Клас: 11-А
Дата: 24.01.2022

Тема: Визначений інтеграл. Його геометричний зміст. Формула Ньютона – Лейбніца.

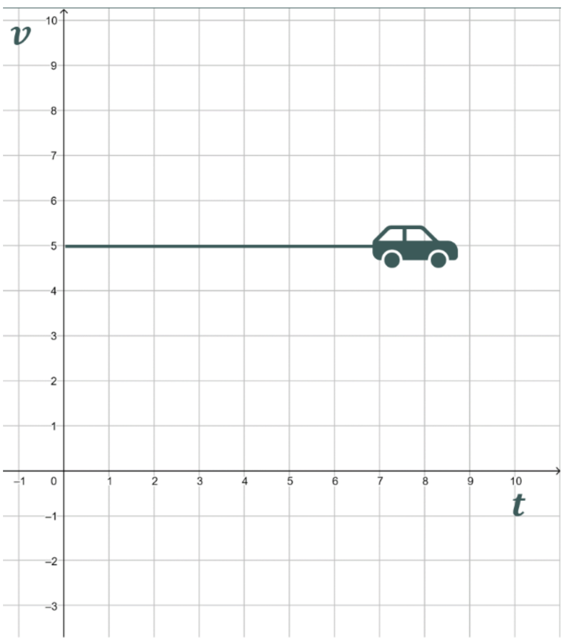
Мета:

- *Навчальна:* засвоїти означення площі криволінійної трапеції, навчитися знаходити площу криволінійної трапеції; розглянути означення визначеного інтеграла та навчитися знаходити визначений інтеграл; засвоїти формулу Ньютона-Лейбніца та розглянути геометричний зміст визначеного інтеграла;

- Пригадаємо таблицю первісних

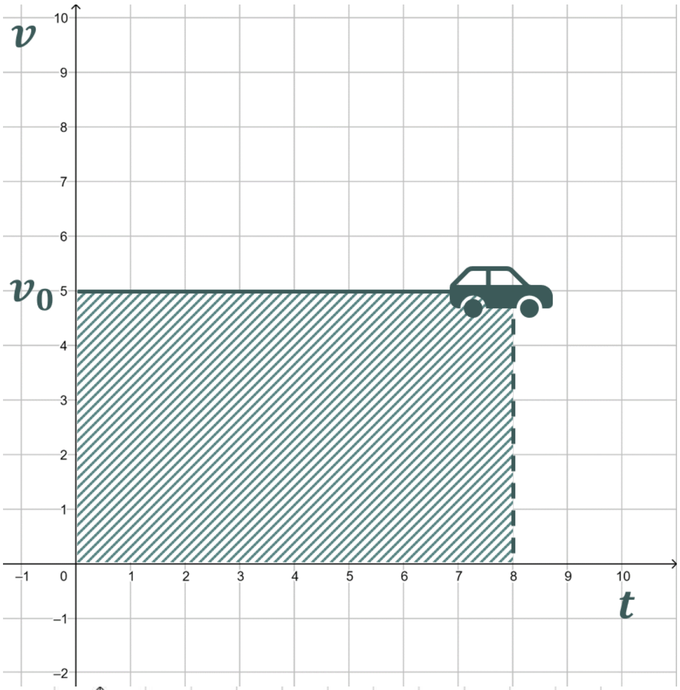
Функція $f(x)$	**Первісна $F(x)$**	
a	$\boldsymbol{ax + C}$	a – стала
x^p	$\boldsymbol{\frac{x^{p+1}}{p+1} + C}$	$p \neq -1$
$ax + b$	$\boldsymbol{\frac{ax^2}{2} + bx + C}$	
$\sqrt{x}$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C}$	
$\sin x$	$\boldsymbol{-\cos x + C}$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\boldsymbol{-\mathrm{ctg}\, x + C}$	$x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos x$	$\boldsymbol{\sin x + C}$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\boldsymbol{\mathrm{tg}\, x + C}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

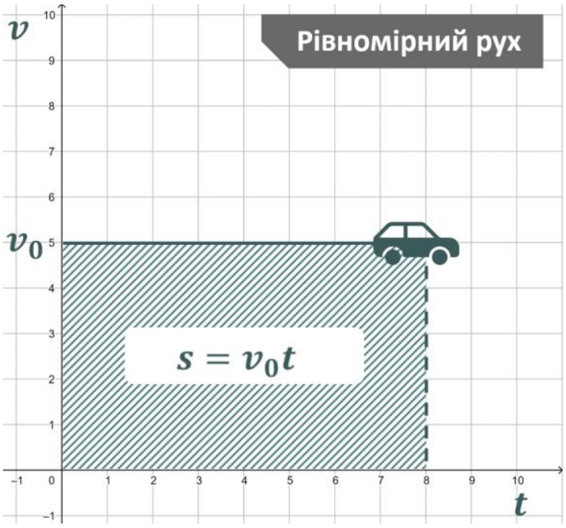
- **Криволінійна трапеція**

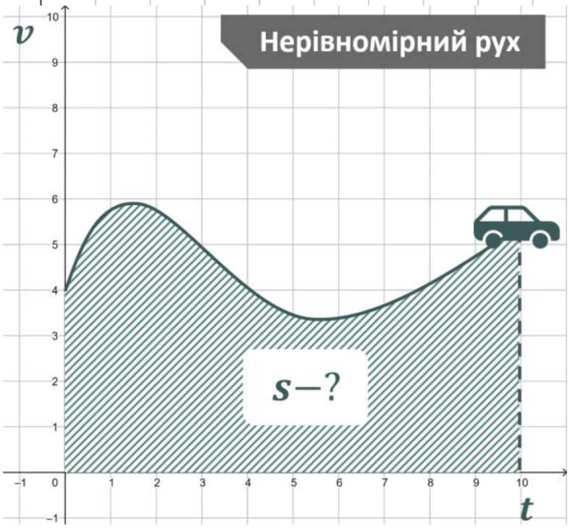


➢ Як знайти шлях, що подолає автомобіль? $(S = v_0 t)$

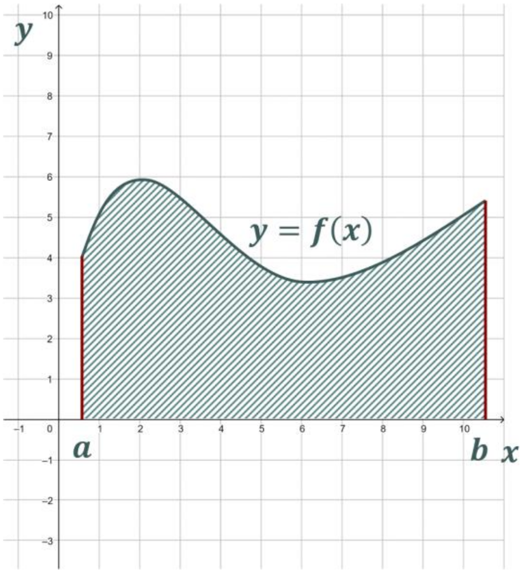
- Чи буде цей шлях дорівнювати площі S прямокутника?
  (Так)







- *Проблемне питання:*
  Чи можемо знайти площу такої фігури?

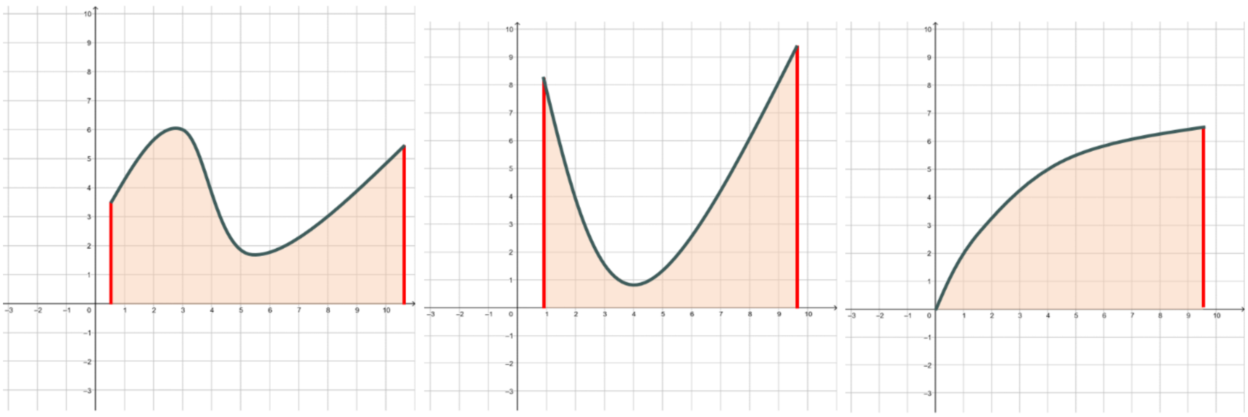


Означення

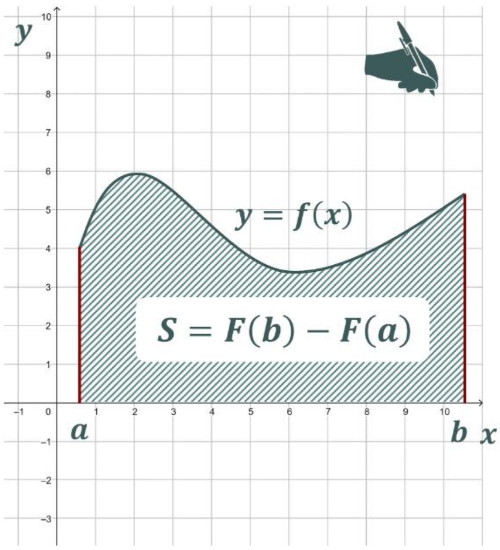
Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $y = f(x) \geq 0$, то фігура, обмежена графіком функції f і прямими $y = 0, x = a$ і $x = b$, називається ***криволінійною трапецією***.

**Відрізок* $[a; b]$ *– це основа криволінійної трапеції.*

Приклади криволінійних трапецій:



- **Площа криволінійної трапеції**



Теорема

Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0,\ x = a\ \ i\ \ x = b\ (a < b)$, можна обчислити за формулою

$S = F(b) - F(a)$, де F будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$

Наприклад:

Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої відрізками $a = 1,\ b = 3$, віссю Ox і графіком функці $f(x) = 6x - x^2$.

Розв'язання:

- Назвіть одну з первісних ф-ї $f(x) = 6x - x^2$ на проміжку $[1; 3]$

$$F(x) = \frac{6x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = 3x^2 - \dfrac{x^3}{3} \\ S = F(b) - F(a) \end{array}\right| \Rightarrow \boldsymbol{S = F(3) - F(1)}$$

$$S = F(3) - F(1) = \left(3 \cdot 3^2 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(3 \cdot 1^2 - \frac{1^3}{3}\right) = 18 - \frac{8}{3} = \frac{46}{3} = 15\frac{1}{3}$$

- **Формула Ньютона-Лейбніца**

Означення

Нехай F – первісна функції f на проміжку I, числа a і b $(a < b)$, належать проміжку I. Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом** функції f на проміжку $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Позначення $\int_a^b f(x)dx$ *читається як інтеграл від а до b еф від ікс де ікс.*

Числа а і *b – це межі інтегрування: а – нижня межа, b – верхня межа.*

**Отримана рівність називається формулою Ньютона-Лейбніца*

- **Геометричний зміст визначеного інтеграла**

Використовуючи теорему про площу криволінійної трапеції та формулу Ньютона-Лейбніца можна зробити висновок, що площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a; b]$ *функції* $y = f(x)$, *відрізком* $[a; b]$ *осі* Ox *і прямими* $x = a$ *і* $x = b$, *можна обчислювати за формулою*

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Ця формула виражає геометричний зміст визначеного інтеграла.

Виконуючи обчислення визначених інтегралів зручно використовувати такий запис:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Наприклад:

Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої відрізками $a = -\frac{2\pi}{3}$, $b = \frac{\pi}{2}$, віссю Ox і графіком функції $f(x) = \cos\frac{x}{2}$

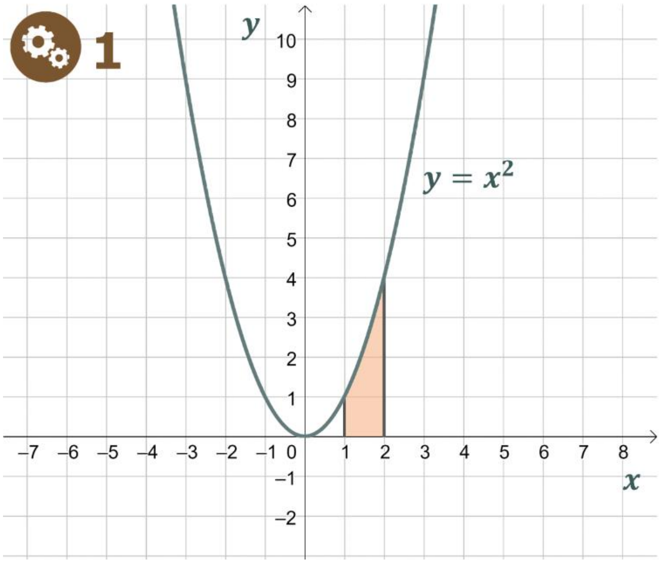
Розв'язання:

$$S = \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}dx = 2\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sin\frac{\pi}{4} - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку:



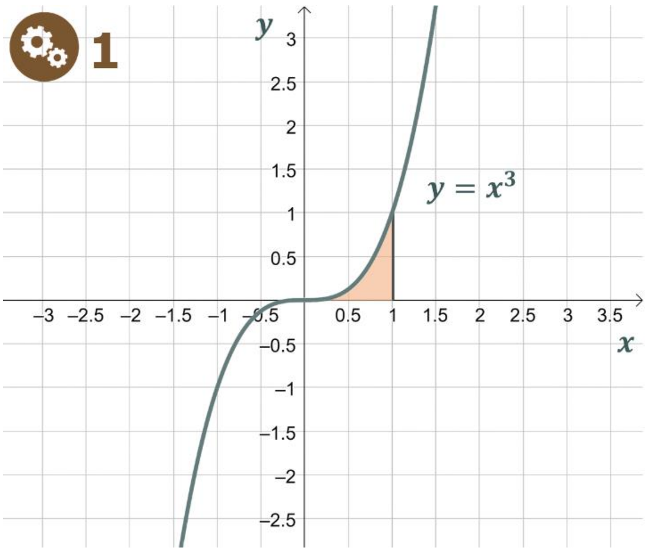
Маємо криволінійну трапецію, яка обмежена графіком функції $y = x^2$ і прямими $a = 1$ і $b = 2$.

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

За теоремою про площу криволінійної трапеції знайдемо площу:

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\ (кв.од)$$



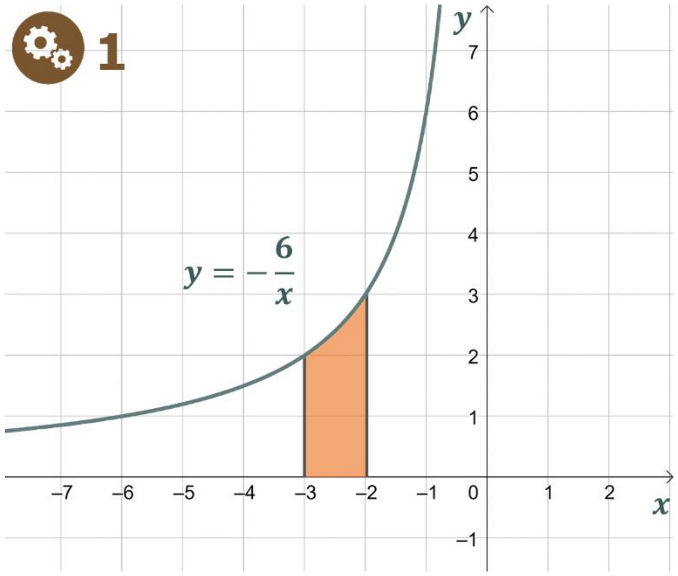
Маємо криволінійну трапецію, яка обмежена графіком функції $y = x^3$ і прямими $a = 0$ і $b = 1$.

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \frac{x^4}{4}$$

За теоремою про площу криволінійної трапеції знайдемо площу:

$$S = F(1) - F(0) = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}\ (кв.од)$$



Маємо криволінійну трапецію, яка обмежена графіком функції $y = -\frac{6}{x}$ і прямими $a = -3$ і $b = -2$.

Знайдемо первісну:

$F(x) = -6\ln|x|$

За теоремою про площу криволінійної трапеції знайдемо площу:

$S = F(-2) - F(-3) = -6\ln|-2| - (-6\ln|-3|) = -6\ln 2 + 6\ln 3$ (*кв.од*)

I. Домашнє завдання

Опрацювати §10
Виконати № 10.4; 10.6; 10.8

Істер О.С.

Виконання завдань сфотографувати та надіслати в HUMAN або на електронну пошту vikalivak@ukr.net