

Ecuaciones de 2do grado

Ecuaciones de segundo grado y una incógnita

Sabemos que una ecuación es una relación matemática entre números y letras. Normalmente trabaja con ecuaciones en las que sólo hay una letra, llamada incógnita, que suele ser la x. Resolver la ecuación consiste en encontrar un valor (o varios) que, al sustituirlo por la incógnita, haga que sea cierta la igualdad. Ese valor es la solución de la ecuación.

Ejemplo: Resolver la ecuación $x - 1 = 0$

El número que hace que esa ecuación sea cierta es el 1, ya que $1 - 1 = 0$, por lo tanto, 1 es la solución de la ecuación. Si en la ecuación la incógnita está elevada al cuadrado, decimos que

una ecuación de segundo grado (llamadas también ecuaciones cuadráticas), que se caracterizan porque pueden tener dos soluciones (aunque también una sola, e incluso ninguna).

Cualquier ecuación de segundo grado o cuadrática se puede expresar de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde a, b y c son unos parámetros que habrá que sustituir por los números reales que corresponda en cada caso particular.

-

Solución de ecuaciones cuadráticas

Hemos visto que una ecuación cuadrática es una ecuación en su forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, y c son números

Pero este tipo de ecuación puede presentarse de diferentes formas:

Ejemplos:

$$9x^2 + 6x + 10 = 0 \quad a = 9, b = 6, c = 10$$

$$3x^2 - 9x + 0 = 0 \quad a = 3, b = -9, c = 0 \text{ (el cero, la c, no se escribe, no está)}$$

$$-6x^2 + 0x + 10 = 0 \quad a = -6, b = 0, c = 10 \text{ (el cero equis, la b, no se escribe)}$$

Para resolver la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (o cualquiera de las formas mostradas), Puede usarse cualquiera de los siguientes métodos:

Solución por factorización

En toda ecuación cuadrática uno de sus miembros es un polinomio de segundo grado y el otro es cero; entonces, cuando el polinomio de segundo grado pueda factorizarse, tenemos que convertirlo en un producto de binomios.

Obtenido el producto de binomios, debemos buscar el valor de x de cada uno.

Para hacerlo igualamos a cero cada factor y se despeja para la variable. Igualamos a cero ya sabemos que si un producto es igual a cero, uno de sus multiplicandos, o ambos, es igual a

Ejemplos

1) Resolver

$$(x + 3)(2x - 1) = 9$$

Lo primero es igualar la ecuación a cero. Para hacerlo, multiplicamos los binomios:

$$2x^2 - x + 6x - 3 = 9$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 9$$

Ahora, pasamos el 9, con signo contrario, al primer miembro para igualar a cero:

$$2x^2 + 5x - 3 - 9 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$

Ahora podemos factorizar esta ecuación:

$$(2x - 3)(x + 4) = 0$$

Ahora podemos igualar a cero cada término del producto para resolver las incógnitas:

$$\text{Si } 2x - 3 = 0$$

$$\text{Si } x + 4 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = -4$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Esta misma ecuación pudo haberse presentado de varias formas:

$$(x + 3)(2x - 1) = 9$$

$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$

$$2x^2 + 5x = 12$$

$$2x^2 - 12 = -5x$$

En todos los casos la solución por factorización es la misma:

-

2) Halle las soluciones de

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$

La ecuación ya está igualada a cero y solo hay que factorizar e igualar sus factores a cero y luego resolver en términos de x:

$$x(x^2 - 8x + 16) = 0$$

$$x(x - 4)(x - 4) = 0$$

$$\text{Ahora, si } x = 0 \quad \text{o si } x - 4 = 0 \quad x = 4$$

Algunos ejercicios: Resolver cada ecuación por el método de factorización:

1) $(x + 5)(x - 2) = 0$

2) $3y^2 + 8y - 9 = 2y$

3) $9x^2 - 4 = 0$

4) $a^2 - 14a = -45$

5) $z(2z - 3) = 14$

6) $x^3 - 22x = 9x^2$

Solución por completación de cuadrados

Se llama método de la completación de cuadrados porque se puede completar un cuadrado geoméricamente, y porque en la ecuación cuadrática se pueden realizar operaciones algebraicas que la transforman en una ecuación del tipo: $(ax + b)^2 = n$

en la cual el primer miembro de la ecuación $(ax + b)^2$, es el cuadrado de la suma de un binomio

Partiendo de una ecuación del tipo $x^2 + bx + c = 0$

por ejemplo, la ecuación $x^2 + 8x = 48$, que también puede escribirse $x^2 + 8x - 48 = 0$

Al primer miembro de la ecuación $(x^2 + 8x)$ le falta un término para completar el cuadrado de la suma de un binomio del tipo $(ax + b)^2$

Que es lo mismo que $(ax + b)(ax + b)$

Que es lo mismo que $ax^2 + 2axb + b^2$

En nuestro ejemplo

$x^2 + 8x = 48$, el 8 representa al doble del segundo número del binomio, por lo tanto, ese número debe ser obligadamente 8 dividido por 2 (8/2), que es igual a 4, y como en el cuadrado de la suma de un binomio $(a^2 + 2ab + b^2)$ el tercer término corresponde al cuadrado del segundo término ($4^2 = 16$) amplificamos ambos miembros de la ecuación por 16, así tenemos

$x^2 + 8x + 16 = 48 + 16$

$x^2 + 8x + 16 = 64$

la cual, factorizando, podemos escribir como sigue: $(x + 4)(x + 4) = 64$

Que es igual a $(x + 4)^2 = 64$

Extraemos raíz cuadrada de ambos miembros y tenemos $\sqrt{(x + 4)^2} = \sqrt{64}$

Nos queda $x + 4 = 8$

Entonces $x = 8 - 4$ $x = 4$

Se dice que "se completó un cuadrado" porque para el primer miembro de la ecuación se logró obtener la expresión $(x + 4)^2$, que es el cuadrado perfecto de un binomio.

Otro ejemplo para analizar y estudiar:

Resolver la ecuación: $x^2 - 6x + 8 = 0$

Veamos: Con los términos x^2 y $-6x$ podemos formar el cuadrado de binomio $(x - 3)^2$, pero nos faltaría el término igual a 9, por lo tanto, dejamos las equis (x) a la izquierda y pasamos a la derecha de la igualdad: $x^2 - 6x = -8$ y sumamos 9 a ambos lados de la igualdad para que a la izquierda se forme el cuadrado de binomio: ¿Cómo encontramos el término que falta?, haciendo

$$\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = -3^2 = 9$$

$x^2 - 6x = -8$ /+9 (sumamos 9 en ambos miembros de la ecuación)

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 1$$

Extraemos las raíces cuadradas $\sqrt{(x - 3)^2} = \sqrt{1}$ y queda

$$x - 3 = 1 \quad y \quad x - 3 = -1$$

$$\text{Si } x - 3 = 1$$

$$x = 1 + 3$$

$$x = 4$$

$$\text{Si } x - 3 = -1$$

$$x = -1 + 3$$

$$x = 2$$

Por lo tanto $x_1 = 4$ y $x_2 = 2$

Debemos hacer notar que el método de completar cuadrados terminará en lo mismo que la fórmula general, porque es de este método de donde sale dicha fórmula, usada en el método que vemos a continuación.

Solución por la fórmula general

Existe una fórmula que permite resolver cualquier ecuación de segundo grado, que es la siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

La fórmula genera dos respuestas: Una con el signo más (+) y otra con el signo menos (-) a la raíz. Solucionar una ecuación de segundo grado se limita, entonces, a identificar las letras a, b y c y sustituir sus valores en la fórmula.

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado sirve para resolver

cualquier ecuación de segundo grado, sea completa o incompleta, y obtener buenos resultados tiene que ver con las técnicas de factorización.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $2x^2 + 3x - 5 = 0$

Vemos claramente que $a = 2$, $b = 3$ y $c = -5$, así es que:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

Ahora, tenemos que obtener las dos soluciones, con el + y con el - :

$$x = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{y también} \quad x = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2}$$

Así es que las soluciones son $x = 1$ y $x = \frac{-5}{2}$.

Aquí debemos anotar algo muy importante:

En la fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado aparece la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$

Esa raíz cuadrada sólo existirá cuando el radicando ($b^2 - 4ac$) sea positivo o cero.

El radicando $b^2 - 4ac$ se denomina discriminante y se simboliza por Δ . El número de soluciones (llamadas también raíces) depende del signo de Δ y se puede determinar incluso antes de resolver la ecuación.

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Entonces, estudiando el signo del discriminante (una vez resuelto), podemos saber el número de soluciones que posee:

Si Δ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones.

Si Δ es negativo, la ecuación no tiene solución.

Si Δ es cero, la ecuación tiene una única solución.

En el ejemplo anterior el discriminante era $\Delta = 49$, positivo, por eso la ecuación tenía dos soluciones.

Obtendremos dos soluciones, una cuando sumamos $a - b$ la raíz y lo dividimos por $2a$, y otra solución cuando restamos $a - b$ la raíz y lo dividimos por $2a$.

Trabajando con ecuaciones de segundo grado

Como lo dijimos al comienzo, cualquier ecuación de segundo grado puede, mediante transformaciones, expresarse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , y b son los coeficientes de los términos x^2 y x , respectivamente y c es el término independiente.

-

Ecuación de segundo grado completa

Una ecuación de segundo grado es completa cuando los tres coeficientes a , b , y c son distintos de cero.

Entonces, la expresión de una ecuación de segundo grado completa es

$ax^2 + bx + c = 0.$

-

Ecuación de segundo grado incompleta

Una ecuación de segundo grado es incompleta cuando los términos b o c , o ambos, son c

(Si $a = 0$, la ecuación resultante sería $bx + c = 0$, que no es una ecuación de segundo grado.

La expresión de una ecuación de segundo grado incompleta es:

$ax^2 = 0;$ si $b = 0$ y $c = 0.$

$ax^2 + bx = 0;$ si $c = 0.$

$ax^2 + c = 0;$ si $b = 0.$

-

Algunos ejemplos, con soluciones

1) Resolver: $-5x^2 + 13x + 6 = 0$

Se identifican las letras, cuidando que la ecuación esté ordenada respecto a la x , de grado mayor a menor. Con esta condición tenemos: $a = -5$; $b = 13$; $c = 6.$

Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 6}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - (-120)}}{-10} = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{-10}$$

Como la raíz buscada es 17 (el cuadrado de 17 es 289), se tiene entonces que:

$$x = \frac{-13 \pm 17}{-10}$$

Según esto, tendremos dos raíces diferentes, una usando el signo + y otra usando el signo -

Llamaremos X_1 y X_2 a las dos soluciones, que serán:

$$x_1 = \frac{-13 + 17}{-10} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$$

-

$$x_2 = \frac{-13 - 17}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3$$

Ambos valores de x satisfacen la ecuación, es decir, al sustituirlos en ella producen una identidad. Al procedimiento de sustituir para probar si los valores hallados satisfacen la ecuación se le denomina verificación.

Probando con $x = 3$. Resulta: $-5 \cdot (3)^2 + 13 \cdot (3) + 6 = -45 + 39 + 6 = 0$, tal como se esperaba en el segundo miembro.

Probando con $x = -\frac{2}{5}$, se tiene

$$-5\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 13\left(-\frac{2}{5}\right) + 6 = -5\left(\frac{4}{25}\right) + \left(-\frac{26}{5}\right) + 6 =$$

$$-\frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{4}{5} - \frac{26}{5} + 6 = -\frac{\overset{6}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} + 6 = -6 + 6 = 0$$

Como ambas respuestas producen identidades, ahora es seguro que 3 y $-\frac{2}{5}$ son las raíces de $-5x^2 + 13x + 6 = 0$

2.- Resolver: $6x - x^2 = 9$

Hacemos los cambios necesarios para que la ecuación tenga la forma conocida. Trasponiendo y cambiando de lugar resulta:

$-x^2 + 6x - 9 = 0$. Ahora se identifican las letras:

$a = -1$; $b = 6$; $c = -9$; y se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

El discriminante (Δ) es igual a cero, por lo cual se producen dos raíces iguales a 3, es decir, $x_1 = x_2 = 3$.

Sustituyendo los valores en la ecuación original, se verifica que: $6 \cdot 3 - 3^2 = 18 - 9 = 9$ con lo cual se ha comprobado la respuesta.

Una ecuación de segundo grado es toda expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0.$$

Actividades para realizar con formula

1. $x^2 - 7x + 12 = 0$

2. $x^2 - 9x + 18 = 0$

3. $x^2 + 6x = -9$

4. $2x^2 + 10x - 48 = 0$

5. $x^2 = -9x + 15$

6. $5x^2 = 125$

7. $x^2 - 8x = 0$

8. $9x^2 - x = 0$

9. $x^2 - 7x + 12 = 20x^2 + x + 1$

10. $(x - 1)(x + 2) = 0$

11. $(-x - 1)(x + 10) + 12 = 0$

12. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{16} = 0$