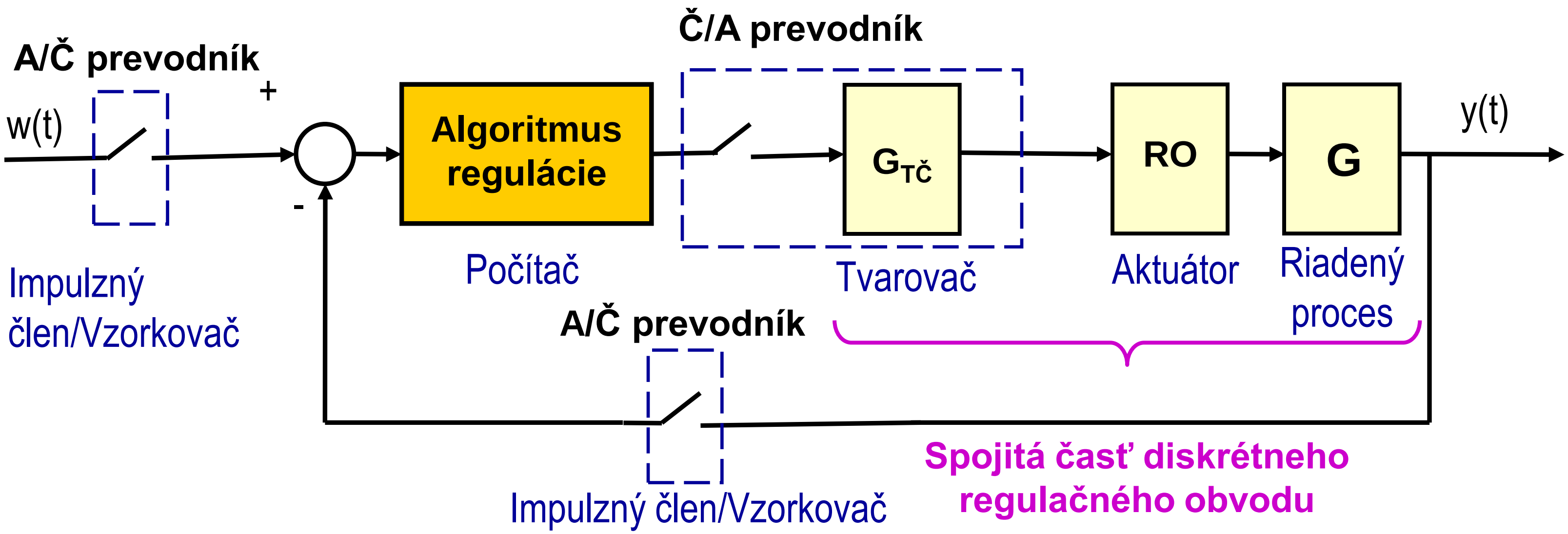
LINEÁRNE DISKRÉTNE DYNAMICKÉ SYSTÉMY

Diskrétny regulačný obvod (diskrétny v čase, číslicový, digitálny)



Z-transformácia, definícia, vlastnosti, použitie

$$F(z) = Z\{f(kT)\} = Z\{f(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0)z^{0} + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

$$k \geq 0$$

z – komplexná premenná

kT – diskrétna reálna premenná (diskrétny čas)

$f(kT)$ – diskrétny originál (Z-originál), funkcia definovaná pre $k = 0,1,2,\dots$

$F(z)$ – diskrétny obraz (Z-obraz)

Z – operátor priamej Z-transformácie

Z^{-1} – operátor spätnej transformácie

T – perióda vzorkovania

Diskrétnu časovú funkciu $f(kT)$ získame zo spojitej časovej funkcie $f(t)$ zámenou spojitého času t diskrétnym časom kT (diskretizácia v čase sa nazýva vzorkovanie)

$$t = t_k = kT; \quad k=0,1,2,\dots$$

Relatívny diskrétny čas: $k = t_k/T$, potom $f(kT) \rightarrow f_k$

Tabuľka Z-transformácie základných funkcií

$y(t)=1$	$Y(z)=\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
$y(t)=A$	$Y(z)=A\dfrac{z}{z-1}=A\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
$y(t)=e^{-\alpha t}$	$Y(z)=\dfrac{z}{z-D},\quad \left(D=e^{-\alpha T}\right)$
$y(t)=t$	$Y(z)=\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$
$y(t)=\cos\omega t$	$Y(z)=\dfrac{z^2-z\cos\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$y(t)=\sin\omega t$	$Y(z)=\dfrac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$y(t)=e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$Y(z)=\dfrac{z^2-Dz\cos\omega T}{z^2-2Dz\cos\omega T+D^2},\quad \left(D=e^{-\alpha T}\right)$
$y(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$Y(z)=\dfrac{Dz\sin\omega T}{z^2-2Dz\cos\omega T+D^2},\quad \left(D=e^{-\alpha T}\right)$

Z- obraz funkcie posunutej doprava

$$Z\{f(k-d)\} = z^{-d}F(z),\ d \geq 0$$

Z-obraz funkcie posunutej doľava

$$Z\{f(k+d)\} = z^{d}\left[F(z) - \sum_{q=0}^{d-1} f(q)z^{-q}\right]$$

Veta o začiatočnej hodnote

$$\lim_{k\to 0} f(k) = \lim_{z\to\infty}\frac{z-1}{z}F(z) = \lim_{z\to\infty}(1-z^{-1})F(z) = \lim_{z\to\infty}F(z)$$

Veta o konečnej hodnote

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)}$$

Veta o konvolúcii

Ak platí $Z\left\{f_1(k)\right\} = F_1(z)$

$Z\left\{f_2(k)\right\} = F_2(z)$

potom originál k súčinu obrazov je

$$F_1(z)F_2(z) = Z\left\{\sum_{k=0}^{r} f_1(k) f_2(r-k)\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{r} f_1(r-k) f_2(k)\right\}$$

$$F_1(z)F_2(z) = \left[f_1(0) + f_1(1)z^{-1} + f_1(2)z^{-2} + \ldots\right]\left[f_2(0) + f_2(1)z^{-1} + f_2(2)z^{-2} + \ldots\right] =$$

$$f_1(0)\, f_2(0) + \left[f_1(1)\, f_2(0) + f_1(0)\, f_2(1)\right]z^{-1} + \left[f_1(2)\, f_2(0) + f_1(1)\, f_2(1) + f_1(0)\, f_2(2)\right]z^{-2} + \mathrm{K}$$

$$\mathrm{K} + z^{-r}\sum_{k=0}^{r} f_1(k) f_2(r-k) = Z\left\{\sum_{k=0}^{r} f_1(k) f_2(r-k)\right\} = Z\left\{\sum_{k=0}^{r} f_1(r-k) f_2(k)\right\}$$

Pomocou konvolutórneho súčinu vieme potom určiť hodnoty odozvy systému na základe jeho impulznej charakteristiky (dostaneme ju vzorkovaním spojitej impulznej funkcie s periódou T).

Poznámka: konvolutórny súčin je výsledok násobenia polynómov.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \qquad \Rightarrow \qquad Y(z) = G(z)U(z)$$

Označme:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)} \quad \Rightarrow \quad Y(z)=G(z)U(z)$$

$g(k), k=0,1,2,\ldots$ diskrétne hodnoty impulznej charakteristiky

$u(k), k=0,1,2,\ldots$ diskrétne hodnoty vstupnej veličiny

Výstupná veličina (odozva) spojitého systému je určená v jednotlivých krokoch pomocou konvolutórneho súčinu

$$y(k)=\sum_{r=0}^{k} g(k-r)u(r)=\sum_{r=0}^{k} g(r)u(k-r)$$

$k=0,1,2,\ldots$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \mathrm{K} \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) & 0 & 0 & \mathrm{K} & 0 \\ g(1) & g(0) & 0 & \mathrm{K} & 0 \\ g(2) & g(1) & g(0) & \mathrm{K} & 0 \\ \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} & \mathrm{K} \\ g(k) & g(k-1) & g(k-2) & \mathrm{K} & g(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \mathrm{K} \\ u(k) \end{bmatrix}$$

diskrétna impulzná funkcia systému

$$G(z)=Z\{g(kT)\}=\sum_{k=0}^{\infty} g(m)z^{-m}=g(0)+g(1T)z^{-1}+g(2T)z^{-2}+\mathrm{K}$$

Praktický postup prepočtu Gp(s) → G(z)

A. Klasický prepočet s tvarovačom 0. rádu

B. Univerzálny prepočet s tvarovačom 0. rádu

V oboch prípadoch je najprácnejšou časťou postupu určenie prechodovej funkcie

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \rightarrow h(t)$$

Spätnú Laplaceovu transformáciu môžeme urobiť buď

- rozkladom na parciálne zlomky alebo
- použitím Heavisideovho rozvojového vzorca (nazýva sa aj Veta o rezíduách)

⇩

$$h(t) = \sum_i \frac{1}{(r_i - 1)!} \lim_{s \to s_i} \frac{d^{r_i - 1}}{ds^{r_i - 1}} [(s - s_i)^{r_i} H(s) e^{st}]$$

s_i , i=1,...,n – póly $h(t)$
r_i – násobnosť i-teho pólu

A. Klasický prepočet s tvarovačom 0. rádu

$$G_P(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{ L^{-1}\left[\frac{G_P(s)}{s} \right]_{t=kT} \right\}$$

Postup:

1. určenie prechodovej funkcie $h(t) = L^{-1}\left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$
2. formálna zámena $h(t) \rightarrow h(kT)$
3. určenie Z- obrazov čiastkových členov $h(kT) \rightarrow H(z)$
4. vynásobenie výsledného výrazu výrazom $G(z) = \frac{z-1}{z} H(z)$

B. Univerzálny prepočet s tvarovačom 0. rádu

Výsledkom bude prenosová funkcia v záporných mocninách $G(z^{-1})$

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \mathrm{K} + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a}}$$

Postup:

1. určenie prechodovej funkcie

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

2. určenie koeficientov menovateľa diskrétneho prenosu $A(z)$ z pólov spojitej prenosovej funkcie $z_i = e^{s_i T}$

$$A(z) = (z-1)^r \prod_{i=r+1}^{p} (z - z_i) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

$$A(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^{-n}$$

3. určenie koeficientov čitateľa diskrétneho prenosu $B(z)$

$$b_k = \bar{h}(k) + a_1\bar{h}(k-1) + a_2\bar{h}(k-2) + \mathrm{K} + a_k\bar{h}(0), \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

$$\bar{h}(k) = \bar{h}(kT) = h(kT) - h[T(k-1)] \qquad h(0) = 0$$

Z výslednej prenosovej funkcie $G(z^{-1})$ vieme určiť model systému v tvare diferenčnej rovnice (s využitím Z-obrazu funkcie posunutej doprava)

$$G(z^{-1}) = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \mathrm{K} + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a}}$$

$$\downarrow$$

$$Y(z^{-1})[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{n_a} z^{-n_a}] = U(z^{-1})[b_1 z^{-1} + \mathrm{K} + b_{n_b} z^{-n_b}]$$

$$Y(z^{-1})[1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\ldots+a_{n_a}z^{-n_a}]=U(z^{-1})[b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_{n_b}z^{-n_b}]$$

$$Y(z)=-a_1z^{-1}Y(z)-a_2z^{-2}Y(z)-\ldots-a_{n_a}z^{-n_a}Y(z)+b_1z^{-1}U(z)+b_2z^{-2}U(z)+\ldots+b_{n_b}z^{-n_b}U(z)$$

Použijeme vzťah pre Z – obraz diskrétnej funkcie F(z) posunutej doprava o i krokov: ***$Z\{f(k-i)\} = z^{-i}F(z)$***

$$Z\{y(k)\}=Y(z),\ Z\{y(k-1)\}=z^{-1}Y(z),\quad Z\{y(k-2)\}=z^{-2}Y(z),\ Z\{y(k-n_a)\}=z^{-n_a}Y(z)$$

$$Z\{u(k)\}=U(z),\ Z\{u(k-1)\}=z^{-1}U(z),\quad Z\{u(k-2)\}=z^{-2}U(z),\ Z\{u(k-n_a)\}=z^{-n_b}U(z)$$

a získame **diferenčnú rovnicu**

$$\boxed{y(k)=-a_1y(k-1)-a_2y(k-2)-\ldots-a_ny(k-n_a)+b_1u(k-1)-b_2u(k-2)-\ldots-b_mu(k-n_b)}$$

Diskrétny dynamický I/O model môže byť v tvare

1. Diferenčnej rovnice

2. Prenosovej funkcie v z-oblasti

Príklady na prepočet G(s) → G(z)

$$G(s)=\frac{5}{(2s+1)(3s+1)},\ T=1$$ jednoduché reálne póly

$$G(s)=\frac{2}{(4s+1)^2},\ T=1$$ násobné reálne póly

$$G(s)=\frac{1}{(s_2+2s+2)},\ T=0.5$$ komplexne združené póly

Riešenie príkladu 3 (univerzálny prepočet G(s) → G(z), komplexne združené póly)

$$G(s)=\frac{1}{(s_2+2s+2)}, \quad T=0.5$$

1. Určenie prechodovej funkcie + jej diskretizácia

$$h(t)=0.5-0.5e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

$$h(kT)=0.5-0.5e^{-kT}(\cos kT+\sin kT)$$

2. Výpočet pólov spojitej prenosovej funkcie a ich prepočet na póly diskrétnej prenosovej funkcie

$$s_{1,2}=-1\pm i$$

$$z_1=e^{s_1T}=e^{(-1+i)T}$$

$$z_2=e^{s_2T}=e^{(-1-i)T}$$

3. Výpočet koeficientov polynómu $A(z)$ (menovateľ $G(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$) + jeho vyjadrenie v záporných mocninách

$$A(z)=(z-z_1)(z-z_2)=z^2-2e^{-T}\cos Tz+e^{-2T}=z^2-1.0645z+0.3679$$

$$A(z)=1-1.0645z^{-1}+0.3679z^{-2}$$

4. Výpočet koeficientov polynómu $B(z)$ (čitateľ $G(z)$)

$$\bar{h}(0)=0$$

$$\bar{h}(1)=h(1T)-h(0T)=h(1*0.5)-h(0*0.5)=h(0.5)-h(0)=0.0885$$

$$\bar{h}(2)=h(2T)-h(1T)=h(2*0.5)-h(1*0.5)=0.1573$$

$$b_0=\bar{h}(0)=0$$

$$b_1=\bar{h}(1)+a_1\bar{h}(0)=0.0885$$

$$b_2=\bar{h}(2)+a_1\bar{h}(1)+a_2\bar{h}(0)=0.1573-1.0645*0.0885+0=0.0631$$

Výsledok dostaneme v záporných mocninách „z“ a vyjadríme diferenčnú rovnicu systému

$$G(z)=\frac{0.0885z^{-1}+0.0631z^{-2}}{1-1.0645z^{-1}+0.3679z^{-2}}$$

$$y(k)=1.0645y(k-1)-0.3679y(k-2)+0.0885u(k-1)+0.0631u(k-2)$$

Poznámky k prepočtu G(s) → G(z)

Výpočet zosilnenia (t.j. “kde sa ustáli prechodová charakteristika)”

Spojitá prenosová funkcia:

$$\boxed{G(s)=\frac{1}{(s_2+2s+2)},\ T=0.5} \Rightarrow K=0.5$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=\lim_{s\to 0} sH(s)=\lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0} G(s)$$

Zosilnenie spojitého prenosu vypočítame tak, že v prenosovej funkcii G(s) dosadíme s=0.

Diskrétna prenosová funkcia:

$$\boxed{G(z)=\frac{0.08847z^{-1}+0.06319z^{-2}}{1-1.065z^{-1}+0.3679z^{-2}}} \Rightarrow K=\frac{0.1517}{0.3033}=0.5$$

$$\lim_{k\to\infty} h(kT)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}H(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}G(z)\frac{z}{z-1}=\lim_{z\to 1} G(z)$$

Zosilnenie diskrétneho prenosu vypočítame tak, že v prenosovej funkcii G(z) dosadíme z=1.

Matlab:

```
>> gz=c2d(g,0.5)     % prepočet g na gz z periódou vzorkovania T=0.5
>> [num,den]=tfdata(gz,'v')     % získanie polynómov čitateľa a menovateľa
>> K=sum(num)/sum(den)      % súčet koeficientov čitateľa/súčet koeficientov menovateľa
>> K=dcgain(gz)      % priamy spôsob výpočtu zosilnenia
```

Aproximatívny (približný) prepočet G(s)→G(z)

Princíp: **Náhrada spojitých funkcií na základe „rovnosti plôch"**
(najčastejšie sa nahradí spojitá funkcia obdĺžnikmi alebo lichobežníkmi.
Pretože sa jedná o náhradu "plochy", predpokladajme že v spojitej oblasti
je medzi **y** a **u** integrálny vzťah:

$$y(t) = \int_0^t u(t)dt$$

Laplaceov obraz

$$Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

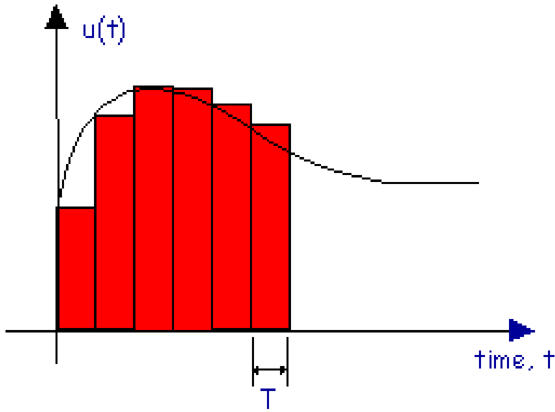
Obdĺžniková náhrada A (forward rectangle)

Ak sa spojitá integrácia nahradí obdĺžnikmi/lichobežníkmi s malou periódou vzorkovania, potom v diskrétnom tvare sa integrál nahradí sumou:
(T je interval vzorkovania).

$$y(k) \approx T\sum_{i=0}^{k-1} u(i)$$

Pre vzorky posunuté o jeden krok (k-1):

$$y(k-1) \approx T\sum_{i=0}^{k-2} u(i)$$



Odčítaním výrazov *y(k)-y(k-1)* získame rekurentný vzťah:

$$y(k) \approx T\sum_{i=0}^{k-1} u(i)$$

$$-$$

$$y(k-1) \approx T\sum_{i=0}^{k-2} u(i)$$

$$\boxed{y(k) - y(k-1) \approx Tu(k-1)}$$

Z{...}

$$Y(z)(1-z^{-1}) \approx TU(z)z^{-1}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{s}U(s)}$$

Pre malé periódy vzorkovania môžeme pripustiť rovnosť výrazov:

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})} = \frac{T}{z-1}}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \approx \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{z-1}$$

$$\Downarrow$$

Obdĺžniková náhrada (forward rectangle)

$$\boxed{s = \frac{z-1}{T}}$$

$$\boxed{G(s) \xrightarrow{s=\frac{z-1}{T}} G(z)}$$

Obdĺžniková náhrada B (backward rectangle)

$$y(k) \approx T\sum_{i=1}^{k} u(i)$$

$-$

$$y(k-1) \approx T\sum_{i=0}^{k-1} u(i)$$

$$y(k) - y(k-1) \approx Tu(k)$$

$Z\{\ldots\}$

$$Y(z)(1-z^{-1}) \approx TU(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{(1-z^{-1})} = \frac{Tz}{z-1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

Pre malé periódy vzorkovania môžeme pripustiť rovnosť výrazov:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \approx \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Tz}{z-1}$$

Obdĺžniková náhrada (backward rectangle)

$$s = \frac{z-1}{Tz}$$

$$G(s) \xrightarrow{s=\frac{z-1}{Tz}} G(z)$$

Lichobežníková náhrada (Tustinov vzťah)

Presnejší výpočet diskrétnej prenosovej funkcie získame, ak spojitú integráciu nahradíme pre malé periódy vzorkovania lichobežníkmi:

$$y(k) \approx T\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\left[u(i)+u(i-1)\right]$$

$$y(k-1) \approx T\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2}\left[u(i)+u(i-1)\right]$$

$$y(k)-y(k-1) \approx \frac{T}{2}\left[u(k)+u(k-1)\right]$$

Z{...}

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)=\frac{T}{2}(U(z)+z^{-1}U(z)) \quad \Rightarrow \quad (1-z^{-1})Y(z)=\frac{T}{2}(1+z^{-1})U(z)$$

Pre malé periódy vzorkovania:

$$Y(s)=\frac{1}{s}U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{s}\approx\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

Lichobežníková náhrada (Tustinov vzťah):

$$s \rightarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

$$G(s) \xrightarrow{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} G(z)$$

Matlab:

sysd = c2d(sysc, Ts,’method’); % Ts = sampling period in seconds

'zoh' - zero-order hold (tvarovač nultého rádu)

'foh' - lineárna interpolácia vstupov (tvarovač 1. rádu)

'impulse' - prepočet bez tvarovača na vstupe do systému

'tustin' – Tustinova (bilineárna) approximácia.

Aproximatívne určovanie diskrétnych modelov - zhrnutie

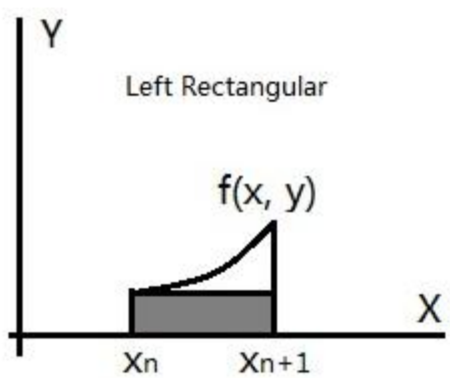
Princíp:

Náhrada spojitej integrácie

- obdĺžnikmi so stranami T a u_i
- lichobežníkmi so základňami u_i a u_{i-1} a výškou T

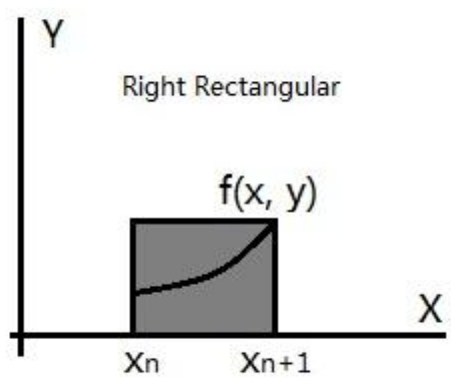
kde T je interval vzorkovania.

Forward rectangle



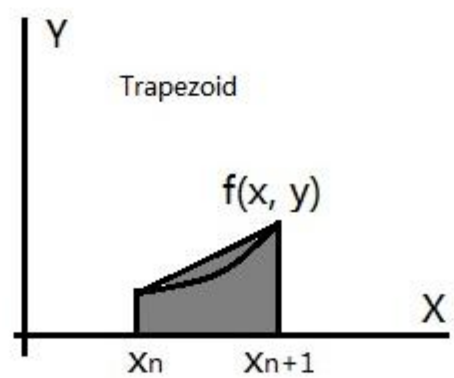
$$s = \frac{1}{T}(z-1)$$

Backward rectangle



$$s = \frac{1}{Tz}(z-1)$$

Trapezoid (Tustin)

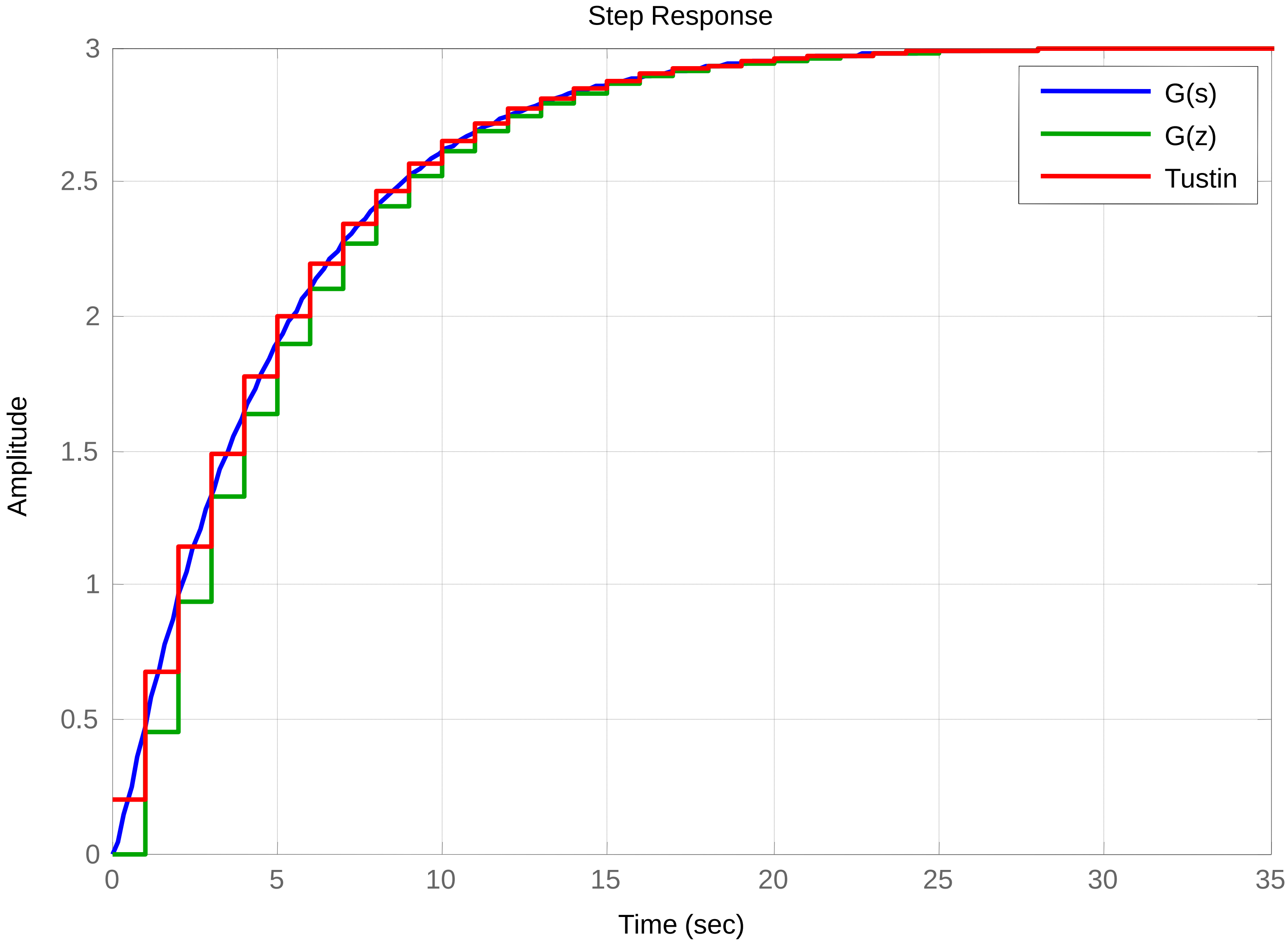


$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Porovnanie diskrétnych modelov spojitej prenosovej funkcie G(s)

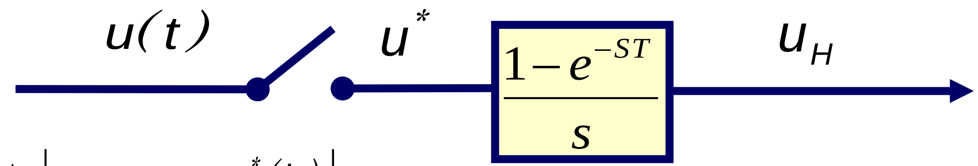
G(z) – presný prepočet s tvarovačom 0. rádu (klasicky alebo univerzálnou metódou)

Tustin – aproximatívny prepočet lichobežníkovou náhradou

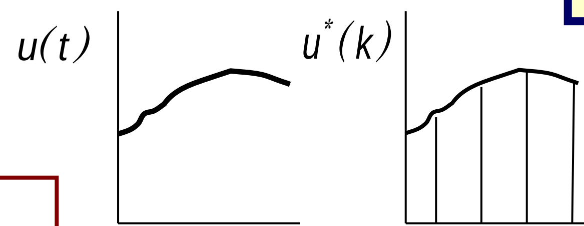


Výber periódy vzorkovania

Fourierova transformácia pri spracovaní signálov slúži na transformáciu z časovej do frekvenčnej oblasti. Je vyjadrením časovo závislého signálu pomocou harmonických signálov.



Postupnosť Diracových impulzov je periodická funkcia, jej Fourierova transformácia je:



$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_v m t}}$$

$$u^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(t)\delta(t-kT), \quad u(t) = 0 \, pre \, t < 0$$

Výstup zo vzorkovača:
+ Laplaceova transformácia vzorkovaného signálu

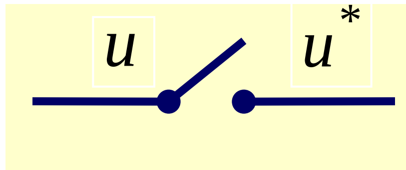
$$U^*(s) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_v m t} \right] e^{-st} dt$$

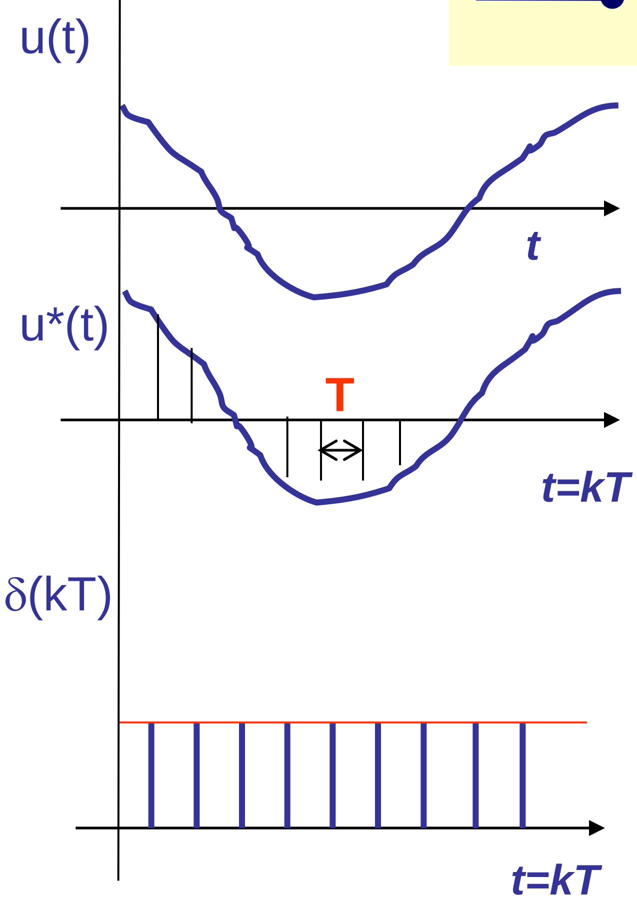
$$U^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-(s+j\omega_v m t)} \, dt$$

ω_v je frekvencia vzorkovania

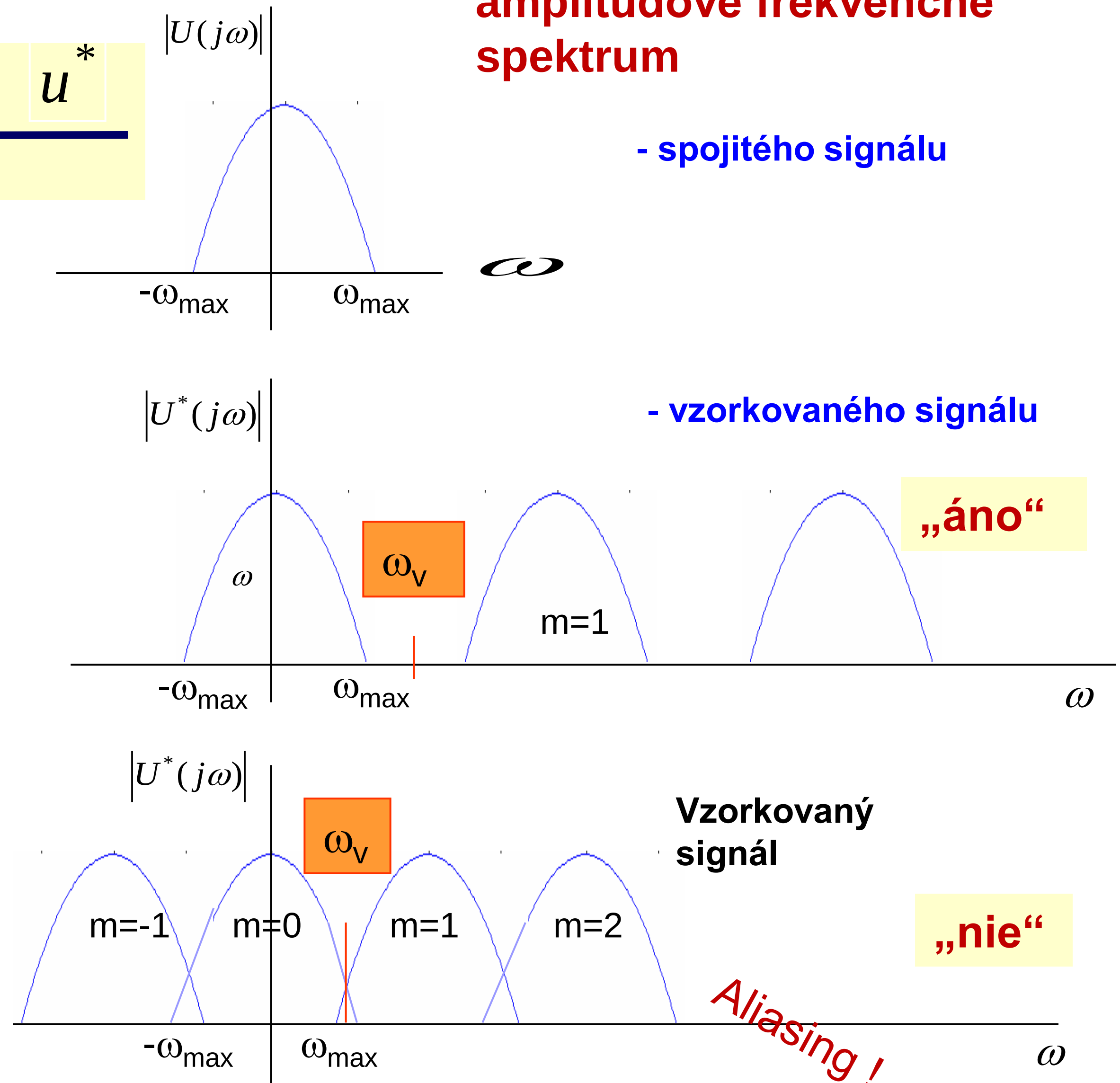
$$U^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} U(s + j\omega_v m)$$

Časová oblasť





Frekvenčná oblasť – amplitúdové frekvenčné spektrum



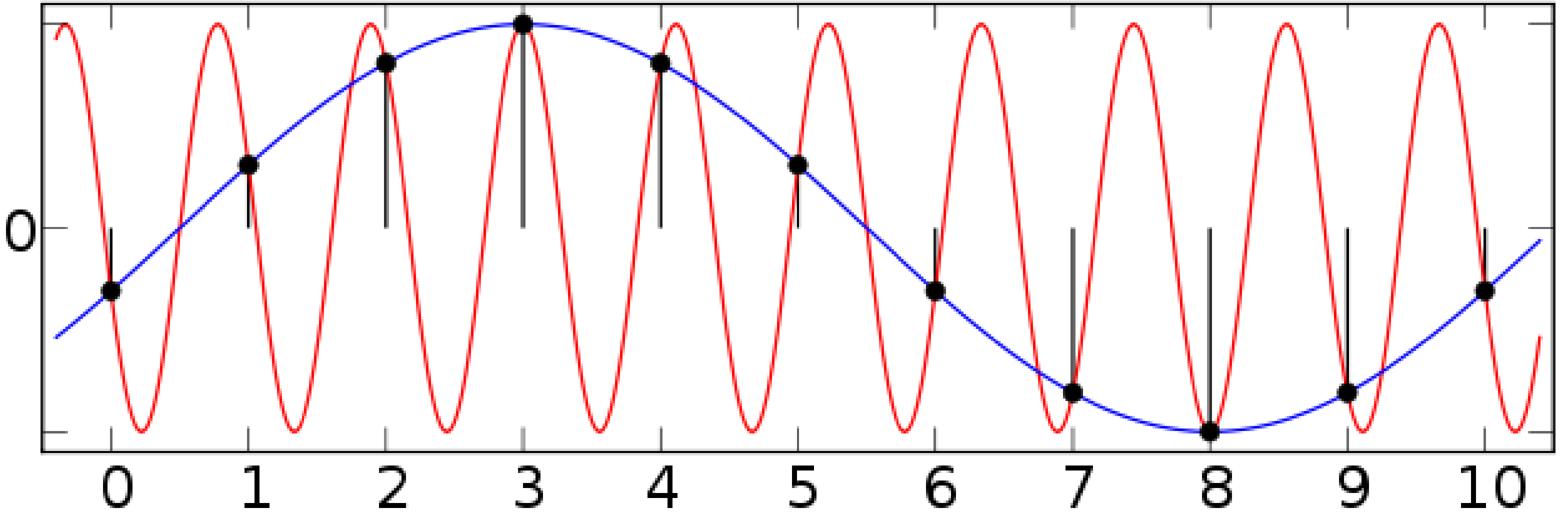
$$u(t) \rightarrow |U(j\omega)|$$

Amplitúdové frekvenčné spektrum spojitého signálu

$$u^*(t) \rightarrow \left| \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} U(j\omega + jm\omega_v) \right|$$

Amplitúdové frekvenčné spektrum vzorkovaného signálu

Ilustrácia nesprávnej voľby periódy vzorkovania v časovej oblasti – vzniká tzv. *aliasing*



(pôvodný vf signál je interpretovaný ako nf v dôsledku zle vybratej Tv)

$$u(t) \rightarrow |U(j\omega|$$

$$u^*(t) \rightarrow \left| \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} U(j\omega + jm\omega_v) \right|$$

Pripomeňme, že platí

$$\omega_v T_v = 2\pi$$

$$\omega_v = \frac{2\pi}{T_v}$$

Dôsledok:

Ak vzorkovacia frekvencia $\omega_v > 2\omega_{\max}$, cez vzorkovač sa neskreslene prenesie celé základné frekvenčné pásmo spojitého signálu.

(odporúčaná hodnota je voliť dokonca $\omega_v > 10\omega_{\max}$!)

Ak $\omega_v < 2\omega_{\max}$, cez vzorkovač sa neprenesie ani základné frekvenčné pásmo v pôvodnom tvare, k amplitúdam najvyšších frekvencií základného pásma sa pridávajú amplitúdy z nasledujúceho pásma – výsledkom je skreslený tvar výstupného signálu zo vzorkovača (tento jav sa nazýva „aliasing“).

„Hraničná“ frekvencia $\omega_N = \dfrac{\omega_v}{2} = \dfrac{\pi}{T_v}$ sa nazýva *Nyquistova frekvencia*.

Dôsledky:

• Pri amplitúdovej modulácii vznikajú vedľajšie frekvenčné spektrá, ktoré sú celočíselnými násobkami frekvencie vzorkovania (m=0,1,...)

• V diskrétnom regulačnom obvode pri vzorkovaní regulačnej odchýlky môžu vzniknúť nežiaduce účinky - utlmí ich tvarovací člen (TČ) a regulovaný systém

•TČ a regulovaný objekt sú nízkofrekvenčné filtre, spektrum referenčnej premennej w sa musí rovnať spektru výstupu y

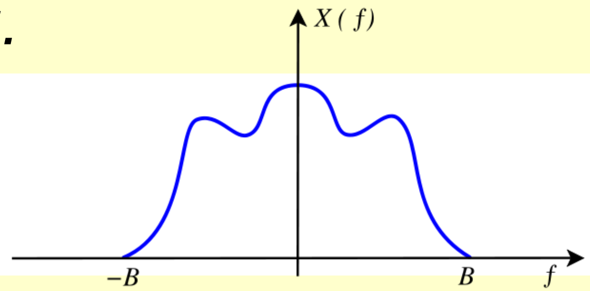
• ω_{max} v signáli musí byť menšia než ω_N

• Praktický postup: volíme ω_{max} tak aby frekvenčný obraz $E(j\omega)$ neobsahoval zložky $\omega > \omega_{max}$. Frekvencia vzorkovania je potom $\omega_v > 2\omega_{max}$

Shannon – Nyquist - Koteľnikovova veta
(Sampling Theorem)

Ak pre Fourierov obraz $F(j\omega)$ signálu $f(t)$ platí, že $F(j\omega)=0$ pre $\omega \geq \omega_{\max}$, potom signál $f(t)$ je jednoznačne určený z diskrétnych vzoriek $f(kT),\ k = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ kde $T_v \leq \dfrac{\pi}{\omega_{\max}}$, a teda $\omega_v \geq 2\omega_{\max}$

Splnenie podmienky $\omega_v \geq 2\omega_{\max}$ tak zabezpečuje, že frekvenčné spektrá sa navzájom neprekrývajú.



Iná formulácia:

Aby sme úplne poznali signál, ktorého najvyššia frekvencia je ω_{max}, postačuje merať jeho hodnoty v časových okamihoch vzdialených od seba o pol periódy kmitu najvyššej frekvencie

$$T = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega_{\max}}$$

Koniec 5. prednášky