

## 2 Vektory a maticy

### Průvodce studiem

Kapitola je opakováním látky o vektorech a maticích, což byste měli už znát z kurzů lineární algebry. Na tuto kapitolu počítejte se dvěma hodinami studia, pokud jste toho moc z lineární algebry nezapomněli. Jinak bude potřebný čas delší. Všechny uvedené operace s maticemi jsou pak užívány v dalším textu, tak je nutné, abyste je bezpečně zvládli.



### 2.1 Základní pojmy

Vektory budeme označovat malými tučnými písmeny. Sloupcový vektor – příklady:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

Řádkový vektor dostaneme transpozicí sloupcového vektoru, např.

$$\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_p]$$

Skalárni součin vektorů je

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p x_i y_i$$

Speciálně  $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p x_i^2$

Norma vektoru je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$$

Kosinus směrového úhlu dvou vektorů je pak

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Je-li  $\cos \alpha = 0$ , tj.  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ , pak říkáme, že vektory jsou *ortogonální* (jsou na sebe kolmé,  $\cos \alpha = 0$ ). Vidíme, že kosinus směrového úhlu vektorů je vlastně výběrový korelační koeficient veličin  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , tedy jsou-li vektory  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  ortogonální, znamená to, že veličiny  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  jsou nekorelované.

Matice typu  $(n \times p)$  (matice budeme označovat velkými tučnými písmeny) je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  lze sčítat (a odčítat), pokud jsou stejného typu  $(n \times p)$ .

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Matice  $\mathbf{C}$  je opět typu  $(n \times p)$  a pro její prvky platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  lze násobit, pokud jsou typu  $(n \times p)$  a  $(p \times m)$ .

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

Matice  $\mathbf{C}$  je typu  $(n \times m)$  a pro její prvky platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Jelikož vektor je speciální případ matice mající jen jeden sloupec nebo řádek, lze stejně pravidlo užít i pro násobení matice vektorem. Pak např. soustavu lineárních rovnic můžeme stručně zapsat jako

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{b}.$$

Přesvědčte se, že opravdu je to rovnost dvou vektorů, každý o délce rovné počtu řádků matice  $\mathbf{A}$ . Vektory jsou si rovny, když jsou si rovny jejich vzájemně si odpovídající prvky, tzn. máme soustavu lineárních rovnic.

*Transponovaná matice*  $\mathbf{X}^T$  vznikne z matice  $\mathbf{X}$  tak, že zaměníme řádky a sloupce, tzn.

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Transponovaná matice  $\mathbf{X}^T$  je typu  $(p \times n)$ . Je zřejmé, že platí  $(\mathbf{X}^T)^T = \mathbf{X}$ .

Pro transponování platí následující pravidla:



$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

*Hodnost matice typu  $(m \times n)$  je přirozené číslo  $h(\mathbf{C}) \leq \min(m, n)$ .*

Je-li matice typu  $(n \times n)$ , říkáme, že je to *čtvercová matice* rádu  $n$ .

*Symetrická matice* je čtvercová matice, pro kterou platí  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , tzn. je symetrická podle hlavní diagonály.

*Diagonální matice* je čtvercová matice, která má všechny prvky mimo hlavní diagonálu rovny nule.

*Jednotková matice* je diagonální matice s jedničkami na hlavní diagonále. Označujeme ji  $\mathbf{I}$  nebo  $\mathbf{I}_n$ , je-li nutno zmínit její rozměr.

*Stopa matice* je součet diagonálních prvků  $Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

*Determinant matice* označujeme  $|\mathbf{A}|$  nebo  $\det(\mathbf{A})$ . Je to skalár (číselná hodnota), kterou můžeme chápat jako míru nevyváženosti matice.

Když  $\mathbf{A}$  je typu  $2 \times 2$ , pak  $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

Matice  $\mathbf{A}$  rádu  $n$  je regulární, když  $|\mathbf{A}| \neq 0$ . Pak existuje inverzní matice  $\mathbf{A}^{-1}$ , pro kterou platí

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

Když matice  $\mathbf{A}$  rádu  $n$  je regulární ( $|\mathbf{A}| \neq 0$ ), pak hodnost matice je  $h(\mathbf{A}) = n$ .

Dále platí, že

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

Je-li matice  $\mathbf{A}$  rádu 2 regulární, pak inverzní matice  $\mathbf{A}^{-1}$  je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}/\Delta & -a_{12}/\Delta \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix},$$

kde  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ , tj. determinant matice  $\mathbf{A}$ .

Kvadratická forma matice je skalár

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Kvadratická forma je určena maticí  $\mathbf{A}$ . Matice  $\mathbf{B}$ , pro kterou platí  $b_{ii} = a_{ii}$  a současně  $b_{ij} + b_{ji} = a_{ij} + a_{ji}$  určuje tutéž kvadratickou formu. Existuje však *jediná symetrická* matice dané kvadratické formy.



## 2.2 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Necht'  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice rádu  $n$ . Pak vlastní číslo (charakteristické číslo, eigenvalue) je takový skalár  $\lambda$ , aby pro nenulový vektor  $\mathbf{u}$  platilo:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

$\mathbf{u}$  je vlastní (charakteristický) vektor. Vidíme, že výše uvedenou rovností není definován jednoznačně, neboť rovnost platí pro každý vektor  $c\mathbf{u}$ ,  $c \neq 0$ . Nadále budeme tedy uvažovat jen vektory normované (s normou rovnou jedné), tzn.  $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$ , kde  $c = 1/\|\mathbf{u}\|$ . Rovnost pak můžeme přepsat na tvar

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Protože  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , musí platit, že determinant matice v závorkách na levé straně rovnice

$$|\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda| = 0$$

Tento determinant je polynom  $n$ -tého stupně, řešení je  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  a každému vlastnímu číslu odpovídá vlastní vektor  $\mathbf{v}_i$ .

Když  $\mathbf{A}$  je *symetrická matice*, pak všechna vlastní čísla jsou *reálná* a vlastní vektory jsou *ortogonální*, takže platí

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i &= 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j &= 0 & i \neq j \end{aligned}$$

Když vlastní vektory uspořádáme do matice  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ , pak  $\mathbf{V}$  je ortogonální matice, tj. platí

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1} \quad \text{a} \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}.$$

Matici  $\mathbf{A}$  můžeme diagonalizovat:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Pak stopa matice  $\mathbf{A}$  je rovna součtu jejích vlastních čísel,  $Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  a determinant matice  $\mathbf{A}$  je roven součinu jejích vlastních čísel,  $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ .

Spektrální rozklad matice  $\mathbf{A}$  je definován jako

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$$

## 2.3 Další důležité vlastnosti matic

Jestliže  $\mathbf{C}$  je ortogonální matice a  $\mathbf{y} = \mathbf{Cx}$ , pak  $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$

Symetrická matice  $\mathbf{A}$  je *pozitivně definitní*, jestliže kvadratická forma  $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0$  pro každý vektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Když  $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} \geq 0$ , pak  $\mathbf{A}$  je *pozitivně semidefinitní*. Pozitivně definitní matice má všechna vlastní čísla kladná.

Když  $\mathbf{B}$  je matice typu  $(n \times m)$ , s hodností  $m$ , pak  $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$  je pozitivně definitní.

Jestliže  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní, pak existuje regulární matice  $\mathbf{P}$  taková, že

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad \text{a} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$$

Pseudoinverzní matice  $\mathbf{A}^-$ : Když  $\mathbf{A}$  je matice typu  $(m \times n)$ , pak  $\mathbf{A}^-$  je typu  $(n \times m)$  a platí

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^- \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}^-$  vždy existuje, ale není jednoznačně určena.

## 2.4 Derivace skalárního výrazu podle vektoru

Je-li  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , potom

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

Vidíme, že

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$

**Σ Shrnutí**

- vektor, matici, transponování vektorů a matic
- determinant matici, hodnota matici, inverzní matici, jednotková matici, symetrická matici, diagonální matici, stopa matici
- kvadratická forma, pozitivně definitní matici
- vlastní čísla a vlastní vektory matici
- derivace funkce podle vektoru

**Kontrolní otázky**

1. Necht'  $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_n]$ ,  $\mathbf{1}$  je vektor  $n \times 1$ , jehož prvky jsou rovny 1. Čemu jsou rovny výrazy  $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{1} \mathbf{x}^T$ ? Jsou si tyto výrazy rovny?
2. Necht'  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_3]^T$ ,  $\mathbf{a} = [1, 2, 3]^T$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{a} \mathbf{x}^T$ . Spočítejte determinant matici  $\mathbf{B}$ .
3. Necht'  $\mathbf{A}$  je čtvercová matici řádu  $n$ ,  $\mathbf{y}$  je vektor  $n \times 1$ . Čemu je rovna derivace  $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$  podle vektoru  $\mathbf{y}$ ?