



Modelování a simulace 1

4. lekce - Matematické prostředky pro modelování a simulaci

Michal Janošek

Department of Informatics and Computers

Faculty of Science

University of Ostrava

Ostrava, Czech Republic

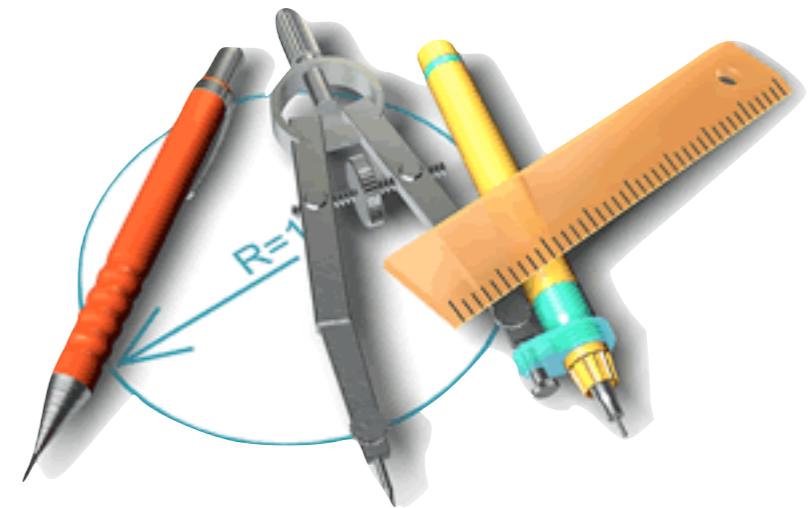
`michal.janosek@osu.cz`

November 3, 2016



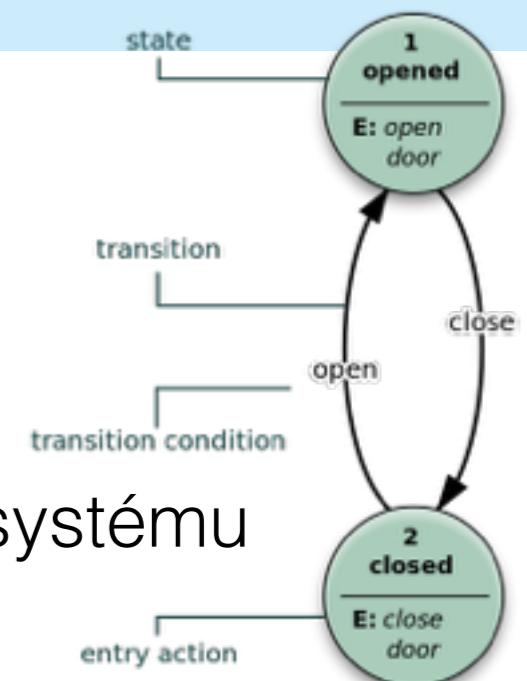
NetLogo

- Matematické prostředky
- Matematické metody
- Fáze procesu simulace systému



Matematické prostředky - Teorie množin a transformací

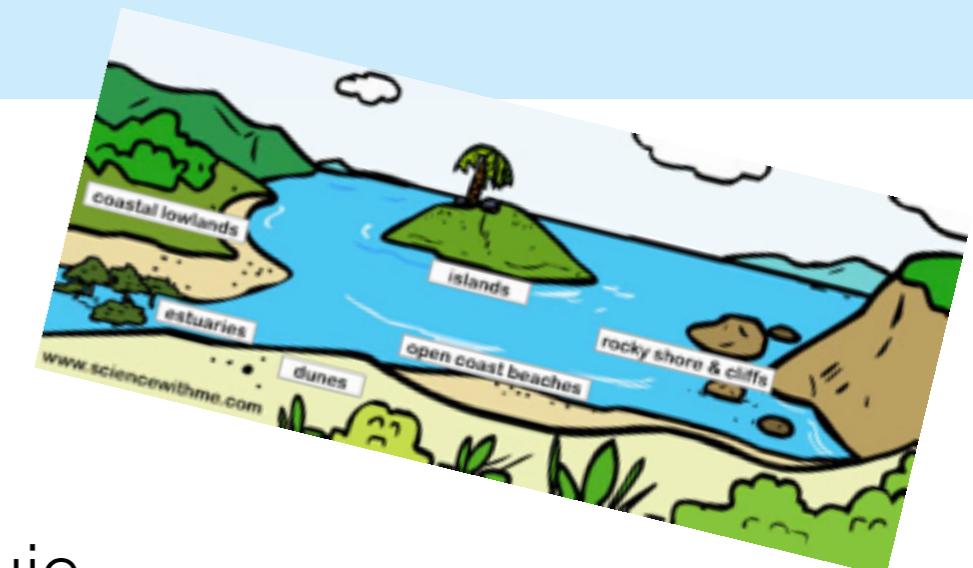
- popis změn stavu systému
- X je množina, prvky reprezentují všechny možné stavy systému
 - mohou se realizovat v průběhu jeho vývoje
- X nemusí být konečná
- prvky (písmena abecedy)
- vhodný časový interval
- přechody stavů (orientovaný graf)
 - kvalitativní popis vývoje sledovaného systému



Model stavových změn

Princip inkompatibility

- setkáváme se se stále složitějšími objekty
- množství informací k jejich popisu se zvětšuje
- přesné modely složitých systémů
 - nezpracovatelné pomocí konvenčních matematických prostředků
 - hledáme nové prostředky
- Roste-li složitost systému, klesá naše schopnost formulovat přesné a významné soudy o jeho chování, až je dosaženo hranice, za níž jsou přesnost a relevantnost prakticky vzájemně se vylučující charakteristiky.



Matematické prostředky - Teorie fuzzy množin

- pro popis nepřesných (vágních) pojmů
- stupeň příslušnosti
- využití při zkoumání reálných systémů
- fuzzy systémy:
 - skutečné fuzzy systémy, jejichž přesný teoretický popis neexistuje;
 - systémy, jež jsou natolik složité, že je nejsme schopni klasickými metodami přesně popsat.
 - most mezi verbálním a matematickým modelem

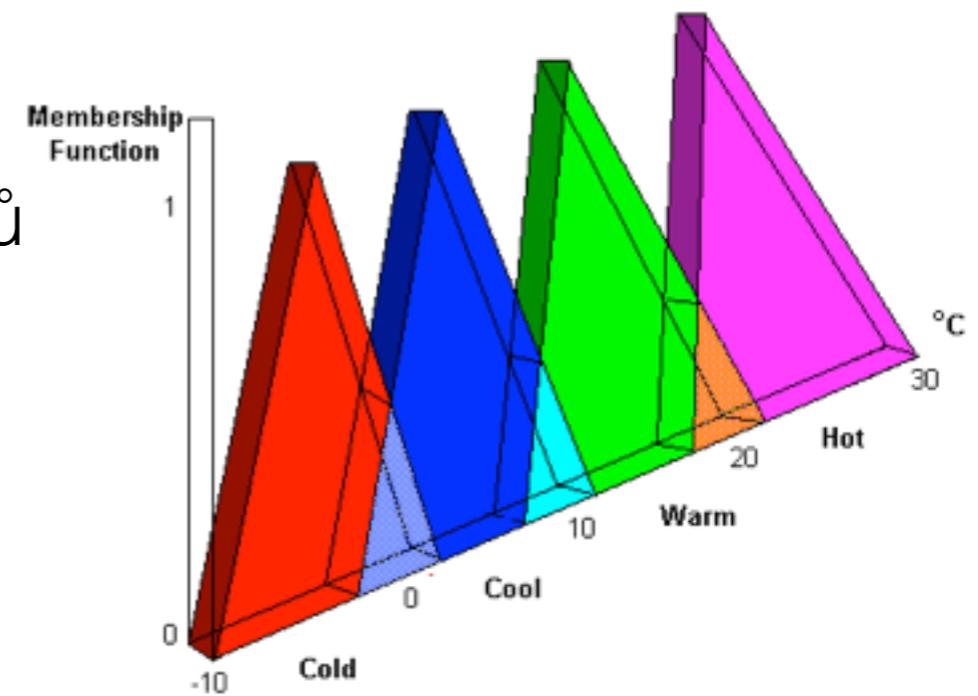
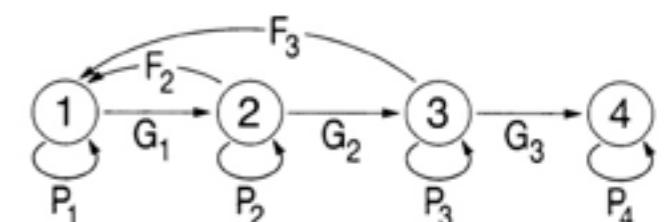


Fig. 2 - Fuzzy Sets to characterize the Temp. of a room.

Matematické prostředky - Lineární algebra

- maticová algebra (vytváření modelů)
- matematický popis struktury a interakcí mezi prvky systému
- např. velikosti populací v n-složkovém systému pomocí vektoru
 - x_i - velikost i-té populace (x_1, x_2, \dots, x_n) ,
 - interakce mezi populacemi - interakční matice
 - prvek reprezentuje interakci mezi i-tou a j-tou populací

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & F_2 & F_3 & 0 \\ G_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

Stavový diagram a Lefkovichova matice
pro vývoj populace velryb

Matematické prostředky - Diferenční rovnice

- simulace časových změn stavových proměnných systému
- změny v průběhu diskrétních časových úseků
- hodnota proměnné = funkce původní hodnoty a času, po uplynutí časové jednotky

$$V_{t+1} = f(V_t, t)$$

- soustava diferenčních rovnic

- proměnná představuje vektor stavových proměnných

$$V_{t+1} = f(V_t, V_{t-1}, \dots, t).$$

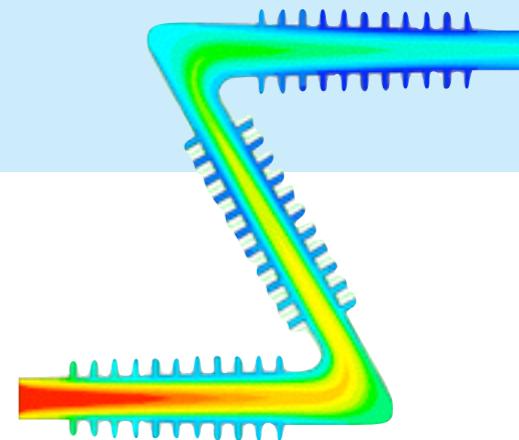
Matematické prostředky - Diferenciální rovnice

- popisují změny, který probíhají v čase spojitě
 - V - mohou být vektory
 - rychlosť změny stavové proměnné V jako funkci okamžitých hodnot této stavové proměnné a času
 - parciální diferenciální rovnice (soustavy)
 - stochastická diferenciální rovnice
 - náhodný proces (vektor), náhodná veličina

$$\frac{dV}{dt} = f(V, t)$$

$$dV_t = f(V_t, t) + g(V_t, t) dW_t$$

Další matematické prostředky



- matematická logika (klasická logika, vícehodnotová logika, fuzzy logika, temporální logika);
- integrodiferenciální a integrální rovnice (např. při studiu dynamiky populaci se započtením zpoždění ve vzájemných interakcích);
- orientované grafy (při modelování transportních jevů);
- strukturní termodynamika (zobecněné termodynamické síly a toky při modelování transportu) .

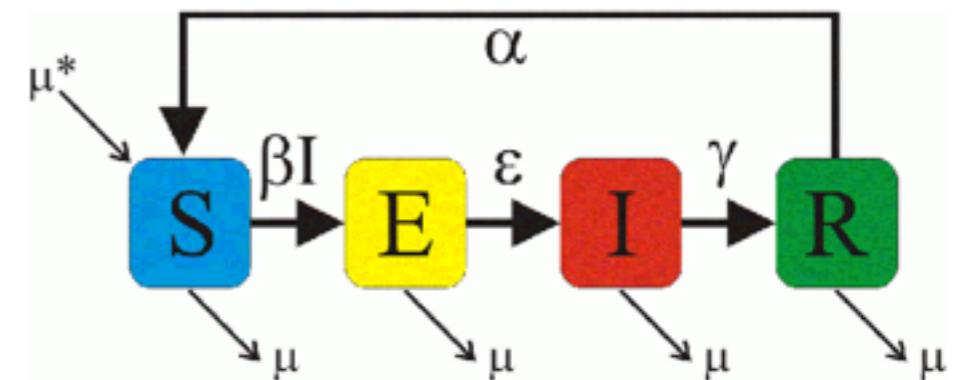
Matematické metody a modely - Pohybové rovnice

- kvalitativní řešení řešení diferenciálních rovnic (ne obecné řešení)
 - trajektorie (orbita)
 - kritické body, uzavřené křivky
 - ustálené režimy
 - fázový portrét systému
 - bifurkace (zvrat), rozdělení trajektorie
- Thomovy teorie katastrof (zajímají nás ustálené režimy systému)
 - přechod systému do nového, kvalitativně odlišného stavu může pak mít minimálně tři podoby
 - náhlé skokové řešení směrem nahoru či dolů (katastrofa);
 - zpětně směřování k určitému bodu, ale jinému než původní;
 - výchozí stav (hystereze) či proces postupných malých změn k novým stavům (divergence)



Matematické metody a modely - Kompartmentové modely

- modelování a simulace transportních jevů
- základ v hydrodynamických modelech
- systém idealizovaných nádob (kompartmentů)
- popisují zkoumaný systém prostřednictvím diskrétních oblastí (zón) mezi nimiž protéká kanály určitá látka (nosič a stopovací látka)



- přísun látky z okolí a do okolí (vstup, výstup)
- každá nádoba je charakterizována objemem jednotlivých druhů látok a rychlosťí jejich časových změn
- obsah kompartmentů je homogenní (okamžité smísení látok)
- Příklad:
 - Kompartmentový systém příjmu potravy
 - sledovat dynamiku koncentrace nějaké látky, která je součástí potravy (bílkoviny, cukry, tuky, stopové prvky, ...) v určitých místech organismu
 - Farmakologie, epidemiologie, demografie

Další matematické metody

- metoda automatizovaného generování hypotéz (metoda GUHA)
 - zpracování velkých objemů dat
- matematická statistika (ověřování hypotéz, analýza)
 - regresní analýza
 - korelační analýza
 - analýza časových řad
 - vícerozměrná statistická analýza (shluková analýza)

Simulační metody založené na teoriích formálních jazyků a automatů

- Lindenmayerových systémů

Lorenzo Mori

- Cε
 - L-system: 1
 - Axiom: X
 - Iterations: 1
 - Angle: 90
- VZ
 - Branch Length: 1.5
 - Rule: X = -F
 - Rule: F = F+F-F-F+F
- ev

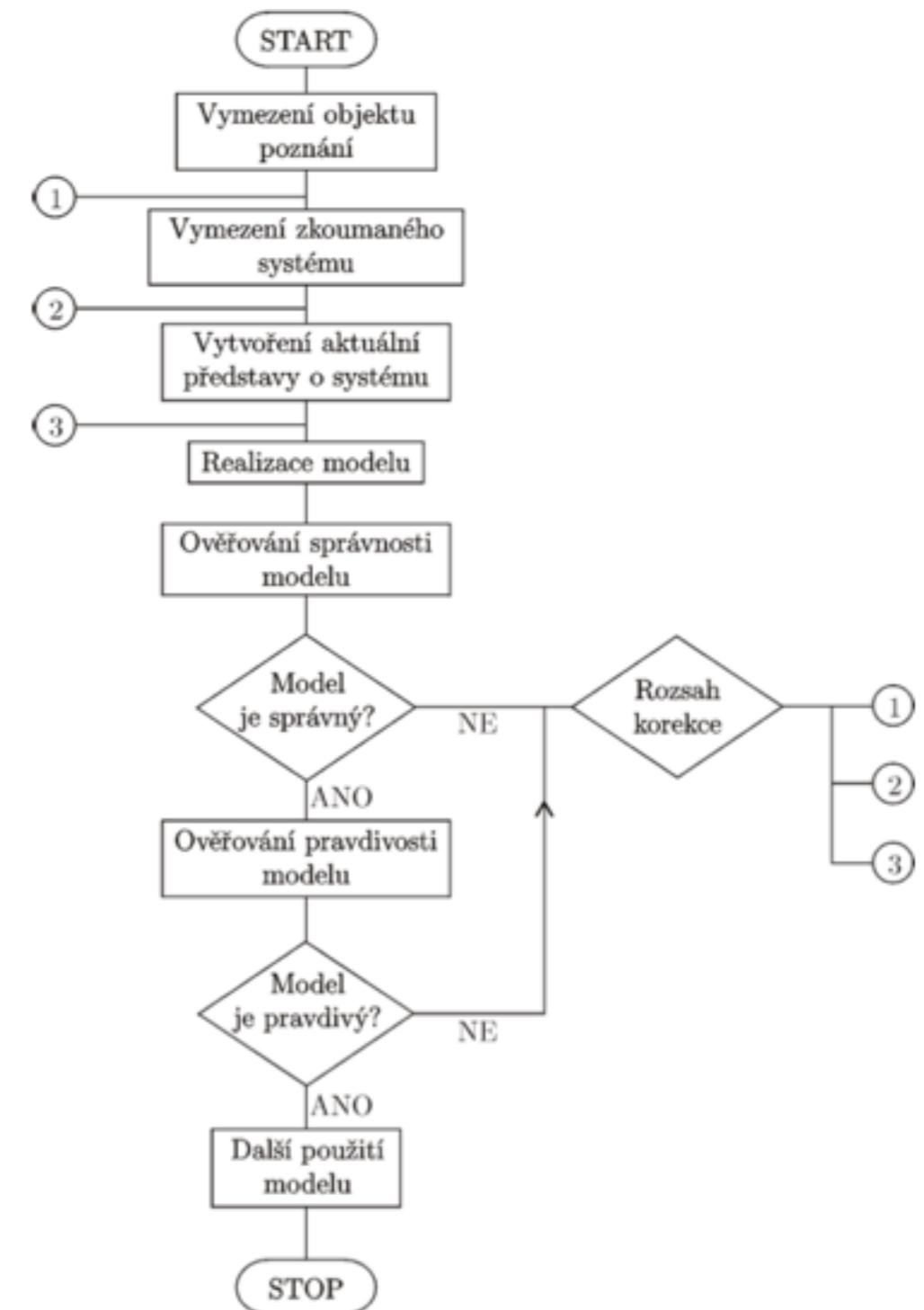


-
-
-
-

-

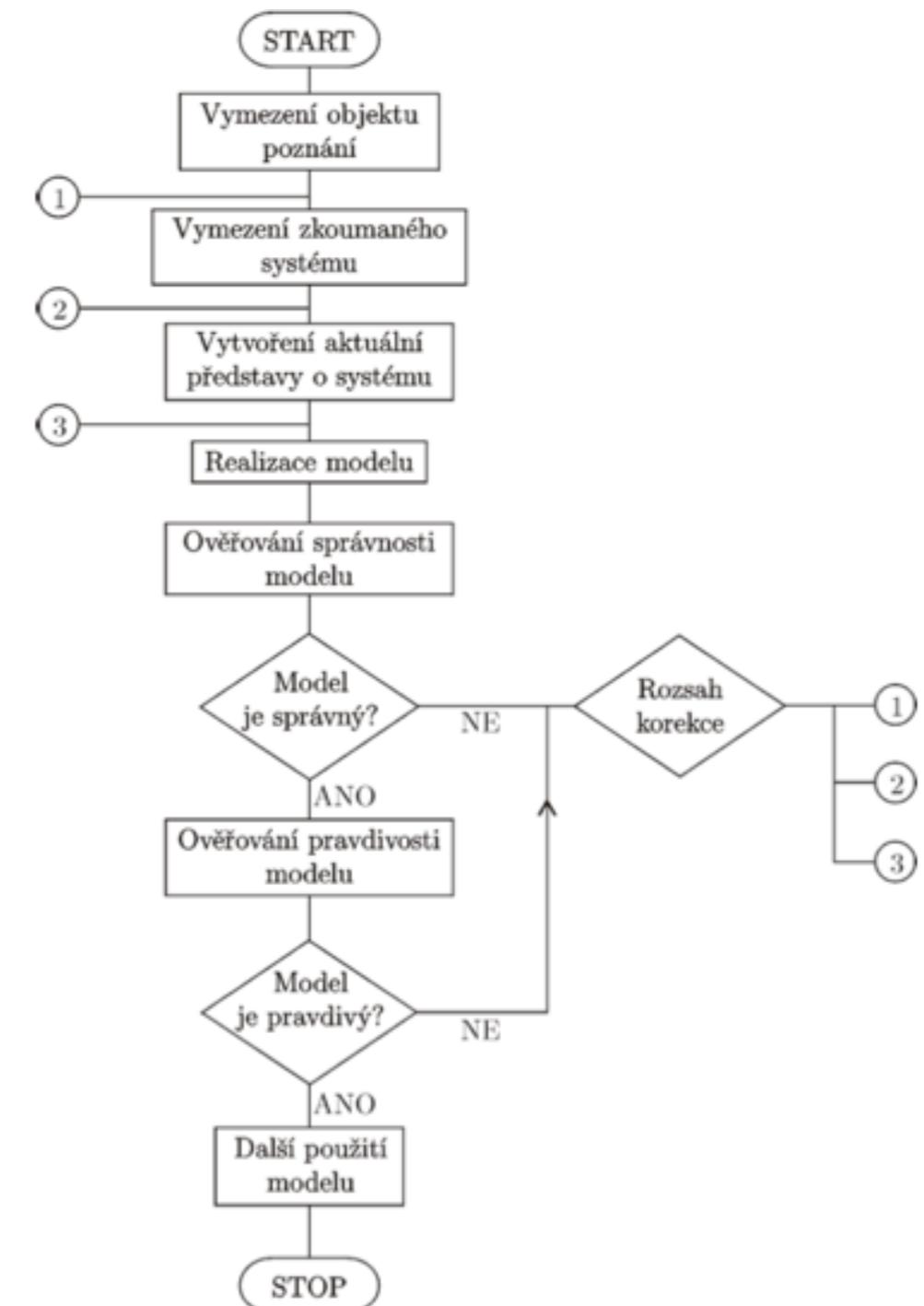
Základní fáze simulace

- Dohody o chápání pojmu simulace systémů, přijaté na půdě Komitétu aplikované kybernetiky ČSVTS (Český Svaz Vědecko-Technických Společností).
- Simulace systémů jako specifické formy procesu poznání.
- Předmětem simulace systémů jsou systémy vymezené na objektech poznání a jejich dynamika ve smyslu jakékoli změny v čase.
- Simulované systémy mohou být vymezeny jak na objektech již existujících, tak na objektech projektovaných.
- Připouští se i zkoumání systémů, které nemají bezprostřední vztah k objektivní realitě.
- Fundamentálním principem simulace systémů je vyvozování soudů o simulovaném systému na základě experimentů s jeho modelem (přesněji simulátorem).



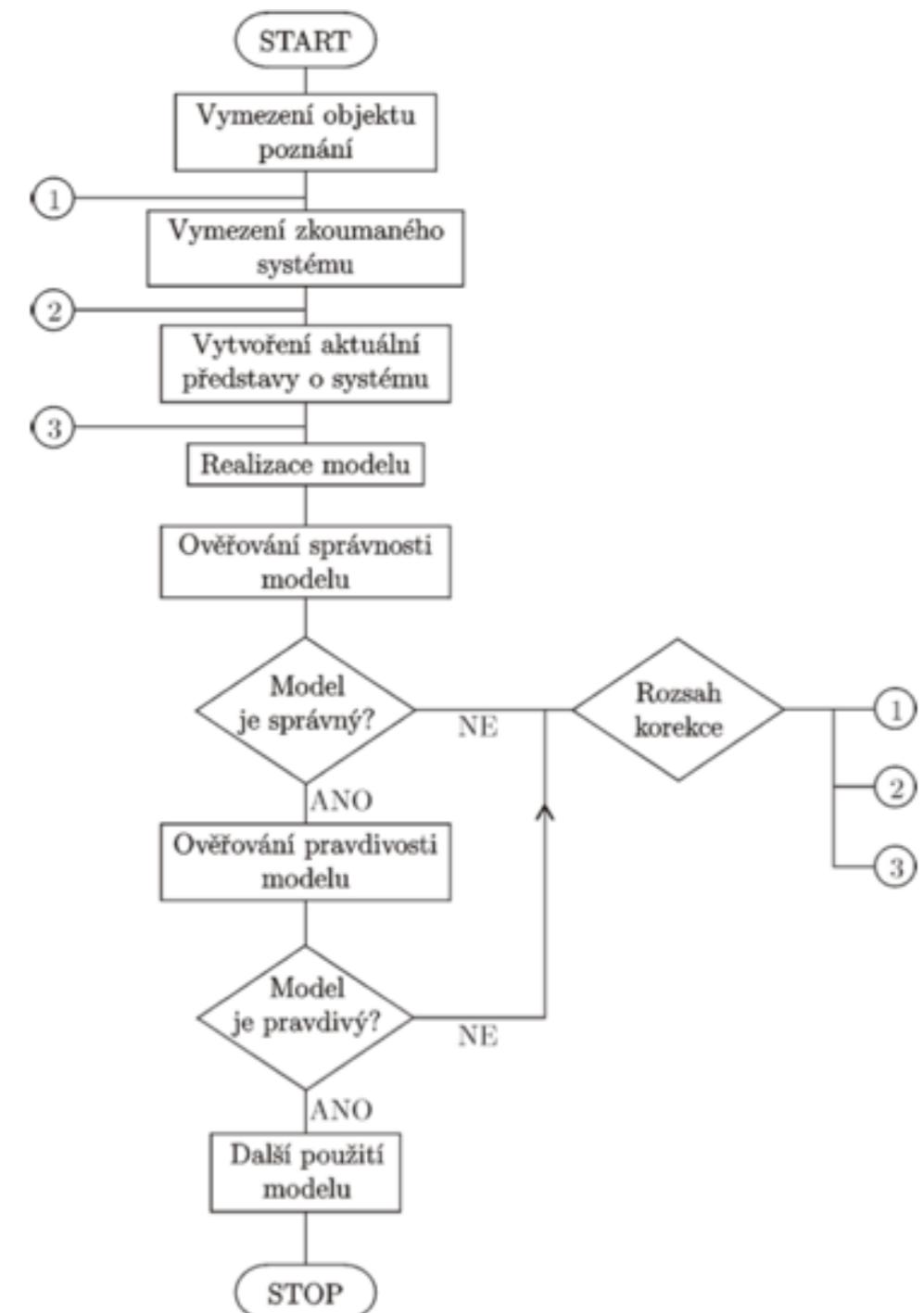
Základní fáze simulace - vymezení objektu poznání

- vyčlenění zkoumaného objektu z okolního světa,
- resp. stanovení požadavků na projektovaný objekt a určení použitelných dílčích objektů ke konstrukci projektovaného objektu



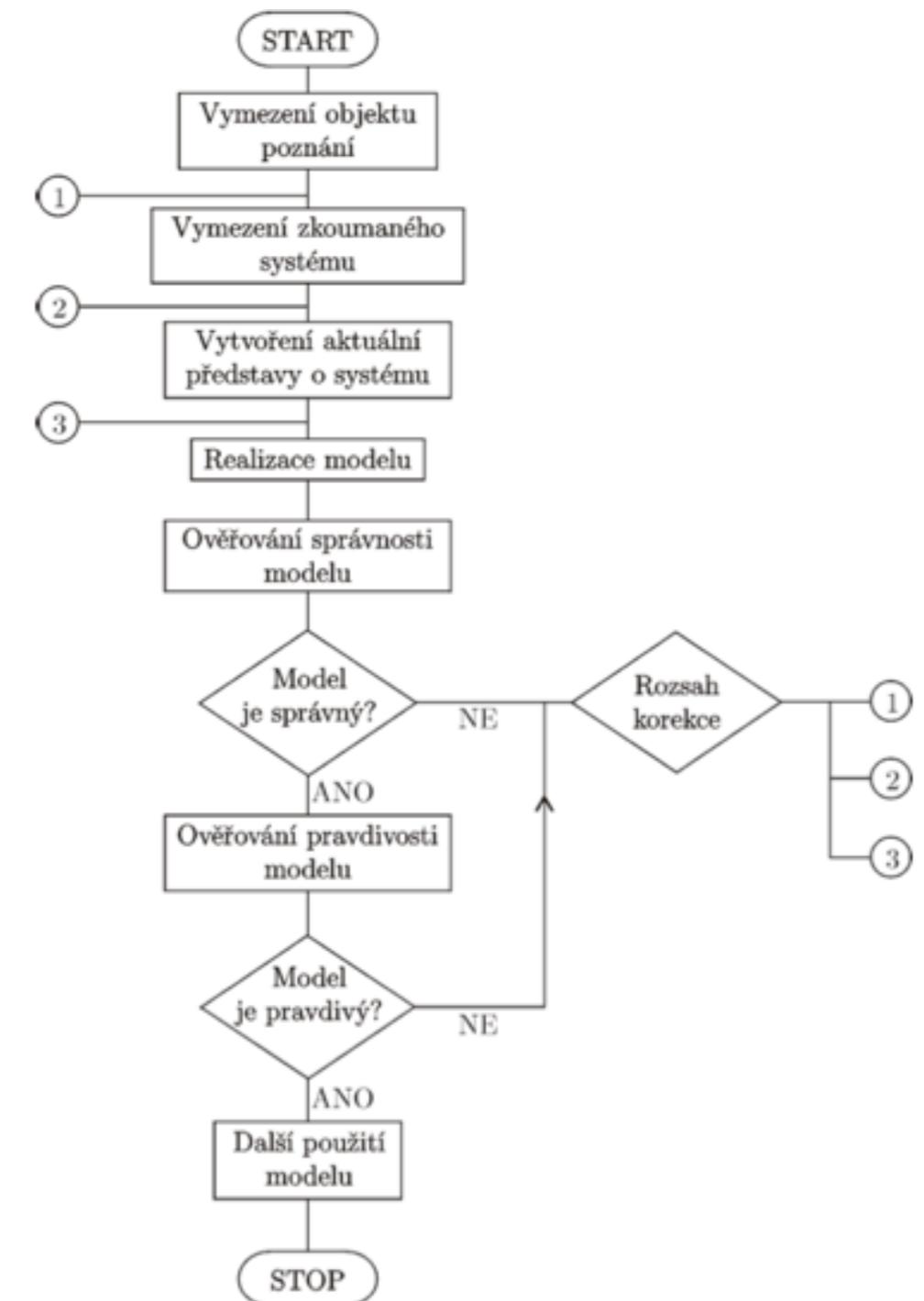
Základní fáze simulace - vymezení zkoumaného systému

- definovat předmět poznání (simulovaný systém) jednoznačně
 - určit především hledisko zkoumání daného objektu a
 - zvolit odpovídající rozlišovací úroveň.
- Hledisko nazírání je dáno v první řadě účelem zkoumání daného objektu.
- V průběhu zkoumání objektu se ovšem rozlišovací úroveň (rozlišení) může s postupujícím poznáním měnit:
 - zpravidla se zvyšuje, ale občas i snižuje, pokud poznáme, že je něco nadbytečné.



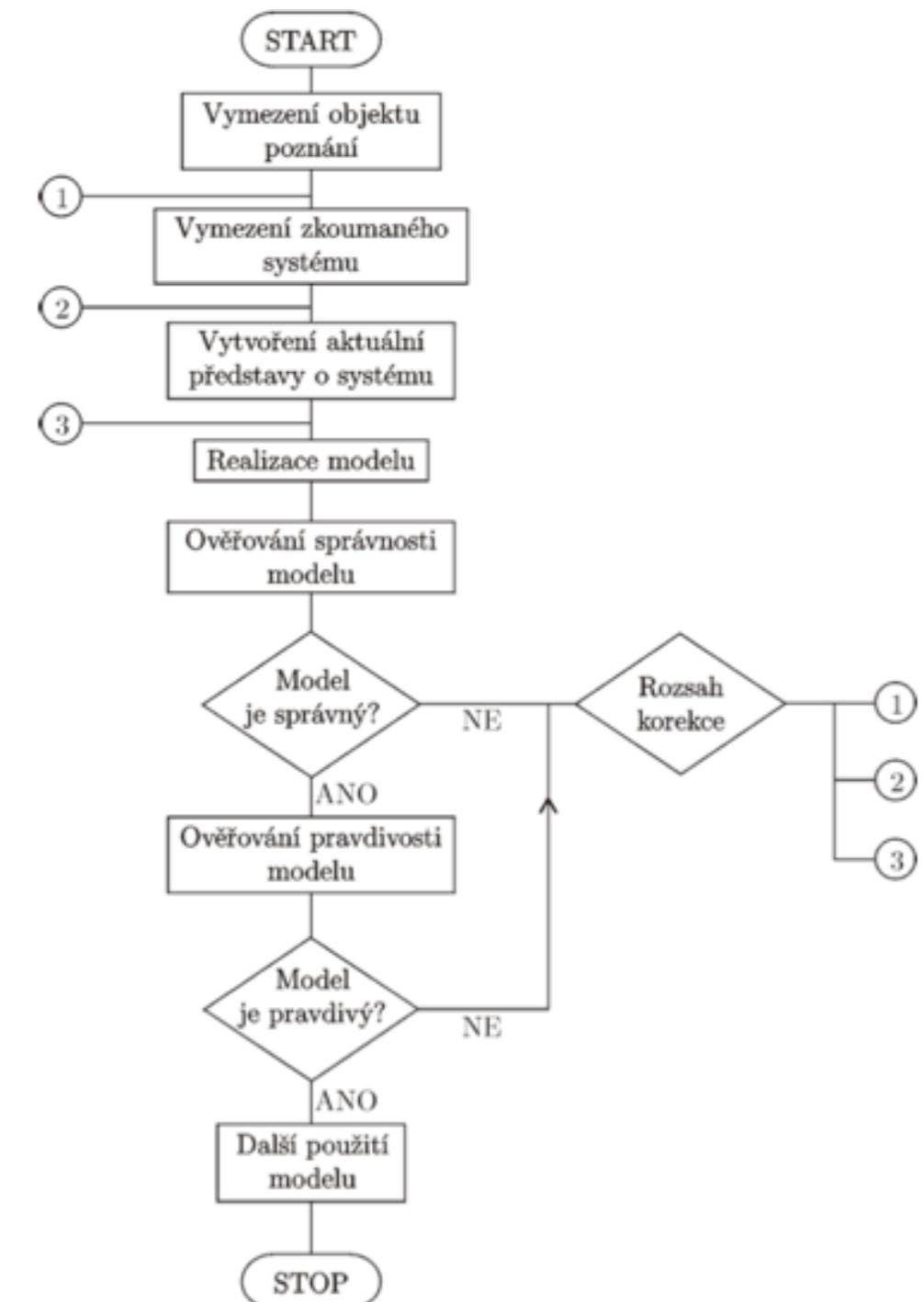
Základní fáze simulace - vytvoření aktuální představy o systému

- zahrnuje aktuální znalosti o zkoumaném systému,
- jeho struktuře a časových změnách,
- resp. zpracování projektu systému a identifikaci použitých subsystémů.



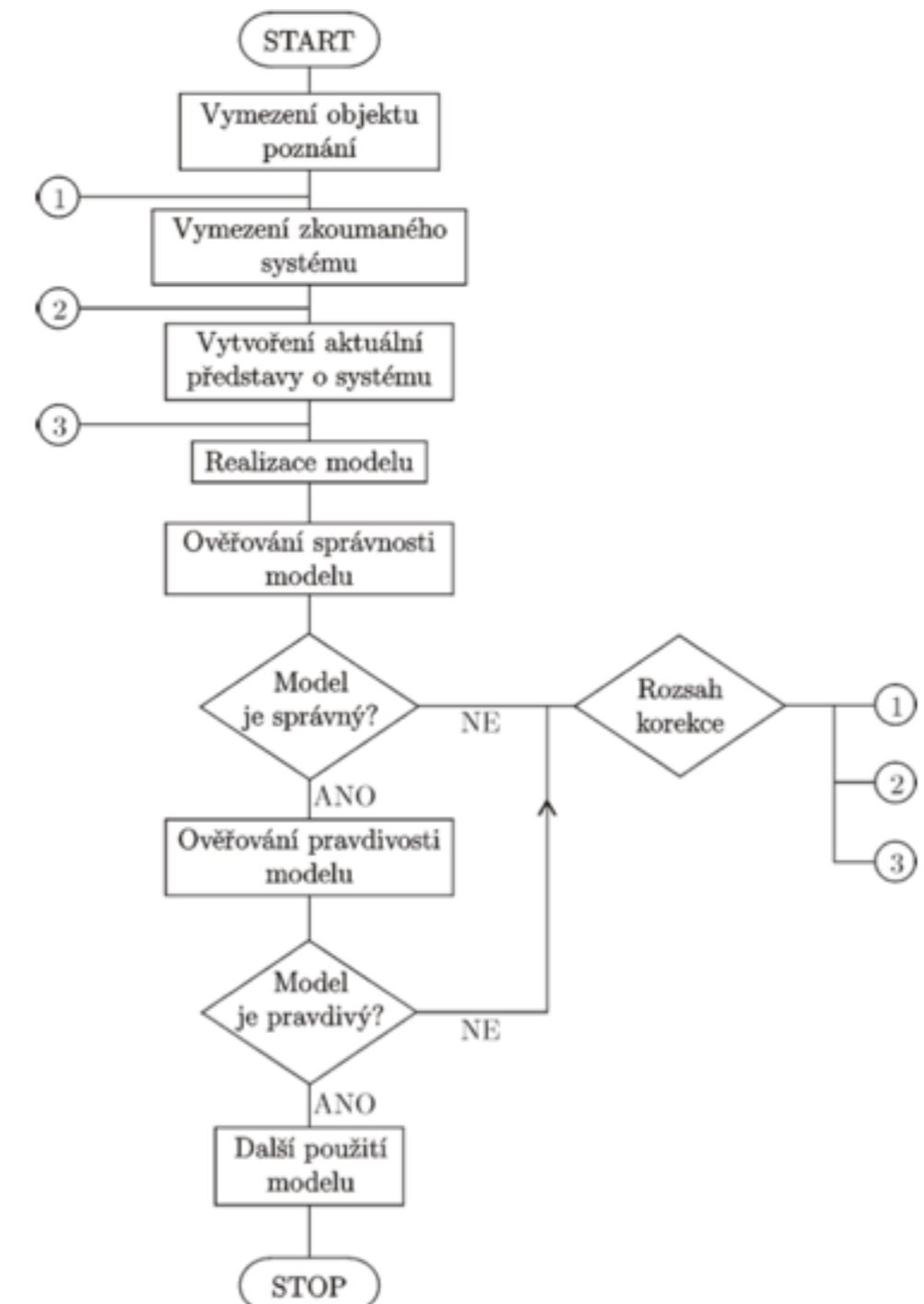
Základní fáze simulace - realizace modelu

- Návrh simulujícího systému a jeho realizaci na vhodném simulátoru (nejčastěji na číslicovém počítači).
- Návrh modelu může, ale nemusí vycházet z matematického popisu aktuální představy o simulovaném systému.
- Za simulační se považuje jen takový model, jenž při napodobování dynamiky simulovaného systému zachovává uspořádání posloupnosti časových změn.



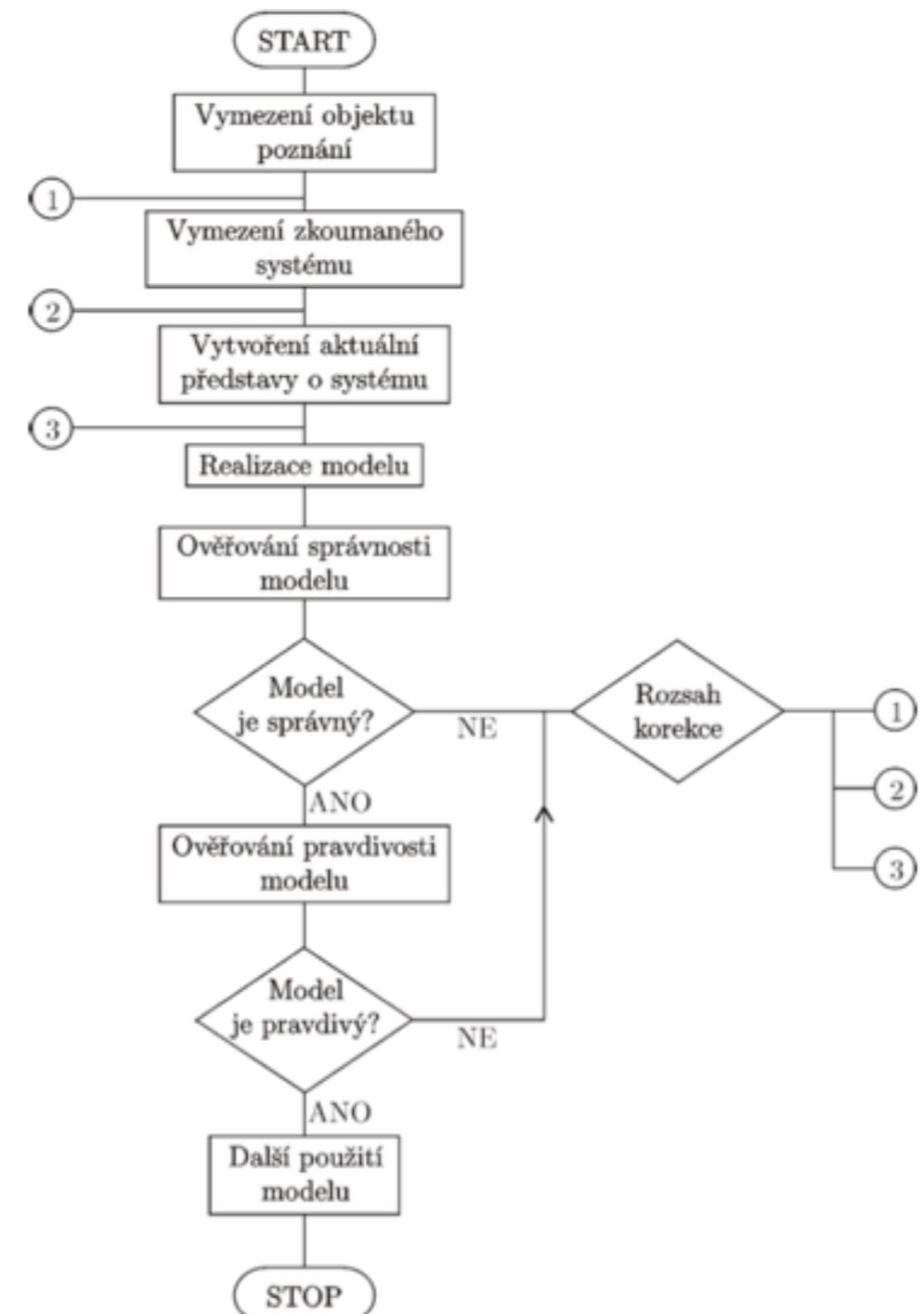
Základní fáze simulace - správnost a pravdivost modelu

- Model se považuje za správný (verifikace), jestliže konkrétní implementace realizuje náš abstraktní návrh simulované věci.
 - 100% shoda
- Ověřením pravdivosti (validace) modelu rozumíme, zda náš návrh modelu reflektuje chování reálného systému. Hodnotíme užitečnost modelu, tedy jak model plní svůj účel.
 - < 100% shoda
- Z fází ověřování správnosti, resp. pravdivosti, modelu se v případě neúspěchu vracíme k fázím již absolvovaným.
 - Způsob a rozsah korekce závisí přitom zejména na charakteru a závažnosti zjištěných nesrovnalostí.



Základní fáze simulace - další použití modelu

- Ověřeného modelu lze v procesu poznání využívat např.
 - k identifikaci parametrů modelu,
 - k prognázování,
 - vědecké predikci,
 - optimalizaci,
 - výuce,
 - výcviku apod.



Použité obrázky

- <http://belvarbcs.hu/matematika/picts/matematika.gif>
- http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_96/journal/vol4/sbaa/report.3dfuzset.gif
- http://mathbio.colorado.edu/mediawiki/images/Pro3_fig1.jpg
- http://www.open-engineering.com/var/ezwebin_site/storage/images/applications/fsi/thermodynamic-computation-in-a-duct/2293-1-eng-US/Thermodynamic-computation-in-a-duct_medium.png
- <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/45/Chaosorderchaos.png/800px-Chaosorderchaos.png>
- <http://wiki.eclipse.org/images/thumb/7/7d/SEIR.gif/600px-SEIR.gif>
- http://www-ui.is.s.u-tokyo.ac.jp/~ijiri/SketchLSystem/Results_SketchLSystem.JPG
- <http://www.youtube.com/watch?v=r5ksR1if9xQ>
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e3/Bulb_life_cycle.png
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/cf/Finite_state_machine_example_with_comments.svg/420px-Finite_state_machine_example_with_comments.svg.png