Örnekleme Dağılımları

Mühendislikte İstatistik Metotlar

Çukurova Üniversitesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

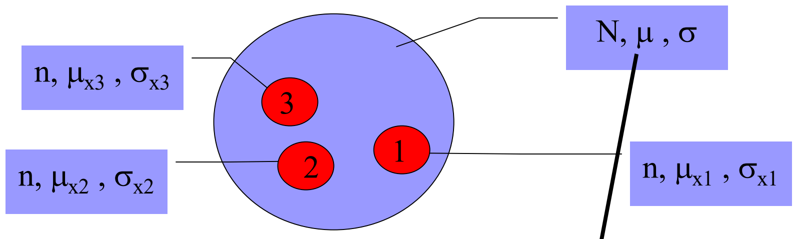
1

- **NOT:** Bu ders materyali sadece ilgili bölümün mevcut dönemi için geçerlidir. Her yıl güncellenebilmektedir. Sadece kayıtlı olduğunuz ders için kullanılabilir. Ders harici her türlü paylaşım yasaktır, herhangi başka bir yerde yayımlanamaz.

Ç.Ü. İnş.Müh.Böl.

2

Örnekleme Dağılımları

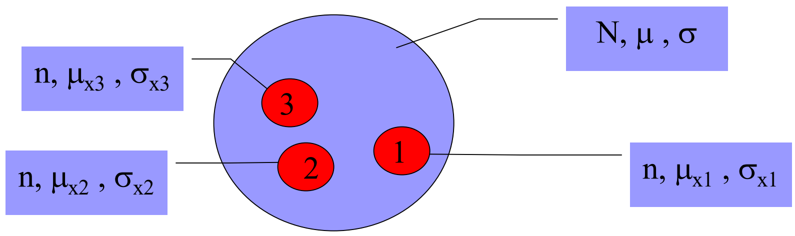


Örnekler	Ortalama
1. Örnek	μ_{x1}
2. Örnek	μ_{x2}
3. Örnek	μ_{x3}
Ortalama	$\mu_{\bar{x}}$
Standart Hata	$\sigma_{\bar{x}}$

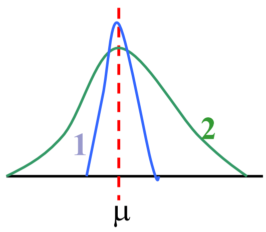
$\mu_{\bar{x}} = \mu$?

3

Örnekleme Dağılımları



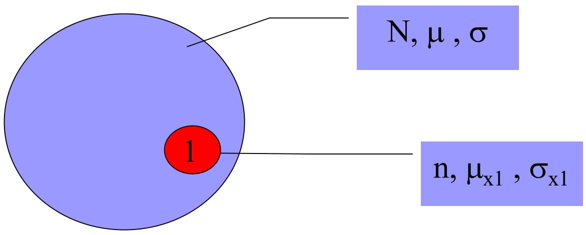
Örnekler	Ortalama
1. Örnek	μ_{x1}
2. Örnek	μ_{x2}
3. Örnek	μ_{x3}
Ortalama	$\mu_{\bar{x}}$
Standart Hata	$\sigma_{\bar{x}}$



$n_1 > n_2$

4

Örnekleme Dağılımları



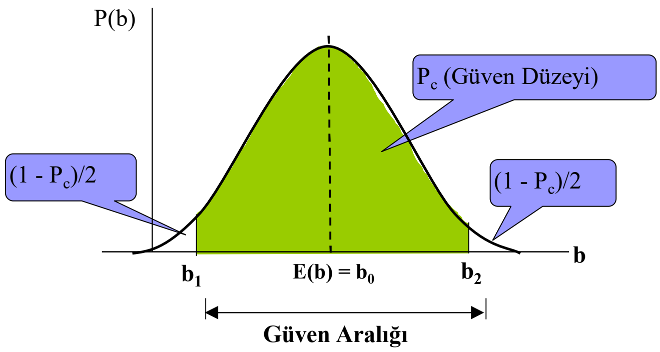
Örnekler	Ortalama
1. Örnek	μ_{x1}
2. Örnek	μ_{x2}
3. Örnek	μ_{x3}
Ortalama	$\mu_{\bar{x}}$
Standart Hata	$\sigma_{\bar{x}}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

5

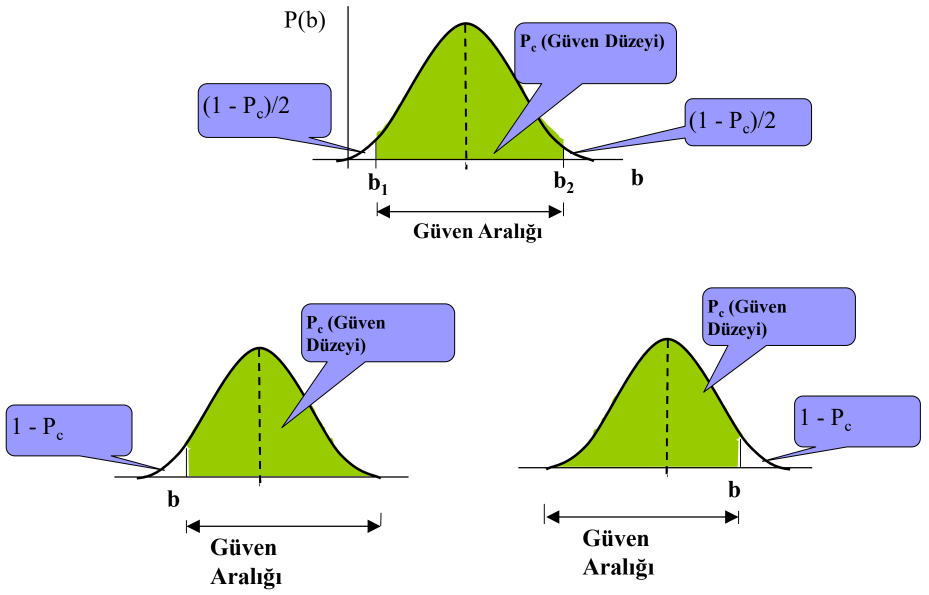
Örnekleme Dağılımları



$$b_{1,2} = \mu_x \pm z \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_x \pm z \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

6

Örnekleme Dağılımları



7

Örnekleme Dağılımları

Ana Kütle Ortalamasının Tahmini

- Asimptotik Dağılım (N > 30)
- t Dağılımı (Student Dağılımı) (N ≤ 30)

Ana Kütle Varyansının Tahmini

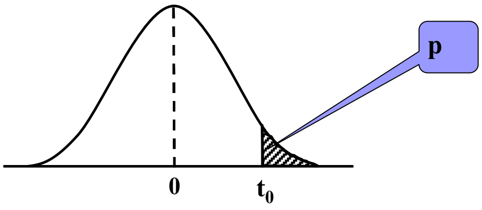
- χ^2 Dağılımı

8

Örnekleme Dağılımları

t Dağılımı (Student Dağılımı)

$$P(\,t \geq t_0\,)$$



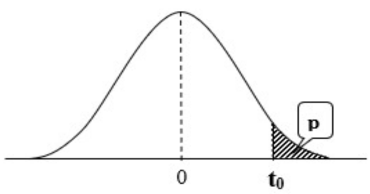
$$t = \frac{\mu_X - \mu}{\sigma_X / \sqrt{N-1}}$$

Bu dağılıma serbestlik derecesi (s.d.) = N-1 olan t dağılımı denir

$$b_{1,2} = \mu_X \pm t \frac{\sigma_X}{\sqrt{N-1}}$$

9

t (Student) Dağılımı



Serbestlik derecesi (n)

p

t

	P											
n	**0.45**	**0.4**	**0.35**	**0.3**	**0.25**	**0.2**	**0.15**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977

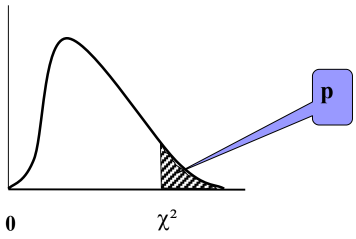
10

Örnekleme Dağılımları

χ^2 Dağılımı

$$\chi^2 = \frac{N \times \sigma_x^2}{\sigma^2}$$

istatistiğinin dağılımı s.d. = N-1 olan χ^2 dağılımıdır

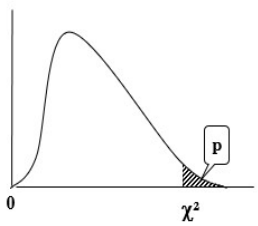


$P(\chi^2 \geq \chi_0^2)$

$$b = \frac{N \times \sigma_x^2}{\chi^2}$$

11

χ^2 Dağılımı



Serbestlik derecesi (n)

p

χ^2

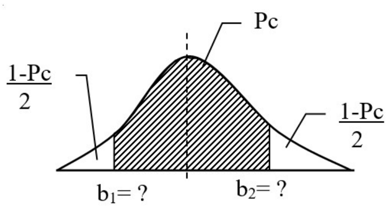
	P										
n	**0.995**	**0.99**	**0.98**	**0.975**	**0.95**	**0.9**	**0.1**	**0.05**	**0.025**	**0.01**	**0.005**
1	0.0000	0.0002	0.0006	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.5965
3	0.0717	0.1148	0.1848	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	0.2070	0.2971	0.4294	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	0.4118	0.5543	0.7519	0.8312	1.1455	1.6103	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.1344	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5475
7	0.9893	1.2390	1.5643	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.0325	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9549
9	1.7349	2.0879	2.5324	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.1558	2.5582	3.0591	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1881
11	2.6032	3.0535	3.6087	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.0738	3.5706	4.1783	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2997

12

Örnek 1)

27 çelik putrel üzerinde yapılan deneylerde kırılma yükünün ortalaması **8490 kg**, standart sapması **400 kg** olarak bulunmuştur. Ortalamanın **%95** güven düzeyindeki **güven aralığını NORMAL DAĞILIMA göre** bulunuz.

Çözüm 1)



$$\frac{1-Pc}{2} = \frac{1-0.95}{2} = 0.025$$

$$z_{0.025} = z_{(1-0.025)} = z_{0.975} = 1.96$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

$$b_{1,2} = \mu_x \pm z \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_x \pm z \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

$$b_1 = 8490 - 1.96 \times \frac{400}{\sqrt{27}} = \mathbf{8340\ kg}$$

$$b_2 = 8490 + 1.96 \times \frac{400}{\sqrt{27}} = \mathbf{8640\ kg}$$

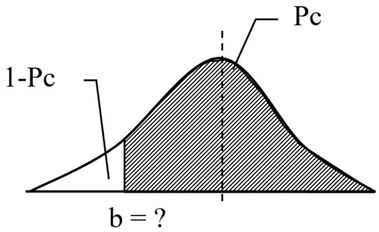
% 95 güven düzeyinde ana kütle ortalaması 8340 kg ile 8640 kg arasında kalacaktır.

13

Örnek 2)

100 çelik çubuk üzerinde yapılan deneylerde kırılma yükünün ortalaması **2.2 t**, standart sapması **0.22 t** olarak bulunmuştur. Ortalamanın **%95** güven düzeyinde ortalama kırılma yükünün hangi değerin altına düşmeyeceği söylenebilir.

Çözüm 2)



$$1 - Pc = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$z_{0,05} = z_{(1-0,05)} = z_{0,95} = 1,645$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

$$b_1 = \mu_x - z \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_x - z \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

$$b_1 = 2.2 - 1.645 \times \frac{0.22}{\sqrt{100}} = 2.164\ \text{t}$$

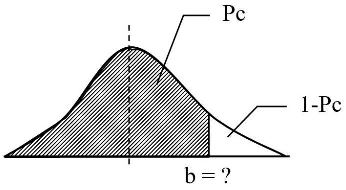
% 95 güven düzeyinde ana kütle ortalaması 2.164 t un üstünde kalacaktır.

14

Örnek 3)

20 yıllık ölçümler sonucu bir şehirde yıllık maksimum rüzgar hızının ortalamsı **76.5 km/sa**, standart sapması ise **10.7 km/sa** olarak bulunmuştur. **% 95** güven düzeyinde yıllık maksimum rüzgar hızının **hangi değeri aşmayacağı söylenebilir**.

Çözüm 2)



N < 30 olduğundan t dağılımı uygun

n = s.d. = N – 1 = 20 – 1 = 19

$1 - Pc = 1 - 0.95 = 0.05$

n = 19 ve p= 0,05 için $t_{0.05} = 1.729$

$$b_1 = \mu_x + t \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_x + t \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{N-1}}$$

$$b = 76{,}5 + 1{,}729 \times \frac{10{,}7}{\sqrt{20-1}} = \mathbf{80{,}7} \;\; \boldsymbol{km/sa}$$

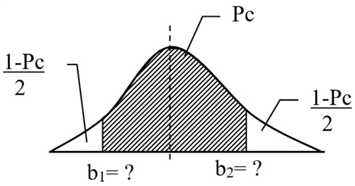
% 95 güven düzeyinde yıllık maksimum rüzgar hızı 80,7 km/sa tin altında kalacaktır.

Örnek 4)

27 çelik putrel üzerinde yapılan deneylerde kırılma yükünün ortalaması **8490 kg**, standart sapması **400 kg** olarak bulunmuştur.;

a) Ortalamanın **%95** güven düzeyindeki güven aralığını **t dağılımına** göre bulunuz.
b) Varyansın **% 90** güven düzeyindeki güven aralığını hesaplayınız.

Çözüm 4) a)



N < 30 olduğundan t dağılımı uygun

n = s.d. = N – 1 = 27 – 1 = 26

$\frac{1 - Pc}{2} = \frac{1 - 0.95}{2} = 0.025$

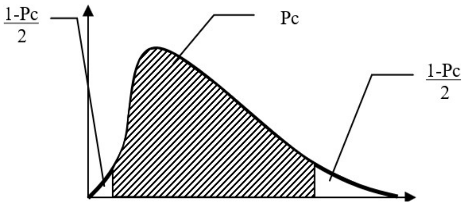
n = 26 ve p= 0,95 için $t_{0.025} = 2.056$

$$b_{1,2} = \mu_x \pm t \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_x \pm t \times \frac{\sigma_x}{\sqrt{N-1}}$$

$$b_1 = 8490 - 2.056 \times \frac{400}{\sqrt{27-1}} = 8332 \text{ kg} \qquad b_1 = 8490 + 2.056 \times \frac{400}{\sqrt{27-1}} = 8648 \text{ kg}$$

% 95 güven düzeyinde ana kütle ortalaması 8332 kg ile 8648 kg arasında kalacaktır.

b)



n = s.d. = N - 1 = 27 - 1 = 26

$$\frac{1-Pc}{2}=\frac{1-0.90}{2}=0.05$$

0.05 = 0.95

$\chi^2_{0.05}$ = 38.88 $\chi^2_{0.95}$ = 15.38

$$b_1=\frac{N.\sigma_x^2}{\chi^2}=\frac{27.(400)^2}{38.88}=111111\ \ kg^2 \qquad b_2=\frac{N.\sigma_x^2}{\chi^2}=\frac{27.(400)^2}{15.38}=280884\ \ kg^2$$

Ana kütle varyansı %90 güven düzeyinde 111111 kg^2 ile 280884 kg^2 arasında kalacaktır.

NOT: Ana kütlenin standart sapması sorulsaydı bulunan değerlerin karekökü alınırdı. Yani:

$$b_1=\sqrt{111111}=333\ \ kg \qquad b_2=\sqrt{280884}=530\ \ kg$$

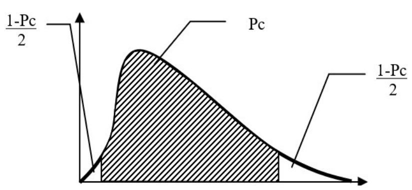
Ana kütle standart sapması %90 güven düzeyinde 333 kg ile 530 kg arasında kalacaktır.

17

Örnek 5)

1000 öğrencilik bir okuldan rastgele seçilen **16** kişinin ağırlık ölçümleri yapılmış ve standart sapmanın **2.4 kg** olduğu bulunmuştur. % 95 ve % 99 güven düzeylerinde bütün öğrenciler için standart sapmayı bulunuz.

Çözüm 5) a)



n = s.d. = N - 1 = 16 - 1 = 15

$$\frac{1-Pc}{2}=\frac{1-0.95}{2}=0.025$$

1 - 0.025 = 0.975

$\chi^2_{0.025}$ = 27.50 $\chi^2_{0.975}$ = 6.26

$$b_1=\frac{N.\sigma_x^2}{\chi^2}=\frac{16.(2.4)^2}{27.50}=3.351\ kg^2 \qquad \sigma=\sqrt{3.351}=1.83\ \ kg$$

$$b_2=\frac{N.\sigma_x^2}{\chi^2}=\frac{16.(2.4)^2}{6.26}=14.722\ kg^2 \qquad \sigma=\sqrt{14.722}=3.84\ \ kg$$

18

b)

n = s.d. = N - 1 = 16 - 1 = 15

$$\frac{1-\mathrm{Pc}}{2} = \frac{1-0.99}{2} = 0.005$$

1- 0.005 = 0.995 $\chi^2_{0.005} = 32.8$ $\chi^2_{0.995} = 4.60$

$$b_1 = \frac{N.\sigma_x^2}{\chi^2} = \frac{16.(2.4)^2}{32.8} = 2.810 \text{ kg}^2 \qquad \sigma = \sqrt{2.810} = 1.68 \text{ kg}$$

$$b_2 = \frac{N.\sigma_x^2}{\chi^2} = \frac{16.(2.4)^2}{4.60} = 20.035 \text{ kg}^2 \qquad \sigma = \sqrt{20.035} = 4.49 \text{ kg}$$

1000 öğrencini standart sapması % 99 güven düzeyinde 1.68 kg ile 4.49 kg arasında olacaktır.

19