A.C.P
EES N°1

Matemática
6to año A.

PROFESOR Fabio Godoy
Contacto: **Fagodoy1000@gmail.com**

Números complejos

En la sección 1.5 se vio que si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación no tiene solución real. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

no tiene solución real. Si se intenta resolver esta ecuación, se obtiene $x^2 = -4$, por lo tanto

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Pero esto es imposible, puesto que el cuadrado de cualquier número real es positivo. [Por ejemplo $(-2)^2 = 4$, un número positivo.] Así, los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

Para hacer posible que *todas* las ecuaciones cuadráticas tengan solución, los matemáticos inventaron un sistema de números desarrollado, llamado *sistema de números complejos*. Primero, definieron el número

$$i = \sqrt{-1}$$

Esto significa que $i^2 = -1$. Un número complejo es entonces un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

Definición de números complejos

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La **parte real** de este número complejo es a y la **parte imaginaria** es b. Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Hay que observar que las partes real e imaginaria de un número complejo son números reales.

Ejemplo 1 **Números complejos**

Los siguientes son ejemplos de números complejos.

$3 + 4i$	Parte real 3, parte imaginaria 4
$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$	Parte real $\frac{1}{2}$, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$
$6i$	Parte real 0, parte imaginaria 6
-7	Parte real -7, parte imaginaria 0

■

Un número como $6i$, que tiene parte real 0, se llama **número imaginario puro.** Un número real como -7 se puede considerar como un número complejo con parte imaginaria 0.

En el sistema de números complejos toda ecuación cuadrática tiene soluciones. Los números $2i$ y $-2i$ son soluciones de $x^2 = -4$ porque

$$(2i)^2 = 2^2 i^2 = 4(-1) = -4 \qquad \text{y} \qquad (-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = 4(-1) = -4$$

Aunque se usa el término *imaginario* en este contexto, los números imaginarios no deben ser considerados como algo menos "real" (en el sentido ordinario más que matemático de la palabra) que los números negativos o irracionales. Todos los números (excepto posiblemente los enteros positivos) son creaciones de la mente humana, los números -1 y $\sqrt{2}$ así como el número i. Se estudian los números complejos porque completan, de un modo útil y elegante, el estudio de las soluciones de ecuaciones. De hecho, los números imaginarios son útiles no sólo en álgebra y matemáticas, sino en otras ciencias también. Para dar sólo un ejemplo, en teoría eléctrica la *reactancia* de un circuito es una cantidad cuya medida es un número imaginario.

Operaciones matemáticas sobre números complejos

Los números complejos se suman, restan, multiplican y dividen del mismo modo como se haría con cualquier número de la forma $a + b\sqrt{c}$. La única diferencia que se requiere tener en mente es $i^2 = -1$. Así, los cálculos siguientes son válidos.

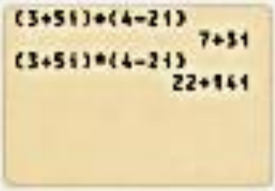
$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + (ad + bc)i + bdi^2 && \text{Multiplique y reúna los términos semejantes} \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) && i^2 = -1 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i && \text{Combine las partes reales y las imaginarias} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se define la suma, diferencia y el producto de números complejos como sigue.

Sumar, restar y multiplicar números complejos

Definición	Descripción
Suma	
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	Para sumar números complejos, sume las partes reales y las partes imaginarias.
Resta	
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	Para restar números complejos, reste las partes reales y las partes imaginarias.
Multiplicación	
$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	Multiplique los números complejos como binomios, con $i^2 = -1$.

Las calculadoras para gráficas pueden efectuar operaciones aritméticas en números complejos.



Ejemplo 2 **Suma, resta y multiplicación de números complejos**

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

a) $(3 + 5i) + (4 - 2i)$ b) $(3 + 5i) - (4 - 2i)$

c) $(3 + 5i)(4 - 2i)$ d) i^{23}

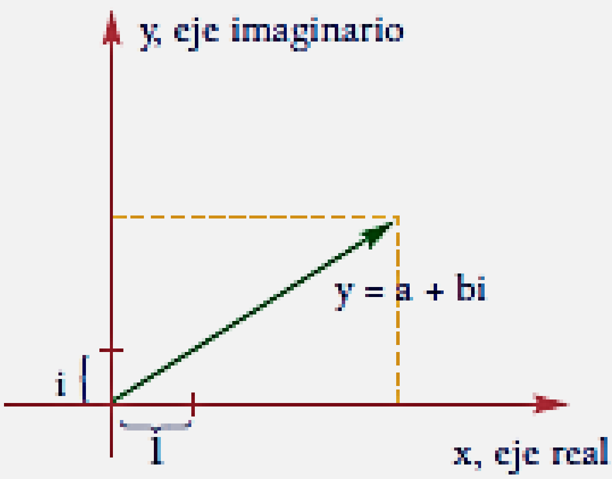
Solución

a) De acuerdo con la definición, se suman las partes reales y las partes imaginarias.

$$(3 + 5i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + (5 - 2)i = 7 + 3i$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN COMPLEJO

1) REPRESENTACIÓN CARTESIANA



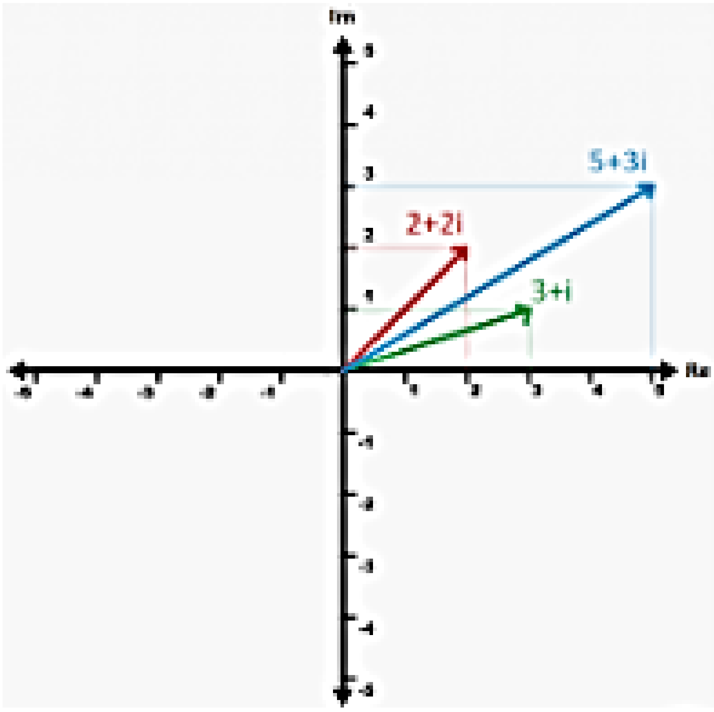
Sea: $y = a + bi$

Unidad sobre el eje y: i

Unidad sobre el eje x: 1

Forma		
Binómica	Cartesiana	Polar
Z= a +bi	Z=(a;b)	$Z=\|Z\|_{\alpha}$

Ejemplos	
Binómica	Cartesiana
Z= a +bi	Z=(a;b)
$Z_1=2+2i$	$Z_1= (2;2)$
$Z_2=5+3i$	$Z_2=(5;3)$
$Z_3=3+i$	$Z_3=(3;1)$



Actividades

1.Para los siguientes números complejos en forma binómica, dar la expresión cartesiana y graficarlos:

a) $z_1=2+3i$
b) $z_2=4i$
c) $z_3=5$
d) $z_4=-3+5i$
e) $z_5=-3i$
f) $z_6=4-i$
g) $z_7=3+3i$
h) $z_8=-4-3i$
i) $z_9=5-2i$

2.Realiza la operación indicada:

11–22 ■ **Llevar a cabo la suma o resta y escribir el resultado en la forma $a + bi$.**

11. $(2 - 5i) + (3 + 4i)$

12. $(2 + 5i) + (4 - 6i)$

13. $(-6 + 6i) + (9 - i)$

14. $(3 - 2i) + \left(-5 - \frac{1}{3}i\right)$

15. $3i + (6 - 4i)$

16. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)$

17. $\left(7 - \frac{1}{2}i\right) - \left(5 + \frac{3}{2}i\right)$

18. $(-4 + i) - (2 - 5i)$

19. $(-12 + 8i) - (7 + 4i)$

20. $6i - (4 - i)$

21. $\frac{1}{3}i - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}i\right)$

22. $(0.1 - 1.1i) - (1.2 - 3.6i)$