BÖLÜM 4. MADDESEL NOKTALARIN KİNETİĞİ İMPULSE VE MOMENTUM

4.1. İmpulse ve Momentum İlkesi

Bu bölümde $\vec{F} = m * \vec{a}$ nın üçüncü bir kullanım şekli ortaya çıkacak ki bu hız, zaman, kütle ve kuvvetlerle ilgili problemlerde uygun olabilir

$\vec{F} = m*\frac{d\vec{v}}{dt}$

$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

$m\vec{v}$: Doğrusal (lineer) momentum olup hız doğrultusundadır.

T.M. Birim Sistemi $\frac{kgf*sn^2}{m}*\frac{m}{sn}$ = kfg*sn

S.I. Birim Sistemi [m*v]= kg * $\frac{m}{sn} * \frac{sn}{sn}$ = kg * $\frac{m}{sn^2}$ * sn = Newton*sn

Bu ifade sabit kütle durumu için Newton tarafından verilmiştir.

$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = \int_{v_1}^{v_2} d(m\vec{v})$ $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

veya $m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2$

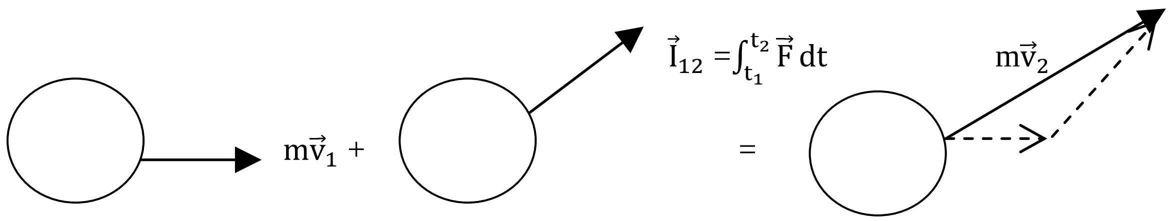
Bir maddesel nokta belirli bir süre bir $\vec{F}$ kuvveti etkisinde kalırsa momentumu o sürede F kuvvetinin impulse' ı kadar artar.

İmpulse $\vec{I}_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$ (doğrusal impulse)

$m\vec{v}_1 + \vec{I}_{12} = m\vec{v}_2$

$\vec{I}_{12} = \vec{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x dt + \vec{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y dt + \vec{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z dt$

Kinetik enerji ve iş skaler olduğu halde momentum ve impulse vektörel büyüklüklerdir.



Şekil 4.1.

Öyleyse üç doğrultuda

$(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = (mv_x)_2$

$(mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = (mv_y)_2$

$(mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt = (mv_z)_2$

Birden çok kuvvet etki ederse

$m\vec{v}_1 + \sum \vec{I}_{12} = m\vec{v}_2$

4.2. Maddesel Nokta Sistemi

İmpulse-momentum ifadesi sistemin her maddesel noktası için yazılır ve toplanırsa

$\sum m\vec{v}_1 + \sum \vec{I}_{12} = \sum m\vec{v}_2$

İç kuvvetler hep eşit ve zıt kuvvetler olduğundan

$\sum m\vec{v}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{dış}\, dt = \sum m\vec{v}_2$

$\sum m\vec{v}_1 + \sum(\vec{I}_{dış})_{12} = \sum m\vec{v}_2$

Önceden Kütle merkezinin hızı (bulunmuştu)

$\sum(m\,\vec{v}) = (\sum m)^* \vec{v}_G$

$= (\sum m)^* \vec{v}_{G1} + \sum(\vec{I}_{dış})_{12} = (\sum m)^* \vec{v}_{G2}$

Bu, tüm kuvvetler ağırlık merkezindeki tüm kütleye sahip bir maddesel noktaya etkimişçesine yazılmış momentum-impulse ifadesidir.

4.3. İmpulsif Kuvvetler

Çok kısa sürede çok büyük kuvvetlerden doğan impulse’ı hesaplamak için zamanla hesap yapmak zor olabilir. İmpulsif kuvvet denen kuvvetlerin impulse’ı yanında yay kuvveti, ağırlık kuvveti gibi kuvvetlerin impulse’ı ihmal edilir. Sürtünmesiz yüzeyde kayan kütlelerin çarpışması veya havada iki topun çarpışması gibi durumlar böyledir.

4.4. Momentumun Korunumu (Maddesel Noktalar Sistemi İçin)

$\sum m\vec{v}_1 + \sum(\vec{I}_{dış})_{12} = \sum m\vec{v}_2$

Dış kuvvetlerin impulse’ı sıfır ise

$\sum m\vec{v}_1 = \sum m\vec{v}_2$

Bir maddesel noktalar sistemine etkiyen dış kuvvetlerin impulse’ları toplamı sıfır ise sistemin toplam momentumu sabit kalır.

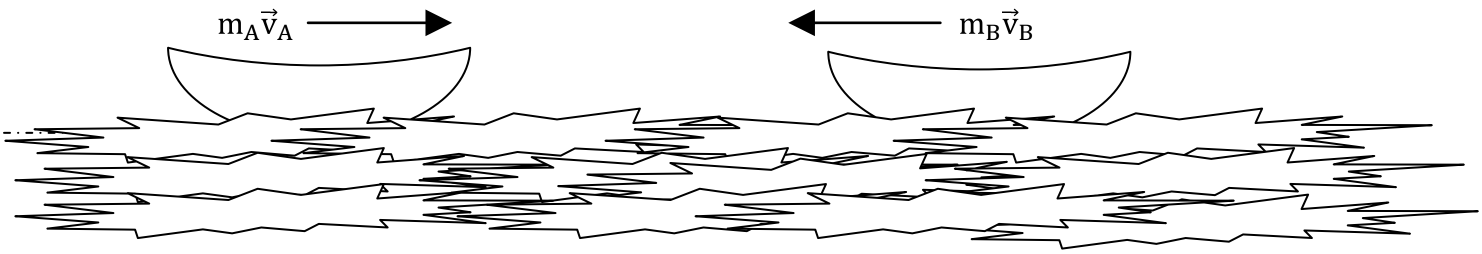
Önceden : $\sum(m\,\vec{v}) = (\sum m)\vec{v}_G$

$\vec{v}_{G1} = \vec{v}_{G2}$

Dış kuvvetlerin impulse'ı sıfır ise G'nin hızı sabittir.

Momentum Korunumunda iki Önemli Durum :

1-) Göz önüne alınan süre içinde sisteme etkiyen dış kuvvetler birbirini dengelemektedir.

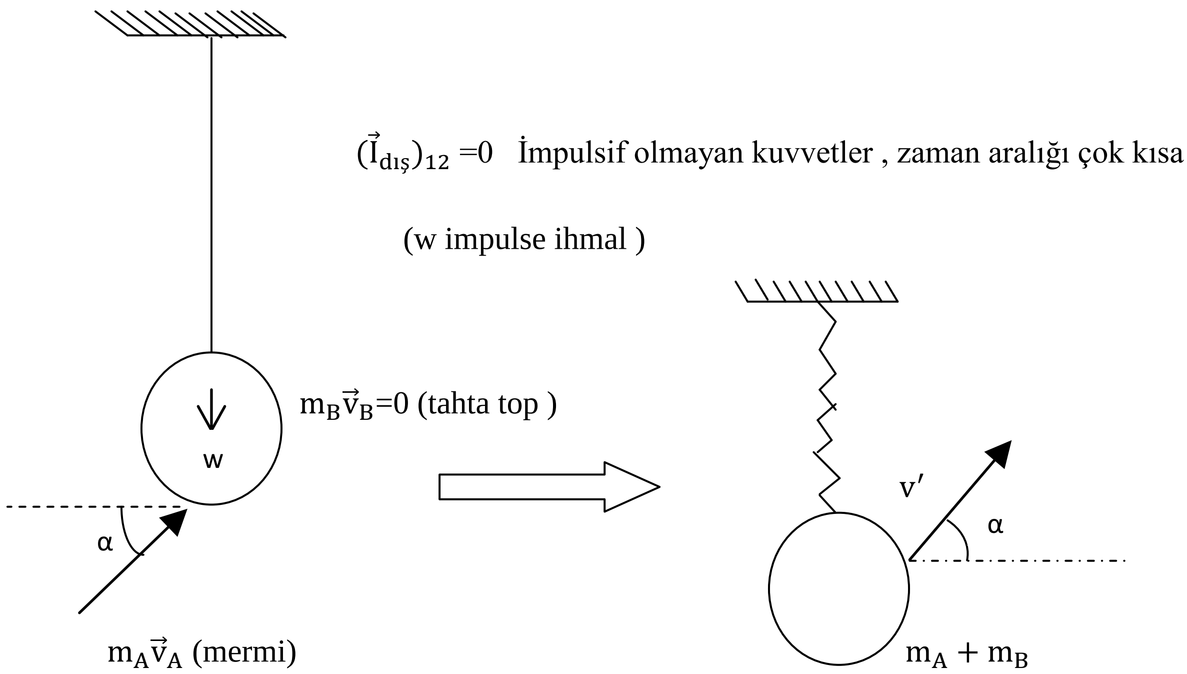


Şekil 4.2.

İki kayık birbirine bağlı ilk anda hız yok. Sonra ipin çekilmesiyle:

$\vec{v}_G$=0 (A ve B hızları zıt yönlü olduğu için kütle merkezi hızı sıfırdır.) ağırlık ve yüzey tepki kuvvetleri dengededir. Düşey impulse=0 dır.

2-) Göz önüne alınan zaman aralığı çok kısadır ve bütün dış kuvvetler impulsif olmayan tiptendir.

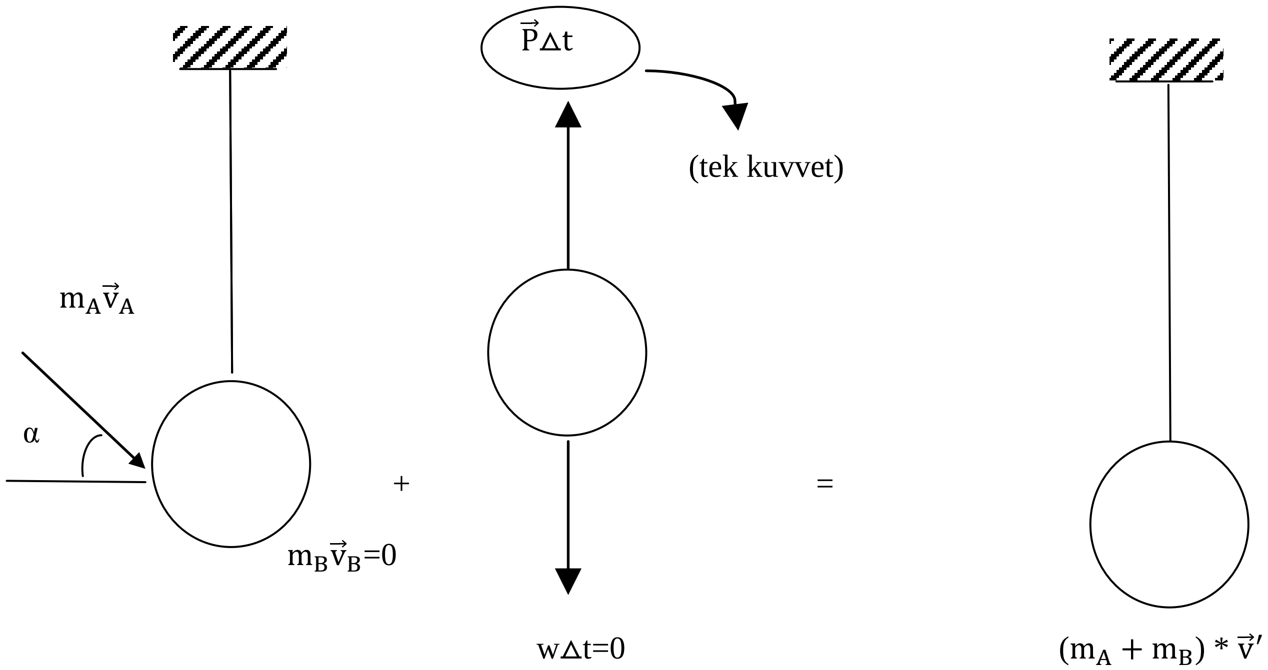


Şekil 4.3.

$\sum m\vec{v}_1 = \sum m\vec{v}_2$

$m_A\vec{v}_A + 0 = (m_A + m_B)\,\vec{v}'$

$\vec{v}_A$ ve $\vec{v}'$ aynı doğrultudadır ve bulunur. Ağırlık zaten impulsif değildir.



Şekil 4.4.

P impulsif kuvvettir.

Ağırlığın impulse'ı ihmal edilebilir.

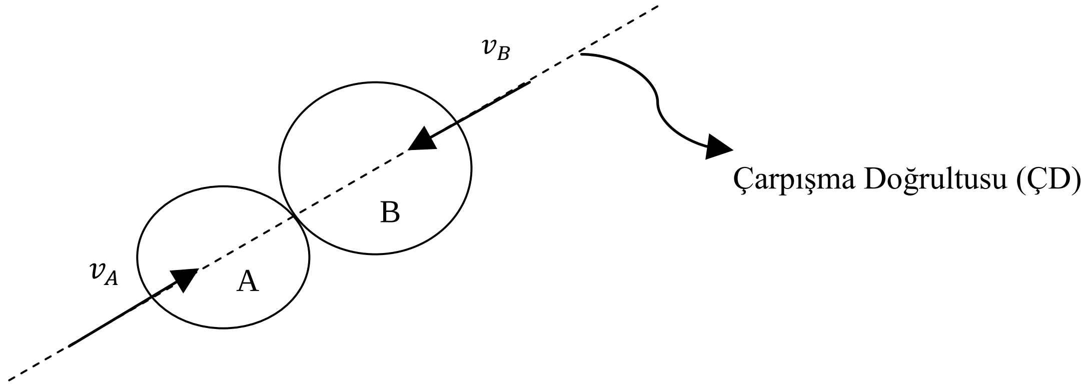
$\sum m\vec{v}_1 + \sum(\vec{I}_{dış})_{12} = \sum m\vec{v}_2$

$m_A v_A * \cos\alpha + 0 = (m_A + m_B) * v'$ (momentum x doğrultusunda korunur)

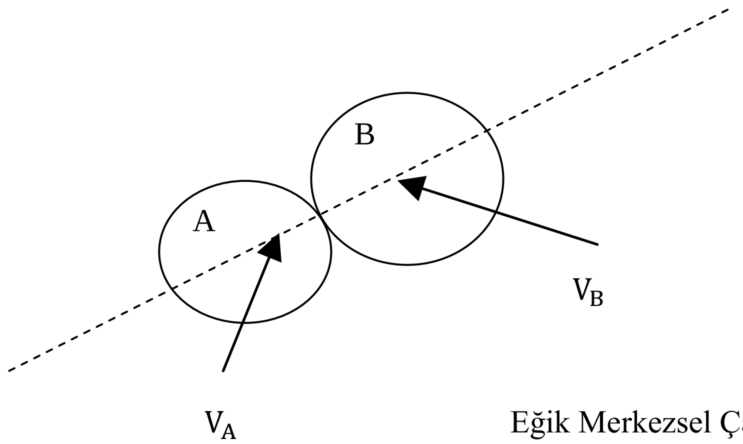
$-m_A v_A * \sin\alpha + P\Delta t = 0$ (P bulunur)

4.5. Çarpışma

İki cismin çok kısa sürede birbirlerine çok büyük kuvvetler uygulamasına **çarpışma** denir. Çarpışma sırasında dokunma yüzeylerinin orta normaline çarpışma doğrusu denir. Cisimlerin kütle merkezleri bu doğru üzerinde ise buna **merkezsel çarpışma** denir. Aksi halde çarpışmaya **merkezsel olmayan çarpışma** denir.



Doğrulsal çarpışma

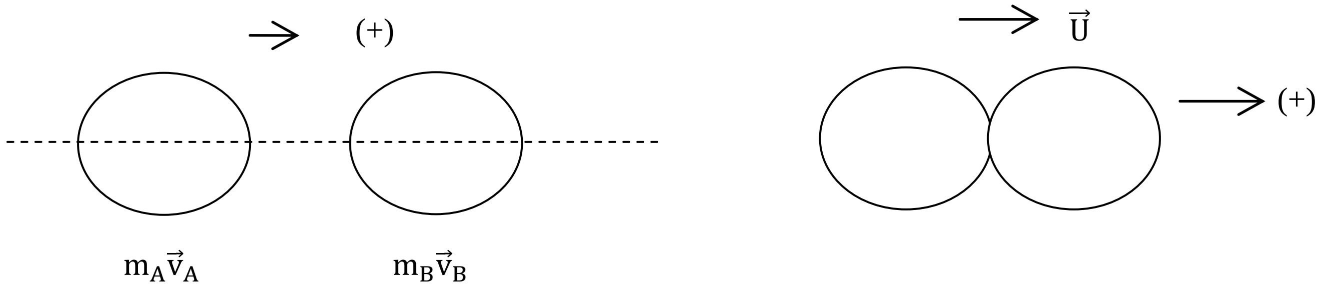


Eğik Merkezsel Çarpışma

Şekil 4.5.

Çarpışma sırasında cisimler birbirlerine çarpışma doğrusu doğrultusunda kuvvet uygularlar. Dolayısıyla sadece Ç.D. paralel hızlar değişir diğeri değişmez.

4.6. Doğru Merkezsel Çarpışma



Şekil 4.6.

İki cismin çarpışmasını gözönüne alalım (+) yön sağa doğru olsun. İki maddesel noktalı sisteme dıştan etki eden impulsif kuvvet yoktur.

$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}'_A + m_B\vec{v}'_B$ veya

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$

En büyük şekil değiştirme sırasında ortak hız kazanılır.

$m_A v_A - \int P\,dt = m_A U$ (Şekil değiştirme için) EK BİLGİ

$$e = -\frac{\text{Çarpışmadan Sonraki Bağıl Hız}}{\text{Çarpışmadan Önceki Bağıl Hız}} = -\frac{V'_B - V'_A}{V_B - V_A} = -\frac{V'_A - V'_B}{V_A - V_B}$$

e: Çarpışma (esneklik) katsayısı

Bu bağıntı e'nin tayininde kullanılır. Ayrıca e biliniyorsa problem çözümünde de kullanılır. e en çok malzemeye bağlıdır. Fakat çarpışma hızı, cisimlerin şekil ve boyutlarıda önemlidir.

<u>İki önemli durum :</u>

1) e =0 tam plastik çarpışma

Bir merminin saplanması, 2 çamur topun çarpışması gibi çarpışma sonrasında ortak hız olur

e = 0 $\quad V'_B = V'_A$

momentumun korunumu çözümü verir

$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v'_B,$

2) e=1 tam elastik çarpışma

e=1 ise $\quad v'_B - v'_A = -(v_B - v_A) \quad v'_B - v'_A = v_A - v_B \qquad v_A + v'_A = v_B + v'_B$

Bu durumda kinetik enerji korunur, Şöyle ki :

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$

$m_A (v_A - v'_A) = m_B (v'_B - v_B)$

yukarıda $v_A + v'_A = v_B + v'_B$ idi.

$m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B (v'_B - v_B)(v_B + v'_B)$

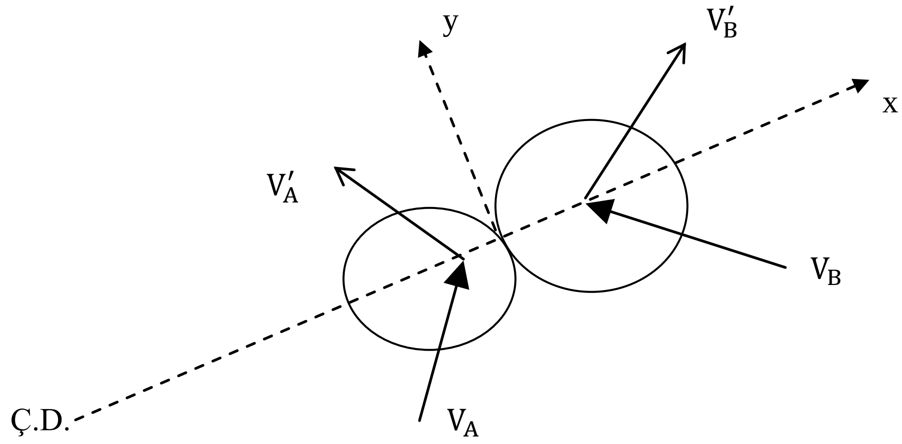
$m_A \left(v_A^2 - {v'_A}^2 \right) = m_B \left({v'_B}^2 - v_B^2 \right)$

$m_A v_A^2 - m_A {v'_A}^2 = m_B {v'_B}^2 - m_B v_B^2$

$1/2 \quad (m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A {v'_A}^2 + m_B {v'_B}^2) \quad 1/2$

$1/2 * m_A v_A^2 + 1/2 * m_B v_B^2 = 1/2 * m_A {v'_A}^2 + 1/2 * m_B {v'_B}^2$

4.7. Eğik Merkezsel Çarpışma



Şekil 4.7.

Çarpışmadan sonraki hızlar 4 skaler büyüklük gerektirir. Çarpışma doğrultusu x ve ona dik teğetsel doğrultusu y olsun. Sürtünmesiz yüzeyler düşünelim. İmpulsif kuvvetler yalnız x doğrultusundadır.

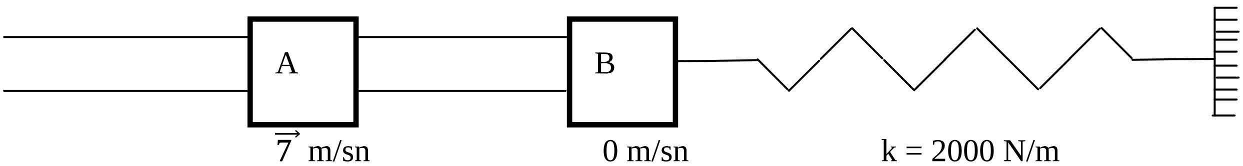
1) A cisminin momentumunun y bileşeni korunur. (hızın y bileşeninin şiddeti değişmez)
2) B cisminin momentumunun y bileşeni korunur. (hızın y bileşeninin şiddeti değişmez)
3) Sistemin toplam momentumunun x bileşeni korunur.
4) Malzemeye ait e ile yaklaşma ve uzaklaşma hızlarının x bileşenleri arasında bağıntı yazılır.

Dört denklem 4 bilinmeyen bulunur.

4.8. Enerji ve momentum ile ilgili problemler

$\vec{F} = m\,\vec{a}$ temel denkleminin 3 şeklini öğrendik. Probleme göre uygun olanını kullanırız. Çarpışma problemlerinde İmpulse – momentum yöntemi tek yoldur.

ÖRNEK



Şekil 4.8.

5 kg'lık A silindiri 7 m/sn hızla 20 kg'lık B silindirine çarparsa ona bağlı 2000 N/m sabitli yayı en çok ne kadar sıkıştırır. (e = 0,9)

$$\left.\begin{array}{ll} e = -\dfrac{v_{BS}-v_{AS}}{v_{Bİ}-v_{Aİ}} & v_{AS} = v_{BS} - e v_{Aİ} \\ m_A v_{Aİ} + m_B v_{Bİ} = m_A v_{AS} + m_B v_{BS} & \end{array}\right\}$$

enerji denklemi yazamayız

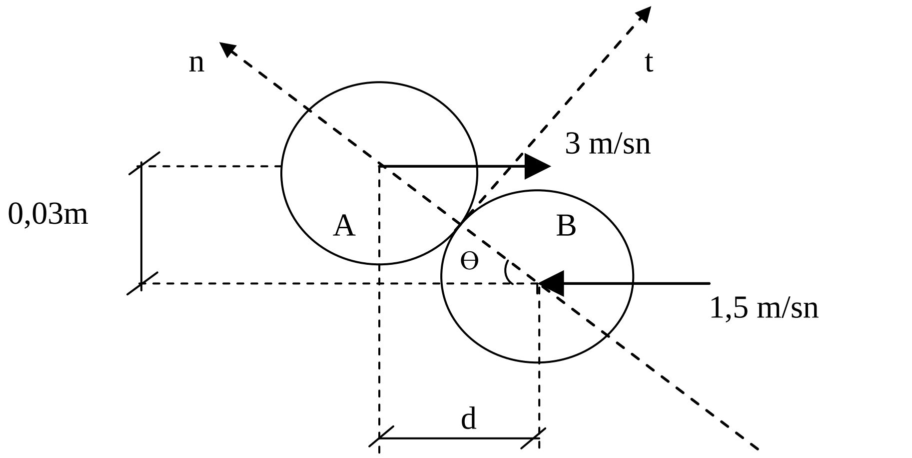
e=0,9 elastik çarpışma değil

$5*7+0 = 5*(v_{BS} - 0{,}9*7) + 20*v_{BS}$ $\quad v_{BS}$=2,66 m/sn

Çarpışmadan sonra:

$\frac{1}{2} m_B v_{BS}^2 = \frac{1}{2} * k\,\delta^2$ $\quad \delta$= 0,266 m

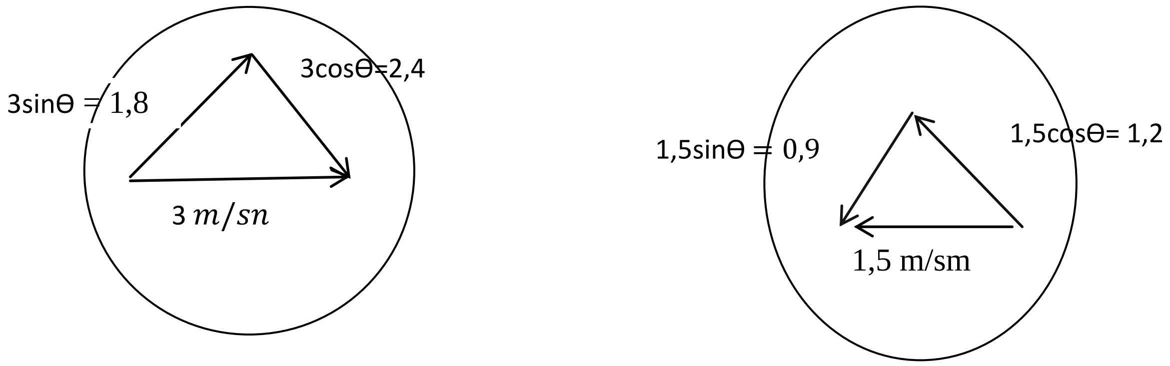
ÖRNEK



Şekil 4.9.

İnce A ve B diskleri sürtünmesiz yüzey üzerinde kayıyorlar. Yarıçapları 25 mm dir. $m_A = 0{,}1$ kg ve $m_B = 0{,}35$ kg , e = 0,7 olduğuna göre çarpmadan sonra hızları nedir? (Yan yüzeyleri sürtünmesiz kabul ediniz)

$d^2 + 0{,}03^2 = 0{,}05^2$ $\quad$ $d = 0{,}04$ $\quad$ tanΘ = $3/4$ $\quad$ Θ= 36,87



Şekil 4.10.

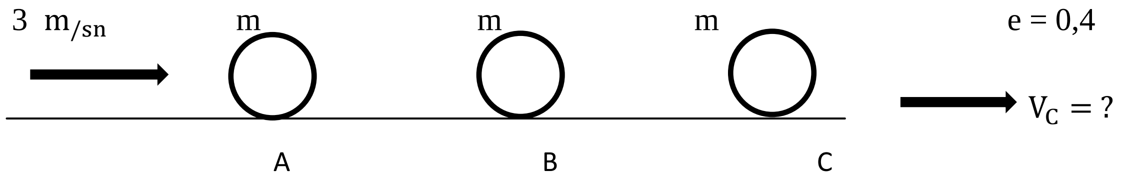
$(v_{As})_t$ = 1,8 $m_{/sn}$ $\quad$ $(v_{Bs})_t$ = - 0,9 $m_{/sn}$

Normal doğrultu: 0,1*(-2,4) + 0,35 * 1,2 = 0,1 $(V_{As})_n$ + 0,35 $(V_{Bs})_n$

$0{,}7 = -\frac{(V_{Bs})_n-(V_{As})_n}{(V_{Bi})_n-(V_{Ai})_n}$ $\quad$ $0{,}7 = -\frac{(V_{Bs})_n-(V_{As})_n}{1{,}2-(-2{,}4)}$

$(V_{Bs})_n$ = - 0,160 $m_{/sn}$ $\quad$ $(V_{As})_n = 2{,}36\ m_{/sn}$

<u>ÖRNEK</u>



Şekil 4.11.

$3*m = mv_A' + mv_B'$ $\quad$ (1)

$0,4 = -\frac{v_B' - v_A'}{0-3}$ (2)

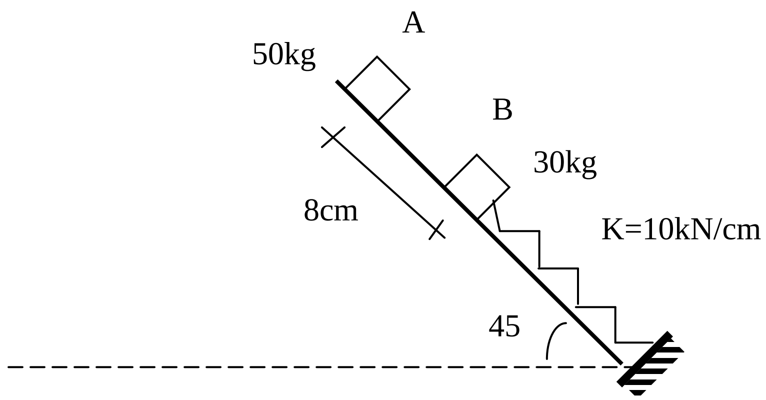
1 ve 2 nin ortak çözümünden $v_A' = 0,9\ m/_{sn}$ $v_B' = 2,1\ m/_{sn}$

$m\,(2,1) = mv_B'' + mv_C'$ (3)

$0,4 = -\frac{v_C' - v_B''}{v_C - v_B'}$ (4)

3 ve 4 ün ortak çözümünden $v_C' = 1,47\ m/_{sn}$

ÖRNEK



Şekil 4.12.

A bileziği serbest bırakılınca B bileziğine e=0,2 ile birinci çarpışında B bileziğinin bağlı olduğu yayı en fazla ne kadar kuvvet ile sıkıştırır. (g= 10m/sn^2). Şekildeki konumda yay bir miktar sıkışmıştır.

Yayın üzerine B'yi koyunca yayın sıkışma miktarı: F = kx

$30*10*\sin45 = 10^6*\delta_i$ $\delta_i=0,000212$ m

A çarpmadan önce B kütlesi, yayı 0,000212 m sıkıştırmış durumda.

Çarpmadan önce A nın hızı enerjinin korunumundan :

$10*50*0,08*\sin45 = ½ *v_A^2* 50$ $V_A = 1,064\ m/_{sn}$

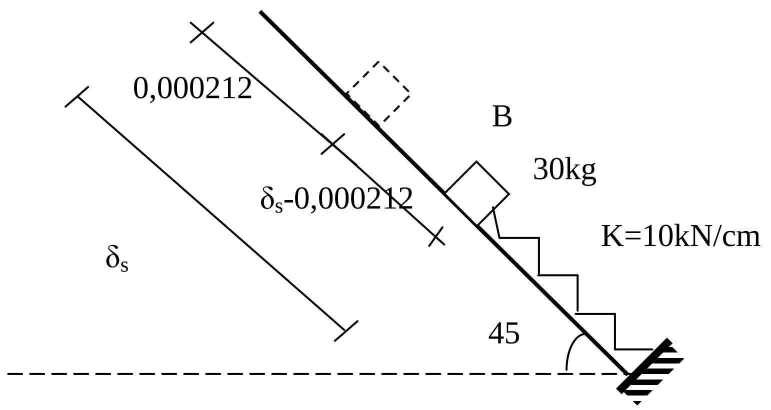
$$\left.\begin{array}{ll} 50*(1{,}064) + 0 = 30v'_B + 50v'_A & (1) \\ 0{,}2 = \frac{v'_B - v'_A}{1{,}064} & (2) \end{array}\right\} \quad V'_B = 0{,}798\ m/_{sn}$$

k = 10 kN/$_{cm}$ = 10^6 N/m

Yayın toplam sıkışma miktarı $=\delta_s$

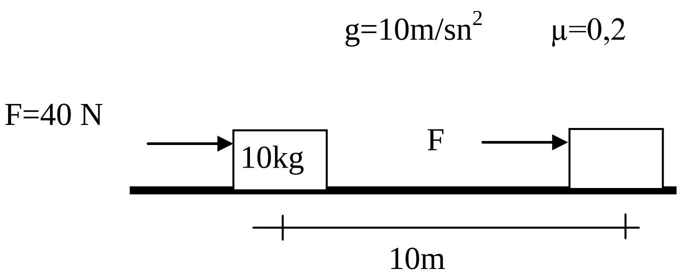
$\frac{1}{2} * 10^6 * (0{,}000212)^2 + \frac{1}{2} * 30 * (0{,}798)^2 + 30 * 10 * (\delta_s - 0{,}000212)*\sin 45 = \frac{1}{2} * 10^6 * (\delta_S)^2$ $\delta s = 0{,}00416$ m

F = 4160 Newton (İmpuse sıfırdır. Çünkü yay kuvveti ile ağırlığın bileşeni birbirini dengeler.)



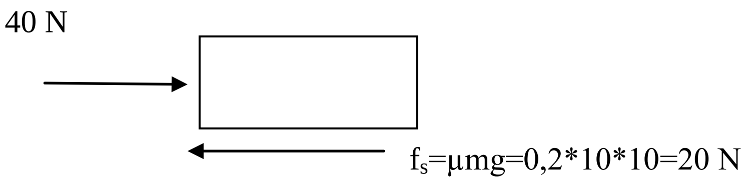
Şekil 4.13.

ÖRNEK



Şekil 4.14.

40 N'luk bir kuvvet durgun haldeki 10 kg'lik bir cisme sürtünme katsayısı 0,2 olan bir yüzey üzerinde 10 metre boyunca etkimektedir. 10m sonunda toplam kuvvetin impulse ı nedir.



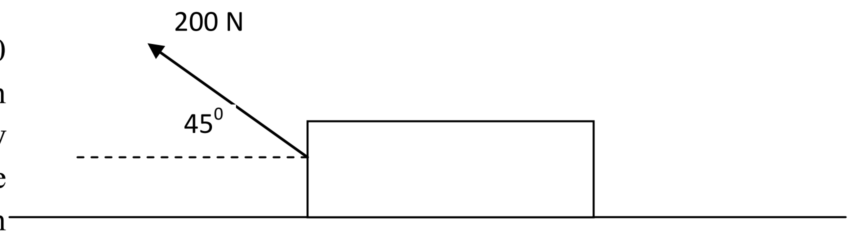
Şekil 4.15.

$\sum E_1 + \sum U_{12} = \sum E_2$ 0+(40*10-20*10)=1/2*10*v_2^2 v_2=6,324 m/sn

$mv_1+I_{12}=mv_2$ 0+I_{12}=10*6,32 I_{12}=63,24 kg m/sn

<u>ÖRNEK</u>

100 kg lık cisim durgun haldeyken 200 N luk kuvvet şekildeki gibi 10 sn boyunca etki etmektedir. Cisim yatay düzlemde hareket ederse bu süre sonunda cismin hızını ve yüzeyin tepkisini bulun.



Şekil 4.16.

Kuvvet sabittir. Zamana bağlı değildir.

<u>yatayda</u> $mv_{x1} + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{x2}$

$$mv_{x1} + F_x (t_2 - t_1) = mv_{x2}$$

+ ← 0+(141.42*10)=100*v_{x2}

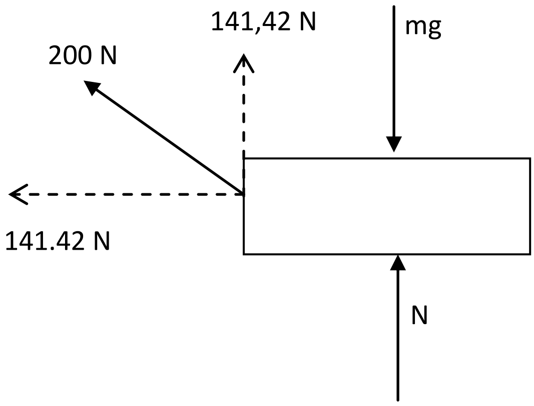
v_{x2}=14.1 m/sn

<u>düşeyde</u> $mv_{y1} + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = mv_{y2}$

$$mv_{y1} + F_y (t_2 - t_1) = mv_{y2}$$

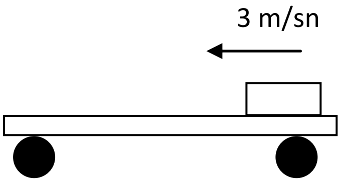
+ ↑ 0+N (10)-9.81*100*10+141.42*10=0

N=840 Newton



Şekil 4.17.

<u>ÖRNEK</u> (08/08/2011 Dönem sonu sınavı)



15 Newton ağırlığındaki bir bavul durmakta olan ve 30 Newton ağırlığında olan durgun haldeki kaykay'a 3 m/sn yatay hız ile atılmıştır. Bavulun kaykay üstündeki kayması bittiği anda kaykay ın hızı ne olur?

Şekil 4.18.

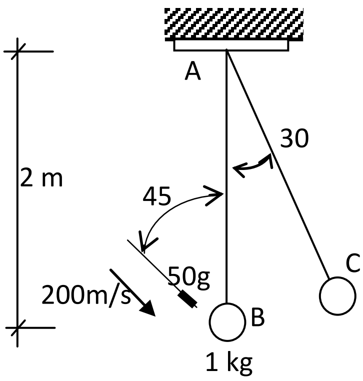
Ç.Ö.T.M.=Ç.S.T.M.

$m_k v_{k1}+m_b v_{b1}=m_k v_{k2}+m_b v_{b2}$

ortak hız

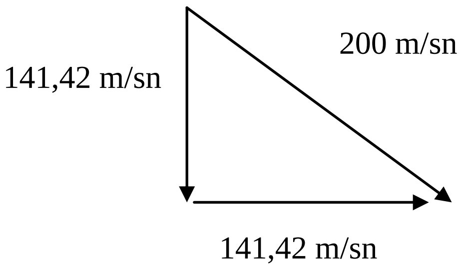
15/9,81*3+0=15/9,81*v+30/9,81*v v=1 m/sn

<u>ÖRNEK</u> (18.01.2006 Dönem sonu sınavı)



Şekil 4.19.

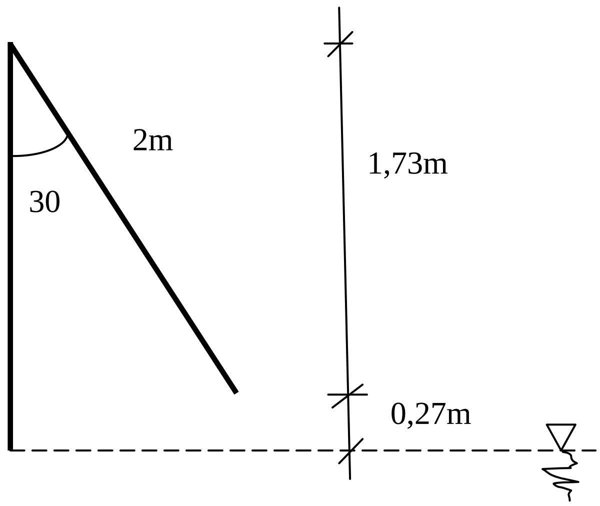
Kütlesi 50 gram olan mermi tahtadan 1kg kütleli B topuna düşey iple 45 derece yaparak 200m/s hızla çarpıp içerisinde kalıyor. İçerisinde mermi olan top C noktasına geldiğinde ip tavana ne yönde ve ne kadar kuvvet uygular? (Uyarı: Çarpışma sırasında enerji ve düşey doğrultuda momentum korunmaz.)



Şekil 4.20.

Ç.Ö.T.M.=Ç.S.T.M.

0,05*141,42=1,05*v_B v_B=6,73 m/sn

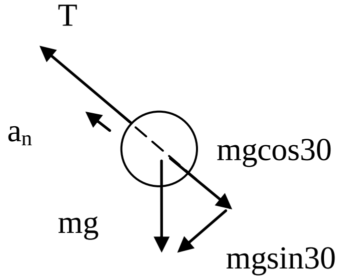


Şekil 4.21.

½*1,05*6,73^2=1,05*9,81*0,27+1/2*1,05*v_c^2 v_c=6,29 m/sn

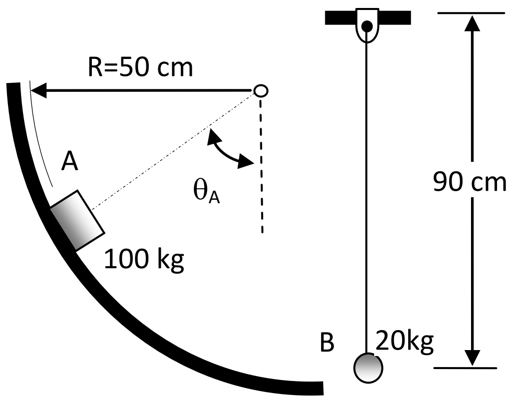
T-mgcos30=1,05*(6,29)^2/2

T=29,69 Newton



Şekil 4.22.

<u>ÖRNEK</u> (01.12.2008 Ara sınav)

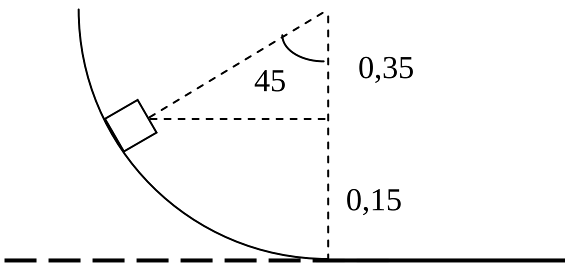


Çeyrek daire üzerindeki A bloku θ_A=45° iken serbest bırakılmıştır (100kg serbest olup iple bağlı değildir.) ve sürtünmesiz olarak kayarak B topuna vurmaktadır. e=0.80 olduğuna göre,

(a) çarptıktan hemen sonra B'nin hızını,

(b) B'nin çıkacağı maksimum yüksekliği

Şekil 4.23.



Şekil 4.24.

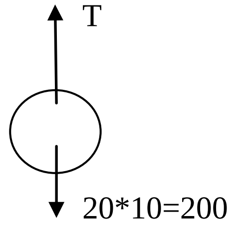
$100*10*0,15=1/2*100*v^2$ v=1,73 m/sn

$1,73*100=v_A*100+v_B*20$ (1)

$0,8=-(v_A-v_B)/(1,73-0)$ $v_A=v_B-0,8*1,73$ (2)

$173=v_B*100-138,4+20\ v_B$ v_B=2,595 m/sn v_A=1,21 m/sn

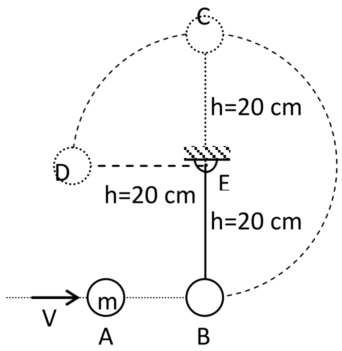
$½*20*2,595^2=20*10*h$ h=0,34 m



$T-200=20*2,595^2/0,9$ T=349,65 Newton

Şekil 4.25.

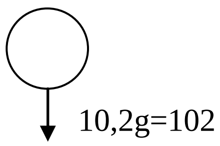
ÖRNEK (09.01.2009 Mazeret sınavı)



Şekil 4.26.

Yandaki şekilde m=0.2kg kütleli çamur 10kg kütleli sarkaç topuna 200m/s lik hız ile yatay olarak çarpıyor ve yapışıyor. Sarkaç C'ye ip gergin olarak varır mı? Gösteriniz. Eğer C'yi geçiyorsa D'de ve tekrar B'ye gelince ipteki gerilme kuvvetleri ne olur? g=10 m/sn^2

Momentumun korunumundan 0,2*200=10,2v v=3,92 m/sn



Şekil 4.27.

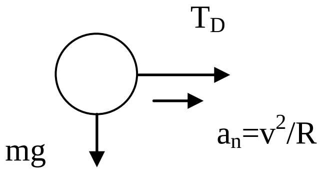
C noktasında

$\sum F=ma$ $102=10,2*v^2/h$ v=1,41 m/sn olmalı

Enerjinin korunumu

$½*10,2*3,92^2=10,2*10*2h+1/2*10,2*v^2$ v=2,71 m/sn

1,41<2,71 ip gergin olur.

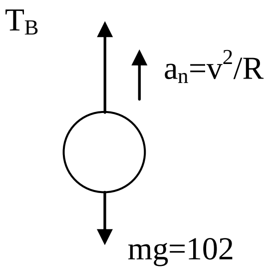


Şekil 4.28.

D noktasında

$½*10,2*3,92^2=10,2*10*0,2+1/2*10,2*v_D^2$ $v_D=3,37$ m/sn

$\sum F=ma$ $T_D=10,2*3,37^2/0,2=579,4$ Newton

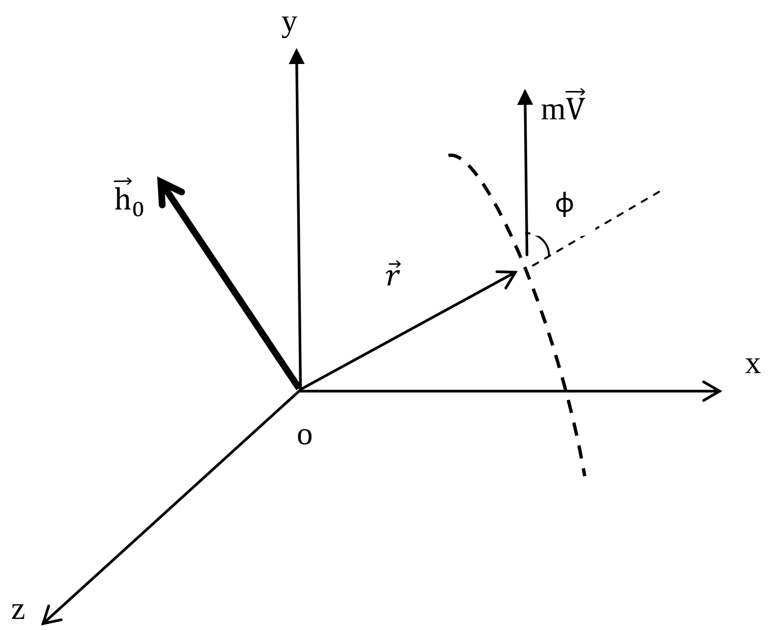


Şekil 4.29.

B noktasında

$T_B-102=10,2*3,92^2/0,2$ $T_B=885,69$ Newton

4.9. Bir Maddesel Noktanın Açısal Momentumu



Şekil 4.30.

Momentum = $m\vec{v}$

Bunun o ya göre momentine momentumun momenti veya açısal momentum denir.

$$\vec{h}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Bu $\vec{r}$ ile $m\vec{v}$ nin düzlemine diktir. Aradaki açı ϕ olduğuna göre şiddeti

$h_o =$ r*mv*sin ϕ

Yönü de sağ el kuralı ile bulunur.

$$\vec{h}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

Bu vektörün bileşenleri koordinat eksenlerine göre momentini verir.

$h_x = m\,(y\,v_z \;- z\,v_y\,)$

$h_y = m\,(z\,v_x \;- x\,v_z\,)$

$h_z = m\,(x\,v_y \;- y\,v_x\,)$

z=$v_z = 0$ olursa x –y düzlemindeki bir hareket için $h_x = \; h_y = 0$

$h_z = \; h_o = \; m\,(x\,v_y \;- y\,v_x\,)$ Skaler ile ifade edilir. Uzayda açısal momentumun zamana göre türevini alırsak:

$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m * \vec{v}) + \vec{r} \times (m * \frac{d\vec{v}}{dt})$

$= \underbrace{\vec{v} \times m\,\vec{v}}_{0} + \; \underbrace{\vec{r} \times m\vec{a}}_{F}$

$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

Bir maddesel noktaya etkiyen F kuvvetinin bir o noktasına göre momenti maddesel noktanın o ya göre açısal momentumunun değişme hızına eşittir.

4.10. Bir Maddesel Noktalar Sisteminin Açısal momentumu

Bir maddesel noktalar sisteminin 0 ya göre $\vec{h}_0$ açısal momentumu diye sistemin çeşitli maddesel noktalarının momentumlarının 0 ya göre momentleri toplamına denir.

$\sum \vec{h}_0 \; = \sum_i(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i)$

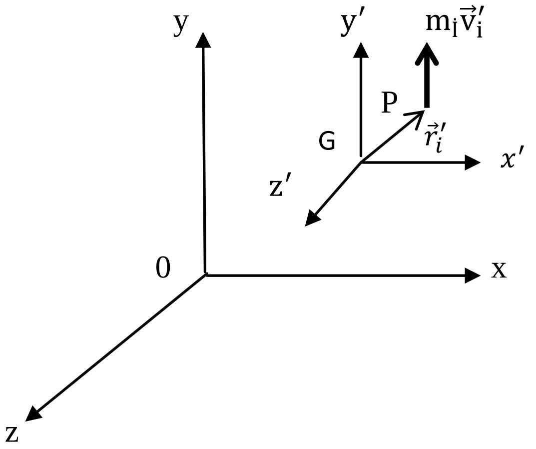
$\frac{d(\sum \vec{h}_0\,)}{dt} = \; \sum_i \; (\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i) + \; \sum_i\,(\,\vec{r}_i \times \; m_i * \frac{d\vec{v}_i}{dt}\,) = \sum_i(\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i) + \sum_i(\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i) = \sum_i(\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$

İç kuvvetler eşit ters kuvvet çiftleri oluşturduğundan etkileri birbirini sadeleştirir. Sadece dış kuvvet etkileri kalır.

$\sum(\vec{M}_0)_{dış} = \frac{d(\sum \vec{h}_0\,)}{dt}$ (**)

Kütle merkezlerine göre açısal momentum

Rijit cisim hareketinde G ağırlık merkezinden geçen $G_{x'y'z'}$ takımına göre inceleme yapmak işleri kolaylaştırır.



Şekil 4.31.

0_{xyz} yerine $G_{x'y'z'}$ ye göre hareket cinsinden büyüklükler konursa da (**) denklemi sağlanır. Bunu ispatlayalım.

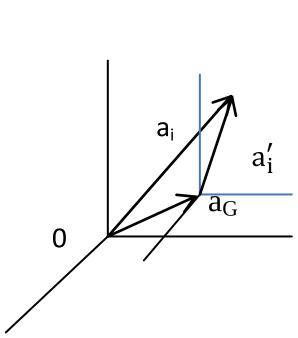
$r' \longrightarrow$ x' y' z' 'e göre konum vektörü

$r \longrightarrow$ x , y, z ' e göre konum vektörü

$h_G' = \sum_i(\vec{r'}_i \times m_i\vec{v'}_i)$ $\qquad \frac{dh_G'}{dt} = \sum \left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt} \times m_i\vec{v}_i' + \vec{r}_i' \times m_i\vec{a'}_i\right)$

$\vec{a}_i = \vec{a}_G + \vec{a'}_i$ dır.

$$\frac{dh_G'}{dt} = \sum \left(\vec{r}_i' \times m_i\left(\vec{a}_i - \vec{a}_G\right)\right) = \underbrace{\sum(\vec{r}_i * m_i\vec{a}_i)}_{F_{(dış)}} - \underbrace{\sum(\vec{r}_i * \vec{m}_i)}_{0} \times \vec{a}_G$$



Şekil 4.32.

$\sum(r_i' m_i) = (\sum m) r_G$ idi $\qquad r_G$ üssülü takıma göre sıfıra eşittir.

$\frac{dh_G'}{dt} = \sum\left(\vec{r}_i \times m_i (F_i)_{dış}\right) = \sum(M_G)_{dış} \qquad \frac{dh_G'}{dt} = \sum(M_G)_{dış}$

4.11. Açısal Momentumun Korunumu

Daha önce görüldü ki bir maddesel noktanın bir o noktasına göre açısal momentumunun değişim hızı maddesel noktaya etkiyen $\vec{F}$ kuvvetinin 0 ya momentine eşittir. Her t değişimi için M_o sıfır ise her dt için

$\frac{d\vec{h}_0}{dt} = 0$ ve integre edilirse $\vec{h}_0 = \text{sabit}$

Bir maddesel noktaya etkiyen F kuvvetinin bir 0 noktasına göre momenti sıfırsa maddesel noktanın 0 ‘ya göre açısal momentumu korunur.

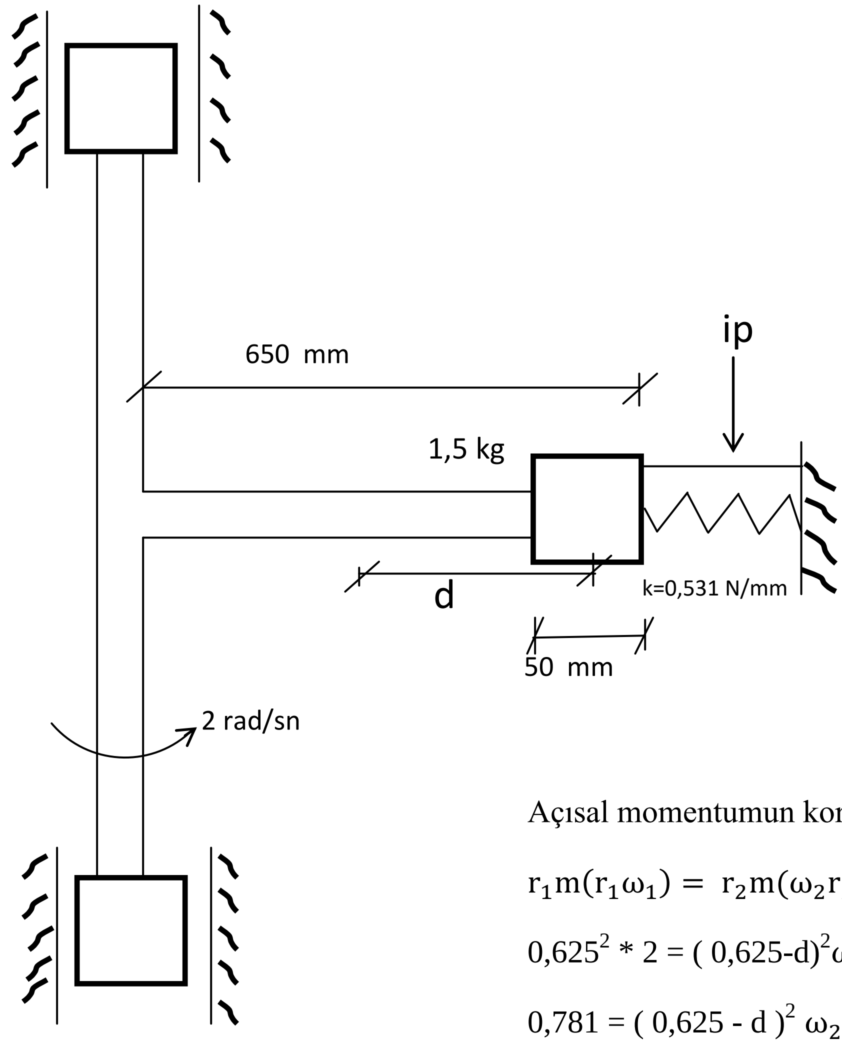
$M_o = 0 = \frac{d\vec{h}_0}{dt}$ $\qquad h_o = \text{sabit}$, değişmez .

Bileşke kuvvetler sıfır ise bu ifade zaten sağlanır. Birde bu ifade merkezsel bir kuvvet içinde (momentin sıfır olması için 0 dan geçmesi gerek) sağlanır.

$h_o = \vec{r} \times m\vec{V} = \text{sabit}$

ÖRNEK

Şekildeki sistemin $\omega = 2$ rad/sn açısal hızla serbest olarak dönmektedir. 1,5 kg lık A kütlesi ile bir yay 100 mm sıkıştırılmış olarak durmaktadır. İp kesilince kütle eksene ne kadar yaklaşır. (kütle ile yay arasında bağ yoktur.) Sürtünme ve çubuk kütlelerini ihmal ediniz.



Şekil 4.33.

Açısal momentumun korunumu $\quad r_1 m v_1 = r_2 m V_2$

$r_1 m(r_1\omega_1) = r_2 m(\omega_2 r_2) \quad m r_1^2 \omega_1 = m r_2^2 \omega_2$

$0{,}625^2 * 2 = (0{,}625-d)^2 \omega_2$

$0{,}781 = (0{,}625 - d)^2 \omega_2 \quad (1)$

Enerjinini korunumu : $\Delta(V + T) = 0 \quad (V+T)_1 = (V + T)_2$

$\frac{1}{2}*(1{,}5)[0{,}625*(2)]^2+\frac{1}{2}*531*(0{,}1)^2=\frac{1}{2}(1{,}5)[(0{,}625-d)\omega_2]^2 \quad (2)$

(1) ve (2) ortak çözülürse d=0,279 m

(merkez kaç daha zayıf ise kesilince yay ittiriliyor.)

d = 0,279 > 0,1 yani yaydan 0,179 m uzakta duruyor.

ÖRNEK

Bir önceki problemi sürtünmeli duruma göre çözünüz ($\mu_d = 0{,}4$)

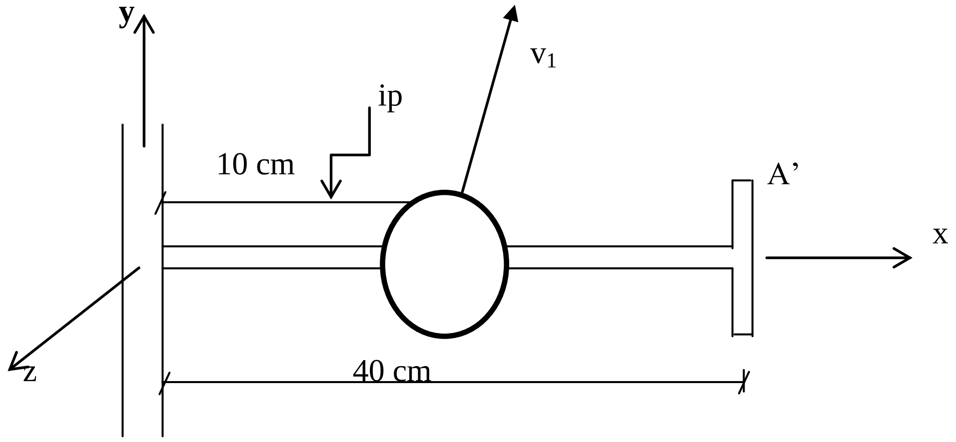
$0,781 = (0,625 - d)^2\omega_2$

$(U_{dış})_{1\to2} = \Delta(V+T)$ $\quad (V+T)_1 + U_{1\to2} = (V+T)_2$

$-1,5*(9,81)*(0,4)d + \frac{1}{2}*(1,5)\ [0,625*(2)]^2 + \frac{1}{2}*531*(0,1)^2 = \frac{1}{2}*(1,5)\ [(0,625-d)\,\omega_2]^2$

Deneme yanılma ile $\quad d = 0,205$ m

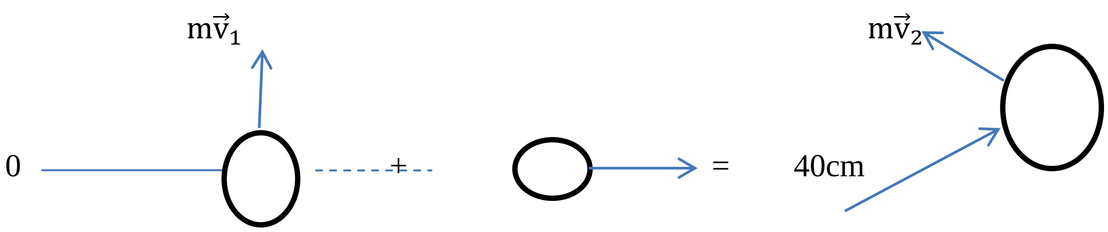
<u>ÖRNEK</u>



Şekil 4.34.

Düşey bir eksen etrafında serbest olarak dönen yatay bir çubuğa ağır bir top geçirilmiştir. Şekildeki konumda topun hızı 100 cm/sn dir ve top eksene bağlı bir ip yardımı ile tutulmaktadır. İp kesilince çubuk dönerken top A' konumuna geliyor . Çubuk kütlesini ihmal ederek

A) A'nın konumunda topun hızını
B) Çarpma ile sistemin kinetik enerjisindeki değişimi
C) Top A dan A' ' ye giderken xz düzlemindeki yörüngesi ne olur bulunuz ?



Şekil 4.35.

0 ‘ ya göre açısal momentum korunumu (Kütle var , momenti var ama ters yönde tepki var momenti var net moment sıfır)

$mv_1*(0,1) = m\,v_2\,(0,40)$

$v_2 = \frac{1}{4} *v_1 = 25$ m/sn

$T_1 = \frac{1}{2} * mv_1^2$ $T_2 = \frac{1}{2} * mv_2^2$ $T_2 = \frac{1}{16} * T_1$

Çubuğun kütlesi İhmal edildiğine göre A dan A’ ne giderken çubuktan yatay kuvvet gelmez Buna göre <u>topun doğrusal momentumu sabit olur.</u>

$F_N = m*a_n = 0$