Chapitre 9 : fonctions du second degré

Seconde 11

1 Étude de la fonction carré

Nous allons étudier la **fonction carré** définie sur $\mathbb{R}$ comme :

$$f : x \mapsto x^2.$$

On peut aussi dire que pour tout nombre réel x, $f(x) = x^2$.

1.1 Courbe représentative

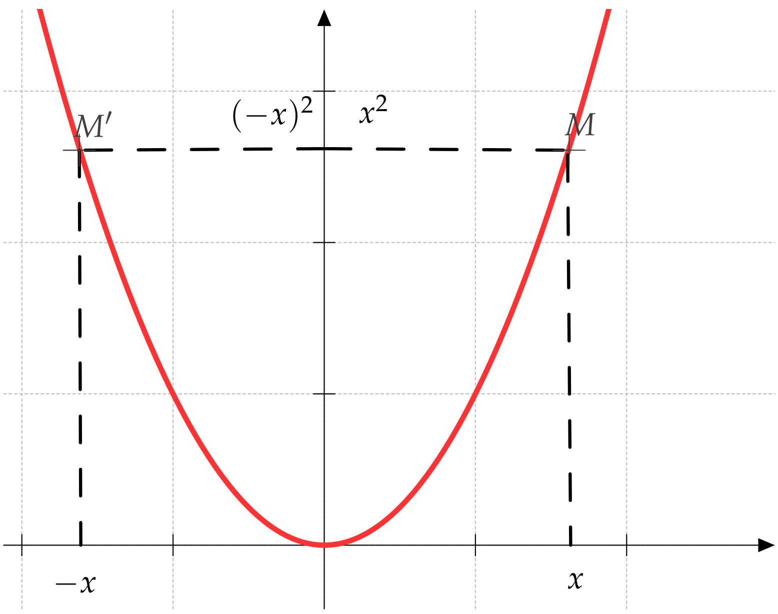


FIGURE 1 – Courbe représentative de la fonction carré dans un repère orthonormé.

Remarque : La courbe représentative de la fonction carré est une **parabole**.

Symétrie : On a, pour tout nombre réel $(-x)^2 =$. Donc les points $M(x; x^2)$ et $M'(x; (-x)^2)$ sont .

1.2 Signe et variation

Proposition 1 *Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, x^2 est positif.*

Proposition 2 *Sur $[0; +\infty[$ la fonction carré est strictement croissante, c'est à dire que, pour tout $0 \geq a < b$, $a^2 < b^2$.*

Sur $]-\infty; 0]$ la fonction carré est strictement décroissante, c'est à dire que, pour tout $a < b \leq 0$, $a^2 > b^2$.

On synthétise ces informations dans le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

1.3 Comparer des carrés

Enonçons une conséquence des variations de la fonction carré.

Théorème 1 *Si* $0 \leq a < b$*, alors* $a^2 < b^2$.
Si $0 \geq a > b$ *alors* $a^2 < b^2$.

Remarque : Pour se rappeler du théorème on raisonne directement sur le tableau de variation ou la courbe représentative. Exemple dans le cas $a < b \leq 0$

x	$-\infty$		a		b			$+\infty$
f		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	0 $\nearrow$	

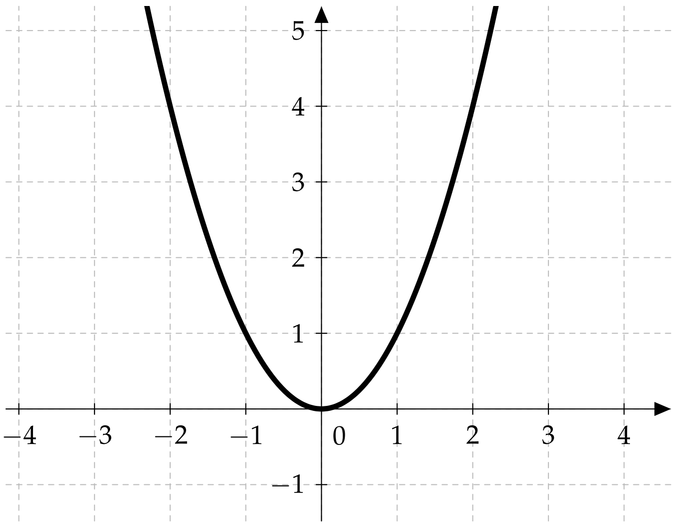
Exemples : Comparer les carrés des nombres suivants sans calculatrice

1. 2 et 4.
2. -1 et -2.
3. $10^{45} - 27$ et $10^{46} - 27$.
4. $-11 - 10^{-44}$ et $-11 - 10^{-43}$.

1.4 Utiliser la courbe pour résoudre une inéquation

Nous nous intéressons ici à la résolution de l'inéquation :

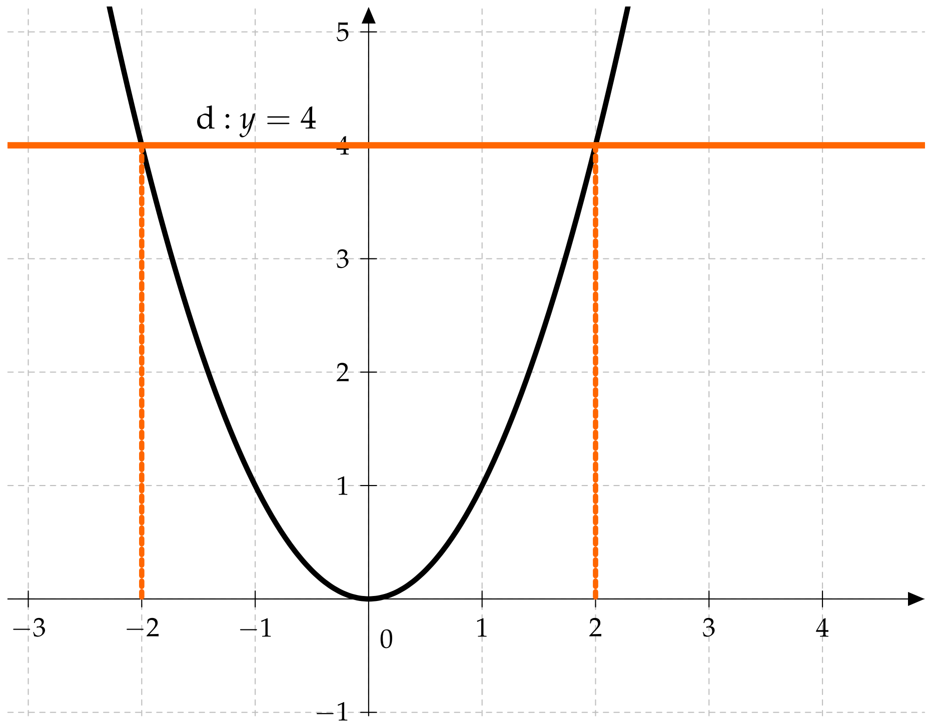
$$x^2 \leq 4.$$


5
4
3
2
1
−1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Utiliser la courbe pour résoudre une inéquation (version enseignant)

Nous nous intéressons ici à la résolution de l'inéquation :

$$x^2 \leq 4.$$

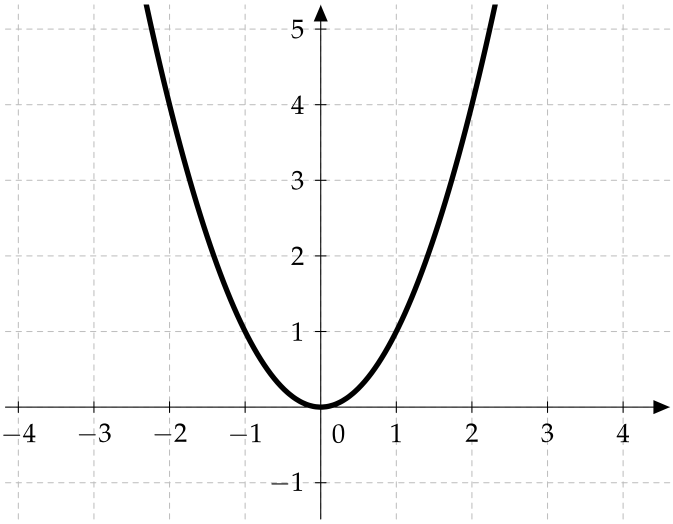


Méthode : On cherche tous les points de la parabole dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 4. Pour cela on trace la droite $d : y = 4$. Elle coupe la parabole en deux points de coordonnées $(2; 4)$ et $(-2; 4)$. On relève les abscisses des points de la parabole qui sont **en dessous** de la droite. Et on en déduit :

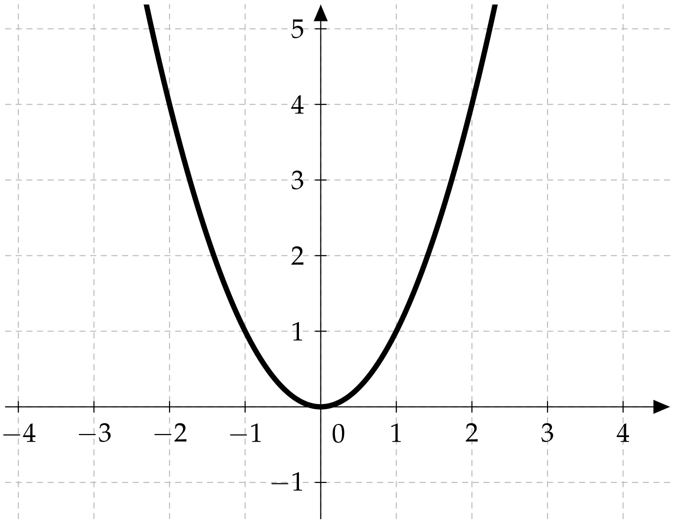
$$\mathcal{S} = [-2; 2].$$

A l'aide de la représentation graphique ci-dessous, résoudre l'inéquation suivante :

1. $x^2 \geq 2$.



1.5 Résoudre des équations à l'aide de la fonction carré



Théorème 2 *Soit k un nombre réel. On considère l'équation*

$$x^2 = k.$$

Cette équation a :

— 0 *solution si* $k < 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
— 2 *solutions si* $k > 0$, $\mathcal{S} = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$.
— 1 *solution si* $k = 0$, $\mathcal{S} = \{0\}$.

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations
— $x^2 = 4$.
— $x^2 = 2$.

2 Fonctions polynômes du second degré

2.1 Généralités

Définition 1 *Une fonction polynôme du second degré est une fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par une expression du type $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels, et $a \neq 0$.*

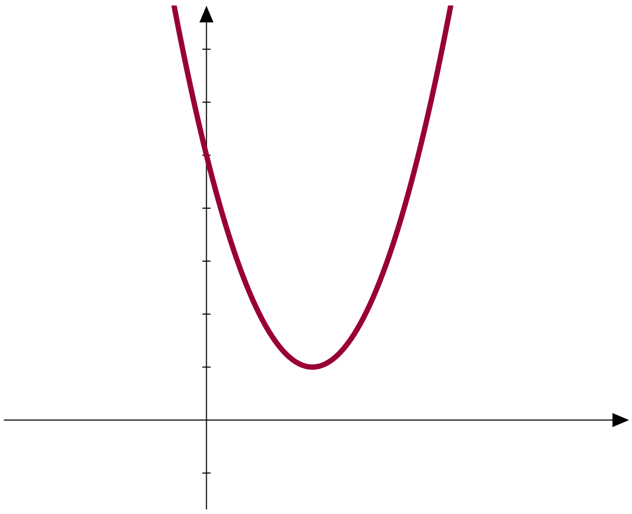
Exemples :

Dire si les fonctions suivantes sont ou non des fonctions polynômes du second degré, et, si c'est le cas, préciser les valeurs de a, b, c :

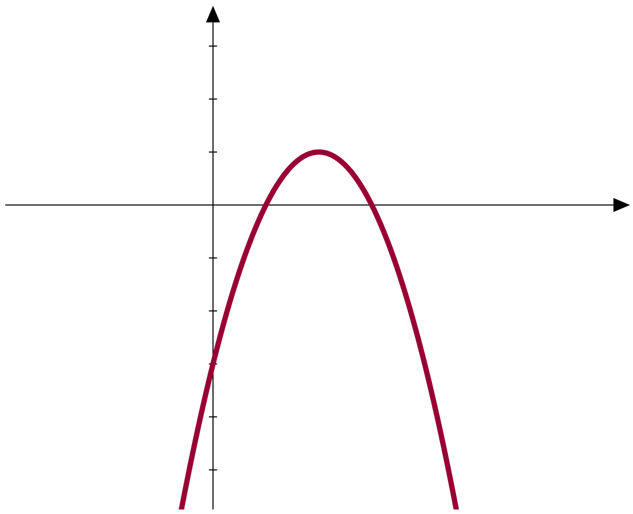
— $f(x) = 5x^2 + 3x + 2$.
— $h(x) = x^2 - 2x + 1$.
— $i(x) = 3x - 8$.
— $j(x) = 3x^2$.
— $k(x) = (x - 1)(2x + 2)$.
— $l(x) = 2(x - 1)^2 + 2$.

2.2 Représentation graphique

Remarque : La courbe représentative d'un polynôme du second degré est une symétrique par rapport à la droite d'équation .



Cas $a > 0$



Cas $a < 0$

2.3 Sens de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Cas $a > 0$, f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Cas $a < 0$, f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint en

2.4 Forme développée, forme canonique, forme factorisée

Définition 2 *On dit qu'une fonction polynôme du second degré f est sous la forme :*

1. *développée si $f(x) = ax^2 + bx + c$.*
2. *canonique si $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.*
3. *factorisée si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.*

Exemple : Vérifier que la forme canonique de $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$ est donnée par $3(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{27}{4}$ et que la forme factorisée est donnée par $3(x-1)(x+2)$.

Proposition 3 *Une fonction polynôme du second degré admet toujours une forme canonique. De plus les coefficients α et β sont liés à ceux de la forme développée :*

— $\alpha = \frac{-b}{2a}$.

— $\beta = f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-b^2}{4a} + c$.