

A.C.P
EES N° 1

Matemática
6to año A.

PROFESOR Fabio Godoy
Contacto: Fagodoy1000@gmail.com

Probabilidad

Se lanza un par de dados, ¿qué probabilidades tiene de obtener el doble seis? ¿Cuál es la probabilidad de ganar en una lotería? El desarrollo de la probabilidad surgió para obtener respuestas precisas a este tipo de cuestiones. Actualmente es una herramienta en la toma de decisiones en campos tan diversos como administración, genética, psicología, política y muchas ciencias.

Teoría de probabilidades

La teoría de probabilidades se ocupa de asignar un cierto número a cada posible resultado que pueda ocurrir en un experimento aleatorio, con el fin de cuantificar dichos resultados y saber si un suceso es más probable que otro.

Experimentos aleatorios

Son aquellos en los que no se puede predecir el resultado, ya que éste depende del **azar**.

Ejemplo

Si lanzamos una moneda no sabemos de antemano si saldrá cara o cruz. Si lanzamos un dado tampoco podemos determinar el resultado que vamos a obtener.

Experimentos deterministas

Son los experimentos de los que podemos predecir el resultado antes de que se realicen.

Ejemplo

Si dejamos caer una pelota desde una ventana sabemos, sin lugar a dudas, que la pelota bajará. Si la arrojamos hacia arriba, sabemos que subirá durante un determinado intervalo de tiempo; pero después bajará.



Suceso

Es cada uno de los resultados posibles de una experiencia aleatoria. Al lanzar una moneda, que salga cara es un suceso ω . Al lanzar un dado, que se obtenga 4 es un suceso.

Espacio muestral

Es el conjunto de todos los posibles resultados de una experiencia aleatoria, lo representaremos por E Espacio muestral de una moneda: $E = \{C, X\}$. Espacio muestral de un dado: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Suceso aleatorio

Suceso aleatorio es cualquier subconjunto del espacio muestral E . Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3, y otro, sacar 5.

Tipos de sucesos

➤ Suceso elemental

Suceso elemental es cada uno de los elementos que forman parte del espacio muestral. Por ejemplo al tirar un dado un suceso elemental es sacar 5.

➤ Suceso compuesto

Suceso compuesto es cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo al tirar un dado un suceso sería que saliera par, otro, obtener múltiplo de 3.

➤ Suceso seguro

Suceso seguro, E , es aquel que se verifica siempre que realizamos el experimento, está formado por todos los posibles resultados (es decir, por el espacio muestral). Por ejemplo al tirar un dado un dado obtener una puntuación que sea menor que 7.

➤ Suceso imposible

Suceso imposible, es el que no se puede obtener como resultado de un experimento aleatorio, no tiene ningún elemento. Por ejemplo al tirar un dado obtener una puntuación igual a 7.

➤ Sucesos compatibles

Dos sucesos, A y B, son compatibles cuando tienen algún suceso elemental común. 4

Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 3, A y B son compatibles porque el 6 es un suceso elemental común.

➤ **Sucesos incompatibles**

Dos sucesos, A y B, son **incompatibles** cuando no tienen ningún elemento en común. Si A es sacar puntuación par al tirar un dado y B es obtener múltiplo de 5, A y B son incompatibles.

➤ **Sucesos independientes**

Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la probabilidad de que suceda A no se ve afectada porque haya sucedido o no B. Al lanzar dos dados los resultados son independientes.

➤ **Sucesos dependientes**

Dos sucesos, A y B, son dependientes cuando la probabilidad de que suceda A se ve afectada porque haya sucedido o no B. Extraer dos cartas de una baraja, sin reposición, son sucesos dependientes.

➤ **Suceso contrario**

El suceso contrario a A es otro suceso que se realiza cuando no se realiza A., Se denota por \bar{A} . Son sucesos contrarios sacar par e impar al lanzar un dado.

El suceso $\bar{A} = E - A$ se llama **suceso contrario** o complementario de A. Es decir, se verifica siempre y cuando no se verifique A.

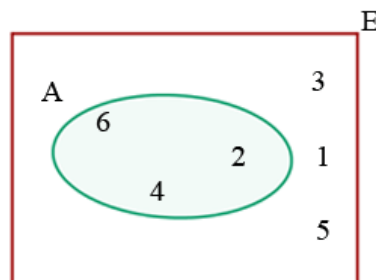
Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par".

Calcular \bar{A}

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$



Unión de sucesos

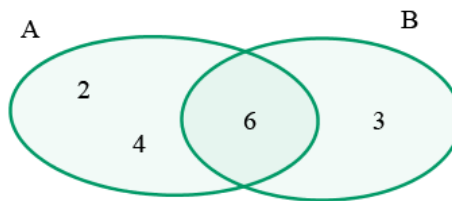
La unión de sucesos, $A \cup B$, es el suceso formado por todos los elementos de A y de B. Es decir, el suceso $A \cup B$ se verifica cuando ocurre uno de los dos, A o B, o ambos. $A \cup B$ se lee como "**A o B**".

Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular $A \cup B$.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\} \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$



Intersección de sucesos

La intersección de sucesos, $A \cap B$, es el suceso formado por todos los elementos que son, a la vez, de A y B.

Es decir, el suceso $A \cap B$ se verifica cuando ocurren simultáneamente A y B.

$A \cap B$ se lee como "**A y B**".

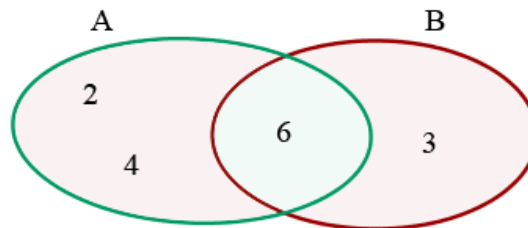
Ejemplo

Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado, si A = "sacar par" y B = "sacar múltiplo de 3". Calcular $A \cap B$.

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$



Regla de Laplace

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

$$P(A) = \frac{n^0 \text{ de casos favorables } A}{n^0 \text{ de casos POSIBLES}}$$

Ley de los grandes números:

Experimentalmente se observa que, al aumentar indefinidamente el número de pruebas de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número. Dicho número se llama probabilidad del suceso.

Axiomas de la probabilidad

1. La probabilidad es positiva y menor o igual que 1. $0 \leq p(A) \leq 1$
2. La probabilidad del suceso seguro es 1. $p(E) = 1$
3. Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \emptyset$ entonces:
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propiedades de la probabilidad

1 La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$P(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

2 Probabilidad del suceso imposible es cero.

$$P(\emptyset) = 0$$

3 La probabilidad de la unión de dos sucesos compatibles es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4 Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.

$$A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$$

Experimentos compuestos

Un experimento compuesto es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples. Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un experimento compuesto. En los experimentos compuestos es conveniente usar el llamado diagrama en árbol para hacerse una idea global de todos ellos.

Diagramas de árbol

Para la construcción de un diagrama en árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad. En el final de cada rama parcial se constituye a su vez, un nudo del cual parten nuevas ramas, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final). Hay que tener en cuenta: que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo ha de dar 1.

Problema resuelto:

Se arroja un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6 y se apunta el resultado de la cara superior.

a) ¿Es aleatorio este experimento?

b) Determina el espacio muestral.

c) Forma los sucesos contrarios de $A = \{2, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{3\}$.

a) Sí es aleatorio, ya que por muchas veces que se repita, jamás se puede predecir el resultado que se va a obtener en una próxima experiencia.



b) El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $A = \{2, 4\} \Rightarrow \bar{A} = \{1, 3, 5, 6\}$

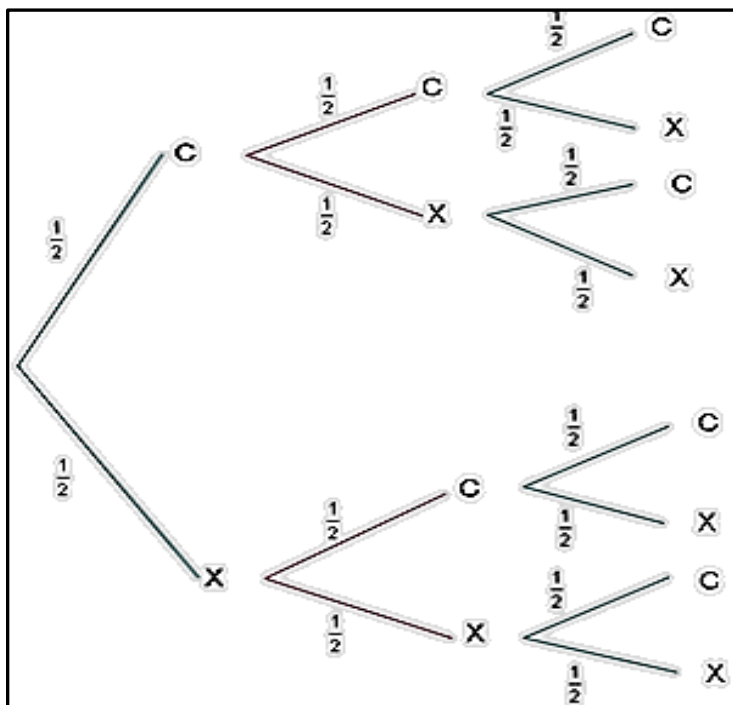
Completa $B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow$

$C = \{3\} \Rightarrow$

Problema resuelto:

Calcular la probabilidad de que al arrojar al aire tres monedas, salgan:

Tres caras



E
CCC
CCX
CXC
CXX
XCC
XCX
XXC
XXX

MULTIPLICO LOS VALORES LA PROBABILIDAD DE CADA NUDO, OBTENIENDO ASÍ LA PROBABILIDAD DE ESA RAMA.

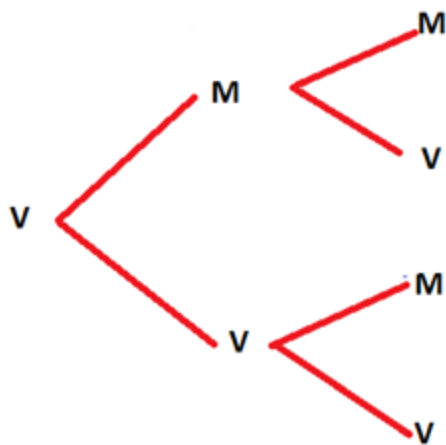
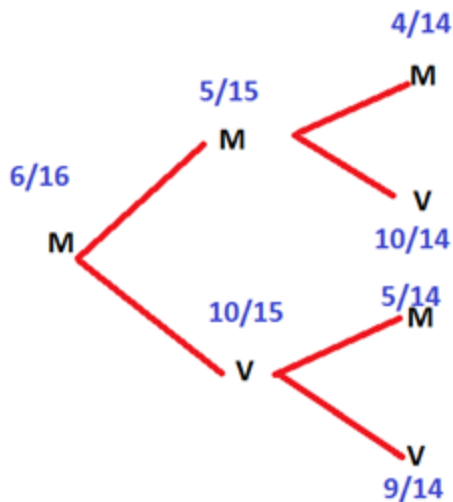
Considera que la probabilidad total $P=1$

$$P(3c) = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2)$$

$$P(3c) = 1/8$$

Actividades

- En un intercambio cultural participan 17 alumnos españoles, 8 italianos, 4 franceses y 2 holandeses. Elegido un alumno al azar, halla:
a) P(ser francés) b) P(ser italiano) c) P(ser holandés)
- Una clase consta de seis niñas (M) y diez niños (V). Si se escoge un comité de tres al azar, completa el diagrama de árbol y luego halla la probabilidad de:
A) Seleccionar tres niños.
B) Seleccionar exactamente dos niños y una niña.
C) Seleccionar exactamente dos niñas y un niño.
D) Seleccionar tres niñas.



$$MMM = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = 0,0357$$

$$MMV =$$

$$MVM =$$

$$MVV =$$

$$VMM = \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{5}{14} = 0,893$$

$$VMV =$$

$$VVM =$$

$$VVV =$$

3. Basados en estudios podemos considerar que la probabilidad que un incendio sea intencionado es de 0,35 ¿cuál es la probabilidad que al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?
4. En un cierto país, el 99% de los detenidos y sometidos a juicio son culpables del delito que se les imputa. Los jueces, al emitir veredicto, aciertan en el 95% de los casos, tanto si el acusado es culpable como inocente. Según estos datos, calcúlese la probabilidad que:
- a) un ciudadano inocente haya sido declarado culpable.
 - b) sea culpable, si ha sido declarado inocente.
5. En una fábrica de televisores las máquinas I,II y III producen respectivamente el 28%, el 32% y el 40% del total. En la producción de cada máquina el 3%, 4% y el 5% son televisores defectuosos. Se toma al azar un televisor de la producción total y se le encuentra defectuoso. Cuáles son las probabilidades que haya sido producido por:
- (a) la máquina I
 - (b) la máquina II
 - (c) la máquina III
6. De una caja que contiene 2 bolitas blancas y 3 rojas sacamos sin mirar, 2 bolitas una tras otra de dos maneras distintas:
- ° sin reponer la bolita
 - ° reponiendo la bolita.
 - a) Realiza un diagrama de árbol para cada caso y compáralos. Luego hallar las probabilidades indicadas:
 - b) Que al menos una bolita sea blanca.
 - c) Que sean de distinto color.
 - d) Que las dos bolitas sean blancas.
 - e) Que las dos sean rojas