Modelování a simulace 1

6. lekce - Základy teorie diskrétních dynamických systémů

Michal Janošek

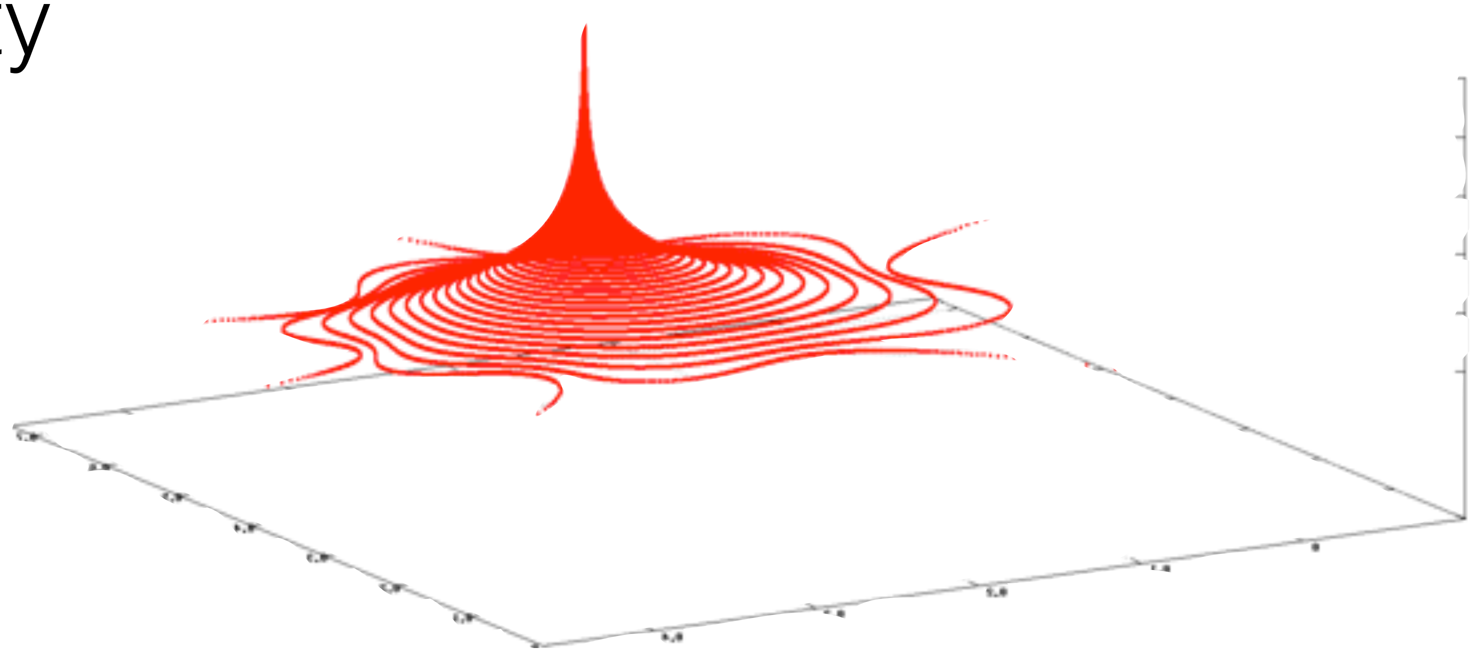
Department of Informatics and Computers
Faculty of Science
University of Ostrava
Ostrava, Czech Republic

michal.janosek@osu.cz

October 20, 2015

Základy teorie diskrétních dynamických systémů

- Definice diskrétního dynamického systému
- Trajektorie (stacionární), body, cykly
- Analýza diskr. dyn. systému
  - posouzení stability



Definice diskr. dyn. syst.

- matematická struktura určená
  - **intervalem** J, v němž leží všechny možné hodnoty dané stavové proměnné x
  - **funkcí** f, definovanou na intervalu J
  - **diferenční rovnicí** (reprezentuje “pohybovou” rovnici systému) $x_{n+1} = f(x_n),$

Pohybová rovnice - trajektorie

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

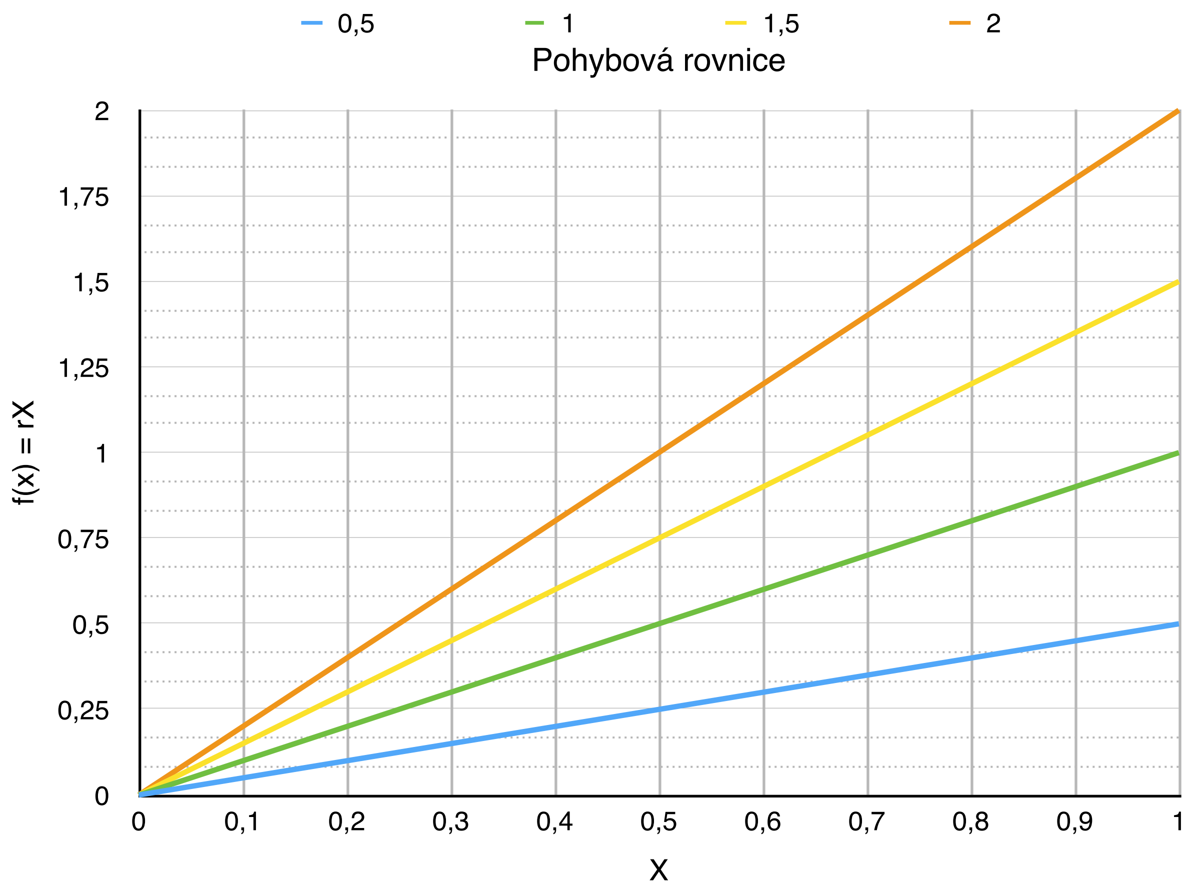
- vyjdeme-li v čase t = 0
  - posloupnost x_0, $x_1=f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$
  - nazýváme **trajektorie** bodu x_0
    - řešení dyn. systému s počátečním stavem x_0
  - pro lib. fci f a kladné n můžeme zavést složené funkce f^n
    - n-tá iterace funkce f

$$f^1(x) = x, f^2(x) = f(f(x)), \dots f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$$

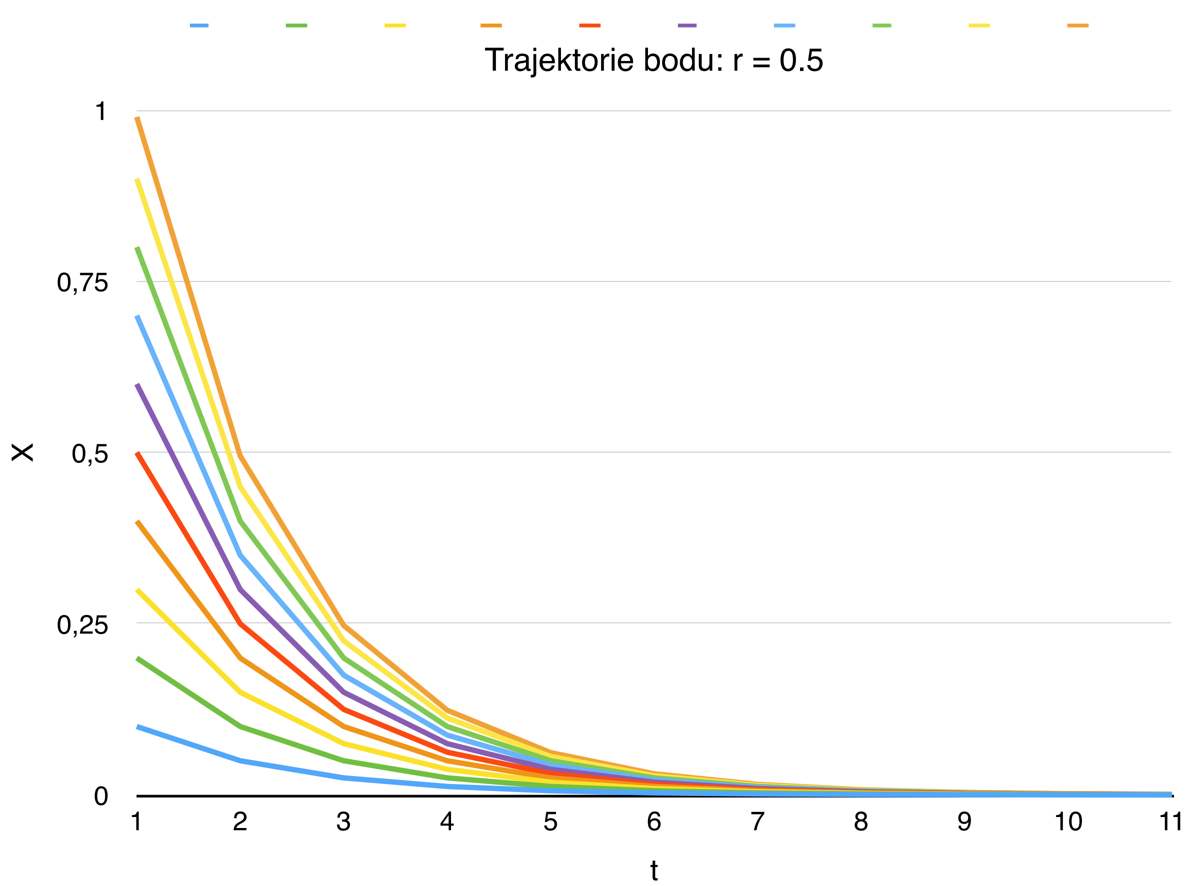
Pohybová rovnice - příklad

- jednoduchý model pro růst populace
  - X - velikost populace
  - r = p-u - míra reprodukce

$$X_{n+1} = f(rX_n)$$



pohybová rovnice



trajektorie bodu

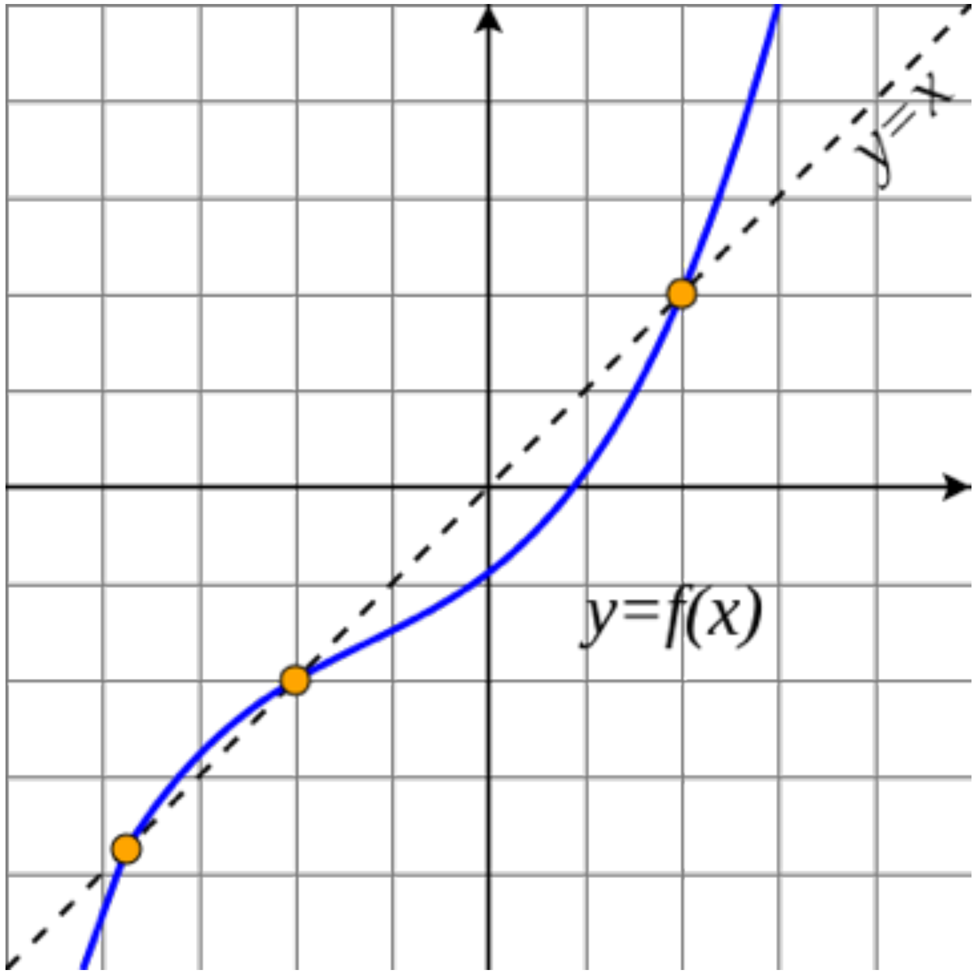
Stacionární trajektorie

- zaujímají význačné postavení mezi trajektoriemi
- odpovídají ustálenému pohybu systému
- jsou to
  - pevné body
  - periodické trajektorie (cykly)

Stacionární trajektorie - pevné body

- bod $\alpha \in J$ je pevným bodem fce f, jestliže $f(\alpha)=\alpha$
  - všechny členy posloupnosti jsou stejné, $=\alpha$

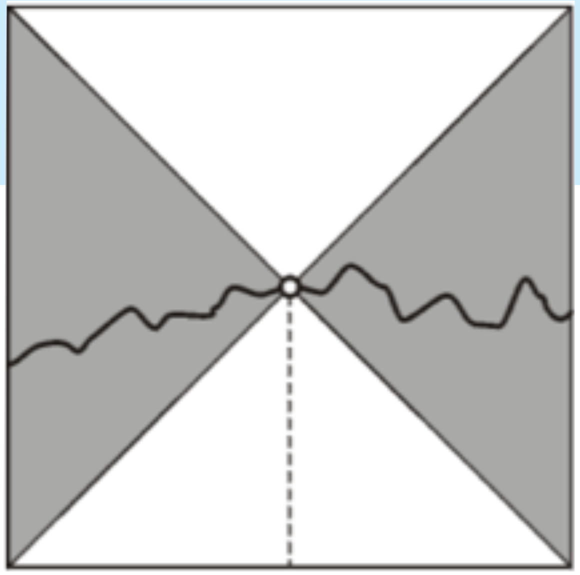
Př. 1

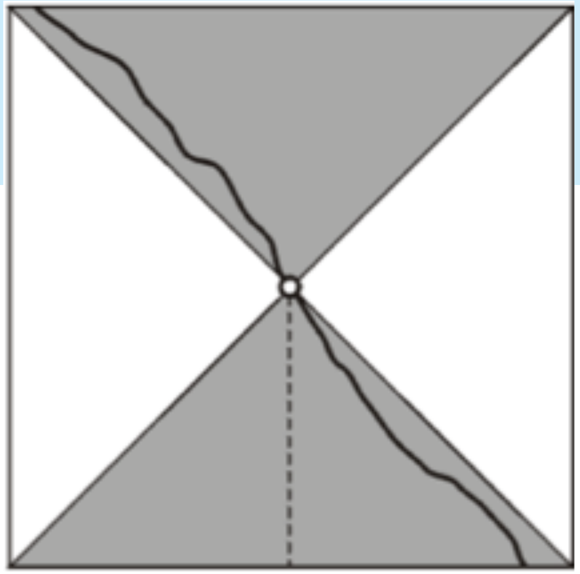


Př. 2

- $f(x) = x^2 - 4x + 6$
- $x \in \{2, 3\}$

Pevné body - určení





- všechna řešení rovnice $f(x) = x$
- bod, který se v daném zobrazení zobrazí sám na sebe
- pevný bod α funkce f je
  - **atrahující** (přitahující)
    - jestliže existuje takový otevřený interval V obsahující α, že se trajektorie libovolného bodu $x_0 \in V$ (posloupnost x_0 , $f(x_0)$, $f^2(x_0)$...) blíží postupně k α;
  - **repulzivní** (odpuzující)
    - jestliže existuje takový otevřený interval V obsahující α, že se trajektorie libovolného bodu $x_0 \in V$ (posloupnost x_0 , $f(x_0)$, $f^2(x_0)$…, $x_0 \notin V$) “vyběhne” po určitém čase z intervalu V, tj. pro nějaké n platí $f^n(x_0) \notin V$;

Stacionární trajektorie - Periodické trajektorie - cykly

- Tvořené posloupnostmi, v nichž se jistý počet členů (tzv. cyklus) "do nekonečna" opakuje.
- Trajektorie tohoto typu sestávají z periodických bodů.
- Bod $\alpha_{0} \in J$ je periodickým bodem řádu n funkce f, jestliže platí $f^{n}(\alpha_0)=\alpha_0$, přičemž $f^{j}(\alpha_0) \neq \alpha_0$, $j=1,2,..n-1$
  - trajektorie má tvar $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \ldots$
  - periodická posloupnost s periodou n
  - body $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ tvoří cyklus řádu n

Periodické trajektorie - cykly

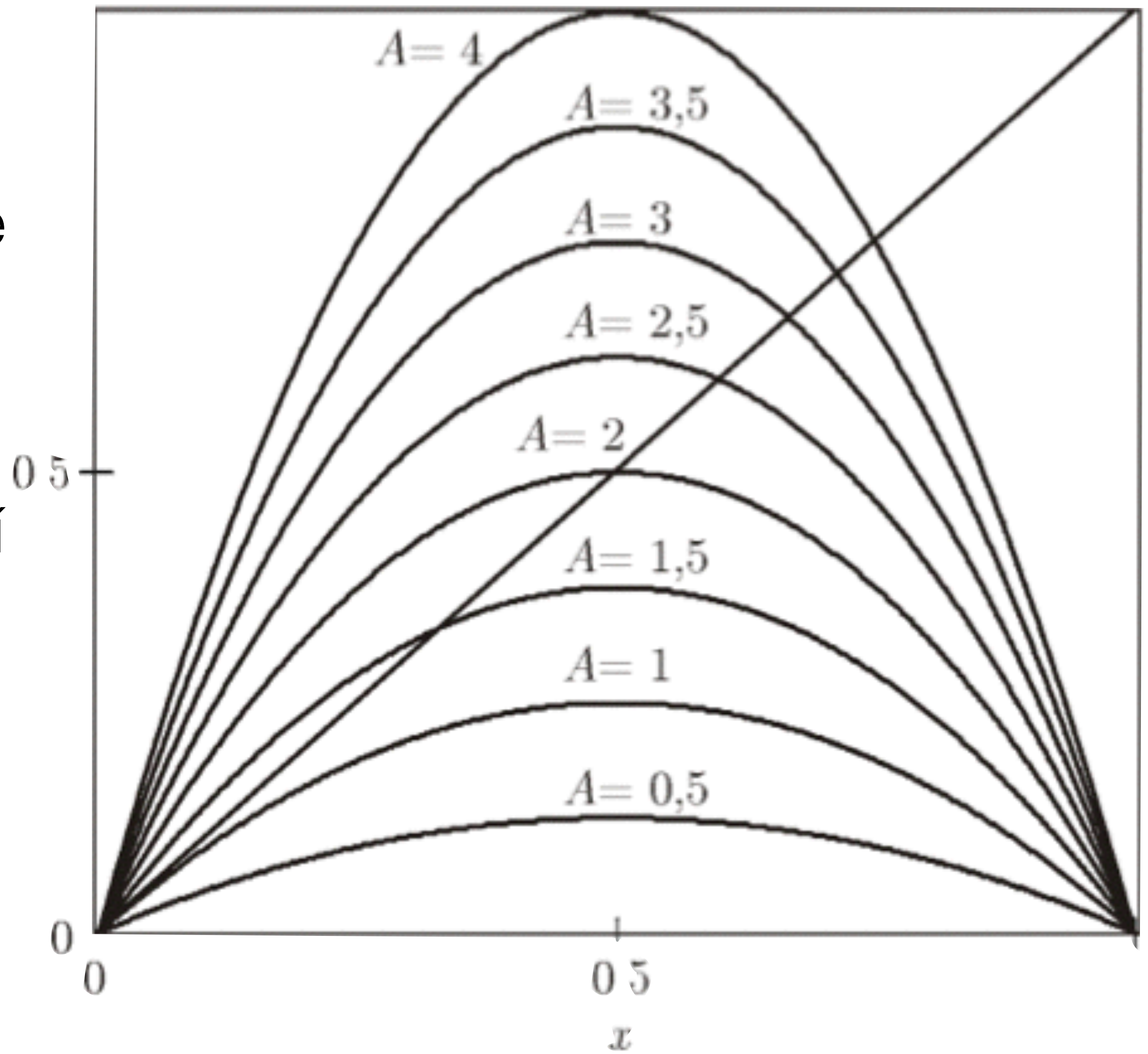
- V praxi se často setkáváme s trajektoriemi, které sice nejsou přesně periodické
  - (jako trajektorie periodických bodů),
- ale s postupem času se k nim přibližují.
- Takové trajektorie se nazývají **asymptoticky** periodické.

Periodické trajektorie - cykly - určení

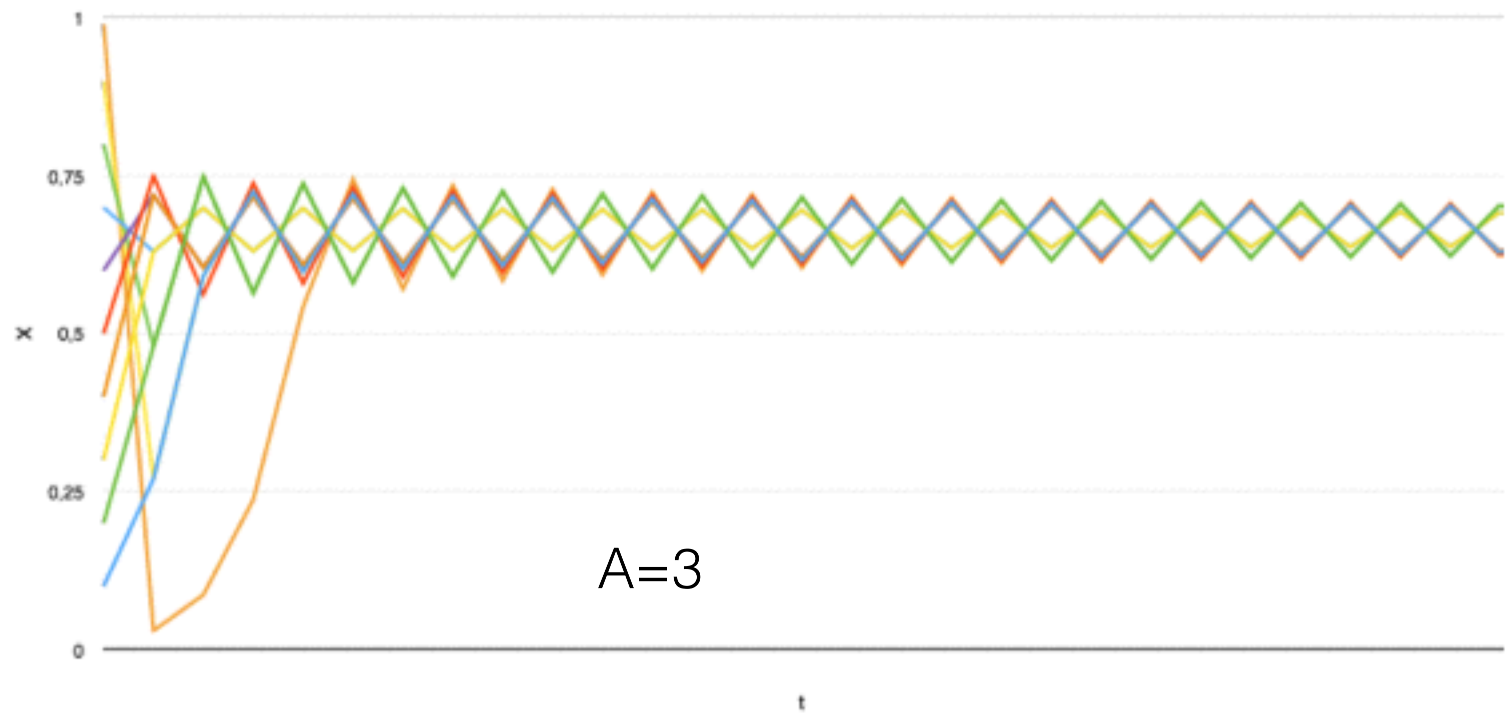
- Cyklus $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ řádu k funkce f je
  - **atrahující** (přitahující)
    - když alespoň jeden bod tohoto cyklu je atrahujícím pevným bodem funkce f^k;
  - **repulzivní** (odpuzující)
    - když každý bod tohoto cyklu je repulzivním pevným bodem funkce f^k.

Analýza konkrétního diskr. dyn. systému

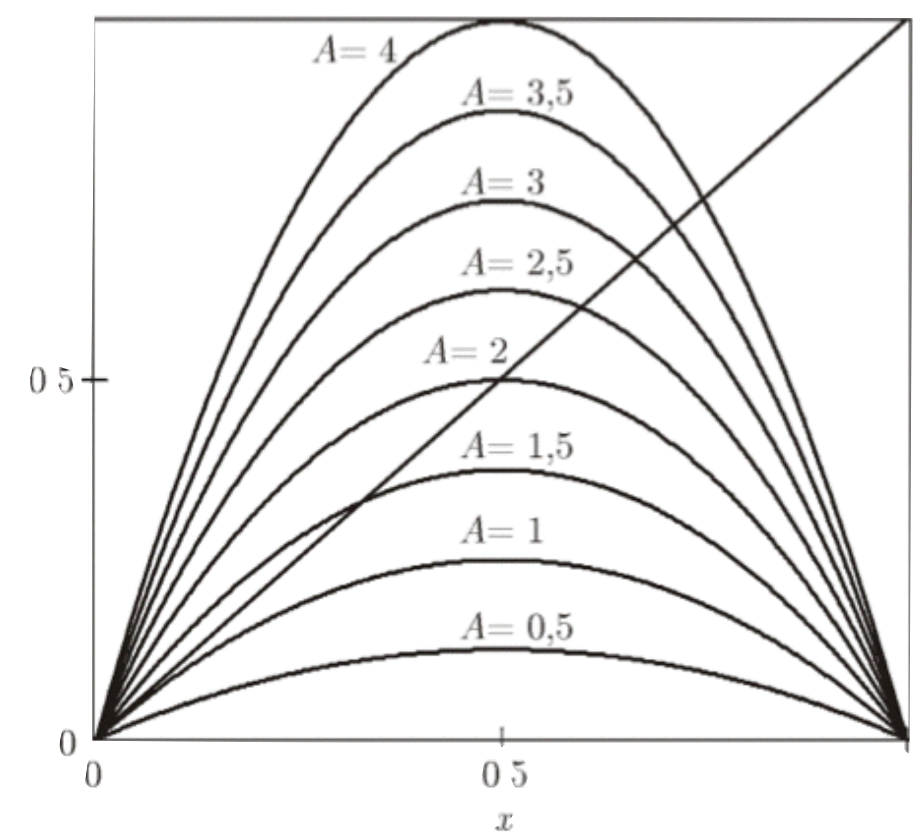
- Uvažujme dynamický systém určený funkcí
  - $f(x) = Ax(1-x)$
  - v níž stavová proměnná x reprezentuje relativní četnost nějaké populace v prostředí s omezenými zdroji ($x \in \langle 0, 1 \rangle$)
  - A je reálný parametr charakterizující rychlost růstu uvažované populace ($A > 0$).
  - Pevné body získáme řešením rovnice $Ax(1-x) = x$



Analýza konkrétního diskr. dyn. systému



- řešení
  - A∈⟨0, 1⟩ 1 bod
    - bod α=0
  - A∈(1, 3⟩ 2 body
    - bod α=0
    - bod β=1-1/A
  - A∈(3, 4⟩ 2 body (chaot. chování)



Úkol na přednášce

- Nalezněte pevné body rovnice
  - jsou tyto pevné body atrahující, repulzivní, nebo ani jeden z nich?

$f(x)=x^2-3x+4$

Použité obrázky

- http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/20/Fixed_point_example.svg/400px-Fixed_point_example.svg.png
- http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/07/Critical_orbit_3d.png