Cvičenie 5

Z-transformácia, prepočet spojitých častí regulačného obvodu na diskrétnu prenosovú funkciu „$G_P(s) \to G_P(z)$"

Cieľ cvičenia:
1. Z-transformácia – definícia, základné vlastnosti, odvodenie Z-obrazov základných funkcií
2. Určenie z-prenosových funkcií spojitých častí regulačného obvodu „$G_P(s) \to G_P(z)$"

Úlohy

1. Z-transformácia

Definícia: $Z\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$

Príklady: Určte Z obraz

- impulzu o veľkosti A v nultom a
  $y_0 = A,\ y_1 = 0, \quad Y(z) = A$
- prvom posunutom intervale
  $Y(z) = 0.z^0 + A.z^{-1} + 0.z^{-2} + \ldots = Az^{-1}$
- exponenciálnej funkcie $y(t) = e^{-2t}$
  stupňová funkcia $(t = kT)$: $y(kT) = e^{-2kT}$

$$Z\{y_k\} = Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kT} z^{-k} = 1 + e^{-2T} z^{-1} + e^{-4T} z^{-2} + \ldots = \frac{a_0}{1-q} =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2T} z^{-1}} = \frac{1}{1 - Dz^{-1}} = \frac{z}{z - D} = \frac{z}{z - e^{-2T}}$$

- harmonickej funkcie $y(t) = \cos\omega t$

$$t = kT:\ Z\{\cos\omega t\} = Z\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\} = Z\left\{\frac{e^{j\omega kT} + e^{-j\omega kT}}{2}\right\} = \ D_1 = e^{j\omega T},\ D_2 = e^{-j\omega T}$$

$$= Z\left\{\frac{1}{2}\left(D_1^k + D_2^k\right)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z - D_1} + \frac{z}{z - D_2}\right) = \frac{z(z - D_2) + z(z - D_1)}{2(z - D_1)(z - D_2)} =$$

$$= \frac{2z^2 - z(D_1 + D_2)}{2\left[z^2 - (D_1 + D_2)z + D_1 D_2\right]} = \frac{2z^2 - \frac{2z(D_1 + D_2)}{2}}{2\left[z^2 - 2z\frac{D_1 + D_2}{2} + D_1 D_2\right]} = \frac{z^2 - z\cos\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$$

- $\sin\omega t = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ analogicky ako pre funkciu $\cos\omega t$ získame Z obraz: $\dfrac{z\sin\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$

Tabuľka Z-transformácií základných funkcií

$y(t)=1$	$Y(z)=\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z^{-1}}$
$y(t)=A$	$Y(z)=A\frac{z}{z-1}=A\frac{1}{1-z^{-1}}$
$y(t)=e^{-\alpha t}$	$Y(z)=\frac{z}{z-D},\ \left(D=e^{-\alpha T}\right)$
$y(t)=t$	$Y(z)=\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$y(t)=\cos\omega t$	$Y(z)=\frac{z^2-z\cos\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$y(t)=\sin\omega t$	$Y(z)=\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
$y(t)=e^{-\alpha t}\cos\omega t$	$Y(z)=\frac{z^2-Dz\cos\omega T}{z^2-2Dz\cos\omega T+D^2},\ \left(D=e^{-\alpha T}\right)$
$y(t)=e^{-\alpha t}\sin\omega t$	$Y(z)=\frac{Dz\sin\omega T}{z^2-2Dz\cos\omega T+D^2},\ \left(D=e^{-\alpha T}\right)$

2. Prepočet spojitej prenosovej funkcie na diskrétnu prenosovú funkciu s tvarovačom 0. rádu

výpočet prechodovej funkcie $g(t)=L^{-1}\left\{\frac{G_P(s)}{s}\right\}$

$$g(t)\rightarrow g(kT)\rightarrow Z\{g(kT)\}$$

$$G_P(z)=\frac{z-1}{z}Z\left\{L^{-1}\left[\frac{G_P(s)}{s}\right]_{t=kT}\right\}$$

Príklady – výpočet diskrétnej prenosovej funkcie pre základné typy prenosových funkcií:

1. Prenosová funkcia s jednoduchými reálnymi pólmi

$G_P(s)=\frac{5}{(2s+1)(3s+1)}$ s TČ 0. rádu (T=1)

2. Prenosová funkcia s násobným reálnym pólom

$G_P(s)=\frac{2}{(4s+1)^2}$

3. Prenosová funkcia s komplexne združenými pólmi

$G_P(s)=\frac{b}{(s+a)^2+b^2}=\frac{1}{[s-(-a+jb)][s-(-a-jb)]}$ (T=1)

Voľba periódy vzorkovania (T)

$$G_P(s) = \frac{B(s)}{A(s)} e^{-Ds} = G_{PO}(s) e^{-Ds}$$

$$G_P(z) = G_{PO}(z) z^{-d} \text{ kde } d = \frac{D}{T} \overset{!}{=} 1, 2 \text{ (celé číslo)}$$

Praktické odporúčania:

$$T = \frac{T_{ust}}{6 \div 12}$$ - pre proporcionálne (statické) systémy

$$T = \frac{\sum T_i}{3 \div 4}$$

$$T = \frac{T_{sumarna}}{3 \div 6}$$

MATLAB

c2d – prepočet spojitého systému na diskrétny
sysc – spojitý systém
sysd – diskrétny systém
Ts – perióda vzorkovania

sysd = c2d(sysc, Ts, method)

Užitočné príkazy:

*[numz, denz]=**tfdata**(sysd,'v')* z objektu sysd získame čitateľa a menovateľa
alebo priamo prepočet urobíme pre čitateľa a menovateľa:
*[numz, denz]= **c2dm**(nums,dens, Ts, method)*

dstep – vykreslenie diskrétnej prechodovej charakteristiky (na horizontálnej osi sú vynesené vzorky, nie čas!)
dstep(numz, denz)
Vykresľuje sa z údajov diskrétnej prenosovej funkcie
Poznámka: Ak chcete porovnať diskrétnu a prechodovú charakteristiku, použijete príkaz *step*
Napr.: *step (sys, sysd)*