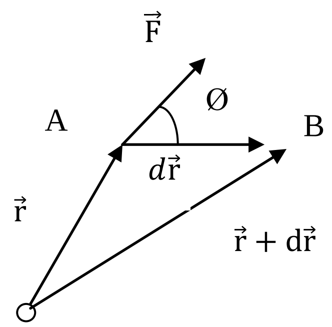
BÖLÜM 3. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ İŞ VE ENERJİ

3.1. Giriş

Bir önceki bölümde $\vec{F} = m\vec{a}$ denklemini kullanarak $\vec{F}$ kuvveti etkisinde bir maddesel noktanın $\vec{a}$ ivmesini ve kinetik yöntemlerle de hız ve yer değiştirmesini bulduk. Bazı problemlerde daha uygun olacağı için $\vec{F}=m\vec{a}$ başka şekillere dönüştürülebilir. Bunlardan birisi iş ve enerji yöntemimi olup kuvvet, kütle, hız ve yer değiştirmelerle ilgili bağıntılardan hareket eder.

3.2. Bir Kuvvetin İşi



Şekil 3.1.

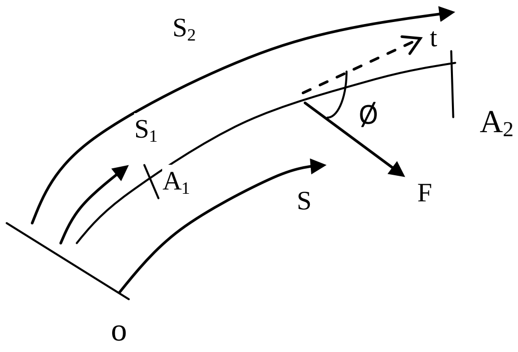
Bir maddesel nokta A'dan B'ye hareket ederken üzerine $\vec{F}$ gibi bir kuvvet etki ediyorsa bu kuvvetin yaptığı iş;

$dU=\vec{F}°d\,\vec{r}$ olur. Skaler çarpım tanımından

$dU =|\vec{F}|\,|\overrightarrow{dr}|\cos\emptyset=F(ds\cos\emptyset) =(F\cos\emptyset)ds$

dik koordinatlar cinsinden: $dU=F_x\,d_x+F_y\,dy+F_z\,dz$

işin şiddeti ve işareti vardır. Boyutu (kuvvet * uzaklık) tır. Doğrultuları aynı iken kuvvet ve yer değiştirme aynı yönde ise dU=Fds, kuvvet ve yer değiştirme ters yönde ise dU= -Fds, ikisi birbirine dik ise iş sıfırdır.



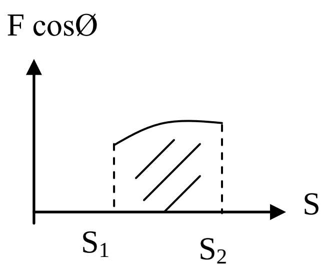
Şekil 3.2.

Bir maddesel nokta A_1'den A_2'ye giderken $\vec{F}$ gibi bir kuvvetin etkisinde ise üzerinde şu toplam iş yapılır.

$U_{12} = \int_{A1}^{A2} \vec{F} \circ d\,\vec{r}$ veya F_t teğetsel bileşen olduğuna göre

$U_{12} = \int_{S1}^{S2} (F\cos Ø)ds = \int_{S1}^{S2} F_t \, ds$

S: yörünge üzerinde gidilen uzaklıktır. Bu integral grafikte gösterildiği gibi bir alana eşittir. Dik koordinatlar cinsinden:

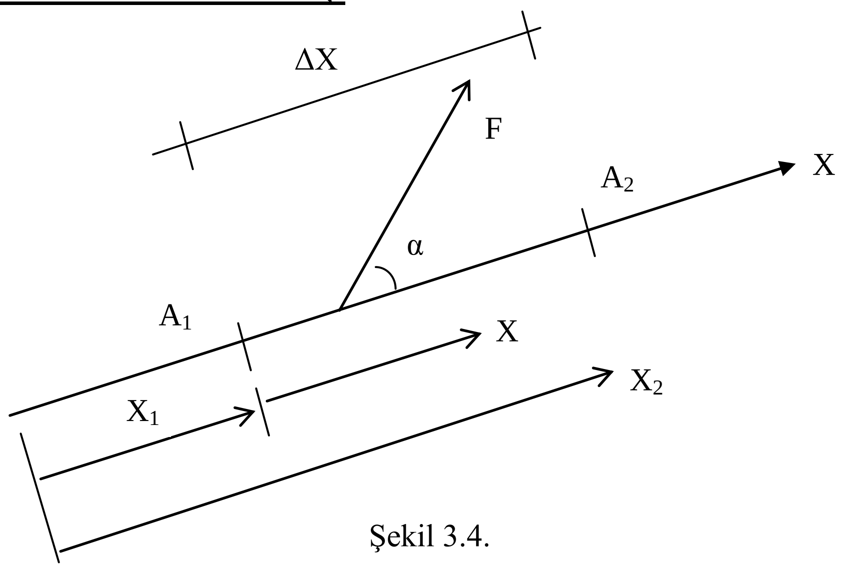


Şekil 3.3.

$U_{12} = \int_{A1}^{A2} (Fx\,dx + Fy\,dy + Fz\,dz)$

İntegrasyon yörünge boyunca olur.

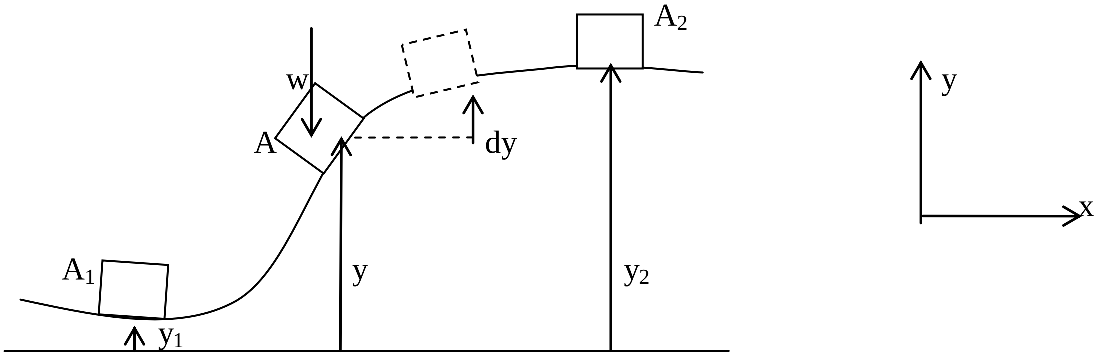
Doğrusal Bir Harekette Sabit Bir Kuvvetin İşi



Şekil 3.4.

$$U_{12} = F * cos\alpha * \Delta x$$

Ağırlığın Yaptığı iş



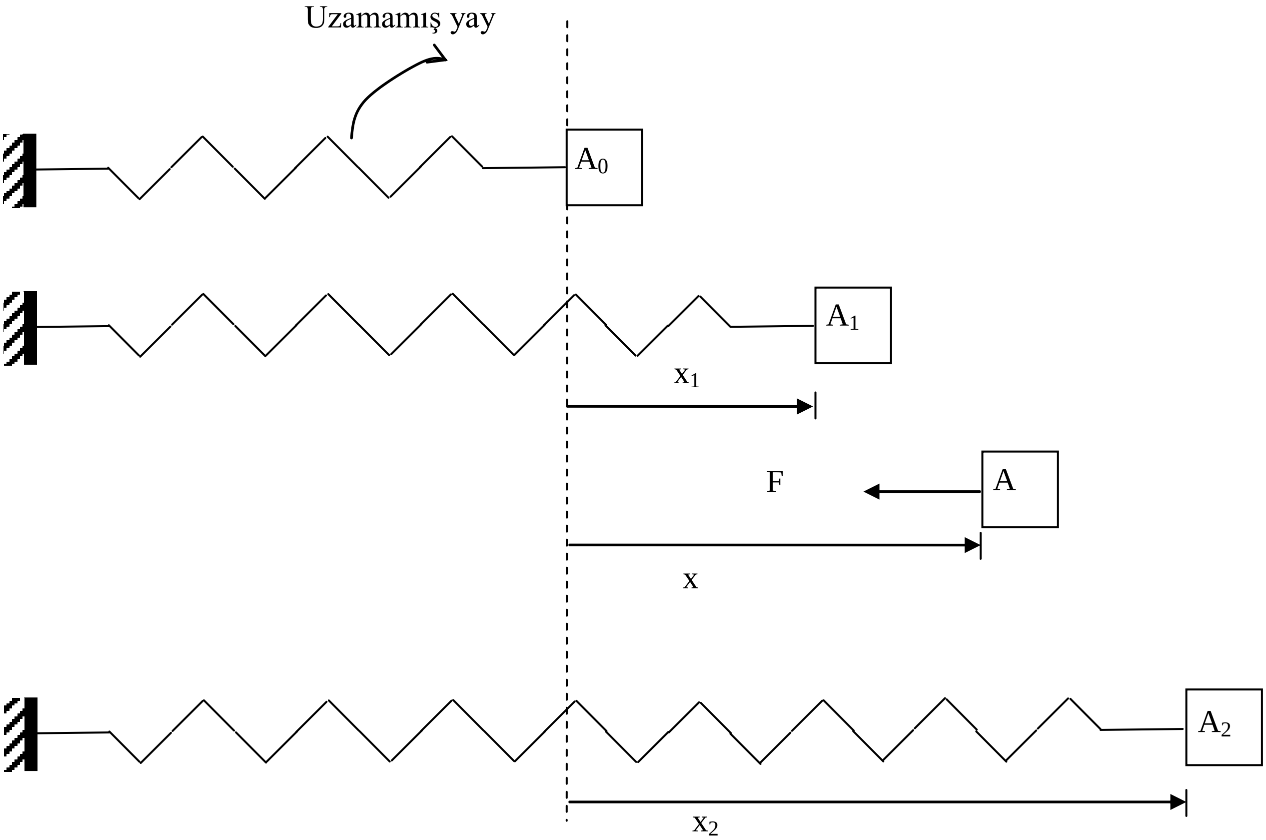
Şekil 3.5.

$F_x = 0$ $F_y = -w$ $F_z = 0$

$dU = -wdy \longrightarrow$ integre edilirse

$U_{1\to 2} = -\int_{y1}^{y2} wdy = wy_1 - wy_2$ veya $U_{1\to 2} = -w\,(y_2 - y_1) = -w\Delta y$

Bir Yayın Uyguladığı Kuvvetin Yaptığı İş



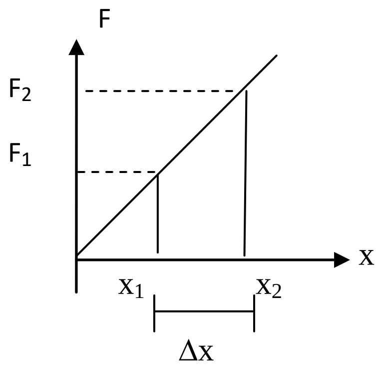
Şekil 3.6.

x uzamamış konumda olmak üzere $\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$

Cisim A_1 den A_2 ye giderken F yay kuvvetinin yaptığı iş; $dU=-Fdx = -kxdx$

$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{x1}^{x2} kxdx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$

$x_2<x_1$ olursa yani yayın boy değiştirmemiş konuma doğru dönmesi halinde yapılan iş (+) dir.



Şekil 3.7.

$U_{12} = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x$

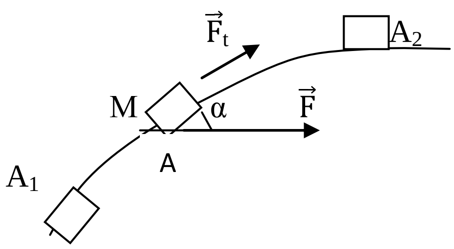
$U_{12} = -\frac{k}{2}(x_1 + x_2)(x_2 - x_1)$

$U_{12} = -\frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$

aynı ifade elde edilir.

Kinetikte bazı kuvvetler iş yapmaz sabit noktaya etkiyen kuvvet (ds=0) harekete dik kuvvet (α=90°) sürtünmesiz yüzeyin reaksiyonu (örneğin : mesnet reaksiyonları.)

3.3. Maddesel Noktanın Kinetik Enerjisi (İş ve Enerji ilkesi)



Üst görünüş

Şekil 3.8.

Bir maddesel nokta herhangi bir yörünge üzerinde hareket ediyor olsun. $F_t = ma_t$ $F_t = m\frac{dv}{dt}$

$v = \frac{ds}{dt}$ olduğuna göre $F_t = m\,\frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = m\,v\,\frac{dv}{ds}$

$F_t\,ds = m\,v\,dv$ $\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

Sol taraf $\vec{F}$ kuvvetinin işi olup skalerdir. $\frac{1}{2}mv^2$ de skaler olup kinetik enerjiyi gösterir.

$T = \frac{1}{2}m\,v^2$, $U = T_2 - T_1$

Bu şunu ifade eder: Bir maddesel nokta $\vec{F}$ kuvveti etkisinde A_1 den A_2 ye hareket ederse $\vec{F}$ kuvvetinin işi maddesel noktanın kinetik enerjisindeki değişime eşittir. Buna iş ve enerji ilkesi denir.

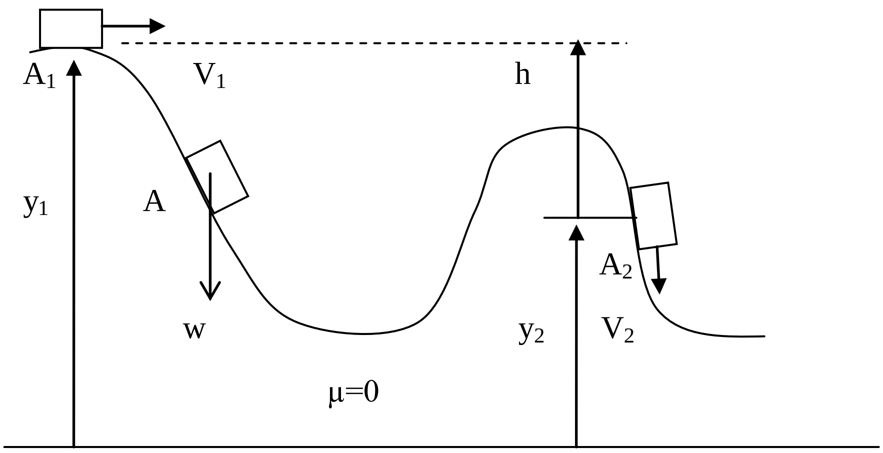
$T_1 + U_{12} = T_2$

Başka bir deyişle: Bir maddesel noktanın kinetik enerjisi A_1 den A_2 ye giderken üzerine etkiyen kuvvetlerin işine eşit bir miktar değişmeye uğrar. T kinetik enerjisi yani v hızı olan bir cismi durdurmak için –T kadar iş yapılmalıdır. Kinetik enerji ve iş aynı birimlerle ölçülür.

(T.M.B.S): $T = \frac{1}{2} mv^2 \quad [(\frac{\text{kgf}-sn^2}{\text{m}})(\frac{m^2}{sn^2})] = [\text{kgf.m}]$

(SI): $T = \frac{1}{2} mv^2 \quad [\text{kg} \frac{m^2}{sn^2}] = [\text{N.m}]$

3.4. İş ve Enerji İlkesinin Uygulamaları



Şekil 3.9.

$T_2 = T_1 + U_{1\to2} \qquad T_2 - T_1 = U_{1\to2}$

$\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = mgh$ (ağırlığın yaptığı iş)

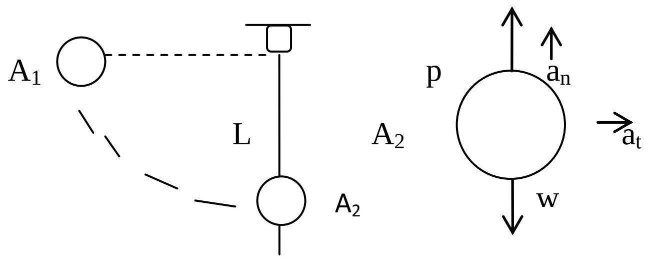
$v_1 = 0 \qquad v_2 = \sqrt{2gh}$

$v_1 \neq 0 \qquad \frac{1}{2}\frac{w}{g} v_2^2 - \frac{1}{2}\frac{w}{g} v_1^2 = w\,h$

$v_2^2 - v_1^2 = 2gh$

Görüldüğü gibi iş ve enerji ilkesinin şu üstünlükleri vardır:

1) A_2 deki hızı bulmak için arada bir A noktasındaki ivmeyi bulup integre etmeye gerek yoktur.
2) Hesaba giren bütün büyüklükler skalerdir. Bileşenleri ile uğraşmaya gerek yoktur.
3) İş yapmayan kuvvetlerin bulunması gerekmez. Ancak bulunması gerekmeyen ivme ve iş yapmayan kuvvetler bilinmek istenirse Newton denklemi yine kullanılmak zorundadır.



Şekil 3.10.

$a_n = v^2/R$

yukarıda $\sqrt{2gh}$ bulunmuştu.

$\frac{mv^2}{L} = -w + p$ $\frac{m(2gL)}{L} = -w + p$ $p = 3w$

3.5. Maddesel Noktalar Sistemi

İş ve enerji ilkesi birçok maddesel noktadan oluşan sisteme de uygulanabilir. Her bir nokta için ayrı ayrı denklem yazılıp toplanırsa.

1.cisim $T_1 + U_{12} = T_2$

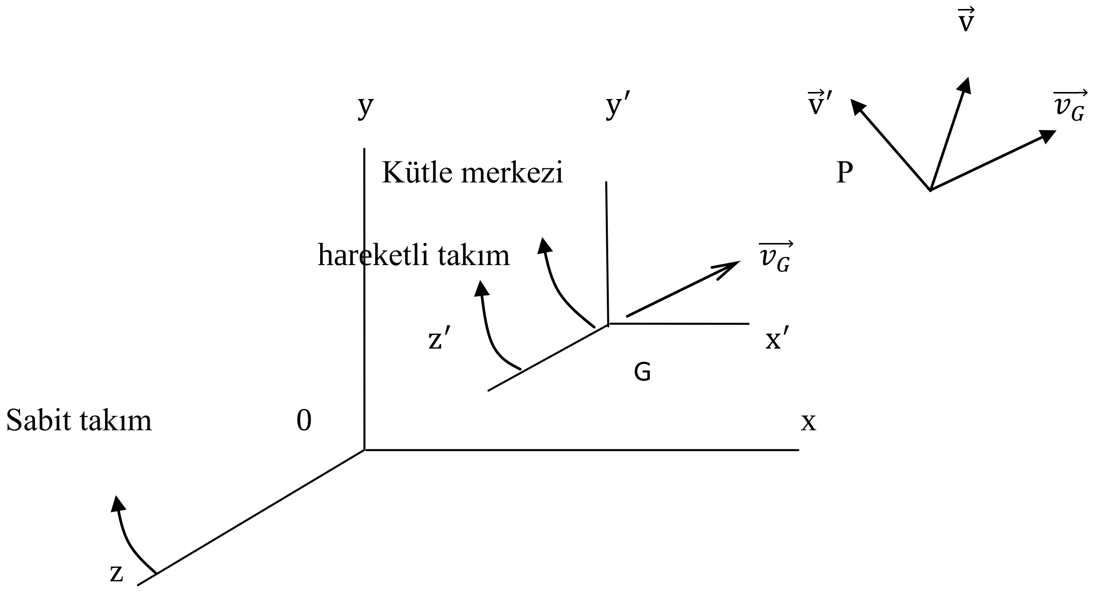
2.cisim $T_1 + U_{12} = T_2$ $\Sigma T_1 + \Sigma U_{12} = \Sigma T_2$

3.cisim $T_1 + U_{12} = T_2$

U_{12} içerisinde iç ve dış kuvvetlerin işleri vardır. Bu uygulama uzamayan ip, zincir gibi elemanlar ile bağlı kütlelerden oluşan sistemlerde yararlıdır. Çünkü bağlantıdaki gerilme iki uçtaki kütlelere aynı işi ters işaretli uygulayacağından sonuç olarak hiç katkısı olmaz.

Ağırlık Merkezinden Geçen Bir Karşılaştırma Takımının Kullanılması

Pek çok sayıda maddesel noktadan oluşan bir sistemin kinetik enerjisini hesaplarken çoğu zaman sistemin G ağırlık merkezinin hareketi ile sistemin G'ye bağlanmış hareketli bir karşılaştırma takımına göre bağıl hareketini ayrı ayrı incelemek daha uygun olur.



Şekil 3.11.

x-y-z takımına göre kütle merkezinin hızı

$\vec{v} = \overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{v'}$

x′− y′ −z′ takımına göre maddesel noktanın hızı

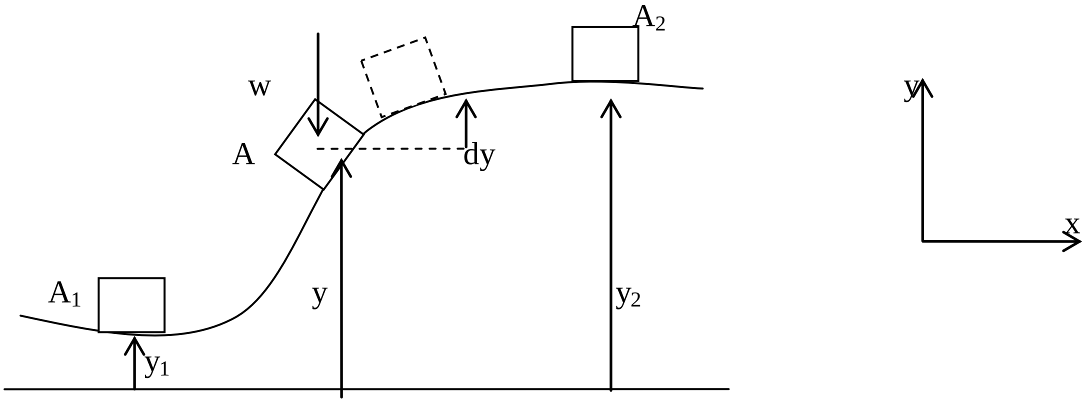
x-y-z takımına göre maddesel noktanın hızı

$T=\frac{1}{2}\Sigma m\, v^2=\frac{1}{2}\Sigma(m\vec{v}\circ\vec{v})$ $\quad T=\frac{1}{2}\Sigma[m(\overrightarrow{v_G}+\vec{v}')\circ(\overrightarrow{v_G}+\vec{v}')]$

$T=\frac{1}{2}(\Sigma m)v_G^2+v_G\,\Sigma m\, v'+\frac{1}{2}\Sigma(m\ v'^2)=\frac{1}{2}(\Sigma m)v_G^2+\frac{1}{2}\Sigma(m\ v'^2)$

Bir maddesel noktalar sisteminin kinetik enerjisi G kütle merkezinin (Kütlenin tamamı G'de toplanmış gibi farz ederek) kinetik enerjisi ile sistemin hareketli takımına göre hareketindeki kinetik enerjisini toplayarak elde edilebilir.

3.6. Potansiyel Enerji



Şekil 3.12.

Daha önce incelediğimiz kayan blok problemini ele alalım.

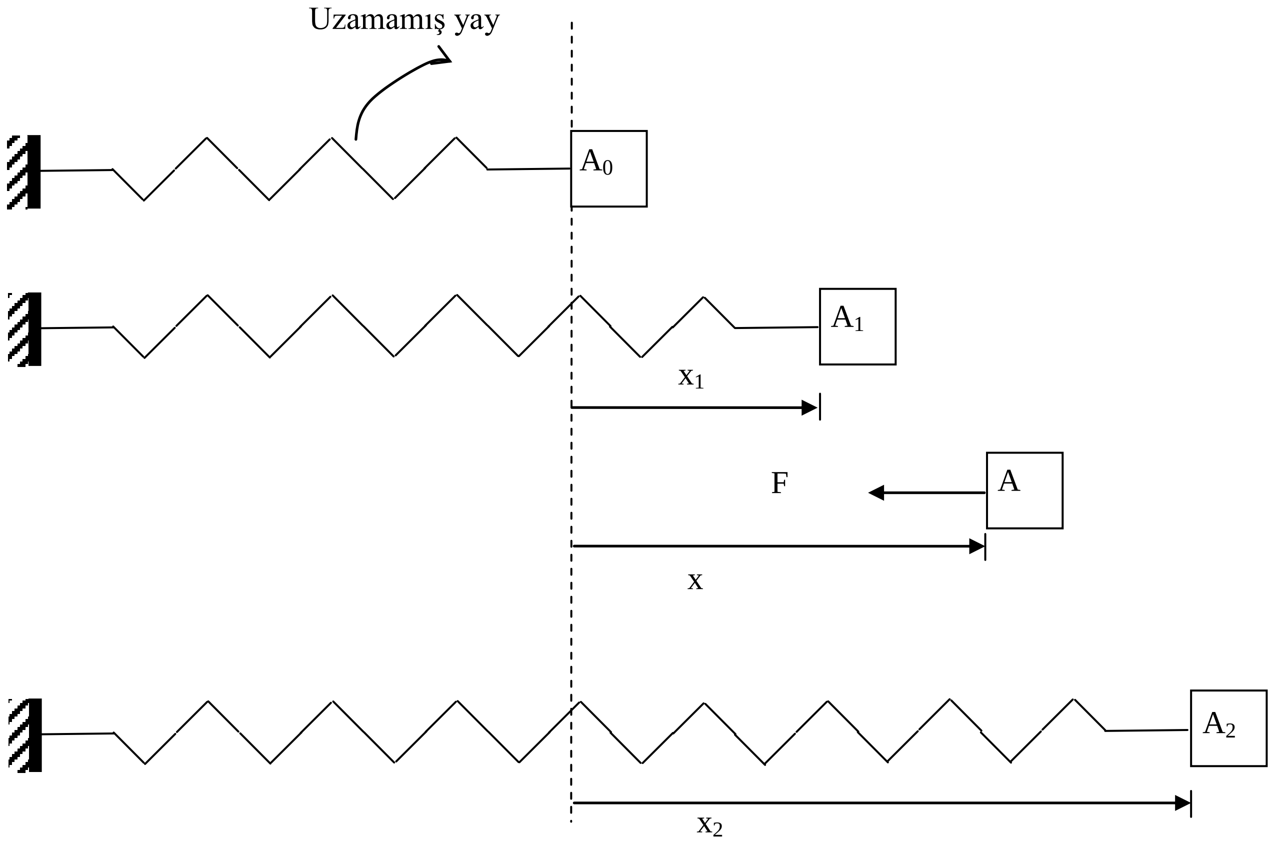
$U_{1\rightarrow 2} = w*y_1 - w*y_2 = (v_g)_1 - (v_g)_2$

$w*y=v_g$ fonksiyonuna $\vec{w}$ çekim kuvvetinin potansiyeli denir. Ya da potansiyel enerjisi enerjisi denir.

$(v_g)_2 > (v_g)_1$ ise potansiyel enerjisi artıyordur ve yapılan iş negatiftir.

Ağırlık kuvveti pozitif iş yaptıkça potansiyel enerjisi düşer. Denklemde yalnız koordinat farkı olduğuna göre potansiyel enerji için karşılaştırma düzeyi seçimi yeterlidir.

Şimdi yay'a bağlı A noktasının A_1 den A_2 ye hareketini düşünelim.



Şekil 3.13.

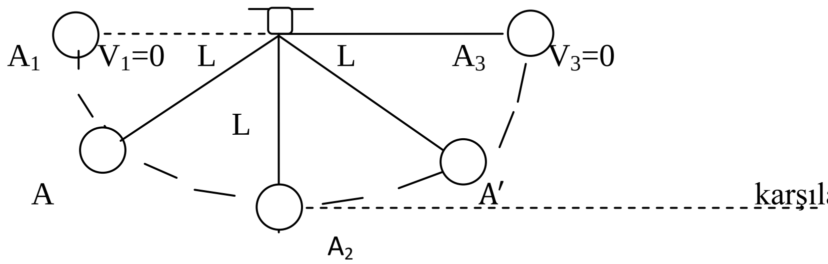
Yay kuvvetinin işi $U_{1\to 2} = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ idi. Buna göre $U_{1\to 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2$ olur

V_e =Yay potansiyel enerjisi. $= \frac{k}{2}(x^2)$

3.7. Enerjinin Korunumu

$T_1 + PE_1 = T_2 + PE_2$ T=Kinetik enerji, PE=Potansiyel enerji

T+PE toplamına sistemin toplam mekanik enerjisi denir. Düşey düzlemde bir sarkaç düşünelim.



Şekil 3.14.

A_1 de $T_1=0$, $PE_1=wL$ $T_1+PE_1=wL$

A_2 de $T_2=\frac{1}{2}\frac{w}{g}v_2^2=wL$, $PE_2=0$ $T_2+PE_2=wL$

Hareket devam ederse $T_3=0$, $PE_3=wL$ E=T+PE toplam kinetik enerji

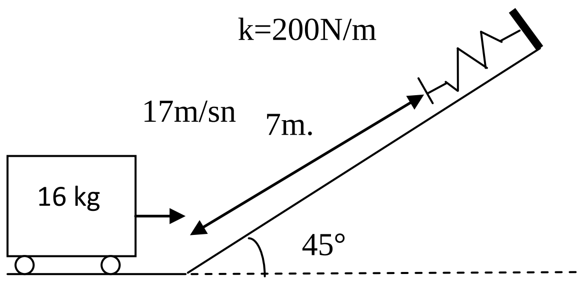
Ağırlık ve yay kuvveti konservatiftir. Fakat sürtünme değildir. Yani sürtünme kuvvetinin işi potansiyel enerji değişimi olarak gösterilmez. Yörüngeye bağlı iş yapar. Sürtünme kuvvetinin işi her zaman negatiftir. Sürtünmeli durumda mekanik ve ısı enerjilerinin toplamı sabit kalır.

Enerjinin Korunumu İlkesi

Eğer sisteme etki eden ve iş yapan kuvvetler var ise enerjinin korunumu ilkesi;

$(T+PE)_1 + U_{1\to 2} = (T+PE)_2$ halini alır.

ÖRNEK



Şekil 3.15.

Araba ne kadar yükseğe çıkar?(g=10 m/sn^2)

$(T+PE)_1 + U_{1\to 2} = (T+PE)_2$

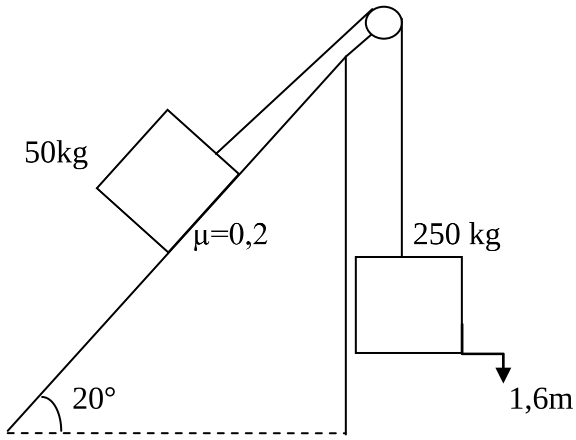
$\frac{1}{2}16(17)^2 = \frac{1}{2}k\delta^2 + 16*10*\sin 45*(7+\delta)$

$100\delta^2+113\delta-1520=0$ $\delta_1=3,33$m

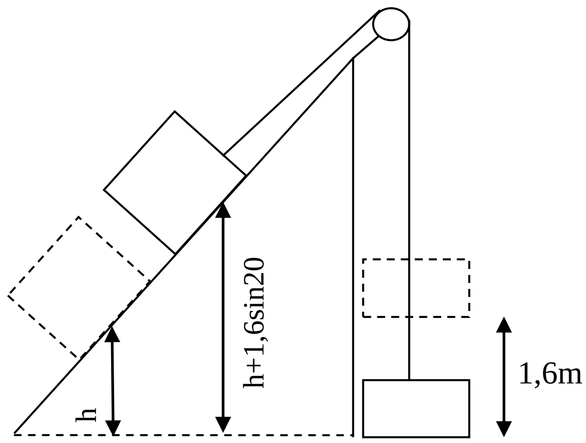
$h=(7+3,33)\sin 45=7,3$m

ÖRNEK

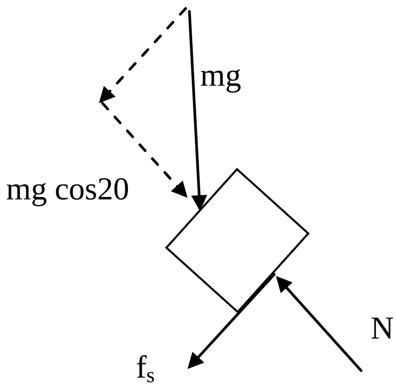
Sistem serbest bırakılınca 250 kg lık kütle 1,6m indiğinde hız ne olur ? ($g=10m/sn^2$)



Şekil 3.16.



Şekil 3.17a.



Şekil 3.17b.

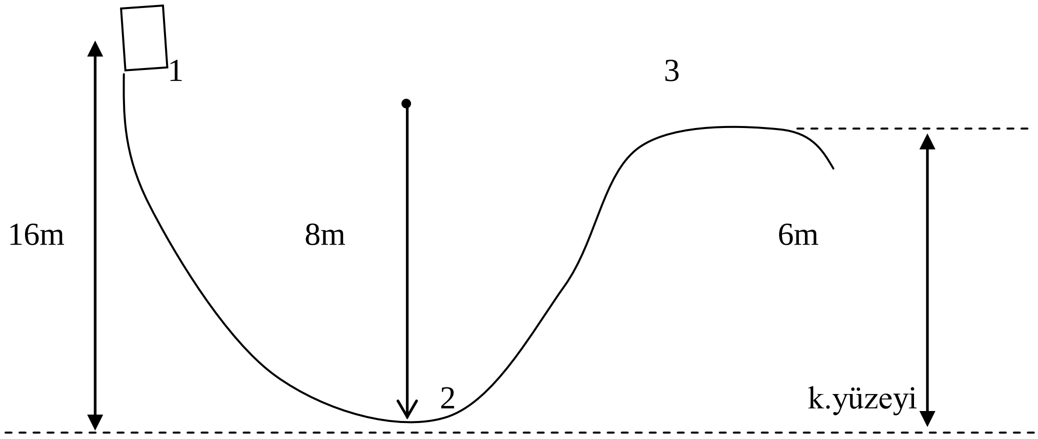
$(T+PE)_1 + U_{1\rightarrow 2} = (T+PE)_2$

$1,6*10*250+h*10*50-1,6*0,2*50*10\cos20=\frac{1}{2}(50+250)\,v^2+50*10*(h+1,6*\sin20)$

$1,6*10*250 -1,6*0,2*500*\cos20 = \frac{1}{2}(300)v^2 +50*10*1,6*\sin20$

v=4,88 m/sn olur.

ÖRNEK



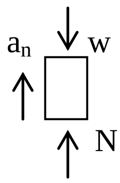
Şekil 3.18.

1000 Newton ağırlığındaki bir araba 1 noktasından harekete başlıyor.

a) 2 noktasındaki yüzey tepkisini bulunuz.

b) 3 noktasında eğrilik yarıçapının minimum emniyetli değerini hesaplayınız. ($g=9{,}81 m/sn^2$, sürtünme yok)

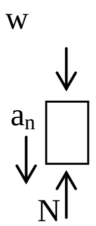
$(T+PE)_1 + U_{1\rightarrow 2} = (T+PE)_2$ $\quad$ $w*16 = \frac{1}{2}\frac{w}{g}v_2^2$ $\quad$ $v_2 = 17{,}7 m/sn$



$-w+N = m\,a_n$ $\quad$ $-w+N = \frac{w}{g}\frac{(17{,}7)^2}{8}$ $\quad$ N=5w=5000 Newton

$(T+PE)_1 + U_{1\rightarrow 3} = (T+PE)_3$ $\quad$ $0+w(16) = \frac{1}{2}\frac{w}{g}v_3^2 + w(6)$ $\quad$ $v_3 = 14{,}0 m/sn$

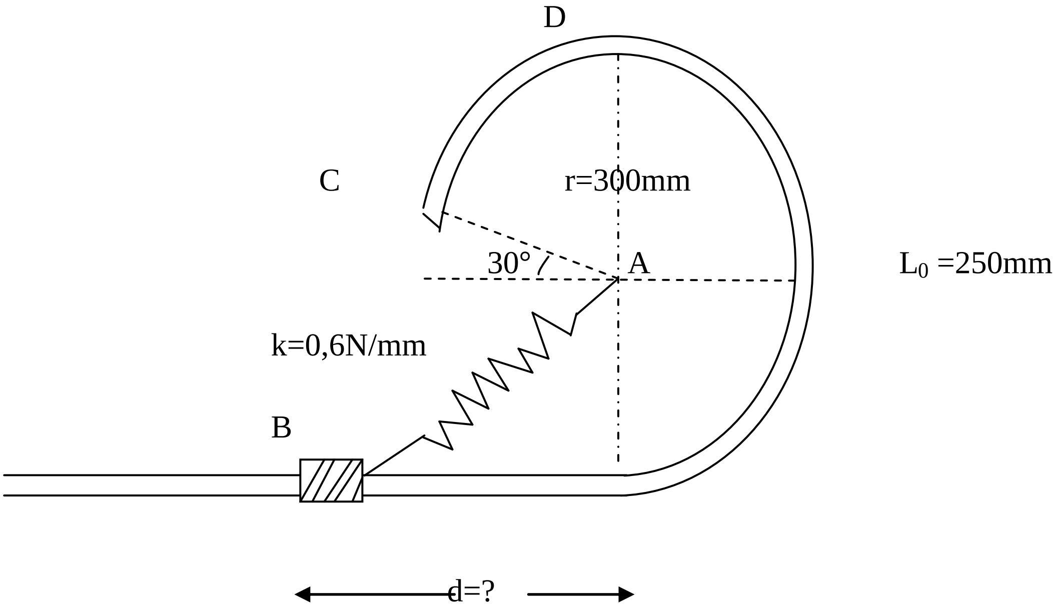
Emniyet için $N \geq 0$



$w-N = \frac{w}{g}\frac{v_3^2}{R}$ (N=0) $\quad$ $R = \frac{v_3^{\,2}}{g} = 20m$

ÖRNEK

.



Şekil 3.19.

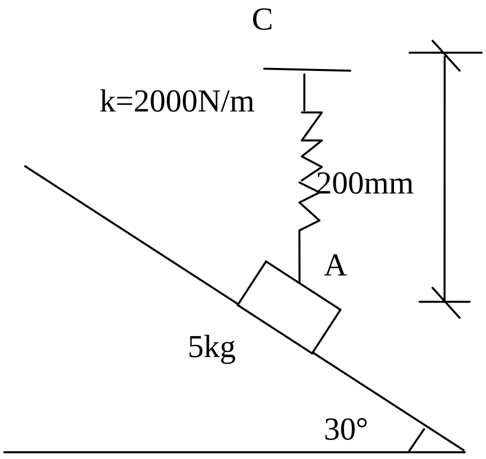
100 g'lık bilezik düşey düzlemdeki sürtünmesiz çubuk üzerinde kayıyor. Yayın sabiti 0,6 N/mm ve gerilmesiz uzunluğu 250 mm olduğuna göre "d"ne olmalıdır ki C'de bilezik 10m/sn hızla ayrılsın.

(0,3sin30)

Yayın boyu L_i olsun; $\frac{1}{2}600(L_i - 0{,}25)^2 = \frac{1}{2}600(0{,}3-0{,}25)^2 + \frac{1}{2}(0{,}1)(10)^2 + (0{,}1)(9{,}81)(0{,}15+0{,}3)$

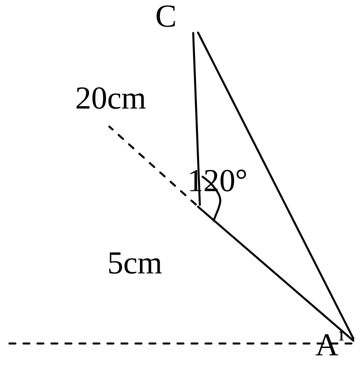
L_i =0,394m olur. $L_i^2 = d^2 + 0{,}3^2$ $\sqrt{(0{,}394)^2 - (0{,}3)^2}$ =d=0,2554m….

ÖRNEK



Düşeyken gerilmesiz olan yayın ucundaki cisim bırakılıyor. 50mm ilerleyince hızı ne olur? (Not: yay ile eğik düzlem arasındaki açı 60°dir, g=9,81m/sn^2)

Şekil 3.20.



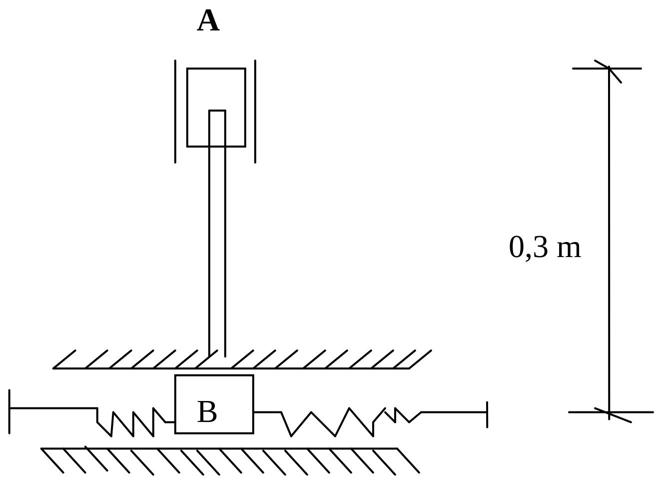
Şekil 3.21.

$CA' = 20^2+5^2-2*20*5*\cos 120$ $\qquad$ $CA' = 22{,}91$ cm olur.

$(T+PE)_1+U_{1\rightarrow 2} = (T+PE)_2$ $\qquad$ $5*9{,}81*\sin 30*\frac{50}{1000} = \frac{1}{2}5v^2 + \frac{1}{2}2000(0{,}2291-0{,}2)^2$

v=0,39 m/sn olur

ÖRNEK

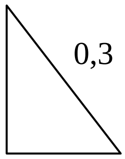


$g=9{,}81$ m/sn^2

$m_A=m_B=75$ kg

Şekil 3.22.

Çubuk düşey iken hızlar sıfır ve yaylar gerilmesizdir. A kütlesi 0,025 m inince v_B=? (k=900N/m)

0,025m inince 0,3-0,025  0,3

δ $\delta^2 = 0{,}3^2 - (0{,}3-0{,}025)^2$

Şekil 3.23. δ=0,1199m olur.

$(T+PE)_1 + U_{1\to 2} = (T+PE)_2$

$75*g*0{,}3 = 75*g*(0{,}3-0{,}025) + \frac{1}{2}75\, v_B^2 + \frac{1}{2}75\, v_A^2 + 2*\frac{1}{2}*900*(0{,}1199)^2$ …………1

Kinematik ilişki; $y_A^2 + x_B^2 = 0{,}3^2$

$2y_A\, \dot{y}_A + 2x_B\, \dot{x}_B = 0 \quad v_A = -\frac{x_B}{y_A} v_B \qquad v_A = -\frac{0{,}1199}{(0{,}3-0{,}025)} v_B$……..…..2

2 ifadesi 1 de yerine yazılırsa $V_B = 0{,}350$ m/sn olur..

3.8. Güç ve Verim

Güç birim zamanda yapılan iş olarak tanımlanır. Bir motor veya makinanın gücü yapılacak iş miktarından daha önemlidir.

Ortalama güç: $\frac{\Delta U}{\Delta t}$ limit durumun da ($\Delta t \to 0$)

Güç= $\frac{dU}{dt}$, $dU = \vec{F} \circ d\vec{r}$ Güç = $\frac{\vec{F} \circ d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \circ \vec{v}$

Mekanik güç genellikle beygir gücü (buhar beygiri) BB ile elektrik gücü watt(W) veya kilowatt(kW) ile ölçülür.

1 BB=75 kg m/sn

1 W=1 joule/sn=1 N m/sn

1 kW=1000 W

1 BB=736 W

1 kW=102 kg m/sn^2 =1,36 BB

Bir makinanın verimi

$\eta = \frac{\text{alınan iş}}{\text{verilen iş}}$ (iş sabit hızda yapılıyor ise) aynı zaman da aynı iş yapıldıklarından

$\eta = \frac{\text{alınan güç}}{\text{verilen güç}}$ olur.

Bir makinanın verimi daima 1'den küçüktür. Çok az durumlarda 1'e yakındır ve 1 sayılabilir.

ÖRNEK

Sürücü sabit 5 kW güç uygulayınca 7500 kg lık bir tramvay 10 km/sa hıza kaç saniyede ulaşır. (verim =%90)

F*v=0,9*5*1000=4500 watt 10km/sa=2,78 m/sn

$F = \frac{4500}{V} = ma$ $\frac{4500}{v} = m\frac{dv}{dt}$ $vdv = \frac{4500}{7500}dt$ t=6,44 sn