

2 Vektory a matice

Průvodce studiem

Kapitola je opakováním látky o vektorech a maticích, což byste měli už znát z kurzů lineární algebry. Na tuto kapitolu počítejte se dvěma hodinami studia, pokud jste toho moc z lineární algebry nezapomněli. Jinak bude potřebný čas delší. Všechny uvedené operace s maticemi jsou pak užívány v dalším textu, tak je nutné, abyste je bezpečně zvládli.



2.1 Základní pojmy

Vektory budeme označovat malými tučnými písmeny. Sloupcový vektor – příklady:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

Řádkový vektor dostaneme transpozicí sloupcového vektoru, např.

$$\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_p]$$

Skalární součin vektorů je

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p x_i y_i$$

Speciálně $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^p x_i^2$

Norma vektoru je

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$$

Kosinus směrového úhlu dvou vektorů je pak

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Je-li $\cos \alpha = 0$, tj. $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$, pak říkáme, že vektory jsou *ortogonální* (jsou na sebe kolmé, $\cos \alpha = 0$). Vidíme, že kosinus směrového úhlu vektorů je vlastně výběrový korelační koeficient veličin \mathbf{x} , \mathbf{y} , tedy jsou-li vektory \mathbf{x} , \mathbf{y} ortogonální, znamená to, že veličiny \mathbf{x} , \mathbf{y} jsou nekorelované.

Matice typu $(n \times p)$ (matice budeme označovat velkými tučnými písmeny) je

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} lze sčítat (a odčítat), pokud jsou stejného typu $(n \times p)$.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Matice \mathbf{C} je opět typu $(n \times p)$ a pro její prvky platí

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Matice \mathbf{A} , \mathbf{B} lze násobit, pokud jsou typu $(n \times p)$ a $(p \times m)$.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

Matice \mathbf{C} je typu $(n \times m)$ a pro její prvky platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Jelikož vektor je speciální případ matice mající jen jeden sloupec nebo řádek, lze stejné pravidlo užít i pro násobení matice vektorem. Pak např. soustavu lineárních rovnic můžeme stručně zapsat jako

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Přesvědčte se, že opravdu je to rovnost dvou vektorů, každý o délce rovné počtu řádků matice \mathbf{A} . Vektory jsou si rovny, když jsou si rovny jejich vzájemně si odpovídající prvky, tzn. máme soustavu lineárních rovnic.

Transponovaná matice \mathbf{X}^T vznikne z matice \mathbf{X} tak, že zaměníme řádky a sloupce, tzn.

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

Transponovaná matice \mathbf{X}^T je typu $(p \times n)$. Je zřejmé, že platí $(\mathbf{X}^T)^T = \mathbf{X}$.

Pro transponování platí následující pravidla:



$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

Hodnost matice typu $(m \times n)$ je přirozené číslo $h(\mathbf{C}) \leq \min(m, n)$.

Je-li matice typu $(n \times n)$, říkáme, že je to *čtvercová matice* řádu n .

Symetrická matice je čtvercová matice, pro kterou platí $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, tzn. je symetrická podle hlavní diagonály.

Diagonální matice je čtvercová matice, která má všechny prvky mimo hlavní diagonálu rovny nule.

Jednotková matice je diagonální matice s jedničkami na hlavní diagonále. Označujeme ji \mathbf{I} nebo \mathbf{I}_n , je-li nutno zmínit její rozměr.

Stopa matice je součet diagonálních prvků $Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Determinant matice označujeme $|\mathbf{A}|$ nebo $\det(\mathbf{A})$. Je to skalár (číselná hodnota), kterou můžeme chápat jako míru nevyváženosti matice.

Když \mathbf{A} je typu 2×2 , pak $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Matice \mathbf{A} řádu n je regulární, když $|\mathbf{A}| \neq 0$. Pak existuje inverzní matice \mathbf{A}^{-1} , pro kterou platí

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

Když matice \mathbf{A} řádu n je regulární ($|\mathbf{A}| \neq 0$), pak hodnost matice je $h(\mathbf{A}) = n$.

Dále platí, že

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

Je-li matice \mathbf{A} řádu 2 regulární, pak inverzní matice \mathbf{A}^{-1} je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}/\Delta & -a_{12}/\Delta \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix},$$

kde $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, tj. determinant matice \mathbf{A} .

Kvadratická forma matice je skalár

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

Kvadratická forma je určena maticí \mathbf{A} . Matice \mathbf{B} , pro kterou platí $b_{ii} = a_{ii}$ a současně $b_{ij} + b_{ji} = a_{ij} + a_{ji}$ určuje tutéž kvadratickou formu. Existuje však *jediná symetrická* matice dané kvadratické formy.



2.2 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Necht' \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n . Pak vlastní číslo (charakteristické číslo, eigenvalue) je takový skalár λ , aby pro nenulový vektor \mathbf{u} platilo:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

\mathbf{u} je vlastní (charakteristický) vektor. Vidíme, že výše uvedenou rovnost není definován jednoznačně, neboť rovnost platí pro každý vektor $c\mathbf{u}$, $c \neq 0$. Nadále budeme tedy uvažovat jen vektory normované (s normou rovnou jedné), tzn. $\mathbf{v} = c\mathbf{u}$, kde $c = 1/\|\mathbf{u}\|$. Rovnost pak můžeme přepsat na tvar

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Protože $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, musí platit, že determinant matice v závorkách na levé straně rovnice

$$|\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda| = 0$$

Tento determinant je polynom n -tého stupně, řešení je $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a každému vlastnímu číslu odpovídá vlastní vektor \mathbf{v}_i .

Když \mathbf{A} je *symetrická matice*, pak všechna vlastní čísla jsou *reálná* a vlastní vektory jsou *ortogonální*, takže platí

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i &= 1 & i &= 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j &= 0 & i &\neq j \end{aligned}$$

Když vlastní vektory uspořádáme do matice $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$, pak \mathbf{V} je ortogonální matice, tj. platí

$$\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1} \quad \text{a} \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}.$$

Matici \mathbf{A} můžeme diagonalizovat:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Pak stopa matice \mathbf{A} je rovna součtu jejích vlastních čísel, $Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ a determinant matice \mathbf{A} je roven součinu jejích vlastních čísel, $|\mathbf{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Spektrální rozklad matice \mathbf{A} je definován jako

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$$

2.3 Další důležité vlastnosti matic

Jestliže \mathbf{C} je ortogonální matice a $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$, pak $\mathbf{y}^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$

Symetrická matice \mathbf{A} je *pozitivně definitní*, jestliže kvadratická forma $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Když $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$, pak \mathbf{A} je *pozitivně semidefinitní*. Pozitivně definitní matice má všechna vlastní čísla kladná.

Když \mathbf{B} je matice typu $(n \times m)$, s hodnotí m , pak $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ je pozitivně definitní.

Jestliže \mathbf{A} je pozitivně definitní, pak existuje regulární matice \mathbf{P} taková, že

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad \text{a} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$$

Pseudoinverzní matice \mathbf{A}^- : Když \mathbf{A} je matice typu $(m \times n)$, pak \mathbf{A}^- je typu $(n \times m)$ a platí

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^- \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

\mathbf{A}^- vždy existuje, ale není jednoznačně určena.

2.4 Derivace skalárního výrazu podle vektoru

Je-li $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, potom

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial y / \partial x_1 \\ \partial y / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial y / \partial x_n \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial \mathbf{a}^T \mathbf{x} / \partial x_1 \\ \partial \mathbf{a}^T \mathbf{x} / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial \mathbf{a}^T \mathbf{x} / \partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

Vidíme, že

$$\frac{\partial \mathbf{a}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}.$$



Shrnutí

- *vektor, matice, transponování vektorů a matic*
- *determinant matice, hodnost matice, inverzní matice, jednotková matice, symetrická matice, diagonální matice, stopa matice*
- *kvadratická forma, pozitivně definitní matice*
- *vlastní čísla a vlastní vektory matice*
- *derivace funkce podle vektoru*



Kontrolní otázky

1. Necht' $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_n]$, $\mathbf{1}$ je vektor $n \times 1$, jehož prvky jsou rovny 1. Čemu jsou rovny výrazy $\mathbf{1}^T \mathbf{x}$, $\mathbf{1} \mathbf{x}^T$? Jsou si tyto výrazy rovny?
2. Necht' $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$, $\mathbf{a} = [1, 2, 3]^T$, $\mathbf{B} = \mathbf{a} \mathbf{x}^T$. Spočítejte determinant matice \mathbf{B} .
3. Necht' \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n , \mathbf{y} je vektor $n \times 1$. Čemu je rovna derivace $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ podle vektoru \mathbf{y} ?