



# Modelování a simulace 1

## 4. lekce - Matematické prostředky pro modelování a simulaci

**Michal Janošek**

Department of Informatics and Computers  
Faculty of Science  
University of Ostrava  
Ostrava, Czech Republic

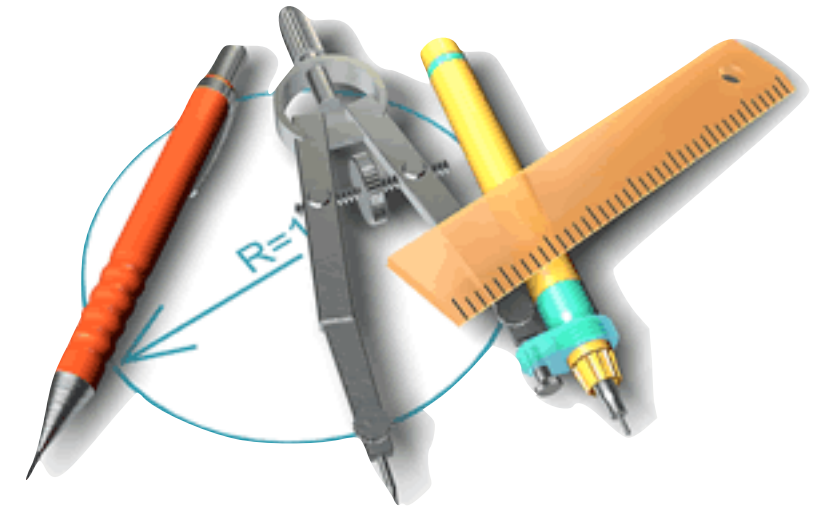
`michal.janosek@osu.cz`

November 3, 2016



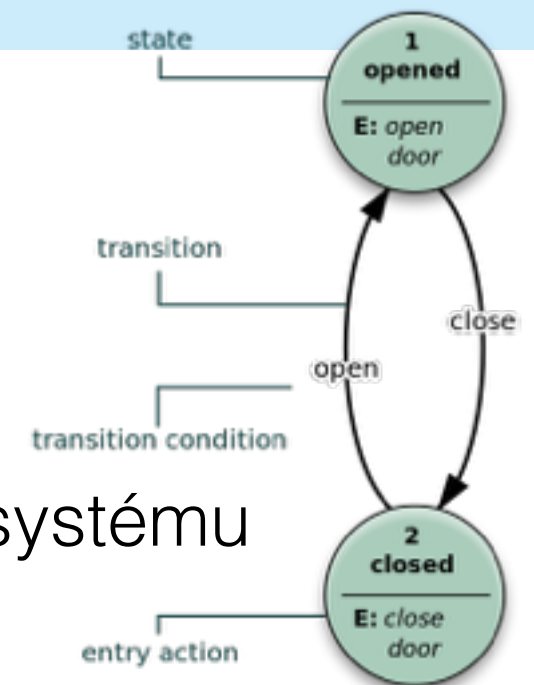
*NetLogo*

- Matematické prostředky
- Matematické metody
- Fáze procesu simulace systému



# Matematické prostředky - Teorie množin a transformací

- popis změn stavu systému
- $X$  je množina, prvky reprezentují všechny možné stavy systému
  - mohou se realizovat v průběhu jeho vývoje



- $X$  nemusí být konečná
- prvky (písmena abecedy)
- vhodný časový interval
- přechody stavů (orientovaný graf)

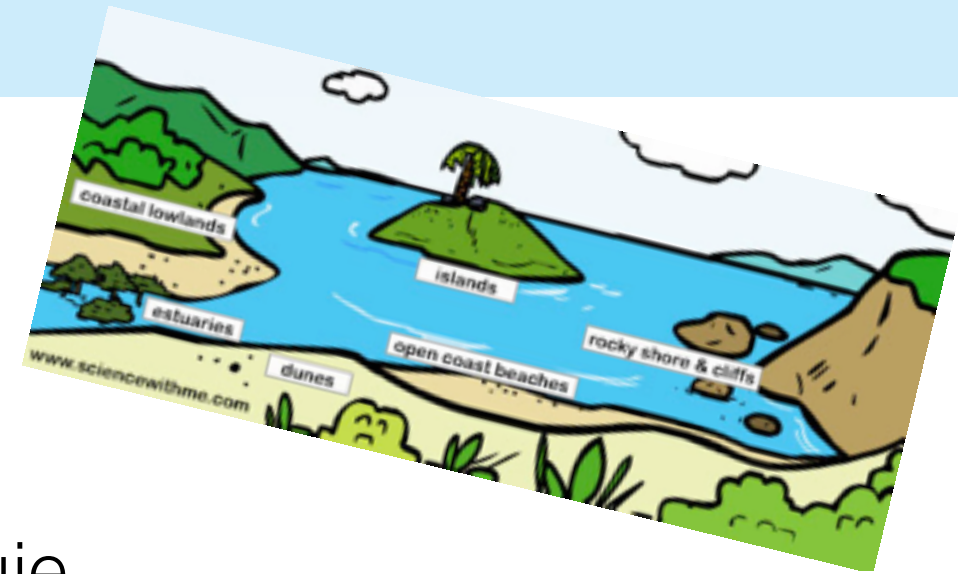


Model stavových změn

- kvalitativní popis vývoje sledovaného systému

# Princip inkompatibility

- setkáváme se se stále složitějšími objekty
- množství informací k jejich popisu se zvětšuje
- přesné modely složitých systémů
  - nezpracovatelné pomocí konvenčních matematických prostředků
  - hledáme nové prostředky
- Roste-li složitost systému, klesá naše schopnost formulovat přesné a významné soudy o jeho chování, až je dosaženo hranice, za níž jsou přesnost a relevantnost prakticky vzájemně se vylučující charakteristiky.



# Matematické prostředky - Teorie fuzzy množin

- pro popis nepřesných (vágních) pojmů
- stupeň příslušnosti
- využití při zkoumání reálných systémů
- fuzzy systémy:

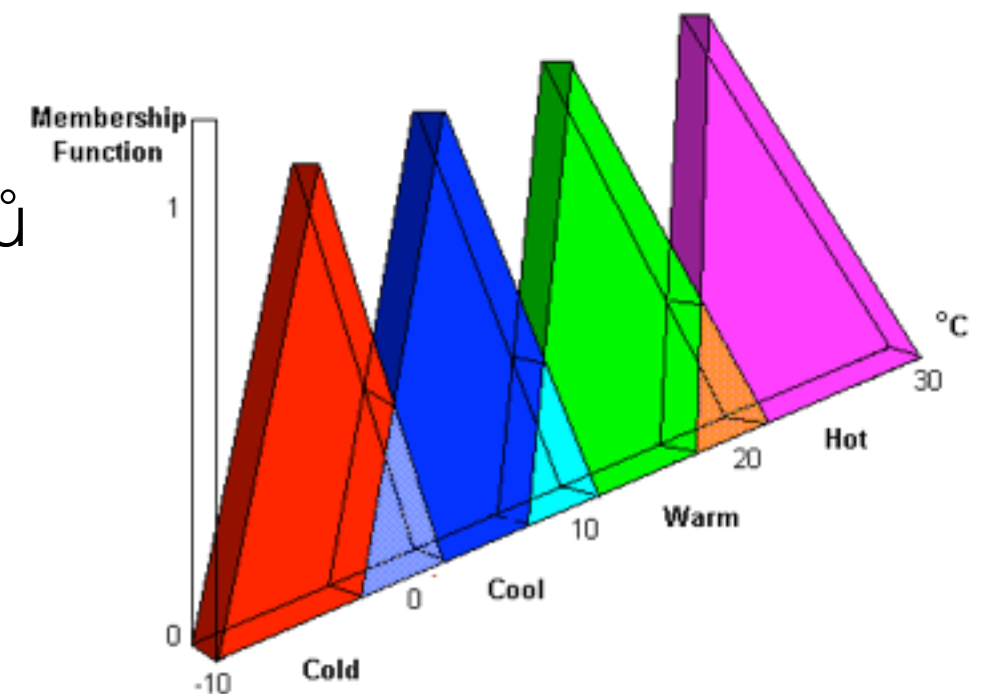


Fig. 2 - Fuzzy Sets to characterize the Temp. of a room.

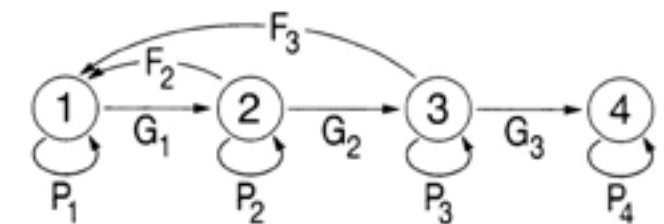
- skutečné fuzzy systémy, jejichž přesný teoretický popis neexistuje;
- systémy, jež jsou natolik složité, že je nejsme schopni klasickými metodami přesně popsat.
- most mezi verbálním a matematickým modelem

# Matematické prostředky - Lineární algebra

- maticová algebra (vytváření modelů)
- matematický popis struktury a interakcí mezi prvky systému
- např. velikosti populací v n-složkovém systému pomocí vektoru

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

- $x_i$  - velikost i-té populace  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :
- interakce mezi populacemi - interakční matice
  - prvek reprezentuje interakci mezi i-tou a j-tou populací



$$\begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & 0 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

Stavový diagram a Lefkovičova matice  
pro vývoj populace velryb

- simulace časových změn stavových proměnných systému
- změny v průběhu diskrétních časových úseků
- hodnota proměnné = funkce původní hodnoty a času, po uplynutí časové jednotky

$$V_{t+1} = f(V_t, t)$$

- soustava diferenčních rovnic

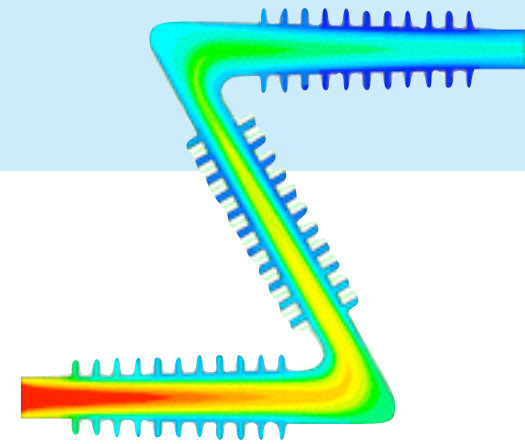
- proměnná představuje vektor stavových proměnných

$$V_{t+1} = f(V_t, V_{t-1}, \dots, t).$$

# Matematické prostředky - Diferenciální rovnice

- popisují změny, který probíhají v čase spojitě
  - $V$  - mohou být vektory 
$$\frac{dV}{dt} = f(V, t)$$
- rychlost změny stavové proměnné  $V$  jako funkci okamžitých hodnot této stavové proměnné a času
- parciální diferenciální rovnice (soustavy)
  - stochastická diferenciální rovnice 
$$dV_t = f(V_t, t) + g(V_t, t) dW_t$$
    - náhodný proces (vektor), náhodná veličina

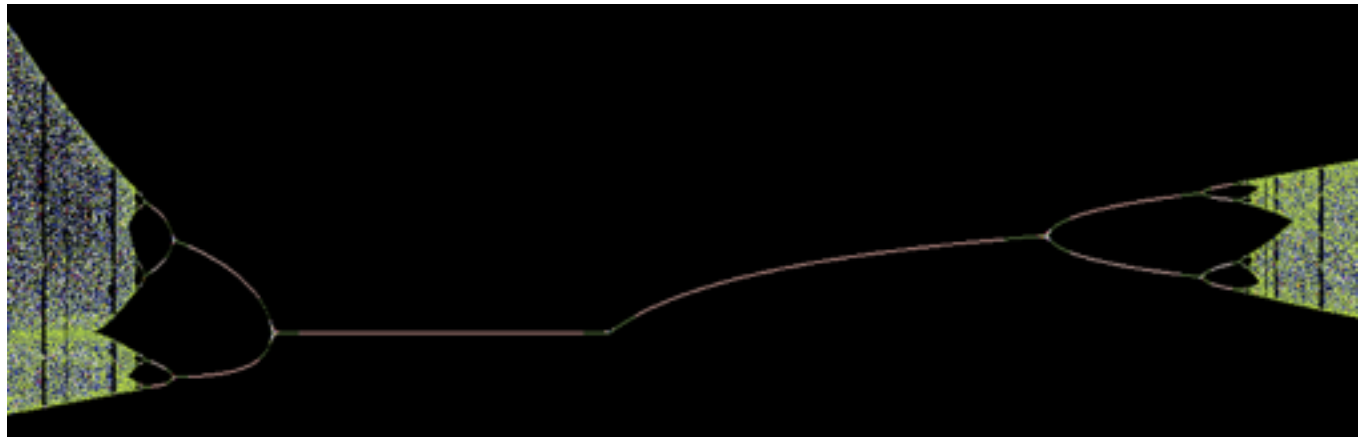




- matematická logika (klasická logika, vícehodnotová logika, fuzzy logika, temporální logika);
- integrodiferenciální a integrální rovnice (např. při studiu dynamiky populací se započtením zpoždění ve vzájemných interakcích);
- orientované grafy (při modelování transportních jevů);
- strukturní termodynamika (zobecněné termodynamické síly a toky při modelování transportu) .

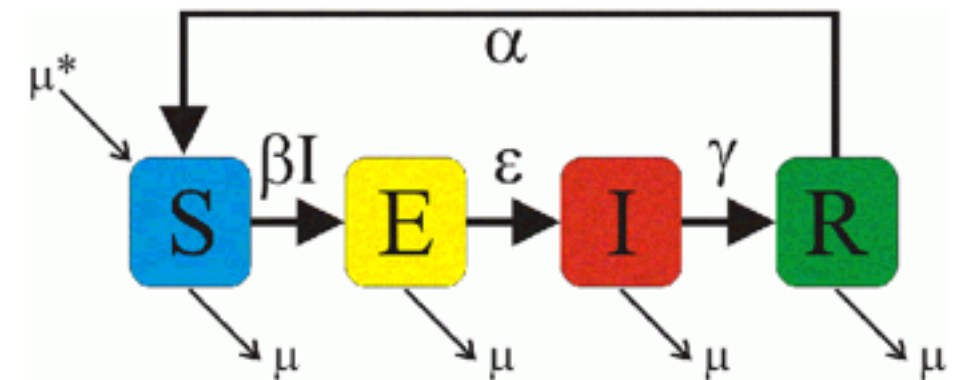
# Matematické metody a modely - Pohybové rovnice

- kvalitativní řešení řešení diferenciálních rovnic (ne obecné řešení)
  - trajektorie (orbita)
  - kritické body, uzavřené křivky
  - ustálené režimy
  - fázový portrét systému
  - bifurkace (zvrát), rozdělení trajektorie
- Thomovy teorie katastrof (zajímají nás ustálené režimy systému)
  - přechod systému do nového, kvalitativně odlišného stavu může pak mít minimálně tři podoby
    - náhlé skokové řešení směrem nahoru či dolů (katastrofa);
    - zpětně směřování k určitému bodu, ale jinému než původní;
    - výchozí stav (hystereze) či proces postupných malých změn k novým stavům (divergence)



# Matematické metody a modely - Kompartmentové modely

- modelování a simulace transportních jevů
- základ v hydrodynamických modelech
- systém idealizovaných nádob (kompartmentů)
- popisují zkoumaný systém prostřednictvím diskrétních oblastí (zón) mezi nimiž protéká kanály určitá látka (nosič a stopovací látka)
  - přísun látky z okolí a do okolí (vstup, výstup)
  - každá nádoba je charakterizována objemem jednotlivých druhů látek a rychlosti jejich časových změn
  - obsah kompartmentů je homogenní (okamžité smísení látek)
- Příklad:
  - Kompartmentový systém příjmu potravy
    - sledovat dynamiku koncentrace nějaké látky, která je součástí potravy (bílkoviny, cukry, tuky, stopové prvky, ...) v určitých místech organismu
  - Farmakologie, epidemiologie, demografie



# Další matematické metody

- metoda automatizovaného generování hypotéz (metoda GUHA)
  - zpracování velkých objemů dat
- matematická statistika (ověřování hypotéz, analýza)
  - regresní analýza
  - korelační analýza
  - analýza časových řad
  - vícerozměrná statistická analýza (shluková analýza)

# Simulační metody založené na teoriích formálních jazyků a automatů

- Lindenmayerových systémů

Lorenzo Mori

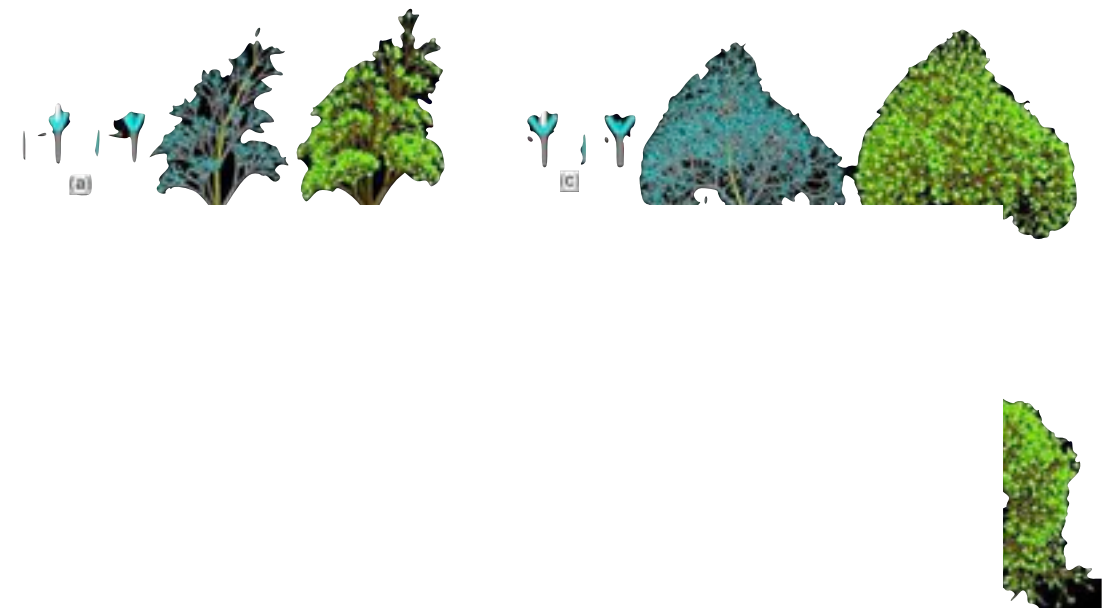
- CĚ  
L-system: 1  
Axiom: X  
Iterations: 1  
Angle: 90  
Branch Length: 1.5  
Rule: X = -F  
Rule: F = F+F-F-F+F
- VZ
- ev

- 

- 

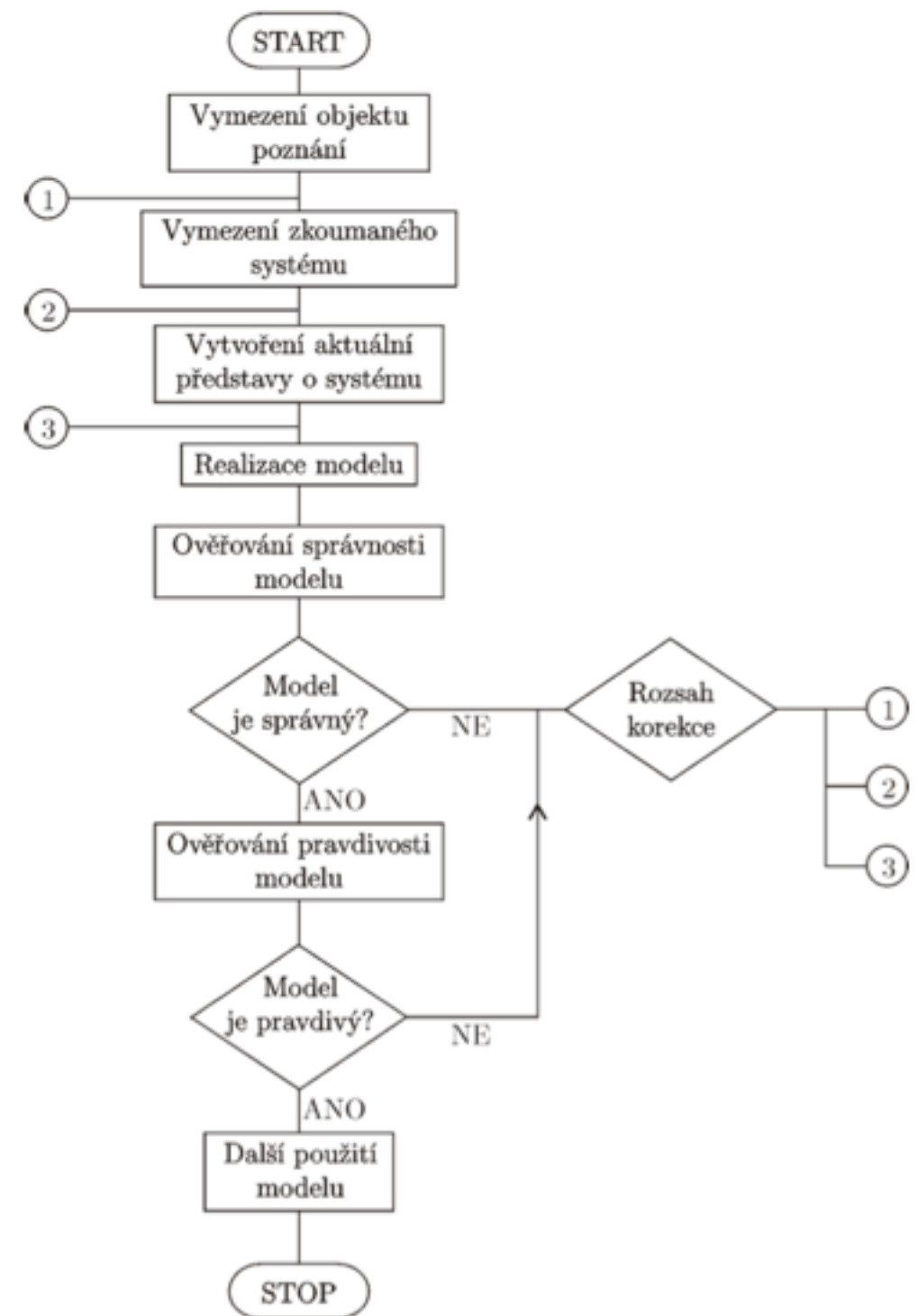
- 

- 



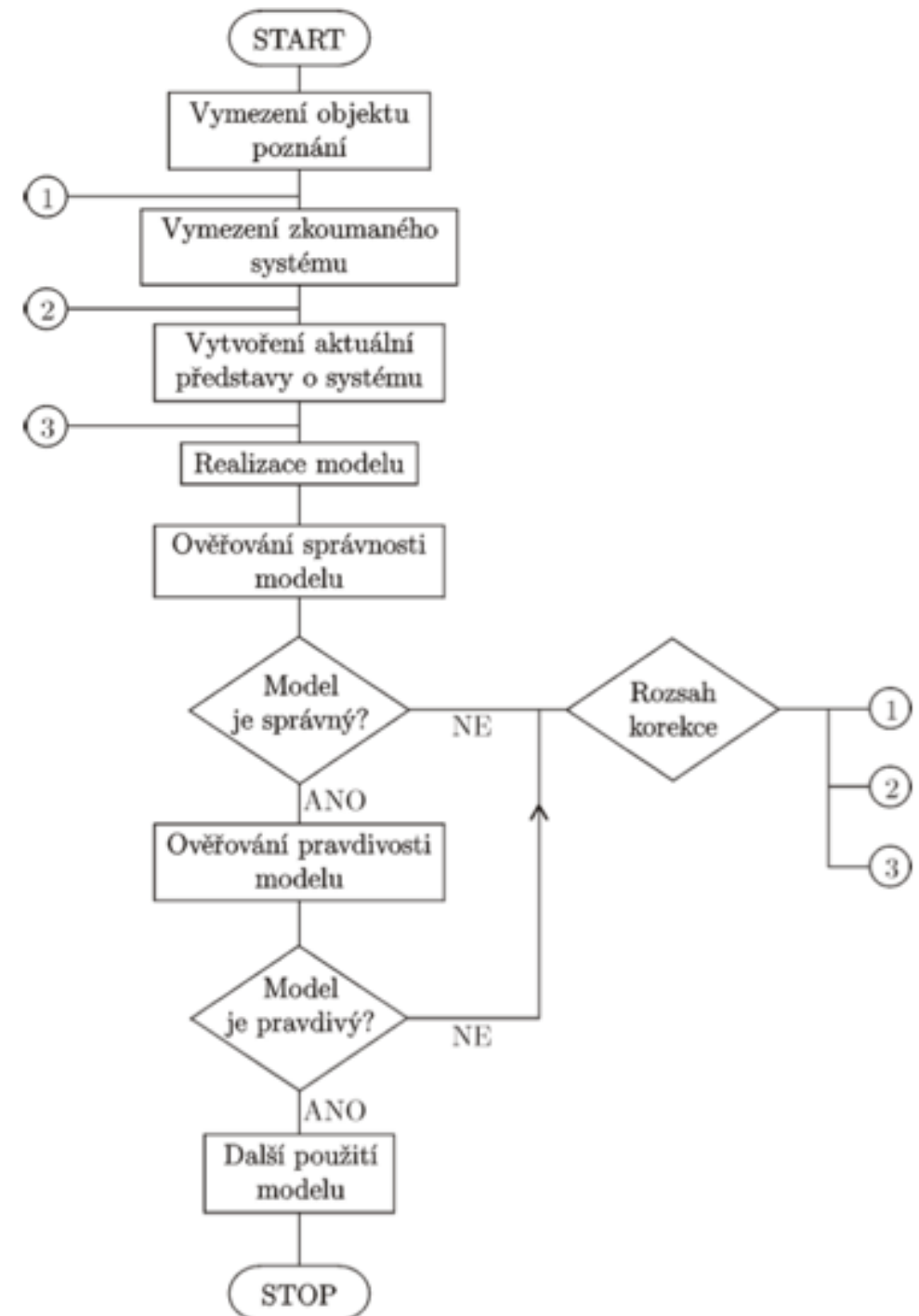
# Základní fáze simulace

- Dohody o chápání pojmu simulace systémů, přijaté na půdě Komitétu aplikované kybernetiky ČSVTS (Český Svaz Vědecko-Technických Společností).
- Simulace systémů jako specifické formy procesu poznání.
- Předmětem simulace systémů jsou systémy vymezené na objektech poznání a jejich dynamika ve smyslu jakékoli změny v čase.
- Simulované systémy mohou být vymezeny jak na objektech již existujících, tak na objektech projektovaných.
- Připouští se i zkoumání systémů, které nemají bezprostřední vztah k objektivní realitě.
- Fundamentálním principem simulace systémů je vyvozování soudů o simulovaném systému na základě experimentů s jeho modelem (přesněji simulátorem).



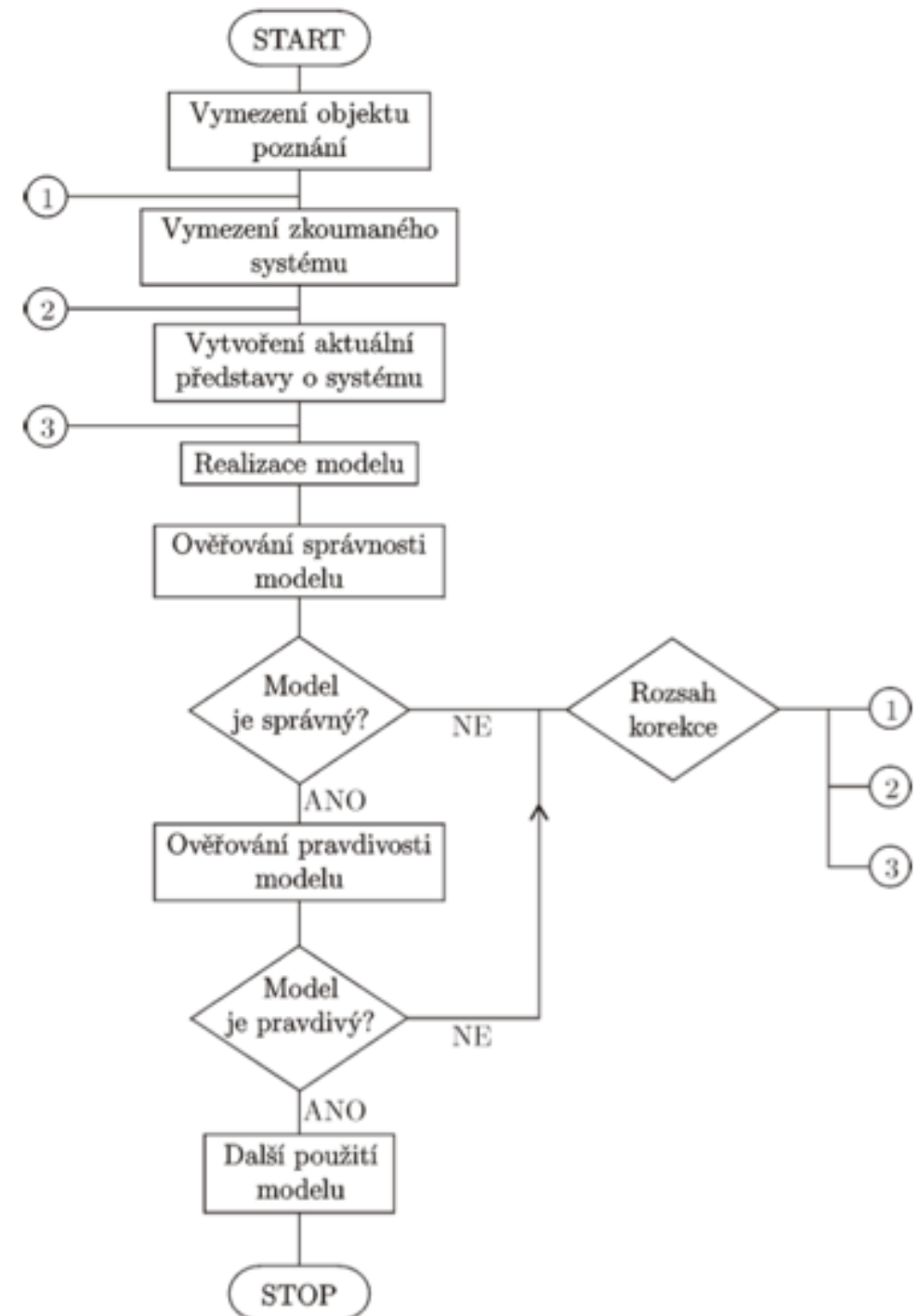
# Základní fáze simulace - vymezení objektu poznání

- vyčlenění zkoumaného objektu z okolního světa,
- resp. stanovení požadavků na projektovaný objekt a určení použitelných dílčích objektů ke konstrukci projektovaného objektu



# Základní fáze simulace - vymezení zkoumaného systému

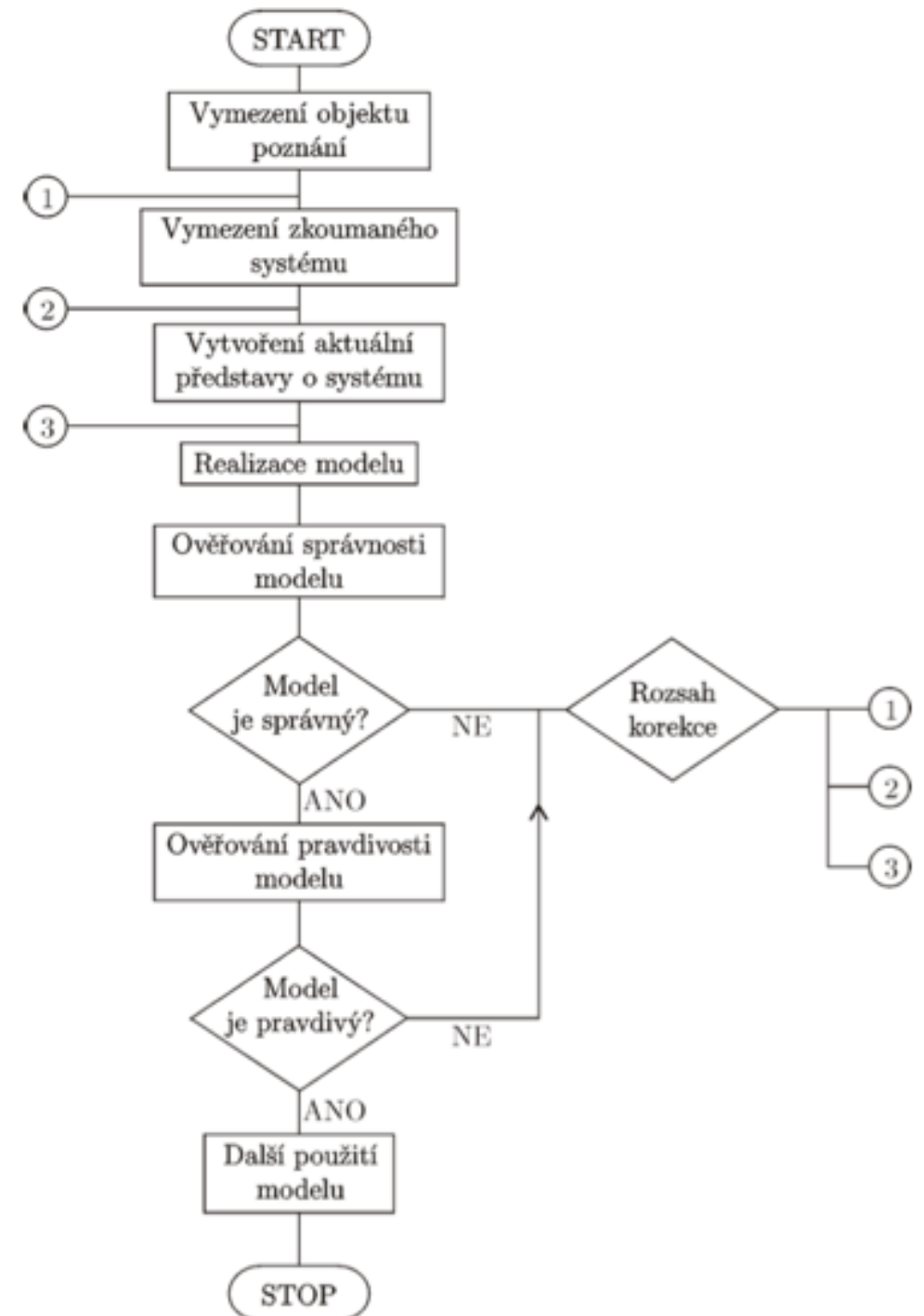
- definovat předmět poznání (simulovaný systém) jednoznačně
  - určit především hledisko zkoumání daného objektu a
  - zvolit odpovídající rozlišovací úroveň.
- Hledisko nazírání je dáno v první řadě účelem zkoumání daného objektu.
- V průběhu zkoumání objektu se ovšem rozlišovací úroveň (rozlišení) může s postupujícím poznáním měnit:
  - zpravidla se zvyšuje, ale občas i snižuje, pokud poznáme, že je něco nadbytečné.





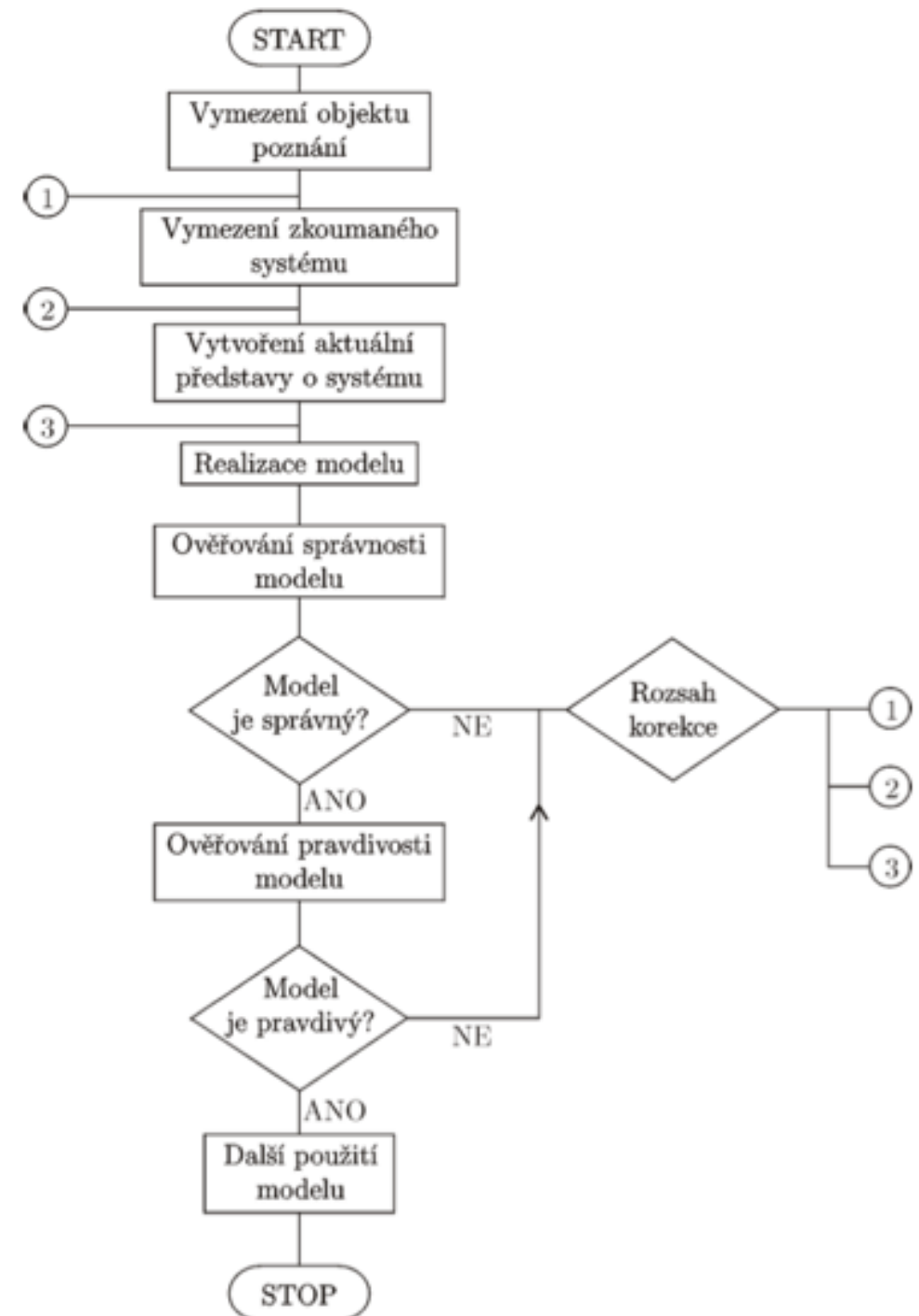
# Základní fáze simulace - vytvoření aktuální představy o systému

- zahrnuje aktuální znalosti o zkoumaném systému,
- jeho struktury a časových změnách,
- resp. zpracování projektu systému a identifikaci použitých subsystémů.



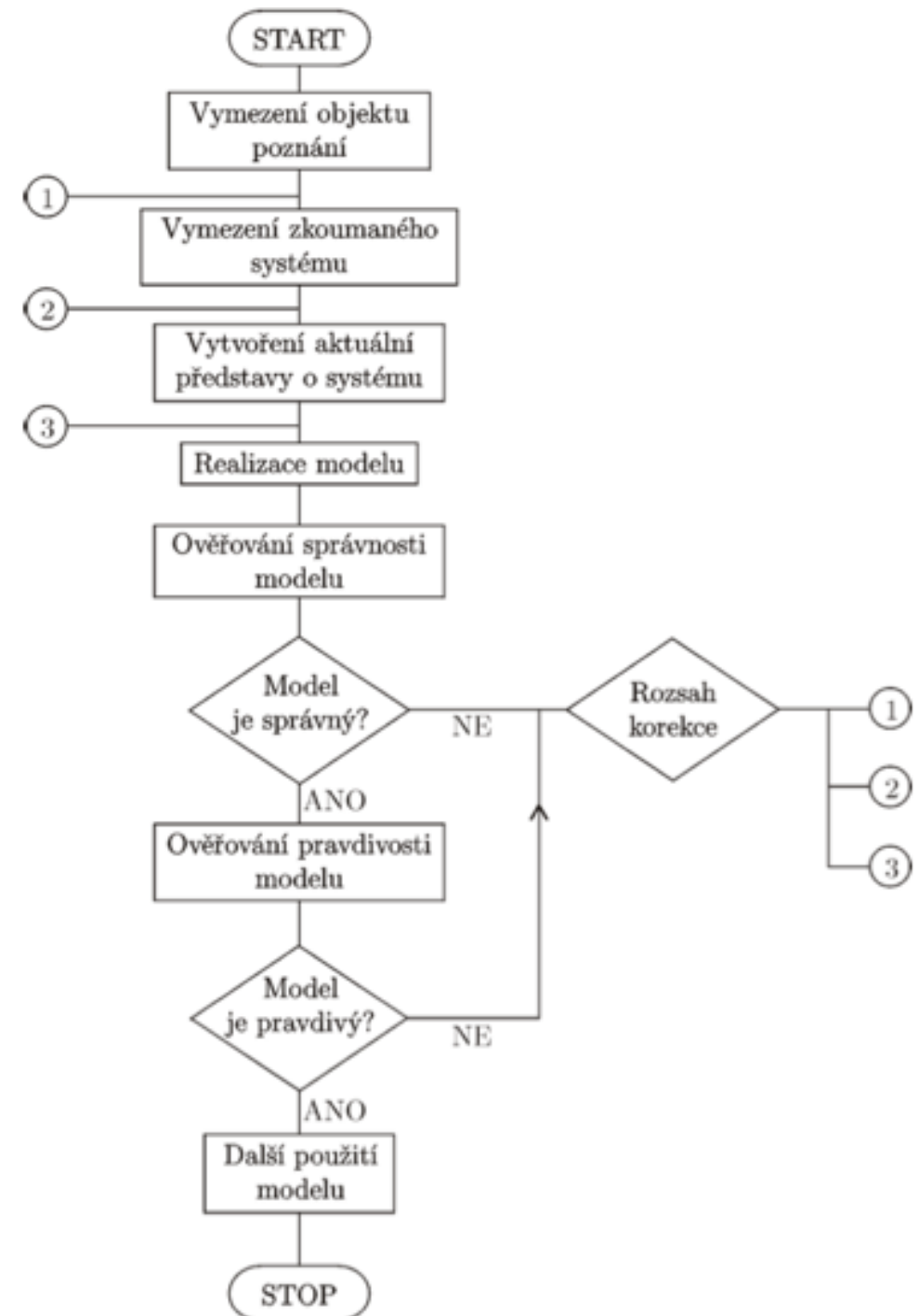
# Základní fáze simulace - realizace modelu

- Návrh simulujícího systému a jeho realizaci na vhodném simulátoru (nejčastěji na číslicovém počítači).
- Návrh modelu může, ale nemusí vycházet z matematického popisu aktuální představy o simulovaném systému.
- Za simulační se považuje jen takový model, jenž při napodobování dynamiky simulovaného systému zachovává uspořádání posloupnosti časových změn.



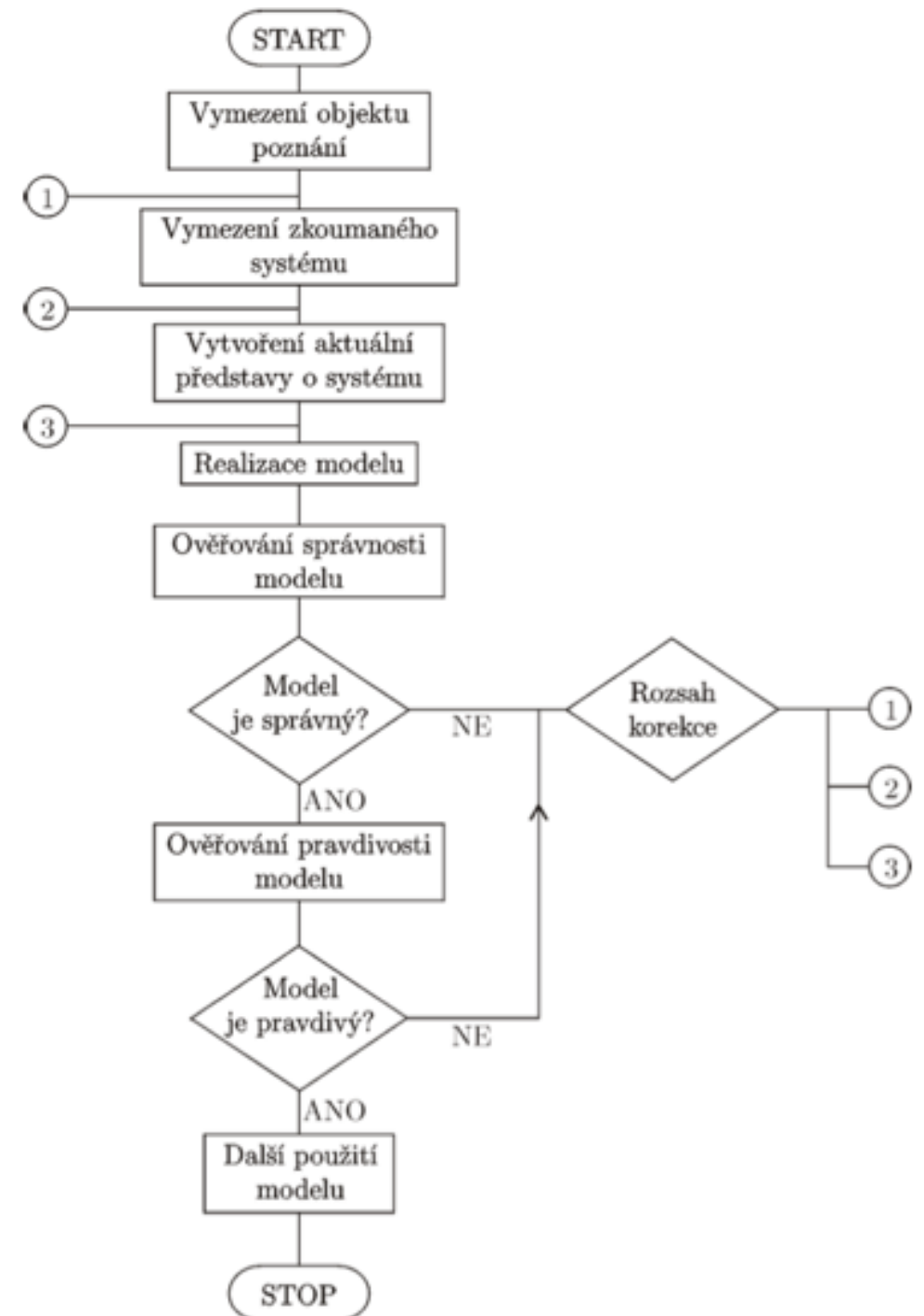
# Základní fáze simulace - správnost a pravdivost modelu

- Model se považuje za správný (verifikace), jestliže konkrétní implementace realizuje náš abstraktní návrh simulované věci.
  - 100% shoda
- Ověřením pravdivosti (validace) modelu rozumíme, zda náš návrh modelu reflektuje chování reálného systému. Hodnotíme užitečnost modelu, tedy jak model plní svůj účel.
  - < 100% shoda
- Z fází ověřování správnosti, resp. pravdivosti, modelu se v případě neúspěchu vracíme k fázím již absolvovaným.
  - Způsob a rozsah korekce závisí přitom zejména na charakteru a závažnosti zjištěných nesrovnalostí.



# Základní fáze simulace - další použití modelu

- Ověřeného modelu lze v procesu poznání využívat např.
  - k identifikaci parametrů modelu,
  - k prognózování,
  - vědecké predikci,
  - optimalizaci,
  - výuce,
  - výcviku apod.



# Použité obrázky

- <http://belvarbcs.hu/matematika/picts/matematika.gif>
- [http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise\\_96/journal/vol4/sbaa/report.3dfuzset.gif](http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_96/journal/vol4/sbaa/report.3dfuzset.gif)
- [http://mathbio.colorado.edu/mediawiki/images/Pro3\\_fig1.jpg](http://mathbio.colorado.edu/mediawiki/images/Pro3_fig1.jpg)
- [http://www.open-engineering.com/var/ezwebin\\_site/storage/images/applications/fsi/thermodynamic-computation-in-a-duct/2293-1-eng-US/Thermodynamic-computation-in-a-duct\\_medium.png](http://www.open-engineering.com/var/ezwebin_site/storage/images/applications/fsi/thermodynamic-computation-in-a-duct/2293-1-eng-US/Thermodynamic-computation-in-a-duct_medium.png)
- <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/45/Chaosorderchaos.png/800px-Chaosorderchaos.png>
- <http://wiki.eclipse.org/images/thumb/7/7d/SEIR.gif/600px-SEIR.gif>
- [http://www-ui.is.s.u-tokyo.ac.jp/~ijiri/SketchLSystem/Results\\_SketchLSystem.JPG](http://www-ui.is.s.u-tokyo.ac.jp/~ijiri/SketchLSystem/Results_SketchLSystem.JPG)
- <http://www.youtube.com/watch?v=r5ksR1if9xQ>
- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Bulb\\_life\\_cycle.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Bulb_life_cycle.png)
- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/cf/Finite\\_state\\_machine\\_example\\_with\\_comments.svg/420px-Finite\\_state\\_machine\\_example\\_with\\_comments.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/cf/Finite_state_machine_example_with_comments.svg/420px-Finite_state_machine_example_with_comments.svg.png)