


Дата: 04.05.2022

Клас 11-А

Тема уроку: Дробово – раціональні рівняння та нерівності.

ДРОБОВІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ	
Схема розв'язування	
Розв'язування дробових рівнянь	Розв'язування дробових нерівностей
<b>Використання рівнянь-наслідків</b> 1. Зводимо рівняння до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ . 2. Знаходимо корені рівняння $f(x) = 0$ . 3. Виконуємо перевірку підстановкою коренів у початкове рівняння	<b>Використання рівносильних перетворень</b> 1. Фіксуємо ОДЗ початкового рівняння (нерівності). 2. Зводимо до вигляду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ( $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ ) і розв'язуємо його (її) на ОДЗ початкового рівняння (нерівності) або виконуємо рівносильні перетворення так, щоб увести зручну заміну змінної (див. табл. 41)
<b>Використання властивостей відповідних функцій</b> (див. табл. 43)	<b>Використання методу інтервалів</b> 1. Переносимо всі члени нерівності в один бік. 2. Зводимо до спільного знаменника, обов'язково зберігаючи знаменник. 3. Розв'язуємо методом інтервалів (див. табл. 40)
Рівносильні перетворення найпростіших дробових рівнянь і нерівностей	
У загальному вигляді	Приклад
$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$	$\frac{x^2 - 4}{x^3 - 5x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^3 - 5x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ або } x = -2, \\ x^3 - 5x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$
$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-1 < 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \text{ або } x < 1$
$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x > 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$
$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\frac{x-1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0, \\ x-2 > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-1 < 0, \\ x-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x > 2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \leq 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \text{ або } x \leq 1$
Приклад розв'язування дробової нерівності методом інтервалів	
$\frac{(x-1)(x-3)^2}{2-x} > 0$ 	1. ОДЗ: $x \neq 2$ . 2. Нулі функції: $f(x) = \frac{(x-1)(x-3)^2}{2-x} = 0$ при $x = 1$ або $x = 3$ . 3. Позначаємо нулі функції на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ у кожному інтервалі. <b>Відповідь:</b> $x \in [1; 2)$ або $x = 3$

# Раціональні нерівності

Нерівності виду  $\frac{P(x)}{Q(x)} \diamond 0$ , де  $P(x)$  і  $Q(x)$  — многочлени,  $\diamond$  — один зі знаків  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ , називають *дровово-раціональними*. Шляхом виконання рівносильних перетворень дробово-раціональну нерівність зводять до раціональної.

$$1) \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0;$$

$$2) \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0;$$

$$3) \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$$

$$4) \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

Приклад 1. Розв'язати нерівність  $(x-5)/(x+5) < x$ . У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

Розв'язання.

$$\frac{x-5}{x+5} < x \rightarrow \frac{x-5}{x+5} - x < 0 \rightarrow$$

$$\frac{x-5-x(x+5)}{x+5} < 0 \rightarrow$$

$$\frac{x-5-x^2-5x}{x+5} < 0 \rightarrow$$

$$\frac{-x^2-4x-5}{x+5} < 0 \rightarrow$$

$$\frac{x^2+4x+5}{x+5} > 0 \rightarrow$$

$$\frac{x^2+4x+4+1}{x+5} > 0 \rightarrow$$

$$\frac{(x+2)^2+1}{x+5} > 0$$

Вираз  $(x+2)^2+1 > 0$  більший нуля для будь-яких  $x$ , тому залежність (\*) рівносильна нерівності

$x+5 > 0$ , звідси  $x > -5$ .

Будуємо числову вісь та заштриховуємо потрібні значення

Множиною розв'язків є інтервал  $x \in (-5; +\infty)$ .

Звідси слідує, що число  $-4$  є найменшим цілим розв'язком нерівності.

Відповідь:  $-4$ .

**ЗНО 2014 (додаткова сесія № 6) (1 бал)**Розв'яжіть рівняння  $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2-3x}$ .

А	Б	В	Г	Д
-2	-0,4	2,5	0,4	2

**ЗНО 2011 (№11) (2 бала)**Розв'яжіть нерівність  $\frac{3x}{x+1} < \frac{7}{x+1}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$	$(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$

**ЗНО 2016 № 2 (2 бала)**Укажіть число, що є розв'язком нерівності  $\frac{5}{x-3} \geq 1$ .

А	Б	В	Г	Д
-2	0	2	9	4

**ЗНО 2011 (№11) (2 бала)**Розв'яжіть нерівність  $\frac{3x}{x+1} < \frac{7}{x+1}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1) \cup \left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$	$(-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{7}{3}\right)$	$\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$

Якщо необхідно, то перегляньте відео:

<https://www.youtube.com/watch?v=ZWwQozGv0xI>Виконати завдання наданні нижче в конспекті. Виконання сфотографувати на надіслати HUMAN в або на електронну пошту [vikalivak@ukr.net](mailto:vikalivak@ukr.net)