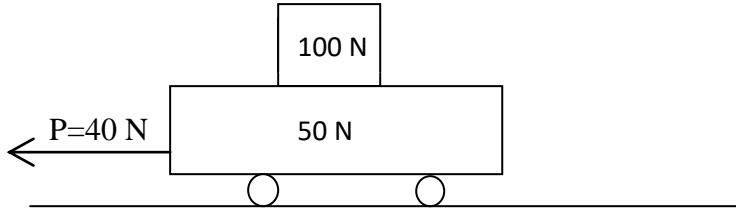
Şekil 2.10.



$$25000 - F_{BC} = 30000 \cdot (0,75)$$

$$F_{BC} = 2500 \text{ N}$$

Şekil 2.11.

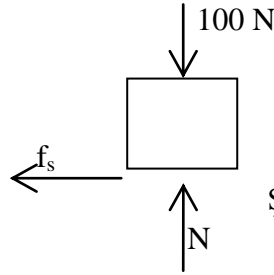
ÖRNEK

Şekil 2.12.

100 N'luk sandık ile 50 N'luk araba arasındaki statik ve kinetik sürtünme katsayıları sırası ile $\mu_s = 0,25$ ve $\mu_k = 0,15$ dir. $P=40$ N (tekerleklerde sürtünme yok)

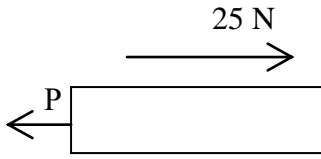
- Arabanın ivmesi
- Sandığın ivmesi
- Arabanın sandığa göre ivmesini bulunuz.

Statik durumda :



$$\text{en fazla } f_s = \mu_s * N = 0,25 * 100 = 25 \text{ N}$$

Şekil 2.13.



Şekil 2.14.

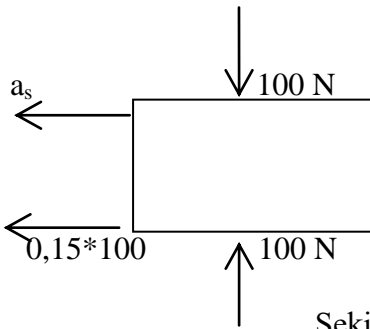
$$\Sigma F = 0$$

$$P - 25 = 0$$

$$P = 25 < 40$$

olduğundan sandık hareket eder.

Sandığın arabaya göre ivmesi sıfır olduğu için ($\mu = \mu_d = 0,15$)

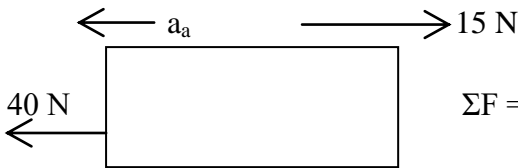


Şekil 2.15.

$$\Sigma F = ma$$

$$0,15 * 100 = (100 a_s) / g$$

$$a_s = 0,15 * g = 1,47 \text{ m/sn}^2$$



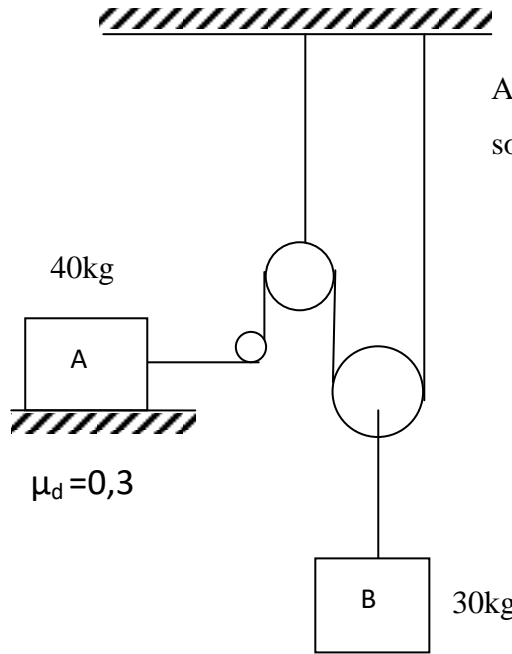
Şekil 2.16.

$$\Sigma F = ma$$

$$40 - 15 = (50 a_a) / g$$

$$a_a = 4,8 \text{ m/sn}^2$$

$$\text{Bağıl ivme} = 4,8 - 1,47 = 3,43 \text{ m/sn}^2$$

ÖRNEK

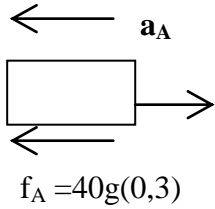
A ve B kütleleri aynı anda serbest bırakılırsa 1 sn sonra B'nin hızı ne olur. ($g=10 \text{ m/sn}^2$)

$$2S_B + S_A = L$$

$$2a_B + a_A = 0$$

$$a_A = -2a_B$$

Şekil 2.17.



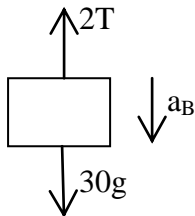
Şekil 2.18.

$$\Sigma F = ma$$

$$-T + 40g(0,3) = 40a_A$$

$$-T + 40g(0,3) = 40(-2a_B)$$

$$T - 40g(0,3) = 80a_B \dots\dots\dots 1$$



Şekil 2.19.

$$\Sigma F = ma$$

$$-2T + 30g = 30a_B \dots\dots\dots 2$$

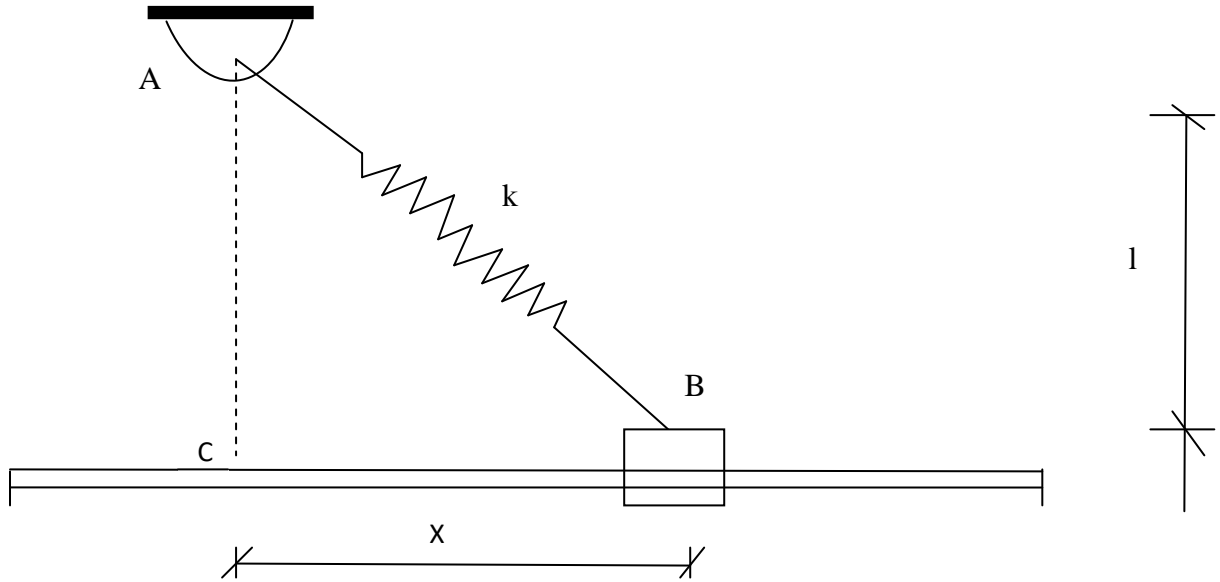
1 ve 2 denklemlerinin ortak çözümünden

$$a_B = 0,3095 \text{ m/sn}^2$$

$$V_B = 0,3095 \text{ m/sn}$$

ÖRNEK

Katsayısı “k” olan bir AB yayı A ucundan bir mafsala B ucundan ise w ağırlığındaki bir bileziğe bağlıdır. Kuvvet sıfırken yayın boyu l ise bileziğin ivmesini x uzaklığının fonksiyonu olarak ifade ediniz. Sürtünme ihmal.



Şekil 2.20.

$$\Sigma F = ma$$

→ Yay kuvvetinin yatay bileşeni

$$F_{\text{yay}} = k \cdot \Delta l \quad \Delta l = \text{son boy} - \text{ilk boy}$$

$$\text{Son boy} = \sqrt{l^2 + x^2}, \quad \Delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l$$

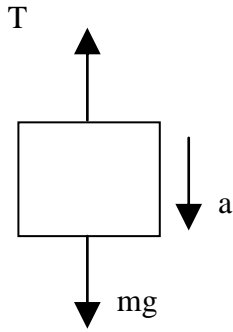
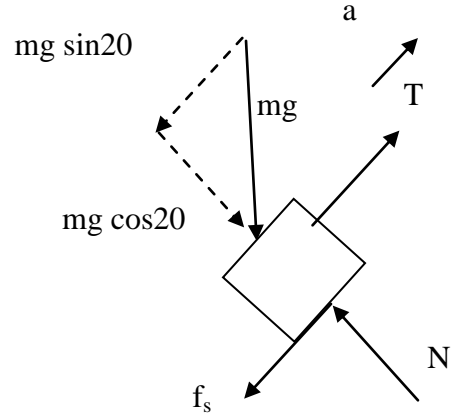
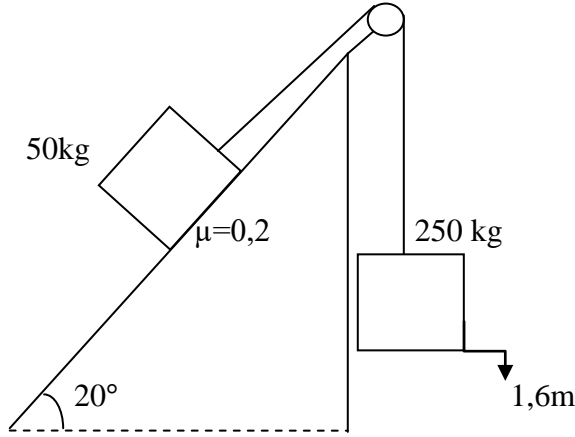
$$F_{\text{yay}} = k (\sqrt{l^2 + x^2} - l)$$

$$\text{Yatay bileşeni} = k (\sqrt{l^2 + x^2} - l) \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

$$a = F/m \quad a = (g \cdot k)/w (\sqrt{l^2 + x^2} - l) \frac{x}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

ÖRNEK

Sistem serbest bırakılınca sistemin ivmesi ve ipteki gerilme ne olur? 250 kg lık cisim 1,6 m aşağıya indiğinde hızı ne olur ($g=10 \text{ m/s}^2$)



D'lambert prensibi

$$250 \cdot 10 - 50 \cdot 10 \cdot \sin 20 - 0,2 \cdot 50 \cdot 10 \cdot \cos 20 = 250 \cdot a + 50 \cdot a$$

$$2500 - 171,01 - 93,97 = 300 \cdot a$$

$$a = 2235,04 / 300 = 7,45 \text{ m/s}^2$$

250 kg cisim:

$$-T + 250 \cdot 10 = 250 \cdot 7,45$$

$$T = 637,5 \text{ N}$$

Kontrol:

$$T - mg \sin 20 - 0,2 mg \cos 20 = ma$$

$$T - 500 \sin 20 - 0,2 \cdot 500 \cdot \cos 20 = 50 \cdot 7,45$$

$$637,5 - 171,01 - 93,97 = 50 \cdot 7,45$$

$$372,5 = 372,5$$

$$\text{Hız: } v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x$$

$$v^2 = 2 \cdot 7,45 \cdot 1,6$$

$$v = 4,88 \text{ m/sn (sayfa 67)}$$

2.7. Maddesel Noktaların Eğrisel Hareketi

Eğrisel hareket yapan bir maddesel noktanın ivmesi daha önceki 3 tür bileşenlerden (dik bileşenler, teğetsel ve normal bileşenler, kutupsal bileşenler) herhangi birine göre ayrılır ve her doğrultu için Newton denklemi skaler olarak yazılır.

Dik bileşenler :

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z$$

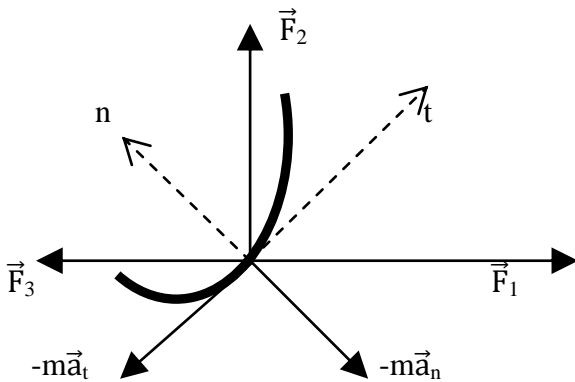
$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \quad \Sigma F_y = m\ddot{y} \quad \Sigma F_z = m\ddot{z}$$

Teğetsel ve normal bileşenleri :

$$\vec{t}_t \text{ ve } \vec{t}_n \text{ doğrultularında} \quad \Sigma F_t = ma_t \quad \Sigma F_n = ma_n$$

$$\text{yada, } \Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R = m v \omega \quad \omega: \text{açısal hız}$$

Dinamik denge:



Newton denklemini uygulamak yerine atalet vektörünü dış kuvvetlere ekleyerek denge denklemini yazmakta bir yöntem olarak kullanılır.

Şekil 2.21.

2.8. Newtonun Çekim Kanunu

Newton'un evrensel çekim kanununa göre “m ve M” kütleleri olan r uzaklıkta iki maddesel nokta birbirini

$$F=G \frac{Mm}{r^2}$$

şiddetinde kuvvetler ile çeker.

G:yer çekim sabiti, $G=(6,673 \pm 0,003) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ (SI)

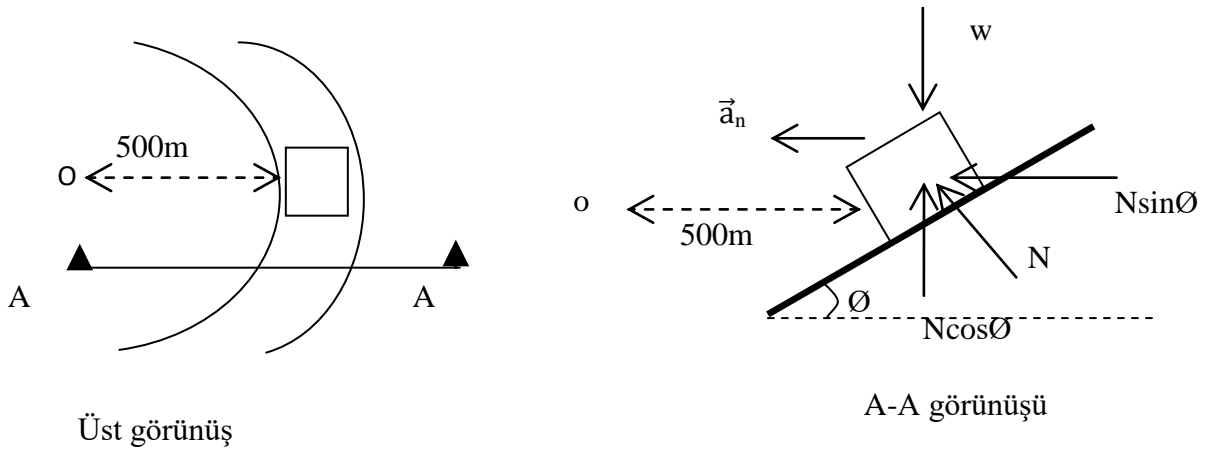
Yeryüzü ile cisim arasındaki çekim kuvveti cismin ağırlığıdır.

$$w = m g = G \frac{Mm}{r^2} \quad g = \frac{GM}{r^2} \quad r:\text{dünya merkezine uzaklık}$$

r değiştikçe g değişir yani kutuplar ile ekvatordaki g'ler aynı değildir.

ÖRNEK

Bir otomobil 500 m yarıçaplı deverli bir yolda 55km/sa hızla gidiyor. Hiç sürtünme olmadığına göre otomobilin kaymaması için dever açısı ne olmalı.



Şekil 2.22.

$$55 \text{ km/sa}=15,28 \text{ m/sn}$$

$$\text{Düşey doğrultu: } \Sigma F = ma$$

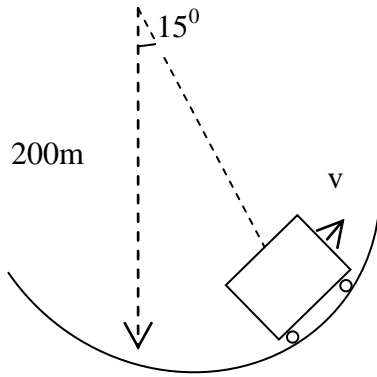
$$w = N \cos \theta \dots\dots\dots 1$$

$$\text{Normal doğrultu: } \Sigma F_n = m \frac{v^2}{R}$$

$$N \sin \theta = \frac{w}{g} \frac{15,28^2}{500} \dots\dots\dots 2$$

$$2/1 \quad \tan \theta = 0,0461 \quad \theta = 2,72^\circ$$

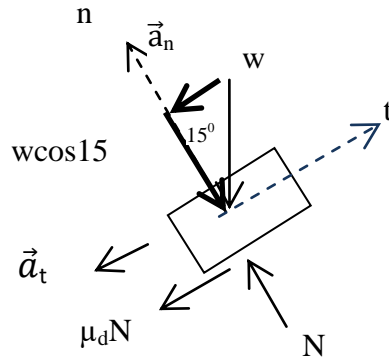
ÖRNEK



Şekil 2.23.

20 kN ağırlığındaki bir otomobil $v=60 \text{ km/sa}$ hız ile 200 m yarıçaplı eğimi artan bir yolda gidiyor. Eğer dinamik sürtünme katsayısı $\mu_d=0,55$ ise şekildeki konumda yavaşlama İvmesi ne olur. ($g=9,81 \text{ m/sn}^2$)

Normal doğrultuda:



Şekil 2.24.

$$60 \text{ km/sa}=16,67 \text{ m/sn}$$

$$N - w \cos 15 = \frac{v^2}{R} \frac{w}{g}$$

$$N = 20000 \cos 15 + \frac{16,67^2}{200} \frac{20000}{9,81}$$

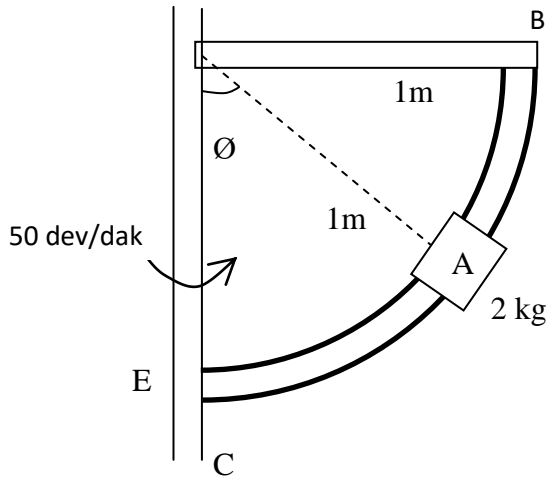
$$N = 22150 \text{ Newton}$$

$$\text{Teğet doğrultuda: } 20000 \sin 15 + (0,55)(22150) = \frac{20000}{9,81} a_t \quad a_t = 8,51 \text{ m/san}^2$$

ÖRNEK

Gürültü yapma ahşap el davul





Şekil 2.25.

Dairesel bir çubuk $w=50$ dev/dak açısal hızla dönmektedir. A bloku çubuk üzerinde sürtünmesiz kayabiliyor. kütlesi 2 kg olduğuna göre hangi θ açısında dengede olur. ($g = 10 \text{ m/sn}^2$)

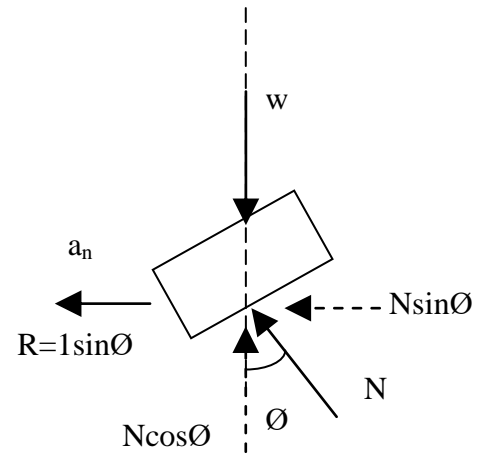
$$50 \text{ dev/dak} = 50 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ sn}} = 5,23 \text{ rad/sn}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R \cdot w)^2}{R} = R w^2 = 1 \sin \theta (5,23)^2$$

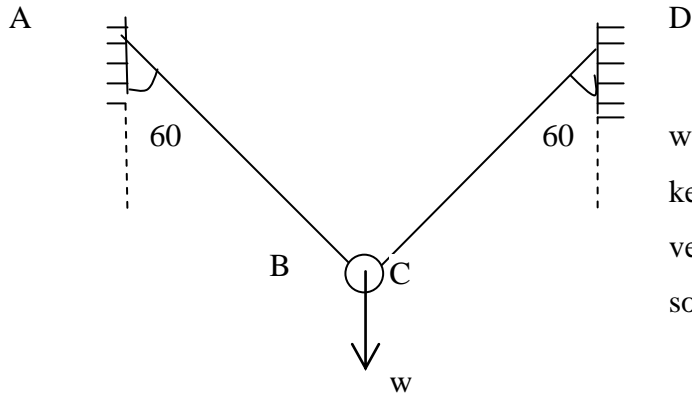
$$\Sigma F_y = 0 \quad 2 \cdot 10 - N \cos \theta = 0$$

$$\Sigma F_x = m a_n \quad N \sin \theta = 2 \sin \theta (5,23)^2$$

$$\theta = 69,0^\circ$$

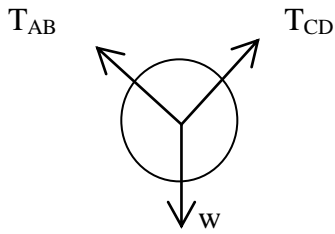


Şekil 2.26.

ÖRNEK

Şekil 2.27.

w ağırlığı iki tel ile tutulmaktadır. AB teli kesilirse CD telindeki gerilme kesilmeden önce ve kesilmeden sonra nedir? kesmeden hemen sonra ivme nedir ?

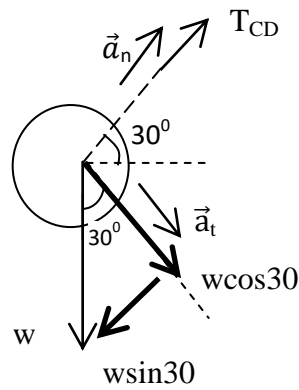


Şekil 2.28.

$$\Sigma F_x = 0 \quad T_{AB} \cos 30 = T_{CD} \cos 30$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \frac{1}{2} * 2 T_{CD} = w \quad T_{CD} = w$$

Kesmeden sonra:



Şekil 2.29.

İlk anda hız sıfırdır.

$$\Sigma F_n = m a_n \quad \Sigma F_n = 0 \quad T_{CD} - w \sin 30 = 0$$

$$T_{CD} = w/2 \text{ olur.}$$

$$\Sigma F_t = m a_t \quad w \cos 30 = m a_t \quad a_t = g \cos 30 = 0,866g$$