Дата: 26.01.2022

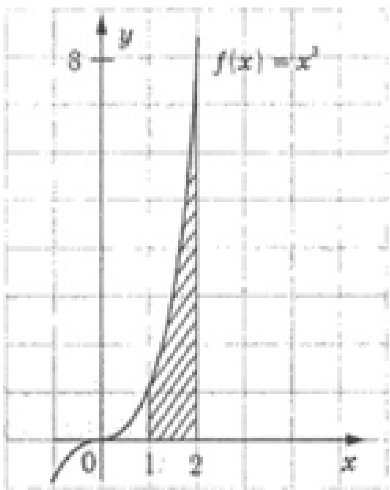
Клас 11-А

Тема Застосування інтеграла до обчислення площ геометричних фігур.

1. Знаходження площі криволінійної трапеції.

Враховуючи геометричний зміст визначеного інтеграла та формулу Ньютона – Лейбніца, площу криволінійної трапеції можна знаходити за допомогою визначеного інтеграла, а саме

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$



мал. 1

Приклад 1. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обчисленої графіком функції f(x) = x^3 та прямими y = 0; x = 1; x = 2.

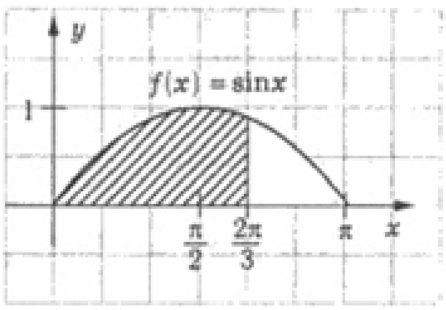
Розв’язання (мал. 1).

Маємо

$$\frac{1}{4} = 3\frac{3}{4} = 3{,}75 .$$

Приклад 2. Обчисліть площу криволінійної трапеції обмеженої графіком функції f(x) = sin x та прямими

$$y = 0;\ x = 0 \text{ та } x = \frac{2\pi}{3} .$$



Розв’язання

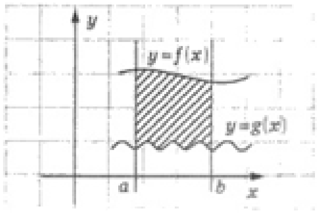
мал. 2

$$0 \qquad -\cos x\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = -\cos\frac{2\pi}{3} - (-\cos) =$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5 .$$

2. Знаходження площі фігури, обмеженої лініями

Розглянемо площу фігури, зверху обмежену графіком функцій y = f(x), знизу - графіком функції y = g(x) та вертикальними прямими x = a і x = b, причому функції y = f(x) і y = g(x) - неперервні на [a;b] і для всіх значень $x \in [a;b]$ виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$ (мал.3). Тоді площу S такої плоскої фігури можна знайти за формулою:



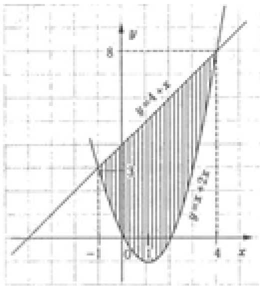
мал. 3

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

Приклад 3. Знайдіть площу фігури, обмежену графіками функцій $y = x^2 - 2x$ і $y = 4 + x$.

Розв'язання. Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій: $x^2 - 2x = 4 + x$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

Ординати точок перетину $y_1 = 3$; $y_2 = 8$. Зображуємо графіки функцій схематично (мал.4).



мал.4

Шукана площа

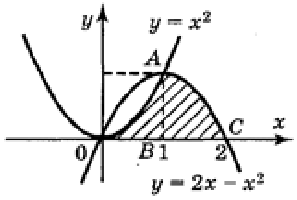
$$S = \int_{-1}^{4}\left((4+x) - \left(x^2 - 2x\right)\right)dx = \int_{-1}^{4}\left(4 - x^2 + 3x\right)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \left(4\cdot 4 - \frac{4^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot 4^2\right) - \left(4\cdot(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot(-1)^2\right) = 18\frac{2}{3} + 2\frac{1}{6} = 20\frac{5}{6}$$

Приклад 4. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ і $y = 2x - x^2$ та віссю *OX.*

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ *і* $y = 2x - x^2$ і знайдемо абсциси точок перетину цих графіків із рівняння: $x^2 = 2x - x^2$. Корені цього рівняння $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Дана фігура зображена на мал.5.



мал.5

Із рисунка видно, що ця фігура складається з двох криволінійних трапецій: *OAB* і *BAC.*

Отже, шукана площа дорівнює сумі площ цих трапецій:

$$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x-x^2)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2=1$$ *Відповідь: 1.*

Приклад 5. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+4$, $y=4-x$.

Знайдемо абсциси точок перетину ліній $y=-x^2+4$, $y=4-x$:

$-x^2+4=4-x;$

$x^2-x=0;$

$x(x-1)=0;$

$x_1=0$, $x_2=1$.

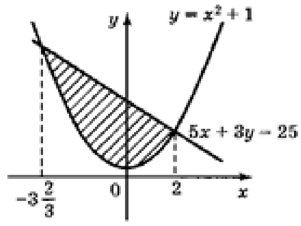
$$S=\int_0^1(-x^2+4-4-x)dx=\int_0^1(-x^2+x)dx=\left.\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$

Приклад 6. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2+1$ і $y=\frac{25-5x}{3}$

Знайдемо абсциси точок перетину ліній

$y=x^2+1$ і $y=\frac{25-5x}{3}$:



мал.6

$x^2+1=\frac{25-5x}{3}$; $3x^2+3=25-5x$;

$3x^2+5x-22=0$; $x_1=2$; $x_2=-3\frac{2}{3}$.

$$S=\int_{-3\frac{2}{3}}^{2}\left(\frac{25-5x}{3}-x^2-1\right)dx=\int_{-3\frac{2}{3}}^{2}\left(-x^2-\frac{5}{3}x+\frac{22}{3}\right)dx=\left.\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{5}{3}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{22}{3}x\right)\right|_{-\frac{11}{3}}^{2}=$$

$$=\left(-\frac{8}{3}-\frac{10}{3}-\frac{44}{3}\right)-\left(\frac{1331}{81}-\frac{605}{54}-\frac{242}{9}\right)=\frac{4913}{162}=30\frac{53}{162}.$$

Відповідь: $30\frac{53}{162}$.

Домашнє завдання

П.10-опрацювати, вивчити формули.

№10.10, 10.14

Виконання завдань сфотографувати та надіслати в HUMAN або на електронну пошту vikalivak@ukr.net