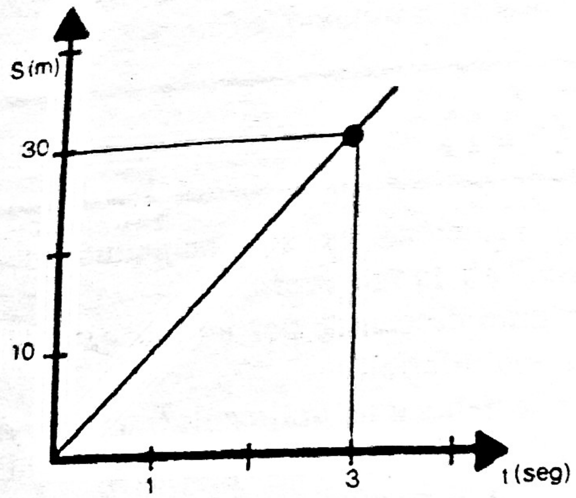
auto.

En el gráfico adjunto [illegible] distancia recorrida en función del tiempo.



Responde

a) ¿Cuál es la velocidad del móvil?
b) ¿Qué distancia recorrió en 2 horas y media?
c) ¿Cuál es el tiempo en recorrer 60 km (M)?
d) ¿En qué tiempo habrá recorrido 450 km (N)?

[illegible] un nudo en [illegible] cuál a

La luz solar necesita 8,3 minutos en llegar a la Tierra. Si la velocidad de la luz es de 300.000 km/seg, ¿cuál es la distancia Tierra-Sol?

Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme con velocidad de 30 m/seg. Realiza el gráfico en:

a) un sistema de ejes v-t,
b) el sistema de ejes s-t.

Un móvil posee una velocidad constante de 30 m/seg:

a) representa la gráfica en el sistema s-t para 1, 2 y 3 segundos.
b) ¿cuál es la distancia recorrida en 2,5 segundos?

Establece cuál de los siguientes móviles se desplaza con mayor velocidad, el que marcha a razón de 125 km/h o el que lo hace a 45m/seg.

¿Cuál es el tiempo empleado por un móvil que se desplaza con velocidad constante de 75 km/h para cubrir una distancia de 25.000 metros?

MOVIMIENTOS VARIADOS

En la vida diaria, el tren, el automóvil, el microómnibus, no pueden por diversas razones (intensidad del tránsito, ascenso y descenso de pasajeros, cortes en el tránsito, mal estado del camino, etc.) mantener una velocidad constante, es decir, la velocidad resulta variable respecto del tiempo. Esta circunstancia nos lleva a la definición de un nuevo conocimiento que denominamos *movimiento variado* (fig. 11-15).

Movimiento variado es el que posee el móvil cuya velocidad no es constante.

Así, si:

al fin de la 1ª hora la velocidad es 30 km/h (A)

al fin de la 2ª hora la velocidad es 45 km/h (B)

al fin de la 3ª hora la velocidad es 70 km/h (C)

al fin de la 4ª hora la velocidad es 50 km/h (D)

al fin de la 5ª hora la velocidad es 100 km/h (E)

El móvil posee un movimiento variado, pues su velocidad no guarda ninguna proporcionalidad respecto del tiempo transcurrido.

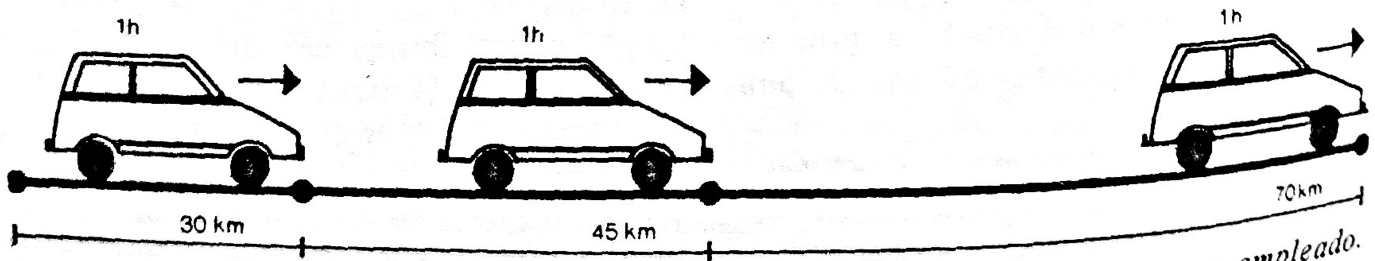


Fig. 11-15. *Movimiento variado. La velocidad varía sin relación al tiempo empleado.*

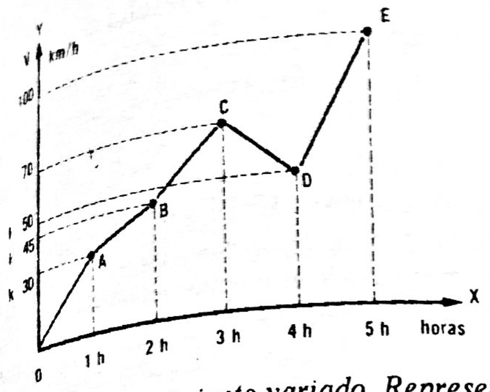


Fig. 11-16. *Movimiento variado. Representación gráfica.*

De acuerdo con los datos del ejemplo dado, podríamos representar ese movimiento variado (fig. 11-16) en un sistema de coordenadas, en el cual las abscisas son los tiempos y las ordenadas las velocidades

Isaac Newton

Matemático y físico inglés. Nacido el 25 de diciembre de 1642. A los 15 años estaba entregado ya a la lectura de obras de Física y Matemática y a los 22 años es considerado ya como un cerebro sin precedentes.

Su inmortal descubrimiento de la atracción universal data del año 1665, es decir cuando contaba 23 años.

Cuando da a conocer la teoría de la luz expresa: "El blanco es el color común de la luz, pues la luz es la suma de todos los colores". Newton es sin duda uno de los estudiosos que han hecho evolucionar la ciencia con ritmo fuera de lo común. Falleció a los 85 años.

Como en el caso del movimiento uniforme, el área de la figura limitada por la curva obtenida representa el espacio recorrido por el móvil (fig. 11-17).

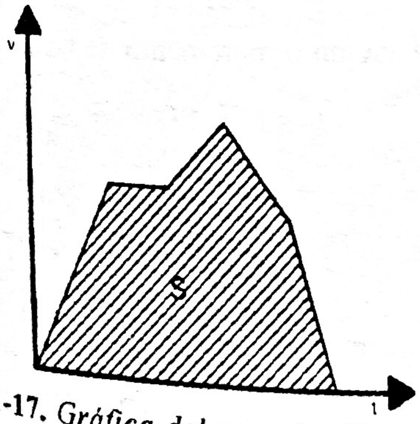


Fig. 11-17. *Gráfica del espacio. Siempre está dada por el área de la figura limitada por la curva obtenida.*

Atento a que la velocidad es una magnitud vectorial, podemos ampliar el concepto de movimiento variado.

En efecto, el movimiento será variado si se modifica el sentido, o la dirección o la intensidad de la velocidad que posee el móvil.

Por ejemplo: un automóvil va por un camino hacia el norte a 35 km/h y sin modificar este valor dobla hacia el este. Cambió su dirección, luego es un movimiento variado.

Velocidad media

Cuando decimos que la distancia entre Buenos Aires y Córdoba ha sido cubierta a una velocidad de 180 km/h, estamos expresando un valor medio de la velocidad. Es decir, consideramos como si en toda su trayectoria el vehículo se hubiera desplazado con velocidad constante (movimiento uniforme) de 180 km/h aunque sabemos bien que esa velocidad constante habrá sido variable (movimiento variado). Para determinar esa velocidad, procedemos a dividir la distancia recorrida por el tiempo total empleado, cociente que responde a la definición de movimiento uniforme.

Por tanto, decimos:

Velocidad media o velocidad promedio entre dos puntos de una trayectoria es la velocidad a que, con movimiento uniforme, hubiera recorrido esa distancia en igual tiempo.

Supongamos un tren que pase por el pueblo A (fig. 11-18), situado a 200 km de Buenos Aires a las 15, y por el pueblo B, situado a 650 km, también de Buenos Aires, a las 20. Para obtener la velocidad promedio entre dichos puntos deberemos dividir la distancia que separa ambos pueblos por el tiempo empleado.

Es decir,

$$v_m = \frac{e_B - e_A}{t_2 - t_1} \qquad (1)$$

$e_B - e_A$: distancia entre los dos pueblos

luego

$$e_B - e_A = AB = 650\text{km} - 200\text{km} = 450\text{km}$$

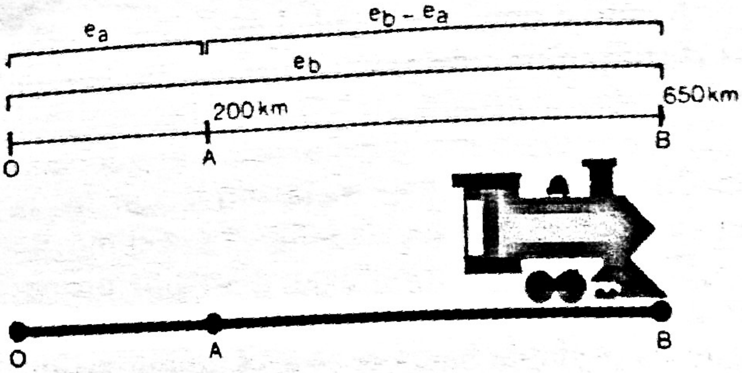


Fig. 11-18. *Velocidad media.*

$$t_2 - t_1$$

es el tiempo transcurrido en cubrir esa distancia, luego

$$t_2 - t_1 = 20h - 15h = 5h$$

luego

$$v_m = \frac{450 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Valor que nos está dando idea de que el trayecto AB lo habría recorrido en todos sus puntos con una velocidad constante de 90 km/h.

La velocidad promedio puede calcularse también según la expresión

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Velocidad instantánea

Denominamos velocidad instantánea a la velocidad de un móvil en cierto instante o en un determinado punto de su trayectoria.

Sabemos que la velocidad media es:

$$v_m = \frac{e_B - e_A}{t_2 - t_1}$$

Si hablamos de la velocidad instantánea, $e_B - e_A$ tiende a hacerse cero, pues la distancia entre los 2 puntos es la mínima, y hemos hablado de velocidad en un punto.

Del mismo modo $t_2 - t_1$ tiende a cero, pues la variación de tiempo también es mínima. Es decir, que su valor tiende a cero. Ello representa el tiempo en el instante en que el móvil pasa por ese punto.

De ese somero análisis resulta que:

Velocidad instantánea en un punto de la trayectoria es la velocidad durante un espacio infinitamente pequeño que incluya al punto.

La circunstancia de que tengamos que dividir espacios infinitamente pequeños por tiempos también muy pequeños no significa que el cociente deba ser una cantidad pequeña.

Por ejemplo:

si

$$e = 0{,}54 \text{ cm}$$

y

$$t = 0{,}009 \text{ seg}$$

es

$$v = \frac{0{,}54 \text{ cm}}{0{,}009 \text{ seg}} = 60 \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

Aceleración

Sabemos que, en general, un cuerpo se desplaza con movimiento variado, sin que la velocidad guarde relación con respecto al tiempo transcurrido; es decir a cada unidad de tiempo corresponde una velocidad distinta.

Supongamos (fig. 11-19) que al pasar por A, el móvil tenga una velocidad v_1, y al pasar por B, la velocidad sea v_2, mientras que el tiempo empleado en cubrir esa distancia AB fuera

$$t = t_2 - t_1.$$

Si

$$v_2 - v_1$$

es la variación o incremento de velocidad, y

$$t_2 - t_1$$

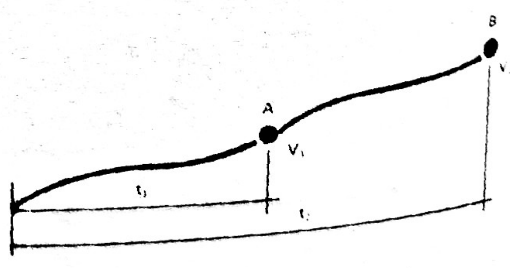


Fig. 11-19. *Aceleración.*

el tiempo transcurrido, el cociente

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

nos da la variación de velocidad por unidad de tiempo, cociente que llamamos *aceleración*.

Luego definimos así la aceleración:

Aceleración es el incremento de velocidad (aumento o disminución), por unidad de tiempo.

Puede decirse también:

Aceleración es el cociente entre la variación de velocidad y el tiempo en que se produce esa variación.

En símbolos:

$$a = \frac{\Delta v}{t} \qquad (1)$$

Δv: incremento de velocidad; *
a: aceleración;
Δt: incremento de tiempo;

*Δ, delta. Simboliza incremento o variación.

Puede ocurrir que Δv sea positivo o negativo según que:

$$v_2 > v_1$$
$$v_2 < v_1$$

Si la aceleración es *positiva*, el movimiento es *acelerado*, si en cambio fuera negativa, el movimiento será *retardado*.

Unidades de aceleración

Si

$$a = \frac{v}{t}$$

es

$$\text{unidad de aceleración} = \frac{\text{unidad de velocidad}}{\text{unidad de tiempo}}$$

o sea:

$$[a] = \frac{\frac{\text{m}}{\text{seg}}}{\text{seg}} = \frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$$

$$[a] = \frac{\frac{\text{cm}}{\text{seg}}}{\text{seg}} = \frac{\text{cm}}{\text{seg}^2}$$

$$[a] = \frac{\frac{\text{km}}{\text{h}}}{\text{h}} = \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$$

Al expresar que la aceleración de un móvil es de 7 cm/seg^2 entendemos que la variación de velocidad es de 7 cm/seg cada segundo (fig. 11-20).

Si la aceleración es de 30 km/h^2 significa que la velocidad sufre una variación de 30 km/h, cada hora.

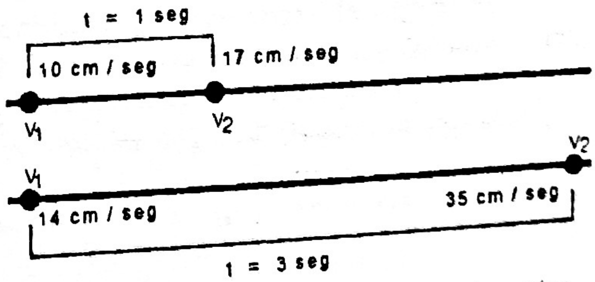


Fig. 11-20. *Aceleración. Cociente entre velocidad y tiempo.*

evaluación

Define

Movimiento variado.
Aceleración.
Velocidad instantánea.
Velocidad media.

Has comprendido

Si el velocímetro de un automóvil marca constantemente 60 km/h, ¿significa que no tiene aceleración?

¿El odómetro* de un automóvil mide una magnitud escalar o una vectorial? ¿Y el velocímetro?

Menciona tres casos de movimiento variado.

De acuerdo con la expresión de aceleración: $a = \Delta V/\Delta t$ indica las unidades para la misma.

Analiza

¿Cuál de las siguientes expresiones es correcta?

$$a = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t};\ a = \frac{V_2 - V_1}{\Delta t};\ a = (V_t - V_0)\,\Delta t$$

Dados los siguientes valores: 10 m/seg y 10 m/seg², indica cuáles son sus diferencias.

Un móvil parte del reposo y tiene una velocidad de 30 m/seg en el primer segundo; al fin del 2º segundo la velocidad es de 70 m/seg; al fin del tercer segundo es de 25 m/seg; al cuarto segundo la velocidad es de 18 m/seg; al fin del quinto segundo es de 80 m/seg; al sexto segundo es de 20 m/seg y al 7º segundo se detiene.

Representa esos valores en un sistema de ejes v-t e indica:

a) ¿qué significa decir que a = 20 m/seg²? ¿Y 30 km/h²?

b) ¿qué tipo de movimiento tiene el móvil?

c) ¿cuál es su velocidad a los 2,5 segundos?

d) ¿la aceleración del móvil es constante o variable?

Un coche se desplaza hacia el este a 40 km/h y otro hacia el norte a 40 km/h. ¿Son iguales sus velocidades? (Justifica tu respuesta.)

Resuelve

Un móvil pasa por un punto A de su trayectoria a razón de 40 m/seg y luego por un punto B a 65 m/seg.

¿Cuál es el valor de la aceleración entre esos puntos de la trayectoria si han transcurrido 5 segundos?

Si ese móvil aplica los frenos cuando su velocidad es de 20 m/seg y se detiene a los 2 segundos, ¿cuál es la aceleración durante la frenada?

* Odómetro: aparato para determinar distancias.

MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO

Estudio cinemático

Estudiaremos el movimiento rectilíneo uniformemente variado desde el punto de vista cinemático, es decir sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Imaginemos un móvil que se desplaza por una carretera rectilínea (fig. 11-21) de tal modo que:

al fin de la 1ª hora su velocidad es 70 km/h
al fin de la 2ª hora su velocidad es 90 km/h
al fin de la 3ª hora su velocidad es 110 km/h
al fin de la 4ª hora su velocidad es 90 km/h
al fin de la 5ª hora su velocidad es 70 km/h
al fin de la 6ª hora su velocidad es 50 km/h
al fin de la 7ª hora su velocidad es 70 km/h

Observemos que, por cada unidad de tiempo —1 hora—, se produce un aumento o una disminución de velocidad de 20 km/h.

Este tipo de movimiento se denomina *movimiento rectilíneo uniformemente variado* (M.R.U.V.).

Movimiento rectilíneo uniformemente variado es el que posee el móvil cuya velocidad aumenta o disminuye cantidades iguales en tiempos iguales.

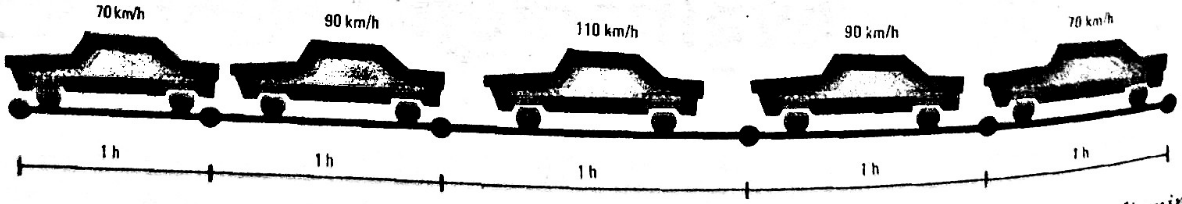


Fig. 11-21. *Movimiento rectilíneo uniformemente variado. La velocidad aumenta o disminuye. Cantidades iguales en tiempos iguales.*

Hemos definido ya que aceleración es el incremento o variación de velocidad por unidad de tiempo.

En el caso del movimiento uniformemente variado, ese incremento de velocidad es siempre el mismo. Para el ejemplo dado, 20 km/h cada hora.

Por tanto:

En el movimiento uniformemente variado, la aceleración es constante.

Puede ocurrir que la aceleración sea positiva o negativa, es decir, que por cada unidad de tiempo se verifique un aumento o una disminución constante de velocidad. Esta posibilidad nos permite clasificar al movimiento uniformemente variado en:

a) movimiento uniformemente acelerado,

y

b) movimiento uniformemente retardado.

Movimiento uniformemente acelerado

Es aquel en el cual la velocidad aumenta cantidades iguales en cada unidad de tiempo (fig. 11-22).

Movimiento uniformemente retardado

Es el que tiene el móvil cuya velocidad disminuye cantidades iguales en cada unidad de tiempo. En este caso la aceleración es un vector de sentido contrario al vector velocidad, es decir la aceleración es negativa (–a) respecto de la velocidad, de ahí que la velocidad vaya disminuyendo.

Velocidad en el movimiento rectilíneo uniformemente variado

Como

$$a = \Delta v / \Delta t$$

resulta

$$\Delta v = a \ \Delta t$$

y

$$\Delta t = \Delta v / a$$

La expresión

$$\Delta v = a \ \Delta t$$

es válida para el caso en que el móvil parta del reposo, es decir, que, conforme inicia su movimiento, es uniformemente variado. En estas condiciones se dice que el móvil no posee velocidad inicial.

Supongamos ahora que el móvil llega a un punto de su trayectoria con cierta velocidad y a partir de ese punto hace su movimiento uniformemente variado; diremos entonces que posee velocidad inicial.

En las carreras de bicicletas a "la americana" o en las pruebas de motos del "kilómetro lanzado" se produce este fenómeno. Es decir, que, llegado el móvil a cierto punto de la trayectoria, con determinada velocidad (la inicial) comienza a hacer su movimiento uniformemente acelerado.

En ese instante —tiempo cero— comienza a considerarse el tiempo transcurrido.

La velocidad inicial es la que posee el móvil en el instante en que se inicia su movimiento uniformemente variado.

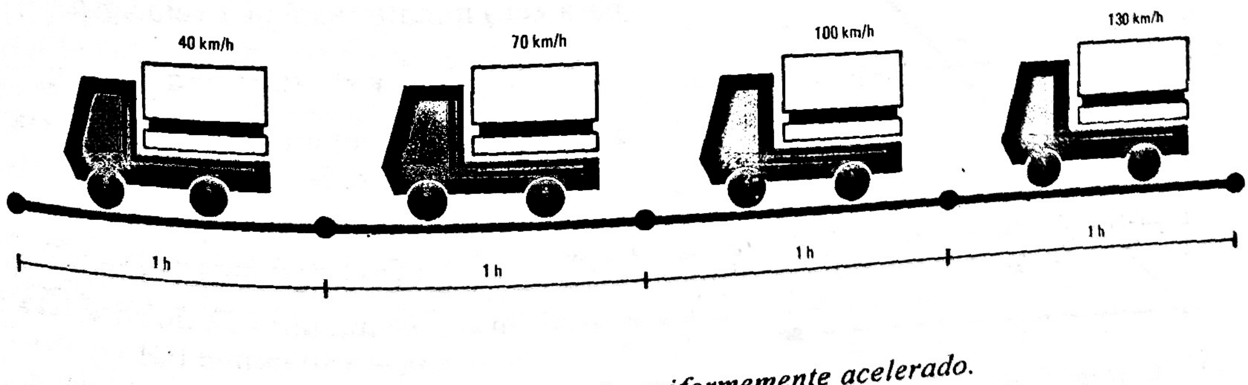


Fig. 11-22. *Movimiento uniformemente acelerado.*

Por tanto, después de cierto tiempo Δt, la velocidad adquirida será:

$$v_f = v_i + a \ \Delta t$$

v_f: velocidad final;
v_i: velocidad inicial;
a: aceleración;
Δt: tiempo transcurrido.

Deducción matemática de velocidad final

Si

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

es

$$a = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

pasemos Δt al otro miembro

o sea: $a \ \Delta t = v_f - v_i$

luego

$$v_f = v_i + a \ \Delta t$$

Es decir, la velocidad que poseía, más (o menos) la que se desarrolla en su movimiento uniformemente variado.

Aparece claro que *un movimiento acelerado puede tener velocidad inicial o no tenerla.* En cambio, *en el movimiento uniformemente retardado es imprescindible que exista velocidad inicial,* ya que, si no, no puede hacerse retardado. En el caso de la frenada de un móvil, si no hubiera velocidad inicial, ya estaría frenado.

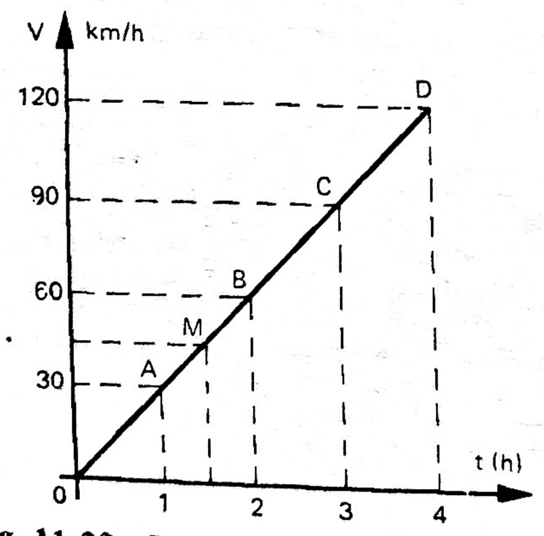


Fig. 11-23. *Representación gráfica de la velocidad en función del tiempo (1ª ley).*

En realidad, como el tiempo Δt se refiere al empleado por el móvil en su movimiento uniformemente variado, podemos dar la siguiente definición:

Velocidad inicial *es la que posee el móvil en el instante "cero segundo".*

El instante cero es el instante en que el movimiento comienza a hacerse uniformemente acelerado.

Representación gráfica de la velocidad en un movimiento rectilíneo uniformemente variado

1º Representación de la velocidad en función del tiempo (fig. 11-23).

Velocidad inicial: cero (parte del reposo).

Sean las velocidades

$v_1 = 30$ km/h (punto A) a la 1ª hora
$v_2 = 60$ km/h (punto B) a la 2ª hora
$v_3 = 90$ km/h (punto C) a la 3ª hora
$v_4 = 120$ km/h (punto D) a la 4ª hora

Al unir los puntos A, B, C y D se obtiene una recta con origen O, tal que cualquiera de sus puntos nos indica los valores correspondientes de la velocidad y del tiempo. Así, para un punto M, la velocidad es de 45 km/h, y el tiempo transcurrido es una hora y media.

2º Representación de la velocidad de un móvil, con velocidad inicial (fig. 11-24).

En el instante "cero", es decir, al comenzar su movimiento uniformemente acelerado, el móvil posee una velocidad inicial de: 40 m/min, y su aceleración es $a = 30$ m/min², para cero minuto tiene una velocidad:

$$v_i = 40 \text{ m/min}$$

así, al fin del 1er minuto su velocidad será:

$v_1 = 70$ m/min (A)

al fin del 2º minuto su velocidad será:

$v_2 = 100$ m/min (B)

al fin del 3er minuto su velocidad será:

$v_3 = 130$ m/min (C)

al fin del 4º minuto su velocidad será:

$v_4 = 160$ m/min (D)

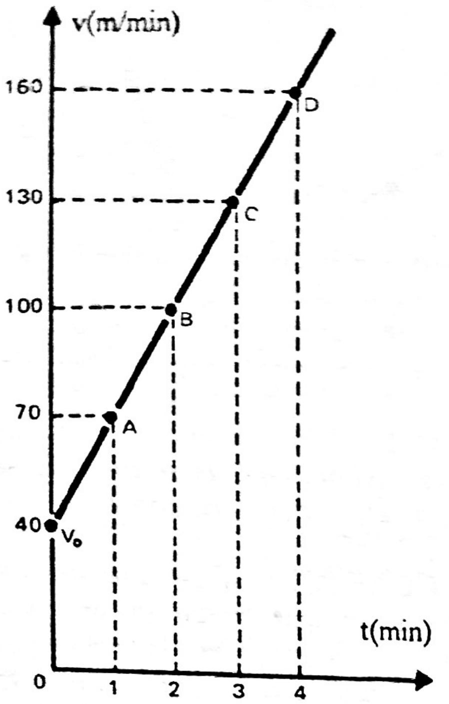


Fig. 11-24. *Gráfica de la velocidad con velocidad inicial.*

se obtiene como gráfico una recta con origen en v_1 "instante cero".

3º Representación gráfica de la velocidad en un movimiento uniformemente retardado (fig. 11-25).

En el momento de hacer su movimiento uniformemente retardado su velocidad inicial es:

$$v_i = 60 \text{ m/seg}$$

y la aceleración a:

$$a = -5 \text{ m/seg}^2$$

por tanto,
al fin del 1^er^ segundo será $v_1 = 55$ m/seg (A)
al fin del 2º segundo será $v_2 = 50$ m/seg (B)
al fin del 3^er^ segundo será $v_3 = 45$ m/seg (C)
al fin del 4º segundo será $v_4 = 40$ m/seg (D)
al fin del 5º segundo será $v_5 = 35$ m/seg (E)

La representación es también una recta.

Obsérvese la inclinación respecto de los casos anteriores. Esta nueva inclinación nos permite "ver" que es un movimiento retardado.

Cuando el móvil se detiene ($v_f = 0$) la recta corta al eje X.

4º Representación de tres o más movimientos uniformemente acelerados en un gráfico.

Velocidad inicial: cero (fig. 11-26).

1^er^ Móvil.

Su aceleración es:

$$a_1 = 5 \text{ m/seg}^2$$

luego

$$v_1 = 5 \text{ m/seg (A)}$$
$$v_2 = 10 \text{ m/seg (B)}$$
$$v_3 = 15 \text{ m/seg (C)}$$
$$v_4 = 20 \text{ m/seg (D)}$$

2º Móvil.

Su aceleración es:

$$a_2 = 10 \text{ m/seg}^2$$

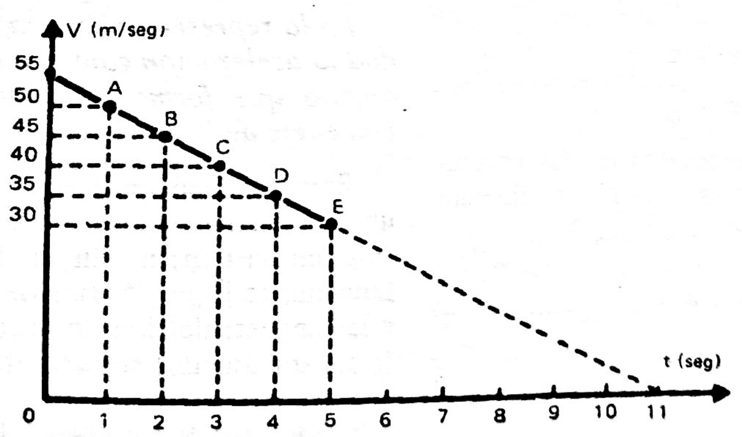


Fig. 11-25. *Movimiento uniformemente retardado. Representación gráfica de la velocidad.*

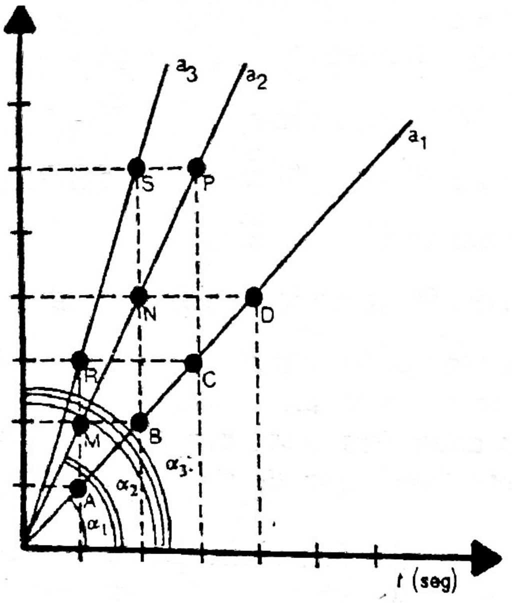


Fig. 11-26. *Movimiento uniformemente acelerado. Representación de velocidades con distintas aceleraciones. A mayor aceleración mayor ángulo α.*

luego

$$v'_1 = 10 \text{ m/seg (M)}$$
$$v'_2 = 20 \text{ m/seg (N)}$$
$$v'_3 = 30 \text{ m/seg (P)}$$
$$v'_4 = 40 \text{ m/seg}$$

3er Móvil.
Su aceleración es:

$$a_3 = 15 \text{ m/seg}^2$$

luego

$$v''_1 = 15 \text{ m/seg (R)}$$
$$v''_2 = 30 \text{ m/seg (S)}$$
$$v''_3 = 45 \text{ m/seg}$$
$$v''_4 = 60 \text{ m/seg}$$

De las representaciones realizadas resulta que las distintas rectas obtenidas forman ángulos diferentes respecto del eje X.

Es evidente que ese ángulo depende del valor de la aceleración, o sea:

$$\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$$

pues

$$a_3 > a_2 > a_1$$

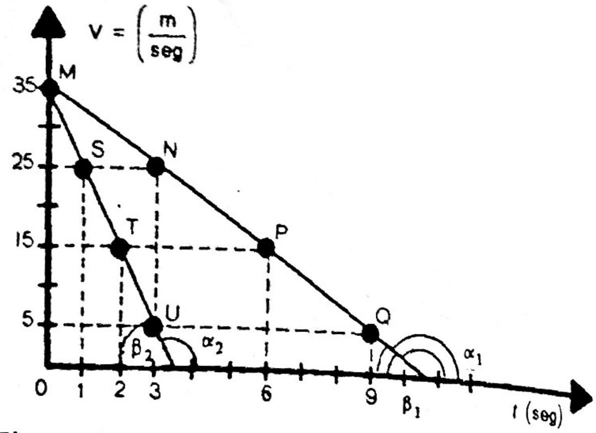


Fig. 11-27. *Movimiento uniformemente retardado. El ángulo que se produce es obtuso, por ello la aceleración es negativa.*

EN CONSECUENCIA: *cuanto mayor es la aceleración que posee el móvil, resulta mayor el ángulo que forma la recta representativa con el eje del tiempo (eje de las abscisas).*

Ahora bien,

$$a = \frac{v}{t}$$

como

v resulta ser ordenada

y

t resulta ser abscisa

es

$$a = \frac{v}{t} = \frac{\text{ordenada } (v)}{\text{abscisa } (t)} = \text{tg } \alpha^*$$

luego

$$a_1 = \text{tg } \alpha_1$$
$$a_2 = \text{tg } \alpha_2$$
$$a_3 = \text{tg } \alpha_3$$

Por tanto:

En la representación gráfica de la velocidad la aceleración equivale a la tangente del ángulo que forma la recta representativa con el eje de los tiempos (abscisas).

Para el caso en que el movimiento sea uniformemente retardado, también se cumple esta circunstancia. En la figura 11-27, la tangente de β (inclinación de la recta) es igual a la tangente del ángulo α con signo negativo (pues son ángulos suplementarios);

* Recuerda: ordenada sobre abscisa da la función trigonométrica tangente.

luego $\quad \operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha$

y por ello $\quad a = -\operatorname{tg}\alpha$ *

Cálculo del espacio en un movimiento rectilíneo uniformemente variado

Recordemos que el área de la figura determinada por la representación gráfica de la velocidad nos da el espacio o distancia recorrida por el móvil.

En consecuencia, *en el movimiento rectilíneo uniformemente variado, también el espacio equivale al área determinada en la gráfica de la velocidad.*

Para el caso del movimiento uniformemente acelerado con velocidad inicial (fig. 11-28), la gráfica obtenida es el trapecio OAMT.

Luego:

Area OAMT = espacio recorrido.

Pero el trapecio OAMT está formado por el triángulo $\overset{\Delta}{AMC}$ más el rectángulo $\overset{\square}{ACTO}$.

Llamemos e al espacio total, e_1 al espacio representado por el rectángulo y e_2 al representado por el triángulo y tendremos que

$$e = e_1 + e_2 \qquad (1)$$

pero

$$e_1 = B \times h$$

(sup. rectángulo)

donde

$$B = t$$

y

$$h = v_i$$

luego

$$e_1 = t\ v_i$$

o bien

$$e_1 = v_i\ t$$

además

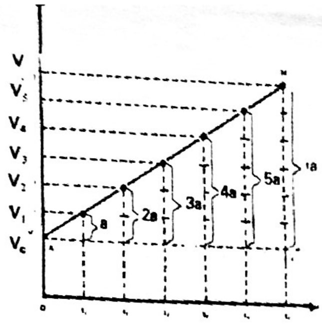


Fig. 11-28. *Movimiento uniformemente acelerado. Cálculo de la fórmula del espacio.*

$$e_2 = \frac{B\,h}{2}$$

(sup. triángulo)

donde

$$B = t$$

y

$$h = a\ t$$

(la aceleración por el tiempo transcurrido, observa bien el gráfico) nos queda entonces que:

$$e_2 = \frac{t\,a\,t}{2}$$

o sea

$$e_2 = \frac{a\ t^2}{2}$$

de acuerdo con la relación (1) tenemos que si

$$e = e_1 + e_2$$

reemplazando por los valores parciales obtenidos es

$$e = v_i\,t + a\,\frac{t^2}{2}$$

que puede escribirse

$$e = v_i\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Si el movimiento fuera uniformemente retardado, *la aceleración sería negativa* por lo cual quedaría:

$$e = v_i\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

* El signo menos indica que el movimiento es retardado.

En general, el espacio recorrido con movimiento uniformemente variado queda expresado por la fórmula

$$e = v_i t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

+ para movimiento acelerado;
- para movimiento retardado.

Si el móvil no tuviera velocidad inicial esa expresión sería:

$$v_i t = 0 \quad t = 0$$

$$e = \frac{1}{2} a t^2$$

Síntesis de las fórmulas del movimiento uniformemente variado

Sin velocidad inicial

$$v = a t$$

$$e = \frac{1}{2} a t^2$$

Con velocidad inicial

$$v_f = v_i \pm a t$$

$$e = v_i t \pm \frac{1}{2} a t^2$$

Cálculos del tiempo

1º *De la expresión*

$$v = a t$$

resulta

$$t = \frac{v}{a}$$

2º *De la expresión*

$$e = \frac{1}{2} a t^2$$

es

$$t^2 = \frac{2e}{a}$$

y

$$t = \sqrt{\frac{2e}{a}}$$

Leyes del movimiento uniformemente acelerado

Según la definición del movimiento uniformemente acelerado, el aumento de velocidad es constante por cada unidad de tiempo, y como esa variación de velocidad por unidad de tiempo es la aceleración resulta:

1ª LEY: *en un movimiento uniformemente acelerado, la aceleración es constante.*

De la expresión $v = a\,t$, como a es constante por la 1ª ley, la velocidad aumentará al aumentar el tiempo, es decir la velocidad es función de t; en consecuencia:

2ª LEY: *en el movimiento uniformemente acelerado la velocidad es proporcional al tiempo.*

Si en 1 segundo la velocidad es 7 m/seg
en 2 segundos la velocidad será 14 m/seg
en 3 segundos la velocidad será 21 m/seg
en 10 segundos la velocidad será 70 m/seg

Como en la ecuación

$$e = 1/2\, a\, t^2$$

1/2 y a son factores constantes, resulta que el espacio depende del tiempo transcurrido; pero obsérvese que dicho factor está elevado al cuadrado, por lo cual:

3ª LEY: *en el movimiento uniformemente acelerado el espacio es proporcional al cuadrado del tiempo.*

Esto significa que:

Si en 1 minuto recorre 10 m
en 2 minutos recorrerá 40 m
en 3 minutos recorrerá 90 m
en 4 minutos recorrerá 160 m

y así sucesivamente, es decir, a tiempo doble, espacio cuatro veces mayor; a tiempo triple, espacio nueve veces mayor; a tiempo cuádruple, espacio dieciséis veces mayor.

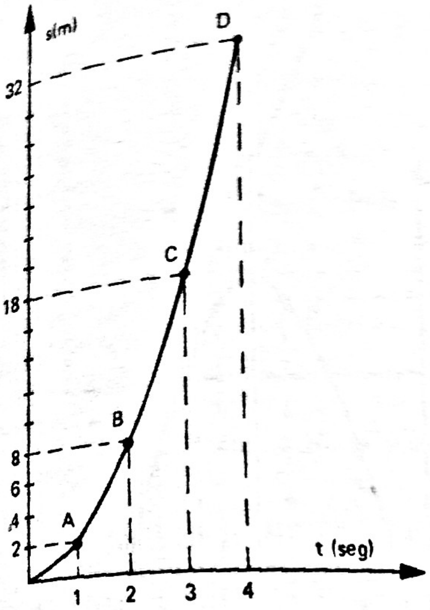


Fig. 11-29. Gráfica del espacio en el M.U.A. en función del tiempo. Cuando aumenta la aceleración, la curva se acerca al eje de las ordenadas.

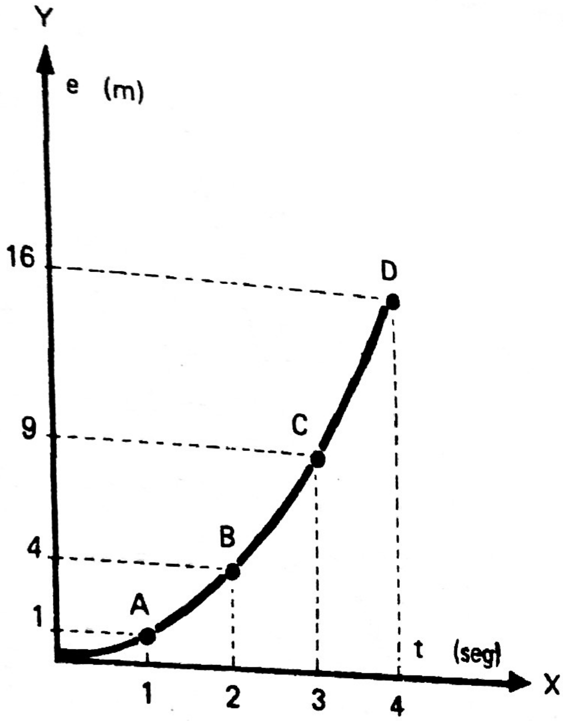


Fig. 11-30. *M.U.A.: Gráfica del espacio.*

Representación gráfica del espacio en función del tiempo

1. El móvil parte del reposo.

$$(v_i = 0)$$

Si

$$a = 4 \frac{m}{seg^2},$$

como

$$e = \frac{1}{2} a t^2 ;$$

es:

$$e_1 = \frac{1}{2} 4 \frac{m}{seg^2} (1 \, seg)^2 = 2m \quad \text{(punto A)}$$

$$e_2 = \frac{1}{2} 4 \frac{m}{seg^2} (2 \, seg)^2 = 8m \quad \text{(punto B)}$$

$$e_3 = \frac{1}{2} 4 \frac{m}{seg^2} (3 \, seg)^2 = 18m \quad \text{(punto C)}$$

$$e_4 = \frac{1}{2} 4 \frac{m}{seg^2} (4 \, seg)^2 = 32m \quad \text{(punto D)}$$

valores que nos dan la gráfica de la figura 11-29, al unir A, B, C y D.

Trabajemos ahora con una aceleración de 2 m/seg^2 y tendremos:

$$e_1 = \frac{1}{2} 2 \frac{m}{seg^2} (1 \, seg)^2 = 1m \quad \text{(punto A)}$$

$$e_2 = \frac{1}{2} 2 \frac{m}{seg^2} (2 \, seg)^2 = 4m \quad \text{(punto B)}$$

$$e_3 = \frac{1}{2} 2 \frac{m}{seg^2} (3 \, seg)^2 = 9m \quad \text{(punto C)}$$

$$e_4 = \frac{1}{2} 2 \frac{m}{seg^2} (4 \, seg)^2 = 16m \quad \text{(punto D)}$$

Al representar los puntos A, B, C y D obtenemos la gráfica de la figura 11-30.

Observemos que:

A mayor aceleración, la curva que representa el espacio recorrido tiende a acercarse al eje YY' de las ordenadas.

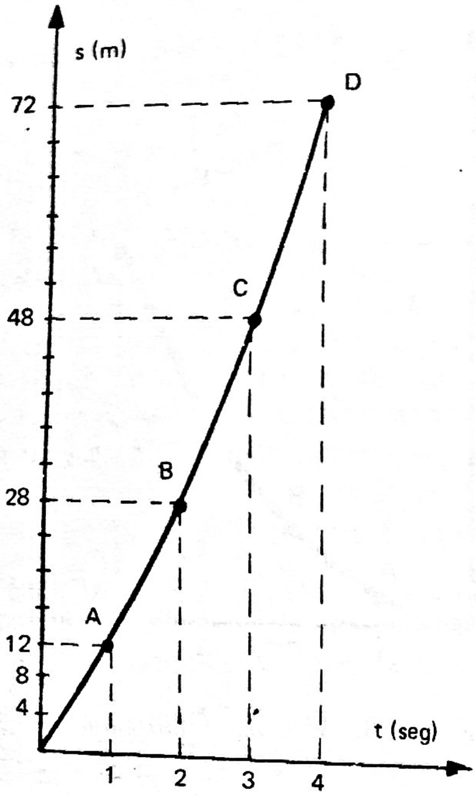


Fig. 11-31. *M.U.A.: Gráfica del espacio. En este caso el móvil posee velocidad inicial.*

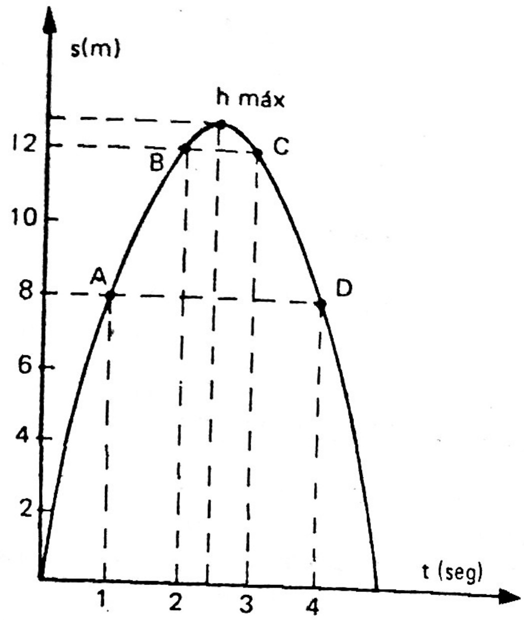


Fig. 11-32. *Gráfica del espacio. Caso de un movimiento uniformemente retardado (M.U.R.).*

2. El móvil posee velocidad inicial (fig. 11-31).

Si

$$v_i = 10 \text{ m/seg}$$

y

$$a = 4 \text{ m/seg}^2$$

como

$$e = v_i\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

$$e_1 = 10\frac{m}{seg} 1 \text{ seg} + \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (1 \text{ seg})^2 = 12m$$

$$e_2 = 10\frac{m}{seg} 2 \text{ seg} + \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (2 \text{ seg})^2 = 28m$$

$$e_3 = 10\frac{m}{seg} 3 \text{ seg} + \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (3 \text{ seg})^2 = 48m$$

$$e_4 = 10\frac{m}{seg} 4 \text{ seg} + \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (4 \text{ seg})^2 = 72m$$

3. El movimiento es uniformemente retardado (fig. 11- 32).

Si la velocidad inicial es 10 m/seg y la aceleración negativa, es a = 4 m/seg² resulta:

$$e = v_i\, t - \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

en el 1^er^ segundo

$$e_1 = 10\frac{m}{seg} 1 \text{ seg} - \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (1 \text{ seg})^2 = 8m \text{ (A)}$$

en el 2º segundo

$$e_2 = 10\frac{m}{seg} 2 \text{ seg} - \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (2 \text{ seg})^2 = 12m \text{ (B)}$$

en el 3^er^ segundo

$$e_3 = 10\frac{m}{seg} 3 \text{ seg} - \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (3 \text{ seg})^2 = 12m \text{ (C)}$$

en el 4º segundo

$$e_4 = 10\frac{m}{seg} 4 \text{ seg} - \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (4 \text{ seg})^2 = 8m \text{ (D)}$$

en el 5º segundo

$$e_5 = 10\frac{m}{seg} 5 \text{ seg} - \frac{1}{2}\, 4\frac{m}{seg^2}\, (5 \text{ seg})^2 = 0m$$

El cuerpo se ha detenido; si fuera un proyectil, habría llegado al suelo.

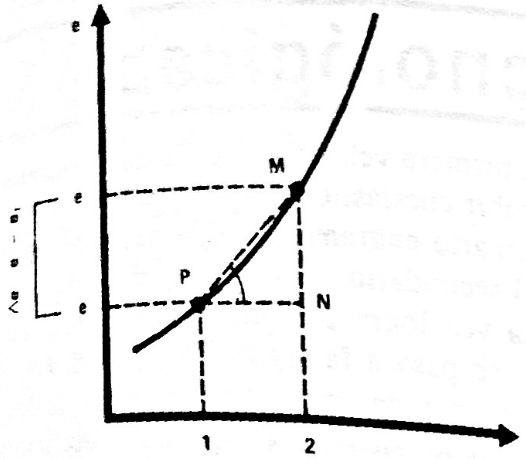


Fig. 11-33. *Velocidad media.*

VELOCIDAD MEDIA E INSTANTANEA. INTERPRETACION GEOMETRICA

Conocida la representación gráfica del espacio en un movimiento rectilíneo uniformemente variado podemos ampliar el concepto de velocidad media e instantánea.

Velocidad media

Observemos la gráfica de la figura 11-33. Hemos dicho que velocidad media es:

$$v_m = \frac{e_2 - e_1}{t} \qquad (1)$$

pero

$$e_2 - e_1 = MN$$

y

$$t = 1 \text{ seg} = PN \,;$$

reemplazando en (1) tenemos

$$v_m = \frac{e_2 - e_1}{t} = \frac{MN}{PN}$$

En el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{PNM}$ (rectángulo en N) el cociente MN/PN es la tangente del ángulo α; luego

$$v_m = \frac{MN}{PN} = \text{tg}\,\alpha$$

Expresión que permite mostrar que la velocidad media entre 2 instantes determinados está representada por la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta determinada por los puntos de la parábola correspondiente a los instantes considerados y el eje de las abscisas (eje de los tiempos).

Velocidad instantánea

Consideremos los puntos P_1 y P_2 de la parábola de la figura 11-34 que indican los espacios recorridos entre el 3º y 4º segundo.

Consideremos ahora el punto correspondiente al instante 3,5 segundos; este nuevo punto, llamado P, se acercó al P_1 y la secante determinada por P y P_1 se acerca más a la tangente trazada por P_1.

Si eligiéramos un punto P_3 más cercano a P_1 la secante que determinarán se acercaría mucho más a la tangente que pasa por P_1.

Cuando esos puntos P_1 y P_3 estén tan cerca que no los podamos diferenciar, la secante que determinen coincidirá con la tangente del punto P_1 y en lugar de una velocidad media, habremos logrado establecer la velocidad instantánea en el punto P_1.

Luego: *La velocidad instantánea estará representada por la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente a la parábola en el punto considerado, con el eje del tiempo* (eje de las abscisas).

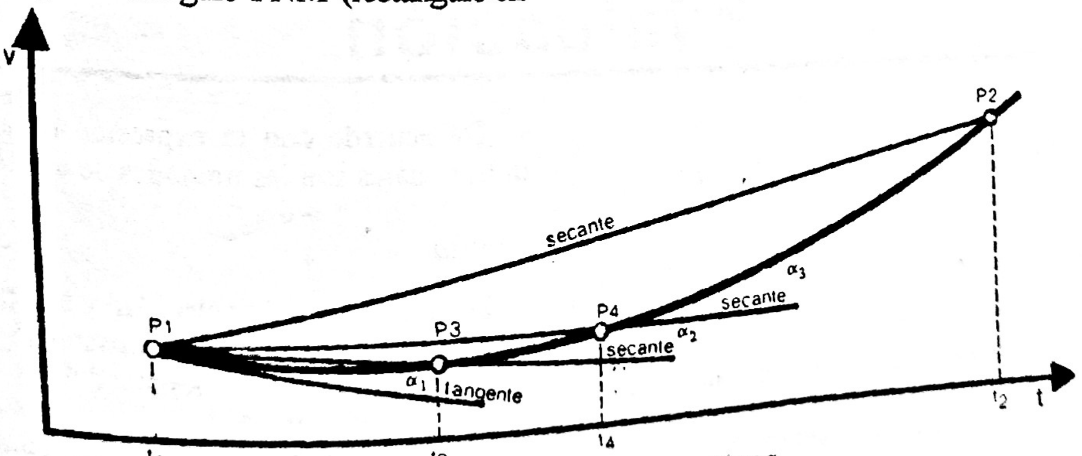


Fig. 11-34. *Velocidad instantánea.*