Rastgele Değişkenlerin Dağılımları

Mühendislikte İstatistik Metotlar

Çukurova Üniversitesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

1

- **NOT:** Bu ders materyali sadece ilgili bölümün mevcut dönemi için geçerlidir. Her yıl güncellenebilmektedir. Sadece kayıtlı olduğunuz ders için kullanılabilir. Ders harici her türlü paylaşım yasaktır, herhangi başka bir yerde yayımlanamaz.

Ç.Ü. İnş.Müh.Böl.

2

KESİKLİ (AYRIK, SÜREKSİZ) REASTGELE DEĞİKENLERİN DAĞILIMLARI

- Böyle bir rastgele değişkene ait çeşitli olayların olasılıkları;

$$P(x_i) = P(X = x_i)$$

şeklinde xi değerlerinin hizasında birer düşey çizgi ile gösterilirse bu değişkenin olasılık kütle fonksiyonu (**o.k.f**) elde edilmiş olur. Düşey çizgilerin toplamı daima 1 ‘e eşittir.

$$\sum_{x_i} p(x_i) = 1$$

$$F(x_i) = P(X \le x_i)$$

Pratikte önem taşıyan bu fonksiyona eklenik dağılım fonksiyonu (e.d.f) denilir. F(x) fonksiyonu 0 dan 1 e doğru gittikçe artan basamaklı bir fonksiyondur.

3

Örnek

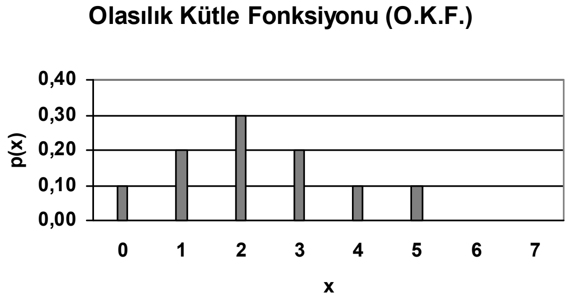
- Bir trafik ışığında belirli bir anda durmakta olan araç sayısı X ile gösterilirse ve yapılan gözlemler sonucu aşağıdaki olasılıkların belirlenmiş olduğu kabul edilirse, bu değişkene ait olasılık kütle fonksiyonu ve eklenik dağılım fonksiyonunu çiziniz.

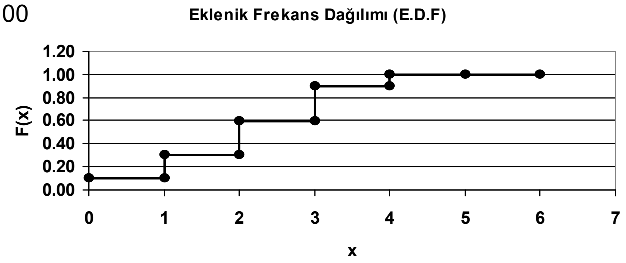
p (0) = 0.10
p (1) = 0.20
p (2) = 0.30
p (3) = 0.20
p (4) = 0.10
p (5) = 0.10
p (6) = 0.00
p (7) = 0.00

4

Çözüm

p (0) = 0.10
p (1) = 0.20
p (2) = 0.30
p (3) = 0.20
p (4) = 0.10
p (5) = 0.10
p (6) = 0.00
p (7) = 0.00





5

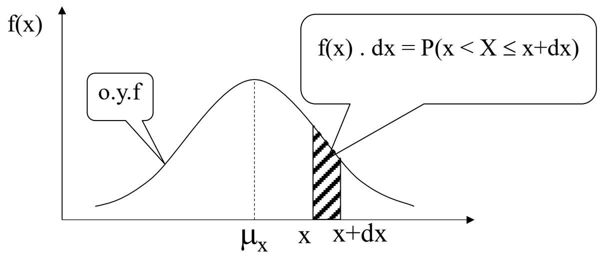
Sürekli Rastgele Değişkenlerin Dağılımları

- Sürekli rastgele değişkenin alabileceği değerlerin sayısı sonsuzdur.
- Sürekli rastgele değişkenin alabileceği değerlerin sayısı sonsuz, bu değerleri alma olsaılıkları toplamı ise 1 ‘e eşit olacağından X = x şeklindeki basit olayların olasılıkları sıfıra gidecektir.
- Bu nedenle sürekli rastgele değişkenlerde basit olayların olasılıkları yerine değişkenin x ile x+dx arasındaki bir aralıkta kalması şeklindeki bileşik olayın olasılığını tanımlamak yoluna gidilir.
- Bu durumda Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (O.Y.F.):

$$f(x)\,.\,dx = P\,(x < X \leq x + dx)$$

6

Sürekli Rastgele Değişkenlerin Dağılımları



Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx$$

7

Sürekli Rastgele Değişkenlerin Dağılımları

- Değişkenin (-∞, +∞) aralığında bir değer alması kesin (olasılığı 1 olan) bir olay olduğuna göre f(x) daima

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1$$

- koşuluna uyar. Sürekli değişken halinde eklenik dağılım fonksiyonunun tanımı değişmez:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- Eklenik dağılım fonksiyonu daima şu koşulları sağlar:

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- $F(-\infty) = 0$
- $F(\infty) = 1$
- $\varepsilon>0$ için $F(x+\varepsilon) \geq F(x)$
- $F(x2) - F(x1) = P(x1 < X \leq x2)$

8

Dağılımların Parametreleri

PARAMETRE	Sürekli	Süreksiz: Sınıflara Ayrılmamış	Süreksiz: Sınıflara Ayrılmış
Ortalama (Beklenen Değer)	$\mu_x = E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x.p(x).dx$	$\mu_x = E_x = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	$\mu_x = E_x = \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i.f(x_i)$
Varyans	$Var_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2.p(x).dx$	$Var_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i-\bar{x})^2$	$Var_x = \sum_{i=1}^{m} (x_i-\bar{x})^2.f(x_i)$
Standart Sapma	$\sigma_x = \sqrt{Var_x}$		
Değişim Katsayısı	$C_{v_x} = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$		

9

Dağılımların Parametreleri

PARAMETRE	Sürekli	Süreksiz: Sınıflara Ayrılmamış	Süreksiz: Sınıflara Ayrılmış
Çarpıklık Katsayısı	$C_{sx} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^3.p(x).dx}{\sigma^3}$	$C_{sx} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i-\bar{x})^3}{\sigma^3}$	$C_{sx} = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i-\bar{x})^3.f(x_i)}{\sigma^3}$
Basıklık Katsayısı	$k_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^4.p(x).dx}{\sigma^4}$	$k_x = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i-\bar{x})^4}{\sigma^4}$	$k_x = \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i-\bar{x})^4.f(x_i)}{\sigma^4}$

10

Örnek

Aşağıdaki frekans tablosuna göre, Ortalama, Varyans, Standart Sapma, Çarpıklık Katsayısı ve Basıklık Katsayısını bulunuz.

Sınıf	% f
10-20	9
20-30	18
30-40	18
40-50	27
50-60	18
60-70	9

Tarih	Qmax
12.3.1981	21
14.2.1982	22
10.3.1983	45
7.2.1984	37
22.3.1985	48
20.4.1986	67
12.4.1987	51
10.3.1988	45
11.5.1989	34
12.3.1990	59
2.4.1991	11

11

Sınıf	Sınıf Orta Noktaları (X)	% f	Ortalama	Varyans	Çarpıklık	Basıklık
[1]	[2]	[3]	[4]=[2]*[3]	[5]=[2]-(**40.05**)^2*[3]	[6]=[2]-(**40.05**)^3*[3]	[7]=[2]-(**40.05**)^4*[3]
10-20	15	0.09	1.35	56.48	-1414.70	35438.34
20-30	25	0.18	4.50	40.77	-613.60	9234.61
30-40	35	0.18	6.30	4.59	-23.18	117.07
40-50	45	0.27	12.15	6.62	32.75	162.10
50-60	55	0.18	9.90	40.23	601.45	8991.61
60-70	65	0.09	5.85	56.03	1397.83	34875.84
			40.05	**204.71**	**-19.46**	**88819.57**

Ortalama = 40.05

Varyans = 204.71

$$s_x = \sqrt{Varyans} = \sqrt{204.71} = 14.31$$

$$Cs_x = \frac{-19.46}{14.31^3} = -0.01 \qquad k_x = \frac{88819.57}{14.31^4} = 2,12$$

12

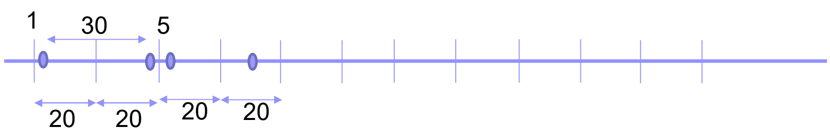
ÖNEMLİ OLASILIK DAĞILIM FONKSİYONLARI

Binom Dağılımı

- Bir kesikli rastgele değişken için sadece 2 olay mevcutsa (olmak veya olmamak, ya da gerçekleşmek veya gerçekleşmemek gibi), ve bunların olasılıkları p ve q = 1 - p ile gösterilirse; n elemanlı bir örnek için olasılığı p olan olayın x defa görülmesi olasılığı:

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad \binom{n}{x} = \frac{n(n-1)...(n-x+1)}{1.2...(x-1)x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

- Rastgele değişkene ait birbirinden bağımsız n deneme yapılması durumunda olasılığı p olan olayın x defa görülmesi olasılığı binom dağılımına uyar ve bu denemelere de istatistikte ***Bağımsız Bernoulli Denemeleri*** adı verilir.



Örnek

- Bir barajın dolu savağı 20 yıllık taşkın debisine göre boyutlandırıldığına göre, barajın 50 yıllık ömrü boyunca söz konusu debinin sırasıyla 0, 1, 2, 3 defa görülmesi olasılıklarını hesaplayınız.

- **Çözüm:**
- Debinin görülme olasılığı $\Rightarrow$ p = 1/20 = 0.05
- Debinin görülmeme olasılığı $\Rightarrow$ q = 1 - p = 1 - 0.05 = 0.95
- 50 yıl boyunca hiç görülmeme olasılığı $\Rightarrow$

$$P(0)=\binom{50}{0}0.05^{0}.0.95^{50-0}=\frac{50!}{0!\,(50-0)!}0.05^{0}.0.95^{50}=0.077$$

- 50 yıl boyunca 1 defa görülme olasılığı $\Rightarrow$

$$P(1)=\binom{50}{1}0.05^{1}.0.95^{50-1}=\frac{50!}{1!\,(50-1)!}0.05^{1}.0.95^{49}=0.202$$

- 50 yıl boyunca 2 defa görülme olasılığı $\Rightarrow$

$$P(2)=\binom{50}{2}0.05^{2}.0.95^{50-2}=\frac{50!}{2!\,(50-2)!}0.05^{2}.0.95^{48}=0.261$$

- 50 yıl boyunca 3 defa görülme olasılığı $\Rightarrow$

$$P(3)=\binom{50}{3}0.05^{3}.0.95^{50-3}=\frac{50!}{3!\,(50-3)!}0.05^{3}.0.95^{47}=0.220$$

Poisson Dağılımı

- Bir kesikli rastgele değişken için sadece 2 olay mevcut olsun(olmak veya olmamak, ya da gerçekleşmek veya gerçekleşmemek gibi),
- bunların olasılıkları p ve q = 1 - p ile gösterilsin.
- Ancak bu olaslıkılardan biri çok küçükse ($p \to 0$), buna karşılık n deneme sayısı çok büyükse ($n \to \infty$) ve np çarpımı sonlu ise: n denemede olasılığı p olan olayın x defa görülmesi olasılığı:

$$P(x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!} \qquad \lambda = n.p$$

17

Örnek

- Bir barajın dolu savağı 1000 yıllık taşkın debisine göre boyutlandırıldığına göre, barajın 100 yıllık ömrü boyunca söz konusu debinin hiç görülmemesi veya 1 defa görülmesi olasılıklarını hesaplayınız.
- **Çözüm:**

n = 100 p = 1/1000 = 0.001

λ = n.p = 100 . 0.001 = 0.10

$$P(0) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0.10^0 . e^{-0.10}}{0!} = 0.905$$

$$P(1) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!} = \frac{0.10^1 . e^{-0.10}}{1!} = 0.091$$

18

- ***Geometrik Dağılım***

- Bağımsız Bernoulli denemelerinde ilk başarının x inci denemede görülmesi olasılığı:

$$P(x) = q^{x-1}.p$$

- Bu dağılımın olasılık dağılım fonksiyonu ise:

$$F(x) = 1 - q^{x}$$

- şeklindedir.

Örnek

- Zar atma olayında, ilk atışta 6 gelmesi olasılığı, ilk defa ikinci atışta 6 gelme olasılığı ve ilk defa üçüncü atışta 6 gelme olasılığını hesaplayınız.

- **Çözüm:**

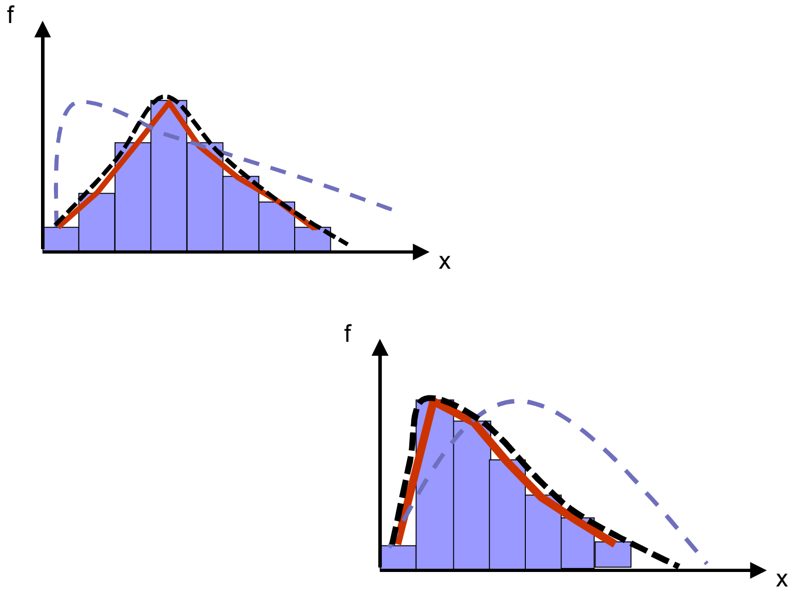
p = 1/6

q = 1 - p = 1 - 1/6 = 5/6

$$P(X=1) = q^{1-1}.p = (\frac{5}{6})^0.(\frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$$

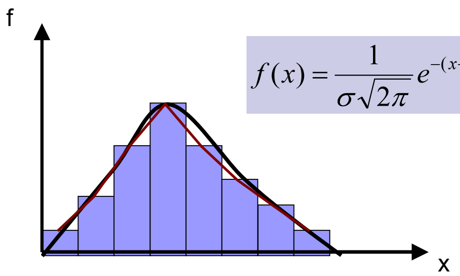
$$P(X=2) = q^{2-1}.p = (\frac{5}{6})^1.(\frac{1}{6}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X=3) = q^{3-1}.p = (\frac{5}{6})^2.(\frac{1}{6}) = \frac{25}{216}$$



Sürekli Rastgele Değişkenlerin Dağılımları

Normal Dağılım (Gauss Dağılımı)



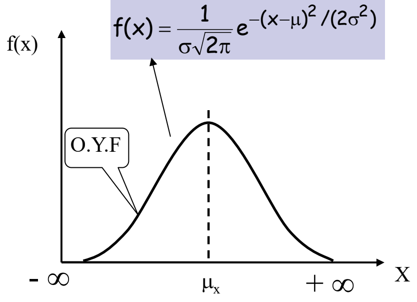
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad -\infty < x < \infty$$

- Dağılımın iki parametresi vardır:
  - μ ($-\infty < \mu < \infty$) (rastgele değişkenin ortalaması)
  - σ ($\sigma > 0$) (rastgele değişkenin standart sapması)

Normal Dağılım (Gauss Dağılımı)

- **Normal dağılım simetrik bir dağılımdır.**
- $C_s = 0$ (Çarpıklık Katsayısı)
- k = 3 (kurtosis (basıklık) katsayısı)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$



23

Normal Dağılım (Gauss Dağılımı)

- Bir rastgele değişkenin **a** ve **b** arasında bir değer alma olasılığı:

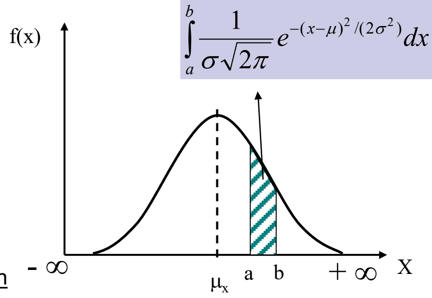
$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

- Bu denklemin normal integrasyon teknikleri ile çözümü oldukça güçtür

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

standart normal değişken

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

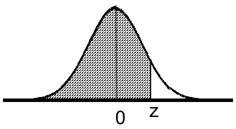


- Bu durumda normal dağılım, ortalaması **$\mu = 0$**, standart sapması **$\sigma = 1$** olan standart normal dağılım adını alır.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty$$

24

Normal Dağılım Tablosu



- **Standart Normal dağılım Eğrisi Altında Kalan Alan**

F(x) = P (Z ≤ z)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

$p_{z=0.25} = 0.5987$

0,03

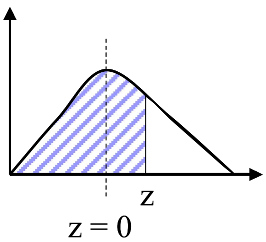
$\mathbf{z = 0.23} = 0.23$

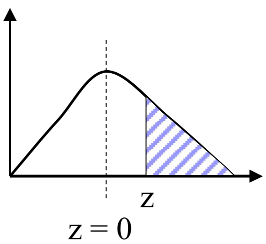
$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

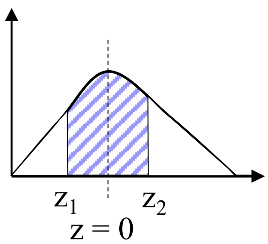
$p_{z=0.81} = 0.7910$

$p_{z=0.65} = 0.7422$

Normal Dağılım







$P(X < x) = P(Z < z)$

$P(X > x) = P(Z > z)$

$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$

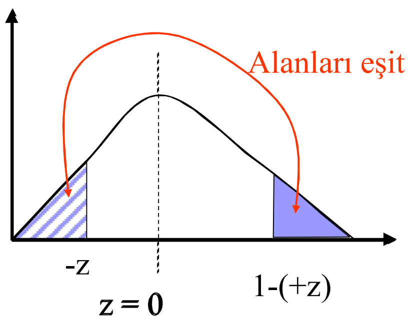
Normal Dağılım

- **z** nin (**-**) negatif değerleri Normal Dağılım tablosundan okunurken, dağılımın simetrikliğinden dolayı **z** nin (**+**) değerinin karşılığı tablodan okunur ve **1** den çıkarılır.

$z = 0,23 \Rightarrow p_{0,25} = 0,5910$

$z = -0,23 \Rightarrow p_{-0,23} = 1 - z(+0,23)$

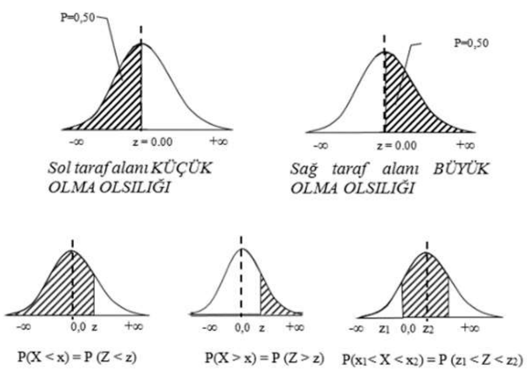
$P_{-0,23} = 1 - 0,5910 = 0,409$



27

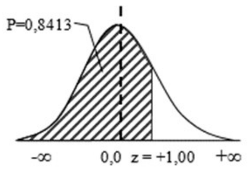
Tablo Okuma Uygulamaları

- Tablodan okunan değerler olasılık değerleridir (0,8413 = % 84,13)
- Tablodan okunan değerler daima sol taraf alanıdır (küçük olma olasılığı)
- Tabloda z 'nin negatif değerleri yoktur. z nin negatif değerlerinin karşılığı olan alanları bulmak için z nin pozitif değeri okunur, okunan değer 1 ' den çıkartılır

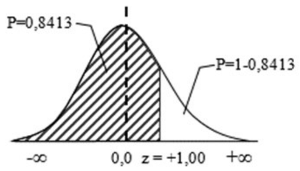


28

Tablo Okuma Uygulamaları



z = 1,00 için p = 0,8413



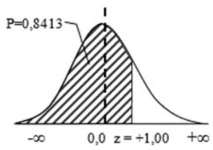
z = -1,00 için önce z = +1.00 in değeri okunur.

z = +1.00 için p = 0,8413 sonra 1'den çıkarılır.

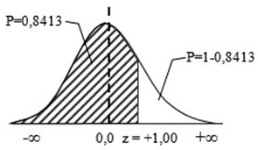
z =-1,00 = 1- 0,8413 =0,1587

29

Tablo Okuma Uygulamaları



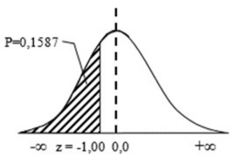
z = 1,00 için p = 0,8413



z = -1,00 için önce z = +1.00 in değeri okunur.

z = +1.00 için p = 0,8413 sonra 1'den çıkarılır.

z =-1,00 = 1- 0,8413 =0,1587



z = -1.00 için p = 0,1587 dir.

30

Tablo Okuma Uygulamaları

z belli iken olasılığın (p) bulunması

$z = 0,35$ için $p = 0,6368$ (sol taraf alanı, küçük olma olasılığı)
$z = 1,68$ için $p = 0,9535$ (sol taraf alanı, küçük olma olasılığı)
$z = 2,75$ için $p = 0,9970$ (sol taraf alanı, küçük olma olasılığı)

$z = -1,83$ için $p_{-1,83} = 1 - p_{+1,83} = 1 - 0,9664 = 0,0336$
$z = -1,42$ için $p_{-1,42} = 1 - p_{+1,42} = 1 - 0,9222 = 0,0778$
$z = -1,83$ için $p_{-1,83} = 1 - p_{+1,83} = 1 - 0,7734 = 0,2266$

Olasılık (p) belli iken z 'nin bulunması

$P = \%\,75$ $p = 0,7500$ $z_{0,75} = 0,67$
$P = \%\,99$ $p = 0,9900$ $z_{0,99} = 2,33$
$P = \%\,95$ $p = 0,9500$ $z_{0,95} = 1,64$
$P = \%\,90$ $p = 0,9000$ $z_{0,75} = 1,28$
$P = \%\,25$ $p = 0,2500$ (Tablo içerisinde bu değer yok. Tablodaki en küçük değer 0,50000 dir. O halde z negatiftir. Bu durumda
$1 - 0,25 = 0,75$ $z_{0,75} = 0,67$ $z_{0,25} = -\,0,67$

$P = \%\,43$ $p = 0,4300$ (Tablo içerisinde bu değer yok. Tablodaki en küçük değer 0,50000 dir. O halde z negatiftir. Bu durumda
$1 - 0,43 = 0,57$ $z_{0,57} = 0,18$ $z_{0,43} = -\,0,18$

31

ÖRNEK

Örnek İmal edilen ampullerin ortalama ömrü 800 saat, standart sapması 40 saattir. Ampulün ömrünün normal dağılım gösterdiği bilindiğine göre bir ampulün;

- 778 saatten daha fazla bir ömre,
- 778 saatten daha az bir ömre
- 834 saatten daha fazla bir ömre
- 834 saatten daha az bir ömre
- 778 saat ile 834 saat arasında bir ömre sahip olması olasılığını

bulunuz.

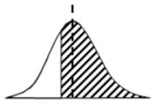
32

Çözüm

a) X = 778 sa $z=\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}=\frac{778-800}{40}=-0.55$

F(- 0.55) = 1 - F(0.55) = 1 - 0.7088 = 0.2912

P(X > 778) = 1- F(-0.55) = 1 - 0.2912 = 0.7088 ≅ % 71



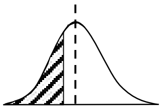
X = 778

z = - 0.55

b) X = 778 sa $z=\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}=\frac{778-800}{40}=-0.55$

F(- 0.55) = 1 - F(0.55) = 1 - 0.7088 = 0.2912

P(X < 778) = F(-0.55) = 0.2912 ≅ % 29



X = 778

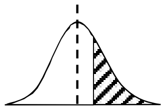
z = - 0.55

c)

X = 834 sa $z=\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}=\frac{834-800}{40}=0.85$

F(0.85) = 0.8023

P(X > 834) = 1- F(0.85) = 1 - 0.8023 = 0.1977 ≅ % 20



X = 834

z = 0.85

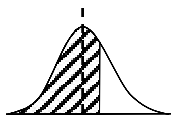
33

d)

X = 834 sa $z=\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}=\frac{834-800}{40}=0.85$

F(0.85) = 0.8023

P(X < 834) = F(0.85) = 0.8023 ≅ % 80



X = 834

z = 0.85

e) X_1 = 778 sa $z_1=\frac{x_1-\mu_X}{\sigma_X}=\frac{778-800}{40}=-0.55$

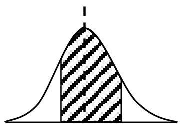
X_2 = 834 sa $z_2=\frac{x_2-\mu_X}{\sigma_X}=\frac{834-800}{40}=0.85$

F(- 0.55) = 1 - F(0.55) = 1 - 0.7088 = 0.2912

F(0.85) = 0.8023

P(778 < X < 834) = F(0.85) - F(-0.55)

P(778 < X < 834) = 0.8023 - 0.2912 = 0.5111 ≅ % 51



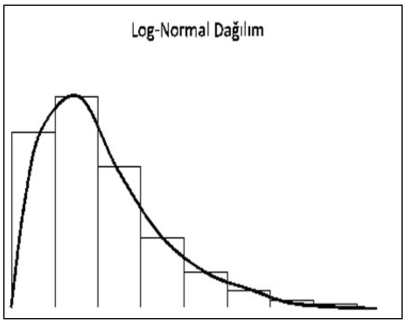
X_1 = 778 X_2 = 834

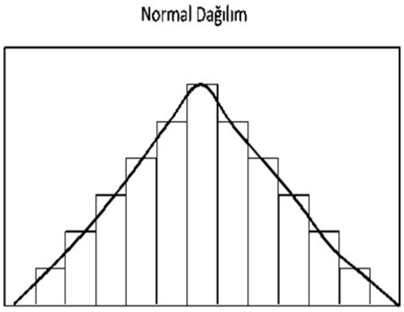
z_2 = - 0.55 z_2 = 0.85

34

Sürekli Rastgele Değişkenlerin Dağılımları

Log-Normal Dağılım





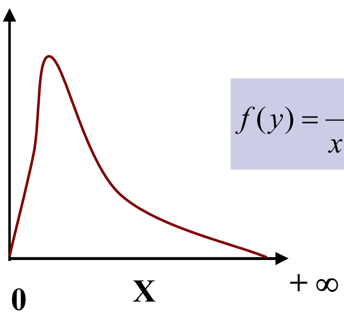
35

Sürekli Rastgele Değişkenlerin Dağılımları

Log-normal Dağılım

- Rastgele değişkene **y = ln (x)** şeklinde logaritmik dönüşüm uygulandığında dönüştürülmüş **Y** değişkeninin dağılımı normal ise **X** değişkeninin dağılımı lognormaldir

- $x \geq 0$
- Cs > 0
- Normal dağılım tablosu kullanılır



$$f(y) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-[\ln(x)-\mu_y]^2/(2\sigma_y^2)} \qquad x \geq 0$$

$$\mu_y = \ln\left[\frac{\mu_x}{\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2}+1\right)^{1/2}}\right] \qquad \sigma_y = \left[\ln\left(\frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2}+1\right)\right]^{1/2}$$

36

ÖRNEK

Bir yağış ölçeğinden elde edilen yıllık ortalama yağışlara ait ölçüm sonuçları tabloda verilmiştir.

a) Normal Dağılıma

b) Log-Normal Dağılıma

göre herhangi bir yılda yıllık ortalama yağışın 200 ila 300 mm arasında kalma olasılığını bulunuz.

Yıllar	Yılık Yağış (mm) (X)
1986	250
1987	180
1988	270
1989	240
1990	190
1991	210
1992	170
1993	240
1994	260
1995	220

37

ÇÖZÜM

a) Normal Dağılıma göre :

Normal Dağılım için Parametreler hesaplanır:

	Yılık Yağış (mm)	
	X	$(x_1-\mu_x)^2$
1986	240	100
1987	190	1600
1988	280	2500
1989	240	100
1990	190	1600
1991	200	900
1992	170	3600
1993	290	3600
1994	280	2500
1995	220	100
∑x =	2300	16600

$$\mu_x = E_x = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{2300}{10} = 230\ mm$$

$$Var_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{16600}{10} = 1660\ mm^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{Var_x} = \sqrt{1660} = 40{,}74\ mm$$

38

$$x_1 = 200 \ \text{mm} \ \Rightarrow \ z_1 = \frac{x_1-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{200-230}{41} = -0{,}91 \ ;$$

$$x_2 = 300 \ \text{mm} \ \Rightarrow \ z_2 = \frac{2-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{300-230}{41} = 2{,}13 \ ;$$

$$P(200 < X < 300) = F(2.13) - F(-0.91) = F(2.13) - (1 - F(+0.91))$$

$$= 0.9834 - (1 - 0.8186) = 0.802 = \%\ 80$$

39

b) Log-Normal Dağılıma göre:

Log-normal dağılım için y = ln(x) dönüşümü yapılarak y değerlerinin parametreleri hesaplanır:

	Yıllık Yağış (mm) X	y=ln x	$(y-\mu_y)^2$
	240	5.481	0.003
	190	5.247	0.031
	280	5.635	0.045
	240	5.481	0.003
	190	5.247	0.031
	200	5.298	0.015
	170	5.136	0.082
	290	5.670	0.061
	280	5.635	0.045
	220	5.394	0.001
Σy =		54,223	0,318

$$\mu_y = E_y = \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{54{,}223}{10} = 5.422$$

$$Var_y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{0{,}318}{10} = 0{,}032$$

$$\sigma_y = \sqrt{Var_y} = \sqrt{0{,}032} = 0{,}178$$

40

$$x_1 = 200 \text{ mm} \Rightarrow y_1 = \ln(200) = 5.30 \quad \Rightarrow z_1 = \frac{y_1 - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{5{,}30 - 5{,}422}{0{,}178} = -0{,}69$$

$$x_2 = 300 \text{ mm} \Rightarrow y_2 = \ln(300) = 5{,}70 \quad \Rightarrow z_2 = \frac{y_2 - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{5{,}70 - 5{,}422}{0{,}178} = 1{,}58$$

$$P(200 < X < 300) = P(5.70 < Y < 5{,}30) = F(1.58) - F(-0.69)$$

$$= F(1.58) - (1 - F(+0.69)) = 0.9429 - (1 - 0.7549) = 0.698 = \%\ 70$$

41

ÖRNEK

Örnek: Bir yağış ölçeğinden elde edilen yıllık ortalama yağışlara ait ölçüm sonuçları tabloda verilmiştir.

- Normal Dağılıma
- Log-Normal Dağılıma

göre herhangi bir yılda yıllık ortalama yağışın 300 ila 450 mm arasında kalma olasılığını bulunuz.

Yıllar	Yılık Yağış (mm) (X)
1986	220
1987	350
1988	460
1989	520
1990	640
1991	540
1992	320
1993	180
1994	300
1995	410

42

ÇÖZÜM

- a) Normal Dağılıma göre :

Normal Dağılım için Parametreler hesaplanır:

	Yıllık Yağış (mm) X	$(x-\bar{x})^2$
1986	220	30276
1987	350	1936
1988	460	4356
1989	520	15876
1990	640	60516
1991	540	21316
1992	320	5476
1993	180	45796
1994	300	8836
1995	410	256
Σx =	3940	194640

$$\mu_x = E_x = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{3940}{10} = 394 \text{ mm}$$

$$Var_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{194640}{10} = 19464 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{Var_x} = \sqrt{19464} = 140 \text{ mm}$$

$$x_1 = 300 \text{ mm} \Rightarrow z_1 = \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{300-394}{140} = -0.67$$

$$x_2 = 450 \text{ mm} \Rightarrow z_2 = \frac{x_2 - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{450-394}{140} = 0.40$$

P(300<X<450) = F(0.40) - F(-0.67) = F(0.40) - (1 - F(+0.67))
= 0.6554 - (1 - 0.7486) = 0.404 = % 40

- b) Log-Normal Dağılıma göre:

Log-normal dağılım için y = ln(x) dönüşümü yapılarak y değerlerinin parametreleri hesaplanır:

	y=ln x	$(y-\hat{y})^2$
	5,394	0,264
	5,858	0,002
	6,131	0,050
	6,254	0,120
	6,461	0,307
	6,292	0,148
	5,768	0,019
	5,193	0,510
	5,704	0,041
	6,016	0,012
Σy =	59,071	1,474

$$\mu_y = E_y = \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i = \frac{59.071}{10} = 5.907$$

$$Var_y = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1.474}{10} = 0.147$$

$$\sigma_y = \sqrt{Var_y} = \sqrt{0.147} = 0.384$$

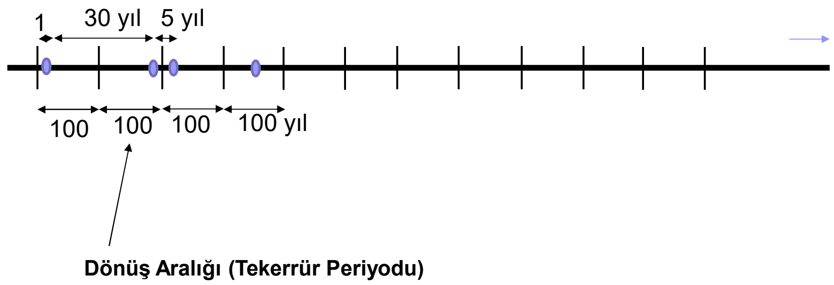
$$x_1 = 300 \text{ mm} \Rightarrow y_1 = \ln(300) = 5.704 \Rightarrow z_1 = \frac{y_1 - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{5.704-5.907}{0.384} = -0.53$$

$$x_2 = 450 \text{ mm} \Rightarrow y_2 = \ln(450) = 6.109 \Rightarrow z_2 = \frac{y_2 - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{6.109-5.907}{0.384} = 0.53$$

P(300<X<450) = P(5.704<Y<6.109) = F(0.53) - F(-0.53) = F(0.53) - (1 - F(+0.53))
= 0.7019 - (1 - 0.7019) = 0.404 = % 40

Ekstrem Değer Dağılımları

Dönüş Aralığı (Tekerrür Periyodu)



45

Ekstrem Değer Dağılımları

- **Dönüş Aralığı (Tekerrür Periyodu)**

$p + q = 1.0 \qquad p = 1 - q$

$p = 1/Tr \qquad q = 1 - (1/Tr)$

- p aşılma olasılığı
- q aşılmama olasılığı
- Tr tekerrür periyodu

46

Ekstrem Değer Dağılımları

- **Proje Periyodu ve Risk**

- Proje hesaplarında gözönüne alınan **Tr** yıllık taşkın debisinin proje periyodu olan **n** yıllık bir süre içinde **p_n** ile gösterilen bir aşılma olasılığı vardır ki bu olasılık kabul edilebilecek risk 'i ifade etmekte olup ekonomik düşüncelerle belirlenecek olan bir proje kriteridir.
-
- Dönüş Aralığı **Tr** yıl olan bir debinin **n** yıl boyunca hiç aşılmaması olasılığı;

$$p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{Tr}\right)^n$$

- aşılması olasılığı ise;

$$p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{Tr}\right)^n$$

Ekstrem Değer Dağılımları

Sıralanmış Örnek	Rank (m)	Frekans			Dönüş Aralığı			Risk		
		California	Weibull	Hazen	California	Weibull	Hazen	California	Weibull	Hazen
		m/n	m/(n+1)	(2m-1)/2n	n/m	(n+1)/m	2n/(2m-1)	$1-(1-1/Tr)^N$	$1-(1-1/Tr)^N$	$1-(1-1/Tr)^N$
435	1	0.083	0.077	0.042	12.0	13.0	24.0	0.648	0.617	0.400
345	2	0.167	0.154	0.125	6.0	6.5	8.0	0.888	0.865	0.799
256	3	0.250	0.231	0.208	4.0	4.3	4.8	0.968	0.957	0.939
234	4	0.333	0.308	0.292	3.0	3.3	3.4	0.992	0.988	0.984
167	5	0.417	0.385	0.375	2.4	2.6	2.7	0.998	0.997	0.996
154	6	0.500	0.462	0.458	2.0	2.2	2.2	1.000	0.999	0.999
127	7	0.583	0.538	0.542	1.7	1.9	1.8	1.000	1.000	1.000
120	8	0.667	0.615	0.625	1.5	1.6	1.6	1.000	1.000	1.000
90	9	0.750	0.692	0.708	1.3	1.4	1.4	1.000	1.000	1.000
87	10	0.833	0.769	0.792	1.2	1.3	1.3	1.000	1.000	1.000
56	11	0.917	0.846	0.875	1.1	1.2	1.1	1.000	1.000	1.000
45	12	1.000	0.923	0.958	1.0	1.1	1.0	1.000	1.000	1.000

- n = serideki eleman sayısıdır (örneğimizde n=12 dir)

Ekstrem Değer Dağılımları

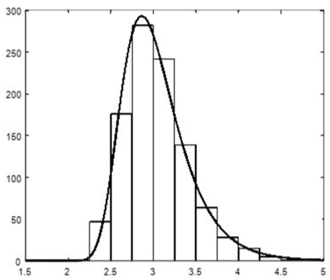
- Log-Normal Dağılım
- Gumbel Dağılımı
- Pearson Tip III Dağılımı
- Log-Pearson Tip III Dağılımı

Ekstrem Değer Dağılımları

GUMBEL DAĞILIMI (Fisher Tippett I) (Eksterm Değer Dağılımı Tip I)

- **Dağılımın genel OYF'u:**

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$



- **Dağılımın yer parametresi μ = 0 ölçek parametresi β = 1 alınırsa STANDART GUMBEL DAĞILIMI'nın OYF'si:**

$$f(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}$$

Ekstrem Değer Dağılımları

- **Gumbel Dağılımı (Fisher Tippett I)**

- Dağılımın OYF'u ve Tekerrür periyodu $q = e^{-e^{-y}}$

$q = 1 - p$

$y = a\,(X - X_o)$

- Büyük örnekler için (N > 30) $a = \dfrac{1.28255}{\sigma_x}$ $X_o = \mu_x - 0.45\,\sigma_x$

- Küçük örnekler için (N ≤ 30) $a = \dfrac{\sigma_n}{\sigma_x}$ $X_o = \mu_x - \bar{Y}_n \dfrac{\sigma_x}{\sigma_n}$

51

Gumbel Dağılımı (Fisher Tippett I)

N	$\bar{Y}_n$	σ_n
0	0.4952	0.9496
10	0.4952	0.9496
11	0.4997	0.9675
12	0.5035	0.9833
13	0.5070	0.9971
14	0.5100	1.0095
15	0.5129	1.0206
16	0.5154	1.0306
17	0.5177	1.0397
18	0.5198	1.0481
19	0.5218	1.0558
20	0.5235	1.0628
21	0.5252	1.0694
22	0.5267	1.0755
23	0.5282	1.0812
24	0.5296	1.0865
25	0.5308	1.0914
26	0.5320	1.0962
27	0.5333	1.1005
28	0.5342	1.1047
29	0.5353	1.1086
30	0.5362	1.1124
∞	0,4500	1,2826

52

Ekstrem Değer Dağılımları

Pearson Tip III Dağılımı

$$X = \mu_X + K.\sigma_X$$

Frekans faktörü

1/p

1/T

T Dönüş Aralığı (yıl):	1,0101	1,0526	1,1111	1,25	2	5	10	[illegible]	25	40	50	100	200	1000
Aşılma Olasılığı (p) (%):	99	95	90	80	50	20	10	5	4	2,5	2	1	0,5	0,1
Cs_x														
3,0	-0,667	-0,665	-0,660	-0,636	-0,396	0,420	1,180	2,003	2,278	2,867	3,152	4,051	4,970	7,152
2,9	-0,690	-0,688	-0,681	-0,651	-0,390	0,440	1,195	2,007	2,277	2,855	3,134	4,013	4,909	7,034
2,8	-0,714	-0,711	-0,702	-0,666	-0,384	0,460	1,210	2,010	2,275	2,841	3,114	3,973	4,847	6,915
2,7	-0,740	-0,736	-0,724	-0,681	-0,376	0,479	1,224	2,012	2,272	2,827	3,093	3,932	4,783	6,794

53

ÖRNEK 1)

12 yıllık kaydedilmiş değerleri bulunan taşkın serisinin ortalaması **18 m³/s**, standart sapması ise **3 m³/s** olarak hesaplanmıştır. **Normal Dağılım** kullanarak **100** yıl tekerrürlü taşkın pikini bulunuz.

Çözüm 1:

$\mu_x = 18 \qquad \sigma_x = 3$

Tr = 100 yıl $\Rightarrow p = \frac{1}{100} = 0.01$ 1- 0.01 = 0.99 $\Rightarrow$ z = K = 2.33 Normal Dağılım Tablosundan

$$z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} \qquad X = \mu_x + z \times \sigma_x$$

$$Q_{100} = \mu_x + z \times \sigma_x = 18 + 2.33 \times 3 = \mathbf{25} \;\; m^3/s$$

54

ÖRNEK 2)

18 yıllık kaydedilmiş değerleri bulunan taşkın serisinin **y=ln(x)** dönüşümü yapıldıktan sonra ortalaması **4**, standart sapması ise **0.8** olarak hesaplanmıştır. **Log-Normal Dağılım** kullanarak **50** yıl tekerrürlü taşkın pikini bulunuz.

Çözüm 2:

$y = \ln(x) \rightarrow X = e^y$

$y = \log(x) \rightarrow X = 10^y$

y = ln(x) $\quad$ **μ_y = 4** $\quad$ **σ_y = 0.8**

Tr = 50 yıl $\Rightarrow \quad p = \frac{1}{50} = 0.02$

Normal dağılım tablosu sol taraf alanlarına göre düzenlendiğinden

1 - 0.02 = 0.98 $\Rightarrow$ z = K = 2.055 (Normal Dağılım Tablosundan)

(z=2,05 veya z=2,06 da alabilirsiniz. Ya da ikisinin ortalamasını da alabilirsiniz.)

$$Y = \mu_y + z \times \sigma_y = 4 + 2.055 \times 0,8 = 5.644 \Rightarrow Q_{50} = e^{5,644} = \mathbf{283} \quad \boldsymbol{m^3/s}$$

55

ÖRNEK 3)

28 yıllık kaydedilmiş değerleri bulunan taşkın serisinin **y=ln(x)** dönüşümü yapıldıktan sonra ortalaması **2.6** , standart sapması ise **0.2** olarak hesaplanmıştır. **Log-Normal Dağılım** kullanarak **21 m³/s** lik bir debinin **kaç yılda bir gözleneceğini** bulunuz.

Çözüm 3:

y = ln(x) $\quad$ **μ_y = 2,6** $\quad$ **σ_y = 0.2**

$$z = \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y} = \frac{ln(21)-2.6}{0.2} = 2,22$$ z = 2,22 için $\quad$ q = 0,9868

p = 1 - q = 1 - 0,9868 = 0.0132 $\quad$ Tr = 1 / 0.0132 = **76 yıl**

56

ÖRNEK 4)

22 yıllık kaydedilmiş değerleri bulunan taşkın serisinin **y=log(x)** dönüşümü yapıldıktan sonra ortalaması **1,23** , standart sapması ise **0,08** olarak hesaplanmıştır. **Log-Normal Dağılım** kullanarak **25 m³/s** lik bir debinin **kaç yılda bir tekrarlanacağını** bulunuz.

Çözüm 4:

y = log(x) μ_y = **1,23** σ_y = **0,08**

$$z = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{\log(25) - 1.23}{0.08} = 2{,}099$$

z = 2,10 için q = 0,9821

p = 1 - q = 1 - 0.9821 = 0.0179 Tr = 1 / 0.0179 = **56 yıl**

ÖRNEK 5)

22 yıllık kaydedilmiş değerleri bulunan taşkın serisinin ortalaması **28 m³/s**, standart sapması ise **9 m³/s** olarak hesaplanmıştır. **Gumbel Dağılımı** kullanarak **56,3 m³/s** lik bir debinin **kaç yılda bir tekrarlanacağını** bulunuz.

Çözüm 5:

μ_x = **28** σ_x = **9**

N ≤ 30 olduğundan tablo kullanılır. N = 22 için ⇒ σ_n = 1,075 $\bar{Y}_n = 0{,}527$

$$a = \frac{\sigma_n}{\sigma_x} = \frac{1.075}{9} = 0{,}1194 \qquad X_o = \mu_x - \bar{Y}_n \frac{\sigma_x}{\sigma_n} = 28 - 0{,}527 \frac{9}{1.075} = 23{,}588$$

$$y = a(X - X_0) = 0.1194(56{,}3 - 23{,}588) = 3{,}906$$

$$q = e^{-e^{-y}} = e^{-e^{-3{,}906}} = 0{,}980 \qquad Tr = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-0{,}980} = \mathbf{50\ yıl}$$

ÖRNEK 6)

27 yıllık kaydedilmiş değerleri bulunan taşkın serisinin ortalaması **152 m^3/s**, standart sapması ise **43 m^3/s** olarak hesaplanmıştır. **Gumbel dağılımını** kullanarak **50**, **100** ve **1000** yıl **tekerrürlü taşkın piklerini** bulunuz.

Çözüm 6:

N = 27 yıl $\mu_x = 152\ m^3/s$ $\sigma_x = 43\ m^3/s$

N ≤ 30 olduğundan tablo kullanılır. N = 27 için ⇒ $\sigma_n = 1.101$ $\bar{Y}_n = 0.533$

$$a = \frac{\sigma_n}{\sigma_x} = \frac{1.101}{43} = 0.0256$$

$$X_o = \mu_x - \bar{Y}_n \frac{\sigma_x}{\sigma_n} = 152 - 0.533 \frac{43}{1.101} = 131.18$$

59

$$y = a(X - X_0) = 0.0256(X - 131.18)$$

$$q = e^{-e^{-y}} = e^{-e^{-(0.0256(X-131.18))}}$$

$$\boxed{X = Q = -\frac{\ln(-\ln q)}{0.0256} + 131.18}$$

a) T = 50 yıl $q = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{50} = 0.98$

$$Q_{50} = -\frac{ln(-\ln(0.98))}{0.0256} + 131.18 = \mathbf{283}\ \ \boldsymbol{m^3/s}$$

60

b) T = 100 yıl $q = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$

$$Q_{100} = -\frac{ln(-\ln(0.99))}{0.0256} + 131.18 = \mathbf{311}\ \ \boldsymbol{m^3/s}$$

c) T = 1000 yıl $q = 1 - \frac{1}{T} = 1 - \frac{1}{1000} = 0.9999$

$$Q_{1000} = -\frac{ln(-\ln(0.999))}{0.0256} + 131.18 = \mathbf{418}\ \ \boldsymbol{m^3/s}$$

61

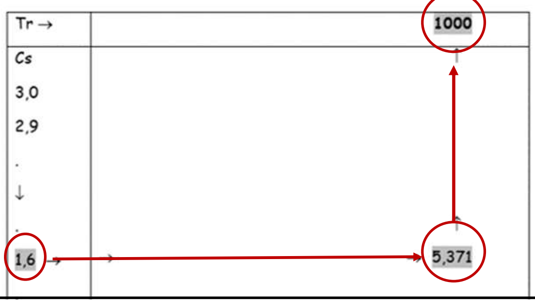
ÖDEV 7)

32 yıllık kaydedilmiş değerleri bulunan taşkın serisinin ortalaması **18 m³/s**, standart sapması **3 m³/s** , çarpıklık katsayısı ise **1.6** olarak hesaplanmıştır. **Pearson Tip III Dağılımı** kullanarak **34,113 m³/s** lik bir debi kaç yılda bir tekrarlanacağını bulunuz.

Çözüm 7:

μ_x = **18** σ_x = **3** Cs_x = **1.6**

$K = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = \frac{34{,}113-18}{3} = 5{,}371$ K = 5,371 için T = **1000 yıl** (Tablodan)



Pearson Tip III Tablosundan Okuma

62

ÖDEV 8)

50 yıllık kaydedilmiş değerleri bulunan taşkın serisinin ortalaması **246 m³/s**, standart sapması **140 m³/s**, Çarpıklık katsayısı ise **1.2** olarak hesaplanmıştır. Y = log (X) dönüşümü yapıldıktan sonraki ortalama **2.33 m³/s** standart sapma **0.24 m³/s**, çarpıklık katsayısı ise **0.18** olarak elde edilmiştir. **Pearson Tip III ve Log-Pearson Tip III** dağılımlarını kullanarak **100** ve **1000** yıl tekerrürlü taşkın piklerini bulunuz.

Çözüm 8:

$\bar{x} = 246\ m^3/s$ y = log(X); $\bar{y} = 2.33\ m^3/s$

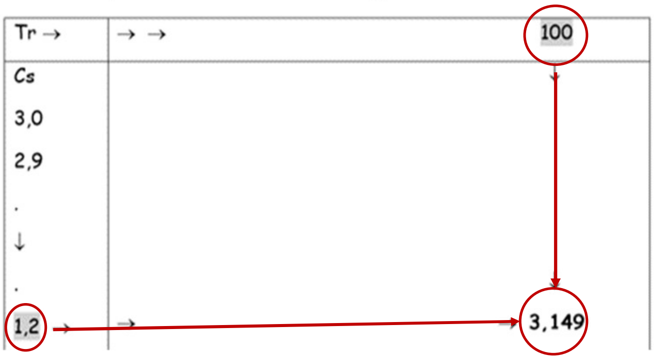
$\sigma_x = 140\ m^3/s$ $\sigma_y = 0.24\ m^3/s$

$Cs_x = 1.2$ $Cs_y = 0.18$

T = 100 yıl

T = 100 ve $Cs_x = 1.2$ için K = 3.149 (Tablodan)

Paerson Tip III Tablosundan değer okuma



$$Q_{100} = X = \mu_x + K \times \sigma_x = 246 + 3.149 \times 140 = \mathbf{687}\ \boldsymbol{m^3/s}$$

T = 1000 yıl

T = 1000 ve Cs_x = 1.2 için K = 4.815 (Tablodan)

Paerson Tip II Tablosundan değer okuma

Tr →	→ → 1000
Cs	↓
3,0	
2,9	
.	
↓	
.	
1,2 →	→ 4,815

$$Q_{100} = X = \mu_x + K \times \sigma_x = 246 + 4.815 \times 140 = \mathbf{920}\ \boldsymbol{m^3/s}$$

65

T = 100 yıl $\Rightarrow$ $p = \frac{1}{100} = 0.01$

p = 0.01 T = 100 ve Cs_y = 0.18 = 0.2 için K = 2.472 (Tablodan)

Pearson Tip III Tablosundan okuma

Tr →	→ → 100
Cs	↓
3,0	
2,9	
.	
↓	
.	
0,2 →	→ 2,472

$$Y = \mu_y + K \times \sigma_y = 2.33 + 2.472 \times 0.24 = 2.923$$

y=log(x) olduğu için : $Q_{100} = 10^{2.923} = \mathbf{838}\ \boldsymbol{m^3/s}$

66

T = 1000 yıl $\Rightarrow$ $p = \frac{1}{1000} = 0.001$

p = 0.001 T = 1000 ve Cs_y = 0.18 = 0.2 için K = 3.377 (Tablodan)

Pearson Tip III Tablosundan okuma

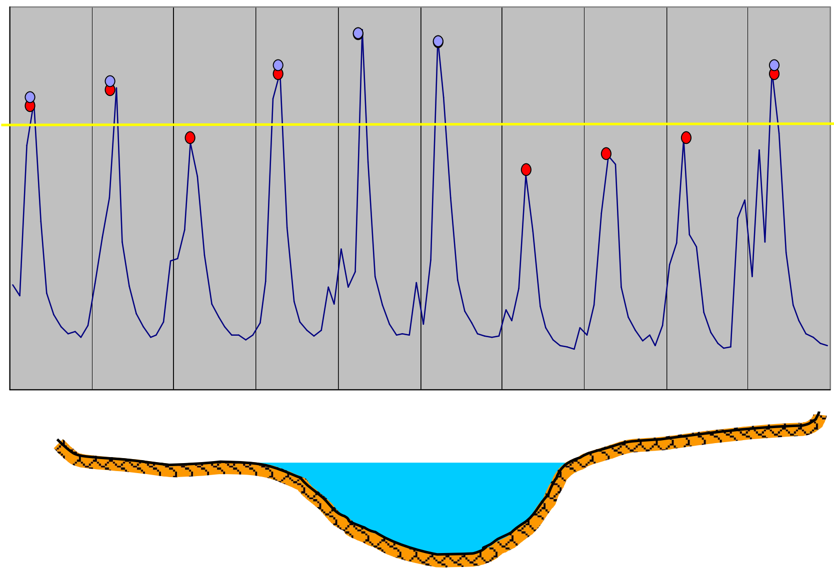
Tr →	→ →	1000
Cs		↓
3,0		
2,9		
.		
↓		
.		↓
0,2 →	→ →	3,377

$$Y = \mu_y + K \times \sigma_y = 2.33 + 3.377 \times 0.24 = 3.141$$

$$Q_{1000} = 10^{3.141} = \mathbf{1384\ m^3/s}$$

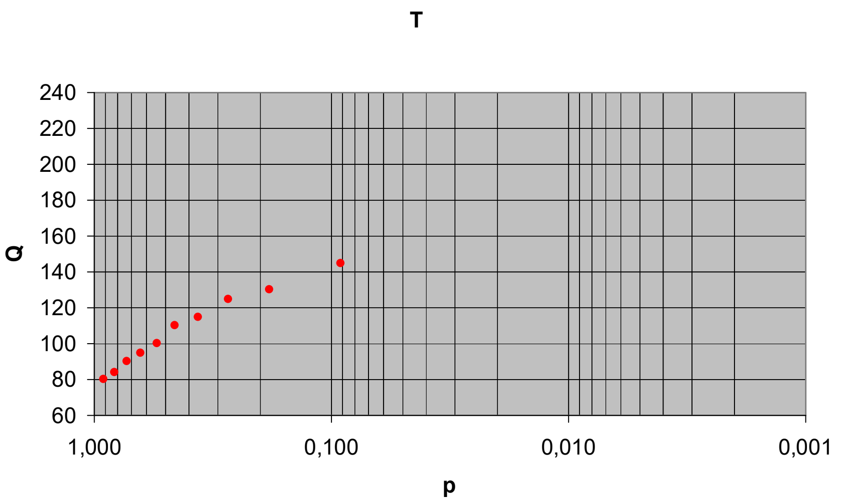
67

Ekstrem Değer Dağılımları



68

Ekstrem Değer Dağılımları

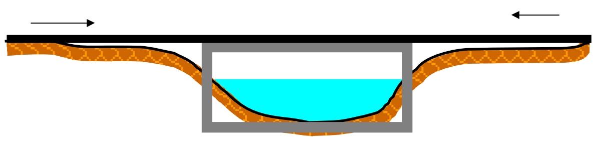


69

Ekstrem Değer Dağılımları

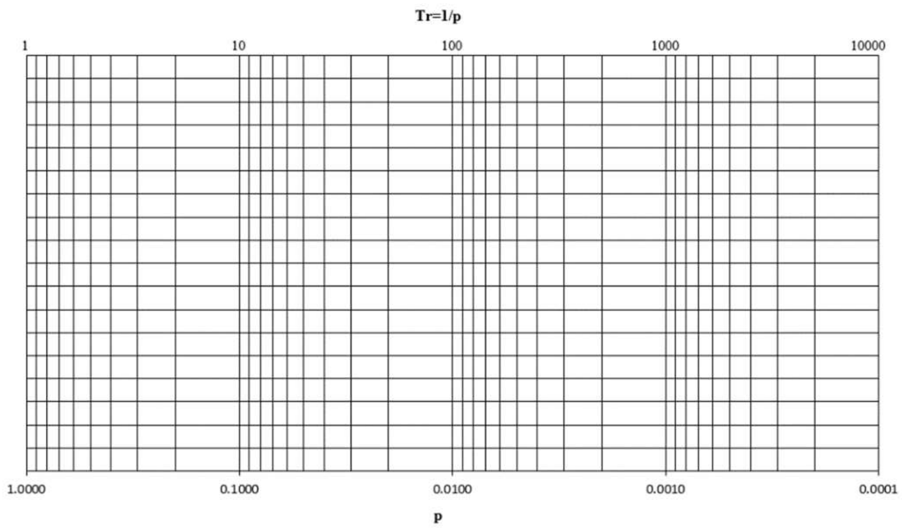
Örnek : Bir istasyonda kaydedimiş 10 yıllık maksimum akımlar aşağıda verilmiştir. Normal, Log-Normal, Gumbel, Pearson Tip III ve Log-Pearson Tip III dağılımlarını kullanarak;

a) 50 ve 100 yıl tekerrürlü gelmesi muhtemel akımı
b) 176 m^3/s değerinde bir akımın gelebileceği tekerrür periyodunu belirleyiniz



Tarih	12/3/1986	3/4/1987	5/2/1988	15/4/1989	27/1/1990	16/3/1991	1/4/1992	16/2/1993	17/4/1994	21/3/1995
Qp (m^3/s)	94	123,5	108,5	87,9	128,8	148,5	98,8	89,3	113,6	81

70



71

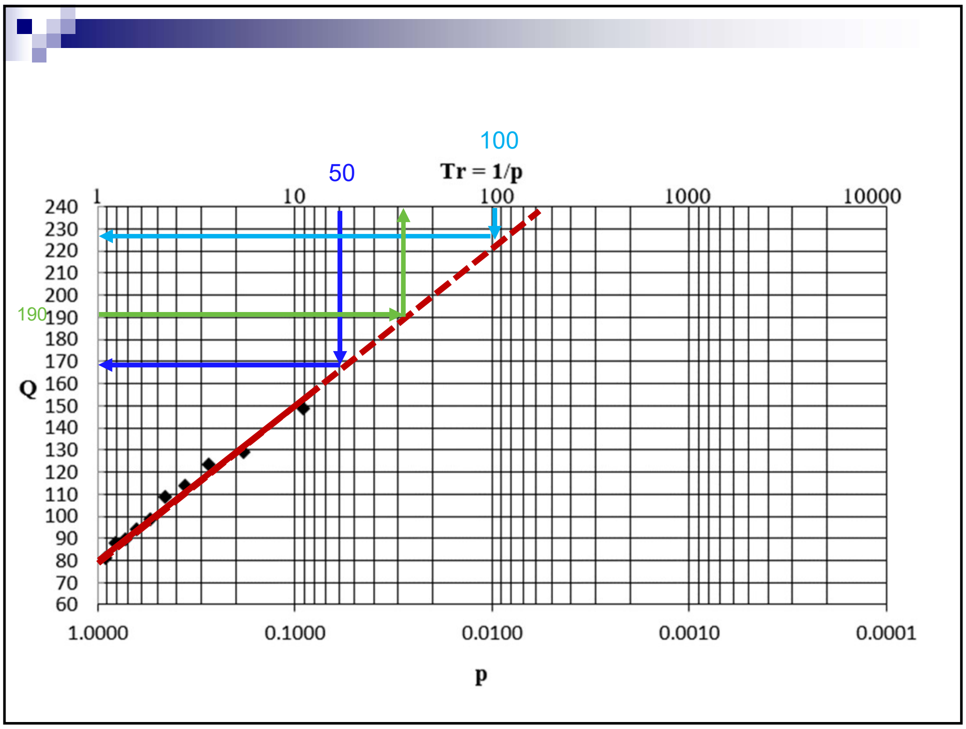
Ekstrem Değer Dağılımları

Olasılık Noktalama Kağıdı ile Çözüm

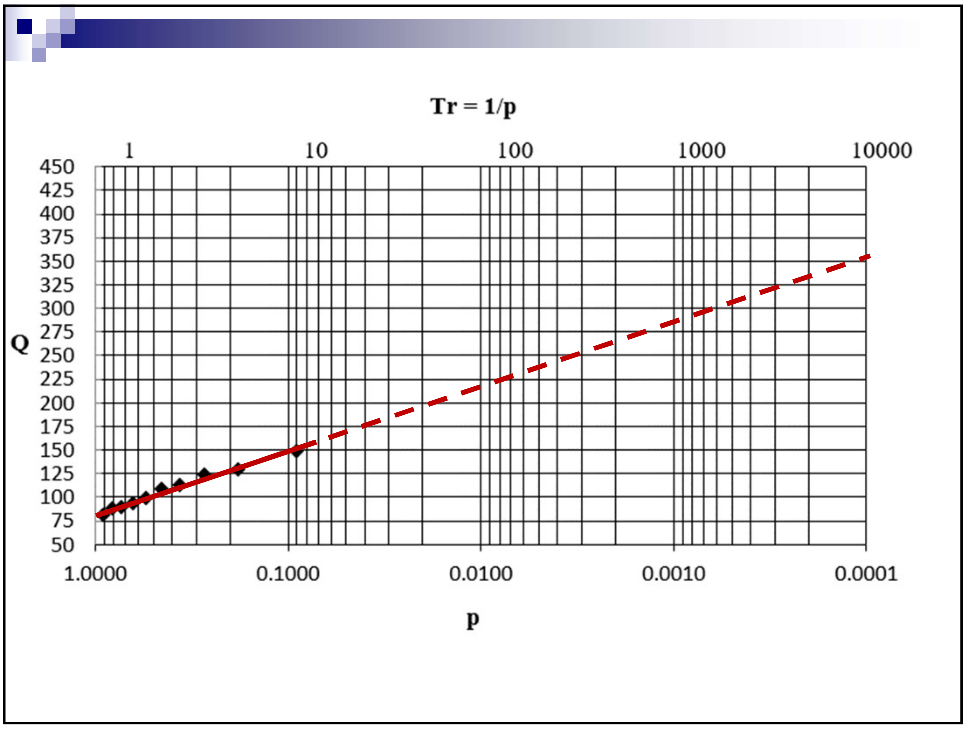
Weibull

Q	Rank m	p m/(n+1)
148.5	1	0,09
128.8	2	0,18
123.5	3	0,27
113.6	4	0,36
108.5	5	0,45
98.8	6	0,55
94.0	7	0,64
89.3	8	0,73
87.9	9	0,82
81.0	10	0,91

72


100
50
Tr = 1/p
1
10
100
1000
10000
Q
190
240 230 220 210 200 190 180 170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60
1.0000
0.1000
0.0100
0.0010
0.0001
p

73


Tr = 1/p
1
10
100
1000
10000
Q
450 425 400 375 350 325 300 275 250 225 200 175 150 125 100 75 50
1.0000
0.1000
0.0100
0.0010
0.0001
p

74

ÖRNEK

- Bir istasyonda kaydedimiş 10 yıllık maksimum akımlar aşağıda verilmiştir. Normal, Log-Normal, Gumbel, Pearson Tip III ve Log-Pearson Tip III dağılımlarını kullanarak;
- 50 ve 100 yıl tekerrürlü gelmesi muhtemel akımı
- 176 m³/s değerinde bir akımın gelebileceği tekerrür periyodunu belirleyiniz

Yıl	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Qp (m^3/s)	94.0	123.5	108.5	87.9	128.8	148.5	98.8	89.3	113.6	81.0

75

ÇÖZÜM

Yıl	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	μ	σ	Cs
Qp (m^3/s)	94.0	123.5	108.5	87.9	128.8	148.5	98.8	89.3	113.6	81.0	**107.4**	**21.366**	**0.7**
log(Qp) (m^3/s)	1.97	2.09	2.04	1.94	2.11	2.17	1.99	1.95	2.06	1.91	**2.023**	**0.086**	**0.4**

a) Normal Dağılım **Tr = 50 yıl** $\Rightarrow \quad p = \dfrac{1}{50} = 0.02$

Normal dağılım tablosu sol taraf alanlarına göre düzenlendiğinden

1 - 0.02 = 0.98 $\Rightarrow$ z = K = 2.055 (Normal Dağılım Tablosundan)

$$Q_{50} = X = \mu_x + z \times \sigma_x = 107{,}4 + 2{,}055 \times 21{,}366 = \mathbf{151} \ \boldsymbol{m^3/s}$$

Tr = 100 yıl $\Rightarrow \quad p = \dfrac{1}{100} = 0.01$

1- 0.01 = 0.99 $\Rightarrow$ z = K = 2.33 (Normal Dağılım Tablosundan)

$$Q_{100} = X = \mu_x + z \times \sigma_x = 107{,}4 + 2{,}33 \times 21{,}366 = \mathbf{157} \ \boldsymbol{m^3/s}$$

76

Log-Normal Dağılım **Tr = 50 yıl** $p = \frac{1}{50} = 0.02$

Normal dağılım tablosu sol taraf alanlarına göre düzenlendiğinden

1 - 0.02 = 0.98 $\Rightarrow$ z = K = 2.055 (Normal Dağılım Tablosundan)

$$Y = \mu_y + z \times \sigma_y = 2{,}023 + 2{,}055 \times 0{,}086 = \mathbf{2,199} \rightarrow Q_{50} = 10^{2{,}199} = \mathbf{158} \quad \boldsymbol{m^3/s}$$

Tr = 100 yıl $\Rightarrow$ $p = \frac{1}{100} = 0.01$

1- 0.01 = 0.99 $\Rightarrow$ z = K = 2.33 (Normal Dağılım Tablosundan)

$$Y = \mu_y + z \times \sigma_y = 2{,}023 + 2{,}33 \times 0{,}086 = \mathbf{2,223} \rightarrow Q_{50} = 10^{2{,}223} = \mathbf{167} \quad \boldsymbol{m^3/s}$$

77

Gumbel (Ekstrem Değer) Dağılımı

N = 10 yıl $\Rightarrow$ N < 30 olduğu için $\bar{Y}_n = 0{,}495 \quad \sigma_n = 0{,}9496$

$$a = \frac{\sigma_n}{\sigma_x} = \frac{0.9496}{21.366} = 0.044 \qquad X_o = \bar{X} - \bar{Y}_n \frac{\sigma_x}{\sigma_n} = 107.4 - 0.495 \frac{21.366}{0.9496} = 96.26$$

$$y = a(X - X_o) = 0.044\ (X - 96.26)$$

$$q = e^{-e^{-0.044(X-96.26)}} \Rightarrow \ln(-\ln q) = -0.044(X - 96.26)$$

$$Q = X = -\frac{\ln(-\ln q)}{0.044} + 96.26$$

$$q = 1 - \frac{1}{50} = 0.98 \quad \Rightarrow \quad Q_{50} = -\frac{\ln(-\ln 0.98)}{0.044} + 96.26 = \mathbf{184.05}\ \boldsymbol{m^3/s}$$

$$q = 1 - \frac{1}{100} = 0.99 \quad \Rightarrow \quad Q_{100} = -\frac{ln\,(-\ln 0.99)}{0.044} + 96.26 = \mathbf{200}\ \boldsymbol{m^3/s}$$

78

Pearson Tip III Dağılımı

Tr = 50 Cs = 0.7 K = 2.407 (Tablodan)

$Q_{50} = 107.4 + 2.407 \times 21.366 = \mathbf{159}$ m³/s

Tr = 100 Cs = 0.7 K = 2.824 (Tablodan)

$Q_{100} = 107.4 + 2.824 \times 21.366 = \mathbf{168}$ m³/s

79

Log-Pearson Tip III Dağılımı

Tr = 50 Cs = 0.1 K = 2.107 (Tablodan)

$\log(Q_{50}) = 2.023 + 2.107 \times 0.086 = 2.204 \quad \Rightarrow \quad Q_{100} = 10^{2.204} = \mathbf{160}$ m³/s

Tr = 100 Cs = 0.1 K = 2.400 (Tablodan)

$\log(Q_{100}) = 2.023 + 2.400 \times 0.086 = 2.239 \quad \Rightarrow \quad Q_{100} = 10^{2.239} = \mathbf{173}$ m³/s

80

Farklı yöntemlerle bulunan 50 ve 100 yıl tekerrürlü muhtemel debiler (m³/s)

YÖNTEM	Tr = 50 yıl	Tr = 100 yıl
Normal	151.3	157.2
Log - Normal	158.2	167.0
Gumbel	184.1	200.0
Pearson Tip III	159.0	168.0
Log - Pearson Tip III	160.0	173.0

81

b) T = ?

Normal Dağılım

$$\mu_x = 107.4, \quad \sigma_X = 21.366$$

$$z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_X} = \frac{176 - 107.4}{21.366} = 3{,}21$$

z = 3.21 için q = 0.9993 Tablodan

p = 1 – q = 1 – 0.9993 = 0.0007 Tr = 1 / 0.0007 = **1429 yıl**

82

Log - Normal Dağılım

$$z = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{\log(176) - 2.023}{0.086} = 2,59$$

z = 2,59 için q = 0.9952 (Tablodan)

p = 1 – q = 1 – 0.9952 = 0.0048 Tr = 1 / 0.0048 = 208 yıl

83

Gumbel Dağılımı

$$q = e^{-e^{-0.044(X-96.26)}} = e^{-e^{-0.044(176-9\ .26)}} = e^{-e^{-3.509}} = e^{-0.030} = 0.971$$

$$Tr = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-0.971} = \textbf{35 yıl}$$

Pearson Tip III Dağılımı

$\mu_x = 107.4, \sigma_X = 21.366$ $Cs_x = 0{,}7$

$$K = \frac{X - \mu_x}{\sigma_X} = \frac{176 - 107.4}{21.366} = 3.21$$

$Cs_x = 0{,}7$ ve K = 3.21 için (K ≅ 3,223) **T = 200 yıl**

84

Log - Pearson Tip III Dağılım

$\mu_y = 2.023, \sigma_y = 0.086$ $Cs_y = 0{,}4$

$$K = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} = \frac{\log(176) - 2.023}{0.086} = 2{,}59$$

Csx = 0,7 ve K = 2.59 için (K ≅ 2,615) **Tr = 100 yıl**

YÖNTEM	Q = 176 m³/s
Normal	1429 yıl
Log - Normal	208 yıl
Gumbel	35 yıl
Pearson Tip III	200 yıl
Log - Pearson Tip III	100 yıl

85