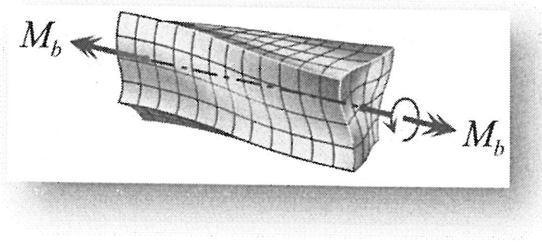
BÖLÜM 9

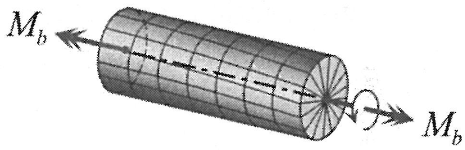
BURULMA

9.1 Burulmada Yapılan Varsayımlar

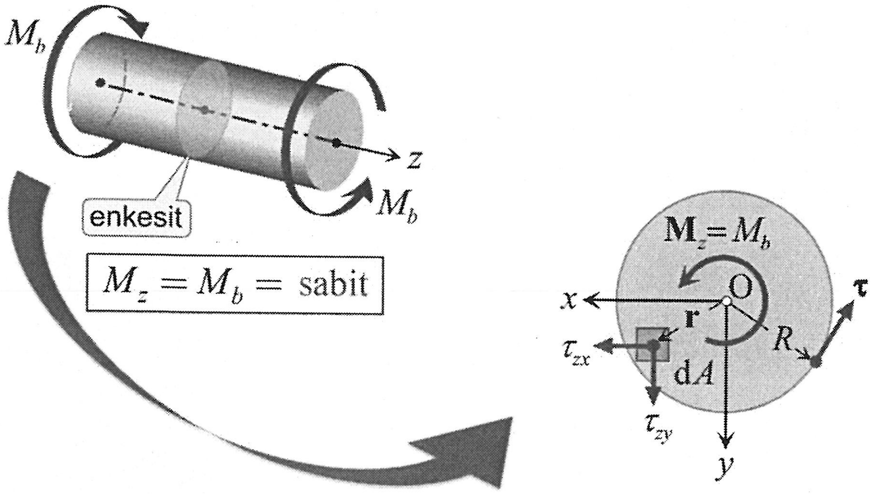
Kesiti dairesel olmayan çubukların burulması sırasında,

dik kesitlerde çarpılma gözlenir. Dairesel kesitli çubuklarda ise çarpılma olmaz.



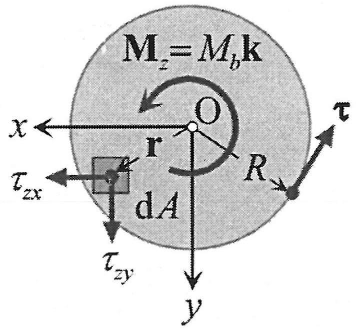


Daire Kesitli Çubuklar:



$$M_b = \int_A \left(x\tau_{zy} - y\tau_{zx} \right) \mathrm{d}A$$

sınırlarda kayma gerilmesi τ *kesit çevresine teğettir.*



$$M_b = \int_A \left(x\tau_{zy} - y\tau_{zx} \right) \mathrm{d}A$$

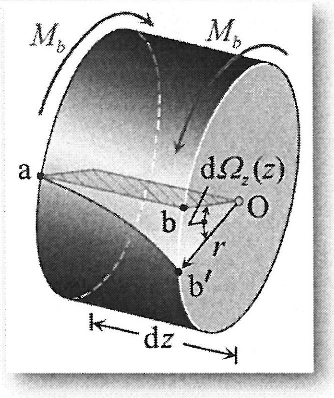
sınırlarda kayma gerilmesi τ kesit çevresine teğettir.

Yalnız bu sınır koşulu ile denge denklemi kayma gerilmelerinin kesit üzerindeki dağılımını tanımlamakta yetersiz olduğundan, çubuğun şekil değiştirmesiyle ilgili bir varsayım gerekmektedir.

Bernoulli – Euler varsayımı :

- Çubuk eksenine dik kesitler, burulma sonrası da düzlem kalırlar ve rijit bir levha gibi çubuk ekseni etrafında dönerler.
- Kesitlerin dönme açıları z koordinatının doğrusal bir fonksiyonudur.

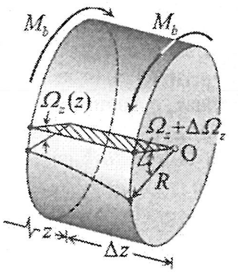
$$\omega_z = \frac{\mathrm{d}\Omega_z}{\mathrm{d}z} = \text{sabit}$$

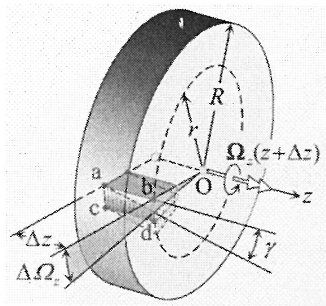


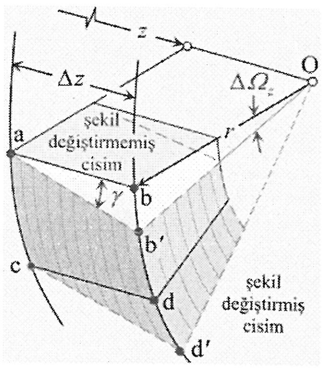
ω_z *birim dönme açısı* olup, boyutu [1/cm] dir.

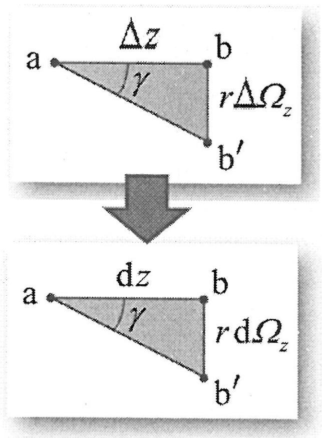
$$\Omega_z(z) - \Omega_z(0) = \omega_z z$$

9.2 Kayma Gerilmesi ve Kesit Dönmesi







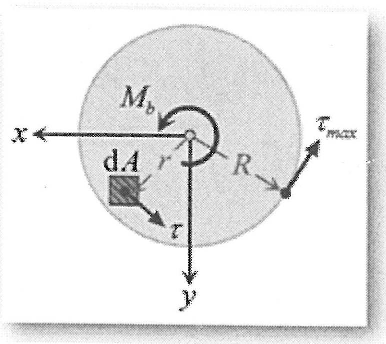


$$\gamma \cong \frac{\widehat{bb'}}{\overline{ab}} = \underbrace{\frac{r\,d\Omega_z}{dz}}_{\omega_z} = r\omega_z$$

$$\boxed{\gamma = \omega_z r}$$

$\tau = G\gamma$ (Hooke yasası)

$\tau = G\omega_z r$, $(0 \le r \le R)$ $\quad G = E/[2(1+\upsilon)]$



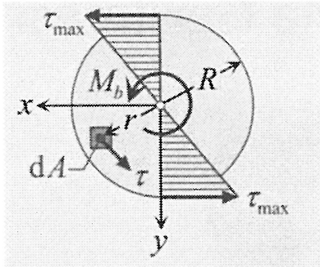
en büyük kayma gerilmesi

$$\tau_{max} = G\omega_z R$$

herhangi bir noktada kayma gerilmesi

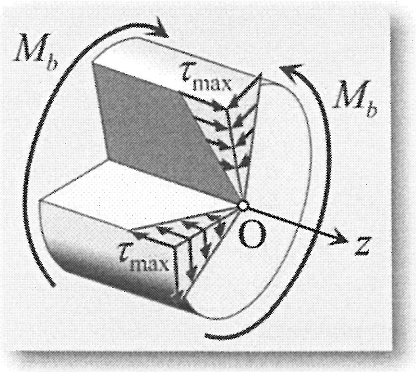
$$\tau = \left(\frac{r}{R}\right)\tau_{max}$$

$$\tau = G\omega_z r \quad , \ (0 \le r \le R)$$



$$\tau_{max} = \tau\Big|_{r=R}$$

$$\tau_{max} = G\omega R$$



$$\tau = G\omega_z r \quad , \ (0 \le r \le R)$$

genel mühendislik uygulamalarında kesit zorları belli olduğundan, kayma gerilmesi burulma momenti cinsinden hesaplanabilmelidir.

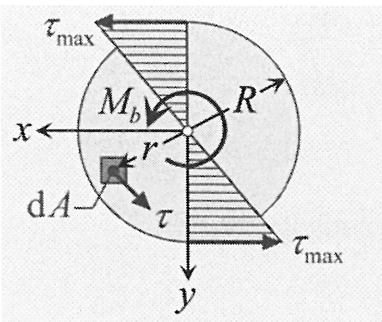
Bu amaçla burulma denge denklemi yazılırsa:

$$M_b = \int_A r\tau \, dA$$

$$= \int_A G\omega_z r^2 dA$$

$$= G\omega_z \boxed{\int_A r^2 dA}$$

$$M_b = G\omega_z I_o \qquad I_o$$

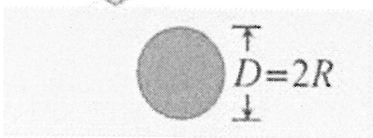


$$\omega_z = \frac{M_b}{GI_o} = \text{sabit}$$ *birim dönme açısı*

Dolu Dairesel kesit

$$\tau = G\omega_z r \qquad \omega_z = \frac{M_b}{GI_o} = \text{sabit}$$ *birim dönme açısı,*

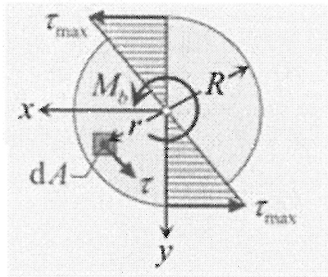
kutupsal eylemsizlik momenti



$$\Rightarrow \quad I_o = \tfrac{1}{2}\pi R^4 = \tfrac{1}{32}\pi D^4$$

$$\tau = \frac{M_b}{I_o} r \qquad (0 \le r \le R)$$

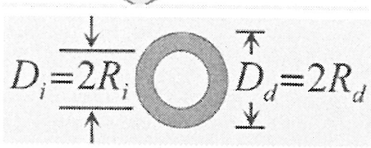
$$\tau_{max} = \frac{M_b}{I_o} R \qquad \tau_{max} = \frac{2M_b}{\pi R^3} = \frac{16M_b}{\pi D^3}$$



Halka Kesit

$$\tau = G\omega_z r$$ *birim dönme açısı,* $$\omega_z = \frac{M_b}{GI_o} = \text{sabit}$$

kutupsal eylemsizlik momenti

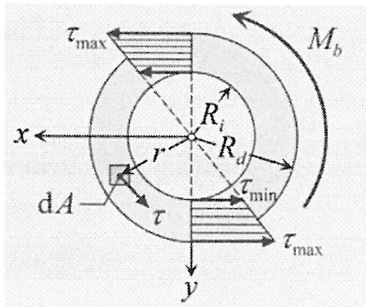


$$\Rightarrow \quad I_o = \tfrac{1}{2}\pi\left(R_d^4 - R_i^4\right) = \tfrac{1}{32}\pi\left(D_d^4 - D_i^4\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi R_d^4\left(1-\eta_R^4\right) = \tfrac{1}{32}\pi D_d^4\left(1-\eta_D^4\right)$$

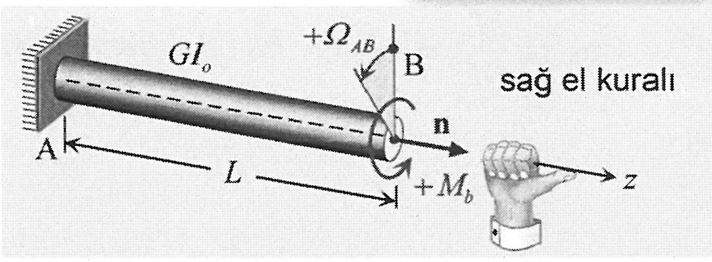
$$\tau = \frac{M_b}{I_o} r \qquad (R_i \le r \le R_d)$$

$$\eta_R = R_i / R_d < 1 \qquad \eta_D = D_i / D_d < 1$$

$$\tau_{max} = \frac{2M_b}{\pi R_d^3\left(1-\eta_R^4\right)} = \frac{16M_b}{\pi D_d^3\left(1-\eta_D^4\right)}$$



Kesit Dönmesi:



$$\omega_z = \frac{d\Omega_z}{dz}$$

$$\omega_z = \frac{M_b}{GI_o}$$

$$\Omega_z = \int \frac{M_b}{GI_o} dz \;\Rightarrow\; \Omega_{AB} = \frac{M_b}{GI_o} \int_0^L dz$$

$$\Rightarrow\; \boxed{\Omega_{AB} = \frac{M_b L}{GI_o}}$$

9.3 Boyutlandırma

boyutlandırma hesabı *gerilme* esaslı olabileceği gibi, *şekil değiştirme* esaslı denetleme de gerekebilir.

Gerilme Esaslı Denetleme:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{em}$$

Daire kesit $$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_b}{\pi \tau_{em}}}$$

Halka kesit $$D_d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_b}{\pi\left(1-\eta_D^4\right)\tau_{em}}}$$

Halka kesitli burulma çubuğu, dolu kesitli çubuğa göre malzemeden tasarruf sağladığı için uygulamada ayrı bir öneme sahiptir.

Şekil Değiştirme Esaslı Denetleme:

Burulma sırasında oluşabilecek birim dönme açısının belli bir değerin altında kalması istenir

$$\omega_{\max} \leq \omega_{em}$$

birim dönme açısı,

$$\omega_z = \frac{2M_b}{G\pi R^4} = \frac{32M_b}{G\pi D^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D \geq \sqrt[4]{\frac{32M_b}{G\pi\omega_{em}}}}$$

$$\omega_z = \frac{2M_b}{G\pi R_d^4\left(1-\eta_R^4\right)} = \frac{32M_b}{G\pi D_d^4\left(1-\eta_D^4\right)}$$

$\eta_R = R_i / R_d < 1$ ve $\eta_D = D_i / D_d < 1$

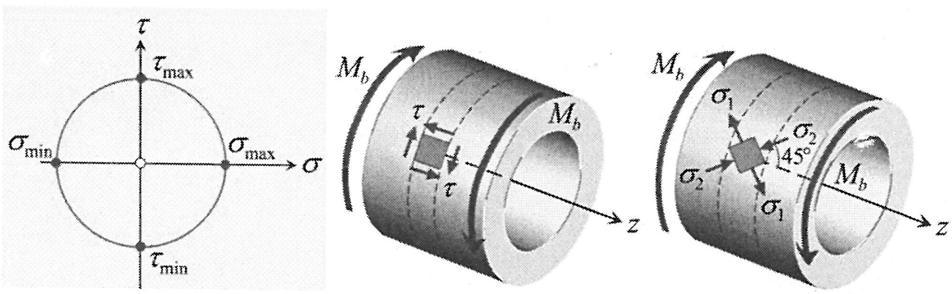
Burulmada Kırılma:

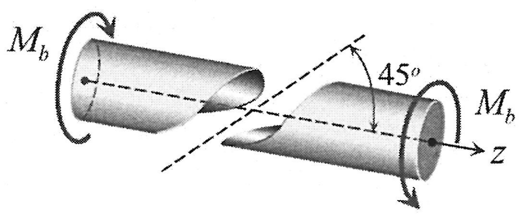
burulmada gerilme durumu *basit kayma*dır.

asal normal gerilmeler

boyuna ipçiklerle $\pm 45°$ açı yapacak biçimde gelişir

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$$

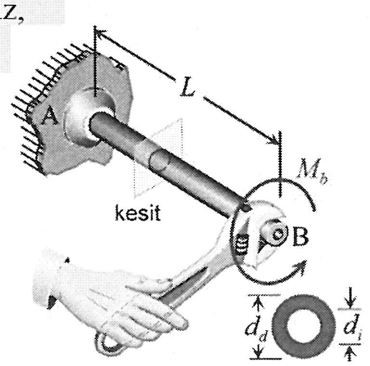




ÖRNEK 9.2 Şekil (P_2.1) de daire halkası kesitli boruyu çeviren su anahtarı, boru üstünde sadece basit burulma etkisine sebep olduğu varsayılıyor. Borunun dış çapı $d_d = 50\,\text{mm}$ ve iç çapı $d_i = 25\,\text{mm}$ olup kayma emniyet gerilmesi $\tau_{em} = 150\,\text{MPa}$ dır. Kayma modülü $G = 80\,\text{GPa}$ ve $L = 0.5$ m dır. Not: Birim çevirme $1\,\text{MPa} = 10^6\,\text{N/m}^2$ dır.

a). Borunun güvenlikle taşıyabileceği burulma momenti M_b yi ve bu durumda halka kesitteki en küçük kayma gerilmesini hesaplayınız,

b). B noktasının A noktasına göre toplam dönmesi Ω_{BA} yı bulunuz.



a) $M_b = ?$

$$I_o = \tfrac{1}{32}\pi\left(d_d^4 - d_i^4\right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_b}{I_o}\left(\tfrac{1}{2}d_d\right)$$

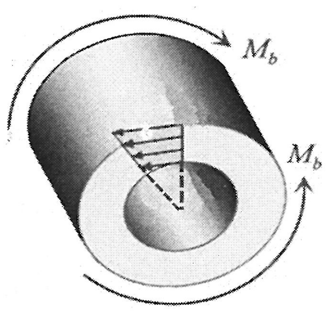
$\tau_{\max} \le \tau_{em}$

$$M_b = \tfrac{1}{16}\tau_{em}\pi d_d^3\left(1-\eta_D^4\right) \qquad \eta_D = \frac{d_i}{d_d} = 0.5$$

$$M_b = \frac{\left(150\times10^6\right)\pi\, 0.05^3\left(1-0.5^4\right)}{16} \cong 3451\,\text{N m}$$

halka kesitte oluşacak en küçük kayma gerilmesi

$$\tau_{\min} = \frac{16 M_b d_i}{\pi\left(d_d^4 - d_i^4\right)} = \frac{16\times3451\times0.025}{\pi\left(0.05^4 - 0.025^4\right)} = 75\,\text{MPa}$$



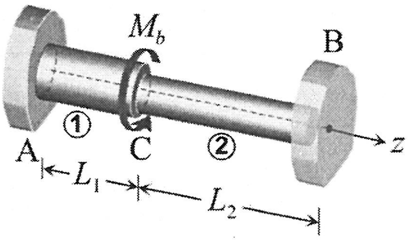
b). $\Omega_{AB} = ?$

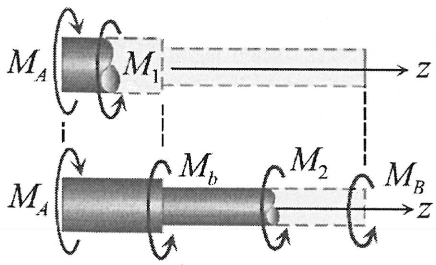
$$\omega = \frac{\tau_{\max}}{G r_d} = \frac{150}{\left(8\times10^4\right)0.025} = 0.075\,\text{m}^{-1}$$

$$\Omega_{BA} = \omega L \;\Rightarrow\; \Omega_{BA} = 0.075\times0.5 = 0.0375 \text{ radyan}$$

ÖRNEK 9.3 Şekil (P_3.1) de değişken kesitli ve farklı malzemelerden yapılmış silindirik bir çubuk görülmektedir. Kesit değişiminin olduğu yere bir burulma momenti M_b etkimektedir. Buna göre mesnet tepkilerini hesaplayınız ve burulma momenti diyagramını çiziniz. Burulma rijitlikleri oranı $G_2 I_2 = 4 G_1 I_1$ ve boy oranları $L_2 = 2L_1$ dir.

ÇÖZÜM: AC ve BC arasından kesilmiş çubuk parçalarında yazılacak denge denkleminden,

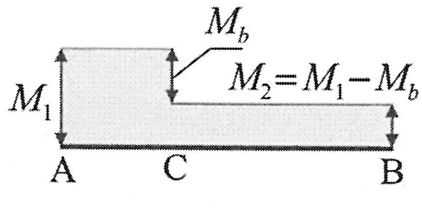




$$\Sigma M_z = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} M_1 = M_A \\ M_2 = M_A - M_b \quad (\text{ya da } M_2 = M_B) \end{cases}$$

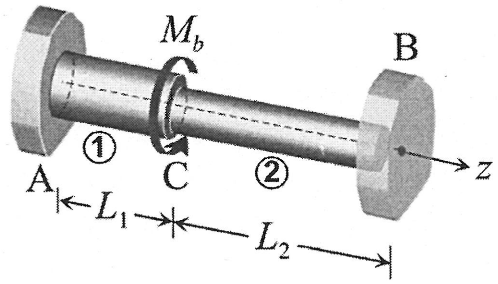
Mesnet tepkileri henüz bilinmese de, AB çubuğuna ait burulma momenti diyagramı denge denklemine bakılarak tek işaretli olacak biçimde çizilebilir.

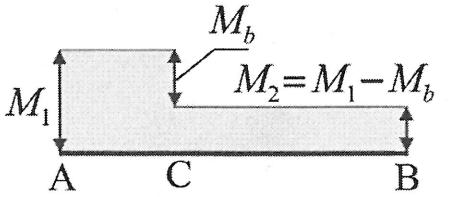
M_A ile M_B yi çözmek için burulma denge denklemi yetersizdir.



uygunluk koşulu $\Sigma\Omega_{AB} = 0$

$$\Omega_{AC} + \Omega_{CB} = 0$$





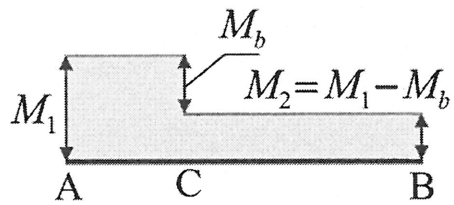
Bölgelerdeki dönmeler

$$\Omega_i = \frac{M_i L_i}{G_i I_i} \quad , \quad (i = 1,2)$$

$$\frac{M_A L_1}{G_1 I_1} + \frac{(M_A - M_b) L_2}{G_2 I_2} = 0 \qquad M_1 = M_A \qquad M_2 = M_A - M_b$$

$$\frac{M_A L_1}{G_1 I_1} + \frac{(M_A - M_b) L_2}{G_2 I_2} = 0$$

$$\chi = \frac{G_2 I_2 L_1}{G_1 I_1 L_2}$$

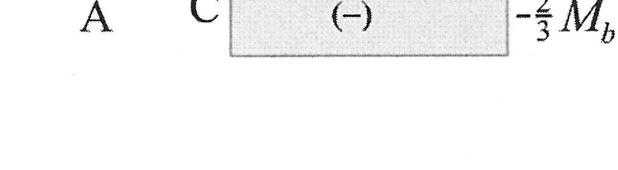


$$M_A = \frac{1}{1+\chi} M_b \qquad M_B = -\frac{\chi}{1+\chi} M_b$$

$$G_2 I_2 = 4 G_1 I_1 \qquad L_2 = 2 L_1$$

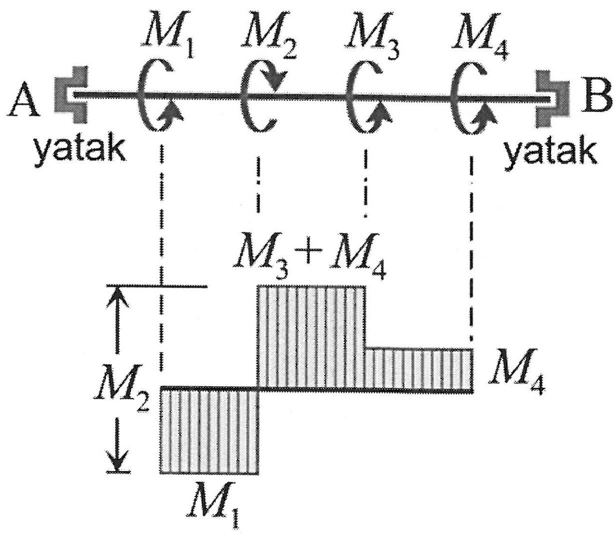
$$\chi = \frac{G_2 I_2 L_1}{G_1 I_1 L_2} = 2$$

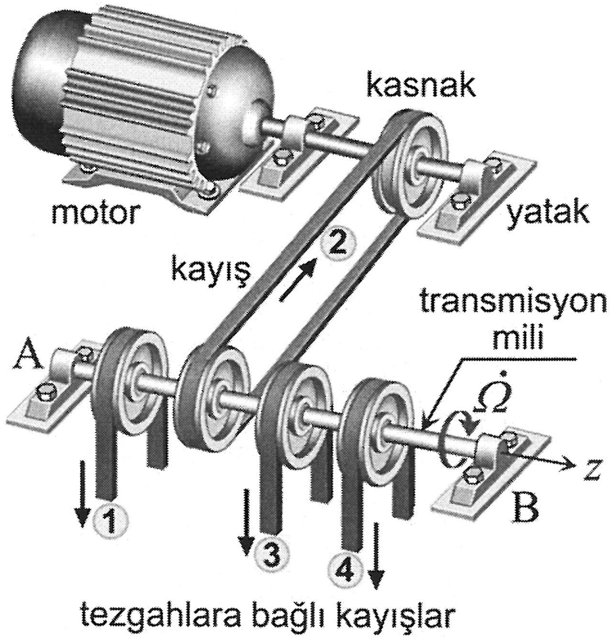
$$M_A = \tfrac{1}{3} M_b \qquad M_B = -\tfrac{2}{3} M_b$$



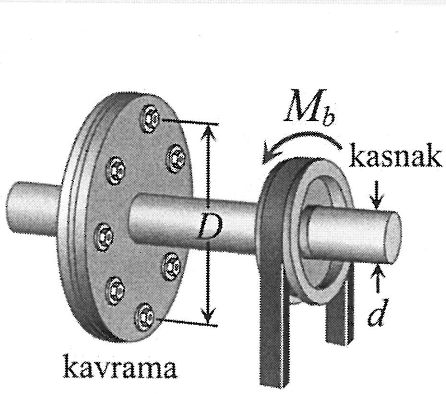
9.6 Güç Aktarma Milleri

kasnağın motordan aldığı enerji mile bağlı diğer kasnaklar yardımıyla tezgahlara iletilir.

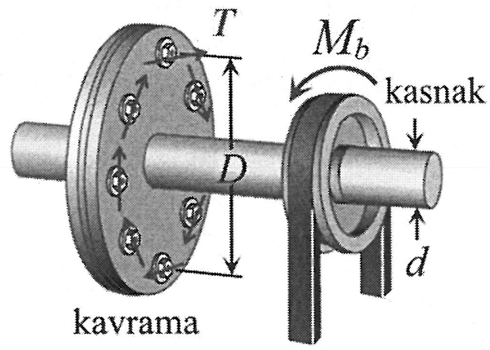




ÖRNEK 9.4 Dakikada devir sayısı $n = 1400$ olan Şekil (P_4.1) deki $d = 25\,\text{mm}$ çaplı mil bir motora bağlı kasnak yardımıyla $M_b = 4116\,\text{Nm}$ lik moment aktarıyor. Milin bağlı olduğu kavramanın çapı $D = 160\,\text{mm}$, kayma emniyet gerilmesi $\tau_{em} = 70\,\text{MPa}$, kullanılacak bulon çapı $d_b = 10\,\text{mm}$ dir. Kavramada bir sırada 8 taneden fazla olmayacak biçimde yerleştirilecek bulon sayısını bulunuz. Not: $1\text{MPa} = 10^6\text{N/m}^2$.



ÇÖZÜM:



Bir bulonun kesit alanı ile taşıyabileceği makaslama kuvveti,

$$A = \tfrac{1}{4}\pi d_b^2 = \tfrac{1}{4}0.01^2\pi = 78.5\times10^{-6}\,\text{m}^2$$

$$T_{\max} = A\tau_{em} = \left(78.5\times10^{-6}\right)\left(70\times10^{6}\right) = 5495\,\text{N}$$

kavramada kullanılacak bulon sayısı

$$n_b = \frac{M_b}{T\left(\frac{1}{2}D\right)} = \frac{4116}{5495\times0.08} = 9.36$$

$$n_b \geq 10$$

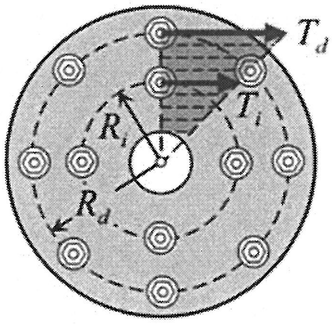
En az bulon sayısı 10, bir sırada izin verilen 8 bulon sayısından fazla olduğundan içerde de bulonlardan ikinci bir sıra oluşturulacaktır

iç ve dış sıradaki bulonların taşıyacağı kesme kuvvetleri $T_i / T_d = R_i / R_d$ oranıyla ifade edilebilir.

$R_d = \frac{1}{2}D = 0.08\,\text{m}$

$R_i = 0.05\,\text{m}$ seçilirse $\qquad T_d = 5495\,\text{N}$

$$T_i = \frac{R_i}{R_d}T_d = \frac{0.05}{0.08}\times5495 = 3434\,\text{N}$$



$n_d = 8$ için, denge koşulundan,

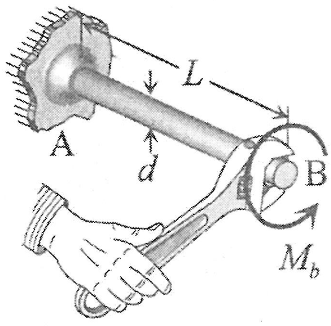
$$M_b = (n_d T_d)R_d + (n_i T_i)R_i$$

$$4116 = (8\times5495)0.08 + (n_i 3434)0.05$$

$$n_i = 3.48 \Rightarrow n_i \geq 4$$

$$n = n_i + n_d = 4 + 8 = 12$$

PROBLEM 9-1 Çapı $d=50\,\text{mm}$ olan Şekil (9-P1) deki daire kesitli mile B ucundan $M_b=4.2\,\text{kNm}$ lik bir burulma momenti etkiyor. Kayma emniyet gerilmesi $\tau_{em}=100\,\text{MPa}$ ise, kesit boyutlarının yeterli olup olmadığını araştırınız ve eğer yetersizse yükleme durumu için kesiti yeniden boyutlandırınız.



Şekil (9-P1)

ÇÖZÜM:

Kesit üzerinde kayma gerilmesi,

$$\tau=\frac{M_b}{I_o}r \quad I_o=\tfrac{1}{32}\pi D^4 \text{ ve } r=\tfrac{1}{2}D$$

$$\tau_{max}=\frac{16M_b}{\pi D^3}=\frac{16(4.2\times10^6)}{50^3\pi}=171\,\text{MPa}$$

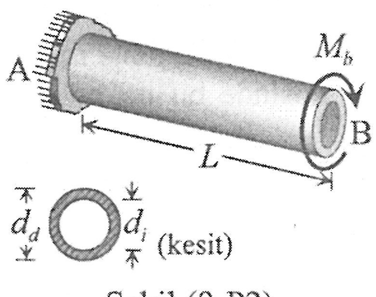
$$\tau_{max}=171\,\text{MPa}>\tau_{em}=100\,\text{MPa}$$

$\Rightarrow$ kesit yetersizdir

$$\tau_{em}\geq\frac{16M_b}{\pi D_{min}^3} \Rightarrow D_{min}\geq\sqrt[3]{\frac{16M_b}{\pi\tau_{em}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{16(4.2\times10^6)}{100\pi}}=59.8\,\text{mm} \Rightarrow D\cong60\,\text{mm}$$

PROBLEM 9-2 Şekil (9-P2) deki halka kesitli milin B serbest ucuna $M_b=17.1\,\text{kNm}$ lik bir burulma momenti uygulanmıştır. Çubuğun A ucu ankastre bağlıdır. Milin dış çapı $d_d=100\,\text{mm}$ ile sınırlı olup, malzemenin ekonomik biçimde kullanılabilmesi için iç çap d_i in alabileceği en büyük değeri bulunuz.
Malzemede kayma emniyet gerilmesi $\tau_{em}=120\,\text{MPa}$ dir.



Şekil (9-P2)

ÇÖZÜM:

Önce tam dolu kesitin yeterli olup olmadığını kontrol edelim:

$$\tau_{\max} = \frac{M_b}{I_o}\left(\tfrac{1}{2}d\right) \overset{?}{\leq} \tau_{em} = 120\,\text{MPa}$$

$$d = d_d = 100\,\text{mm}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16M_b}{\pi d^3} = \frac{16(17.1\times10^6)}{100^3\pi} = 87.1\,\text{MPa} < \tau_{em} = 120\,\text{MPa}$$

dolu kesit fazlasıyla yeterlidir.

O nedenle malzemede tasarrufa gitmek için halka kesit kullanılabilir.

$$\tau = M_b r / I_o \qquad r_d \geq r \geq r_i \qquad I_o = \tfrac{1}{32}(d_d^4 - d_i^4)$$

$$r = \tfrac{1}{2}d_d \;\Rightarrow\; \tau_{\max} \leq \tau_{em}$$

$$1-\left(\frac{d_i}{d_d}\right)^4 = \frac{16M_b}{\pi d_d^3 \tau_{em}}$$

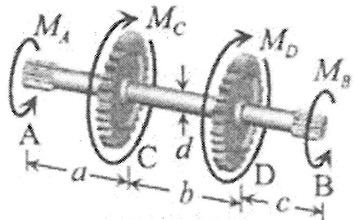
$$d_i \leq 100\sqrt[4]{1-\frac{16(17.1\times10^6)}{\pi 100^3\times120}} \cong 72.36\,\text{mm} \;\Rightarrow\; d_i = 72\,\text{mm}$$

PROBLEM 9-3 İki ucu yivli, çelik AB miline C ve D dişlileri takılıdır. Daire kesitli çubuk Şekil (9-P3) de görüldüğü gibi dışlilere etkiyen tekil burulma momentlerinin etkisindedir.

a). C kesitinin D kesitine göre bağıl dönme açısı Ω_{CD} yi,

b). A kesitinin B kesitine göre bağıl dönme açısı Ω_{AB} yi,

burulma momentlerinin şiddetleri $M_A = 400\,\text{Nm}$, $M_B = 500\,\text{Nm}$, $M_C = 600\,\text{Nm}$, $M_D = 300\,\text{Nm}$, çelik milin çapı $d = 40\,\text{mm}$, kayma modülü $G = 75\,\text{GPa}$, açıklık boyutları $a = 300\,\text{mm}$, $b = 400\,\text{mm}$ ve $c = 500\,\text{mm}$ dir.



Şekil (9-P3)

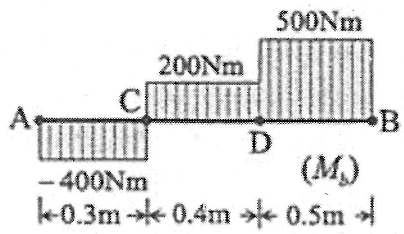
ÇÖZÜM:

$M_A = 400\text{Nm}$,

$M_B = 500\,\text{Nm}$,

$M_C = 600\,\text{Nm}$,

Milin burulma momenti diyagramı



$$I_o = \tfrac{1}{32}\pi d^4 = \tfrac{1}{32}\pi(0.04)^4 = 2.513\times10^{-7}\,\text{m}^4$$
$$GI_o = (75\times10^9)(2.513\times10^{-7}) \cong 18850\,\text{Nm}^2$$

a). Şekil (P3.a) dan yararlanılarak C ve D kesitleri arasında dönme açısı,

$$\Omega_{CD} = \frac{M_{CD}b}{GI_o} = \frac{200\times0.4}{18850} = 0.00424\,\text{rad} = 0.243°$$

b). A kesitinin B kesitine göre dönme açısı hesabı, burulma momenti diyagramı üç bölgeden oluştuğundan, toplam biçiminde yapılır:

$$\Omega_{AB} = \Omega_{AC} + \Omega_{CD} + \Omega_{DB}$$

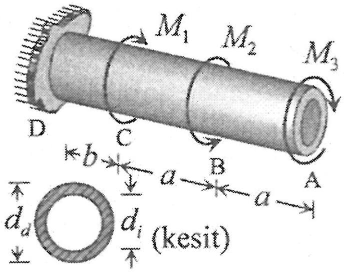
$$= \frac{-400\times0.3}{GI_o} + \frac{200\times0.4}{GI_o} + \frac{500\times0.5}{GI_o} = 0.01114\,\text{rad} = 0.638°$$

PROBLEM 9-4 Şekil (9-P4) deki bir ucu ankastre bağlı diğer ucu serbest, daire halkası kesitli şafta etki eden burulma momentleri $M_1 = M_o$, $M_2 = 2M_o$ ve $M_3 = 1.5M_o$ dır. Halka kesitin iç çapı $d_i = 50\,\text{mm}$, dış çapı $d_d = 100\,\text{mm}$, $a = 2\,\text{m}$ ve $b = 1\,\text{m}$ dir. Malzemede kayma emniyet gerilmesi $\tau_{em} = 80\text{MPa}$, elastisite modülü $E = 200\,\text{GPa}$ ve Poisson oranı $\upsilon = 0.25$ dir.

a). Çubuğun güvenliği bakımından M_o ın alabileceği değeri hesaplayınız,

b). Burulma momenti diyagramını çiziniz,

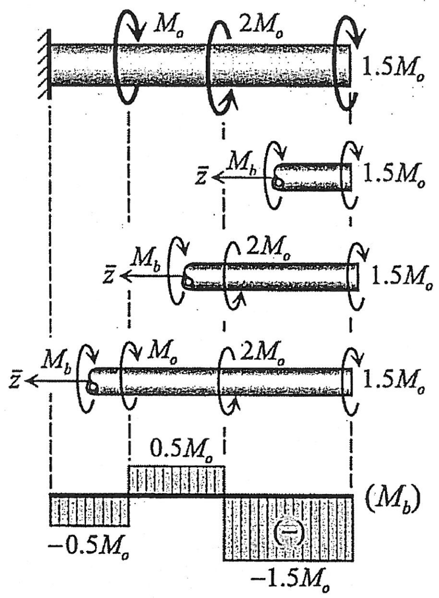
c). A kesitinin B kesitine göre bağıl dönmesi Ω_{AD} yi bulunuz.



Şekil (9-P4)

ÇÖZÜM:

M_o cinsinden burulma momenti diyagramı



$$(M_b)_{\max} = |-1.5M_o|$$

$$\tau_{\max} = \frac{(M_b)_{\max}}{I_o} r_d \le \tau_{em} = 80\,\text{MPa}$$

$$r_d = \tfrac{1}{2} d_d = 50\,\text{mm} \qquad r_i = 25\,\text{mm}$$

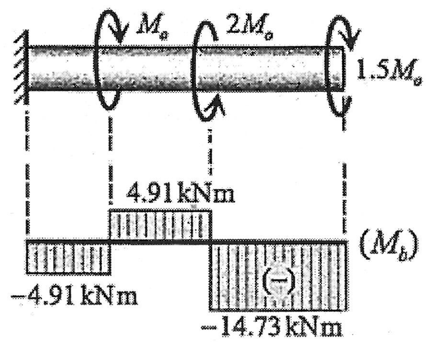
$$I_o = \tfrac{1}{2}\pi(r_d^4 - r_i^4)$$

$$I_o = \tfrac{1}{2}\pi(50^4 - 25^4) = 9.2\times10^6\,\text{mm}^4$$

$$M_o \le \frac{\tau_{em} I_o}{1.5 r_d} = \frac{80(9.2\times10^6)}{1.5\times50} \cong 9.82\times10^6\,\text{Nmm} = 9.82\,\text{kNm}$$

b). burulma momenti diyagramı

$$M_o = 9.82\,\text{kNm}$$



c). $\Omega_{AD}=\Omega_{CD}+\Omega_{BC}+\Omega_{AB}=\dfrac{M_{CD}b}{GI_o}+\dfrac{M_{BC}a}{GI_o}+\dfrac{M_{AB}a}{GI_o}$

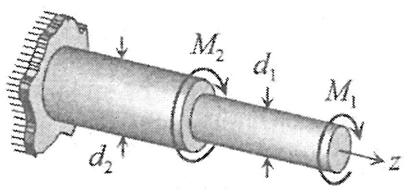
$E=200\text{GPa}$ ve $\upsilon=0.25$ $\quad G=\dfrac{E}{2(1+\upsilon)}=\dfrac{200}{2(1+0.25)}=80\text{GPa}$

$$GI_o=736\text{kNm}^2 \quad M_{AB}=-1.5M_o=-14.28\text{kNm}$$
$$M_{BC}=0.5M_o=4.91\text{kNm}$$
$$M_{CD}=-0.5M_o=-4.91\text{kNm}$$

$$\Omega_{AD}=\frac{(-0.5M_o)1}{GI_o}+\frac{(0.5M_o)2}{GI_o}+\frac{(-1.5M_o)2}{GI_o}=-\frac{2.5\times9.82}{736}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega_{AD}=0.033\text{rad}$$

PROBLEM 9-5 Şekil (9-P5) de aynı malzemeden yapılmış değişken kesitli konsol çubuğa etkiyen tekil burulma momentleri $M_1=0.4\text{kNm}$ ve $M_2=0.6\text{kNm}$ dir. Silindirik çubuğun kesitleri dolu dairedir. Sistemin burulma momenti diyagramını çiziniz ve kayma emniyet gerilmesi $\tau_{em}=80\text{MPa}$ için yüklemeyi güvenle taşıyacak kesit çapları d_1 ile d_2 yi bulunuz.



Şekil (9-P5)

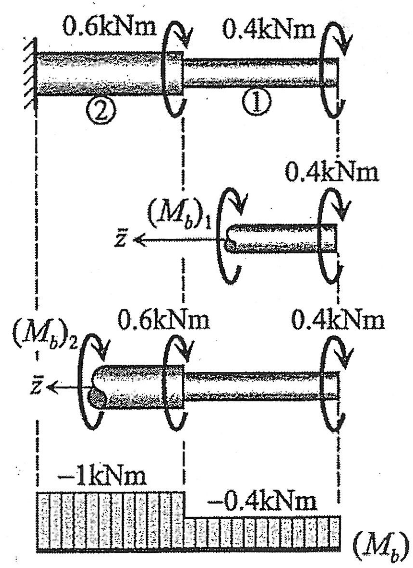
ÇÖZÜM:

Burulma momenti diyagramı

Her iki bölgede,

$\tau_{max}\leq\tau_{em}=80\text{MPa}$

$$d_i\geq\sqrt[3]{\frac{16(M_b)_i}{\pi\tau_{em}}} \quad , \quad (i=1,2)$$



①. bölge : $d_1\geq\sqrt[3]{\dfrac{16\left|-0.4\times10^6\right|}{80\pi}}\cong30\text{mm}$

②. bölge : $d_2\geq\sqrt[3]{\dfrac{16\left|-1\times10^6\right|}{80\pi}}\cong40\text{mm}$