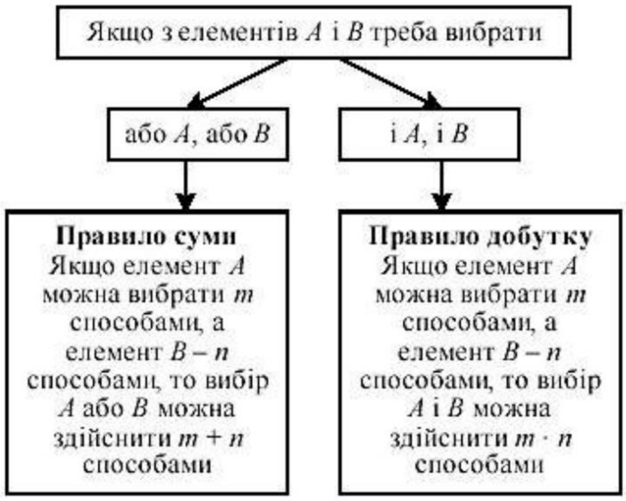
Дата: 23.02.2021
Клас: 11-А

Тема уроку: Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми та добутку. Перестановки, розміщення, комбінації.

Сьогодні ми познайомимося з новим розділом математики, який дещо відрізняється від тих, які вивчались раніше. Розділ математики, який ми починаємо вивчати, називається ***комбінаторикою***.

Комбінаторика – розділ математики присвячений розв'язанню задач про вибір і розміщення елементів скінченої множини, відповідно до заданих правил.
Ці правила визначають спосіб побудови деякої конструкції – комбінаторної сполуки.
В основі класичної комбінаторики лежать *комбінаторні правила суми та добутку.*
Наприклад (правило суми) – на тарілці лежать 5 яблук і 9 груш. Один плід можна обрати 5+9=14 (способами).

Вибір правила комбінаторного додавання і комбінаторного множення



Наприклад (правило добутку) – із 6 видів конвертів без марок і 5 марок один конверт і одну марку можна вибрати $6 \cdot 5 = 30$(способами).
*Вправа 1.*У групі 15 хлопців і 12 дівчат. Скількома способами можна вибрати :
1) хлопця;
2) дівчину;
3) одного студента цієї групи;
4) двох студентів – хлопця й дівчину.

Розв'язання

1) Хлопця можна вибрати 15 способами;
2) дівчину можна вибрати 12 способами;
3) за правилом суми або дівчину або хлопця можна вибрати 15+12 =27 способами;
4) за правилом добутку вибрати двох студентів - хлопця й дівчину – можна $15 \cdot 12=180$ способами.

Відповідь: 1)15; 2)12; 3) 27;4) 180 способами.

Вправа 2. Скількома способами можна пошити триколірний прапор, якщо є тканини 5 різних кольорів?

Розв'язання

Перший колір можна вибрати п'ятьма способами, другий – чотирма, третій – трьома. За правилом добутку триколірний прапор можна зшити 5·4·3=60 способами.

Відповідь: 60.

2. *Перестановки, розміщення ,комбінації.*

Означення. ***Факторіалом*** називають добуток *n* послідовних натуральних чисел

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) = n!$($n$ – факторіал). 0!=1, 1!=1.

Наприклад, 5!=1·2·3·4·5=120, 2!=1·2=2, 4!=1·2·3·4=24.

Означення. ***Перестановкою з n елементів*** називають будь-яку впорядковану множину з *n* елементів.

$P_n = n!$ - формула числа перестановок без повторень

В даній формулі кожен елемент, що входить у комбінацію поданий у єдиному екземплярі.

Повернемося до задачі, яку ми розглядали на початку заняття.

✓ Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1,2,3,4,5, якщо цифри в числі не повторюються?

Отже, кількість таких чисел дорівнює $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Означення. ***Розміщенням з n елементів по k*** називають будь-яку впорядковану множину з ***k*** елементів ***n-*** елементної множини.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$- формула числа розміщень без повторень

Розглянемо задачу. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,5 за умови, що цифри не повторюються.

Отже, маємо розміщення з 5 по 3 елементи: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

Означення. ***Комбінацією без повторень з n елементів по k*** називають будь-яку ***k-*** елементну підмножину ***n*** – елементної множини.

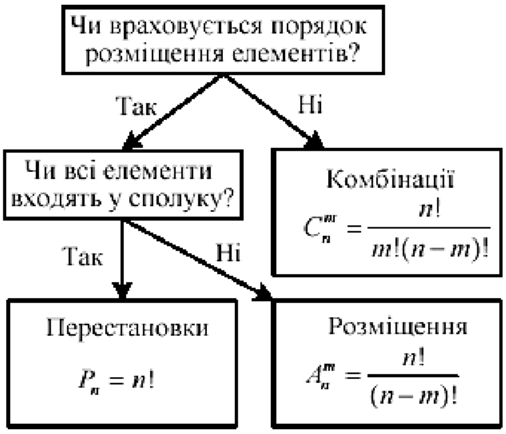
$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$- формула числа комбінацій без повторень

Розглянемо задачу. Скількома способами можна вибрати дві різні цифри із цифр 1,2,3,4,5?

У цій задачі не має значення порядок розміщення двох цифр, які вибираємо із даних п'яти цифр, тобто способів вибору цифр буде $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3} = 10.$

Під час розв'язування комбінаторних задач зручно користуватися схемою:

Вибір формули для обчислення кількості сполук



*Вправа 1***.** Скількома способами можна скласти список із 6 учнів?

Оскільки порядок розміщення елементів враховується і всі елементи входять до сполуки, то $P_6 = 6! = 720.$ (способами).

Відповідь: 720 способами.

Вправа 2. Скількома способами можна розмістити 8 осіб за столом, біля якого стоїть 8 стільців?

Розв'язання

Оскільки порядок розміщення елементів враховується і всі елементи входять до сполуки, то $\mathrm{P}_8 = 8! = 403320$ (способами)

Відповідь: 403320 способами.

Вправа 3. Скільки існує трицифрових чисел, у яких всі цифри непарні й різні.

Розв'язання

Усього непарних цифр 5. Оскільки порядок враховується й до сполуки входять не всі цифри, а тільки три, то таких чисел буде. $\mathrm{A}_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60.$

Відповідь: 60.

Вправа 4. Скільки існує трицифрових чисел, у яких всі цифри парні й різні.

Розв'язання

Усього парних цифр 5. Тоді можна скласти трицифрових чисел усього A_5^3 , але серед них будуть і ті ,що мають нуль на першому місці. Таких «неправильних чисел» буде A_4^2. Отже, чисел, що нас цікавлять, буде $\mathrm{A}_5^3 - \mathrm{A}_4^2 = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = \frac{5!-4!}{2!} = \frac{120-24}{2} = \frac{96}{2} = 48.$

Відповідь: 48.

Домашнє завдання
П.14 -вивчити №14.2, 14.10, 14.14, 14.16

Виконання завдань сфотографувати та надіслати в HUMAN або на електронну пошту vikalivak@ukr.net