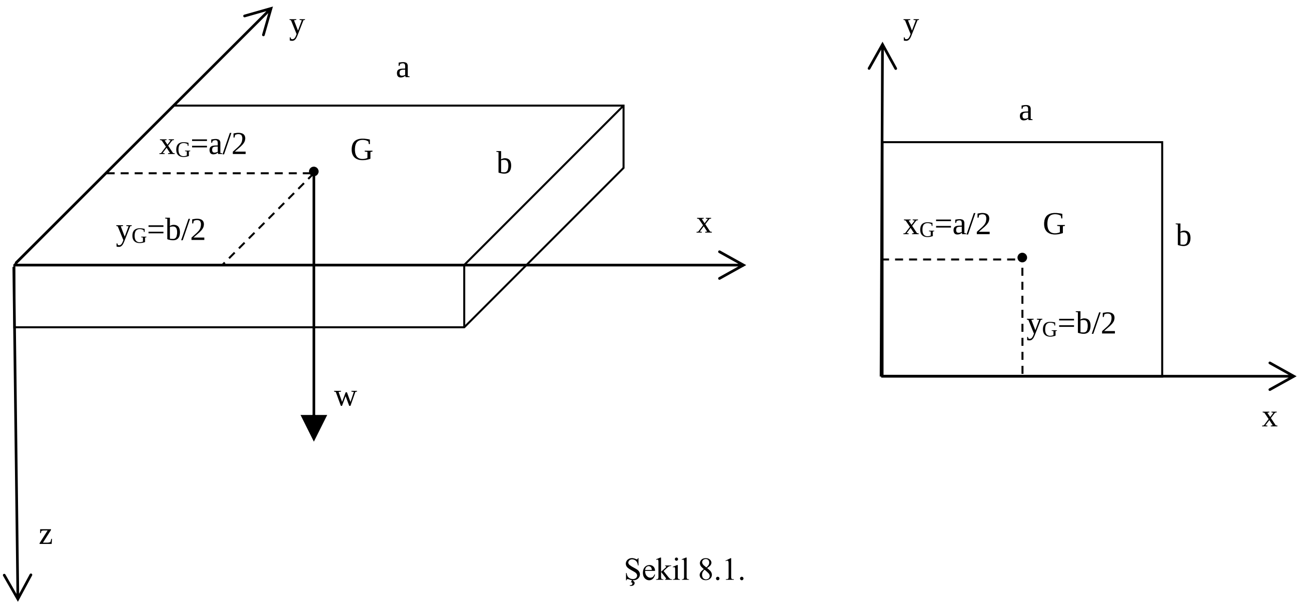
BÖLÜM 8. AĞIRLIK MERKEZİ, ATALET MOMENTİ ve YAYILI KUVVET SİSTEMLERİ

8.1. Düzlemsel Cisimlerin Ağırlık Merkezi

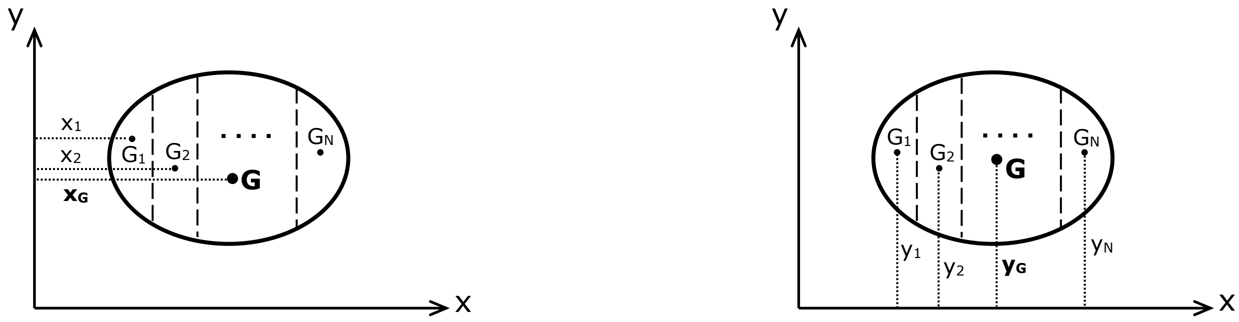


Şekil 8.1.

Birçok denge probleminde dıştan etkiyen kuvvetler ile birlikte cismin ağırlığı da hesaba katılmaktadır. Cismin dengede kalabilmesi için, ağırlık etkisinin cismi ne kadar döndürebileceğinin hesabı yapılmalıdır. Ağırlık, cisim üzerinde sadece bir noktaya toplanmamıştır. Fakat cisim üzerinde öyle bir nokta vardır ki (Ağırlık Merkezi), bu noktaya ağırlığın zıt yönünde ve ona eşit büyüklükte bir kuvvet uygulandığında cisim dengede kalır. "x" ve "y" eksenleri etrafında moment denge şartları yazılacak olursa:

$M_x = G*y_G$ $\qquad$ $M_y = G*x_G$

Bilinen geometrik şekillerin bir araya gelmesi ile meydana gelmiş bir cismin ağırlık merkezinin yerini (x_G, y_G) bulabilmek için Varignon teoreminden (bileşke kuvvetin bir noktaya göre momenti, bileşkeyi meydana getiren kuvvetlerin her birinin o noktaya göre momentleri toplamına eşittir) yararlanılmaktadır. Bunun için, küçük geometrik parçaların ağırlıklarının momentleri toplamı, tüm cismin ağırlığının momentine eşitlenmektedir.



Şekil 8.2.

$G \cdot x_G = G_1 \cdot x_1 + G_2 \cdot x_2 + ... + G_N \cdot x_N$ $G \cdot y_G = G_1 \cdot y_1 + G_2 \cdot y_2 + ... + G_N \cdot y_N$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i \cdot x_i}{G} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i \cdot y_i}{G}$$

Homojen (her noktasındaki kalınlığı ve yoğunluğu aynı) cisimlerin ağırlık merkezi ile geometrik (alan) merkezi aynı noktadır. Homojen cismin yoğunluğu "d" ile gösterilecek olursa, ağırlık merkezi (alan, geometrik merkez) aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

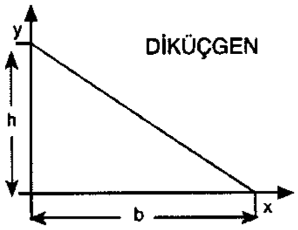
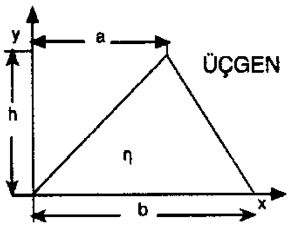
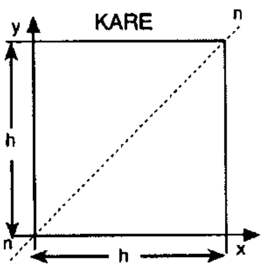
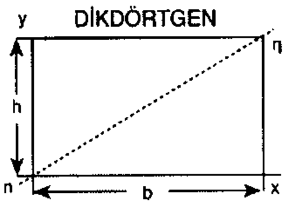
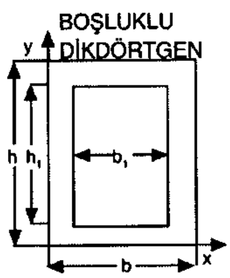
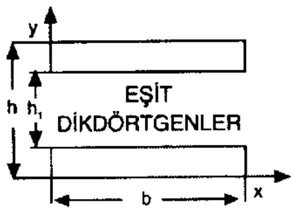
$$G = G_1 + G_2 + ... + G_N = d \cdot A_1 + d \cdot A_2 + ... + d \cdot A_N$$

$$G = d \cdot (A_1 + A_2 + ... + A_N) \quad \Rightarrow \quad G = d \cdot \sum_{i=1}^{N} A_i$$

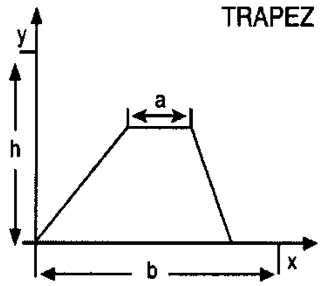
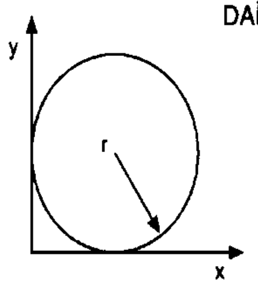
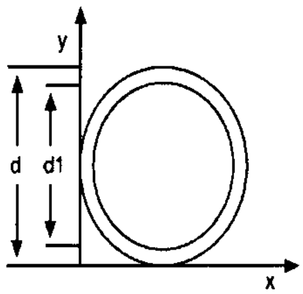
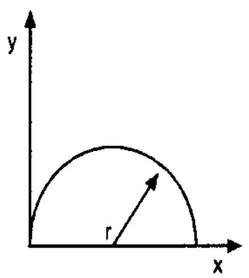
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i \cdot x_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (d \cdot A_i) \cdot x_i}{d \cdot \sum_{i=1}^{N} A_i} \quad \Rightarrow \quad x_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i \cdot y_i}{G} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (d \cdot A_i) \cdot y_i}{d \cdot \sum_{i=1}^{N} A_i} \quad \Rightarrow \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} A_i}$$

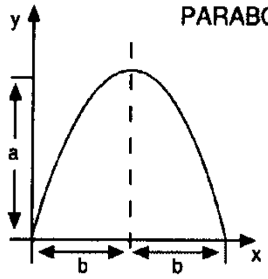
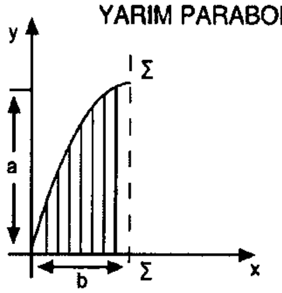
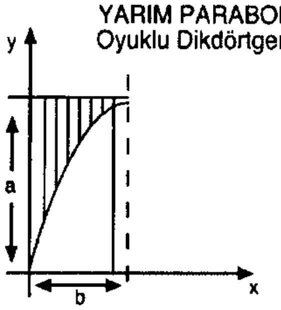
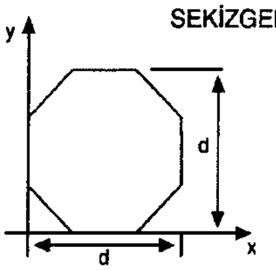
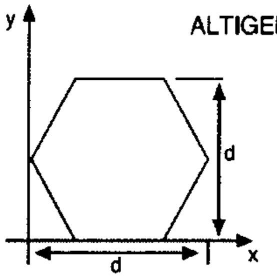
Sonuçta; homojen cisimlerin geometrik merkezi, her bir parçanın alan momentleri toplamının toplam alana bölünmesi ile elde edilmektedir.

Geometrik Şekil	Alan - Geometrik Merkez	Eylemsizlik Momenti	Dayanım Momenti
 DİKÜÇGEN	$A = \frac{bh}{2}$ $X_c = \frac{b}{3}$ $Y_c = \frac{h}{3}$	$I_{xc} = bh^3/36$ $I_{yc} = hb^3/36$ $I_x = bh^3/12$ $I_y = hb^3/12$	$W_{xc} = \frac{bh^2}{24}$ $W_{yc} = \frac{hb^2}{24}$
 ÜÇGEN	$A = \frac{bh}{2}$ $X_c = \frac{a+b}{3}$ $Y_c = \frac{h}{3}$	$I_{xc} = bh^3/36$ $I_{yc} = \frac{bh}{36}(b^2 - ab + a^2)$ $I_x = bh^3/12_+$ $I_y = \frac{bh}{12}(b^2 - ab + a^2)$	$W_{xc} = \frac{bh^2}{24}$
 KARE	$A = h^2$ $X_c = \frac{h}{2}$ $Y_c = \frac{h}{2}$	$I_{xc} = I_{xc} = h^4/12$ $I_x = I_y = h^4/3$ $I_\eta = h^4/12$	$W_{xc} = W_{yc} = \frac{h^3}{6}$
 DİKDÖRTGEN	$A = b.h$ $X_c = \frac{b}{2}$ $Y_c = \frac{h}{2}$	$I_{xc} = bh^3/12$ $I_{yc} = hb^3/12$ $I_x = bh^3/3$ $I_y = hb^3/3$ $I_y = hb^3/3$ $I_\eta = \frac{b^3\ h^3}{6(b^2 + h^3)}$	$W_{xc} = \frac{bh^2}{6}$ $W_{yc} = \frac{hb^2}{6}$
 BOŞLUKLU DİKDÖRTGEN	$A = bh - b_1 h_1$ $X_c = \frac{b}{2}$ $Y_3 = \frac{h}{2}$	$I_{xc} = \frac{(bh^3 - b_1 h_1^3)}{12}$ $I_{yc} = \frac{(hb^3 - h_1 b_1^3)}{12}$	$W_{xc} = \frac{1}{6}\left(\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{h}\right)$ $W_{yc} = \frac{1}{6}\left(\frac{hb^3 - h_1 b_1^3}{b}\right)$
 EŞİT DİKDÖRTGENLER	$A = b(h-h_1)$ $X_c = \frac{b}{2}$ $Y_c = \frac{h}{2}$	$I_{xc} = \frac{b(h^3 - h_1^3)}{12}$ $I_{yc} = \frac{b^3(h - h_1)}{12}$	$W_{xc} = \frac{b(h^3 - h_1^3)}{6h}$ $W_{yc} = \frac{b^2(h - h_1)}{6}$

Şekil 8.3.

Geometrik Şekil	Alan - Geometrik Merkez	Eylemsizlik Momenti	Dayanım Momenti
TRAPEZ 	$A = \frac{h}{2}(a+b)$ $y_c = \frac{h}{3}\frac{(2a+b)}{a+b}$	$I_{xc} = \frac{h^3(a^2+4ab+b^2)}{36(a+b)}$ $I_x = \frac{h^3(3a+b)}{12}$	$W_{xc} = \frac{I_{xc}}{h-y_c}$
DAİRE 	$A = \pi r^2$ $X_c = r$ $Y_c = r$	$I_{xc} = I_{xc} = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_x = I_y = \frac{5\pi a^4}{4}$	$W_{xc} = W_{yc} = \frac{\pi r^3}{4}$
BOŞLUKLU DAİRE 	$A = \frac{\pi(d^2-d^2_1)}{4}$ $X_c = \frac{d}{2}$ $Y_c = \frac{d}{2}$	$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi(d^4-d^4_1)}{64}$	$W_{xc} = W_{yc} = \frac{\pi(d^4-d^4_1)}{32d}$
YARIM DAİRE 	$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $X_c = r$ $Y_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xc} = \frac{r^4(9\pi^2-64)}{72\pi}$ $I_{yc} = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_x = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_y = \frac{5\pi r^4}{8}$	$W_{xc} = \frac{I_{xc}}{(r-y_c)}$ $W_{yc} = \frac{\pi r^3}{8}$

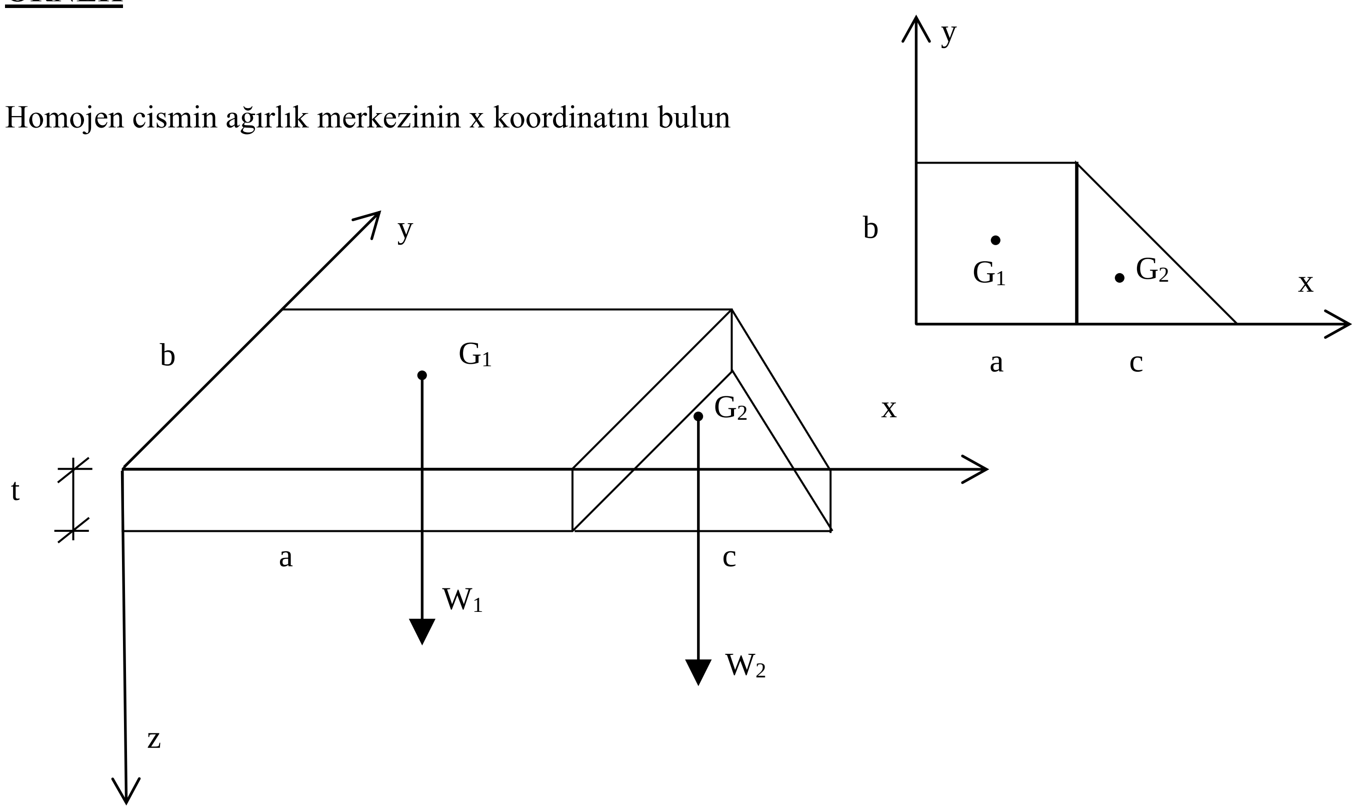
Şekil 8.4.

Geometrik Şekil	Alan - Geometrik Merkez	Eylemsizlik Momenti	Dayanım Momenti
PARABOL 	$A = \frac{4}{3} ab$ $X_c = b$ $y_c = \frac{2}{5} a$	$I_{xc} = \frac{16}{175} a^3 b$ $I_{xc} = \frac{4}{15} ab^3$ $I_x = \frac{32}{105} a^3 b$	$W_{xc} = \frac{16}{105} a^2 b$ $W_{yc} = \frac{4}{15} ab^2$
YARIM PARABOL 	$A = \frac{2}{3} ab$ $X_c = \frac{5}{8} b$ $y_c = \frac{2}{5} a$	$I_{xc} = \frac{8}{175} a^3 b$ $I_{yc} = \frac{19}{480} ab^3$ $I_x = \frac{16}{105} a^3 b$ $= \frac{2}{15} ab^3$	$W_{xc} = \frac{8}{105} a^2 b$ $W_{yc} = \frac{19}{300} ab^2$
YARIM PARABOL Oyuklu Dikdörtgen 	$A = \frac{1}{3} ab$ $X_c = \frac{1}{4} b$ $y_c = \frac{7}{10} a$	$I_{xc} = \frac{37}{2100} a^3 b$ $I_{yc} = \frac{1}{80} ab^3$	$W_{xc} = \frac{37}{1470} a^2 b$ $W_{yc} = \frac{1}{60} ab^2$
SEKİZGEN 	$A = 0.8284\ d^2$ $X_c = y_c = \frac{d}{2}$	$I_{xc} = I_{yc} = 0.055\ d^4$	$W_{xc} = W_{yc} = 0.110\ d^3$
ALTIGEN 	$A = 0.866\ d^2$ $X_c = y_c = \frac{d}{2}$	$I_{xc} = I_{yc} = 0.06\ d^4$	$W_{xc} = W_{yc} = 0.120\ d^3$

Şekil 8.5.

ÖRNEK

Homojen cismin ağırlık merkezinin x koordinatını bulun



Şekil 8.6.

Bütünün y eksenine göre momenti=parçaların y eksenine göre momentleri toplamı

t*g*ρ*(a*b+1/2*c*b) x= t*g*ρ*(a*b)*a/2+ t*g*ρ*(1/2*c*b)*(a+c/3)

homojen cisimlerde t*g*ρ yazmaya gerek yoktur (denklemin her iki tarafında da t*g*ρ olduğu için birbirini sadeleştirir).

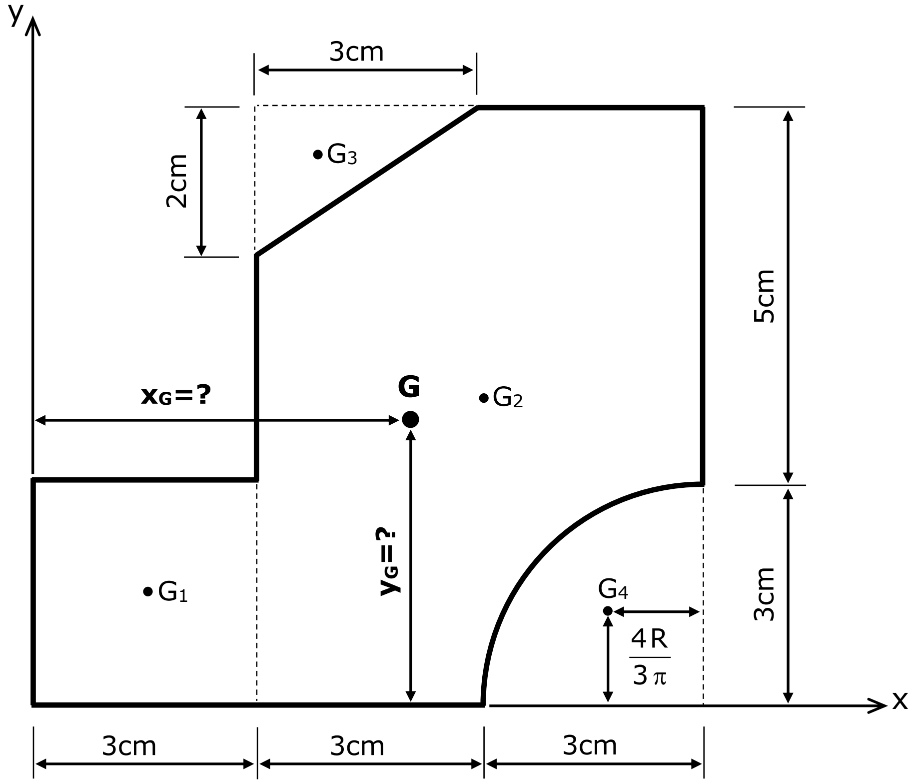
$\frac{2*a*b+c*b}{2}x = \frac{a^2b}{2} + \frac{b*c*(3a+c)}{2*3}$ $\qquad$ $x = \frac{3a^2b+b*c*(3a+c)}{3(2a*b+c*b)}$

ÖRNEK

Yandaki geometrik şeklin alan merkezini hesaplayınız.

x_G = ?

y_G = ?



Şekil 8.7.

$$x_G=\frac{(3\times3)\times1.5+(6\times8)\times6-\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)\times4-\left(\frac{1}{4}\times\pi\times3^2\right)\times\left(9-\frac{4\times3}{3\times\pi}\right)}{(3\times3)+(6\times8)-\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)-\left(\frac{1}{4}\times\pi\times3^2\right)}$$

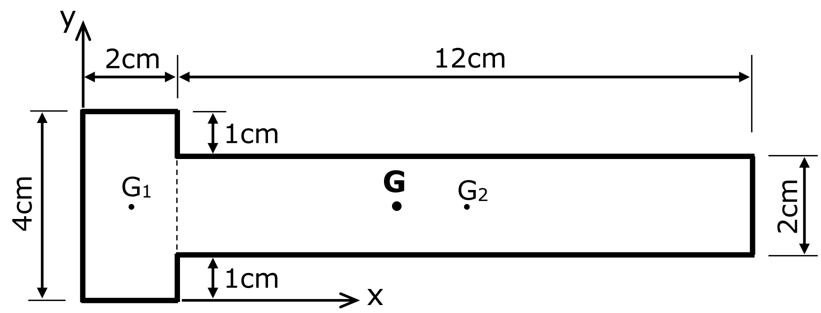
$$x_G=\frac{13.5+288-12-54.617}{9+48-3-7.069}=\frac{234.883}{46.931} \quad\Rightarrow\quad x_G = 5.005\text{ cm}$$

$$y_G=\frac{(3\times3)\times1.5+(6\times8)\times4-\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)\times7.333-\left(\frac{1}{4}\times\pi\times3^2\right)\times\left(\frac{4\times3}{3\times\pi}\right)}{(3\times3)+(6\times8)-\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)-\left(\frac{1}{4}\times\pi\times3^2\right)}$$

$$y_G=\frac{13.5+192-21.999-9}{9+48-3-7.069}=\frac{174.501}{46.931} \quad\Rightarrow\quad y_G = 3.718\text{ cm}$$

ÖRNEK

Yanda görülen homojen cismin geometrik merkezinin yerini (x_G , y_G) bulunuz.



Şekil 8.8.

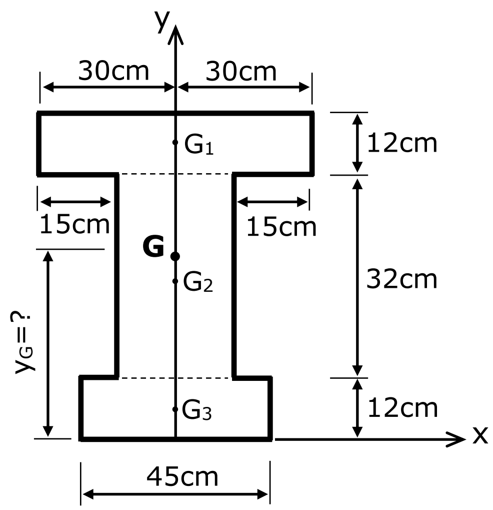
Tüm şekil, iki ayrı dikdörtgen parçadan oluşmuş gibi ayrılabilir.

$$x_G=\frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}=\frac{(2\times4)\times1+(12\times2)\times8}{(2\times4)+(12\times2)}=\frac{8+192}{8+24}=\frac{200}{32} \quad \Rightarrow \quad x_G = 6.25 \text{ cm}$$

$$y_G=\frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}=\frac{(2\times4)\times2+(12\times2)\times2}{(2\times4)+(12\times2)}=\frac{16+48}{8+24}=\frac{64}{32} \quad \Rightarrow \quad y_G = 2 \text{ cm}$$

ÖRNEK

Yandaki şekilde görülen homojen cismin geometrik merkezinin düşey koordinatını (y_G) hesaplayınız.



Şekil 8.9.

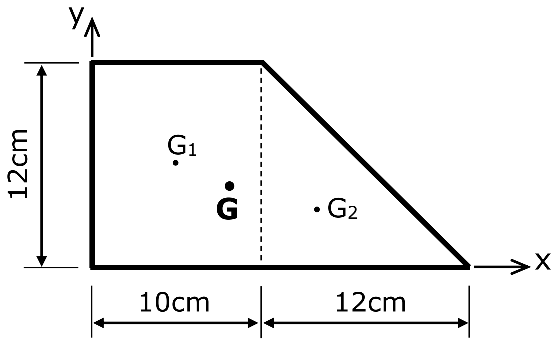
Tüm şekil, üç ayrı dikdörtgen parçadan oluşmuş gibi ayrılabilir.

$$y_G=\frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}=\frac{(60\times12)\times50+(30\times32)\times28+(45\times12)\times6}{(60\times12)+(30\times32)+(45\times12)}$$

$$y_G=\frac{36000+26880+3240}{720+960+540}=\frac{66120}{2220} \quad \Rightarrow \quad y_G = 29.784 \text{ cm}$$

ÖRNEK

Yandaki şekilde görülen homojen cismin geometrik merkezinin koordinatlarını (x_G , y_G) hesaplayınız.



Şekil 8.10.

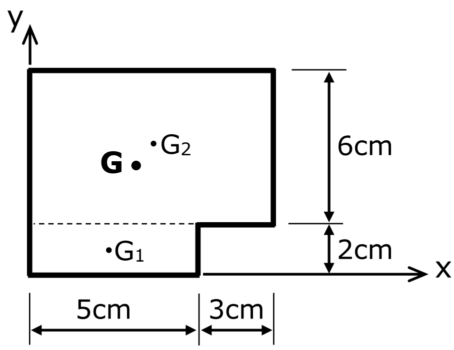
Tüm şekil, dikdörtgen ve üçgen parçalardan oluşmuş gibi ayrılabilir.

$$x_G = \frac{(10\times12)\times5+(\frac{1}{2}\times12\times12)\times14}{(10\times12)+(\frac{1}{2}\times12\times12)} = \frac{600+1008}{120+72} \quad \Rightarrow \quad x_G = 8.375 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{(10\times12)\times6+(\frac{1}{2}\times12\times12)\times4}{(10\times12)+(\frac{1}{2}\times12\times12)} = \frac{720+288}{120+72} \quad \Rightarrow \quad y_G = 5.25 \text{ cm}$$

ÖRNEK

Yandaki şekilde görülen homojen cismin geometrik merkezinin koordinatlarını (x_G , y_G) hesaplayınız.



Şekil 8.11.

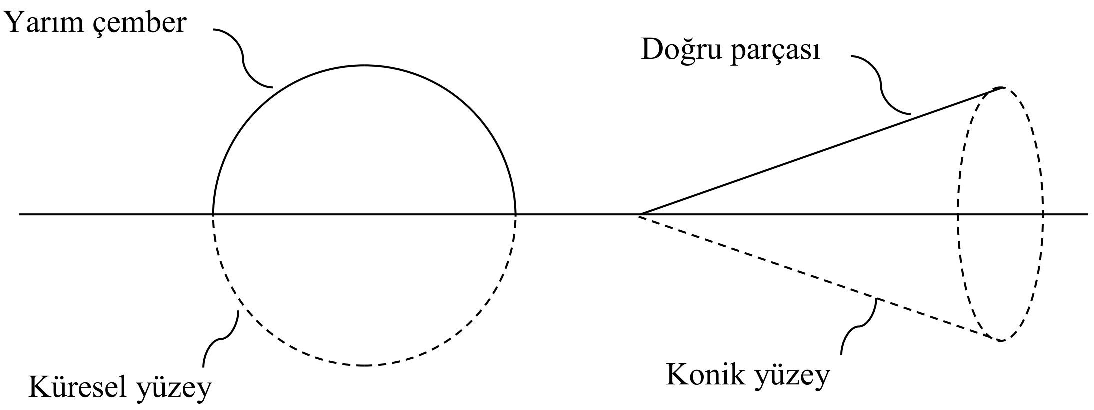
Tüm şekil, iki ayrı dikdörtgen parçadan oluşmuş gibi ayrılabilir.

$$x_G = \frac{(5\times2)\times2.5+(8\times6)\times4}{(5\times2)+(8\times6)} = \frac{25+192}{10+48} = \frac{217}{58} \quad \Rightarrow \quad x_G = 3.741 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{(5\times2)\times1+(8\times6)\times5}{(5\times2)+(8\times6)} = \frac{10+240}{10+48} = \frac{250}{58} \quad \Rightarrow \quad y_G = 4.310 \text{ cm}$$

8.2. Papus-Guldinus Teoremleri

Düzlemsel bir eğri sabit bir eksen etrafında döndürülerek oluşan yüzeye dönel yüzey denir.

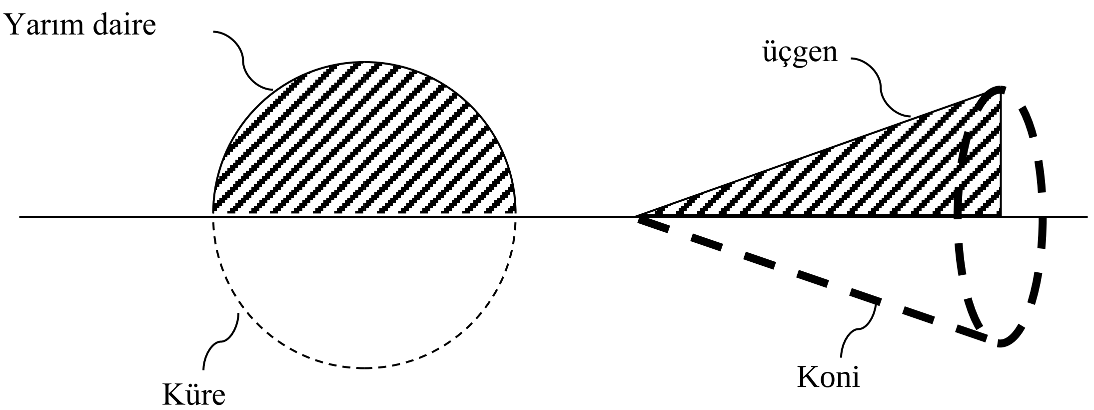


Şekil 8.12.

<u>Teorem 1 :</u> Bir dönel yüzeyin alanı kendisini oluşturan eğrinin boyu ile ağırlık merkezinin dönüş sırasında gittiği yolun çarpımına eşittir.

$A=2*\pi*y*L$

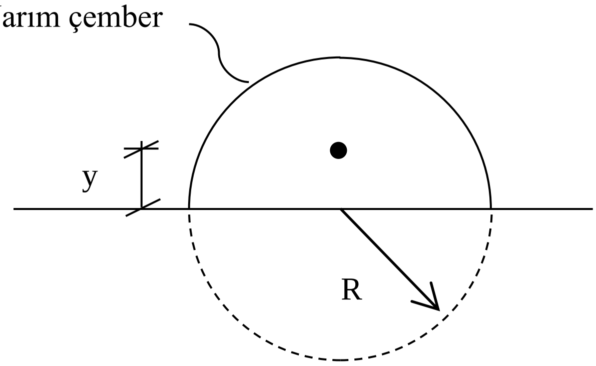
Düzlemsel bir alanın sabit bir eksen etrafında döndürülmesi ile oluşan hacim dönel hacimdir.



Şekil 8.13.

Teorem 2 : Bir dönel cismin hacmi kendisini oluşturan alan ile ağırlık merkezinin dönüş sırasında gittiği yolun çarpımına eşittir.

$V=2*\pi*y*A$

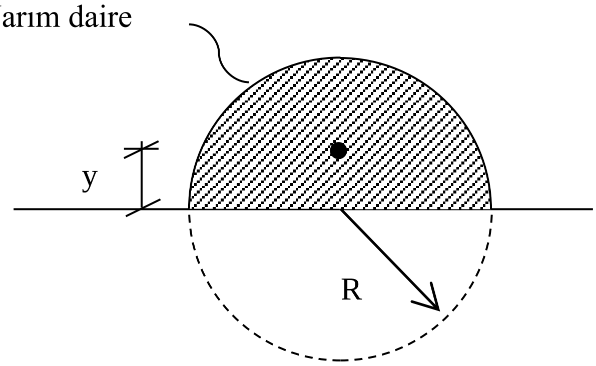


Küre yüzey alanı=yarım çember boyu*yol

$4*\pi*R^2=(2*\pi*R^2/2)*(2*\pi*y)$

$y=(2*R)/\pi$

Şekil 8.14.

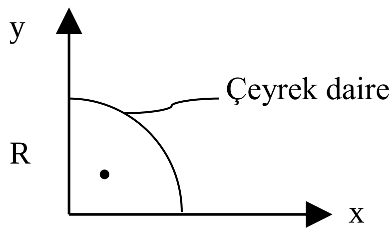


Küre hacmi=yarım daire*yol

$4/3*\pi*R^3=(\pi*R^2/2)*(2*\pi*y)$

$y=(4*R)/(3*\pi)$

Şekil 8.15.



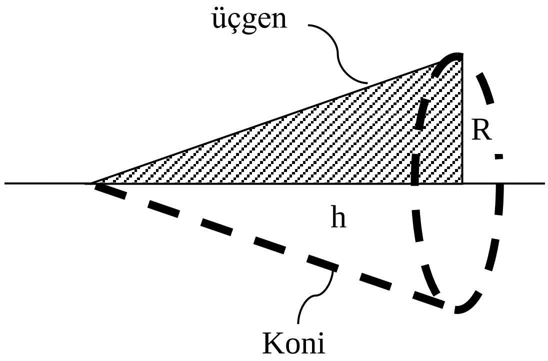
Yarım küre hacmi=çeyrek daire*yol

$½*(4/3*\pi*R^3)=(\pi*R^2/4)*(2*\pi*y)$

$y=x=(4*R)/(3*\pi)$

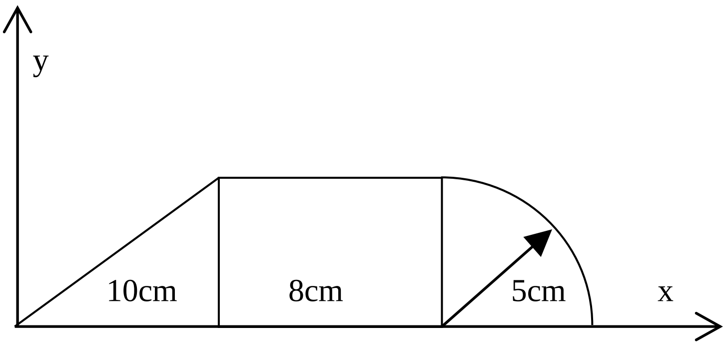
Şekil 8.16.

$V=(1/2*h*R)*(2*\pi*R/3)=1/3*\pi*R^2*h$



Şekil 8.17.

ÖRNEK



Şekil 8.18.

Pappus-Guldinus ile y=?

$V_1+V_2+V_3=V=(2*\pi*y)*A \quad y=V/(2*\pi*A)$

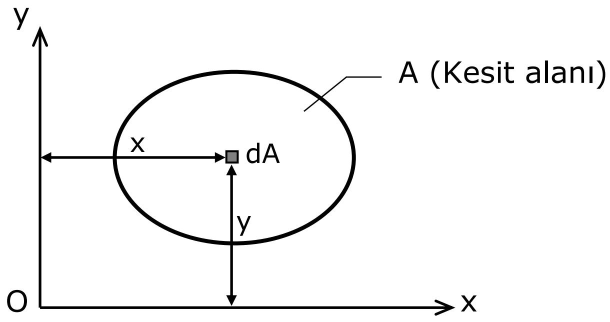
$V= V_1+V_2+V_3= \pi/3*5^2*10+ \pi*5^2*8+1/2*(4/3*\pi)*5^3=1152\ cm^3$

$A=1/2*5*10+5*8+1/4* \pi*5^2 = 84,6\ cm^2$

$y=1152/(2* \pi*84,6)=2,17\ cm$

8.3. Atalet (Eylemsizlik) Momentleri

Atalet (eylemsizlik) momenti, tıpkı ağırlık merkezi gibi kesitin şekline bağlı bir büyüklüktür. Kesit alanının birinci ve ikinci mertebeden alan momentleri mühendislik hesaplarının çoğunda kullanılmaktadır.



Şekil 8.19.

Şekilde görülen, A alanına sahip bir kesitin birinci mertebeden alan momentine "**Statik Moment**" denir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$S_x = \int_A y \cdot dA$ Kesitin "x" ekseni etrafındaki statik momenti

$S_y = \int_A x \cdot dA$ Kesitin "y" ekseni etrafındaki statik momenti

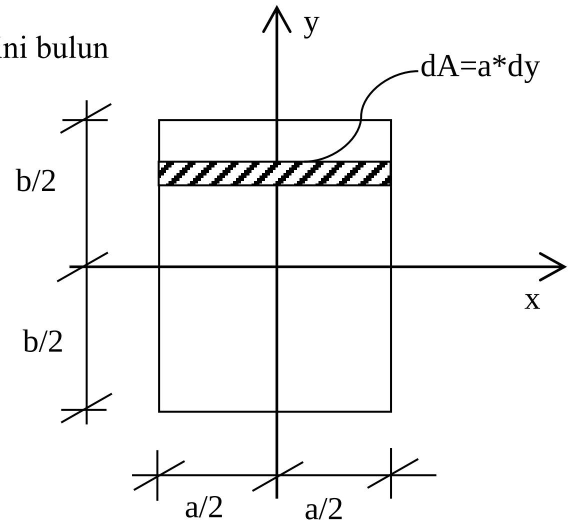
Eğer, koordinat eksen takımının merkezi (O noktası) kesitin ağırlık merkezinde ise statik momentler sıfır olur ($S_x=0$, $S_y=0$).

Statik momentler yardımıyla kesitin ağırlık (geometrik) merkezinin yeri de aşağıdaki gibi bulunabilmektedir.

$x_G = \dfrac{S_y}{A}$ $y_G = \dfrac{S_x}{A}$

ÖRNEK

Dörtgen bir alanın birinci alan momentini bulun, alan merkezini bulun

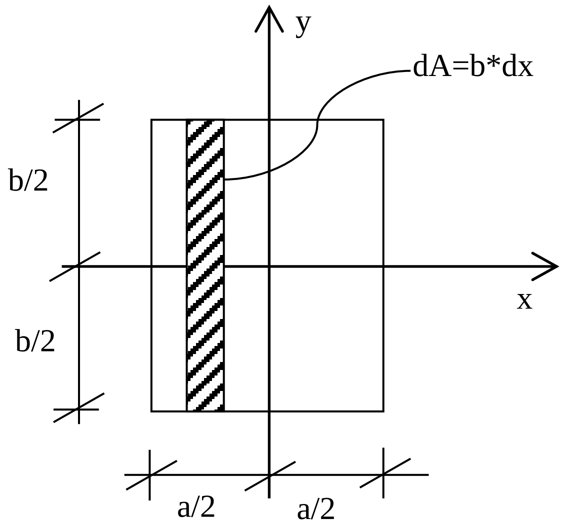


Şekil 8.20.

$S_x=\int_{-b/2}^{b/2} y * dA = \int_{-b/2}^{b/2} y * a * dy = \frac{a*y^2}{2}\Big|_{-b/2}^{b/2}$

$S_x=a/2*(b^2/4-b^2/4)=0$

$y_G=S_x/A=0$



Şekil 8.21.

$S_y=\int_{-a/2}^{a/2} x * dA = \int_{-a/2}^{a/2} x * b * dx = \frac{b*x^2}{2}\Big|_{-a/2}^{a/2}$

$S_y=b/2*(a^2/4-a^2/4)=0$

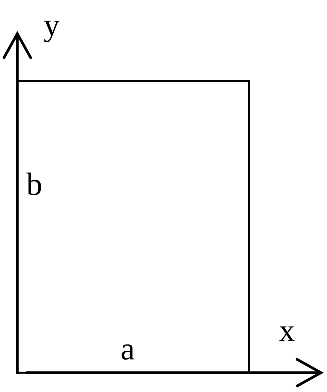
$x_G=S_y/A=0$

$S_x=\int_0^b y * dA = \int_0^b y * a * dy = \frac{a*y^2}{2}\Big|^b = \frac{a*b^2}{2}$

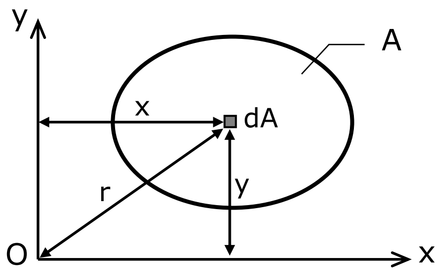
$y_G=(a/2*b^2)/(a*b)=b/2$

$S_y=\int_0^a y * dA = \int_0^a x * b * dx = \frac{b*x^2}{2}\Big|^a = \frac{b*a^2}{2}$

$x_G=(b/2*a^2)/(a*b)=a/2$



Şekil 8.22.



Şekil 8.23.

dA → küçük bir alan parçası

x → dA'nın y eksenine uzaklığı

y → dA'nın x eksenine uzaklığı

r → dA'nın O noktasına uzaklığı

Şekilde görülen, A alanının ikinci mertebeden alan momentine de "**Atalet (Eylemsizlik) Momenti**" denir ve aşağıdaki gibi hesaplanır.

$I_x = \int_A y^2 \cdot dA$ → Kesitin "x" ekseni etrafındaki atalet momenti

$I_y = \int_A x^2 \cdot dA$ → Kesitin "y" ekseni etrafındaki atalet momenti

$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$ → Kesitin çarpım atalet momenti

Yukarıdaki bağıntılardan $\mathbf{I_x>0}$ ve $\mathbf{I_y>0}$ olduğu görülmektedir. Diğer ikinci mertebeden alan momenti ise "**Kutupsal Atalet Momenti**" olarak adlandırılmakta ve aşağıdaki gibi tarif edilmektedir.

$I_0 = \int_A r^2 \cdot dA$ → Kesitin kutupsal atalet momenti

$r^2 = x^2 + y^2$ ifadesi yukarıdaki bağıntıda yerine yazılırsa;

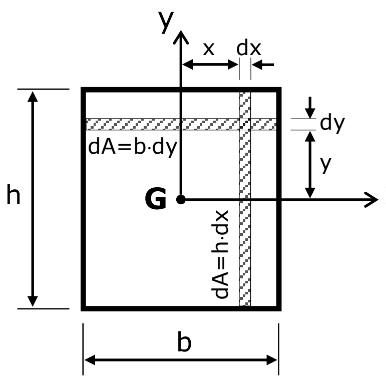
$$I_0 = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA$$

$I_0 = I_x + I_y$ ve $\mathbf{I_0 > 0}$ olduğu görülmektedir.

Atalet momenti ile kesit alanı arasındaki oran, burkulma türü problemlerin çözümünde karşılaşılan bir büyüklüktür. Bu nedenle, hesapları basitleştirebilmek için atalet momentinin kesit alanına oranının karekökü "**Atalet Yarıçapı**" olarak tarif edilmektedir. Yani;

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad i_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}} \Rightarrow i_0 = \sqrt{(i_x)^2 + (i_y)^2}$$

<u>**ÖRNEK**</u> Dikdörtgen kesitin atalet momentleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.



Şekil 8.24.

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot (b \cdot dy) = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dy$$

$$I_x = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow I_x = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \cdot (h \cdot dx) = h \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \cdot dx = h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} \Rightarrow I_y = \frac{h\,b^3}{12}$$

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} x \cdot y \cdot dx \cdot dy \Rightarrow I_{xy} = 0$$

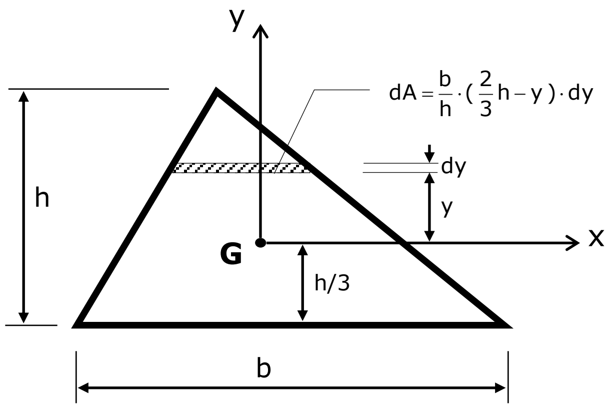
$$I_0 = I_x + I_y \Rightarrow I_0 = \frac{b\,h}{12}(b^2 + h^2)$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3 / 12}{b \cdot h}} \Rightarrow i_x = \sqrt{\frac{h^2}{12}} \qquad i_0 = \sqrt{(i_x)^2 + (i_y)^2}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{h \cdot b^3 / 12}{b \cdot h}} \Rightarrow i_y = \sqrt{\frac{b^2}{12}} \qquad i_0 = \sqrt{\frac{b^2 + h^2}{12}}$$

ÖRNEK

Üçgen kesitin atalet momenti aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.



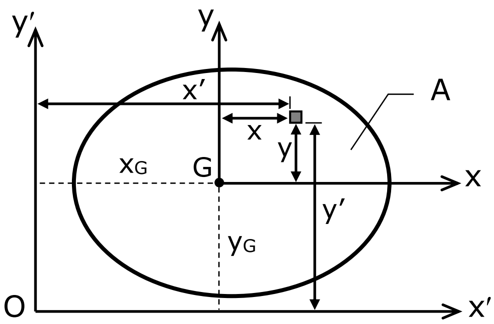
Şekil 8.25.

$$I_x=\int_A y^2\cdot dA=\int_{-h/3}^{2h/3} y^2\cdot\frac{b}{h}\cdot(\frac{2}{3}h-y)\cdot dy=\frac{b}{h}\cdot\left[\frac{2hy^3}{9}-\frac{y^4}{4}\right]_{-h/3}^{2h/3}$$

$$I_x=\frac{b}{h}\cdot\left[\frac{4h^4}{243}-\left(-\frac{11h^4}{972}\right)\right]\quad\Rightarrow\quad I_x=\frac{bh^3}{36}$$

8.4. Eksenlerin Paralel Olarak Kaydırılması

Atalet (eylemsizlik) momentinin değeri tamamen seçilen eksen takımına bağlı olduğundan, eksen takımının konumlanmasındaki her türlü değişiklik doğrudan doğruya atalet momentlerinin değerlerini değiştirecektir. Mühendislik problemlerinde genel olarak, eksenlerin paralel olarak ötelenmesi veya başlangıç noktası etrafında belirli bir açı (θ) kadar döndürülmesi şeklindeki koordinat dönüşümleri ile karşılaşılmaktadır. Burada sadece eksenlerin paralel olarak kaydırılması şeklindeki koordinat dönüşümleri göz önünde tutularak, atalet momentlerinin yeni eksen takımındaki değerlerinin nasıl bulunacağı ele alınacaktır.



Şekil 8.26.

Şekilden

$\Downarrow$

$x' = x + x_G$

$y' = y + y_G$

$$I_{x'} = \int_A (y')^2 \cdot dA = \int_A (y + y_G)^2 \cdot dA = \int_A (y^2 + 2 \cdot y_G \cdot y + y_G^2) \cdot dA$$

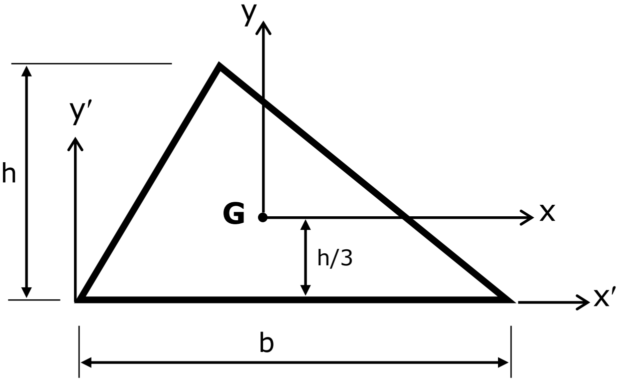
$$I_{x'} = \underbrace{\int_A y^2 \cdot dA}_{I_x} + 2 \cdot y_G \cdot \underbrace{\int_A y \cdot dA}_{S_x=0} + y_G^2 \cdot \underbrace{\int_A dA}_{A} \Rightarrow I_{x'} = I_x + y_G^2 \cdot A$$

Diğer atalet momentleri ($I_{y'}$, $I_{x'y'}$) için de benzer işlemler yapılırsa:

$$I_{y'} = I_y + x_G^2 \cdot A \qquad\qquad I_{x'y'} = I_{xy} + x_G \cdot y_G \cdot A$$

Steiner denklemleri olarak da bilinen bu bağıntılarda, paralel eksen takımlarından bir tanesi mutlaka ağırlık merkezinden geçmelidir.

ÖRNEK Üçgen şekilli bir kesitin tabanından geçen eksene göre atalet momenti ($I_{x'}$) ifadesi aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.



Şekil 8.27.

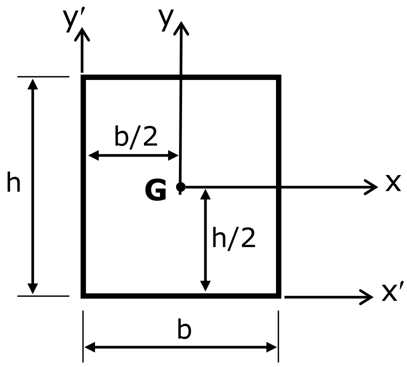
$$I_x = \frac{b\,h^3}{36} \text{ idi}$$

$$I_{x'} = \frac{b\,h^3}{36} + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{b \cdot h}{2}\right)$$

$$I_{x'} = \frac{b\,h^3}{12}$$

ÖRNEK

Yandaki şekilde görülen dikdörtgen kesit için x′–y′ eksen takımına göre atalet momentleri ($I_{x'}$, $I_{y'}$) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.



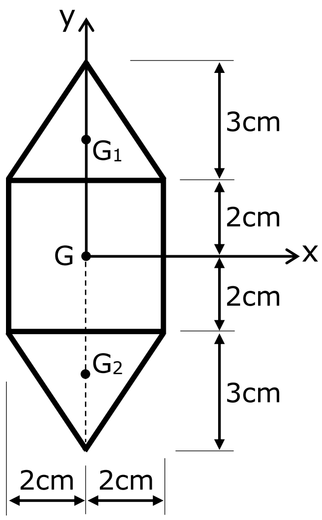
Şekil 8.28.

$I_x = \dfrac{b\,h^3}{12}$ ve $I_y = \dfrac{h\,b^3}{12}$ atalet momentleri daha önceden bulunmuştu.

$$I_{x'} = I_x + y_G^2 \cdot A \;\rightarrow\; I_{x'} = \frac{b\,h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 (b\cdot h) \;\Rightarrow\; I_{x'} = \frac{b\,h^3}{3}$$

$$I_{y'} = I_y + x_G^2 \cdot A \;\rightarrow\; I_{y'} = \frac{hb^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 (b\cdot h) \;\Rightarrow\; I_{x'} = \frac{hb^3}{3}$$

ÖRNEK Aşağıda görülen kesit için I_x ve I_y atalet momentlerini hesaplayınız.



Şekil 8.29.

Dikdörtgen kesit için

$I_x = \dfrac{bh^3}{12}$ $I_y = \dfrac{hb^3}{12}$

Üçgen kesit için

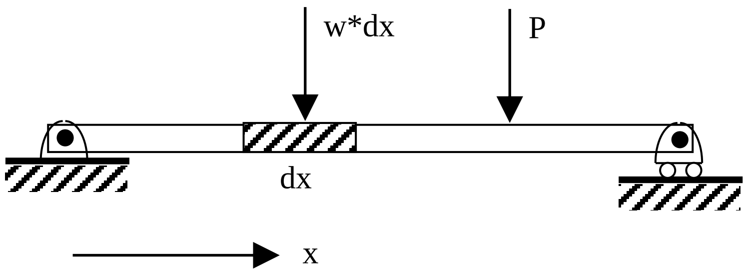
$I_x = \dfrac{bh^3}{36}$ $I_{x'} = \dfrac{bh^3}{12}$

$$I_x = \frac{(4)\cdot(4)^3}{12} + 2\cdot\left[\frac{(4)\cdot(3)^3}{36} + (3)^2\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\right] \;\Rightarrow\; I_x = 135.333 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{(4)\cdot(4)^3}{12} + 4\cdot\left[\frac{(3)\cdot(2)^3}{12}\right] \;\Rightarrow\; I_y = 29.333 \text{ cm}^4$$

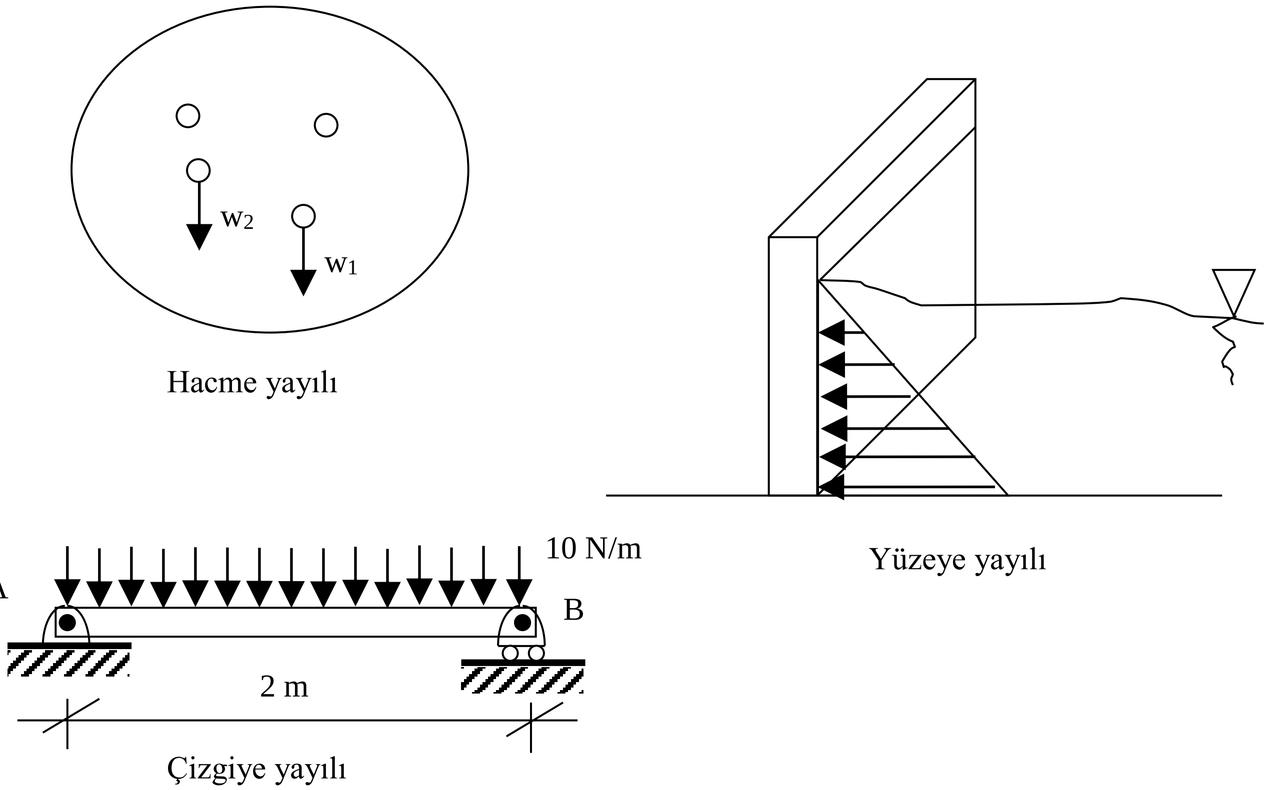
8.5. Yayılı Kuvvet Sistemleri

Bütün kuvvetler nokta kuvvet olarak düşünülemez. Kar, rüzgar su ve toprak basınçları her zaman yayılı alınan yüklerdendir. Ağırlık bazen yayılı bazen nokta kuvvet olur.



Şekil 8.30.

Yayılı kuvvetler bazen hacme yayılı(hacimsel), bazen yüzeye yayılı(yüzeysel), bazende çizgiye yayılı(çizgisel) olurlar.

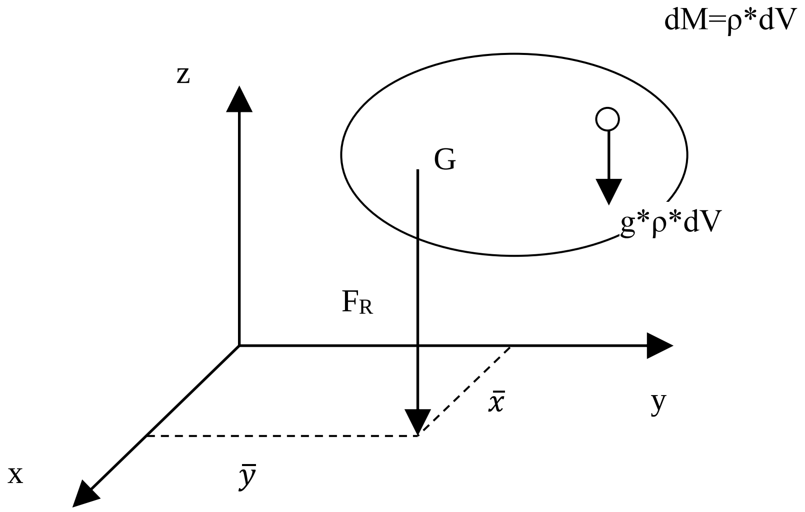


Şekil 8.31.

Noktasal kuvvetler hakkındaki sonuçlar yayılı kuvvet sistemleri içinde kullanılabilir. Çünkü yayılı kuvvetlerde çok küçük noktasal kuvvetlerin bir araya gelmesi ile oluşmaktadır.

8.5.1. Yayılı Kuvvetlerin Bileşkelerinin Bulunması

Durum 1: Hacme yayılı paralel kuvvetler (Ağırlık merkezi)



Şekil 8.32.

$-g*(\rho*dV)\,\vec{k}$

ρ : yoğunluk

$\overrightarrow{F_R} = -(\int_V \; g*\rho*dV)\vec{k}$ = $-g\,\vec{k}\,(\int_V \; \rho*dV)$=$-g*M\,\vec{k}$ M : Cismin kütlesi

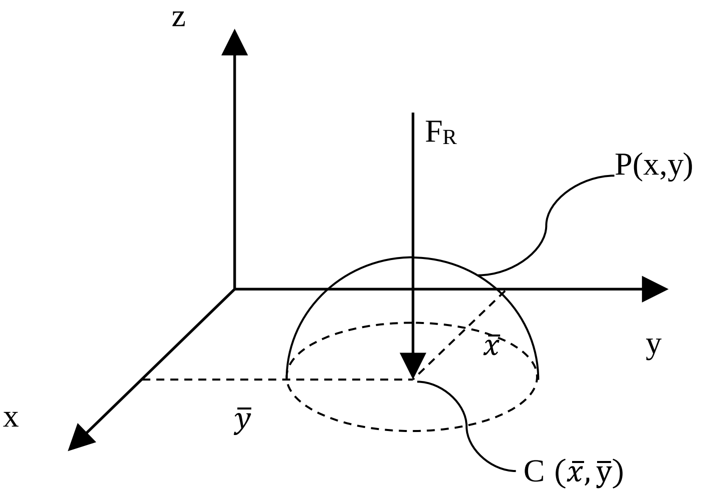
Ağırlık merkezinin yerini bulmak için

$$(\bar{x}\,\vec{\imath} + \bar{y}\,\vec{\jmath}) \times (F_R\vec{k}) = \int (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}) \times (-g*\rho*dV \;\; \vec{k})$$

$$\bar{x} = \frac{\int_V \; x*\rho*dV}{M} \qquad \bar{y} = \frac{\int_V \; y*\rho*dV}{M} \qquad \bar{z} = \frac{\int_V \; z*\rho*dV}{M}$$

Rijit cisim mekaniğinde ağırlık tümüyle ağırlık merkezinde alınabilir.

Durum 2: Yüzey üzerine etkiyen paralel kuvvet sistemi (Basınç merkezi)



Şekil 8.33.

$d\vec{A} = \vec{n}\, dA$

$d\vec{F} = -p\, d\vec{A}$

$\vec{F_R} = -\int_A p * d\vec{A} = -\left(\int_A p * dA\right)\vec{k}$

Bileşkenin koordinatları

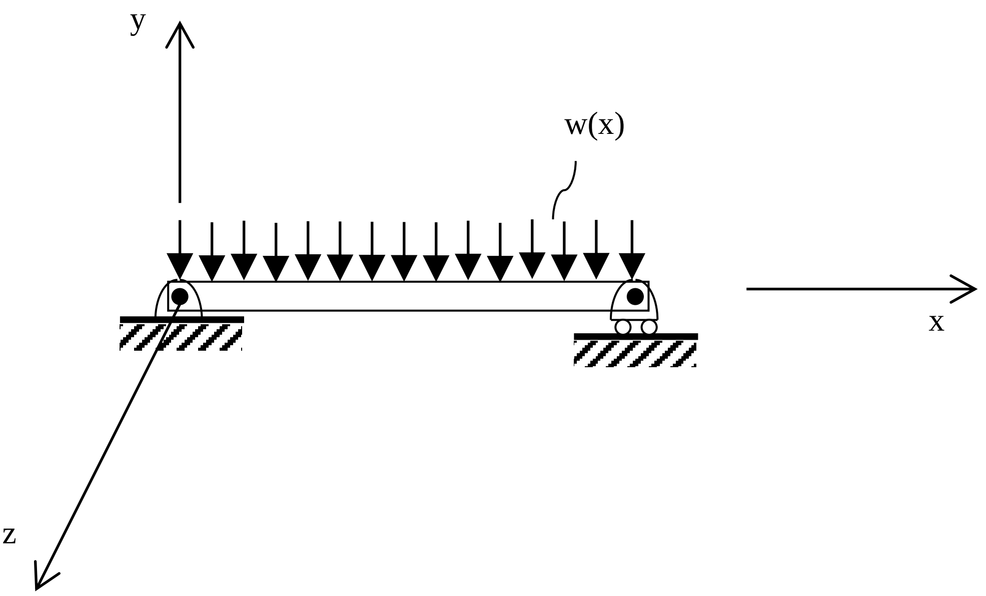
$(\bar{x}\,\vec{i} + \bar{y}\,\vec{j}) \times (F_R\vec{k}) = \int (x\,\vec{i} + y\,\vec{j}) \times (-p * dA \;\; \vec{k})$

$\bar{x} = \frac{\int_A x*p*dA}{\int_A p*dA}$ $\qquad$ $\bar{y} = \frac{\int_A y*p*dA}{\int_A p*dA}$

C $(\bar{x}, \bar{y})$: basınç merkezi

Durum 3: Düzlemsel paralel kuvvetler

Bu durum bir kirişte görülür. Yük orta düzlemdedir.



Şekil 8.34

$$\overrightarrow{F_R} = -\int w * dx\,\vec{j}$$

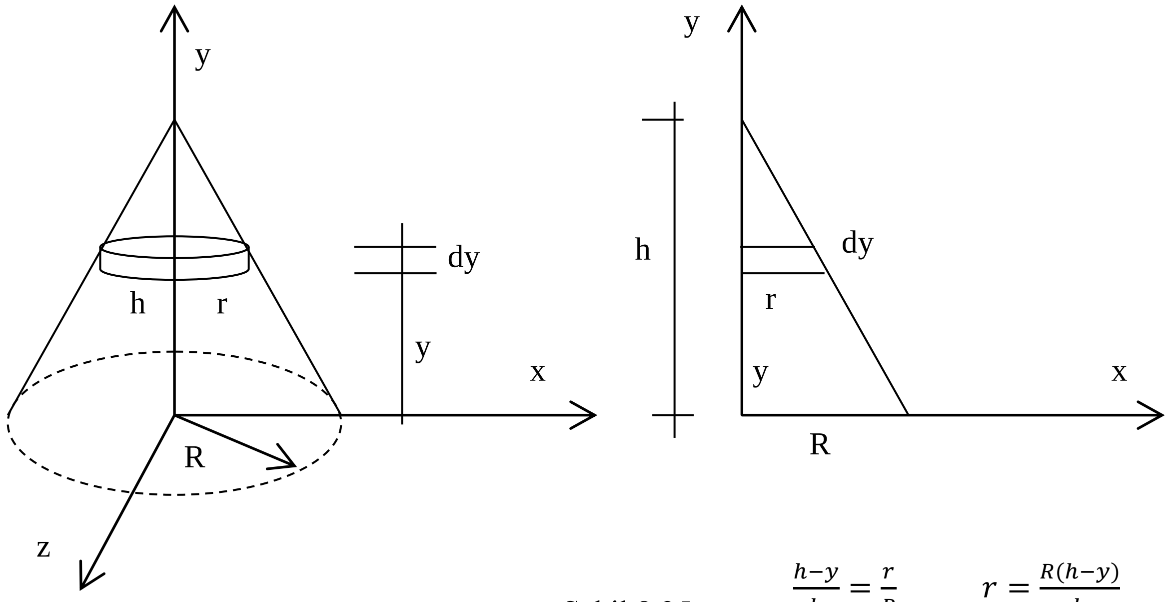
Bileşkenin koordinatları

$$(\bar{x}\,\vec{i}) \times (F_R\vec{j}) = \int (x\,\vec{i}) \times (-w * dx\;\;\vec{j})$$

$$\bar{x} = \frac{\int x * w * dx}{\int w * dx}$$

Homojen bir cismin ağırlık merkezi yüzeysel kuvvetlerin basınç merkezi ve çizgisel kuvvetlerin bileşkesi hep simetri ekseni üzerindedir.

ÖRNEK



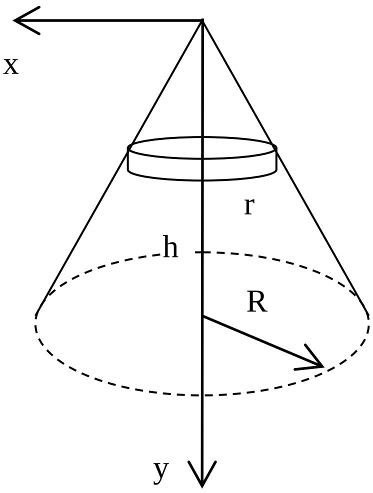
Şekil 8.35.

$$\frac{h-y}{h} = \frac{r}{R} \qquad r = \frac{R(h-y)}{h}$$

Bir dik koninin ağırlık merkezinin yüksekliğini bulunuz.

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y * (\frac{R(h-y)}{h})^2 * \pi * dy * \rho * g}{\int_0^h (\frac{R(h-y)}{h})^2 * \pi * dy * \rho * g} = \frac{h}{4}$$

Koordinat sistemi değişirse çözüm daha kolay olur.

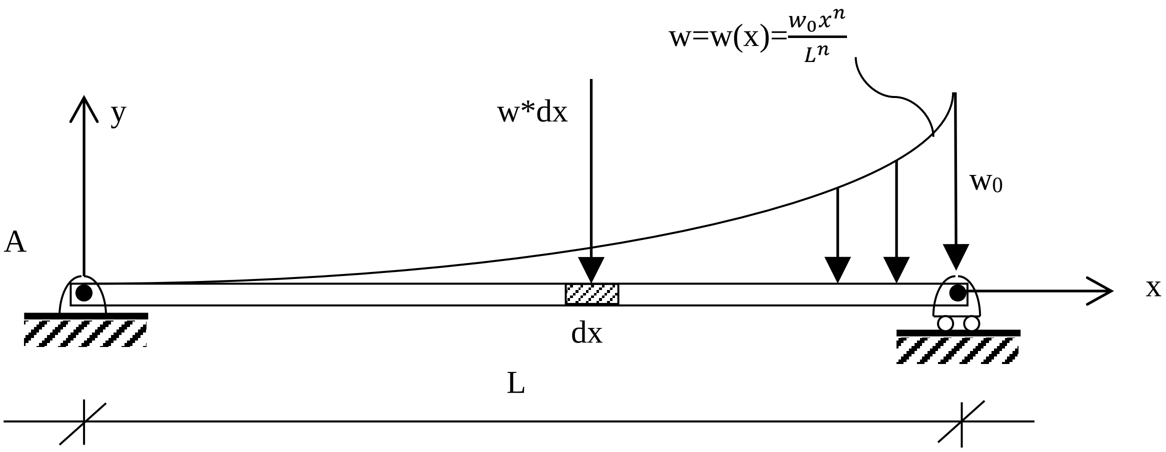


$$\frac{y}{h} = \frac{r}{R} \qquad r = \frac{R*y}{h}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y*(\frac{R*y}{h})^2*\pi*dy*\rho*g}{\int_0^h (\frac{R*y}{h})^2*\pi*dy*\rho*g} = \frac{3h}{4}$$

Şekil 8.36.

ÖRNEK



Şekil 8.37.

$$F_R = \int_0^L \frac{w_0}{L^n} x^n dx = \frac{w_0}{(n+1)L^n} L^{n+1} = \frac{w_0}{(n+1)} L$$

$$M_R = \int_0^L x \frac{w_0}{L^n} x^n dx = \int_0^L \frac{w_0}{L^n} x^{n+1} dx = \frac{w_0}{(n+2)} L^2$$

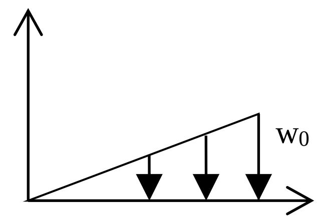
$$\bar{x} = \frac{M_R}{F_R} = \frac{n+1}{n+2} L$$

Özel durum n=1

üçgen yayılı yük

Toplam yük=1/2*w_0*L

Konumu=2/3*L



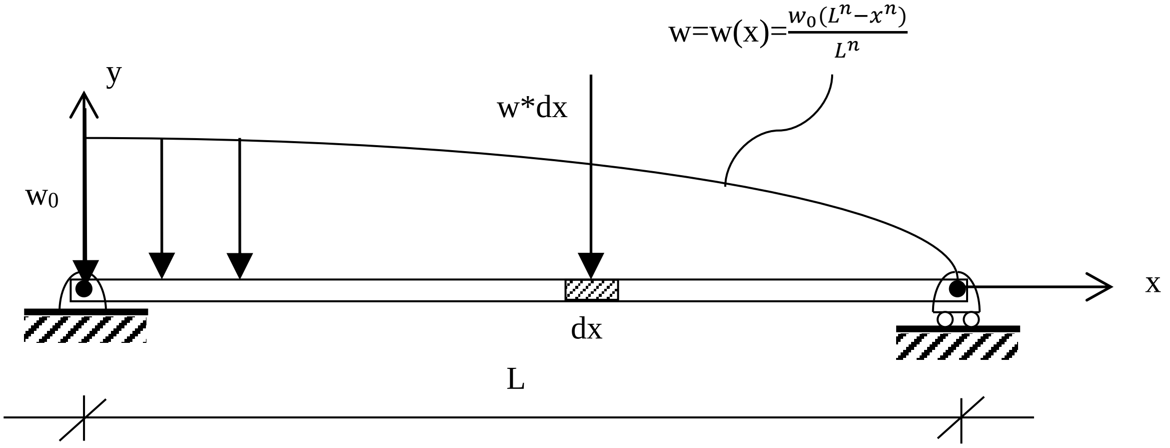
Şekil 8.38.

n=1 ise

F_R=(w_0*L)/(n+1)=w_0/2*L

$\bar{x}$=(n+1)/(n+2)*L=2/3*L

ÖRNEK



Şekil 8.39.

$$F_R = \int_0^L \frac{w_0}{L^n}(L^n - x^n)dx = \frac{n * w_0}{(n+1)} L$$

$$M_R = \int_0^L x\frac{w_0}{L^n}(L^n - x^n)dx = \frac{n * w_0}{2(n+2)} L^2$$

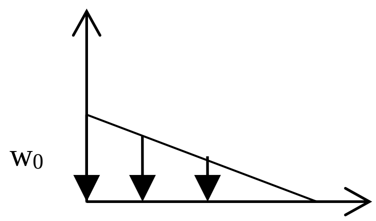
$$\bar{x} = \frac{M_R}{F_R} = \frac{n+1}{2(n+2)} L$$

Özel durum n=1

üçgen yayılı yük

Toplam yük=1/2*w_0*L

Konumu=L/3



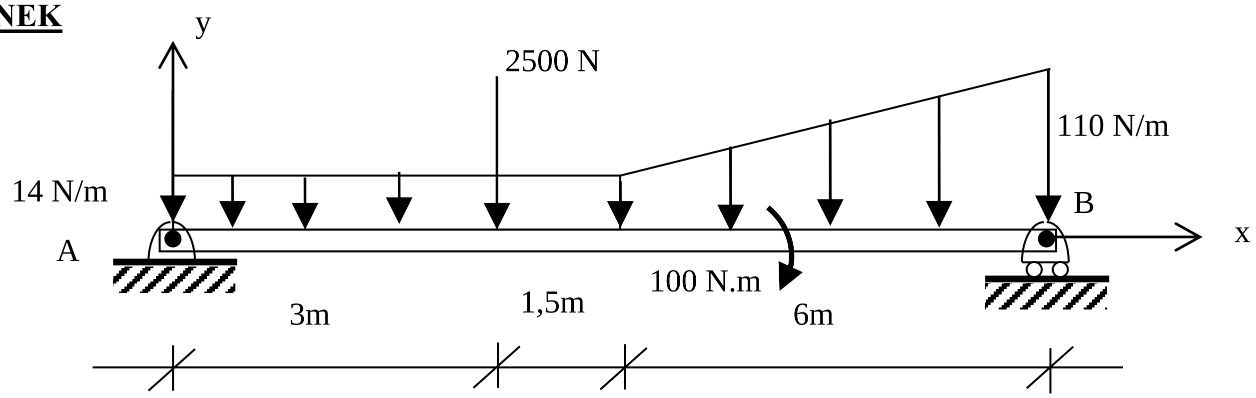
Şekil 8.40.

n=1 ise

F_R=(w_0*L*n)/(n+1)=(w_0*L)/2

$\bar{x}$=(n+1)*L/(2n+4)=L/3

ÖRNEK



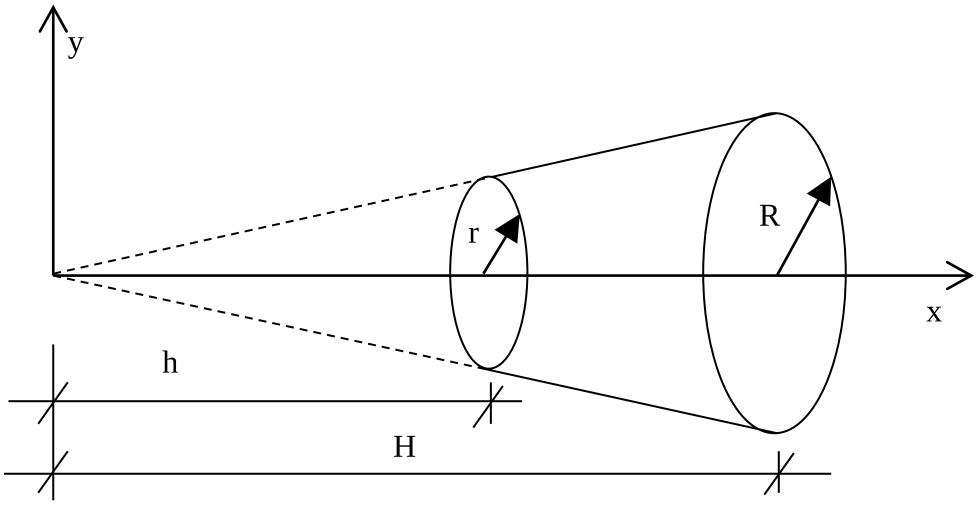
Şekil 8.41.

En basit bileşkeyi bulun

F_R=2500+14*(3+1,5+6)+6*96/2=2935 N

M_R=100+2500*3+147*10,5/2+288*(4,5+2*6/3)=10820 N.m $\quad$ x=M_R/F_R=10820/2935=3,69 m

ÖRNEK

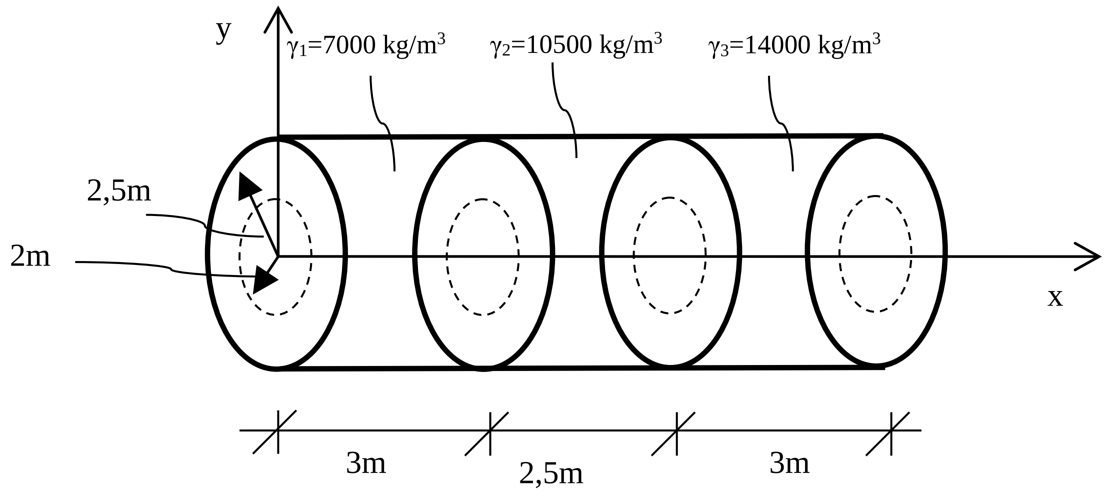


Şekil 8.42.

Kesik koninin ağırlık merkezinin x koordinatını bulunuz

$$\bar{x} = \frac{(\frac{1}{3} * \pi * R^2 * H) * \frac{3H}{4} + (-\frac{1}{3} * \pi * r^2 * h) * \frac{3h}{4}}{(\frac{1}{3} * \pi * R^2 * H) + (-\frac{1}{3} * \pi * r^2 * h)}$$

ÖRNEK



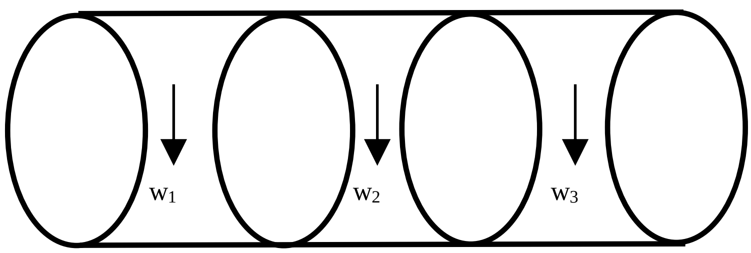
Şekil 8.43.

Şekildeki içi boş silindir üç kısımdan oluşmaktadır. Her bölgenin ayrı sabit bir özgül ağırlığı vardır. Silindirin ağırlık merkezini bulunuz.

$$\bar{x} = \frac{\int x * \gamma * dV}{\int \gamma * dV} = \frac{A \int x * \gamma * dx}{A \int \gamma * dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^3 7000x * dx + \int_3^{5,5} 10500x * dx + \int_{5,5}^{8,5} 14000x * dx}{\int_0^3 7000dx + \int_3^{5,5} 10500dx + \int_{5,5}^{8,5} 14000dx} = 4{,}90\ m$$

2.yol



Şekil 8.44.

w_1=7000*π*(2,5^2-2^2)*3 x_1=1,5

w_2=10500*π*(2,5^2-2^2)*2,5 x_2=4,25

w_3=14000*π*(2,5^2-2^2)*3 x_3=75

x=$\frac{w_1 * x_1 + w_2 * x_2 + w_3 * x_3}{w_1 + w_2 + w_3}$=4,9