Úloha3

Zapište maticově lineární regresní model, uveďte rozměry jednotlivých matic a vektorů

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

pro řádek

$$y_i = \mathbf{x}_i^T\beta + \epsilon_i$$

rozměry matic a vektorů

$$\mathbf{y}_n$$

n je počet pozorovaných hodnot

$$X_{n\times(k+1)}$$

n je počet pozorovaných hodnot

k je počet parametrů modelu

$$\epsilon_n$$

n je počet pozorovaných hodnot

Jaké jsou předpoklady v klasickém lineárním modelu?

1. $E(\epsilon) = 0$
2. $cov(\epsilon) = \sigma^2\mathbf{I}_n, \sigma^2 > 0$ >> náhodné složky jsou nekorelované
3. $\mathbf{X}$ je nenáhodná matice $n \times (k+1)$
4. hodnost matice $h(X) = k + 1 \leq n$ >> sloupce matice $\mathbf{X}$ nejsou lineárně závislé a počet pozorování je alespoň roven počtu parametrů

Odvoďte vztahy pro odhad parametrů modelu metodou nejmenších čtverců

Reziduální suma čtverců:

$$RSS = (y - Xb)^T(y - Xb) = y^Ty - y^TXb - (Xb)^Ty + (Xb)^T(Xb) = y^Ty - y^TXb - b^TX^Ty + b^TX^TX$$

$$RSS = y^Ty - 2b^TX^Ty + b^TX^TXb$$

Minimalizace RSS

- Derivace podle vektoru b

$$\frac{\partial RSS}{\partial b} = \frac{\partial(y^T y - 2b^T X^T y + b^T X^T X b)}{\partial b} = -2X^T y + 2X^T X b$$

- Derivace rovna nulovému vektoru

$$-2X^T y + 2X^T X b = 0$$

$$X^T y = X^T X b$$

Vztah pro odhad parametrů

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Co je to projekční matice? Jaké má rozměry? Co znamenají hodnoty jejich diagonálních prvků?

1. Matice projekce se používá k nalezení **odhadovaných hodnot** závislé proměnné. Mějme matici regresorů X a vektor y. Projekční matice H promítá vektor $\boldsymbol{y}$ do **sloupcového prostoru** matice X

$$\hat{y} = Xb = X(X^T X)^{-1} X^T y = Hy$$

2. Rozměry projekční matice jsou $N \times N$

Matice	Rozměr
X	$N \times K$
X^T	$K \times N$
$X^T X$	$K \times K$
$(X^T X)^{-1}$	$K \times K$
$H = X(X^T X)^{-1} X^T$	$(N \times K) \cdot (K \times K) \cdot (K \times N) \to N \times N$

3. Hodnoty diagonálních prvků projekční matice představují pákový efekt i-tého pozorování. Hodnota je úměrná vzdálenosti i-tého prvku od těžiště, je považováná za velkou, pokud je větší než dvojnásobek průměrné hodnoty $h_{ij} > 2(k+1)/n$