NÚMEROS ENTEROS

En ocasiones no es suficiente el conjunto de los números naturales para representar matemáticamente situaciones de la vida cotidiana. Por esta razón, los matemáticos de la antigüedad consideraron necesario ampliar este conjunto y comenzar a utilizar los números negativos. Esta decisión dio origen al conjunto de los números enteros, el cual incluye los enteros negativos, los enteros positivos o naturales y el 0.

Los números enteros negativos van precedidos por el signo menos (…–4, –3, –2, –1) y los números enteros positivos van precedidos por el signo más (+1, +2, +3, +4…).

Enteros = {…–4, –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, +4…}

Para tener en cuenta:

• El 0 es el único número entero que no tiene signo: no es positivo ni negativo.

• Los números enteros positivos coinciden con los números naturales; por eso, es común que al escribir un número entero positivo no se incluya el signo más (+).

Así, los números enteros permiten diferenciar la manera en que se registran algunas situaciones como: deudas y haberes, temperaturas sobre cero y bajo cero, alturas sobre el nivel del mar y profundidades, entre otras. En el caso de los movimientos bancarios, se acostumbra a representar los depósitos o plata a favor precedidas con el signo más y los retiros o deudas con el signo menos.

PUNTO DE REFERENCIA

José está haciendo un trabajo para la escuela y debe buscar información sobre diferentes lugares de Chascomús. Después de una tarde de paseo por la laguna, decide ir a visitar la Casa de Casco y el Teatro Brazzola, que quedan sobre la misma calle en la que se encuentra el Club de Pelota, donde él hace deporte. La Casa de Casco queda, aproximadamente, 30 metros antes del club. El teatro queda 30 metros después del club.

La situación planteada se puede representar como en la siguiente figura:

Si se toma la ubicación del club como punto de referencia, se puede afirmar que la Casa de Casco y el Teatro Brazzola están en posiciones opuestas (una para cada lado). Al fijar un punto de referencia es posible determinar dos sentidos u orientaciones.

Un punto de referencia determina dos sentidos. Se utilizan para situaciones como las siguientes:

- ARRIBA DE – ABAJO DE
- DESPUÉS DE – ANTES DE
- A LA DERECHA DE – A LA IZQUIERDA DE
- SOBRE EL NIVEL – BAJO EL NIVEL
- ADELANTE DE – ATRÁS DE
- POR ENCIMA DE – POR DEBAJO DE

NÚMEROS RELATIVOS

Los números que indican una cantidad con respecto a un punto de referencia se denominan números relativos.

Los números relativos se escriben acompañados por el signo más (+) o por el signo menos (–). Se utiliza el signo más para situaciones como "a la derecha de", "encima de", "sobre el nivel del mar", etc., y se utiliza el signo menos para situaciones como "antes de", "a la izquierda de", "bajo cero", "bajo el nivel del mar", entre otras.

Por ejemplo, para indicar que la Casa de Casco queda **30 metros antes del club**, se utiliza el número **– 30**. Para indicar que el Teatro Brazzola está **30 metros después del club**, se utiliza el número **+ 30**. En este caso el punto de referencia es el Club de Pelota y el número sería el 0 (cero).

Actividad 1: escribe un número entero que exprese la cantidad mencionada en cada caso. Recuerda ponerle el signo + ó –, según corresponda.

a-. La cima de la montaña está a 568 m de altura.

b-. El submarino está a 120 m de profundidad.

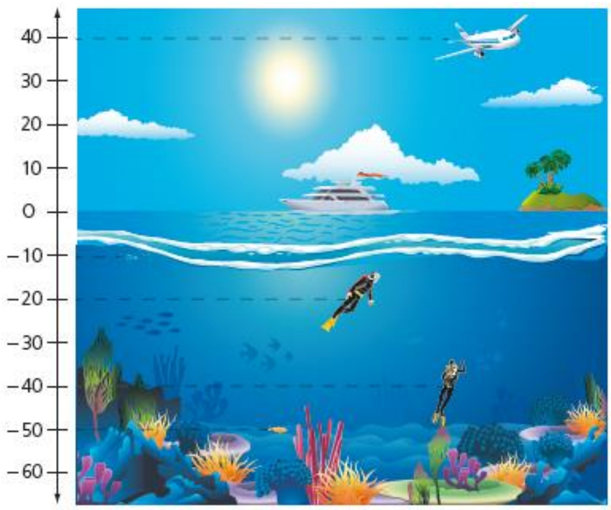
c-. Pablo consignó $ 500 en su cuenta de ahorros.

d-. Pitágoras nació en el siglo VI a. C.

e-. Sofía debe $ 350 al banco.

f-. La temperatura de hoy es de 5 ºC bajo cero.

Actividad 2: observa la figura y resuelve.



a-. ¿A qué profundidad con respecto al nivel del mar se encuentra cada uno de los buzos?

b-. ¿A qué altura con respecto al nivel del mar se encuentra el avión?

c-. ¿A qué profundidad con respecto al nivel del mar se encuentra el pez amarillo?

d-. ¿En qué punto con respecto al nivel del mar se encuentra el barco?

e-. ¿Qué distancia separa el avión del pez más amarillo?

ADICIÓN (SUMA) Y SUSTRACCIÓN (RESTA) DE NÚMEROS ENTEROS

Para sumar o restar enteros, se realizan los siguientes procedimientos:

+ 8 + 3 = + 11 ⟶ Si ambos son positivos, se suman y la suma es positiva.

– 5 – 2 = – 7 ⟶ Si ambos son negativos, se suman y la suma es negativa.

+ 6 – 10 = – 4

– 7 + 9 = + 2 ⟶ Si tienen distinto signo, al de mayor módulo se le resta el de menor módulo, y el resultado lleva el signo del mayor de los módulos.

Actividad 3: Resuelve las siguientes sumas y restas.

a) + 8 – 10 =	***c)*** – 1 – 3 =	***e)*** – 3 – 6 =	***g)*** – 9 + 1 =
b) – 3 + 7 =	**d*)*** + 7 – 15 =	***f)*** 0 – 5 =	***h)*** – 7 – 7 =

Sumas Algebraicas

Una suma algebraica es una sucesión de sumas y restas. Para resolverla, se suman todos los **números positivos** y se le resta la suma de todos los **negativos**.

– 8 + 6 – 1 + 5 + 4 – 10 + 2 – 3 ⇨ Suma algebraica con algunos números positivos y otros negativos.

(6 + 5 + 4 + 2) – (8 + 1 + 10 + 3) = ⇨ Separamos en dos grupos los números (positivos en un lado y negativos en otro).

+ 17 – 22 = – 5 ⇨ Sumamos los números de cada paréntesis y luego resolvemos la resta final.

Aclaración: ¿Por qué a los números negativos los sumamos? Ya habíamos visto que los negativos se utilizan, por ejemplo, para representar las deudas. Cuando nosotros tenemos varias deudas que pagar en nuestra casa, cobramos el sueldo y queremos pagarlas, los que hacemos es sumar cada una para saber qué cantidad de plata debemos llevar.

Actividad 4: resuelve las siguientes sumas algebraicas.

a) – 9 + 5 – 8 + 10 – 3 =	***c)*** – 1 + 9 + 4 + 13 – 17 – 20 + 2 =
b) 8 – 7 + 10 – 6 + 3 – 11 =	***d)*** 15 – 23 + 11 – 34 + 19 – 34 – 27 =

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE ENTEROS

Para multiplicar o dividir dos enteros, se resuelve como con los naturales (multiplico o divido ambos números), pero en este caso necesitamos conocer "el signo del resultado". Para saber esto es que se aplica ***la regla de los signos***:

Signo de un factor	Signo del otro factor	Signo del resultado	Ejemplos	
			Multiplicación	División
+	+	+	(+ 7) · (+ 2) = + 14	(+ 12) : (+ 2) = + 6
+	–	–	(+ 5) · (– 3) = – 15	(+ 20) : (– 10) = – 2
–	+	–	(– 4) · (+ 6) = – 24	(– 42) : (+ 6) = – 7
–	–	+	(– 3) · (– 9) = + 27	(– 32) : (– 4) = + 8

Importante: esta regla sólo se aplica en multiplicaciones y divisiones, jamás en suma y resta.

Actividad 5: aplicando esta simple regla, resuelve los siguientes cálculos.

a) (+ 5) · (+ 4) =

b) (– 8) · (+ 4) =

c) (– 63) : (+ 9) =

d) (– 6) · (– 7) =

e) (– 54) : (– 6) =

f) (+ 45) : (– 9) =

SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS

Hay momentos en que resolvemos un cálculo combinado y nos encontramos con paréntesis que hay que quitar para poder seguir resolviendo. Lo más sencillo es resolver dentro del paréntesis, pero muchas veces no podemos quitarlos porque “por delante hay otro signo”. Lo que hacemos, entonces, es aplicar la regla de los signos después de resolver dentro del paréntesis. Todavía no vamos a trabajar con cálculos combinados, pero sí vamos a practicar la supresión de paréntesis, para luego aplicarla a los combinados junto con todo lo visto anteriormente. Por ejemplo:

i) + (+ 8 – 3 – 5 + 9) = + (+ 9) = + 9

ii) – (+ 7 – 6 + 1 – 3) = – (– 1) = + 1

iii) – (+ 5 – 8 + 2 – 1 + 4) = – (+ 2) = – 2

Actividad 6: resolver dentro del paréntesis y luego quitarlos aplicando la regla de los signos.

a) + (+ 9 + 6) =

b) – (+ 7 – 3) =

d) – (– 2 – 8) =

e) + (– 4 + 9 + 6) =

g) – (– 3 + 11 – 8 + 6) =

h) + (– 1 + 4 + 17 – 6) =

PORCENTAJE

Cálculo de porcentaje

- Para determinar el porcentaje de un número, sigo los siguientes pasos:

1- Multiplico el monto por el porcentaje. Por ejemplo, si quiero saber el 32 % de 517, debo multiplicar ambas cifras (32 x 517 = 16544).

2- Luego divido el resultado por 100 (16544 : 100 = 165,44).

- Para determinar qué porcentaje representa una cantidad en relación a otra, sigo los siguientes pasos:

1- Divido la cantidad de la muestra por la cantidad total. Por ejemplo, si quiero saber qué porcentaje representan 30 personas de una empresa que tiene 50 empleados, divido ambas cifras (30 : 50 = 0,6).

2- Luego, al resultado de la división, lo multiplico por 100 (0,6 x 100 = 60%).

Actividad 7: la siguiente tabla muestra los precios de algunos productos que ofrecen el almacén del barrio.

PRODUCTOS	PRECIO
Agua mineral	**$ 45**
Azúcar	**$ 60**
Duraznos en almíbar	**$ 100**
Queso crema	**$ 130**
Manteca	**$ 51**
Crema	**$ 78**

a- Doña Irma tiene cuenta en este almacén, la cual paga cuando cobra su jubilación, pero se le hace un recargo del 10 % en cada producto. Realiza una lista con estos 6 productos, pero con el precio al que los pagaría Irma si quisiera comprar alguno de ellos dejando anotado.

b- El día martes, José realizó la siguiente compra: 2 botellas de agua, 3 kg de azúcar y una crema. Al momento de pagar, lo hizo utilizando su tarjeta de crédito. Esta tarjeta le cobra un interés del 15 % sobre el total de la compra. ¿Cuánto pagó José por su compra? ¿Cuánto fue el monto que le recargó el banco por utilizar la tarjeta?

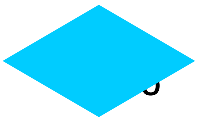
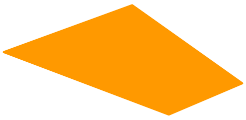
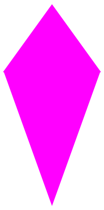
c- Los días viernes el almacén realiza ofertas en algunos de sus productos. Este viernes, por ejemplo, la azúcar estaba a sólo $ 40. ¿Qué porcentaje de descuento tenía la azúcar?

d- Una vecina del local, que es clienta desde hace muchos años, realizó la siguiente compra: 3 botellas de agua mineral, 1 lata de duraznos, 2 kg de azúcar y 1 crema. Por ser muy buena clienta, decidieron hacerle una rebaja de $ 33. ¿Cuánto debía pagar por su compra? ¿Cuánto pagó en realidad? ¿Qué porcentaje de descuento se le realizo?

Figuras, Área y Perímetro

Las figuras geométricas son superficies delimitadas por líneas curvas o rectas. Algunas de las figuras que más conocemos son los polígonos (como los triángulos y cuadriláteros, por ejemplo) y el círculo (cuyo contorno se denomina circunferencia).

Ya sabemos que las figuras de 3 lados se denominan triángulos y se los clasifica según sus lados (escaleno, isósceles o equilátero) y según sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo). Pero cuando las figuras tienen 4 lados se denominan cuadriláteros y se los clasifica a partir de algunas propiedades que cumplen sus lados y ángulos.

<table>
<tr><th>CUADRILÁTEROS</th><th colspan="2">CASOS ESPECIALES</th></tr>
<tr><td rowspan="2">PARALELOGRAMOS:
TIENEN DOS PARES DE LADOS PARALELOS
</td><td></td><td rowspan="2">
CUADRADO</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">TRAPECIOS:
TIENEN UN PAR DE LADOS PARALELOS
</td><td colspan="2">TRAPECIO  RECTÁNGULO</td></tr>
<tr><td colspan="2">TRAPECIO  ISÓSCELES</td></tr>
<tr><td>TRAPEZOIDES:
NO TIENEN LADOS PARALELOS
</td><td colspan="2">ROMBOIDE </td></tr>
</table>

Actividad 8: observando la obra "Los indios", indica qué figuras geométricas se representaron en ella.

Perímetro y área

El **perímetro** de una figura geométrica cerrada es la medida del contorno de la figura. Si quiero calcular el perímetro de cualquier figura, sólo tengo que sumar la medida de todos sus lados.

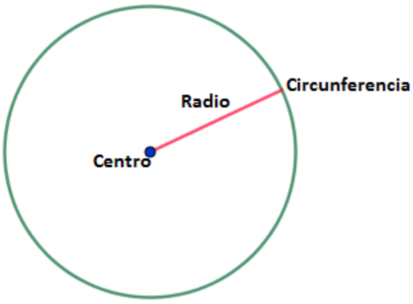
El **área** de una figura es la medida de cualquier superficie, ya sea cuadrada, triangular, circular, etc. Para calcular el área se utilizan diferentes fórmulas. Por ahora sólo vamos a trabajar con el rectángulo y el círculo, cuyas fórmulas son:

Área del rectángulo = base x altura

Área del circulo = 3,14 x radio^2

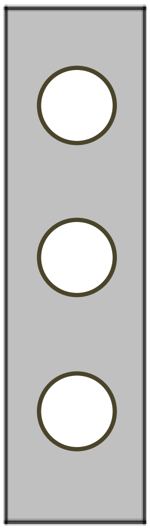
Una manera fácil de recordar y diferenciar perímetro de área es pensar en lo siguiente: "el perímetro de una figura es el borde y el área es el relleno".

Aclaración: recuerden que el radio de un círculo es la línea que va desde su centro hacia la circunferencia.



Actividad 9: en la obra se observan muchas figuras, pero hay una en especial que contiene tres círculos dentro. Imaginemos que las medidas son las siguientes y recuerden que el dibujo es sólo un modelo que utilizamos para guiarnos, pero no lleva las medidas reales.

- *Rectángulo*: base de 4 cm y altura de 16 cm.
- *Círculos*: radio de 2 cm.



Realiza los procedimientos y responde:

a) Halla el área del rectángulo.

b) Halla el área de cada círculo.

c) ¿Cuál es la medida de la superficie total que ocupan los 3 círculos?

d) Ahora necesito calcular la medida de la superficie gris, pero sólo esa área, sin lo blanco. ¿Qué cálculo tendría que realizar? Intenta hacerlo y escribe el procedimiento con la respuesta.

e) Calcula el perímetro el rectángulo.

FRACCIONES

Mariana estaba haciendo un trabajo para artística, en el que tenían que dibujar en papel o la computadora un tablero cuadrado, formado por cuadraditos más chicos. A ella le encanta el color fucsia y es por eso que lo pintó en su totalidad de ese color (Fig 1). En un descuido su hermano (que estaba trabajando con fracciones) le agarró la computadora y pintó el dibujo de varios colores (Fig 2).

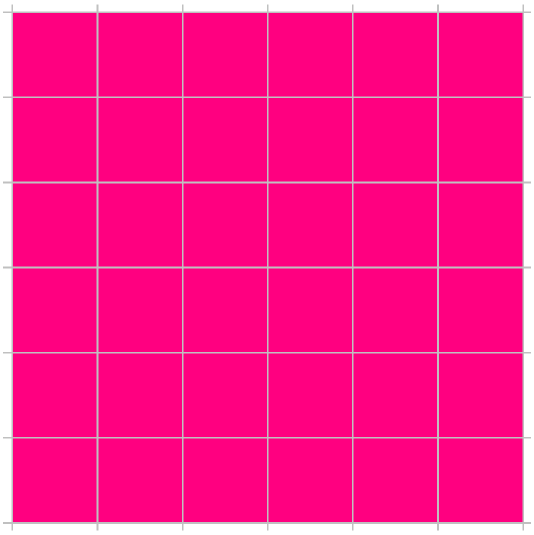


Fig. 1

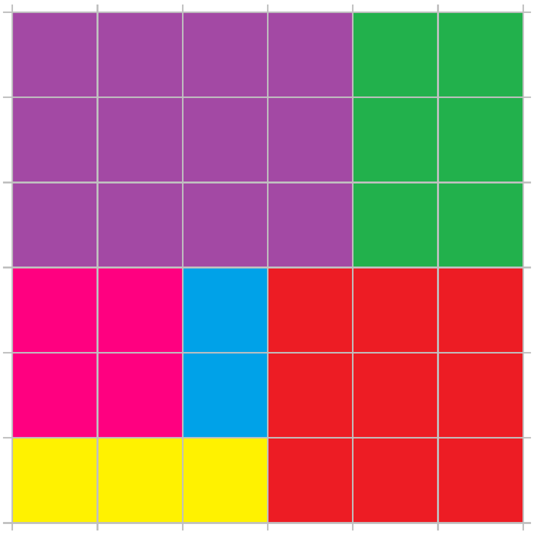


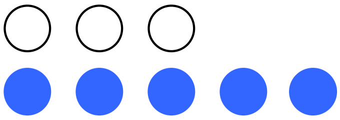
Fig. 2

Antes de realizar la actividad 1 vamos a recordar algo de fracciones:

▪ El numerador de una fracción es el número que va arriba. Por ejemplo, en 3/7 el numerador es 3.

▪ El denominador de una fracción es el número que va debajo. Por ejemplo, en 4/5 el denominador es 5.

▪ El denominador indica la cantidad total de elementos y el numerador, la cantidad que cumple cierta condición. Por ejemplo, las bolillas azules representan los 5/8 del total (son 8 bolillas y 5 de ellas son azules).



Actividad 10**: a)** ¿Cuántos cuadraditos forman el tablero entero?

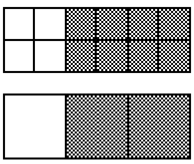
b) ¿Qué fracción representa cada color del segundo tablero?

Ahora vamos a recordar los conceptos "equivalentes", "simplificar", "amplificar" e "irreducible", para luego poder resolver las demás actividades.

▪ Dos fracciones son **equivalentes** cuando representan la misma cantidad.

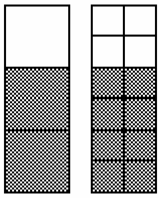
▪ **Simplificar** una fracción es obtener otra fracción equivalente a la dada, dividiendo su numerador y su denominador por un mismo número.

Ejemplo: $\frac{8^{:4}}{12_{:4}} = \frac{2}{3}$



▪ **Amplificar** una fracción es obtener otra fracción equivalente a la dada, multiplicando su numerador y su denominador por un mismo número.

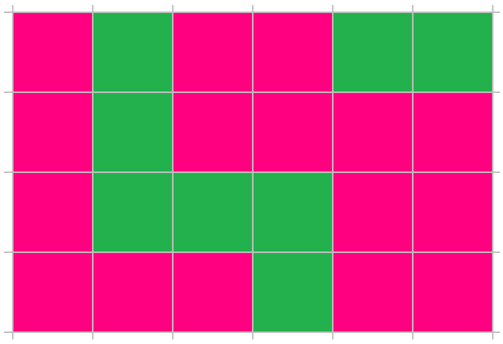
Ejemplo: $$\frac{2^{\,x\,4}}{3_{\,x\,4}} = \frac{8}{12}$$



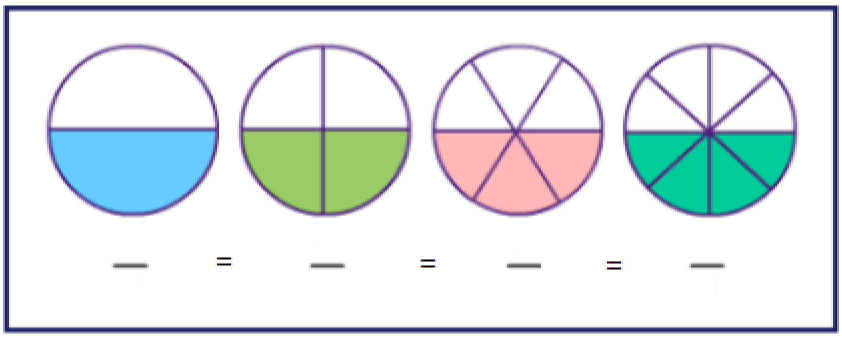
▪ Una fracción es **irreducible** cuando ya no se la puede simplificar. Por ejemplo, 7/9 no se puede simplificar porque el 7 y el 9 no tienen divisores comunes.

***Actividad 11*: a)** Simplifica las fracciones de la actividad anterior (10 b), siempre que sea posible.

b) En la siguiente figura, ¿qué fracción representan los cuadritos verdes? Si se puede simplificar, hazlo.



Actividad 12: al igual que trabajamos en la tarea anterior, algunas figuras se pueden dividir en partes iguales. Por ejemplo, acá vemos que el círculo está dividido de diferentes formas, pero todas sus partes son iguales.



a) Teniendo en cuenta la cantidad de partes en las que está dividido el círculo, escribe la fracción correspondiente al sector coloreado en cada uno.

b) Si le borráramos las líneas divisorias y sólo viéramos la zona coloreada, ¿qué parte de la figura queda pintada? ¿En todos es igual?

c) ¿Por qué crees que las respuestas del punto **a** son distintas a las del punto **b**?

***Actividad 13*: a**yudándote con las figuras de las actividades anteriores, responde:

a) ¿Cuántos medios hay en un entero?

b) ¿Cuántos cuartos hay en un entero?

c) ¿Cuántos octavos hay en un entero?

d) ¿Cuántos cuartos hay en un medio?

e) ¿Cuántos octavos hay en un cuarto?

f) ¿Cuántos octavos hay en un medio?

***Actividades 14*:**

Teniendo en cuenta las respuestas de la actividad 12 y los círculos, responde a cada situación. Puedes hacer dibujos que te ayuden en cada caso.

a) Mariana, Noelia y Lucía están jugando una carrera. Mariana recorrió 3/4, Noelia recorrió 1/2 y Lucía 3/8 ¿Quién va primera, segunda y tercera? ¿Cómo lo pensaste?

b) Felipe leyó 2/8 de un libro y Guillermina 1/4 del mismo. ¿Quién leyó más? ¿Cuánto leyeron entre los dos?

c) La yerba mate se envasa en paquetes de 1 Kg., 1/2 Kg. y 1/4 Kg. Completa los espacios en blanco:

i) 4 Kg. = ☐ paquetes de 1/4 kg

ii) 3 kg. = ☐ paquetes de 1/2 kg.

iii) 4 kg. = ☐ paquetes de 1/2 kg.

iv) 3 kg. = ☐ paquetes de 1/4 kg.

d) Las bolsas de caramelos vienen surtidas con 4 sabores. En una de ellas, 1/2 bolsa son de menta, 1/4 de ananá, 1/4 de naranja y el resto de frutilla. ¿Se puede asegurar, sin saber cuántos caramelos hay en total, que en la bolsa no hay sabor frutilla? ¿Por qué?

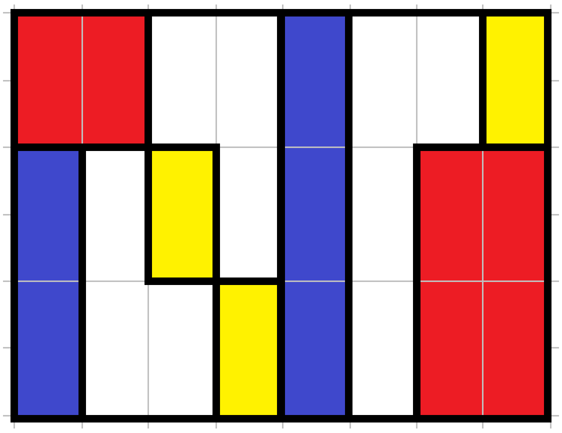
e) Unos albañiles han embaldosado el primer día 1/2 de una habitación. Al segundo día sólo pudo ir a trabajar uno de ellos y embaldosó 1/8 de la habitación.

i) ¿Qué fracción de la habitación embaldosaron en total?

ii) ¿Cuánto les falta embaldosar?

f) Esta mañana Miguel ha comprado 3/4 kg de helado para comer con su familia. Durante el mediodía, se han comido 1/2 kg del helado. ¿Cuánto helado queda en la heladera?

***Actividad 15*:** observa la figura y responde.



a) Escribe la fracción que representa a cada color en la figura.

Rojo: Azul: Amarillo: Espacios blancos:

b) Una alumna dice que las fracciones son: $\frac{3}{12}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{5}{12}$. Queremos comprobar si no se equivocó y para eso vamos a seguir los siguientes pasos:

i) Amplifica las fracciones que escribió Julieta hasta que todas tengan el mismo denominador. Recuerda que, para amplificar, multiplico arriba y abajo por un mismo número (puedes volver a leer “las figuras y las fracciones, el arte y las matemáticas” para ayudarte).

ii) Compara los resultados con las fracciones que tú escribiste. ¿Son las mismas?

iii) Por último, debemos asegurarnos que estas fracciones sumadas completan el entero, porque recuerda que la suma de las partes, hacen el entero. Vamos a utilizar las fracciones amplificadas que escribiste en el punto a y las vas a sumar. Recuerda que, si tienen el mismo denominador (el de abajo), sólo sumo los numeradores (los de arriba).

Multiplicación de fracciones

En la clase de matemática se está trabajando con multiplicación de fracciones y Carola se acuerda que siempre se "multiplicaban derecho". Javier, que estaba sentado al lado, es más curioso y quería saber el por qué se resuelven así, necesitaba entender qué significa multiplicar. Siempre lo entendió cuando se refería a número enteros, pero nunca le habían explicado cuando se trabajaba con fracciones.

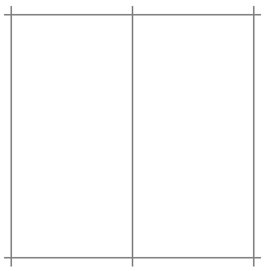
La profesora los escuchó y decidió escribir en el pizarrón los siguientes cálculos, pidiendo a todos los alumnos que los resuelvan como ellos quisieran:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$ **b)** $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} =$

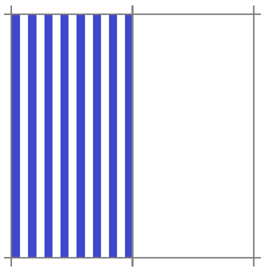
La mayoría de los alumnos los resolvió como recordaba Carola, multiplicando derecho:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$

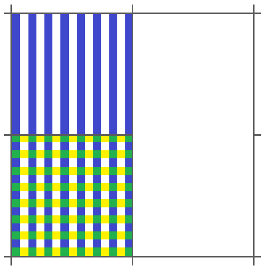
Sin embargo, Darío levanta la mano y explica que él lo resolvió en forma gráfica. Pasó al frente a mostrar su procedimiento utilizando el primer ejercicio. Primero dibujó un cuadrado y lo dividió por la mitad:



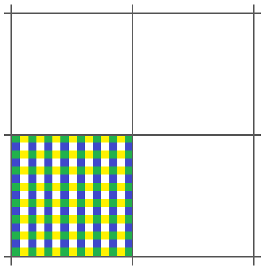
Pintó una de las mitades con rayas azules y explicó que lo hacía porque la primera fracción decía 1/2.



Luego, a esa mitad la volvió a dividir en la mitad, porque la segunda fracción también era 1/2. En este caso lo coloreó con rayas amarillo, ya que la unión del azul y el amarillo (dos colores primarios) haría que se vea de color verde (color secundario).



Para concluir su explicación dijo: “si observamos el dibujo y lo dividimos en partes iguales, quedó sólo un cuadradito pintado con doble raya (o verde) y en total son 4. Por lo tanto, quedó pintado 1/4, que es el resultado de la multiplicación.



Luego de esta explicación, Javier comprendió el porqué de la multiplicación y agregó: “calcular 1/2 por 1/2, es como hallar la mitad de la mitad”.

Espero que te haya servido la explicación de estos alumnos para comprender un poco mejor que significa multiplicar dos fracciones. Esta forma de resolver multiplicaciones no siempre es posible utilizarla, ya que hay fracciones con números más grandes y se dificulta realizar la representación gráfica.

Actividad 16: utiliza el procedimiento explicado por Darío, realizando un rectángulo para resolver el cálculo b que escribió la profesora.

Actividad 17: **a**hora sí, volviendo al procedimiento que ya conocíamos (“multiplicar derecho”), resuelve los siguientes cálculos y luego simplifica el resultado.

a) $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} =$ **b)** $\frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} =$ **c)** $\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{15} =$ **d)** $\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{6} =$

Actividad 18: **a**l decir que la multiplicación se resuelve “derecho”, también recordamos que la división se resuelve multiplicación pero cruzado. Por ejemplo: $\frac{3}{2} : \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{15}{8}$

Recordando este procedimiento y ayudándote del ejemplo, resuelve los siguientes cálculos y simplifica el resultado.

a) $\frac{12}{5} : \frac{4}{3} =$ **b)** $\frac{5}{6} : \frac{4}{3} =$ **c)** $\frac{3}{8} : \frac{6}{2} =$ **d)** $\frac{2}{7} : \frac{4}{5} =$