

Štruktúry PID regulácie

1. Základná spätnoväzobná štruktúra (ideálna paralelná forma, neinteraktívna)

- základ všetkých konvenčných i moderných foriem riadenia priemyselných procesov realizovaných PID algoritmami

$$u(t) = u_p(t) + u_i(t) + u_d(t)$$

Na praktické aplikácie sa využívajú jej modifikácie, napr.:

- ideálna forma PID v sérii s filtrom 1. rádu

$$G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \left(\frac{1}{T_f s + 1} \right)$$

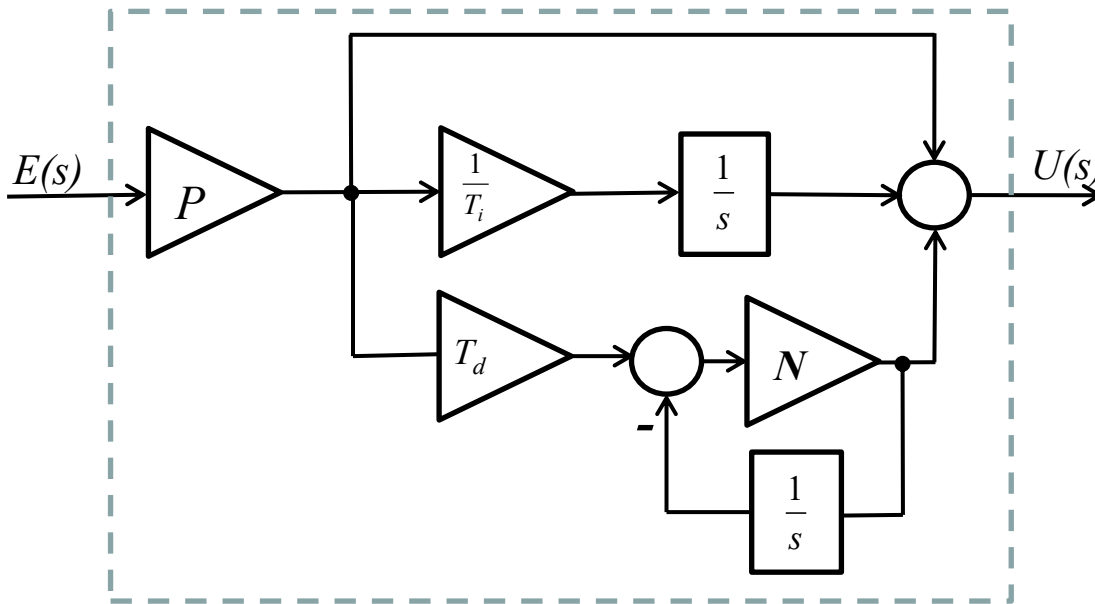
- ideálna forma PID s filtrom v derivačnej zložke

$$G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_f s + 1} \right)$$

Filtrácia derivačnej zložky

Derivačná zložka má z teoretického hľadiska priaznivý stabilizačný vplyv na regulačný pochod, z praktického hľadiska má však nepríjemnú vlastnosť – zosilňuje šum a prudké zmeny, preto **ideálna derivačná činnosť je nepoužiteľná**.

Vnúťorný filter - používa sa na potlačenie parazitného šumu, ktorý je obsiahnutý najmä v regulovanej veličine $y(t)$.



Matlab:
default $N=100$,
vtedy sa
vnúťorný filter
zanedbáva.

$$T_d s \rightarrow \frac{T_d s}{\frac{1}{N} s + 1} = \frac{T_d s}{T_f s + 1},$$

$$N = 5 \div 20$$

- sériová (interaktívna) forma PID

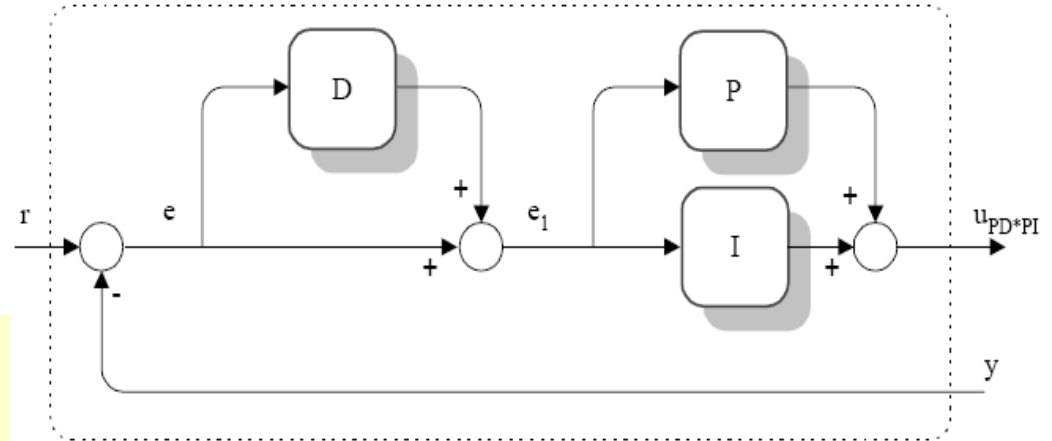
je často využívaná v priemysle, predstavuje sériové spojenie PD a PI regulátora.

$$G_R(s) = P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \left(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s} \right)$$

$$T_f = \frac{T_d}{N}, \quad N = 1, 2, \dots, 10$$

$$u_{PD*PI}(t) = P \left[e_1(t) + \frac{1}{T_i s} \int_0^t e_1(\tau) d\tau \right]$$

$$e_1(t) = e(t) + T_d^s \frac{de(t)}{dt}$$



Uvedené formy využívajú mnohí výrobcovia: Bailey Net 90 pre $N=T_d/T_f=100$, Foxboro Exact I/A series, Modicon 984, Siemens Teleperm/PSC7, Hartmann & Braun Freelance 2000 PID a pod.

2. Modifikácie bázickej spätnoväzobnej štruktúry riadenia (PI-D, I-PD, D-PI)

$$\frac{de}{dt} = \frac{dw}{dt} - \frac{dy}{dt}$$

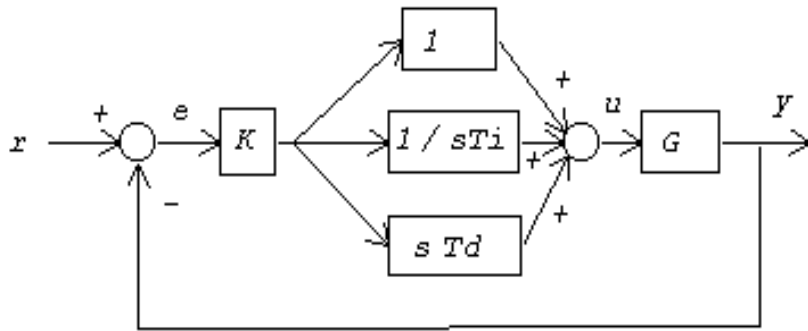
pre $w=\text{konšt.}$

$$u(t) = P e(t) + I \int_0^t e(\tau) d\tau - D \frac{dy(t)}{dt}$$

- regulačný obvod je menej náchylný na oscilácie riadenej veličiny, lebo výstupy z reálnych procesov sú silno zotrvačné.

Ideálny PID

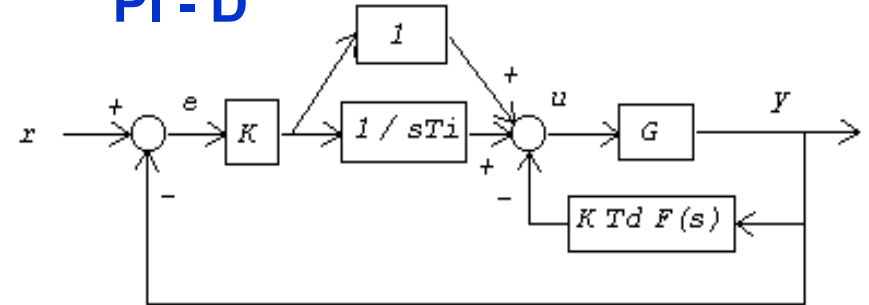
$$G_R(s) = P\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$



$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$u(t) = Ke(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

PI - D

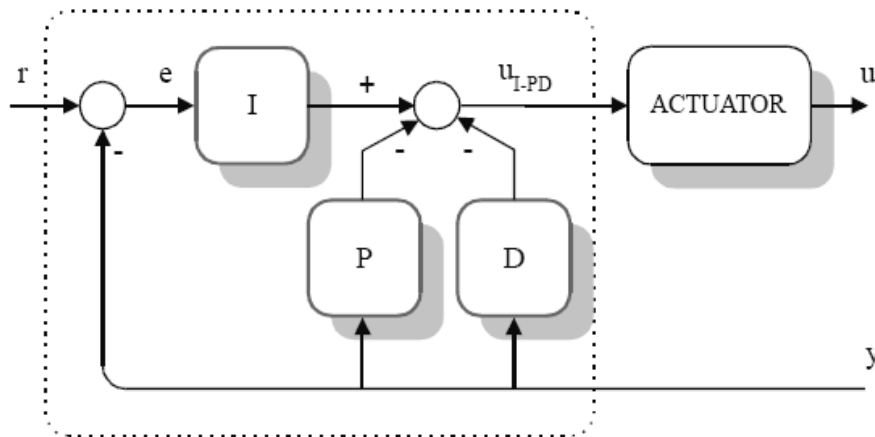


$$\frac{de}{dt} = \frac{dw}{dt} - \frac{dy}{dt} \rightarrow u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau - T_d \frac{dy(t)}{dt} \right]$$

$$U(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - \frac{K T_d s}{1 + T_f(s)} Y(s)$$

$$U(s) = K \left[\left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - \frac{T_d s}{1 + T_f(s)} Y(s) \right]$$

I - PD



$$u(t) = K \left[-y(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau - T_d \frac{dy(t)}{dt} \right]$$

$$u(t) = -Ky(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau - K_d \frac{dy(t)}{dt}$$

Príklady priemyselných PID regulátorov a ich realizácie:

Použité označenia (tak ako ich udávajú výrobcovia riadiacich systémov:

CO = controller output (výstup z regulátora, riadiaci zásah, akčná veličina, u)

PV = process variable (výstupná, regulovaná, meraná, veličina, y)

SP = setpoint (žiadaná hodnota, w)

e = SP-PV (regulačná odchýlka)

1. Allen Bradley PLC5 Independent PID

$$CO = K_p e + K_i \int e dt + K_d \frac{d(-PV)}{dt}$$

2. Honeywell TDC3000 APM Non-Interactive PID

$$CO = K(e + \frac{1}{T_1} \int e dt + T_2 \frac{de}{dt})$$

K – proporcionálne zosilnenie (bez rozmeru)

T_1 – integračná časová konštanta (sekunda)

T_2 – derivačná časová konštanta (sekunda)

3. Siemens S7 PB41 CONT_C PID

$$CO = \text{Gain} * e + \frac{1}{T_i} \int edt + T_D \frac{de}{dt}$$

Gain – proporcionálne **zosilnenie** (bez rozmeru)

T_i – integračná časová konštanta (sekunda)

T_d – derivačná časová konštanta (sekunda)

4. Yokogawa Field Control Station (FCS) PID

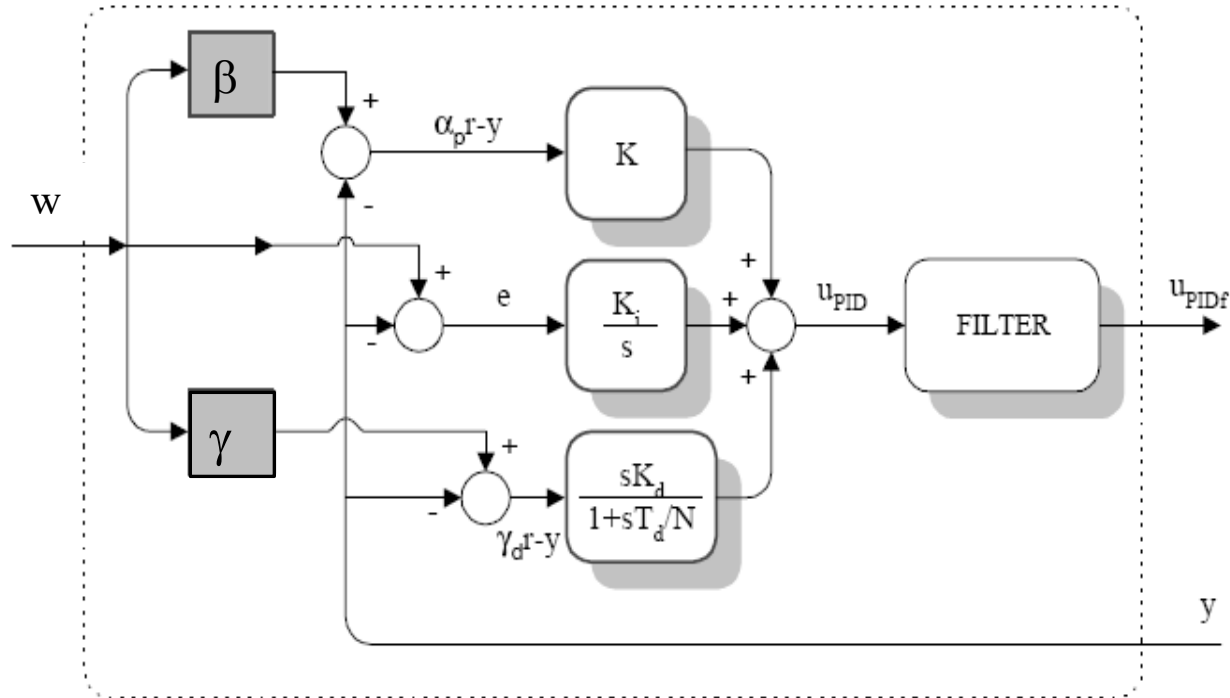
$$CO = \frac{100}{PB} \left(e + \frac{1}{T_i} \int edt + T_d \frac{de}{dt} \right)$$

PB – pásmo proporcionality

T_i – integračná časová konštanta (sekunda)

T_d – derivačná časová konštanta (sekunda)

3. Štandardný ISA tvar PID regulátora (β - γ regulátor)



$$U_{ISA}(s) = K[\beta W(s) - Y(s)] + K_i \frac{1}{s} E(s) + \frac{K_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} [\gamma W(s) - Y(s)]$$



ISA - International Society of Automation

(www.isa.org)

Charakteristika:

ISA is a nonprofit professional association that sets the standard for those who apply engineering and technology to improve the management, safety, and cyber-security of modern automation and control systems used across industry and critical infrastructure.

Aktivita:

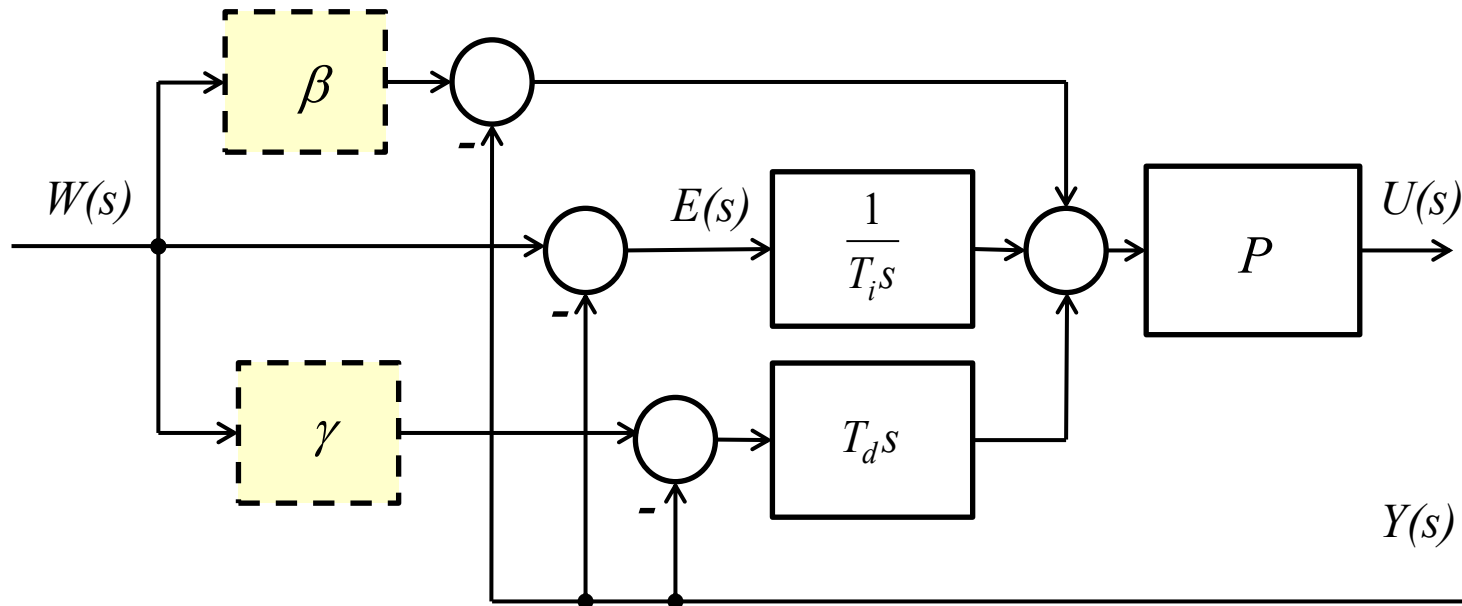
Founded in 1945, ISA develops widely used global standards; certifies industry professionals; provides education and training; publishes books and technical articles; hosts conferences and exhibits; and provides networking and career development programs for its 40,000 members and 400,000 customers world-wide.

ISA owns Automation.com, a leading online publisher of automation-related content.

Poslanie

Enables its members, including world-wide subject matter experts, automation suppliers, and end-users, to work together to develop and deliver the highest quality, unbiased automation information, including standards, access to technical information, professional development resources, and opportunities to network with other automation professionals.

Akčný zásah štandardného ISA PID regulátora (β - γ regulátora) - úpravou dostaneme PID regulátor s 2 stupňami voľnosti:



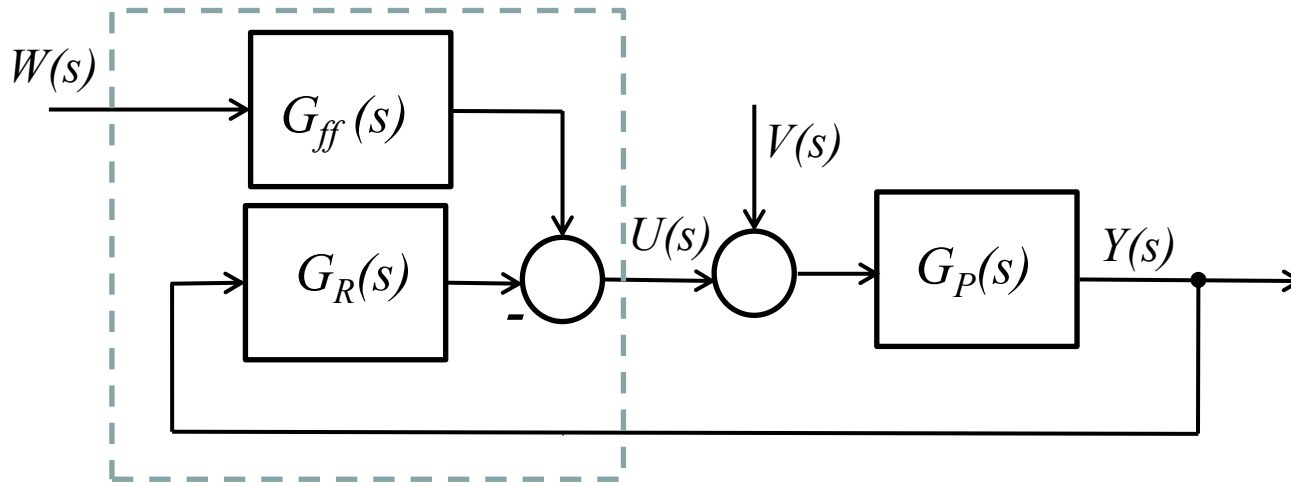
$$U_{ISA}(s) = P[\beta W(s) - Y(s)] + \frac{P}{T_i s} [W(s) - Y(s)] + PT_d s [\gamma W(s) - Y(s)]$$



$$U(s) = \underbrace{P(\beta + \frac{1}{T_i s} + \gamma T_d s)}_{G_{ff}} W(s) - \underbrace{P(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)}_{G_R} Y(s)$$

Namiesto derivačného člena je možné všade uvažovať derivačný člen s filtráciou derivačnej zložky!

PID regulátor s dvoma stupňami voľnosti (2DOF) - variant 1



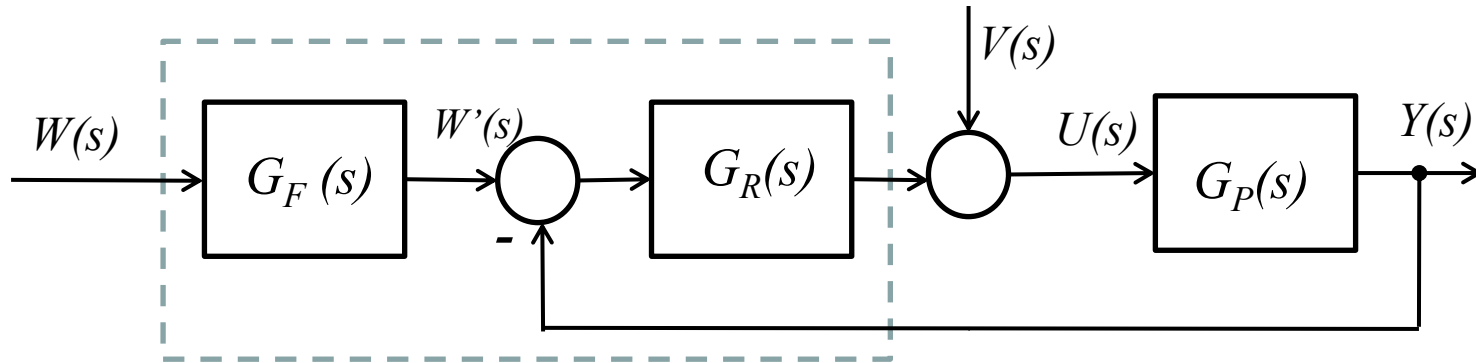
$$U(s) = G_{ff}(s)W(s) - G_R(s)Y(s)$$

$$G_{ff}(s) = P\left(\beta + \frac{1}{T_i s} + \gamma T_d s\right) = P \frac{\gamma T_i T_d s^2 + \beta T_i s + 1}{T_i s}$$

$$G_R(s) = P\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = P \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$



PID regulátor s dvoma stupňami voľnosti (2DOF) - variant 2



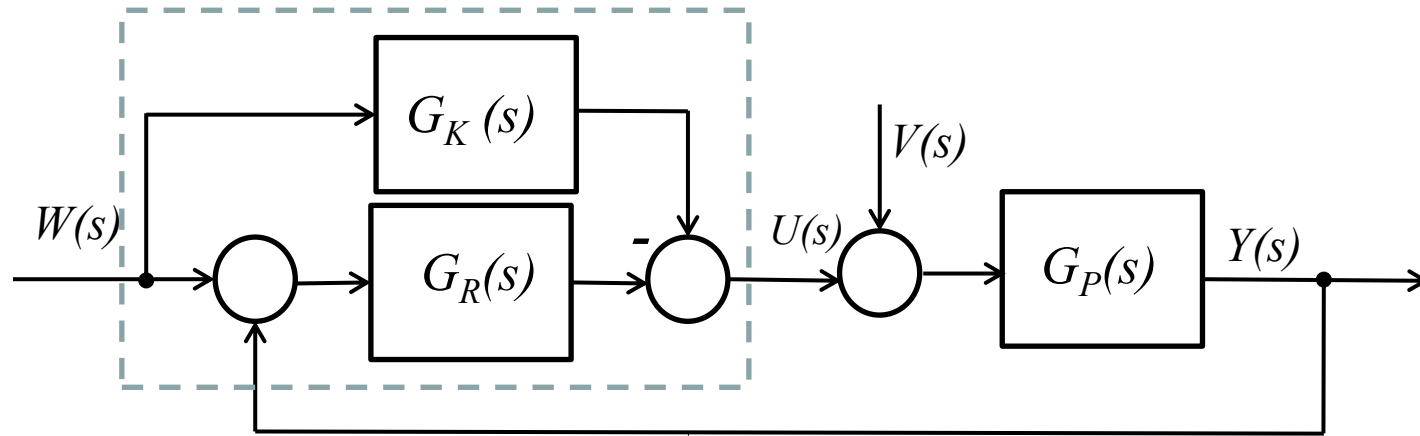
$$U(s) = G_F(s)G_R(s)W(s) - G_R(s)Y(s)$$

Prenos vstupného filtra, t.j. filtra
žiadanej veličiny:

$$G_F(s) = \frac{G_{ff}(s)}{G_R(s)} = \frac{\gamma T_i T_d s^2 + \beta T_i s + 1}{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}$$

$$G_R(s) = P\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) = P \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

PID regulátor s dvoma stupňami voľnosti (2DOF) - variant 3



$$U(s) = [G_R(s) - G_K(s)]W(s) - G_R(s)Y(s)$$

$$G_K(s) = P(\alpha' + \beta' T_d s)$$

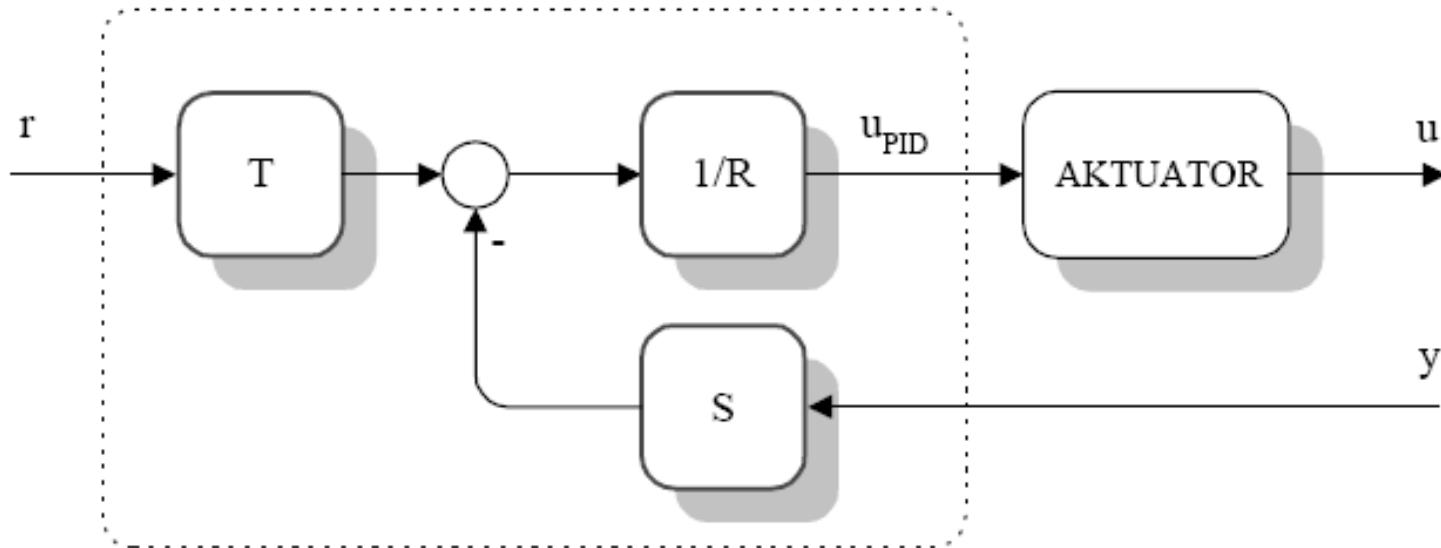
Všetky uvedené štruktúry regulačného obvodu s analógovým PID 2DOF regulátorom sú za určitých podmienok* vzájomne ekvivalentné.

Správna funkcia regulátora vyžaduje, aby mal informáciu o skutočnej regulačnej odchýlke $e(t)$! Pokiaľ regulátor obsahuje integračnú zložku, musí byť váha žiadanej veličiny pri integračnej zložke rovná 1.

$$^* \beta = 1 - \alpha', \quad \gamma = 1 - \beta'$$

4. Štandardný tvar 2DOF PID regulátor (RST forma)

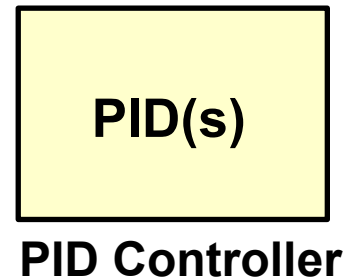
Filtre R, S sa navrhujú tak, aby bola dosiahnutá požadovaná kvalita riadenia, filter T sa navrhuje dodatočne tak, aby bola zabezpečená kvalita sledovania referenčnej premennej.



Realizácia PID regulátora v prostredí Matlab-Simulink

Blok PID Controller (spojitý) – základné nastavenia

- ☒ Continuous-time
- ☐ Discrete-time



Main

Controller settings

Controller form: *Parallel / Ideal*

Proportional (P):

Integral (I):

Derivative (D):

$$G_R(s) = P + \frac{I}{s} + Ds$$

$$G_R(s) = P \left[1 + \frac{I}{s} + Ds \right]$$

Filter coefficient (N):

Tune...

Blok PID Controller – pokročilé nastavenia

(obmedzenie akčného zásahu)

- ☒ Continuous-time
- ☐ Discrete-time

Main

PID Advanced

Output saturation

☐ Limit output

Upper saturation limit: u_{max}

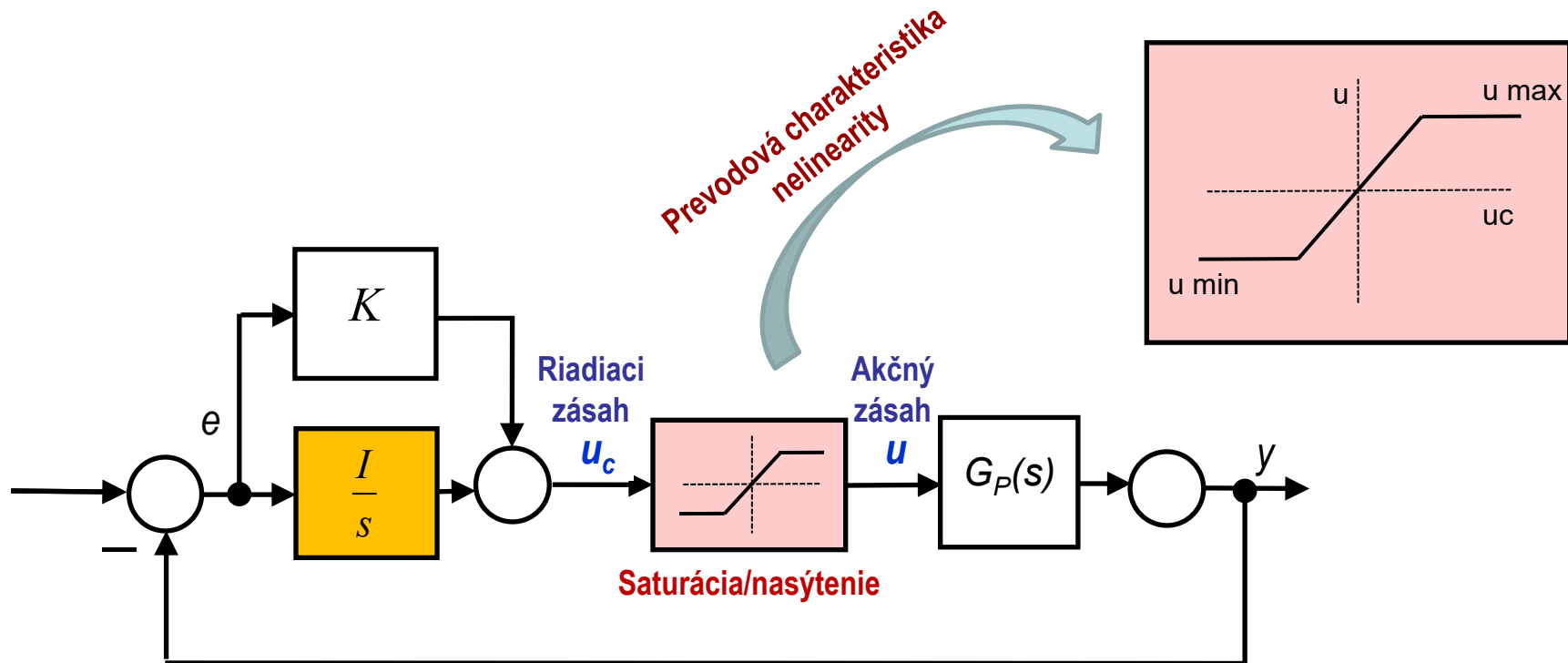
Lower saturation limit: u_{min}

Anti-windup method:

back calculation/clamping

Obmedzenie akčného zásahu: dôsledkom je tzv. **Windup efekt**

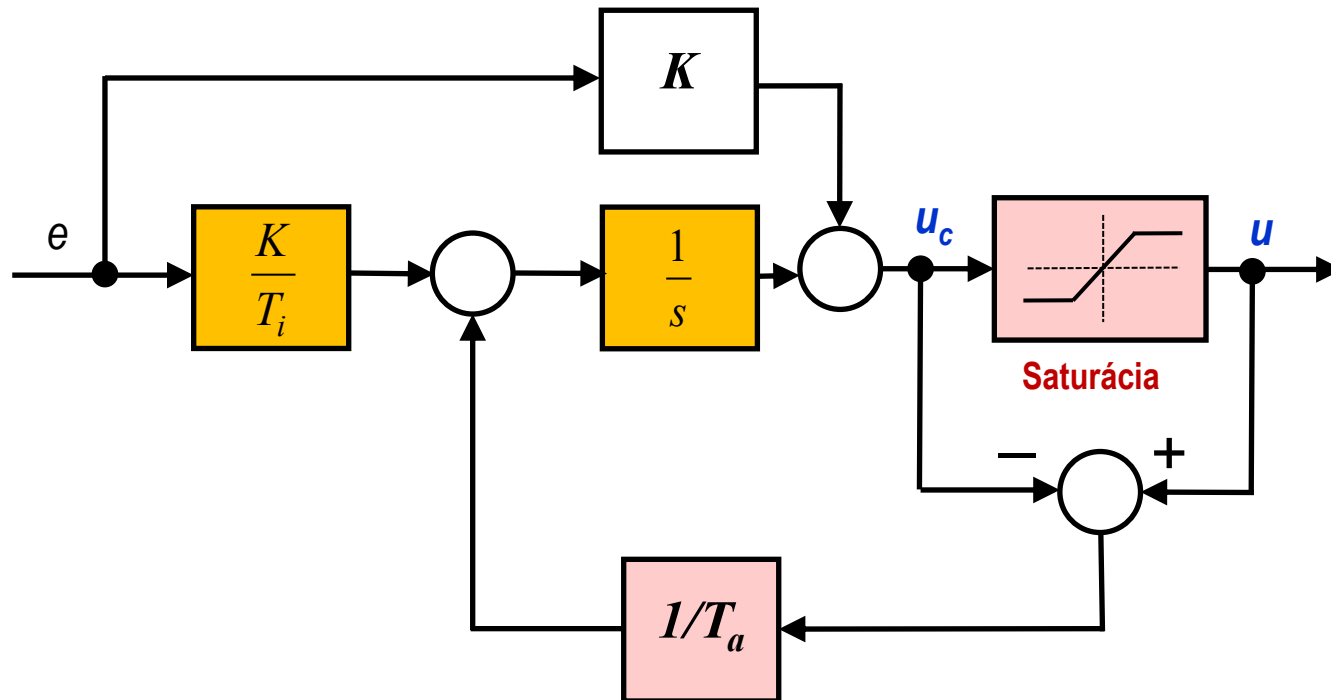
V regulačnom obvode s regulátorom s integračnou zložkou dochádza pri obmedzení akčného zásahu k tzv. **wind-up efektu** – pokračujúcej integrácii pri generovaní akčnej veličiny po tom, ako **akčná veličina dosiahla hranicu realizovateľnej hodnoty (saturáciu)**.



Integrácia pokračuje pokým má regulačná odchýlka $e(t)$ rovnaké znamienko. Absolútna veľkosť integračnej zložky narastá, nárast sa však nerealizuje, lebo akčný člen je po celý čas v krajnej polohe. Nárast integračnej zložky sa zastaví a k jeho poklesu dôjde až zmenou znamienka $e(t)$.

Akčnej veličine však bude určitý čas trvať (čas potrebný na spätné odintegrovanie), kým sa reálne „odpúta“ od krajnej polohy, v ktorej zotrvala (tzv. wind-up oneskorenie)

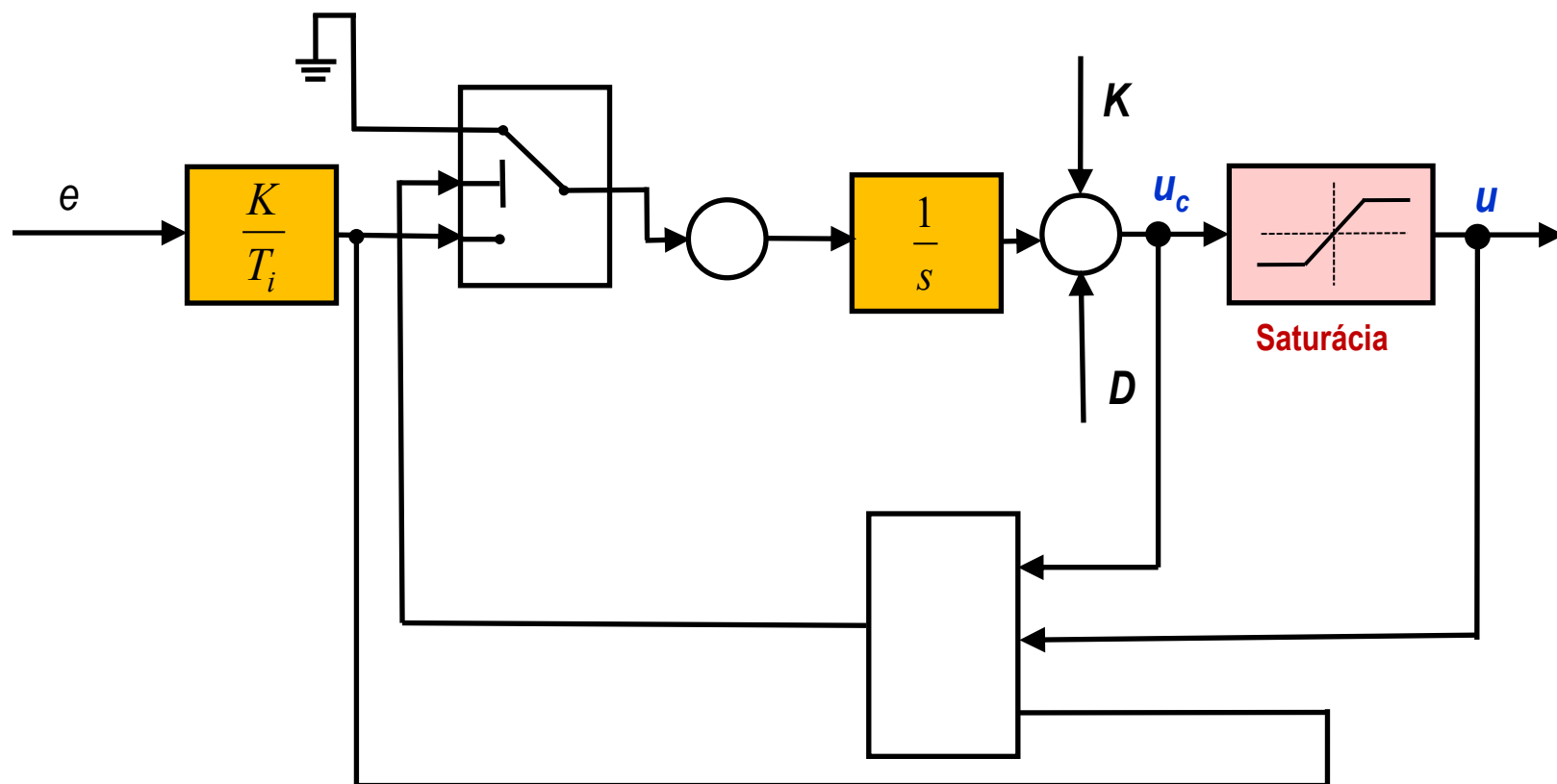
I. Anti-windup štruktúra realizovaná metódou *back-calculation*



$$T_a = \sqrt{T_i T_d}$$

II. Anti-windup štruktúra realizovaná metódou *clamping*

clamping (zablokovanie integrácie v prípade prekročenia obmedzenia výstupu)



Príklad – windup efekt

Windup efekt a jeho potlačenie použitím anti-windup štruktúry (implementovanej v bloku PID) je ukázaný na nasledujúcich simuláciách URO.

Riadeným objektom je nádrž modelovaná ako systém 1. rádu

$$G_p(s) = \frac{95.789}{76s + 1}$$

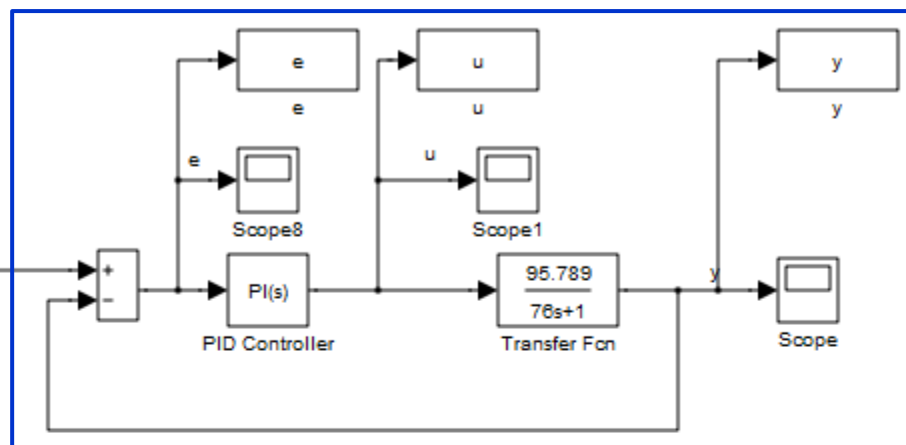
PI regulátor navrhnutý metódou inverzie dynamiky:

$$G_R(s) = 0.1 + \frac{0.1}{s}$$

Veľkosť akčného zásahu je obmedzená na interval $<0,1>$ (0 – zatvorený ventil / 1 - otvorený ventil)

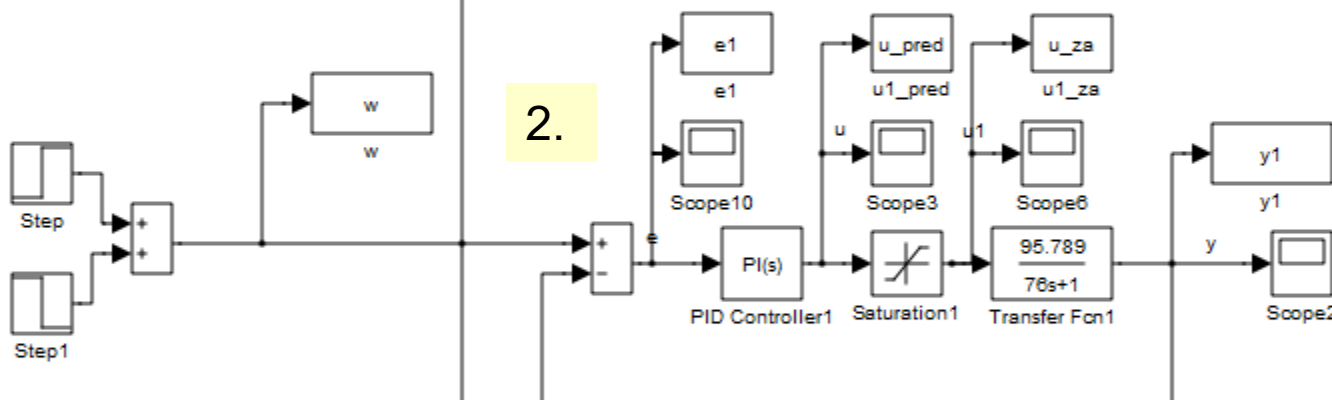
V antiwindup štruktúre je využitá metóda back-calculation.

1.



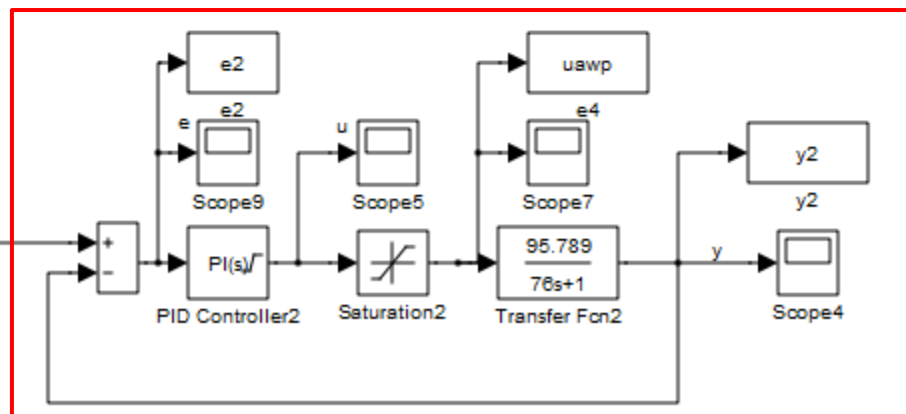
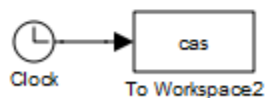
Regul
obme
zásah

2.

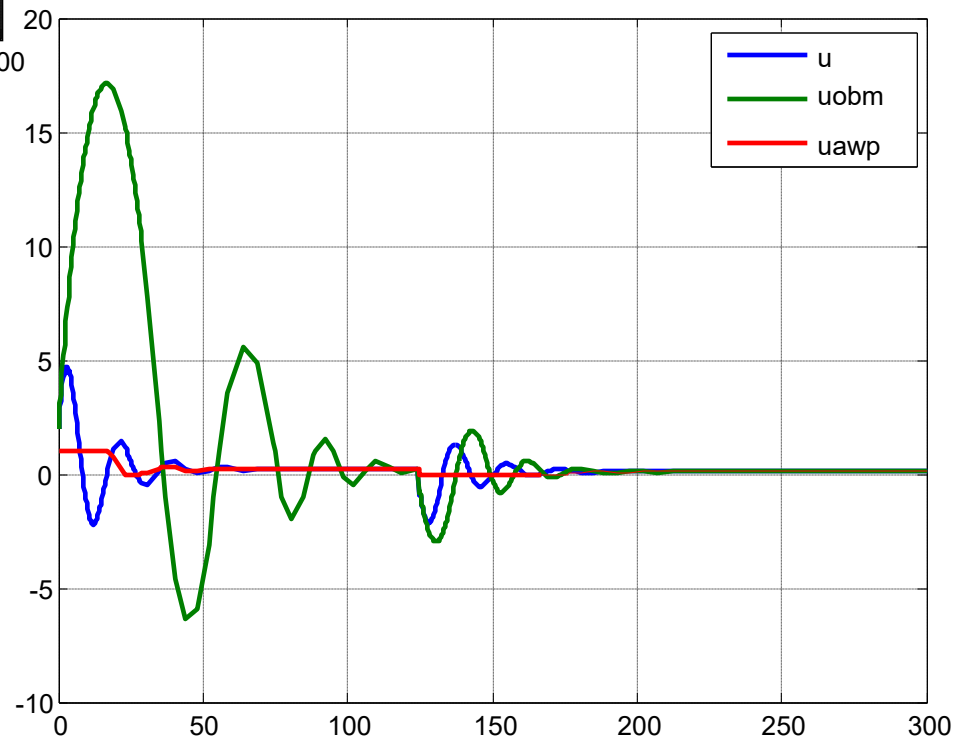
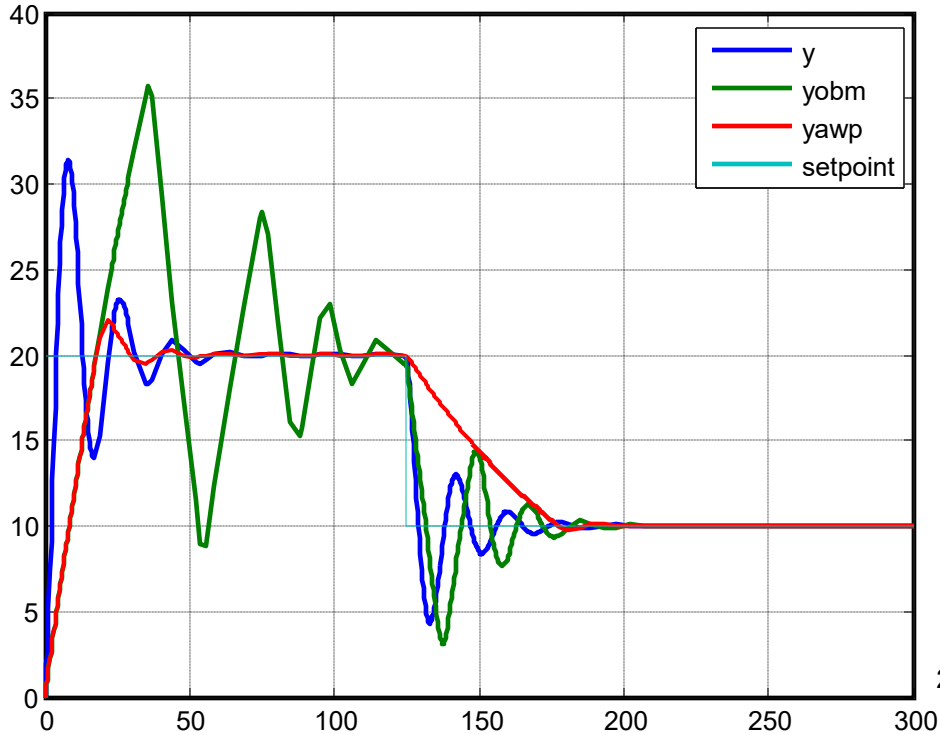


Regula
obme
zásahu
nasýte
efekt

3.



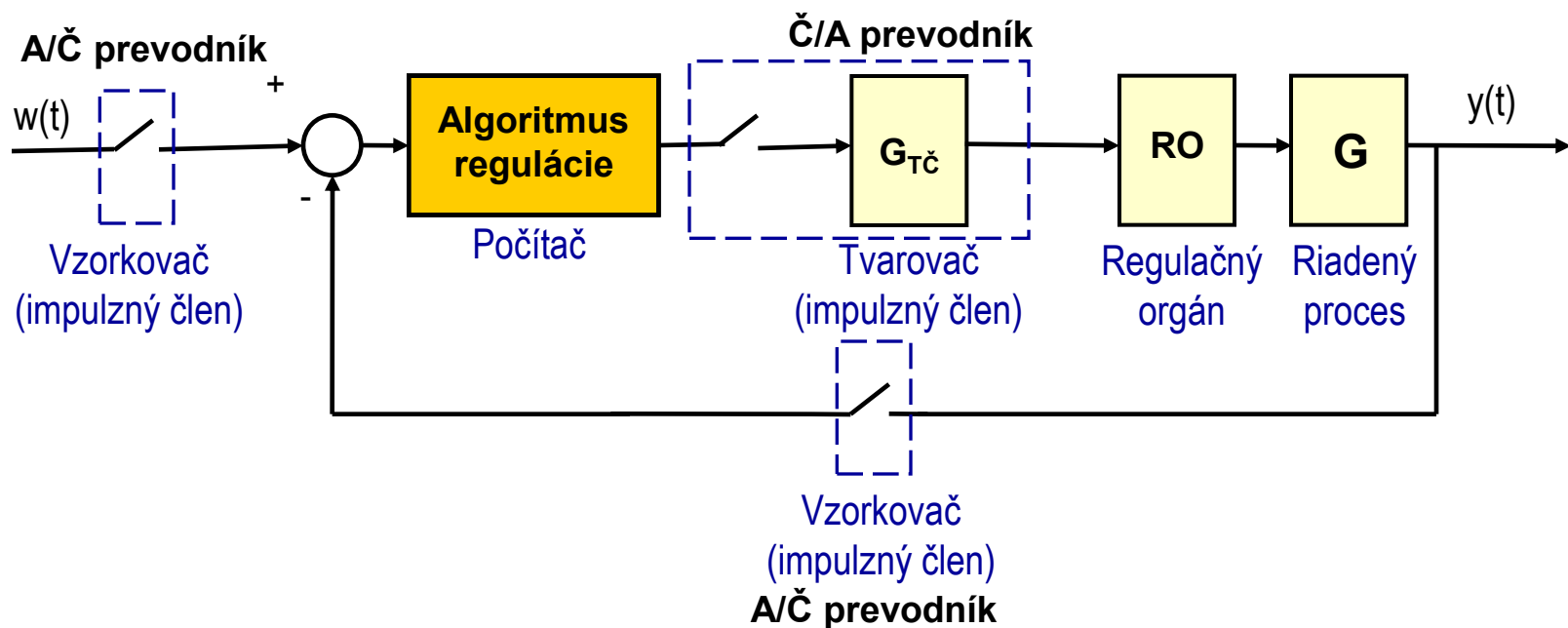
Regul
obme
zásah
štrukt



**Anti-windup štruktúra
realizovaná metódou
*back-calculation***

LINEÁRNE DISKRÉTNE DYNAMICKÉ SYSTÉMY

Diskrétny regulačný obvod

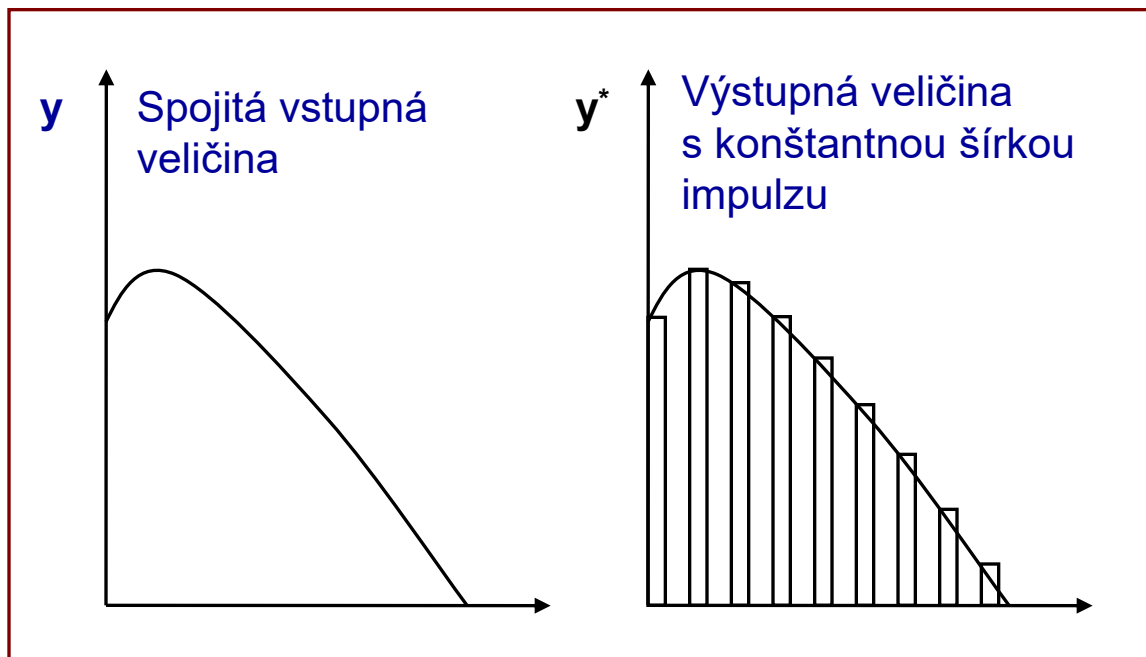
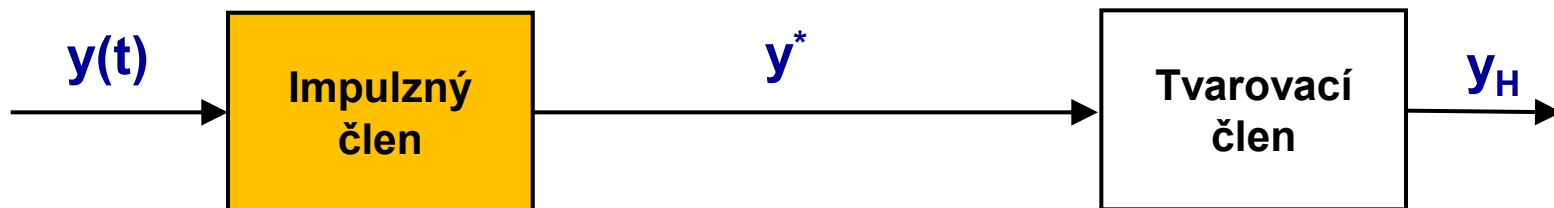


- Vývoj číslicovej techniky - možnosť **realizácie regulátora číslicovým spôsobom**.
- **Teória číslicovej regulácie** (analógia spojitej regulácie), vychádza z opisu regulačných pochodov len v diskretných časových okamihoch.
- **Diskretný regulačný obvod** je taký obvod, v ktorom *aspoň jedna veličina má tvar postupnosti diskretných hodnôt* vytváraných v ekvidištantných časových okamihoch (alebo v regulačnom obvode sa nachádza *aspoň jeden člen, ktorý pracuje nespojite v čase*).
- Systémy automatického riadenia, v ktorých sa prenáša informácia v diskretných časových okamihoch budeme nazývať **systémy so vzorkovaním**.
- **Vzorkovanie** definujeme ako činnosť, pri ktorej sú *časovo premenné signály digitalizované*, t.j. vo zvolených časových okamihoch sú im priradované určité číselné hodnoty (*sú kvantované*).

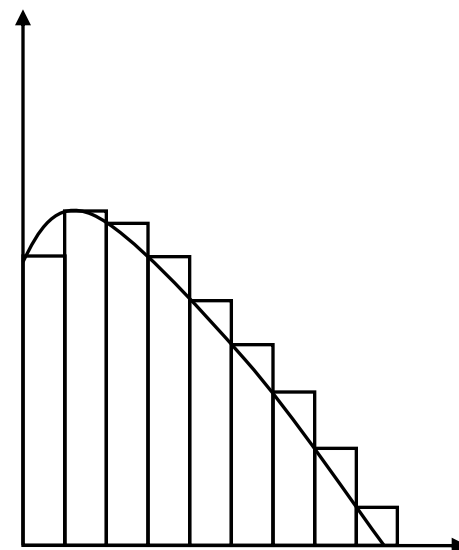
- Procesom **digitalizácie** sú zo spojitých signálov vytvárané **kvantované signály**, nadobúdajúce konečný počet hodnôt v diskrétnych časových okamihoch.
- **Spojité signál** sa vzorkuje **periodicky** s **periódou vzorkovania T** , čo je symbolicky znázornené prepínačom (kľúčom, spínačom).
- Samotný pojem vzorkovania súvisí s existenciou **impulzného člena**, ktorý transformuje **spojitú vstupnú veličinu** na postupnosť modulovaných impulzov.
- Základnými parametrami postupnosti impulzov sú **amplitúda A** , **šírka - perióda vzorkovania T** , a **poloha impulzu vo vnútri periódy** (časové posunutie alebo fáza impulzu).
- Podľa toho, ktorý parameter sa mení, rozlišujeme
 - **amplitúdovo – impulznú**,
 - **šírkovo – impulznú**
 - **frekvenčno – impulznú moduláciu**.

- Ak je modulovaný parameter počas trvania impulzu konštantný, hovoríme o **impulznej modulácii prvého druhu**, ak sa modulovaný parameter mení počas trvania impulzu, hovoríme o **impulznej modulácii druhého druhu**.
- V číslicových systémoch riadenia sa používa **amplitúdovo-impulzná modulácia**, pri ktorej **výška impulzu** je priamo úmerná odpovedajúcej hodnote spojitého signálu, **šírka impulzu** je konštantná a **intervaly medzi impulzami** sú rovnaké (ekvidištantné) a **rovné perióde vzorkovania** T_{vz} .
- Platí tu princíp superpozície a analogicky aj tie predpoklady a matematické postupy, ktoré sú využívané pri riešení **lineárnych dynamických systémov**.
- Za účelom zjednodušenia impulzných systémov sa **reálne impulzné členy** zamieňajú **ideálnym vzorkovacím členom a tvarovacím členom**, ktoré sú zapojené za sebou.

Princíp amplitúdovo-impulznej modulácie

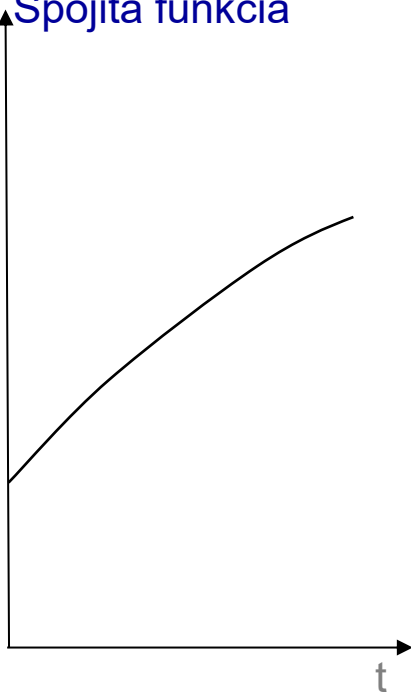


Výstup z **ideálneho** amplitúdovo-impulzného člena

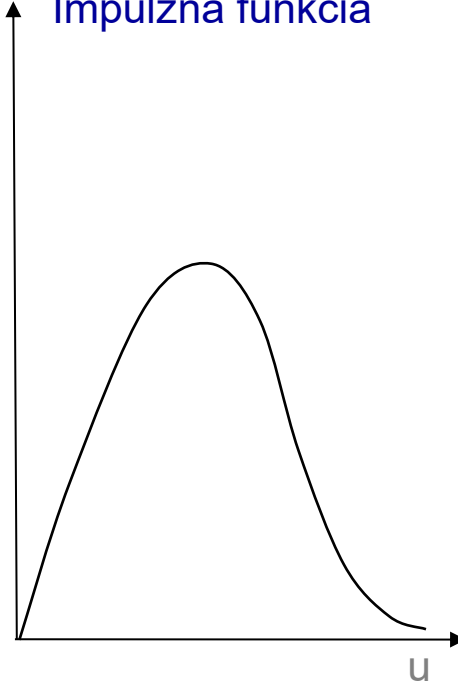


Výstup z **tvarovacieho** člena

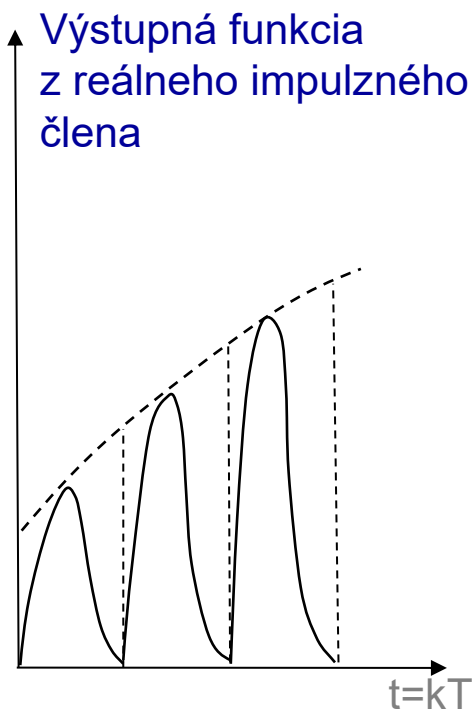
y Spojitá funkcia



Impulzná funkcia

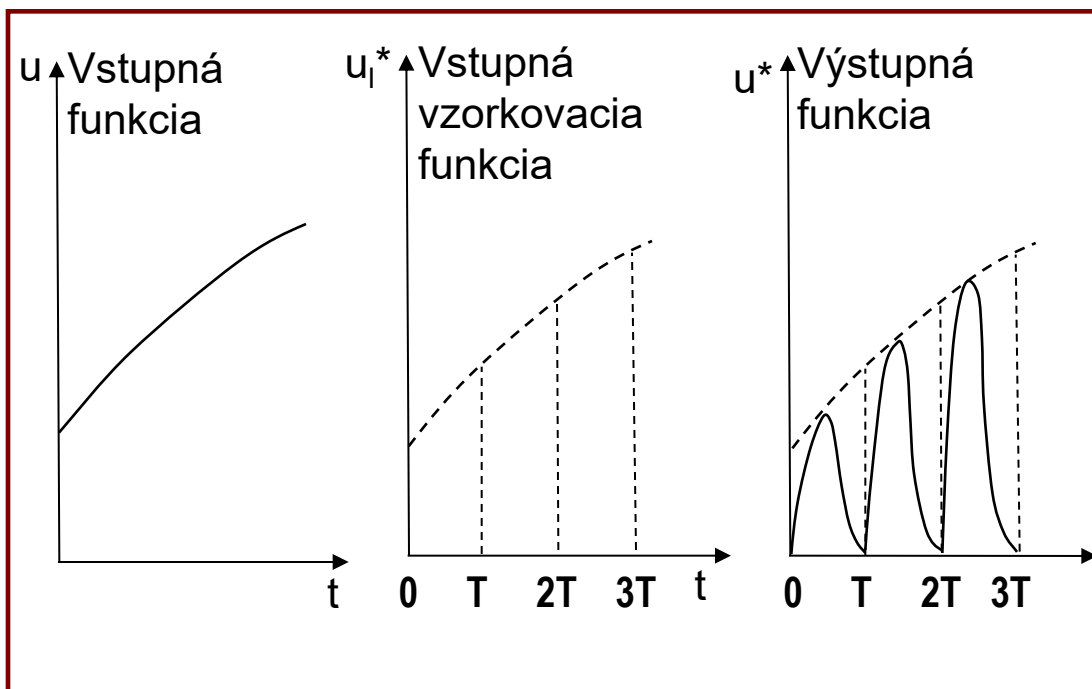
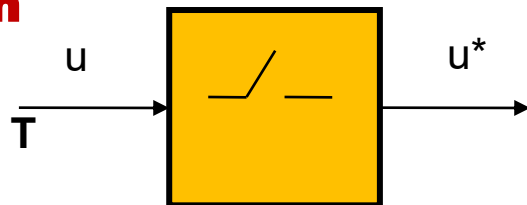


y^* Výstupná funkcia
z reálneho impulzného
člena



Výstup z **reálneho** amplitúdovo-impulzného člena

Vzorkovací člen (sampler)



$$u_1^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$u^*(t) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

- Vstupom do **ideálneho vzorkovača** je spojitý signál, výstupom je postupnosť funkcií $u^*(t)$.

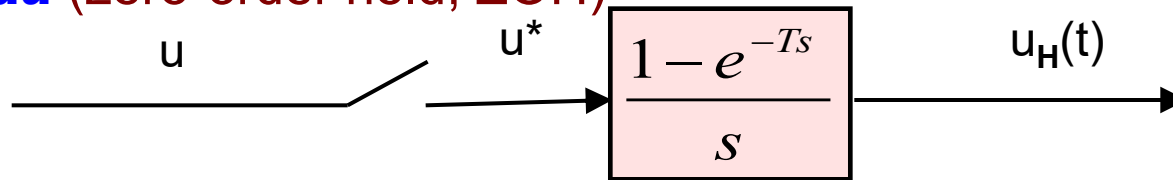
- Postupnosť funkcií predstavuje postupnosť Diracových impulzov. Veľkosť týchto impulzov sa rovná diskretným hodnotám spojitej funkcie v okamihoch vzorkovania.

- Diracov impulz vystupujúci v čase kT možno vo všeobecnosti vyjadriť takto:

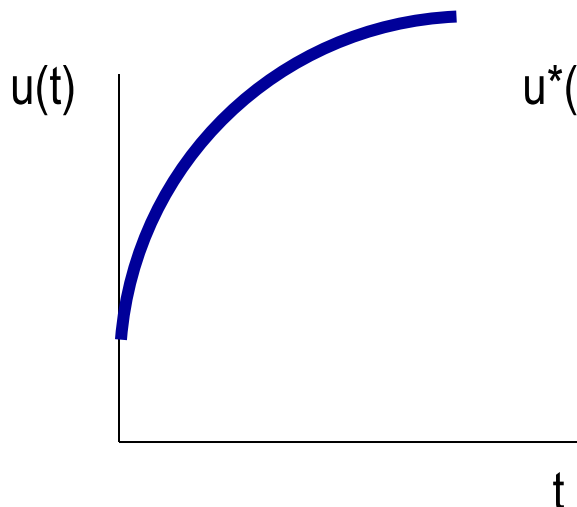
$$\delta(t - kT)$$

Tvarovací člen (tvarovač, holder)

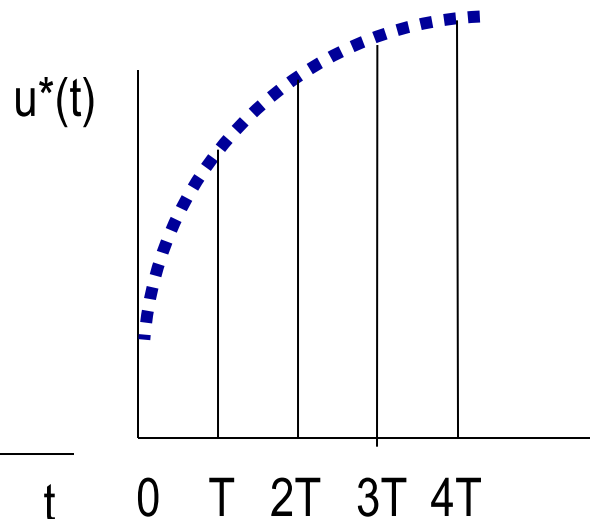
- **nultého rádu** (zero-order hold, ZOH)



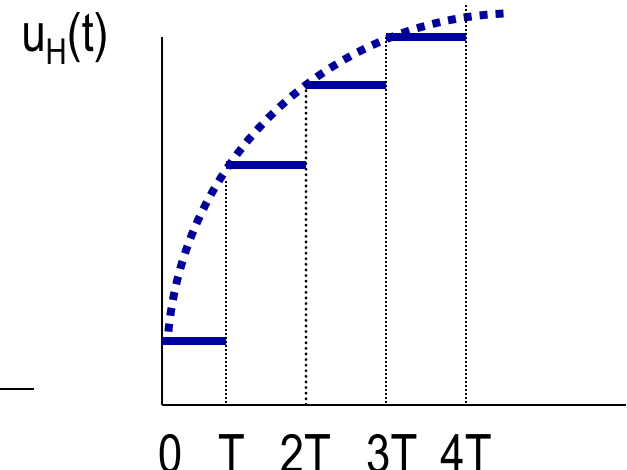
Spojité vstupná veličina



Vzorkovaná vstupná veličina



Výstup z tvarovacieho člena "0. rádu" (ZOH)



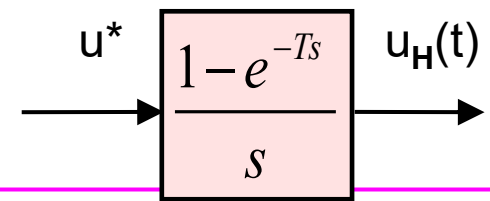
$$u_H(t) = u(kT) \quad \text{pre} \quad kT \leq t \leq kT + T$$

$$u_{H,k}(t) = u(kT)[1(t - kT) - 1(t - kT - T)]$$

$$u_H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)[1(t - kT) - 1(t - kT - T)]$$

Výstupom z tvarovacieho člena je akčná veličina (po častiach spojitá)

Laplaceov obraz výstupnej funkcie z tvarovača



$$U_H(s) = L\{u_H(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \left[\frac{1}{s} e^{-kTs} - \frac{1}{s} e^{-(k+1)Ts} \right] =$$

$$= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-kTs} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} U^*(s)$$

$$z = e^{Ts} \quad \ln z = Ts$$

$$U(z) \stackrel{!}{=} U^*(s) = Z\{u(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k} = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots$$

$U(z)$ je obraz k originálu $u(k)$ a má zmysel iba vtedy, ak existuje také z , pri ktorom súčet radu konverguje, t.j. všetky jeho členy sú ohraničené

$$|u(kT)| < c < \infty, \quad \text{pre } \forall k$$

Funkcia $U^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) z^{-k}$
transformácia,

sa nazýva **diskrétna Laplaceova**
resp. **Z-transformácia**

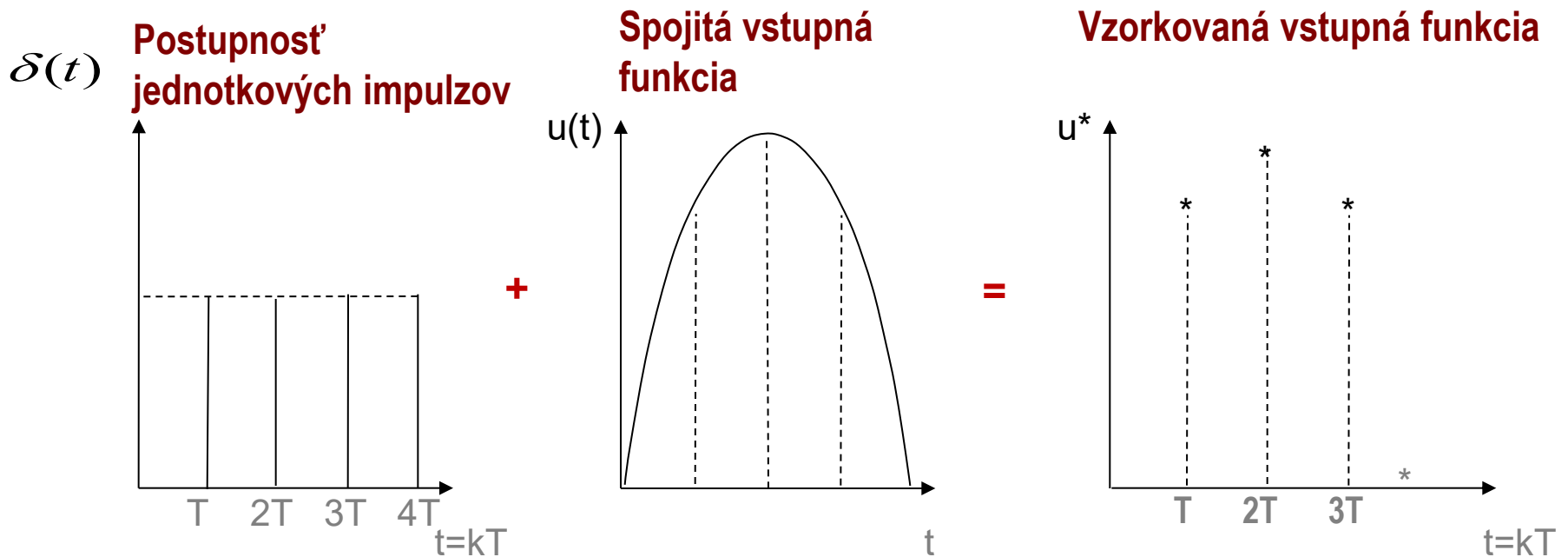
$$U(s) = L\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$

$$L\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

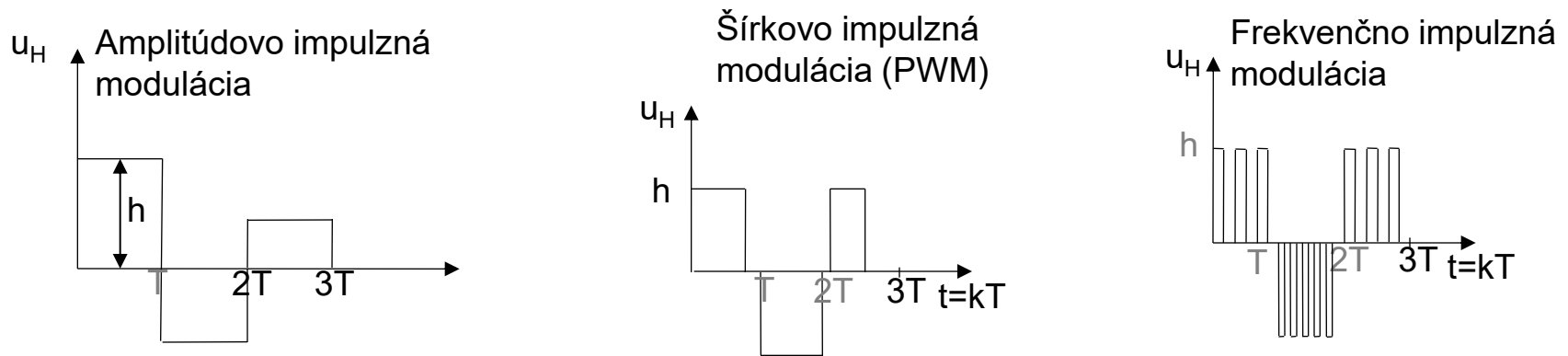
$$L\{\delta(t - kT)\} = e^{-kTs}$$

$$U^*(s) = L[u^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) e^{-kTs}$$

$$L\{u_H(t)\} = G_{TC}(s) L\{\delta(t)\} = G_{TC}(s)$$



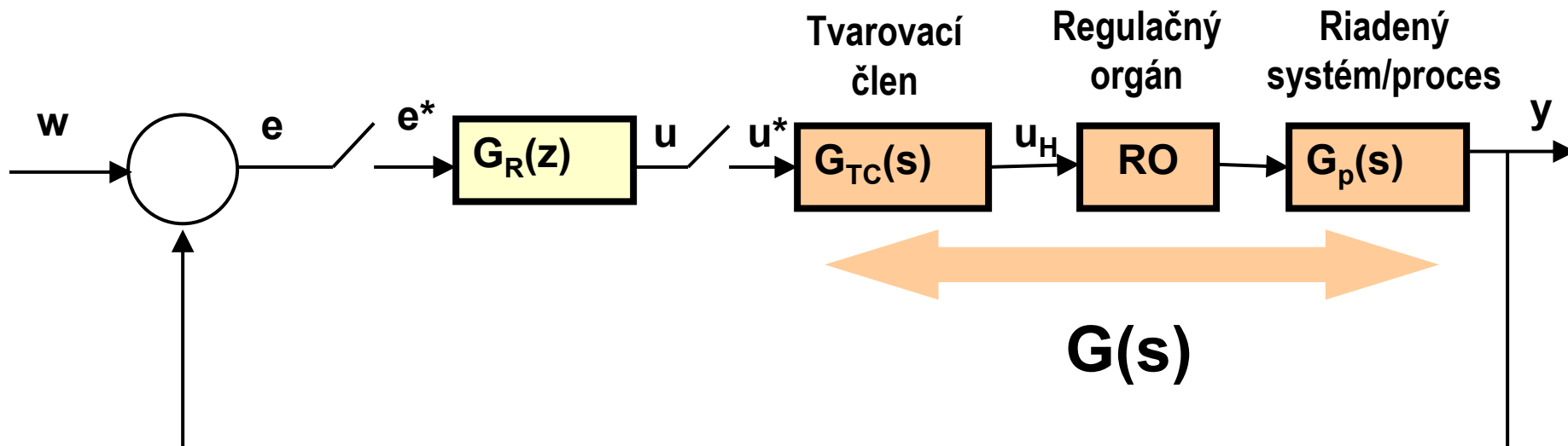
Grafické znázornenie diskkrétnej Laplaceovej transformácie



Tvarovací člen pre šírkovo-impulznú moduláciu (pulse-width modulation, PWM) má na výstupe postupnosť impulzov konštantnej výšky h , pričom šírka impulzu je premenlivá. Impulzno-šírková modulácia sa využíva vtedy, ak výstup z tvarovacieho člena pôsobí na regulačný orgán, ktorého výstupná veličina sa za určitú dobu mení konštantnou rýchlosťou a zvyšok času (v rámci periódy) je nulová (rozbeh-dobeh).

Tvarovací člen s frekvenčno-impulznou moduláciou má na výstupe postupnosť impulzov konštantnej výšky h a konštantnej šírky. Frekvencia impulzov je počas periódy vzorkovania T funkciou výšky príslušného vstupného impulzu. Frekvenčno-impulzná modulácia sa využíva napr. u elektrických pohonov (krokové motory), kde výstup z tvarovacieho člena predstavuje pri každom impulze krokový servomotor o jeden krok. Predpokladá sa, že čas prestavenia je zanedbateľný.

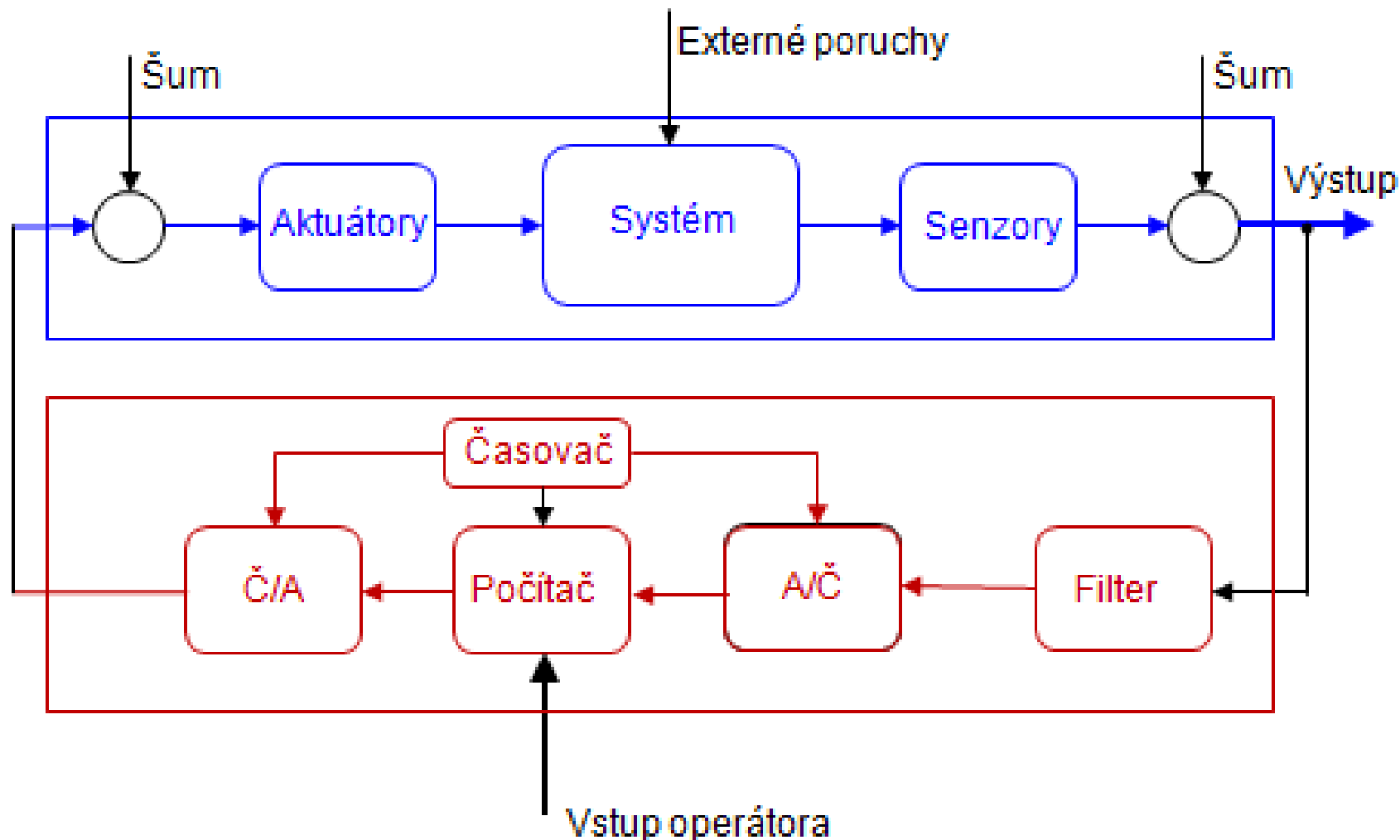
Bloková schéma diskrétnej regulácie (DDC = direct digital control)



Pozn.: $G(s)$ zahŕňa spojite pracujúce časti regulačného obvodu.

Základným nástrojom na analýzu a syntézu diskrétnych regulačných obvodov je **Z-transformácia** (analógia Laplaceovej transformácie pre spojité systémy a regulačné obvody).

Realizácia DDC



Z-transformácia

Definícia:

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = Z\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0)z^0 + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

$$|f(kT)| < c < \infty, \quad \text{pre } \forall k$$

T- čas diskretizácie, perióda vzorkovania, sampling period, sampling time

Označenie:

$$f(kT) = f(k) \quad k=0,1,2,\dots$$

$$z = e^{sT}$$

Ak s je komplexné číslo $s = \alpha + \beta i$

$$e^{(\alpha + \beta i)T} = e^{\alpha T} (\cos \beta T + i \sin \beta T)$$

Odvođenje Z- obrazov základných funkcií

(len diskrétnych funkcií!)

Z- obraz skokovej funkcie:

$$1(t) \rightarrow 1(kT)$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{f(0)}{1-q} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Z- obraz exponenciálnej funkcie

$$f(t) = e^{-\alpha t} \rightarrow f(kT) = e^{-\alpha kT}, \alpha \in R$$

$$D = e^{-\alpha T}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha kT} z^{-k} = 1 + (e^{\alpha T} z)^{-1} + (e^{\alpha T} z)^{-2} + \dots = \frac{f(0)}{1-q} = \frac{1}{1-Dz^{-1}} = \frac{z}{z-D}$$

Z-obraz periodickej funkcie

$$f(t) = \sin(\omega t)$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2j}$$
$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$f(kT) = \sin(\omega kT) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega kT} - e^{-i\omega kT}) = \frac{1}{2i}(D_1^k - D_2^k) =$$

$$D_1 = e^{i\omega T}, D_2 = e^{-i\omega T}$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{z}{z - D_1} - \frac{z}{z - D_2} \right) = \frac{1}{2j} \left(\frac{z(D_1 - D_2)}{(z - D_1)(z - D_2)} \right) =$$

$$= \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$$

Z - obraz lineárnej funkcie

$$f(t) = t \rightarrow f(kT) = kT$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (kT)z^{-k} = T \sum_{k=0}^{\infty} (k)z^{-k} = T[z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots] =$$

$$\begin{aligned} & T[z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots) + \dots + z^{-2}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots) + \\ & + z^{-3}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots) + \dots + z^{-k}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots) + \dots] = \\ & = T[(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) \frac{1}{1 - z^{-1}}] = T[z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots) \frac{1}{1 - z^{-1}}] = \\ & = T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \end{aligned}$$

Tabuľka Z-transformácie základných funkcií

$y(t) = 1$	$Y(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$
$y(t) = A$	$Y(z) = A \frac{z}{z-1} = A \frac{1}{1-z^{-1}}$
$y(t) = e^{-\alpha t} \quad (D = e^{-\alpha T})$	$Y(z) = \frac{z}{z-D}$
$y(t) = t$	$Y(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$
$y(t) = \sin \omega t$	$Y(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$y(t) = \cos \omega t$	$Y(z) = \frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

Z- obraz funkcie posunutej doprava („oneskorenej“)

$$Z\{f(k-d)\} = z^{-d} F(z), \quad d \geq 0$$

$$[q=k-d, \quad x(q)=0 \text{ for } q<0]$$

$$Z\{f(k-d)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-d) z^{-k} = z^{-d} \sum_{k=0}^{\infty} f(k-d) z^{-(k-d)} =$$

$$z^{-d} \sum_{q=-d}^{\infty} f(q) z^{-q} = z^{-d} \sum_{q=0}^{\infty} f(q) z^{-q} = z^{-d} F(z)$$

Príklad:

$$Z\{y(k-1)\} = z^{-1} Y(z), \quad Z\{y(k-2)\} = z^{-2} Y(z)$$

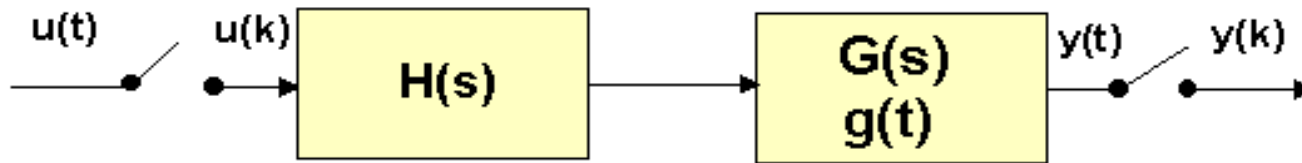
Z-obraz funkcie posunutej do'awa

$$Z\{f(k+d)\} = z^d \left[F(z) - \sum_{q=0}^{d-1} f(q)z^{-q} \right]$$

$$q = k+d$$

$$\begin{aligned} Z\{f(k+d)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k+d)z^{-k} = z^d \sum_{k=0}^{\infty} f(k+d)z^{-(k+d)} = \\ &= z^d \sum_{q=d}^{\infty} f(q)z^{-q} = z^d \left[\sum_{q=0}^{\infty} f(q)z^{-q} - \sum_{q=0}^{d-1} f(q)z^{-q} \right] = z^d \left[F(z) - \sum_{q=0}^{d-1} f(q)z^{-q} \right] \end{aligned}$$

Určovanie Z-prenosov spojitých členov regulačného obvodu (tvorovač + prenos riadeného systému)



$$\begin{aligned}
 Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) \right\} &= Z \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} - Z \left\{ \frac{G(s)}{s} e^{-Ts} \right\} = \\
 &= (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[\frac{G_P(s)}{s} \right]_{t=kT} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\frac{G(s)}{s} \rightarrow h(t) \rightarrow h(kT) \rightarrow Z\{h(kT)\} \rightarrow \frac{z-1}{z} Z\{h(kT)\}$$

$$G_P(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left[\frac{G_P(s)}{s} \right]_{t=kT} \right\}$$

Určenie periódy vzorkovania - praktické odporúčania

- Prietoky ($T_v=1s$)
- Hladiny, tlaky ($T_v=5s$)
- Teploty, zloženie zmesi, koncentrácie $T_v=(1 - 200s)$
- Z prechodovej charakteristiky riadeného procesu

$$T_v = \frac{T_{ust}}{6 \div 12}$$

$$T_v = \frac{\sum T_i}{3 \div 4}$$

- Perióda vzorkovania musí byť k-násobne kratšia než náhradná časová konštanta T_n , $k = 3 \div 6$

$$T_v = \frac{T_{sumarna}}{3 \div 6}$$

Koniec 4. prednášky